

# Algebra

Yury Holubeu \*

November 23, 2025

This note is not intended for distribution. Algebra is discussed in detail. The note has solved problems and summary of special topics. Readers who have opened this note for the first time are highly recommended to read the preface.

## Contents

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Preface</b>                                                    | <b>13</b> |
| <b>I — Typical Algebra in a Nutshell —</b>                        | <b>14</b> |
| <b>1 Main algebraic constructions in a nutshell</b>               | <b>14</b> |
| 1.1 Main definitions                                              | 14        |
| 1.2 Main algebraic transformations and analysis of algebras       | 16        |
| 1.3 $SU(2)$ , $\mathfrak{su}(2)$ and $SO(3)$ , $\mathfrak{so}(3)$ | 18        |
| 1.4 $SU(3)$ , $\mathfrak{su}(3)$                                  | 21        |
| 1.5 Lie algebra methods in a nutshell                             | 26        |
| 1.5.1 Lie algebras, Lie groups, bases, Killing form               | 26        |
| 1.5.2 Root and weight lattices, Cartan-Weyl basis                 | 31        |
| 1.5.3 Cartan matrix, Cartan classification, Dynkin diagrams       | 44        |
| 1.5.4 Symmetries of roots, Weyl group, Coxeter plane              | 50        |
| 1.5.5 Real, compact, normal forms, complexification (???)         | 51        |
| 1.6 Comparison and tables of Lie algebras                         | 54        |
| 1.7 Group theory fundamentals in a nutshell                       | 60        |
| 1.7.1 Cosets, factor groups, homomorphisms                        | 60        |
| 1.7.2 Solvable, nilpotent, simple groups and algebras             | 62        |
| 1.7.3 Finitely generated abelian groups                           | 63        |
| 1.7.4 Representations Concept and Types                           | 66        |
| 1.7.5 Unitarity, reducibility, Maschke's theorem                  | 69        |
| 1.7.6 Finite rotation groups, polyhedra, $SO(3)$                  | 70        |
| 1.7.7 Characters, Schur's lemma, degrees, orthogonality           | 71        |
| 1.7.8 Tensor product of representations                           | 76        |
| 1.8 Linear algebra fundamentals in a nutshell                     | 76        |
| 1.8.1 Matrices: Basic properties and definitions                  | 76        |
| 1.8.2 Linear operators: Basic properties and definitions          | 76        |
| 1.9 Main specific constructions for applications                  | 76        |
| 1.9.1 Tensor Methods, tensorial representations                   | 76        |
| 1.9.2 Young tableaux, symmetric group (??)                        | 77        |
| 1.9.3 Casimir operators                                           | 79        |
| 1.9.4 Complex numbers basics                                      | 80        |
| 1.9.5 Quaternions basics                                          | 80        |
| 1.9.6 Spinors, $\gamma$ -matrices for field theory                | 81        |
| 1.9.7 Clifford algebras, Spin groups, twistors                    | 82        |
| 1.10 Algebras in physics: main ideas examples                     | 85        |
| 1.10.1 Symmetries and conservation laws from algebra (!?)         | 85        |
| 1.10.2 Hydrogen, oscillator, (!!)                                 | 86        |
| 1.10.3 Algebra in quantum mechanics, molecules                    | 92        |
| 1.10.4 Poincare groups, relativistic fields and QFT (!?)          | 93        |
| 1.10.5 Algebra in particle physics, quarks and Standard Model     | 94        |
| 1.10.6 Algebra in special field theories (!!!!!)                  | 97        |
| 1.10.7 Algebra in mechanics                                       | 97        |

---

\*<https://yuriholubeu.github.io/>, [yuri.holubev@gmail.com](mailto:yuri.holubev@gmail.com)

|           |                                                              |            |
|-----------|--------------------------------------------------------------|------------|
| <b>II</b> | <b>Algebra Fundamentals</b>                                  | <b>99</b>  |
| <b>2</b>  | <b>Algebra Fundamentals</b>                                  | <b>99</b>  |
| 2.1       | Fundamentals of groups and algebra . . . . .                 | 99         |
| 2.1.1     | Basics . . . . .                                             | 99         |
| 2.1.2     | Cosets by a subgroup . . . . .                               | 105        |
| 2.1.3     | Group actions on sets . . . . .                              | 108        |
| 2.1.4     | Factor groups and homomorphisms (???) . . . . .              | 114        |
| 2.2       | Structure of groups . . . . .                                | 126        |
| 2.2.1     | Solvable and simple groups . . . . .                         | 126        |
| 2.2.2     | Sylow theorems . . . . .                                     | 130        |
| 2.2.3     | Finitely generated abelian groups . . . . .                  | 135        |
| 2.2.4     | Linear Lie groups . . . . .                                  | 147        |
| 2.3       | Fundamentals of group theory by Lang . . . . .               | 153        |
| 2.3.1     | Free groups . . . . .                                        | 153        |
| 2.3.2     | Normal subgroups . . . . .                                   | 153        |
| 2.3.3     | Group action on a set . . . . .                              | 153        |
| 2.3.4     | Sylow subgroups . . . . .                                    | 153        |
| 2.3.5     | Categories and functors . . . . .                            | 154        |
| 2.3.6     | Free groups . . . . .                                        | 154        |
| 2.3.7     | Direct sums and free abelian groups . . . . .                | 154        |
| 2.3.8     | Finitely generated abelian groups . . . . .                  | 154        |
| 2.3.9     | Dual group . . . . .                                         | 154        |
| 2.4       | Elements of representation theory . . . . .                  | 154        |
| 2.4.1     | Definitions and examples of linear representations . . . . . | 157        |
| 2.4.2     | Unitarity and reducibility . . . . .                         | 165        |
| 2.4.3     | Finite rotation groups . . . . .                             | 170        |
| 2.4.4     | Characters of linear representations . . . . .               | 174        |
| 2.4.5     | Irreducible representations of finite groups . . . . .       | 181        |
| 2.4.6     | Representations of $SU(2)$ and $SO(3)$ . . . . .             | 188        |
| 2.4.7     | Tensor product of representations . . . . .                  | 191        |
| 2.5       | Rings, algebras, modules . . . . .                           | 199        |
| 2.5.1     | Ring-theoretic constructions . . . . .                       | 199        |
| 2.5.2     | Selected results on rings . . . . .                          | 205        |
| 2.5.3     | Modules . . . . .                                            | 212        |
| 2.5.4     | Algebras over a field . . . . .                              | 218        |
| 2.5.5     | Irreducible modules over the $\mathfrak{sl}(2)$ . . . . .    | 230        |
| <b>3</b>  | <b>Rings by Lang</b>                                         | <b>234</b> |
| 3.1       | Rings and homomorphisms . . . . .                            | 234        |
| 3.2       | Commutative rings . . . . .                                  | 234        |
| 3.3       | Localization . . . . .                                       | 235        |
| 3.4       | Principal ideal rings . . . . .                              | 235        |
| 3.5       | Matrix groups and their properties . . . . .                 | 235        |
| 3.6       | Other Constructions . . . . .                                | 235        |
| 3.6.1     | Spin of fields according to Kiselev . . . . .                | 235        |

|            |                                                     |            |
|------------|-----------------------------------------------------|------------|
| <b>III</b> | <b>Group Theory and Linear Algebra Fundamentals</b> | <b>264</b> |
|------------|-----------------------------------------------------|------------|

|           |                                                                      |            |
|-----------|----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4</b>  | <b>Discrete group theory</b>                                         | <b>264</b> |
| 4.1       | Finite Groups                                                        | 264        |
| 4.1.1     | 2.1 Representations by Zhou                                          | 264        |
| 4.1.2     | 2.2 Characters and Orthogonality                                     | 267        |
| 4.1.3     | 2.3 Examples and Applications                                        | 268        |
| 4.1.4     | 2.4 Real and Complex Representations by Zhou                         | 271        |
| 4.1.5     | 2.5 The Group Algebra by Zhou                                        | 274        |
| 4.1.6     | 2.6 Representations of $S_n$ by Zhou                                 | 277        |
| 4.1.7     | Illustrations of representations according to Kostrikin              | 280        |
| <b>5</b>  | <b>Другое о теории групп</b>                                         | <b>282</b> |
| 5.1       | Coverings (???)                                                      | 282        |
| 5.2       | Lie groups                                                           | 282        |
| 5.3       | Groups for Special Mathematical Physics (???)                        | 282        |
| 5.3.1     | Schur polynomials (!?!?!?)                                           | 282        |
| 5.4       | Applications of group theory                                         | 283        |
| <b>6</b>  | <b>Fundamentals of linear algebra [see note on lin alg!]</b>         | <b>283</b> |
| 6.1       | Structure of bilinear forms according to Lang                        | 283        |
| 6.1.1     | Preliminary information, orthogonal sums                             | 283        |
| 6.1.2     | Quadratic mappings                                                   | 283        |
| 6.1.3     | Symmetric forms, orthogonal bases                                    | 283        |
| 6.1.4     | Hyperbolic spaces                                                    | 283        |
| 6.1.5     | Witt's theorem                                                       | 283        |
| 6.1.6     | Witt group                                                           | 283        |
| 6.1.7     | Symmetric forms over ordered fields                                  | 283        |
| 6.2       | Other Well-known Constructions of Linear Algebra                     | 283        |
| 6.2.1     | Alternating forms                                                    | 283        |
| 6.2.2     | Pfaffian                                                             | 283        |
| 6.2.3     | Hermitian forms                                                      | 283        |
| 6.2.4     | Spectral theorem (Hermitian case)                                    | 283        |
| 6.2.5     | Spectral theorem (symmetric case)                                    | 283        |
| 6.3       | Fundamentals of tensor algebra                                       | 283        |
| <b>IV</b> | <b>Lie Algebra Fundamentals</b>                                      | <b>284</b> |
| <b>7</b>  | <b>Main constructions</b>                                            | <b>284</b> |
| 7.1       | General concepts of Lie algebras                                     | 284        |
| 7.1.1     | Introduction by Zhou                                                 | 284        |
| 7.1.2     | Fundamentals of Lie algebras according to Kiselev                    | 286        |
| 7.1.3     | Representation of a Lie group and generators                         | 302        |
| 7.1.4     | Adjoint representation                                               | 304        |
| 7.1.5     | Killing metric and Cartan's criterion                                | 309        |
| 7.1.6     | Casimir operators                                                    | 318        |
| 7.1.7     | Details of general concepts of Lie algebras, based on concepts below | 324        |
| 7.2       | Lie Groups                                                           | 324        |
| 7.2.1     | 3.1 Matrix Groups by Zhou                                            | 324        |
| 7.2.2     | 3.2 Lie Algebras by Zhou                                             | 326        |
| 7.2.3     | 3.3 Representations                                                  | 329        |
| 7.2.4     | 3.4 Integration by Zhou                                              | 331        |
| 7.3       | The Cartan Classification                                            | 334        |
| 7.3.1     | The Cartan-Weyl Basis by Zhou                                        | 334        |
| 7.3.2     | The Root Space by Zhou                                               | 337        |

|          |                                                                               |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.3.3    | The Cartan Matrix by Zhou . . . . .                                           | 340        |
| 7.3.4    | Representations and Weights . . . . .                                         | 343        |
| 7.3.5    | Details about root strings and reconstruction of algebra from roots . . . . . | 347        |
| 7.3.6    | Examples of Roots . . . . .                                                   | 348        |
| 7.3.7    | Dynkin Diagrams . . . . .                                                     | 350        |
| 7.3.8    | Cartan–Weyl basis according to Kiselev . . . . .                              | 352        |
| 7.3.9    | Root vectors and Dynkin diagrams . . . . .                                    | 374        |
| 7.3.10   | Classification of simple compact Lie algebras . . . . .                       | 395        |
| 7.4      | 1. Algebras $\mathfrak{su}(2)$ and $\mathfrak{su}(3)$ . . . . .               | 398        |
| 7.4.1    | 1.1 $\mathfrak{su}(2)$ . . . . .                                              | 398        |
| 7.4.2    | 1.2 Scale and conformal factor (?????) . . . . .                              | 400        |
| 7.4.3    | 1.3 $\mathfrak{su}(3)$ . . . . .                                              | 401        |
| 7.4.4    | 1.4 Physical tradition for generators of $\mathfrak{su}(3)$ . . . . .         | 405        |
| 7.5      | 2. Irreducible representations . . . . .                                      | 411        |
| 7.5.1    | 2.1 Highest weight and fundamental representations . . . . .                  | 416        |
| 7.5.2    | 2.2 Tensor product of fundamental representations . . . . .                   | 420        |
| 7.5.3    | 2.3 Reflection operation . . . . .                                            | 421        |
| 7.5.4    | 2.4 Weights of the adjoint representation . . . . .                           | 428        |
| 7.6      | 3. Representations of $\mathfrak{su}(2)$ . . . . .                            | 435        |
| 7.6.1    | 3.1 the Fundamental Representation . . . . .                                  | 436        |
| 7.6.2    | 3.2 Pauli Matrices . . . . .                                                  | 438        |
| 7.6.3    | 3.3 Representation with a Moment $j$ . . . . .                                | 439        |
| 7.6.4    | 3.4 Isotopic Invariance (Spectroscopy) . . . . .                              | 442        |
| 7.6.5    | 3.5 Weak Isospin . . . . .                                                    | 447        |
| 7.7      | Representations of $\mathfrak{su}(3)$ . . . . .                               | 451        |
| 7.7.1    | Fundamental Representation . . . . .                                          | 451        |
| 7.7.2    | Flavors of Quarks and Strong Interactions . . . . .                           | 454        |
| 7.7.3    | Gell-Mann Matrices . . . . .                                                  | 460        |
| 7.7.4    | Representations of $T^{(p_1, p_2)}$ . . . . .                                 | 468        |
| 7.7.5    | Symmetry of Hadron Spectra and Flavors of Quarks . . . . .                    | 478        |
| 7.7.6    | Tensor Method and Young’s Schemes for $su(3)$ . . . . .                       | 487        |
| <b>8</b> | <b>Representations of Lie algebras</b> . . . . .                              | <b>511</b> |
| 8.1      | Representations by Zhou . . . . .                                             | 511        |
| 8.1.1    | 4.1 Representations of $\mathfrak{su}(2)$ . . . . .                           | 511        |
| 8.1.2    | 4.2 The Heisenberg Algebra . . . . .                                          | 514        |
| 8.1.3    | 4.3 Representations of $SO(3)$ . . . . .                                      | 515        |
| 8.1.4    | 4.4 Representations of $SU(3)$ . . . . .                                      | 517        |
| 8.1.5    | 4.5 The Symplectic Groups . . . . .                                           | 521        |
| 8.1.6    | 4.6 Projective Representations . . . . .                                      | 522        |
| 8.1.7    | присоединенное представление по Кострикину . . . . .                          | 524        |
| 8.2      | More Representations by Zhou . . . . .                                        | 525        |
| 8.2.1    | 7.1 Group Theory Constants . . . . .                                          | 525        |
| 8.2.2    | 7.2 The Lorentz and Galilean Groups . . . . .                                 | 528        |
| 8.2.3    | 7.3 Tensor Methods . . . . .                                                  | 532        |
| 8.2.4    | 7.4 Representations of $SU(n)$ . . . . .                                      | 536        |
| 8.2.5    | 7.5 o Branching Rules . . . . .                                               | 539        |
| 8.2.6    | 7.6 Representations of $SO(n)$ . . . . .                                      | 542        |
| 8.3      | Algebra from Foster . . . . .                                                 | 547        |
| 8.3.1    | Lie groups as manifolds. $SU(2)$ and the three-sphere . . . . .               | 547        |
| 8.3.2    | $SU(n)$ , $SO(n)$ , and $Sp(2n)$ Lie groups . . . . .                         | 553        |
| 8.3.3    | First example of a higher rank Lie algebra: $\mathfrak{su}(3)$ . . . . .      | 556        |
| 8.3.4    | Killing form, root space inner product, and commutation relations . . . . .   | 560        |
| 8.3.5    | Roots and weights, $\mathfrak{su}(3)$ . . . . .                               | 567        |



|          |                                                                                                      |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.3.6    | The classical and exceptional Lie algebras . . . . .                                                 | 584        |
| 8.3.7    | Highest-weight representations . . . . .                                                             | 603        |
| 8.3.8    | Casimir operators, characters, dimension and strange formulae . . . . .                              | 634        |
| <b>V</b> | <b>Problems in algebra</b>                                                                           | <b>660</b> |
| <b>9</b> | <b>Typical Algebra problems</b>                                                                      | <b>660</b> |
| 9.1      | Algebra Comprehension questions and small tasks (?) . . . . .                                        | 660        |
| 9.1.1    | Questions to test understanding of typical Lie algebra topics 1 . . . . .                            | 660        |
| 9.1.2    | Questions to test understanding of typical Lie algebra topics 2 . . . . .                            | 661        |
| 9.1.3    | Questions to test understanding of typical Lie algebra topics 3 . . . . .                            | 663        |
| 9.1.4    | Questions about algebraic oddities and details . . . . .                                             | 665        |
| 9.2      | Problems in the theory of groups and the basics of Lie algebras from Bernstein . . . . .             | 665        |
| 9.2.1    | Problems about defining a group and a permutation group . . . . .                                    | 665        |
| 9.2.2    | Problems about Abelian groups. The action of a group on a set . . . . .                              | 668        |
| 9.2.3    | Problems about Lagrange's theorem, conjugacy classes, normal subgroups, semidirect product . . . . . | 671        |
| 9.2.4    | Problems about different setups . . . . .                                                            | 674        |
| 9.2.5    | Problems about group representations . . . . .                                                       | 677        |
| 9.2.6    | Problems about unitarity and characters of representations . . . . .                                 | 683        |
| 9.2.7    | Problems about different setups and $SO(2)$ . . . . .                                                | 687        |
| 9.2.8    | Problems about Lie groups, Lie algebras . . . . .                                                    | 697        |
| 9.2.9    | Problems about symmetric tensors. Lie groups $SO(3)$ , $SU(2)$ . . . . .                             | 700        |
| 9.2.10   | Problems about the representation of the $\mathfrak{su}(2)$ algebra . . . . .                        | 705        |
| 9.2.11   | Problems about representations of groups $SO(3)$ и $SU(2)$ . . . . .                                 | 706        |
| 9.2.12   | Problems about representations of more general Lie groups . . . . .                                  | 719        |
| 9.3      | Exercises from Kostrikin . . . . .                                                                   | 723        |
| 9.3.1    | Exercises about basics of group theory and algebra . . . . .                                         | 723        |
| 9.3.2    | Exercises about Subgroup . . . . .                                                                   | 724        |
| 9.3.3    | Exercises about group actions on sets . . . . .                                                      | 725        |
| 9.3.4    | Exercises about quotient groups and homomorphisms . . . . .                                          | 726        |
| 9.3.5    | Exercises about solvable and simple groups . . . . .                                                 | 728        |
| 9.3.6    | Exercises about Silov 's theorems . . . . .                                                          | 729        |
| 9.3.7    | Exercises about linear Lie groups . . . . .                                                          | 730        |
| 9.3.8    | Exercises about the basics of representation theory . . . . .                                        | 730        |
| 9.3.9    | Exercises about unitarity and reducibility . . . . .                                                 | 731        |
| 9.3.10   | Exercises about finite groups of rotations . . . . .                                                 | 732        |
| 9.3.11   | Exercises about characters of linear representations . . . . .                                       | 733        |
| 9.3.12   | Exercises about representing rotation groups . . . . .                                               | 734        |
| 9.3.13   | Exercises about $SU(2)$ , $SO(3)$ . . . . .                                                          | 736        |
| 9.3.14   | Exercises about tensor product of representations . . . . .                                          | 736        |
| 9.3.15   | Exercises about the basics of ring theory . . . . .                                                  | 737        |
| 9.3.16   | More exercises about rings . . . . .                                                                 | 738        |
| 9.3.17   | Exercises about modules . . . . .                                                                    | 739        |
| 9.3.18   | Exercises about algebras over fields . . . . .                                                       | 739        |
| 9.3.19   | Exercises Irreducible modules over the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2)$ . . . . .                      | 741        |
| 9.4      | Basic algebraic problems . . . . .                                                                   | 746        |
| 9.4.1    | Problems about representations of algebra . . . . .                                                  | 746        |
| 9.5      | Problems in Lie algebras . . . . .                                                                   | 748        |
| 9.5.1    | Problems about representations . . . . .                                                             | 748        |
| 9.5.2    | Problems about Cartan-Weyl basis . . . . .                                                           | 753        |
| 9.5.3    | Problems about real Lie algebras and real forms . . . . .                                            | 757        |
| 9.5.4    | Problems about isomorphisms of Lie algebras . . . . .                                                | 759        |

|           |                                                                                                                                        |            |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9.5.5     | Problems about Dynkin diagrams                                                                                                         | 761        |
| 9.5.6     | Problems about connection of Lie algebras and Lie groups                                                                               | 764        |
| 9.6       | Problems about special algebraic constructions                                                                                         | 765        |
| 9.6.1     | Problems about embeddings                                                                                                              | 765        |
| 9.6.2     | Problems about Clifford algebras and spinors                                                                                           | 765        |
| 9.6.3     | Problems about Young tableaux                                                                                                          | 766        |
| 9.7       | Problems about Galois theory and polynomials                                                                                           | 766        |
| 9.7.1     | Problems about extensions fields                                                                                                       | 766        |
| 9.7.2     | Problems about finite fields                                                                                                           | 767        |
| 9.7.3     | Problems about number theory                                                                                                           | 768        |
| 9.7.4     | Problems about Galois correspondence                                                                                                   | 769        |
| 9.7.5     | Problems about calculating the Galois group                                                                                            | 769        |
| 9.7.6     | Problems about the Galois extension                                                                                                    | 770        |
| 9.7.7     | Problems about rigidity and rationality in finite groups                                                                               | 770        |
| <b>VI</b> | <b>—— Special Constructions in a Nutshell ——</b>                                                                                       | <b>772</b> |
| <b>10</b> | <b>Other basic properties and methods of Lie algebras</b>                                                                              | <b>772</b> |
| 10.1      | Other well-known algebraic structures                                                                                                  | 772        |
| 10.1.1    | $\mathfrak{su}(n) \equiv A_{n-1}$ , $\mathfrak{so}(2n+1) \equiv B_n$ , $\mathfrak{sp}(2n) \equiv C_n$ , $\mathfrak{so}(2n) \equiv D_n$ | 772        |
| 10.1.2    | $\mathfrak{sl}(3)$                                                                                                                     | 773        |
| 10.1.3    | $SP(n)$ , $\mathfrak{sp}(n)$                                                                                                           | 773        |
| 10.2      | Other properties of well-known algebras in a nutshell                                                                                  | 774        |
| 10.2.1    | Other formalisms for typical properties of Lie algebras                                                                                | 774        |
| 10.2.2    | Some special properties of Lie algebras                                                                                                | 776        |
| 10.2.3    | Automorphisms of Lie algebras                                                                                                          | 777        |
| 10.3      | Special Lie algebras in a nutshell                                                                                                     | 778        |
| 10.3.1    | Loop algebras, central extensions, Virassoro, Witt algebras                                                                            | 778        |
| 10.3.2    | Highest weight representations                                                                                                         | 780        |
| 10.3.3    | Verma modules, Casimirs, and the character formula                                                                                     | 780        |
| 10.3.4    | Tensor products of representations                                                                                                     | 780        |
| 10.3.5    | Sum of momenta, Clebsch-Gordan coeff, tensor operators, Wigner-Eckart th                                                               | 780        |
| 10.3.6    | Invariant tensors                                                                                                                      | 782        |
| 10.3.7    | Subalgebras and branching rules                                                                                                        | 782        |
| 10.3.8    | Supersymmetry, twistors, (...) (???)                                                                                                   | 786        |
| 10.3.9    | Function spaces, special functions, Haar measure, Peter-Weyl theorem                                                                   | 786        |
| 10.3.10   | Weyl group, Weyl's character formula, dimension, strange formulae                                                                      | 791        |
| 10.3.11   | Hopf algebras, quantum groups, representation rings                                                                                    | 791        |
| 10.3.12   | Silov's theorems on Kostrikin (??)                                                                                                     | 795        |
| 10.3.13   | Other about summation of summation of moments (????)                                                                                   | 795        |
| 10.3.14   | Schur polynomial (???)                                                                                                                 | 795        |
| 10.3.15   | Spin group, spin manifolds, connection, holonomy (???)                                                                                 | 795        |
| 10.3.16   | Orthogonal weights, spinor irrep, Jordan-Wigner fermions                                                                               | 796        |
| 10.4      | Computing of algebraic structures on computer                                                                                          | 796        |
| 10.4.1    | LieART in Wolfram in a nutshell                                                                                                        | 796        |
| 10.5      | On supersymmetry and special Susy constructions                                                                                        | 800        |
| <b>11</b> | <b>Specific algebraic structures in a nutshell</b>                                                                                     | <b>800</b> |
| 11.1      | Rings and modules, special fields                                                                                                      | 800        |
| 11.1.1    | Theoretical-ring structures                                                                                                            | 800        |
| 11.1.2    | Individual Ring Results                                                                                                                | 800        |
| 11.1.3    | Modules                                                                                                                                | 800        |
| 11.1.4    | Algebras over the field                                                                                                                | 800        |

|            |                                                                                |            |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 11.1.5     | Irreducible representations over the algebra $\mathfrak{sl}(2)$                | 801        |
| 11.1.6     | $p$ -adic numbers in a nutshell                                                | 801        |
| 11.2       | Polynomials and Galois theory in a nutshell                                    | 801        |
| 11.2.1     | Polynomials (???)                                                              | 801        |
| 11.2.2     | Kostrikin polynomial roots 1                                                   | 801        |
| 11.2.3     | Other about polynomials according to Kostrikiyin 1 and not only                | 801        |
| 11.2.4     | Finite field extensions                                                        | 802        |
| 11.2.5     | End Fields                                                                     | 802        |
| 11.2.6     | Galois Compliance                                                              | 802        |
| 11.2.7     | Calculation of the Galois group                                                | 802        |
| 11.2.8     | Galois Extensions and Related Matters                                          | 802        |
| 11.2.9     | Rigidity and rationality in finite groups (??)                                 | 802        |
| <b>12</b>  | <b>Specific applications of algebra in a nutshell</b>                          | <b>802</b> |
| 12.1       | Specific algebra in quantum mechanics, QFT, Standard model                     | 802        |
| 12.1.1     | Tensor product of irreducible representations of the Kiselev rotation group(?) | 802        |
| 12.1.2     | Other typical models of algebra in particle physics                            | 803        |
| 12.1.3     | Magnetic dipole moments of the proton, neutron, and strange hyperons           | 803        |
| 12.2       | Specific algebra in special field theories and condensed matter                | 803        |
| 12.2.1     | Overview of algebra in Condensed Matter by Tsvetik                             | 803        |
| 12.2.2     | Algebra in condensed matter, topological systems                               | 804        |
| 12.2.3     | Algebra in special field theories                                              | 804        |
| 12.2.4     | SUSY algebras in a nutshell                                                    | 805        |
| 12.2.5     | Algebra for GUT                                                                | 808        |
| <b>VII</b> | <b>Other Special Methods</b>                                                   | <b>809</b> |
| 12.3       | LieART in Wolfram                                                              | 809        |
| 12.4       | Beginnings of Galois Theory                                                    | 812        |
| 12.4.1     | Final extensions of fields according to Kostrikin 3                            | 812        |
| 12.4.2     | End Fields                                                                     | 819        |
| 12.4.3     | Compliance with Galois Kostrikin 3                                             | 825        |
| 12.4.4     | Calculation of the Galois group                                                | 831        |
| 12.4.5     | Galois Extensions and Related Matters to Kostrikin 3                           | 841        |
| 12.4.6     | Rigidity and rationality in finite groups                                      | 850        |
| 12.4.7     | Epilogue to Kostrikin's Galois Theory                                          | 854        |
| 12.4.8     | Introduction to Leng's Galois Theory (??)                                      | 856        |
| 12.4.9     | Other Galois Theory                                                            | 856        |
| 12.5       | Clifford algebras                                                              | 856        |
| 12.6       | Unsolved algebraic problems                                                    | 856        |
| 12.6.1     | Unsolved classification of finite simple groups                                | 856        |
| 12.6.2     | Regular automorphism.                                                          | 857        |
| 12.6.3     | Strange Lie algebra                                                            | 858        |
| 12.6.4     | The Burnside Problem                                                           | 858        |
| 12.6.5     | Finite groups of polynomial automorphisms                                      | 859        |
| 12.6.6     | Simply reducible groups                                                        | 859        |
| 12.6.7     | Inverse Galois problem.                                                        | 860        |
| <b>13</b>  | <b>Other Topics</b>                                                            | <b>861</b> |
| 13.1       | $E_8$ , the most exceptional group by Garibaldi, Skip                          | 861        |
| 13.1.1     | 1. Introduction                                                                | 861        |
| 13.1.2     | 2. What is $E_8$ ?                                                             | 862        |
| 13.1.3     | 3. $E_8$ as an Automorphism Group                                              | 865        |
| 13.1.4     | 4. Constructing the Lie algebra via Gradings                                   | 866        |

|         |                                                                    |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 13.1.5  | 5. $E_8$ Over Real Number . . . . .                                | 868 |
| 13.1.6  | 6. $E_8$ Over an Arbitrary Field . . . . .                         | 870 |
| 13.1.7  | 7. Tits' Conclusion . . . . .                                      | 871 |
| 13.1.8  | 8. Cohomological invariants; the Rost Invariant . . . . .          | 873 |
| 13.1.9  | 9. The kernel of the Rost invariant; Semenov's invariant . . . . . | 875 |
| 13.1.10 | 10. Witt Invariants . . . . .                                      | 876 |
| 13.1.11 | 11. Connection with Division Algebras . . . . .                    | 877 |
| 13.1.12 | 12. Other Recent Results on $E_8$ . . . . .                        | 878 |
| 13.2    | Systems of equations . . . . .                                     | 879 |
| 13.3    | Polynomials . . . . .                                              | 879 |
| 13.3.1  | The simplest theory of polynomials . . . . .                       | 879 |
| 13.3.2  | Free algebras . . . . .                                            | 879 |
| 13.3.3  | Definition of polynomials . . . . .                                | 879 |
| 13.3.4  | Elementary Properties of Polynomials . . . . .                     | 879 |
| 13.3.5  | Euclid's algorithm . . . . .                                       | 879 |
| 13.3.6  | Fractions . . . . .                                                | 879 |
| 13.3.7  | Decomposition into prime factors (???) . . . . .                   | 879 |
| 13.3.8  | Irreducibility criteria . . . . .                                  | 880 |
| 13.3.9  | Derivative and Multiple Roots . . . . .                            | 880 |
| 13.3.10 | Symmetric polynomials . . . . .                                    | 880 |
| 13.3.11 | Resultant . . . . .                                                | 880 |
| 13.4    | Homological algebra . . . . .                                      | 880 |
| 13.5    | Other English . . . . .                                            | 880 |
| 13.5.1  | Euler's totient function . . . . .                                 | 880 |

## **VIII Applications of Algebra in Physics 881**

|           |                                                                                      |            |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>14</b> | <b>Applications of Lie Algebras in Physics</b>                                       | <b>881</b> |
| 14.1      | Physical Applications by Zhou . . . . .                                              | 881        |
| 14.1.1    | Isospin by Zhou . . . . .                                                            | 881        |
| 14.1.2    | The Eightfold Way by Zhou . . . . .                                                  | 882        |
| 14.1.3    | Roots and Weights for $\mathfrak{su}(3)$ by Zhou . . . . .                           | 883        |
| 14.1.4    | Grand Unification $SU(5)$ , vector leptoquarks and proton decay by Kiselev . . . . . | 887        |
| 14.2      | Relativistic Fields from Algebra . . . . .                                           | 890        |
| 14.2.1    | 8.1 Representations of the Euclidean Group From Algebra by Zhou . . . . .            | 890        |
| 14.2.2    | 8.2 Representations of the Poincare Group From Algebra . . . . .                     | 895        |
| 14.2.3    | 8.3 Relativistic Field Equations From Algebra . . . . .                              | 898        |
| 14.2.4    | 8.4* Yang-Mills Theory From Algebra . . . . .                                        | 903        |
| 14.2.5    | 8.5 Grand Unification by Zhou . . . . .                                              | 906        |
| 14.2.6    | Interactions as Transformations of States by Kiselev (???) . . . . .                 | 911        |
| 14.3      | Symmetries of Elliptical Orbits According to Kiselev . . . . .                       | 914        |
| 14.3.1    | 1. Symmetry in the Hydrogen Atom . . . . .                                           | 914        |
| 14.3.2    | Isotropic harmonic oscillator in 3D . . . . .                                        | 923        |
| 14.4      | Magnetic moments of baryons in the quark model . . . . .                             | 931        |
| 14.4.1    | 1. Tensor product of two irreducible representations of a group of turns . . . . .   | 931        |
| 14.4.2    | 2. Magnetic moments of the three quark system . . . . .                              | 942        |
| 14.5      | Algebra in condensed matter . . . . .                                                | 946        |
| 14.5.1    | Cartan classification of Hamiltonians: the 10-fold way by Foster . . . . .           | 946        |

|                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>15 Lie algebra for particle physics by H. Georgi</b>             | <b>957</b> |
| 15.1 Finite Groups . . . . .                                        | 957        |
| 15.1.1 1.1 Groups and representations . . . . .                     | 957        |
| 15.1.2 1.2 Example - $Z_3$ . . . . .                                | 958        |
| 15.1.3 1.3 The regular representation . . . . .                     | 958        |
| 15.1.4 1.4 Irreducible representations . . . . .                    | 959        |
| 15.1.5 1.5 Transformation groups . . . . .                          | 961        |
| 15.1.6 1.6 Application: parity in quantum mechanics . . . . .       | 961        |
| 15.1.7 1.7 Example: $S_3$ . . . . .                                 | 961        |
| 15.1.8 1.8 Example: addition of integers . . . . .                  | 962        |
| 15.1.9 1.9 Useful theorems . . . . .                                | 963        |
| 15.1.10 1.10 Subgroups . . . . .                                    | 964        |
| 15.1.11 1.11 Schur's lemma . . . . .                                | 965        |
| 15.1.12 1.12 * Orthogonality relations . . . . .                    | 968        |
| 15.1.13 1.13 Characters . . . . .                                   | 971        |
| 15.1.14 1.14 Eigenstates . . . . .                                  | 974        |
| 15.1.15 1.15 Tensor products . . . . .                              | 975        |
| 15.1.16 1.16 Example of tensor products . . . . .                   | 976        |
| 15.1.17 1.17 * Finding the normal modes . . . . .                   | 978        |
| 15.1.18 1.18 * Symmetries of $2n + 1$ -gons . . . . .               | 980        |
| 15.1.19 1.19 Permutation group on $n$ objects . . . . .             | 981        |
| 15.1.20 1.20 Conjugacy classes . . . . .                            | 982        |
| 15.1.21 1.21 Young tableaux . . . . .                               | 983        |
| 15.1.22 1.22 Example - our old friend $S_3$ . . . . .               | 983        |
| 15.1.23 1.23 Another example: $-S_4$ . . . . .                      | 983        |
| 15.1.24 1.24* Young tableaux and representations of $S_n$ . . . . . | 984        |
| 15.2 Lie Groups . . . . .                                           | 986        |
| 15.2.1 2.1 Generators . . . . .                                     | 986        |
| 15.2.2 2.2 Lie algebras . . . . .                                   | 988        |
| 15.2.3 2.3 The Jacobi identity . . . . .                            | 990        |
| 15.2.4 2.4 The adjoint representation . . . . .                     | 990        |
| 15.2.5 2.5 Simple algebras and groups . . . . .                     | 992        |
| 15.2.6 2.6 States and operators . . . . .                           | 993        |
| 15.2.7 2.7 Fun with exponentials . . . . .                          | 994        |
| 15.3 <b>SU(2)</b> . . . . .                                         | 996        |
| 15.4 3.1 $J_3$ eigenstates . . . . .                                | 996        |
| 15.4.1 3.2 Raising and lowering operators . . . . .                 | 996        |
| 15.4.2 3.3 The standard notation . . . . .                          | 999        |
| 15.4.3 3.4 Tensor products . . . . .                                | 1001       |
| 15.4.4 3.5 $J_3$ values add . . . . .                               | 1002       |
| 15.5 Tensor Operators . . . . .                                     | 1004       |
| 15.5.1 4.1 Orbital angular momentum . . . . .                       | 1004       |
| 15.5.2 4.2 Using tensor operators . . . . .                         | 1005       |
| 15.5.3 4.3 The Wigner-Eckart theorem . . . . .                      | 1006       |
| 15.5.4 4.4 Example . . . . .                                        | 1008       |
| 15.5.5 4.5 * Making tensor operators . . . . .                      | 1010       |
| 15.5.6 4.6 Products of operators . . . . .                          | 1011       |
| 15.5.7 4.C. Find . . . . .                                          | 1012       |
| 15.6 Isospin . . . . .                                              | 1012       |
| 15.6.1 5.1 Charge independence . . . . .                            | 1012       |
| 15.6.2 5.2 Creation operators . . . . .                             | 1013       |
| 15.6.3 5.3 Number operators . . . . .                               | 1014       |
| 15.6.4 5.4 Isospin generators . . . . .                             | 1015       |

|          |                                                            |      |
|----------|------------------------------------------------------------|------|
| 15.6.5   | 5.5 Symmetry of tensor products . . . . .                  | 1016 |
| 15.6.6   | 5.6 The deuteron . . . . .                                 | 1016 |
| 15.6.7   | 5.7 Superselection rules . . . . .                         | 1017 |
| 15.6.8   | 5.8 Other particles . . . . .                              | 1018 |
| 15.6.9   | 5.9 Approximate isospin symmetry . . . . .                 | 1019 |
| 15.6.10  | 5.10 Perturbation theory . . . . .                         | 1019 |
| 15.7     | Roots and Weights . . . . .                                | 1020 |
| 15.7.1   | 6.1 Weights . . . . .                                      | 1020 |
| 15.7.2   | 6.2 More on the adjoint representation . . . . .           | 1021 |
| 15.7.3   | 6.3 Roots . . . . .                                        | 1021 |
| 15.7.4   | 6.4 Raising and lowering . . . . .                         | 1022 |
| 15.7.5   | 6.5 Lots of $SU(2)$ s . . . . .                            | 1023 |
| 15.7.6   | 6.6 Watch carefully - this is important! . . . . .         | 1024 |
| 15.8     | $SU(3)$ . . . . .                                          | 1026 |
| 15.8.1   | 7.1 The Gell-Mann matrices . . . . .                       | 1026 |
| 15.8.2   | 7.2 Weights and roots of $SU(3)$ . . . . .                 | 1027 |
| 15.9     | Simple Roots . . . . .                                     | 1029 |
| 15.9.1   | 8.1 Positive weights . . . . .                             | 1029 |
| 15.9.2   | 8.2 Simple roots . . . . .                                 | 1030 |
| 15.9.3   | 8.3 Constructing the algebra . . . . .                     | 1033 |
| 15.9.4   | 8.4 Dynkin diagrams . . . . .                              | 1035 |
| 15.9.5   | 8.5 Example: $G_2$ . . . . .                               | 1036 |
| 15.9.6   | 8.6 The roots of $G_2$ . . . . .                           | 1036 |
| 15.9.7   | 8.7 The Cartan matrix . . . . .                            | 1038 |
| 15.9.8   | 8.8 Finding all the roots . . . . .                        | 1038 |
| 15.9.9   | 8.9 The $SU(2)$ s . . . . .                                | 1040 |
| 15.9.10  | 8.10 Constructing the $G_2$ algebra . . . . .              | 1041 |
| 15.9.11  | 8.11 Another example: the algebra $C_3$ . . . . .          | 1042 |
| 15.9.12  | 8.12 Fundamental weights . . . . .                         | 1043 |
| 15.9.13  | 8.13 The trace of a generator . . . . .                    | 1044 |
| 15.10    | More $SU(3)$ . . . . .                                     | 1045 |
| 15.10.1  | 9.1 Fundamental representations of $SU(3)$ . . . . .       | 1045 |
| 15.10.2  | 9.2 Constructing the states . . . . .                      | 1047 |
| 15.10.3  | 9.3 The Weyl group . . . . .                               | 1049 |
| 15.10.4  | 9.4 Complex conjugation . . . . .                          | 1049 |
| 15.10.5  | 9.5 Examples of other representations . . . . .            | 1051 |
| 15.11    | Tensor Methods . . . . .                                   | 1055 |
| 15.11.1  | 10.1 lower and upper indices . . . . .                     | 1055 |
| 15.11.2  | 10.2 Tensor components and wave functions . . . . .        | 1056 |
| 15.11.3  | 10.3 Irreducible representations and symmetry . . . . .    | 1057 |
| 15.11.4  | 10.4 Invariant tensors . . . . .                           | 1057 |
| 15.11.5  | 10.5 Clebsch-Gordan decomposition . . . . .                | 1058 |
| 15.11.6  | 10.6 Triality . . . . .                                    | 1059 |
| 15.11.7  | 10.7 Matrix elements and operators . . . . .               | 1059 |
| 15.11.8  | 10.8 Normalization . . . . .                               | 1060 |
| 15.11.9  | 10.9 Tensor operators . . . . .                            | 1060 |
| 15.11.10 | 10.10 The dimension of $(n, m)$ . . . . .                  | 1060 |
| 15.11.11 | 10.11 * The weights of $(n, m)$ . . . . .                  | 1061 |
| 15.11.12 | 10.12 Generalization of Wigner-Eckart . . . . .            | 1065 |
| 15.11.13 | 10.13 * Tensors for $SU(2)$ . . . . .                      | 1067 |
| 15.11.14 | 10.14 * Clebsch-Gordan coefficients from tensors . . . . . | 1068 |
| 15.11.15 | 10.15 * Spin $s_1 + s_2 - 1$ . . . . .                     | 1069 |
| 15.11.16 | 10.16 * Spin $s_1 + s_2 - k$ . . . . .                     | 1071 |



|         |                                                          |      |
|---------|----------------------------------------------------------|------|
| 15.12   | Hypercharge and Strangeness . . . . .                    | 1075 |
| 15.12.1 | 11.1 The eight-fold way . . . . .                        | 1075 |
| 15.12.2 | 11.2 The Gell-Mann Okubo formula . . . . .               | 1077 |
| 15.12.3 | 11.3 Hadron resonances . . . . .                         | 1080 |
| 15.12.4 | 11.4 Quarks . . . . .                                    | 1081 |
| 15.13   | Young Tableaux . . . . .                                 | 1083 |
| 15.13.1 | 12.1 Raising the indices . . . . .                       | 1083 |
| 15.13.2 | 12.2 Clebsch-Gordan decomposition . . . . .              | 1085 |
| 15.13.3 | 12.3 $SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1)$ . . . . .     | 1086 |
| 15.14   | $SU(N)$ . . . . .                                        | 1088 |
| 15.14.1 | 13.1 Generalized Gell-Mann matrices . . . . .            | 1088 |
| 15.14.2 | 13.2 $SU(N)$ tensors . . . . .                           | 1091 |
| 15.14.3 | 13.3 Dimensions . . . . .                                | 1092 |
| 15.14.4 | 13.4 Complex representations . . . . .                   | 1093 |
| 15.14.5 | 13.5 $SU(N) \otimes SU(M) \in SU(N + M)$ . . . . .       | 1094 |
| 15.15   | 3-D Harmonic Oscillator . . . . .                        | 1095 |
| 15.15.1 | 14.1 Raising and lowering operators . . . . .            | 1096 |
| 15.15.2 | 14.2 Angular momentum . . . . .                          | 1097 |
| 15.15.3 | 14.3 A more complicated example . . . . .                | 1098 |
| 15.16   | $SU(6)$ and the Quark Model . . . . .                    | 1100 |
| 15.16.1 | 15.1 Including the spin . . . . .                        | 1101 |
| 15.16.2 | 15.2 $SU(N) \times SU(M) \in SU(NM)$ . . . . .           | 1101 |
| 15.16.3 | 15.3 The baryon states . . . . .                         | 1103 |
| 15.16.4 | 15.4 Magnetic moments . . . . .                          | 1104 |
| 15.17   | Color . . . . .                                          | 1107 |
| 15.17.1 | 16.1 Colored quarks . . . . .                            | 1107 |
| 15.17.2 | 16.2 Quantum Chromodynamics . . . . .                    | 1109 |
| 15.17.3 | 16.3 Heavy quarks . . . . .                              | 1110 |
| 15.17.4 | 16.4 Flavor $SU(4)$ is useless! . . . . .                | 1110 |
| 15.18   | Constituent Quarks . . . . .                             | 1111 |
| 15.18.1 | 17.1 The nonrelativistic limit . . . . .                 | 1111 |
| 15.19   | Unified Theories and $SU(5)$ . . . . .                   | 1113 |
| 15.19.1 | 18.1 Grand unification . . . . .                         | 1114 |
| 15.19.2 | 18.2 Parity violation, helicity and handedness . . . . . | 1114 |
| 15.19.3 | 18.3 Spontaneously broken symmetry . . . . .             | 1116 |
| 15.19.4 | 18.4 Physics of spontaneous symmetry breaking . . . . .  | 1116 |
| 15.19.5 | 18.5 Is the Higgs real? . . . . .                        | 1117 |
| 15.19.6 | 18.6 Unification and $SU(5)$ . . . . .                   | 1117 |
| 15.19.7 | 18.7 Breaking $SU(5)$ . . . . .                          | 1120 |
| 15.19.8 | 18.8 Proton decay . . . . .                              | 1121 |
| 15.20   | The Classical Groups . . . . .                           | 1121 |
| 15.20.1 | 19.1 The $SO(2n)$ algebras . . . . .                     | 1122 |
| 15.20.2 | 19.2 The $SO(2n + 1)$ algebras . . . . .                 | 1123 |
| 15.20.3 | 19.3 The $Sp(2n)$ algebras . . . . .                     | 1123 |
| 15.20.4 | 19.4 Quaternions . . . . .                               | 1124 |
| 15.21   | The Classification Theorem . . . . .                     | 1126 |
| 15.21.1 | 20.1 P-systems . . . . .                                 | 1126 |
| 15.21.2 | 20.2 Regular subalgebras . . . . .                       | 1132 |
| 15.21.3 | 20.3 Other Subalgebras . . . . .                         | 1134 |
| 15.22   | $SO(2n + 1)$ and Spinors . . . . .                       | 1134 |
| 15.22.1 | 21.1 Fundamental weights of $SO(2n + 1)$ . . . . .       | 1134 |
| 15.22.2 | 21.2 Real and pseudo-real . . . . .                      | 1138 |
| 15.22.3 | 21.3 Real representations . . . . .                      | 1139 |



|         |                                                                               |      |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------|------|
| 15.22.4 | 21.4 Pseudo-real representations . . . . .                                    | 1140 |
| 15.22.5 | 21.5 $R$ is an invariant tensor . . . . .                                     | 1140 |
| 15.22.6 | 21.6 The explicit form for $R$ . . . . .                                      | 1141 |
| 15.23   | $SO(2n+2)$ Spinors . . . . .                                                  | 1142 |
| 15.23.1 | 22.1 Fundamental weights of $SO(2n+2)$ . . . . .                              | 1142 |
| 15.24   | $SU(n) \subset SO(2n)$ . . . . .                                              | 1145 |
| 15.24.1 | 23.1 Clifford algebras . . . . .                                              | 1145 |
| 15.24.2 | 23.2 $\Gamma_m$ and $R$ as invariant tensors . . . . .                        | 1146 |
| 15.24.3 | 23.3 Products of $\Gamma$ s . . . . .                                         | 1148 |
| 15.24.4 | 23.4 Self-duality . . . . .                                                   | 1150 |
| 15.24.5 | 23.5 Example: $SO(10)$ . . . . .                                              | 1151 |
| 15.24.6 | 23.6 The $SU(n)$ subalgebra . . . . .                                         | 1152 |
| 15.25   | $SO(10)$ . . . . .                                                            | 1154 |
| 15.25.1 | 24.1 $SO(10)$ and $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ . . . . .                 | 1154 |
| 15.25.2 | 24.2 * Spontaneous breaking of $SO(10)$ . . . . .                             | 1156 |
| 15.25.3 | 24.3 * Breaking $SO(10) \rightarrow SU(5)$ . . . . .                          | 1156 |
| 15.25.4 | 24.4 * Breaking $SO(10) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . . . . . | 1157 |
| 15.25.5 | 24.5* Breaking $SO(10) \rightarrow SU(3) \times U(1)$ . . . . .               | 1159 |
| 15.25.6 | 24.6 * Lepton number as a fourth color . . . . .                              | 1159 |
| 15.26   | Automorphisms . . . . .                                                       | 1160 |
| 15.26.1 | 25.1 Outer automorphisms . . . . .                                            | 1160 |
| 15.26.2 | 25.2 Fun with $SO(8)$ . . . . .                                               | 1161 |
| 15.27   | $Sp(2n)$ . . . . .                                                            | 1164 |
| 15.27.1 | 26.1 Weights of $SU(n)$ . . . . .                                             | 1164 |
| 15.27.2 | 26.2 Tensors for $Sp(2n)$ . . . . .                                           | 1165 |
| 15.28   | Odds and Ends . . . . .                                                       | 1167 |
| 15.28.1 | 27.1 Exceptional algebras and octonians . . . . .                             | 1167 |
| 15.28.2 | 27.2 $E_6$ unification . . . . .                                              | 1168 |
| 15.28.3 | 27.3 Breaking $E_6$ . . . . .                                                 | 1171 |
| 15.28.4 | 27.4 $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ unification . . . . .                  | 1171 |
| 15.28.5 | 27.5 Anomalies . . . . .                                                      | 1172 |

## IX Appendix 1173

|       |                                                                 |
|-------|-----------------------------------------------------------------|
| A     | Introduction <span style="float: right;">1173</span>            |
| A.1   | General Ideas . . . . . 1173                                    |
| A.1.1 | Extra Motivation . . . . . 1173                                 |
| A.1.2 | What is “Algebraic Thinking”? . . . . . 1173                    |
| A.1.3 | Ways to Guess Some Main Ideas (???) . . . . . 1173              |
| A.1.4 | Overview of Applications of Algebra . . . . . 1173              |
| A.1.5 | How to Study Algebra? . . . . . 1173                            |
| A.2   | Acknowledgements . . . . . 1175                                 |
| A.3   | Literature . . . . . 1175                                       |
| A.3.1 | Main literature . . . . . 1175                                  |
| A.3.2 | Additional and professional literature . . . . . 1176           |
| A.3.3 | Literature about Applications . . . . . 1179                    |
| A.4   | History of Algebra . . . . . 1180                               |
| A.5   | Puzzles for Different Situations . . . . . 1180                 |
| A.5.1 | Questions from Ancient and Medieval Philosophers . . . . . 1180 |

## B Bibliography 1181

## Preface

Links below show contents of lectures by [Foster](#), detailed discussions of applications in particle physics by [H. Georgi](#) and [Galois theory](#). I used the following [literature](#).

### Why do we need algebra?

(here will be informative answer with examples! suppose we understand  $\mathfrak{su}(2)$  spin in physics and we can learn theory of  $\mathfrak{su}(3)$  in 2 days, still, why do we need a whole big course of algebra? Where do we use all specific algebras? Later I'll answer)

### Where exactly is algebra used in physics?

(I'll write it very informative after mastering my knowledge of algebra!!! Not abstract words!)

#### Where exactly is algebra used in particle physics?

(с формулами потом подробно раскрою, как и почему?)

#### Where exactly is algebra used in GUT-s and why?

(с формулами потом подробно раскрою, как и почему?)

#### Where exactly is algebra used in condensed matter?

(с формулами потом подробно раскрою, как и почему?)

#### Where exactly is algebra used in field theory and why?

(с формулами потом подробно раскрою, как и почему?)

#### Where exactly is algebra used in quantum mechanics?

(с формулами потом подробно раскрою, как и почему?)

#### Также алгебра нужна в современной матфизике (??)

(с формулами потом подробно раскрою, как и почему?)

### Лучшие идейные головоломки

### Лучшие технические головоломки

(потом соберу, мне еще каталог долго прописывать)

---

## Part I

# — Typical Algebra in a Nutshell —

## 1 Main algebraic constructions in a nutshell

### 1.1 Main definitions

#### Main general definitions



**Группа**  $(\times)$  - непустое множество  $G$ , в котором есть одна операция - групповое умножение:  $G \times G \longrightarrow G$ , то есть которая сопоставляет паре элементов  $x, y \in G$  единственный элемент  $xy = z \in G$ . Для этой операции должны выполняться аксиомы: 1) ассоциативность, 2) единица 3) обратный. Абелева группа - если она коммутативна.

**Кольцо**  $(+, \times)$  - абелева группа  $R$ , в которой кроме операции сложения задано умножение:  $R \times R \longrightarrow R$ , для которого выполняется свойство дистрибутивности.

**Поле** - ассоциативное коммутативное кольцо с делением.

**Векторное пространство**  $V$  над полем  $F$  - это абелева группа по сложению, в которой есть операция умножения на элементы поля, которая удовлетворяет:  $(a + b)x = ax + bx$ ,  $(ab)x = a(bx)$ .

**Идеал** - подмножество кольца, где вычитая из него не выйдем. и так как в кольце мы можем умножать, при домножении на  $R$ - на элемент кольца - мы тоже не выйдем. например в  $\mathbb{Z}$  это  $n\mathbb{Z}$ . в поле нет нетривиальных идеалов. то есть такой объект дискретный и слабо к реальности относится.

**Тело** - кольцо с единицей, в которой каждый ненулевой элемент обратим.

**Algebra**  $\mathfrak{A}$  is a vector space endowed with an additional binary operation  $\diamond : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  on which the only requirement is that it is bilinear, i.e.  $(x + y) \diamond z = x \diamond z + y \diamond z$  and  $x \diamond (y + z) = x \diamond y + x \diamond z$ , as well as  $(\xi x) \diamond (\eta y) = (\xi \eta) x \diamond y$  for all  $x, y, z \in \mathfrak{A}$  and all elements  $\xi, \eta$  of the underlying field  $F$ .

#### Main definition for Lie algebras

**Simple Lie algebras** - which contains no nonzero proper ideals. A fin.-dim. simple complex Lie algebra is isomorphic to either  $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ ,  $\mathfrak{so}_n\mathbb{C}$ ,  $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$  (classical Lie algebras) or one of the five exceptional Lie algebras.

**Semisimple Lie algebras** - if it is a direct sum of simple Lie algebras. Def. from FS: it is a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  for which each element can be written as a commutator of two elements of  $\mathfrak{g}$ . Equivalently (for fin. dim. Lie alg. over a field of char-c 0), it is an algebra, for which the

Killing form,  $\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y))$ , is non-degenerate; or  $\mathfrak{g}$  has no non-zero abelian ideals; or  $\mathfrak{g}$  has no non-zero solvable ideals; or the radical (maximal solvable ideal) of  $\mathfrak{g}$  is zero.

**Compact Lie algebras** - if it is the Lie algebra of a compact Lie group (includes tori); the same: it is a real Lie algebra whose Killing form is negative definite (more restrictive, excludes tori). It can be seen as the smallest real form of a corresponding complex Lie algebra.

**of  $\mathfrak{g}$ , or  $\mathfrak{g}$ -module**, is the vector space  $V$  on which the representation matrices act is called a representation space.

**Adjoint representation:**

$$\begin{aligned} R_{\text{ad}} : \quad \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto \text{ad}_x \\ \text{ad}_x(y) &:= [x, y] \\ \text{ad}_{T^a}(T^b) &= [T^a, T^b] = \sum_c f_c^{ab} T^c \\ (R_{\text{ad}}(T^a))_c^b &= f_c^{ab} \end{aligned}$$

Certain representations of a (say, reductive) Lie algebra will decompose into eigenspaces for the action of a Cartan subalgebra  $\mathfrak{h}$  (the Lie algebra analogue of a maximal torus).

Thus,  $\mathfrak{h}$  acts on these subspaces, called "weight spaces" via a linear form  $\mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  (if you're working over the complex numbers), that is, an element of the dual space  $\mathfrak{h}^*$ . These elements of  $\mathfrak{h}^*$  (that correspond to nonzero eigenspaces) are called the "weights" of the representation.

One can say that the "roots" of a Lie algebra are the weights of its action on itself via the adjoint representation. So roots are special types of weights.

(!!! тут четко напишу, что за веса, что за корни, в чем их смысл и зачем нужны!!!!)

We often use as basis of the root space

$$\mathfrak{B} := \left\{ \alpha^{(i)\vee} \right\}.$$

Especially for discussing representations, it will be useful to introduce the space dual to the root space, and we call it the weight space. The basis of the weight space, dual to  $\mathfrak{B}$ , are the linear maps  $\Lambda_{(i)}$  with

$$\Lambda_{(i)} \left( \alpha^{(j)\vee} \right) = \delta_i^j$$

These are called the fundamental weights and form thus the basis of the weight space:

$$\mathfrak{B}^* := \left\{ \Lambda_{(i)} | i = 1, \dots, r \right\}$$

This is called the Dynkin basis of the weight space. Components of a weight in the Dynkin basis are called Dynkin labels.

The height of a root  $\sum_i b_i \alpha^{(i)}$  is  $\sum_i b_i$ .

An abelian Lie algebra is a Lie algebra which satisfies  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ . A simple Lie algebra is a Lie algebra which contains no proper ideals and which is not abelian. A direct sum of simple Lie algebras is called semisimple, and a direct sum of simple and abelian Lie algebras is referred to as reductive.

### Definition of morphisms and mapping

| homomorphisms |                                                              |
|---------------|--------------------------------------------------------------|
| monomorphism  | injective = one-to-one = embedding                           |
| epimorphism   | surjective = onto $\varphi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$     |
| isomorphism   | injective and surjective $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}$   |
| endomorphism  | to same space $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$        |
| automorphism  | isomorphism to itself $\varphi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ |

### Main definition of groups

$GL(n)$  : general invertible matrix  $M$

$SL(n)$  :  $\det M = 1$

$U(n)$  :  $MM^\dagger = \mathbb{1}$

$SU(n)$  :  $MM^\dagger = \mathbb{1}$  and  $\det M = 1$

$O(n)$  :  $M$  real and  $MM^t = \mathbb{1}$

$SO(n)$  :  $M$  real and  $MM^t = \mathbb{1}$  and  $\det M = 1$

$Sp(2n)$  :  $MJM^t = J$

$J$  being the canonical antisymmetric matrix.

## 1.2 Main algebraic transformations and analysis of algebras

### Типичные преобразования коммутаторов

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$[A, BCD] = [A, B]CD + B[A, C]D + BC[A, D]$$

$$[A, BCDE] = [A, B]CDE + B[A, C]DE + BC[A, D]E + BCD[A, E]$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[ABC, D] = AB[C, D] + A[B, D]C + [A, D]BC$$

$$[ABCD, E] = ABC[D, E] + AB[C, E]D + A[B, E]CD + [A, E]BCD$$

$$[[A, C], [B, D]] = [[[A, B], C], D] + [[[B, C], D], A] + [[[C, D], A], B] + [[[D, A], B], C]$$

$$[A^N, B^M] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} A^n B^m [A, B] A^{N-n-1} B^{M-m-1}$$

$$[AB, C]_{\pm} = A[B, C]_{-} + [A, C]_{\pm} B$$

$$\begin{aligned}
 [AB, CD]_{\pm} &= A[B, C]_{-}D + AC[B, D]_{-} + [A, C]_{-}DB + C[A, D]_{\pm}B \\
 [[A, B], [C, D]] &= [[[B, C]_{+}, A]_{+}, D] - [[[B, D]_{+}, A]_{+}, C] + [[[A, D]_{+}, B]_{+}, C] - [[[A, C]_{+}, B]_{+}, D] \\
 [A, [B, C]_{\pm}] + [B, [C, A]_{\pm}] + [C, [A, B]_{\pm}] &= 0
 \end{aligned}$$

$$[A, BC]_{\pm} = [A, B]_{-}C + B[A, C]_{\pm} = [A, B]_{\pm}C \mp B[A, C]_{-}$$

$$[A, BC] = [A, B]_{\pm}C \mp B[A, C]_{\pm}$$

$$\begin{aligned}
 [AB, CD] &= A[B, C]D + [A, C]BD + CA[B, D] + C[A, D]B = \\
 &= A[B, C]D + AC[B, D] + [A, C]DB + C[A, D]B
 \end{aligned}$$

### Типичные преобразования экспонент (??)

$$e^A e^B e^{-A} e^{-B} = \exp \left( [A, B] + \frac{1}{2!} [A + B, [A, B]] + + \dots \right)$$

(?? see QM by Kiselev or other book for now)

### On the BCH formula

The basic Baker-Campbell-Hausdorff identity says that:

$$\text{Exp}(x) \text{Exp}(y) = \text{Exp} \left( x + y + \frac{1}{2} [x, y] + \frac{1}{12} [x, [x, y]] + \frac{1}{12} [[x, y], y] + \dots \right)$$

Proof: (?)

$$e^X Y e^{-X} = Y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\text{ad}_X)^n (Y)$$

For the case of  $\mathfrak{su}(2)$  it specializes to (?????)

$$e^{-i\vec{\eta} \cdot \vec{L}} (\vec{\zeta} \cdot \vec{L}) e^{i\vec{\eta} \cdot \vec{L}} = (1 - \cos |\vec{\eta}|) \frac{\vec{\eta} \cdot \vec{\zeta} |\vec{\eta} \cdot \vec{L}|}{|\vec{\eta}|} + (\cos |\vec{\eta}|) \vec{\zeta} \cdot \vec{L} + (\sin |\vec{\eta}|) \frac{\vec{\eta} \times \vec{\zeta}}{|\vec{\eta}|} \cdot \vec{L}.$$

### Finding dimensions of algebras (!!!!)

(!!!! I'll soon write it here!!!)

Examples:

$\dim \mathfrak{so}(2,2) = 6$ . I'll write it in theory soon also.

**1.3  $SU(2), \mathfrak{su}(2)$  and  $SO(3), \mathfrak{so}(3)$**  **$\mathfrak{sl}(2)$  in a nutshell**

$$[H^1, E_{\pm}^1] = \pm 2E_{\pm}^1, \quad [E_+^1, E_-^1] = H^1$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_1 = E_+ + E_-, \quad \sigma_2 = iE_+ - iE_-, \quad \sigma_3 = H$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

 **$\mathfrak{su}(2)$  in typical formalism**

$$T^a = -\frac{1}{2}i\sigma_a, \quad [T^a, T^b] = f^{ab}_c T^c, \quad f^{ab}_c = \epsilon_{abc}.$$

$$H = 2iT^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad E_+ = iT^1 + T^2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}, \quad E_- = iT^1 - T^2 = \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$[H, E_{\pm}] = \pm 2E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = H$$

$$\text{ad}_H(E_{\pm}) = \pm 2E_{\pm}, \quad \text{ad}_H(H) = 0$$

$$R(H)v_{\lambda} = \lambda v_{\lambda}$$

$$R(H)v_{\Lambda} = \Lambda v_{\Lambda}, \quad R(E_+)v_{\Lambda} = 0$$

$$v_{\Lambda-2n} = (R(E_-))^n v_n$$

$$R(E_+)v_{\Lambda-2n} = R(E_+)R(E_-)v_{\Lambda-2n+2} = (R(E_-)R(E_+) + (\Lambda - 2n + 2))v_{\Lambda-2n+2}$$

$$R(E_+)v_{\Lambda-2n} = r_n v_{\Lambda-2n+2}, \quad r_n = r_{n-1} + \Lambda - 2n + 2, \quad r_0 = 0$$

$$r_n = (\Lambda + 1 - n)n$$

 **$\mathfrak{su}(2)$  in Kiselev's formalism****Геометрическое изображение группы  $SO(3)$** 

(???? see Kistrikin!)



### Tensorial representations of $SO(3)$

- The group  $SO(n)$  has the vector representation  $V^i \rightarrow R^{ij}V^j$ . Tensors transform in tensor powers of the vector representation, and we may break them into irreps.

- Note that antisymmetric rank 2 tensors transform to antisymmetric tensors. The same goes from symmetric tensors, so the rank 2 tensor representation decomposes as  $3 + 3 = 3 + 6$ . However, the trace is also invariant under rotations (using  $R^T = R^{-1}$ ), so we have the further decomposition  $6 = 5 + 1$ , where the 5 contains symmetric traceless tensors.

- This decomposition can be expressed in index notation. For the rank 2 tensor  $T^{ij}$ , we have

$$A^{ij} = T^{ij} - T^{ji}, \quad S^{ij} = T^{ij} + T^{ji}, \quad \tilde{S}^{ij} = S^{ij} - \delta^{ij} S^{kk}/N.$$

Then the  $A^{ij}$  are the antisymmetric representation, in the sense that the vector space spanned by the  $A^{ij}$  ( $\forall$  9 values of  $(i, j)$ ) is the antisymmetric irrep.

- The exact same reasoning holds for the rank 2 tensor in  $SO(n)$ .

- The fact that the elements of  $SO(n)$  are rotations means that  $\delta$  is an 'invariant symbol', i.e.

$$\delta^{ij} R^{ik} R^{jl} = \delta^{kl}$$

$$\epsilon^{ij\dots n} R^{ip} R^{jq} \dots R^{ns} = \epsilon^{pq\dots s} \det R,$$

$\epsilon$  is an invariant symbol. We call these objects symbols instead of tensors because they are defined by their components.

- The group  $SO(n)$  has the vector representation  $V^i \rightarrow R^{ij}V^j$ . Tensors transform in tensor powers of the vector representation, and we may break them into irreps. - Note that antisymmetric rank 2 tensors transform to antisymmetric tensors. The same goes from symmetric tensors, so the rank 2 tensor representation decomposes as  $3 + 3 = 3 + 6$ . However, the trace is also invariant under rotations (using  $R^T = R^{-1}$ ), so we have the further decomposition  $6 = 5 + 1$ , where the 5 contains symmetric traceless tensors. - This decomposition can be expressed in index notation. For the rank 2 tensor  $T^{ij}$ , we have

$$A^{ij} = T^{ij} - T^{ji}, \quad S^{ij} = T^{ij} + T^{ji}, \quad \tilde{S}^{ij} = S^{ij} - \delta^{ij} S^{kk}/N.$$

Then the  $A^{ij}$  are the antisymmetric representation, in the sense that the vector space spanned by the  $A^{ij}$  ( $\forall$  9 values of  $(i, j)$ ) is the antisymmetric irrep. - The exact same reasoning holds for the rank 2 tensor in  $SO(n)$ . - The fact that the elements of  $SO(n)$  are rotations means that  $\delta$  is an 'invariant symbol', i.e.

$$\delta^{ij} R^{ik} R^{jl} = \delta^{kl}$$

Similarly, we generally have

$$\epsilon^{ij\dots n} R^{ip} R^{jq} \dots R^{ns} = \epsilon^{pq\dots s} \det R$$

so that  $\epsilon$  is an invariant symbol. We call these objects symbols instead of tensors because they are defined by their components.

### $SU(2)$ and $SO(3)$ comparison

$SU(2)$  and  $SO(3)$  are not equal,  $SU(2)$  is bigger

(??)

$$SO(3) : \exp \theta_1 T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad SU(2) : \exp \theta_1 T^1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta_1 & i \sin \frac{1}{2}\theta_1 \\ i \sin \frac{1}{2}\theta_1 & \cos \frac{1}{2}\theta_1 \end{pmatrix}$$

You can see the relations:

$$\begin{aligned} \text{for } SO(3) : (\hat{\theta}, \theta + 2\pi) &= (\hat{\theta}, \theta) \\ \text{for } SU(2) : (\hat{\theta}, \theta + 4\pi) &= (\hat{\theta}, \theta) = -(\hat{\theta}, \theta + 2\pi) \end{aligned}$$

There is a deformation of a path in  $SO(3)$  that goes twice to the surface  $|\theta| = \pi$  (??)

$SO(3)$  is isomorphic to  $U(\mathbb{H})/\mathbb{Z}_2$ , where  $U(\mathbb{H})$  is the group of unit quaternions and  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ . Specifically, the action of  $U(\mathbb{H})$  on  $\mathbb{R}^3$  is by conjugation, where  $\mathbb{R}^3$  is identified with the set of quaternions of the form  $ai + bj + ck$  for  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$SO(3)$  is isomorphic to  $U(\mathbb{H})/\mathbb{Z}_2$ , where  $U(\mathbb{H})$  is the group of unit quaternions and  $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ . Specifically, the action of  $U(\mathbb{H})$  on  $\mathbb{R}^3$  is by conjugation, where  $\mathbb{R}^3$  is identified with the set of quaternions of the form  $ai + bj + ck$  for  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

So

$$SO(3) \times SO(3) \simeq SO(4)/\mathbb{Z}_2,$$

One consequence of this is that the spin group  $\text{Spin}(3)$  is isomorphic to  $U(\mathbb{H})$ , while  $\text{Spin}(4)$  is isomorphic to  $U(\mathbb{H}) \times U(\mathbb{H})$ . Thus,

$$\text{Spin}(4) \cong \text{Spin}(3) \times \text{Spin}(3)$$

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$$

### **$SU(2)$ and $SO(3)$ by FS.20**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x_i \sigma^i &= \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \\ \det(x_i \sigma^i) &= -|\vec{x}|^2 \end{aligned}$$

where  $|\vec{x}|$  stands for the usual euclidean norm of  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  (here and in the rest of this section we use the Einstein summation convention). Consider now the map

$$x_i \sigma^i \mapsto U x_i \sigma^i U^\dagger,$$

where  $U$  is a unitary  $2 \times 2$ -matrix. The matrix on the right hand side of (20.17) is again hermitian and traceless, and can therefore be expanded in terms of Pauli matrices with real coefficients  $x'_i : U x_i \sigma^i U^\dagger = x'_i \sigma^i$ . Moreover, the relation between  $x$  and  $x'$  is linear and the matrix on the right hand side has the same determinant  $|\vec{x}|^2$  as the original one. As a consequence there is a matrix  $T \in O(3)$  such that

$$U x_i \sigma^i U^\dagger = T(U)_i^j x_j \sigma^i$$

This way we constructed a map which sends  $U \in SU(2)$  to  $T(U) \in SO(3)$ ; this map is in fact a group homomorphism. In the present formulation it is obvious that  $U$  and  $-U$  are mapped to the same matrix  $T$ . Therefore the kernel of the group homomorphism is  $\{\pm \mathbf{1}\}$ , i.e. the center of  $SU(2)$ . This completes the proof that  $SU(2)$  is isomorphic to the universal covering group of  $SO(3)$ :  $SU(2) \equiv \text{Spin}(3)$ .

### $SU(2)$ main properties

#### Параметризация групп $SU(2)$ , $SO(3)$

Группа  $SU(2)$  топологически эквивалентна (гомеоморфна) сфере  $S^3$  в четырёхмерном вещественном пространстве  $\mathbb{R}^4$ .

#### Эпиморфизм $SU(2) \longrightarrow SO(3)$

Группа  $SO(3)$  является гомоморфным образом группы  $SU(2)$  при гомоморфизме  $\Phi : g \mapsto \Phi_g$  с ядром  $\text{Ker } \Phi = \{\pm E\}$ . Каждое вращение из  $SO(3)$  отвечает ровно двум унитарным операторам  $gu - g$  из  $SU(2)$ .

Proof: (???)

Группа  $SO(3)$  "в два раза меньше", чем группа  $SU(2)$ .

### Examples of applications of $\mathfrak{su}(2)$

#### Examples of applications of $\mathfrak{su}(2)$ in quantum mechanics

(?? I'll add soon, see Kiselev's lectures)

### Representations of $SU(2)$

#### Typical higher spin $\mathfrak{su}(2)$ representations

$$J_1^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad J_2^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 \end{pmatrix} \quad J_3^{3/2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

## 1.4 $SU(3), \mathfrak{su}(3)$

### Roots and Weights for $\mathfrak{su}(3)$

According to Fuchs & Schweigert, we start with idea to make algebra which will combine two  $\mathfrak{sl}(2)$ -s, we introduce  $H^1, H^2$  and  $E_{\pm}^{\theta} := [E_{\pm}^1, E_{\pm}^2]$  (so it will work only if we have three  $\mathfrak{sl}(2)$ -s), use Jacobi identity to find other commutators and impose  $[E_{\pm}^1, E_{\mp}^2] = 0$  and  $[E_{\pm}^i, [E_{\pm}^1, E_{\pm}^2]] = 0$ .

We obtain relations of  $\mathfrak{sl}(3)$ :

$$\begin{aligned} [H^1, H^2] &= 0, & [E_+^1, E_-^1] &= H^1, & [E_+^2, E_-^2] &= H^2 \\ [H^1, E_\pm^1] &= \pm 2E_\pm^1, & [H^1, E_\pm^2] &= \mp E_\pm^2, & [H^1, E_\pm^\theta] &= \pm E_\pm^\theta \\ [H^2, E_\pm^1] &= \mp E_\pm^1, & [H^2, E_\pm^2] &= \pm 2E_\pm^2, & [H^2, E_\pm^\theta] &= \pm E_\pm^\theta \\ [E_\pm^1, E_\pm^2] &= \pm E_\pm^\theta, & [E_\pm^1, E_\mp^\theta] &= \mp E_\mp^2, & [E_\pm^2, E_\mp^\theta] &= \pm E_\mp^1 \\ [E_\pm^1, E_\mp^2] &= [E_\pm^1, E_\pm^\theta] = [E_\pm^2, E_\pm^\theta] = 0, & [E_+^\theta, E_-^\theta] &= H^1 + H^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_+^3 &:= E_-^\theta, \quad E_-^3 := E_+^\theta, \quad H^3 := -H^1 - H^2 \\ [H^3, E_\pm^3] &= \pm 2E_\pm^3, \quad [E_+^3, E_-^3] = H^3 \end{aligned} \quad (\mathfrak{sl}(2))$$

$$\begin{aligned} [E^{\alpha(1)}, E^{-\alpha(1)}] &= H^{\alpha(1)}, & [E^{\alpha(2)}, E^{-\alpha(2)}] &= H^{\alpha(2)}, & [E^\theta, E^{-\theta}] &= H^\theta \\ [H^{\alpha(1)}, E^{\pm\alpha(1)}] &= \pm 2E^{\pm\alpha(1)}, & [H^{\alpha(1)}, E^{\pm\alpha(2)}] &= \mp E^{\pm\alpha(2)} \\ [H^{\alpha(2)}, E^{\pm\alpha(2)}] &= \pm 2E^{\pm\alpha(2)}, & [H^{\alpha(2)}, E^{\pm\alpha(1)}] &= \mp E^{\pm\alpha(1)} \\ [E^{\pm\alpha(1)}, E^{\pm\alpha(2)}] &= \pm E^{\pm\theta}, & [H^{\alpha(1)}, E^\theta] &= [H^{\alpha(2)}, E^\theta] = \pm E^\theta \\ [E^{\pm\alpha(1)}, E^{\mp\theta}] &= \mp E^{\mp\alpha(2)}, & [E^{\pm\alpha(2)}, E^{\mp\theta}] &= \mp E^{\mp\alpha(1)} \end{aligned}$$

$$H_I := \frac{1}{2}H^1, \quad H_Y := \frac{1}{2\sqrt{3}}H^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}H^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

before:  $\text{tr}(H^i H^j) = A^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{i,j}$

after:  $\text{tr}(H_I H_I) = \text{tr}(H_Y H_Y) = \frac{1}{2}, \quad \text{tr}(H_I H_Y) = \text{tr}(H_Y H_I) = 0$

$$\vec{H} \equiv (H_I, H_Y),$$

$$\begin{aligned} [\vec{H}, E_\pm^1] &= \pm(1, 0)E_\pm^1, & [\vec{H}, E_\pm^2] &= \pm\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})E_\pm^2 \\ [\vec{H}, E_\pm^\theta] &= \pm\frac{1}{2}(1, \sqrt{3})E_\pm^\theta \\ [E_+^1, E_-^1] &= 2H_I, & [E_+^2, E_-^2] &= -H_I + \sqrt{3}H_Y \\ [E_+^\theta, E_-^\theta] &= H_I + \sqrt{3}H_Y \end{aligned}$$

$$\alpha^{(1)} = (1, 0), \quad \alpha^{(2)} = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}), \quad \theta = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3}).$$

$$\Lambda_{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(1)} = \frac{1}{3} (2\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}), \quad \Lambda_{(2)} = \frac{1}{3} (\alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)})$$

$$\Lambda_{(1)} + \Lambda_{(2)} = \theta$$

$$\begin{aligned}
 H^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 E_+^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_-^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_+^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 E_-^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_+^\theta &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_-^\theta &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

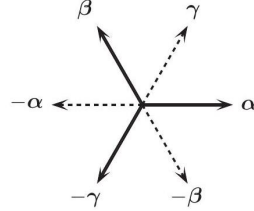
The Gell-Mann 3x3 matrices are another redefinition:

$$\begin{aligned}
 \lambda_i &= \begin{pmatrix} \sigma_i & & \\ & & \\ & & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} & -i & \\ & & \\ i & & \end{pmatrix} \\
 \lambda_6 &= \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} & & \\ & -i & \\ i & & \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$\lambda_4, \lambda_5 \sim \sigma_x, \sigma_y$  but on the 1 and 3 column;  $\lambda_6, \lambda_7$  are same, but on the 2 and 3 column.

$$\text{tr } \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}.$$

$$A_{\mathfrak{su}(3)}^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



For concreteness, we work in the fundamental representation of  $\mathfrak{su}(3)$  using the universal physics normalization convention for the fundamental,

$$T_a = \lambda_a/2, \quad \text{tr } T_a T_b = \frac{1}{2}\delta_{ab}.$$

$\mathfrak{su}(3)$  contains three copies of the  $\mathfrak{su}(2)$  algebra with

$$I_\pm = T_1 \pm iT_2, \quad U_\pm = T_6 \pm iT_7, \quad V_\pm = T_4 \pm iT_5$$

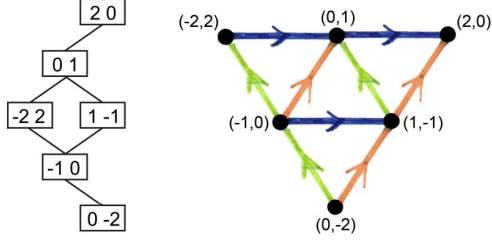
$$[I_+, I_-] = 2I_3, \quad [U_+, U_-] = 2U_3, \quad [V_+, V_-] = 2V_3.$$

There are also nontrivial commutators between distinct raising and lowering operators.

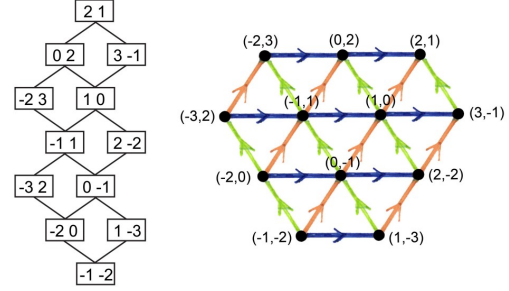
$$H_1 = T_3, H_2 \equiv Y = (2/\sqrt{3})T_8,$$

$$I_\pm : \pm(1, 0), \quad U_\pm : \pm(-1/2, 1), \quad V_\pm : \pm(1/2, 1).$$

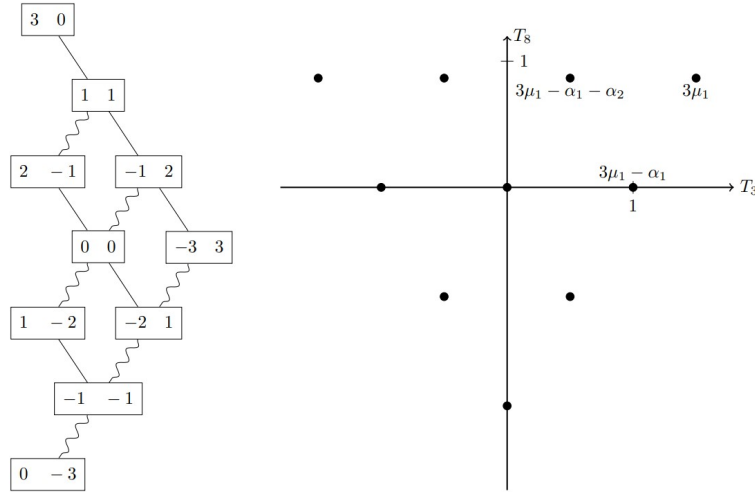
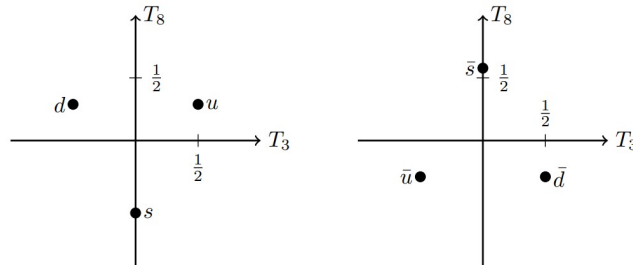
$(2, 0)$  repr. of  $\mathfrak{su}(3)$



$(2, 1)$  repr. of  $\mathfrak{su}(3)$



$3$  and  $\bar{3}$  repr-s of  $\mathfrak{su}(3)$ :



$H^1 = \text{diag}(1, -1, 0)$  and  $H^2 = \text{diag}(0, 1, -1)$  simplifies the weights, it leads to a non-Euclidean metric in root space, distorting the picture. (???? why???)

| representation              | Young tableau                                                               | tensor                                                      | Dynkin label |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>1</b>                    | $\begin{array}{ c } \hline m \\ \hline n \\ \hline p \\ \hline \end{array}$ | $\phi_{[mnp]} = \epsilon_{mnp}\phi$                         | $(0, 0)$     |
| <b>3</b>                    | $\begin{array}{ c } \hline m \\ \hline \end{array}$                         | $\phi_m$                                                    | $(1, 0)$     |
| <b><math>\bar{3}</math></b> | $\begin{array}{ c } \hline m \\ \hline n \\ \hline \end{array}$             | $\phi_{[mn]}$                                               | $(0, 1)$     |
| <b>6</b>                    | $\begin{array}{ c c } \hline m & n \\ \hline \end{array}$                   | $\phi_{(mn)}$                                               | $(2, 0)$     |
| <b><math>\bar{6}</math></b> | $\begin{array}{ c c } \hline m & n \\ \hline p & q \\ \hline \end{array}$   | $\phi_{([mp][nq])} = \epsilon_{mpr}\epsilon_{nqs}\phi^{rs}$ | $(0, 2)$     |
| <b>8</b>                    | $\begin{array}{ c c } \hline m & n \\ \hline p \\ \hline \end{array}$       | $\star$                                                     | $(1, 1)$     |

(???)

**Representations of  $SU(3)$** 

- In this case, we have the invariant symbols  $\epsilon^{ijk}$  and  $\epsilon_{ijk}$ , and the fundamental and anti-fundamental representations are not equivalent.

- We claim that all irreps are traceless  $(m, n)$  tensors that are totally symmetric in both the upper and lower indices. The claim is obvious for rank  $r = m + n = 1$ . For  $r = 2$ , the antisymmetric tensors  $\varphi^{ij}$  and  $\varphi_{ij}$  are equivalent to vectors, so they give nothing new, and we may subtract out the trace of  $\varphi_j^i$ .

- For the case  $r = 3$ , consider the tensor  $\varphi^{ijk}$ . The antisymmetric part  $\varphi^{[ij]k}$  can be reduced to rank  $r = 2$ . The symmetric part  $\varphi^{(ij)k}$  can be split into a totally symmetric part and antisymmetric tensors in  $ki$  and  $kj$ , as shown for  $SO(3)$ , so the new irrep is totally symmetric.

- Now consider the  $(m, n)$  irrep. Without accounting for the traceless condition, the dimension is  $\binom{n+2}{2}\binom{m+2}{2}$ . The trace of a totally symmetric  $(m, n)$  tensor is a totally symmetric  $(m-1, n-1)$  tensor, so

$$\dim = \binom{n+2}{2}\binom{m+2}{2} - \binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2} = \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2)$$

$$(1, 0) \equiv 3, \quad (0, 1) \equiv 3^*, \quad (1, 1) \equiv 8, \quad (2, 0) \equiv 6, \quad (3, 0) \equiv 10, \quad (2, 1) \equiv 15, \quad (2, 2) \equiv 27$$

- Note that  $(1, 0) \times (0, 1)$  is a general  $(1, 1)$  tensor. Subtracting its trace gives

$$(1, 0) \times (0, 1) = (1, 1) + (0, 0), \quad 3 \times 3^* = 8 + 1$$

- Next,  $(1, 0) \times (1, 0)$  is a general  $(2, 0)$  tensor, so

$$(1, 0) \times (1, 0) = (2, 0) + (0, 1), \quad 3 \times 3 = 6 + 3^*$$

where the two terms on the right are simply the symmetric and antisymmetric parts.

- Next, consider  $(1, 0) \times (2, 0)$ , i.e. the tensor  $\psi^i \varphi^{jk}$ . Consider the antisymmetric and symmetric parts in  $ij$ . The antisymmetric part gives a  $(1, 1)$  tensor which is automatically traceless. The symmetric part is symmetric in all three indices, so

$$(1, 0) \times (2, 0) = (3, 0) + (1, 1), \quad 3 \times 6 = 10 + 8$$

Therefore  $3 \times 3 \times 3 = 10 + 8 + 8 + 1$ , which we will see applied in the Eightfold Way. - Finally, consider  $(1, 1) \times (1, 1)$ . The tensor  $\psi_j^i \chi_\ell^k$  has two distinct traces,

$$\psi_j^i \chi_\ell^j, \quad \psi_j^i \chi_i^k$$

- Finally, consider  $(1, 1) \times (1, 1)$ . The tensor  $\psi_j^i \chi_\ell^k$  has two distinct traces,

$$\psi_j^i \chi_\ell^j, \quad \psi_j^i \chi_i^k$$

These yield two copies of  $(1, 1)$  plus a copy of  $(0, 0)$ , since their traces are equal. Now consider the traceless part  $T_{j\ell}^{ik}$ . It can be shown that  $T_{j\ell}^{[ik]}$  is automatically symmetric in  $j$  and  $\ell$ , providing a  $(0, 3)$ . Similarly antisymmetrizing  $j\ell$  gives a  $(3, 0)$  and the symmetric remainder is  $(2, 2)$ , for

$$(1, 1) \times (1, 1) = (2, 2) + (3, 0) + (0, 3) + (1, 1) + (1, 1) + (0, 0)$$

This computation contains all the ideas necessary for the general case.

### Examples of applications of $\mathfrak{su}(3)$

(if there are other important, I'll add them)

### Examples of applications of $\mathfrak{su}(23)$ in particle physics

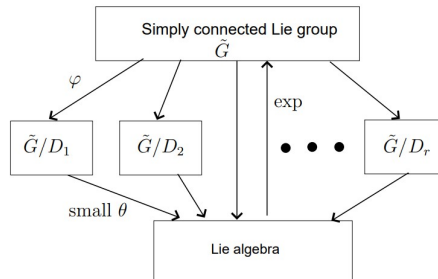
(just some main formulas, see another section here for big notes about it)

## 1.5 Lie algebra methods in a nutshell

### 1.5.1 Lie algebras, Lie groups, bases, Killing form

(эти разделы скучные, в целом очевидные, а про тонкости можно много думать, а также они не нужны для задач, поэтому я не особо их писал ещё.)

#### On Lie group manifolds



The middle line contains multiply connected Lie groups.

**Группа Ли** - многообразие, наделённое структурой группы с гладкими отображениями - умножением  $(x, y) \mapsto xy$  и взятием обратного элемента  $x \mapsto x^{-1}$ .

От гомоморфизма  $\Phi : G \rightarrow H$  группы Ли  $G$  в группу Ли  $H$  также требуется гладкость отображения одного многообразия в другое. То же самое относится к более частным понятиям изоморфизма групп Ли и автоморфизма группы Ли. Чаще всего имеют дело с вещественными или комплексными многообразиями и соответственно с вещественными или комплексными группами Ли.

#### Кривые в матричных группах

Кривая в конечномерном вещественном векторном пространстве  $V$  - непрерывное отображение  $\Gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow V$ , где  $(\alpha, \beta)$  - интервал в  $\mathbb{R}$ . Скажем, окружность  $S^1$  единичного радиуса с центром в начале прямоугольной системы координат суть кривая  $\varphi \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Разумеется,  $V$  чаще всего снабжается структурой аффинного или евклидова пространства. Пусть  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ . Зададим кривую в параметрической форме  $\Gamma_t = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ , где  $\gamma_i(t)$  - вещественнозначная функция при любом  $i = 1, \dots, n$ .



Кривая  $\Gamma$  дифференцируема в точке  $t \in (\alpha, \beta)$ , если дифференцируемы все  $\gamma_i(t)$ , т.е. существуют производные  $\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)$  и  $\Gamma'_t := \frac{d\Gamma_t}{dt} = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$  - однозначно определённый вектор в  $V$ , называемый касательным вектором к  $\Gamma$  в точке  $\Gamma_t$  или вектором скорости в момент времени  $t$ . В дальнейшем будем для простоты говорить о гладкой кривой  $\Gamma_t$ , отождествляя функцию с её значением.

Пусть теперь  $V = M_n(\mathbb{R})$  или  $M_n(\mathbb{C})$ , рассматриваемые как векторные пространства размерностей  $n^2$  и  $2n^2$  соответственно. Будем считать, что кривая  $\Gamma_t$  на пространстве  $M_n(\mathfrak{K})$  ( $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ ) на самом деле целиком лежит в матричной группе  $G \subset M_n(\mathfrak{K})$ , т.е.  $\Gamma_t \in G \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$ . Тогда естественно говорить о кривой в группе  $G$ . При любом  $t = t_0$  надо чётко представлять себе, что  $A_{t_0}$  есть точка кривой в  $n^2$ -мерном пространстве, реализованная в виде матрицы. Если  $A_t = (a_{ik}(t)), B_t = (b_{kj}(t)) : (\alpha, \beta) \rightarrow G$  - две параметрические кривые в группе  $G$ , то можно определить их произведение  $C_t = A_t B_t$ , полагая

$$C_t = (c_{ij}(t)), \quad c_{ij}(t) := \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)b_{kj}(t), \quad t \in (\alpha, \beta)$$

Теорема 1. Пусть  $G \subset GL(n, \mathfrak{K})$  - матричная группа. Справедливы следующие утверждения.

i) Если  $A_t, B_t : (\alpha, \beta) \rightarrow G$  - две дифференцируемые кривые в  $G$ , то их произведение  $C_t = A_t B_t$  также дифференцируемо

$$\frac{dC_t}{dt} = (A_t B_t)' = A'_t B_t + A_t B'_t.$$

ii) Пусть  $T = L(G)$  - множество всех касательных векторов  $A'_0$  к кривым  $A_t$  в  $G$  (в малой окрестности параметра  $t = 0$ ), для которых  $A_0 = 0$ . Тогда  $L(G)$  - векторное подпространство в  $M_n(\mathfrak{K})$ .

**Касательным пространством** - это векторное пространство  $T = L(G)$  к группе  $G$  в точке  $E$ .

Теорема 2. Пусть  $G$  - одна из классических линейных групп Ли  $GL(n, \mathfrak{K}), SL(n, \mathfrak{K}), O(n), SO(n), U(n), SU(n); \mathfrak{K} = \mathbb{R}, \mathfrak{K} = \mathbb{C}$ ,  $L(G)$  - её касательное пространство в  $E$ . Тогда  $\dim G = \dim L(G)$ .

## Дифференциал гомоморфизма

Всякому гомоморфизму  $\Phi: G \rightarrow H$  матричных групп  $G, H$  и всякой гладкой кривой  $A_t$  в группе  $G$  отвечает кривая  $(\Phi \circ \Gamma)_t = \Phi(\Gamma_t)$  в группе  $H$ . Гомоморфизм  $\Phi$  естественно называть гладким, если все кривые  $\Phi \circ \Gamma_t$  гладкие.

Определение. Гладкому гомоморфизму  $\Phi: G \rightarrow H$  матричных групп Ли и касательному вектору  $\Gamma'_0$  к  $G$  в точке  $E$  можно поставить в соответствие касательный вектор  $d\Phi(\Gamma'_0)$  к  $H$  в  $E$ , полагая

$$d\Phi(\Gamma'_0) = (\Phi \circ \Gamma)'_0.$$

Отображение  $d\Phi: L(G) \rightarrow L(H)$ , заданное равенством (3), называется дифференциалом или касательным отображением гомоморфизма  $\Phi$ .

Теорема 3. В матричных группах справедливы следующие утверждения.

i) Дифференциал гомоморфизма групп является линейным отображением касательных пространств.

ii) Если  $\Phi: G \rightarrow H, \Psi: H \rightarrow K$  - гладкие гомоморфизмы, то  $d(\Psi\Phi) = d\Psi \cdot d\Phi$ .

iii) Гладкому изоморфизму  $\Phi: G \rightarrow H$  отвечает линейный изоморфизм  $d\Phi: L(G) \rightarrow L(H)$ , причём  $\dim G = \dim H$ .

Теорема 4. Гомоморфизм связной группы Ли в произвольную группу Ли однозначно определяется своим дифференциалом.

## Алгебра Ли группы Ли

(у Киселева тоже сюда выпишу его видение этой темы)

Теорема 5. Касательная алгебра всякой линейной группы Ли снабжена структурой алгебры Ли с операцией коммутирования  $[X, Y] = XY - YX$ .

## Логарифм

$$\log X = (X - E) - \frac{(X - E)^2}{2} + \frac{(X - E)^3}{3} - \frac{(X - E)^4}{4} + \dots, \quad \text{inv to exp : } L(G) \rightarrow G$$

$\forall$   $n \times n$  real matrix  $X$ , достаточно близкой к  $E$ .

Теорема 6. Пусть  $U_E$  - окрестность  $E$  в  $M_n(\mathbb{R})$ , где определено отображение  $\log$ , а  $U_0$  - окрестность нуля, в которой  $\exp(U_0) \subset U_E$ . Тогда:

- i)  $\exp \log X = X, X \in U_E; \log \exp Y = Y, Y \in U_0$ .
- ii) если  $A, B$  коммутируют и близки к  $E$ , то

$$\log(AB) = \log A + \log B$$

Отдельные замечания (????).

1) Назовём однопараметрической подгруппой линейной группы Ли  $G$  гладкий гомоморфизм  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow G$ . Так как  $\sigma(t) = (\sigma(t/n))^n$ , то  $\sigma$  определяется своими значениями вблизи  $0 \in \mathbb{R}$ .

Пример в [ВА II, гл. 7], однопараметрической группы  $\sigma : t \mapsto \exp(tA)$ , определённой квадратной матрицей  $A$ , является в некотором смысле общим, поскольку локально  $G$  порождается кривыми  $\exp(tA), A \in L(G)$ .

2) Линейное представление группы Ли  $G$  - дифференцируемый гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ , где  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Коэффициенты матриц  $\Phi_g$  являются по определению дифференцируемыми функциями от  $g \in G$ . Наличие вещественной или комплексной структуры в  $G$  и  $V$  проявляется в нескольких вариантах. Линейные представления компактных групп Ли фактически определяются представлениями соответствующих алгебр Ли.

## On Global vector fields

## On Compactness

## On The exponential map

**Экспоненциальное представление и глобальная структура группы по Киселеву**

(спишу у Киселева, полезно для понимания, но не для применений)

## Lie algebras general properties

**Ado's theorem:** every finite-dimensional Lie algebra  $L$  over a field  $K$  of characteristic zero can be viewed as a Lie algebra of square matrices under the commutator bracket. More precisely,

$L$  has a linear representation  $\rho$  over  $K$ , on a finite-dimensional vector space  $V$ , that is a faithful representation, making  $L$  isomorphic to a subalgebra of the endomorphisms of  $V$ .

(??)

(?? importance of Ado's theorem??)

(??? вообще, с чего мы начинаем? с того, что понимаем, что у нас все алгебры классифицированы и мы берем конкретную матрицу Картана/диаграмму Дынкина/аналогичное, от нее и строим все свойства? Или как-то иначе можно начать?)

### Finding dimension of Lie algebras (???)

Way 1: see to which algebra it is isomorphic and count their dimensions

Way 2: (??? unknown counting of matrix elements by conditions)

Examples:

(?? I'll write 3 examples later)

### On Maurer-Cartan theory (???)

Форма Маурера - Картана  $\omega$  - глобально определённая на  $G$  форма, представляющая собой линейное отображение касательного пространств  $T_g G$  для каждого  $g \in G$  в  $T_e G$ . Она задаётся как перенос вектора  $T_g G$  под действием левого сдвига на группе:

$$\omega(v) = (L_{g^{-1}})_* v, \quad v \in T_g G$$

### On The classical Lie groups

(??)

### Killing form

#### Killing form

$$g_{\alpha\beta} \equiv \text{tr}(\text{ad } \Gamma_\alpha \cdot \text{ad } \Gamma_\beta) = (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\gamma (\text{ad } \Gamma_\beta)_{\bullet\gamma}^\mu = -f_{\alpha\mu}^\gamma f_{\beta\gamma}^\mu.$$

**Критерий Картана о полупростых группах:** если группа имеет инвариантную абелеву подгруппу, то метрика Киллинга вырождена, т.е.  $\det \|g_{\alpha\beta}\| = 0$ . Обратно, если метрика Киллинга вырождена, то группа имеет инвариантную абелеву подгруппу Ли. Другими словами, для того, чтобы группа Ли была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы метрика Киллинга была невырожденной.

Сумма собственных значений генератора полупростой компактной группы Ли равна нулю в любом представлении.

Proof: (???)

Метрика Киллинга имеет блочный вид: один блок для подалгебры Картана (генераторы с  $l$ ), другой для генераторов, не входящих в подалгебру Картана (генераторы с  $m$ ), т.е.

$$g = \left( \begin{array}{c|c} g_{ll'} & g_{lm'} \\ \hline g_{ml'} & g_{mm'} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} g_{ll'} & 0 \\ \hline 0 & g_{mm'} \end{array} \right)$$

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0, \quad l, l' \in \{1, n\},$$

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_m}] = (\mathbf{l}, \alpha_m) \Gamma_{\alpha_m}$$

### Cartan criterion for Killing form

### Метрика Киллинга и критерий Картана по Киселеву

### Inner product on the algebra

$$\kappa(x, y) := \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y), \quad \kappa(x, y) \in \mathbb{C}.$$

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]),$$

$$[X, [Y, Z]] = X_a Y_b Z_c [T^a, [T^b, T^c]] = X_a Y_b Z_c f_c^{ad} f_d^{be} T^e.$$

$$\kappa(X, Y) = \kappa^{ab} X_a Y_b, \quad \kappa^{ab} = f_c^{ad} f_d^{bc},$$

$$\kappa([Z, X], Y) + \kappa(X, [Z, Y]) = 0.$$

Proof:  $\kappa([Z, X], Y) = \text{tr}(\text{ad}_{[Z, X]} \text{ad}_Y) = \text{tr}(\text{ad}_Z \text{ad}_X \text{ad}_Y - \text{ad}_X \text{ad}_Z \text{ad}_Y)$ .

- For a simple Lie algebra, it can be shown that the properties of symmetry, linearity, and invariance under the adjoint action determine the inner product up to scalar multiples. (???)

- A real Lie algebra is of **compact type** if there is a basis where the Killing form is negative definite. Every finite-dimensional complex semi-simple Lie algebra has a real form of compact type, and if a Lie group  $G$  is compact, its Lie algebra is of compact type. (???)

- Cartan's criterion states the Killing form is nondegenerate if and only if  $\mathfrak{g}$  is semi-simple.

Proof forward: suppose  $\mathfrak{g}$  has an abelian ideal  $\mathfrak{i}$  so that the ideal has basis  $\{T^i\}$  and the rest of the Lie algebra has basis  $\{T^a\}$ . Then  $[T^i, T^j] = 0$  since  $\mathfrak{i}$  is abelian, and  $[T^i, T^a] \in \mathfrak{i}$  since  $\mathfrak{i}$  is an ideal. Consider  $\text{ad}_X \text{ad}_Y Z$  where  $Y \in \mathfrak{i}$ : if  $Z \in \mathfrak{i}$ , this is automatically zero. If  $Z \notin \mathfrak{i}$ , then  $\text{ad}_Y Z \in \mathfrak{i}$ , and hence  $\text{ad}_X \text{ad}_Y Z \in \mathfrak{i}$ . Hence  $\text{tr} \text{ad}_X \text{ad}_Y = 0$ , so  $\kappa(X, Y) = 0$  for any  $Y \in \mathfrak{i}$ , so  $\kappa$  is degenerate.

Proof that if  $\mathfrak{g}$  is simple, the Killing form is nondegenerate: if the Killing form was degenerate, then  $\exists Y : \kappa(X, Y) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}$ ,  $Y$  forms a nontrivial ideal  $\mathfrak{i}$ , as

$$\kappa(X, [Z, Y]) = -\kappa([Z, X], Y) = 0$$

$\forall Z \in \mathfrak{g}$ , so  $[Z, Y] \in \mathfrak{i}$ .

The Killing form defines a metric on  $T_e G$ , and we may extend this to a metric on  $G$  by left and right-translation. Adding an extra minus sign, if  $\mathfrak{g}$  is of compact type, then the metric on  $G$  is positive definite, and it can be shown that  $G$  is compact. Geodesics corresponding to the Levi-Civita connection of this metric are precisely the one-parameter subgroups of  $G$ .

$$f^{abc} := \kappa^{cd} f_d^{ab}.$$

For a Lie algebra of compact type, in a basis  $T^a$  where  $\kappa^{ab} = -\delta^{ab}$ ,

$$0 = \kappa(T^a, [T^b, T^c]) + \kappa([T^b, T^a], T^c) = f^{bca} + f^{bac}$$

We've often chosen our bases to satisfy this, such as in  $\mathfrak{su}(2)$ , where we had  $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ . The quadratic Casimir is generally defined as  $\kappa^{ab} T_a T_b$ , but in this special basis it is  $\sum_a (T_a)^2$ .

## 1.5.2 Root and weight lattices, Cartan-Weyl basis

### Concepts of roots and weights (!!!!!)

#### Concepts of roots and weights

For a finite-dimensional representation  $R$  with representation space  $V$  and suppose that  $R(H)$  is diagonalizable, with

$$R(H)v_\lambda = \lambda v_\lambda.$$

The eigenvalues  $\lambda$  are the **weights** of the representation  $R$ , and they are raised and lowered by 2 by  $E_\pm$ .

**highest weight**  $\Lambda$ :

$$R(H)v_\Lambda = \Lambda v_\Lambda, \quad R(E_+)v_\Lambda = 0.$$

If the representation is irreducible, then  $v_\Lambda$  must be unique, and we must be able to reach all of  $V$  by applying  $E_-$  repeatedly. Therefore the other eigenvectors are

$$v_{\Lambda-2n} = (R(E_-))^n v_\Lambda$$

$$[h, E^\alpha] = \text{ad}_h(E^\alpha) = \alpha(h)E^\alpha, \quad \forall h \in \mathfrak{g}_0; \quad \alpha(h) \in \mathbb{C}.$$

roots  $\alpha$  are linear functions on the CSA,  $\alpha \in \mathfrak{g}_0^*$ , in the dual vector space.

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{g}_0\}.$$

This thus contains the eigenvector  $E^\alpha$ . In semisimple algebras the roots are not degenerate, so for each root, there is a basis with one generator  $E^\alpha$ :

$$\mathfrak{g}_\alpha = \text{span}_{\mathbb{C}} \{E^\alpha\}.$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

$$|\alpha| := \sqrt{(\alpha, \alpha)},$$

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2|\beta|}{|\alpha|} \cos \phi \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} = \frac{2|\alpha|}{|\beta|} \cos \phi \in \mathbb{Z}$$

$$4 \cos^2 \phi \in \mathbb{Z}$$

$$\phi \in \{0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2\}$$

The constraint  $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$  says that the states in the  $\alpha$ -string through  $\beta$  have  $\alpha$  values that are half-integers or integers, in accordance with  $\mathfrak{sl}(2)$  representation theory. The other constraint says the same for the  $\beta$ -string through  $\alpha$ . Then the constraint is trivial when  $\alpha$  and  $\beta$  are orthogonal, but very restrictive otherwise.

In the Cartan-Weyl basis the Killing form is a block-diagonal matrix, with a block for the Cartan subalgebra, and  $2 \times 2$  blocks for pairs of roots  $\pm\alpha$ .

The root lattice:

$$\mathcal{L}[\mathfrak{g}] := \text{span}_{\mathbb{Z}} \{\alpha_{(i)}\}$$

The simple coroots (dual roots):

$$\check{\alpha}_{(i)} := \frac{2}{(\alpha_{(i)}, \alpha_{(i)})} \alpha_{(i)} \in \mathfrak{g}_0^*$$

$$\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} \equiv \frac{\alpha}{c_\alpha}, \quad \text{such that} \quad (\alpha, \alpha^\vee) = 2.$$

The coroot lattice:

$$\check{\mathcal{L}}[\mathfrak{g}] := \text{span}_{\mathbb{Z}} \{\check{\alpha}_{(i)}\}$$

The weight lattice:

$$\mathcal{L}_W[\mathfrak{g}] := \check{\mathcal{L}}^*[\mathfrak{g}] = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \text{ s.t. } (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z} \forall \mu \in \check{\mathcal{L}}[\mathfrak{g}]\}$$

(dual lattice of its coroot lattice).

$$A^{ij} := \left( \alpha^{(i)}, \alpha^{(j)\vee} \right).$$

$$(\alpha^\vee, \beta^\vee) = \kappa(H^\alpha, H^\beta),$$

$$\alpha(H^\beta) = (\alpha, \beta^\vee).$$

$$\begin{aligned}
 [H^\alpha, H^\beta] &= 0, \\
 [H^\alpha, E^\beta] &= (\alpha^\vee, \beta) E^\beta, \\
 [E^\alpha, E^{-\alpha}] &= H^\alpha \\
 [E^\alpha, E^\beta] &= e_{\alpha, \beta} E^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

(though the set  $H^\alpha$  is an over-complete set of operators to span the CSA).

**Root space** is a real linear combinations of the roots, the dual space of is called the **weight space**. We often use as basis of the root space

$$\mathfrak{B} := \left\{ \alpha^{(i)\vee} \right\}.$$

The basis of the weight space, dual to  $\mathfrak{B}$ , are the linear maps  $\Lambda_{(i)}$  with

$$\Lambda_{(i)} \left( \alpha^{(j)\vee} \right) = \delta_i^j. \quad (\text{fund-l weights})$$

$$\mathfrak{B}^* := \left\{ \Lambda_{(i)} | i = 1, \dots, r \right\}. \quad (\text{Dynkin basis})$$

Components of a weight in the Dynkin basis are called **Dynkin labels**. Those that appear most frequently are integers, which is the reason why we used already for  $\mathfrak{sl}(2)$  the weight  $\lambda$  rather than  $j_3 = \lambda/2$ . (??)

The **height** of a root  $\sum_i b_i \alpha^{(i)}$  is  $\sum_i b_i$ . This leads to the root space gradation.

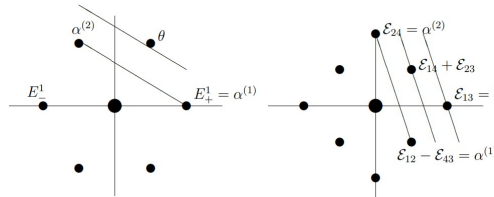
$$\begin{aligned}
 \mathfrak{g}_{(0)} &= \mathfrak{g}_0, \\
 \mathfrak{g}_{(j)} &= \text{span}_{\mathbb{C}} \{ E^\alpha | \text{height}(\alpha) = j \} \quad \text{for } j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.
 \end{aligned}$$

**Highest root**  $\theta$ : root with highest height. Properties

- For simple  $\mathfrak{g}$  this is a unique root.
- satisfies  $(\theta, \theta) \geq (\alpha, \alpha) \forall \alpha$ .
- $\forall$  other positive roots  $\beta : \theta - \beta$  is combination of simple roots with positive coefficients.

Hence for  $\theta = a_i \alpha^{(i)}$  and  $\beta = b_i \alpha^{(i)} : a_i \geq b_i \forall i$ .

Example for  $sl(3)$  and  $sp(4)$ :



**Cartan subalgebra** by one of def-s is a maximal abelian subalgebra consisting of semisimple elements:

$$[H^i, H^j] = 0. \quad i = 1, \dots, r$$

The rank is a minimal dimension of  $\mathfrak{g}_h$  between all semisimple elements  $h$  in the group

$$r = \min \dim \mathfrak{g}_h \text{ for } h \text{ semisimple element in } \mathfrak{g}.$$

### Basic properties of the root system

I. If  $\alpha$  is a root, then

$$\langle \alpha, \alpha \rangle \equiv |\alpha|^2 = (h_\alpha, h_\alpha) > 0$$

II. If  $\alpha$  is a root, so is  $-\alpha$ . These are associated to the "raising" and "lowering" root vector operators  $e_{\pm\alpha}$ .

III. The only allowed multiples of  $\alpha$  in the root system are  $\{-\alpha, 0, \alpha\}$ , with the center weight belonging to the Cartan subalgebra  $H$ .

IV. Root systems come in two different varieties. Either (a) all roots have the same norm  $|\alpha|^2$ , or (b) each root has one of two lengths, "short" or "long." A Lie algebra in which all roots have the same length is said to be simply-laced.

V. If  $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$  are all roots, then

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta}, \quad N_{\alpha,\beta} \neq 0$$

In other words, "all possible moves are allowed in the root system."

VI. There is only one linearly independent root vector associated to each root. The weight space is defined as the degeneracy of a particular weight in an irreducible representation. The weight space of all weights in the adjoint is one-dimensional, except for the  $r$ -dimensional Cartan subalgebra with weight 0 .

VII. In the adjoint representation, the maximum length of any weight chain is 4 .



VIII. If  $\alpha$  and  $\beta$  are roots, then  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Q}$ , where  $\mathbb{Q}$  (rational numbers). The set of roots forms an overcomplete basis for  $H^*$ , but we can choose a subset  $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_r\}$  to use as a complete basis.

$$\text{weight } \rho = \sum_{j=1}^r \kappa_j^{(\rho)} \bar{\alpha}_j, \quad \kappa_j^{(\rho)} \in \mathbb{Q}$$

- The roots span all of  $\mathfrak{h}^*$  (if some direction was not represented, we would have a Cartan subalgebra element that commuted with everything in the group, giving an abelian ideal).

- The roots are nondegenerate, so there is exactly one step operator  $E^\alpha$  for each root  $\alpha$ . (??? why??)

- Note that  $\text{ad}_{E^\alpha}$  raises roots by  $\alpha$ , where we regard the Cartan subalgebra itself as associated with the zero root,

$$\kappa(H^i, E^\alpha) = 0, \quad \kappa(E^\alpha, E^\beta) = 0 \quad \text{if} \quad \alpha + \beta \neq 0$$

because only  $\text{ad}_{E^\alpha} \text{ad}_{E^{-\alpha}}$  and  $\text{ad}_{H^i} \text{ad}_{H^j}$  can take roots to themselves.

Another proof:

$$\alpha(H') \kappa(H, E^\alpha) \equiv \kappa(H, [H', E^\alpha]) = -\kappa([H, H'], E^\alpha) = 0 \quad \forall H'$$

$$\Rightarrow \kappa(H, E^\alpha) = 0.$$

$$(\alpha(H') + \beta(H')) \kappa(E^\alpha, E^\beta) = \kappa([H', E^\alpha], E^\beta) + \kappa(E^\alpha, [H', E^\beta]) = 0$$

$$\text{so if } \alpha + \beta \neq 0 \Rightarrow \kappa(E^\alpha, E^\beta) = 0.$$

### Cartan-Weyl basis

| Chevalley-Serre                                           | Cartan-Weyl                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $[H^i, H^j] = 0$                                          | $[H^\alpha, H^\beta] = 0$                                                                       |
| $[H^i, E_\pm^j] = \pm A^{ji} E_\pm^j$                     | $[H^\alpha, E^\beta] = (\alpha^\vee, \beta) E^\beta$                                            |
| $[E_+^i, E_-^j] = \delta_{ij} H^j$                        | $[E^\alpha, E^{-\alpha}] = H^\alpha$                                                            |
| $\left(\text{ad}_{E_\pm^i}\right)^{1-A^{ji}} E_\pm^j = 0$ | $[E^\alpha, E^\beta] = e_{\alpha, \beta} E^{\alpha+\beta} \quad \text{for } \alpha \neq -\beta$ |

We use Killing form to correspond elements of  $\mathfrak{h}$  and  $\mathfrak{h}^*$  (define a nondegenerate inner product on  $\mathfrak{h}^*$ ):

$$\kappa(H, H') = \kappa^{ij} e_i e'_j, \quad H = H^i e_i, \quad H' = H^i e'_i$$

$$H^\alpha : \quad \kappa(H^\alpha, H) = \alpha(H), \quad H^\alpha = (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^j H^i$$

We define an inner product on the  $H^\alpha$ , and hence an inner product on the roots, by

$$(\alpha, \beta) = \kappa(H^\alpha, H^\beta) = (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^i \beta^j$$

The inverse here is just the result of lowering indices, analogous to how the metric and inverse metric are related in differential geometry.

Next, we work out more of the algebra in the Cartan-Weyl basis.

- By the Jacobi identity, we have

$$[H^i, [E^\alpha, E^\beta]] = -[E^\alpha, [E^\beta, H^i]] - [E^\beta, [H^i, E^\alpha]] = (\alpha^i + \beta^i) [E^\alpha, E^\beta]$$

Therefore,  $[E^\alpha, E^\beta]$  is proportional to  $E^{\alpha+\beta}$  if  $\alpha + \beta$  is a root, as anticipated above.

- For the case  $\alpha + \beta = 0$ , note that

$$\kappa([E^\alpha, E^{-\alpha}], H) = \kappa(E^\alpha, [E^{-\alpha}, H]) = \alpha(H) \kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) = \kappa(H^\alpha, H) \kappa(E^\alpha, E^{-\alpha})$$

where we used the invariance of the Killing form. By the results we found from nondegeneracy of the Killing form, we may conclude

$$H^\alpha = \frac{[E^\alpha, E^{-\alpha}]}{\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha})}$$

- In summary, the algebra for the step operators takes the form

$$[E^\alpha, E^\beta] = \begin{cases} \kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) H^\alpha & \alpha + \beta = 0 \\ N_{\alpha, \beta} E^{\alpha+\beta} & \alpha + \beta \in \Phi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Here, the  $N_{\alpha, \beta}$  are unknown complex numbers. Finally, we have

$$[H^\alpha, E^\beta] = (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^i [H^j, E^\beta] = (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^i \beta^j E^\beta = (\alpha, \beta) E^\beta$$

- To simplify these relations, we rescale all of our operators, as

$$e^\alpha = \sqrt{\frac{2}{(\alpha, \alpha) \kappa(E^\alpha, E^{-\alpha})}} E^\alpha, \quad h^\alpha = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} H^\alpha$$

Here we've implicitly assumed that  $(\alpha, \alpha) \neq 0$ , which we will show below. Our algebra simplifies to the final form

$$[h^\alpha, h^\beta] = 0, \quad [h^\alpha, e^\beta] = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} e^\beta, \quad [e^\alpha, e^\beta] = \begin{cases} h^\alpha & \alpha + \beta = 0 \\ n_{\alpha, \beta} e^{\alpha+\beta} & \alpha + \beta \in \Phi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Example in  $\mathfrak{sl}(3)$  :  $h = H_Y$ , then  $\mathfrak{g}_h = \text{span}\{E_-^1, H^1, H^2, E_+^1\}$ , while for  $h = H^1$ ,  $\mathfrak{g}_h = \text{span}\{H^1, H^2\}$ . In physics: the rank of the algebra is the maximal number of quantum numbers of states.

### The Chevalley basis

This is a changed of normalization Cartan-Weyl basis.

$$[E^\alpha, E^{-\alpha}] = c_\alpha \kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) \cdot H^\alpha = \kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) \sum_{i=1}^r \alpha_i H^i.$$

We set  $\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) = 2/(\alpha, \alpha) \forall \alpha$  (this amounts to setting  $\tilde{\alpha} = \alpha^\vee$ ), then

$$[E^\alpha, E^{-\alpha}] = H^\alpha,$$

$$[H^\alpha, E^{\pm\alpha}] = \sum_{i=1}^r (\alpha^\vee)_i [H^i, E^{\pm\alpha}] = \pm (\alpha, \alpha^\vee) E^{\pm\alpha}, \text{ i.e.}$$

$$[H^\alpha, E^{\pm\alpha}] = \pm 2E^{\pm\alpha}.$$

A Cartan-Weyl basis with such normalizations is called a **Chevalley basis** of  $\mathfrak{g}$ .  
the roots the Killing form is given by

$$\kappa(E^\alpha, E^\beta) = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \delta_{\alpha, -\beta}$$

in the Chevalley basis.

The classification of compact, semi-simple Lie algebras  $G$ , and their dimension and the dimension of the fundamental representation  $F$ :

| $G$      | $SU(N)$   | $SO(N)$               | $Sp(N)$     | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ | $F_4$ | $G_2$ |
|----------|-----------|-----------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\dim G$ | $N^2 - 1$ | $\frac{1}{2}N(N - 1)$ | $N(2N + 1)$ | 78    | 133   | 248   | 52    | 14    |
| $\dim F$ | $N$       | $N$                   | $2N$        | 27    | 56    | 248   | 6     | 7     |

### Root strings, reconstruction of roots from simple roots

#### Formalism of root strings

$$[h^\alpha, e^{\pm\alpha}] = \pm 2e^{\pm\alpha}, \quad [e^\alpha, e^{-\alpha}] = h^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{sl}(2)_\alpha$$

$\alpha$ -string through  $\beta$ :

$$S_{\alpha, \beta} := \{\beta + n\alpha \in \Phi | n \in \mathbb{Z}\}$$

$$V_{\alpha, \beta} := \text{span}(e^\delta | \delta \in S_{\alpha, \beta})$$

$$[h^\alpha, e^{\beta+n\alpha}] = \frac{2(\alpha, \beta + n\alpha)}{(\alpha, \alpha)} e^{\beta+n\alpha} = \left( \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} + 2n \right) e^{\beta+n\alpha}$$

$$[e^{\pm\alpha}, e^{\beta+n\alpha}] \propto \begin{cases} e^{\beta+(n\pm 1)\alpha} & \text{if } \beta + (n \pm 1)\alpha \text{ is a root} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Therefore,  $V_{\alpha, \beta}$  is a representation of  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$ .

$$S = \left\{ \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} + 2n \mid \beta + n\alpha \in S_{\alpha, \beta} \right\}$$

Since the weights are nondegenerate and evenly spaced, the representation is a finite-dimensional irrep. Therefore we must have  $S = \{\Lambda, -\Lambda + 2, \dots, \Lambda - 2, \Lambda\}; \Lambda \in \mathbb{N}$ .

- If the range of  $n$  is  $n_- \leq n \leq n_+$ , we have

$$-\Lambda = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} + 2n_-, \quad \Lambda = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} + 2n_+$$

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = -(n_+ + n_-) \in \mathbb{Z}$$

$$[H^i, E^\alpha] = \alpha^i E^\alpha,$$

$$\kappa^{ij} = \kappa(H^i, H^j) = \text{tr}(\text{ad}_{H^i} \text{ad}_{H^j}) = \sum_{\delta \in \Phi} \alpha^i \alpha^j$$

$$(\alpha, \beta) = \alpha^i \beta^j (\kappa^{-1})_{ij} = \alpha_i \beta_j \kappa^{ij} = \sum_{\delta \in \Phi} \alpha_i \delta^i \delta^j \beta_j = \sum_{\delta \in \Phi} (\alpha, \delta) (\beta, \delta)$$

$$\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = \sum_{\delta \in \Phi} \frac{(\alpha, \delta)}{(\alpha, \alpha)} \frac{(\beta, \delta)}{(\beta, \beta)}$$

so if  $(\beta, \beta)$  is real, then  $(\alpha, \beta)$  is real. Moreover,

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{\delta \in \Phi} (\alpha, \delta)^2 > 0$$

### Properties of root strings by FS

Since the lowest weight of an irreducible module of  $\mathfrak{sl}(2)$  is minus the highest weight, it also follows that  $(\beta - n_- \alpha)(H^\alpha) = -(\beta + n_+ \alpha)(H^\alpha)$ , which implies that  $(\beta, \alpha^\vee) = \beta(H^\alpha) = \frac{1}{2}(n_- - n_+) \alpha(H^\alpha)$ , i.e.

$$(\beta, \alpha^\vee) = n_- - n_+$$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &\in \Phi & \text{if } (\alpha, \beta) > 0 \\ \alpha + \beta &\in \Phi & \text{if } (\alpha, \beta) < 0 \end{aligned}$$

$$\frac{e_{\beta, -\alpha-\beta}}{e_{-\alpha-\beta, \alpha}} = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}, \quad \frac{e_{-\alpha-\beta, \alpha}}{e_{\alpha, \beta}} = \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha + \beta, \alpha + \beta)}$$

provided that  $\alpha + \beta$  is a root.

If each of  $\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma$  and  $\alpha + \beta + \gamma$  is a root, the Jacobi identity applied to  $E^\alpha, E^\beta$  and  $E^\gamma$  gives

$$e_{\alpha, \beta} e_{\alpha+\beta, \gamma} + e_{\beta, \gamma} e_{\beta+\gamma, \alpha} + e_{\gamma, \alpha} e_{\alpha+\gamma, \beta} = 0$$

The highest weight vector  $v_\Lambda$  of the  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$ -module under consideration is the step operator  $E^{\beta+n_+\alpha}$ . Analogously,  $E^\beta$  is the vector  $v_{\Lambda-2n_+}$  with weight  $\lambda = \Lambda - 2n_+ = n_- - n_+$ , so that

according to (5.39) application of  $E^\alpha$  yields a factor of  $1 + \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda) = n_- + 1$ , i.e. in terms of commutators we have  $[E^\alpha, E^\beta] = (n_- + 1) E^{\alpha+\beta}$ . A similar reasoning see shows that

$$[E^{-\alpha}, [E^\alpha, E^\beta]] = n_+ (n_- + 1) E^\beta$$

(???)

$$e_{-\alpha, -\beta} = -e_{\alpha, \beta}$$

$$(e_{\alpha, \beta})^2 = n_+ (n_- + 1) \frac{(\alpha + \beta, \alpha + \beta)}{(\beta, \beta)}$$

$$\frac{n_- + 1}{n_+} = \frac{(\alpha + \beta, \alpha + \beta)}{(\beta, \beta)}$$

$$e_{\alpha, \beta} = \pm (n_- + 1), \text{ i.e.}$$

$$[E^\alpha, E^\beta] = \pm (n_- + 1) E^{\alpha+\beta}$$

### Simple and positive roots

**Simple root** is a positive root which cannot be written as a positive linear combination of positive roots. Geometrically, these are typically the positive roots closest to the hyperplane.

- If  $\alpha$  and  $\beta$  are simple roots, then  $\alpha - \beta$  is not a root. To see this, note that if  $\alpha - \beta$  were a positive root,  $\alpha$  could not be simple, while if it were a negative root,  $\beta$  could not be simple.

- If  $\alpha$  and  $\beta$  are distinct simple roots, then the  $\alpha$ -string through  $\beta$  has

$$n_- = 0, \quad n_+ = -\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$$

Since we know  $n_+ \geq 0$ , we have  $(\alpha, \beta) \leq 0$ .

for simple roots  $\alpha_{(i)}$ ,

$$\lambda = \sum_{c_i \geq 0} c_i \alpha_{(i)} + \sum_{c_i < 0} c_i \alpha_{(i)} \equiv \lambda_+ - \lambda_-$$

Then we have, assuming the  $c_i$  are not all zero,

$$(\lambda, \lambda) = (\lambda_+ - \lambda_-, \lambda_+ - \lambda_-) > -2(\lambda_+, \lambda_-) = 2 \sum_{c_i \geq 0} \sum_{c_j < 0} c_i c_j (\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)}) > 0$$

Bases for a generic weight  $\Lambda \in H^*$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{j=1}^n \kappa_j^{(\Lambda)} \bar{\alpha}_j, & \text{Expansion in terms of simple roots,} \\ &= \sum_{j=1}^n \kappa_j^{\vee(\Lambda)} \bar{\alpha}_j^\vee, & \text{Expansion in terms of simple coroots,} \\ &= \sum_{j=1}^n \Lambda_j \omega_j, & \text{Expansion in terms of fundamental weights.} \end{aligned}$$

Let  $\Pi$  denote the set of simple roots. Let  $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \Pi (\bar{\alpha} \neq \bar{\beta})$ . We assert the following simple root facts:

I.  $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$  and  $\bar{\beta} - \bar{\alpha}$  are not roots, which implies that [Eq. (4.4.11c)]

$$ad_{e_-}(e_{\bar{\alpha}}) = [e_{-\bar{\beta}}, e_{\bar{\alpha}}] = 0, \quad ad_{e_{-\bar{\alpha}}}(e_{\bar{\beta}}) = [e_{-\bar{\alpha}}, e_{\bar{\beta}}] = 0.$$

In other words, simple roots are lowest weight states in mutually-generated strings. Proof: Either  $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$  or  $\bar{\beta} - \bar{\alpha}$  is positive. Then either  $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{\beta}$  or  $\bar{\beta} = (\bar{\beta} - \bar{\alpha}) + \bar{\alpha}$  is not simple (contradiction).

II.  $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle \leq 0$ , i.e. the angle between simple roots is obtuse (or  $90^\circ$ ).

Proof: The MWDF Eq. (5.1.23) implies that

$$(m-p)_{\bar{\alpha};\bar{\beta}} = -p_{\bar{\alpha};\bar{\beta}} = \frac{2\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle}{\langle \bar{\beta}, \bar{\beta} \rangle} \Rightarrow \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle \leq 0$$

since  $\langle \bar{\beta}, \bar{\beta} \rangle > 0$  [Proposition (I.), Sec. 5.2.2].

III. The set of simple roots  $\Pi$  is linearly independent, and can be employed as a basis for the positive roots.

Proof: Assume that this is not true, and write  $\Pi = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ . Linear dependence means

$$\sum_{\bar{\alpha}_i \in \Pi_1} a_i \bar{\alpha}_i - \sum_{\bar{\beta}_j \in \Pi_2} b_j \bar{\beta}_j = 0, \quad a_i, b_j \geq 0 \forall \{i, j\}$$

Take the inner product with respect to the first term to get

$$\sum_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \in \Pi_1} a_i a_j \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = \sum_{\bar{\alpha}_i \in \Pi_1, \bar{\beta}_j \in \Pi_2} a_i b_j \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j \rangle$$

The left-hand side is a positive squared-norm, but the right-hand side is a sum of negative terms (contradiction).

IV. Every positive root  $\rho > 0$  can be written as a sum of simple roots with non-negative, integer coefficients  $\{\kappa_i^{(\rho)}\}$ :

$$\rho = \sum_{i=1}^r \kappa_i^{(\rho)} \bar{\alpha}_i, \quad \rho \in \Delta_+, \quad \kappa_i^{(\rho)} \in \mathbb{N}_0$$

$$k \equiv \sum_{i=1}^r \kappa_i^{(\rho)} \in \{1, 2, \dots\}$$

Decomposition of a positive root in terms of simple roots with non-negative integer coefficients.

Level  $k$  of the positive root  $\rho$ .

Here  $\mathbb{N}_0$  denotes the set of natural numbers including zero.

### Metric on weight space and Quadratic form matrices

for roots and weights:

$$\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha^{(i)\vee} = \sum_{j=1}^r \lambda^j \Lambda_{(j)}$$

$$\lambda_i = (\lambda, \Lambda_{(i)}), \quad \lambda^i = (\lambda, \alpha^{(i)\vee})$$

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^r G_{ij} \lambda^j, \quad \lambda^i = \sum_{j=1}^r G^{ij} \lambda_j$$

$$G_{ij} := (\Lambda_{(i)}, \Lambda_{(j)}), \quad G^{ij} := (\alpha^{(i)\vee}, \alpha^{(j)\vee}) = \frac{2}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} A^{ij}$$

$$\Lambda_{(i)} (\alpha^{(j)\vee}) = \delta_i^j \Rightarrow$$

$$(\alpha^{(j)\vee})_i = \delta_i^j = (\Lambda_{(i)})^j, \quad (\alpha^{(j)})_i = \frac{1}{2} (\alpha^{(j)}, \alpha^{(j)}) \delta_i^j$$

$$(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mu^i = \sum_{i,j=1}^r G_{ij} \lambda^i \mu^j = \sum_{i,j=1}^r G^{ij} \lambda_i \mu_j$$

$G = (G_{ij})$  is a **quadratic form matrix** of  $\mathfrak{g}$ ;

$$(\alpha^{(i)})^j \equiv \sum_{k=1}^r (\alpha^{(i)})_k G^{kj} = A^{ij}$$

The components of the simple roots in the Dynkin basis coincide with the rows of the Cartan matrix.

### Master Weight Depth Formula (MWDF) and root building algorithm by Foster

For weight  $M$  in the string of length  $p + 1 + m$  ( $m, p \geq 0$ ),

$$\{M + p\alpha, M + (p-1)\alpha, \dots, M + \alpha, M, M - \alpha, \dots, M - (m-1)\alpha, M - m\alpha\}$$

$$m - p = \langle M, \alpha^\vee \rangle,$$

Master Weight Depth Formula (MWDF)

$$\alpha^\vee \equiv \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle},$$

coroot associated to root  $\alpha$

### Root building algorithm:

1. At level  $k = 1$  we have the simple roots  $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_r\}$ . Let  $\rho = \bar{\alpha}_{j_0}$  (a particular simple root), so that

$$p_{\rho; \bar{\alpha}_i} = -A_{j_0 i}, \quad (i \neq j_0)$$

$\Rightarrow$  The number of weights above  $\rho$  in the chain generated by raising with  $e_{\bar{\alpha}_i}$  is given by  $-A_{j_0 i}$ . We label each simple root  $\rho = \bar{\alpha}_{j_0}$  by a row of the Cartan matrix

$$[A_{j_0 1} A_{j_0 2} \cdots A_{j_0 r}] \equiv [\Lambda_1^{(1)} \Lambda_2^{(1)} \cdots \Lambda_r^{(1)}]$$

The integers  $\{\Lambda_i^{(1)}\}$  are the Dynkin labels for the level-1 weight  $\rho = \bar{\alpha}_{j_0}$ .

2. To find all level  $k = 2$  roots, examine the Dynkin labels  $[\Lambda_1 \cdots \Lambda_r]$  for each simple root  $\bar{\alpha}_{j_0}$ . Whenever  $A_{j_0 j_1} < 0$ ,  $\rho = \bar{\alpha}_{j_0} + \bar{\alpha}_{j_1}$  is a valid positive root. For each valid positive root  $\rho$  at  $k = 2$ , record the sum of the corresponding rows of the Cartan matrix,

$$\sum_{j=1}^r \kappa_j^{(\rho)} A_{ji} = A_{j_0 i} + A_{j_1 i} \quad \Leftrightarrow \quad [(A_{j_0 1} + A_{j_1 1}) \cdots (A_{j_0 r} + A_{j_1 r})] \equiv [\Lambda_1^{(2)} \Lambda_2^{(2)} \cdots \Lambda_r^{(2)}]$$

3. To find all level  $k = 3$  roots, proceed as follows. Consider each  $k = 2$  root  $\rho$ . To determine if  $\rho + \bar{\alpha}_i$  is a valid root, compute

$$p_{\rho; \bar{\alpha}_i} = m_{\rho; \bar{\alpha}_i} - \Lambda_i^{(2)}$$

where  $m_{\rho; \bar{\alpha}_i} \in \{0, 1\}$  and the Dynkin coefficient  $\Lambda_i^{(2)}$  were computed in step (2.), above. If  $p_{\rho; \bar{\alpha}_i} > 0$ , then  $\rho + \bar{\alpha}_i$  is a valid root.

The algorithm iterates until the highest root  $\theta$  is reached.

Same in another words by Zhou:

- For a general root  $\beta = \sum_i \alpha_{(i)} k_i$ , let  $k = \sum_i k_i$  (Cartan subalgebra has  $k = 0$ , simple roots have  $k = 1$ ).

- For each simple root  $\alpha_{(j)}$ , we draw a box with entries

$$A_{ji} \quad \leftrightarrow \quad c_i := -(n_+ + n_-)$$

(we just write row  $j$  of the Cartan matrix) If  $c_i < 0$ , then we can add the root  $\alpha_{(i)}$ , and hence we can construct the  $k = 2$  roots.

- For each  $k = 2$  root, we again draw a box; its entries  $c_i$  are the sum of the root it came from and the simple root added to it. We can then continue systematically upward in  $k$ , since at every point we know the value of  $n_-$ , until the procedure terminates. We then reflect to get all the negative roots.

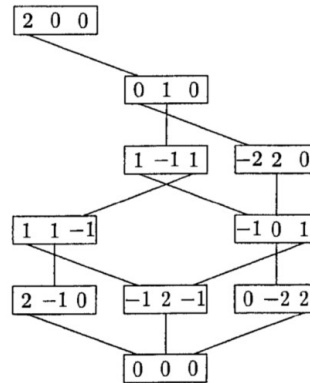
- A slightly faster method is to start from the simple roots and draw all possible root strings all the way to the end. This will produce some roots with new negative  $c_i$ , which sit at the bottom of new root strings. We then repeat this process until termination.



### Examples of reconstructing roots from simple roots

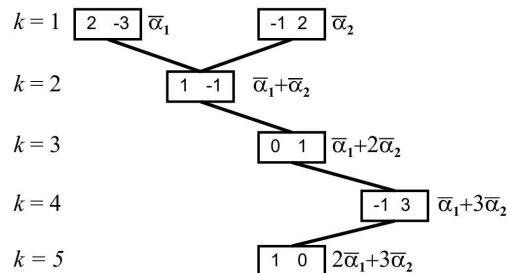
Example: (we go up and building roots!)

$$A_{C_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$



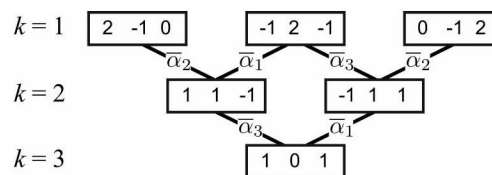
Eg. for  $G_2$ :

$$\hat{A}_{G_2} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Eg. for  $su(4) = A_3$ :

$$\hat{A}_{A_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



### Building Highest weight representation (???)

We can obtain highest weight repr. using the MWDF. This is the complement to the positive-root-building algorithm, but now, we subtract simple roots to generate all of the weights from the highest one:

#### Algorithm of constructing Highest weight representation

Algorithm in  $su(3)$  example is:

1. We start with the highest weight state

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

The depths are given by the Dynkin coefficients,

$$m_{\Lambda; \bar{\alpha}_1} = 1, \quad m_{\Lambda; \bar{\alpha}_2} = 0$$

2. At the second depth level, we know that  $\Lambda^{(2)} \equiv \Lambda - \bar{\alpha}_1$  is a valid weight. Its Dynkin coefficients are

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

The heights are

$$p_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_1} = 1, \quad p_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_2} = 0$$

so that the depths below this level are

$$\begin{aligned} m_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_1} &= p_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_1} + \Lambda_1^{(2)} = 1 - 1 = 0 \\ m_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_2} &= p_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_2} + \Lambda_2^{(2)} = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

3. At the third depth level, we know that  $\Lambda^{(3)} \equiv \Lambda^{(2)} - \bar{\alpha}_2$  is a valid weight. Its Dynkin coefficients are

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

The heights are

$$p_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_1} = 0, \quad p_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_2} = 1$$

so that the depths below this level are

$$m_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_1} = p_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_1} + 0 = 0, \quad m_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_2} = p_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_2} - 1 = 0$$

We conclude that  $\Lambda^{(3)}$  is the lowest weight state.

### Examples of constructing highest weight representation

## 1.5.3 Cartan matrix, Cartan classification, Dynkin diagrams

### On The Cartan matrix

The Cartan matrix of a Lie algebra is by def an  $r \times r$  matrix  $A$ :

$$A^{ij} := \frac{2(\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)})}{(\alpha_{(j)}, \alpha_{(j)})} \in \mathbb{Z}$$

- For each simple root  $\alpha_{(i)}$ , we have an  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebra with operators  $h^i \equiv h^{\alpha_{(i)}}$ ,  $e_{\pm}^i \equiv e_{\pm}^{\alpha_{(i)}}$ ,

$$[h^i, e_{\pm}^i] = \pm 2e_{\pm}^i, \quad [e_+^i, e_-^i] = h^i$$

These  $3r$  operators together generate all of  $\mathfrak{g}$  by brackets. A Cartan-Weyl basis chosen so that these  $3r$  operators are normalized in this way is called a Chevalley basis.

- In a Chevalley basis, the algebra is

$$[h^i, h^j] = 0, \quad [h^i, e_{\pm}^j] = \pm A^{ji} e_{\pm}^j, \quad [e_+^i, e_-^j] = \delta_{ij} h^i$$

We also have the Serre relations

$$\left(\operatorname{ad}_{e_{\pm}^i}\right)^{1-A^{ji}} e_{\pm}^j = 0$$

by the intuitive interpretation of  $A^{ij}$  above.

- A finite-dimensional, semi-simple complex Lie algebra is uniquely determined by its Cartan matrix. To reconstruct  $\mathfrak{g}$ , we start with the simple roots and construct all  $\alpha^{(i)}$  strings through  $\alpha^{(j)}$ , with the Cartan matrix telling us the length of all root strings. We then repeat this procedure until no more new roots appear.

- The Cartan matrix satisfies  $\det A > 0$ . To see this, note that the inner product in the basis of simple roots is

$$(\lambda, \mu) = (\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)}) \lambda^i \mu^j, \quad \lambda = \sum_i \lambda^i \alpha_{(i)}, \quad \mu = \sum_i \mu^i \alpha_{(i)}$$

Since the inner product is positive definite, the matrix with entries  $(\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)})$  is positive definite and hence has positive determinant. The Cartan matrix is the product of this matrix with a diagonal matrix with entries  $2/(\alpha_{(i)}, \alpha_{(i)})$  which also has positive determinant.

- If  $\mathfrak{g}$  is simple, then the Cartan matrix is not reducible, i.e. there is no reordering of the simple roots that makes  $A$  block-diagonal. Essentially, if the Cartan matrix were reducible, then the step operators generated by one of the blocks of simple roots (along with the corresponding Cartan subalgebra elements) would form a proper ideal of  $\mathfrak{g}$ .

### Length and geometry of roots

$$A^{ij} A^{ji} = 4 \cos^2 \phi \in \mathbb{Z}$$

which implies that  $A^{ij} A^{ji} \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

There are only a few possibilities. Taking the  $\alpha^{(i)}$  root to not be shorter without loss of generality, we have:

$A^{ij} = A^{ji} = 0$ . The simple roots are perpendicular with indefinite ratio of lengths; no other roots are attained by adding them.

$A^{ij} = A^{ji} = -1$ . The simple roots have equal length and angle  $120^\circ$ , and one additional root is attained by adding them.

$A^{ij} = -2, A^{ji} = -1$ . Then  $|\alpha_{(i)}| = \sqrt{2} |\alpha_{(j)}|$  and the angle is  $135^\circ$ .

$A^{ij} = -3, A^{ji} = -1$ . Then  $|\alpha_{(i)}| = \sqrt{3} |\alpha_{(j)}|$  and the angle is  $150^\circ$ .

### Classifications of Lie algebras (!!!!)

The Cartan classification of finite-dimensional simple complex Lie algebras has two steps:

1. Classify all possible Cartan matrices.
2. Show that a Cartan matrix uniquely determines each Lie algebra.

The constraints on the Cartan matrix:

- (a)  $A^{ii} = 2\forall i$ .
- (b) Symmetry of the linear product gives  $A^{ij} = 0 \iff A^{ji} = 0$ .
- (c)  $(\alpha, \beta) \leq 0$  for  $\alpha \neq \beta \in \Phi_S \implies A^{ij} \in \mathbb{Z} \leq 0 \forall i \neq j$ .
- (d) Euclidean inner product implies  $\det A > 0$ .
- (e)  $\mathfrak{g}$  simple implies  $A$  is not reducible.

$$A^{ij}A^{ji} \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (\text{no summation}),$$

and that simple complex Lie algebras can have roots of at most 2 distinct lengths.

To represent the structure of a Lie algebra, we use Dynkin diagrams, which we construct in the following way:

- Draw a node  $\bullet$  for each simple root  $\alpha_{(i)}$ .
- Join the nodes representing  $\alpha_{(i)}$  and  $\alpha_{(j)}$  with  $\max(|A^{ij}|, |A^{ji}|) \in \{0, 1, 2, 3\}$  lines.
- If more than one line connects two nodes, draw an arrowhead pointing from the longer root to the shorter one.

Все линейные преобразования алгебры Ли в пространстве присоединенного представления суть либо линейные комбинации  $N_G - n$  обратимых линейных преобразований одного базисного состояния в другое с изменением веса этого базисного состояния, либо  $n$  преобразований, которые оставляют неизменным вес состояния и сохраняют само базисное состояние, домножая это состояние на собственное значение соответствующего генератора

### On Simple Lie algebras

#### On The highest root and the Weyl vector

#### On The orthonormal basis of weight space (???)

By imposing the orthonormality condition  $(\alpha^{(2)}, \Lambda_{(j)}) = \delta_i^j$ , one easily obtains the expressions for the fundamental weights in the orthonormal basis of  $\mathfrak{g}_0^*$ . For  $A_r$ :

$$\Lambda_{(j)} = \sum_{i=1}^j e_i - \frac{j}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} e_i$$

$\forall j = 1, 2, \dots, r$ . For the remaining classical algebras the result is

$$\Lambda_{(j)} = \sum_{i=1}^j e_i \equiv (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{j \text{ times}}, 0, 0, \dots, 0)$$

$\forall j = 1, 2, \dots, r$ , except for the following special cases:

$$\begin{aligned} \Lambda_{(r)} &= \frac{1}{2}(1, 1, \dots, 1, 1, 1) && \text{for } B_r \text{ and } D_r \\ \Lambda_{(r-1)} &= \frac{1}{2}(1, 1, \dots, 1, 1, -1) && \text{for } D_r. \end{aligned}$$

From these formulæ one then deduces the following relations between the components  $\lambda^i$  of a weight  $\lambda$  in the Dynkin basis and its components  $\ell^i$  in the orthogonal basis:

$$\begin{aligned} A_r : \quad \ell^j(\lambda) &= \sum_{i=j}^r \lambda^i - \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^r i \lambda^i, \\ B_r : \quad \ell^j(\lambda) &= \sum_{i=j}^{r-1} \lambda^i + \frac{1}{2} \lambda^r, \quad C_r : \quad \ell^j(\lambda) = \sum_{i=j}^r \lambda^i, \\ D_r : \quad \ell^j(\lambda) &= \begin{cases} \sum_{i=j}^{r-2} \lambda^i + \frac{1}{2} (\lambda^{r-1} + \lambda^r) & \text{for } i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \frac{1}{2} (\lambda^{r-1} - \lambda^r) & \text{for } i = r. \end{cases} \end{aligned}$$

The inverse transformation is given by

$$\lambda^j = \ell^j(\lambda) - \ell^{j+1}(\lambda)$$

$\forall$  classical Lie algebras and all  $i = 1, 2, \dots, r$ , except for

$$\begin{aligned} \lambda^r &= 2\ell^r(\lambda) \quad \text{for } \mathfrak{g} = B_r, \\ \lambda^r &= \ell^r(\lambda) \quad \text{for } \mathfrak{g} = C_r, \\ \lambda^{r-1} &= \ell^{r-1} + \ell^r, \quad \lambda^r = \ell^{r-1} - \ell^r \quad \text{for } \mathfrak{g} = D_r. \end{aligned}$$

In particular, the components of the Weyl vector  $\rho$  in the orthogonal basis read

$$\begin{aligned} \ell^j(\rho) &= \tilde{\ell}(\mathfrak{g}) - j \quad \text{with} \\ \tilde{\ell}(A_r) &= \frac{r}{2} + 1, \quad \tilde{\ell}(B_r) = r + \frac{1}{2}, \quad \tilde{\ell}(C_r) = r + 1, \quad \tilde{\ell}(D_r) = r. \end{aligned}$$

### Kac-Moody aplebras (???)

These are infinite-dimensional algebras. Then the results above are not anymore all respected.

Affine Lie algebras: in these the Cartan matrix has one zero mode. E.g. this is the case for  $E_9$ , which appears in supergravity in  $D = 2$ .

Hyperbolic algebras have one negative mode in their Cartan matrix.

Dynkin diagrams can then have a loop, or other characteristics different to those that we saw before (? that what Proeyen wrote).

The simple Lie algebras are obtained by requiring that the  $r \times r$ -matrix  $A$  appearing in  $[H^2, E_{\pm}^j] = \pm A^{ji} E_{\pm}^j$  and  $(\text{ad}_{E_{\pm}^2})^{1-A^{3i}} E_{\pm}^j = 0$  is an (irreducible) Cartan matrix, i.e. is indecomposable ( $A \not\sim \begin{pmatrix} A_{(1)} & 0 \\ 0 & A_{(2)} \end{pmatrix}$ ) and obeys  $A^{ii} = 2$ ,  $A^{ij} = 0 \Leftrightarrow A^{ji} = 0$ ,  $A^{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ , and  $\det A > 0$ . In particular the rank of  $A$  is equal to  $r$ .

The Kac-Moody Lie algebras are obtained by requiring again that they are algebraically generated by Chevalley generators  $E_{\pm}^i, H^i$  modulo the relations (7.1), (7.2) and (7.3), but by also relaxing the conditions on the matrix  $A$ , which is then called a generalized Cartan matrix. In addition, one must usually enlarge the Cartan subalgebra by including so-called derivations, as will be described in the affine case in chapter 12.

(??? where are they used and are they important???)

### Affine Lie algebras (???)

The rank of the affine  $(r+1) \times (r+1)$  Cartan matrices is

$$\text{rank } A = r.$$

Once the classification of simple Lie algebras up to some given rank has been obtained, the classification of affine Lie algebras with that rank is straightforward. For  $r = 1$  one only has to determine the possible offdiagonal entries of  $A$  for which  $\det A \equiv A^{11}A^{22} - A^{21}A^{12} = 4 - A^{21}A^{12}$  is zero. Just like requiring  $\det A > 0$  immediately leads to the three simple rank-two Cartan matrices

$$A(A_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A(B_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A(G_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

the requirement  $\det A = 0$  yields the Cartan matrices of two rank-one affine algebras, which are denoted by  $A_1^{(1)}$  and  $A_1^{(2)}$ :

$$A(A_1^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A(A_1^{(2)}) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

### Диаграммы Дынкина в двух словах

#### Классификация простых компактных алгебр Ли

|       |       |       |        |              |
|-------|-------|-------|--------|--------------|
| $A_n$ | $(A)$ | $E_6$ | $(E)6$ |              |
| $B_n$ | $(B)$ | $E_7$ | $(E)7$ | $F_4$ $(F)4$ |
| $C_n$ | $(C)$ | $E_8$ | $(E)8$ | $G_2$ $(G)2$ |
| $D_n$ | $(D)$ |       |        |              |

(???? finally, how to classify Lie algebras????)

(???? finally, why exactly we have such a classification of Lie algebras????)

#### Смысл диаграмм Дынкина

Диаграмма Дынкина — это изображение всех простых положительных корней  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  алгебры Ли в виде точек с  $N = l_{ij} = \kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max}$  линиями, которые могут соединять эти корни по некоторым правилам.

- при  $\kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max} = 1 = l_{ij}$  единственная линия соединяет корневые векторы одинаковой длины (напоминаем, что согласно (I.4.23) отличное от нуля число линий равно отношению квадратов длин простых положительных корней);

- при  $\kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max} = 2 = l_{ij}$  две линии соединяют корни, один из которых в  $\sqrt{2}$  раз длинней;

- при  $\kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max} = 3 = l_{ij}$  три линии соединяют корни, один из которых в  $\sqrt{3}$  раз длинней;

- на двойных и тройных линиях стрелка указывает направление от большего корня к меньшему (см. диаграммы на рис. 1.3).

Если корни ортогональны, то они не соединяются линией. Для ортогональных простых положительных корней коммутатор равен нулю (см. (I.4.24)), и нет построенных по ним последовательностей, а поэтому групповые структурные константы с индексами этих корней обращаются в нуль. Здесь надо иметь в виду, что переход от эрмитовых генераторов алгебры Ли к базису Картана-Вейля означает, что и

структурные константы группы записываются в этом базисе, т.е. это константы  $N_{\alpha,\beta}$  - численные коэффициенты в выражении для коммутаторов двух генераторов  $[\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}]$ , задающих билинейный автоморфизм этих генераторов со всеми свойствами скобки Ли.

### Связные диаграммы

$$N_{ij} := \sqrt{-(\alpha_i, \alpha_j)},$$

$$[\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}] = N_{ij} \Gamma_{\alpha_i + \alpha_j}$$

Если в диаграмме Дынкина есть две компоненты связности, т.е. простые положительные корни образуют базис двух ортогональных пространств  $\{\alpha\}$  и  $\{\alpha'\}$  размерности  $\tilde{n}$  и  $\tilde{n}'$ , где ранг алгебры равен  $n = \tilde{n} + \tilde{n}'$ ,

$$[\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\alpha'}] = N_{\alpha, \alpha'} \Gamma_{\alpha + \alpha'} = \sqrt{-(\alpha, \alpha')} \Gamma_{\alpha + \alpha'} \equiv 0,$$

то подалгебра Картана также состоит из двух подпространств генераторов с размерностями  $\tilde{n}$  и  $\tilde{n}'$ ,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha}] = (\mathbf{l}, \alpha) \Gamma_{\alpha}, \quad [\Gamma_{l'}, \Gamma_{\alpha'}] = (\mathbf{l}', \alpha') \Gamma_{\alpha'},$$

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha'}] = (\mathbf{l}, \alpha') \Gamma_{\alpha'} = 0, \quad [\Gamma_{l'}, \Gamma_{\alpha}] = (\mathbf{l}', \alpha) \Gamma_{\alpha} = 0,$$

$\Gamma \oplus \Gamma'$ . Подобные коммутационные соотношения означают, что вблизи единицы элементы группы Ли, координаты которых задаются векторами касательного пространства, соответствующими этим алгебрам, с точностью до преобразований в касательном пространстве возле групповой единицы коммутируют

$$g_a \cdot g'_b \stackrel{\text{tangent}}{=} g'_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]} = g'_b \cdot g_a, \quad \text{ибо } g_{[a,b]} = e.$$

Запрещены замкнутые петли.

Proof: (???)

Из корня исходят не более трех линий.

Proof: (???)

На диаграмме может быть только одно двойное соединение.

Proof: (???)

На диаграмме не могут быть одновременно звездочка и двойное соединение.

Proof: (???)

На диаграмме может быть только одна звездочка.

Proof: (???)

Ограничение на диаграмму с двойной линией

Proof: (???)

Ограничение на диаграмму с ветвлением.

Proof: (???)

## 1.5.4 Symmetries of roots, Weyl group, Coxeter plane

### On The Weyl group

Any automorphism of the root system is a composition of a Weyl group element and a permutation which acts completely within the set  $\Phi_s$  of simple roots.

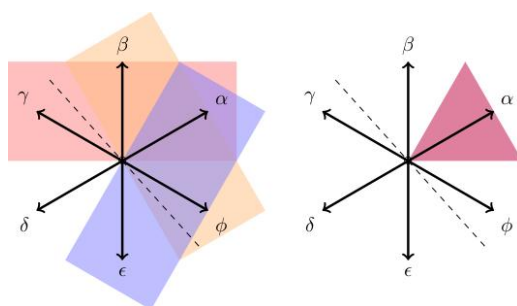
### On Fundamental reflections. Length and sign

### On Weyl chambers and Weyl reflections

**Weyl chamber** (with respect to our chosen hyperplane of irrational slope) is the set

$$\{v \in \mathbf{R}^n : \alpha \cdot v \geq 0 \ \forall \text{ positive roots } \alpha\}.$$

Example: In the  $A_2$  root system, the red, blue, and orange half-planes are the regions consisting of vectors whose dot product with  $\beta$ ,  $\alpha$ , respectively  $\phi$  is positive. Their intersection is the Weyl chamber shaded on the right.



(?????????)

### On The Weyl group in the orthogonal basis

### On The Weyl vector

### On The normalizer of the Cartan subalgebra

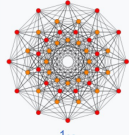
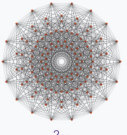
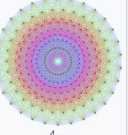
### On The Weyl group of affine Lie algebras

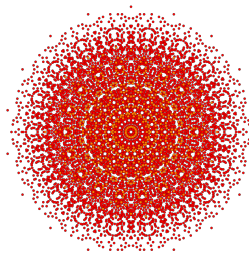
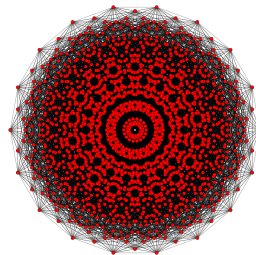
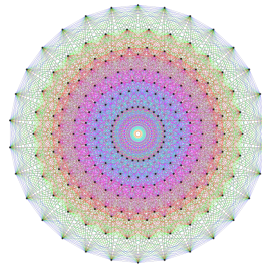
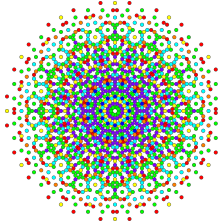
### Coxeter element

### Coxeter plane (????)

(see wiki, отдельно учить нужно, быстро такое не понять (????))



| Coxeter group          | $E_6$                                                                             | $E_7$                                                                             | $E_8$                                                                              |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Graph                  |  |  |  |
| Coxeter plane symmetry | $Dih_{12}, [12], (*12\bullet)$                                                    | $Dih_{18}, [18], (*18\bullet)$                                                    | $Dih_{30}, [30], (*30\bullet)$                                                     |



## On Coxeter groups

### 1.5.5 Real, compact, normal forms, complexification (???)

## On More about the Killing form

## Complexification (!!!!???)

Definition. Given a real Lie algebra  $\mathfrak{g}$ , we can find a basis  $\{T^a\}$  such that  $\mathfrak{g} = \text{span}_{\mathbb{R}} \{T^a\}$ . The complexification of  $\mathfrak{g}$  is the complex Lie algebra  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \text{span}_{\mathbb{C}} \{T^a\}$  with the same bracket.

Simple rule that we should find some of complex matrices (like  $\mathfrak{su}(n)$ ) and there will be no different signs of metric  $A(2,1) \rightarrow A(3)$ .

(This instruction often don't work. Sometimes complexification has  $*$  and sometimes there are *ups* algebras. Don't know better instruction now)

$\mathfrak{g}$  is said to be a real form of  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . A complex Lie algebra can have more than one real form.  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  is also a real Lie algebra with generators  $\{T^a\} \cup i\{T^a\}$ . The "real" dimension of  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  is  $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = 2 \dim \mathfrak{g}$ .

Example. For

$$\mathcal{L}(SU(2)) = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ T^a = -\frac{i}{2} \sigma_a; a = 1, 2, 3 \right\} = \{2 \times 2 \text{ traceless anti-Hermitian matrices} \}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(SU(2)) = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ T^a = -\frac{i}{2} \sigma_a; a = 1, 2, 3 \right\} = \{2 \times 2 \text{ traceless complex matrices} \}$$

In fact we also have:

$$\mathcal{L}(SL(2, \mathbb{C})) = \{2 \times 2 \text{ traceless complex matrices} \}$$

So  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(SU(2)) = \mathcal{L}(SL(2, \mathbb{C}))$ .

Definition. A real Lie algebra of **compact type** has a basis in which  $\kappa^{ab} = -\kappa \delta^{ab}$ .

Every complex, semi-simple, finite-dimensional Lie algebra has a real form of compact type.

| complex algebra                        | compact form               | normal form                     |
|----------------------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$         | $\mathfrak{su}(n)$         | $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  |
| $\mathfrak{so}(2\ell + 1, \mathbb{C})$ | $\mathfrak{so}(2\ell + 1)$ | $\mathfrak{so}(\ell + 1, \ell)$ |
| $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$         | $\mathfrak{sp}(n, 0)$      | $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  |
| $\mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$     | $\mathfrak{so}(2\ell)$     | $\mathfrak{so}(\ell, \ell)$     |

### On The Killing form of real Lie algebras with different signature in metric

We start with some condition with metric and imply it it matrix, then we obtain condition on generators.

Example:

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(2, 1) : \begin{cases} M^+ \eta M = \eta \\ \det M = 1 \end{cases} \\ M = \exp(\varepsilon T) \varepsilon \\ (1 + \varepsilon T)^+ \eta (1 + \varepsilon T) = \eta. \\ \eta + \underbrace{\varepsilon (T^+ \eta + \eta T)}_{=0} = \eta \\ T^+ = -\eta T \eta. \end{aligned}$$

(???) If we want to find a representation on some dimension that doesn't obey such metric (eg. for  $\mathfrak{su}(2,1)$  find representation with spin 4), then we need to do something with Cartan-Killing form (add it to theory later!).

### On The compact and the normal real form

**Normal form.** ('split real form'). The generators of the CSA and of the roots are real in the Cartan-Weyl basis. Thus these define a real form. The Cartan-Killing metric is positive on the CSA (squares of roots), and further nonzero between roots and their negatives. Using the canonical metric on the CSA and  $(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ , Thus it is diagonalized in the basis

$$H_i, \quad \frac{E_\alpha + E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{E_\alpha - E_{-\alpha}}{\sqrt{2}}$$

The metric is then +1 on the first two groups and -1 on the last, such that the character is the number of generators  $H_i$ , i.e. the rank of the algebra.

**Compact form.** We multiply the first two entries of (8.16) with i. One should check now that these commute with real coefficients to show that this is a valid real form. To check this, the essential property is  $e_{\alpha,\beta} = -e_{-\alpha,-\beta}$ . All generators have now negative eigenvalue in the Cartan-Killing metric.

The compact form thus contains all anti-hermitian generators,

$$\text{anti-hermitian generators} \iff \text{compact directions}$$

$$\text{hermitian generators} \iff \text{non-compact directions}$$

(????)

The finite-dimensional semisimple real Lie algebras are in one-to-one correspondence with pairs  $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \sigma)$ , where  $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$  is a finite-dimensional semisimple complex Lie algebra and  $\sigma$  is an involutive automorphism of  $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ .

### On The real forms of simple Lie algebras

| Complex extension               | compact form $\mathfrak{g}$ | Real form $\mathfrak{g}_*$                           | Maximal compact subalgebra $\mathfrak{k}$                           |
|---------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$  | $\mathfrak{su}(n)$          | $\mathfrak{su}(p, n-p)$                              | $\mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(n-p) \oplus \mathfrak{u}(1)$ |
| $\mathfrak{sl}(2n; \mathbb{C})$ | $\mathfrak{su}(2n)$         | $\mathfrak{su}^*(2n) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ | $\mathfrak{usp}(2n) = \mathfrak{u}(n, \mathbb{H})$                  |
| $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$  | $\mathfrak{su}(n)$          | $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$                       | $\mathfrak{so}(n)$                                                  |
| $\mathfrak{so}(n; \mathbb{C})$  | $\mathfrak{so}(n)$          | $\mathfrak{so}(p, n-p)$                              | $\mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q)$                          |
| $\mathfrak{so}(2n; \mathbb{C})$ | $\mathfrak{so}(2n)$         | $\mathfrak{so}^*(2n) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{H})$  | $\mathfrak{u}(n)$                                                   |
| $\mathfrak{sp}(2n; \mathbb{C})$ | $\mathfrak{usp}(2n)$        | $\mathfrak{usp}(2p, 2n-2p)$                          | $\mathfrak{usp}(2p) \oplus \mathfrak{usp}(2n-2p)$                   |
| $\mathfrak{sp}(2n; \mathbb{C})$ | $\mathfrak{usp}(2n)$        | $\mathfrak{sp}(2n)$                                  | $\mathfrak{u}(n)$                                                   |

| Algebra    | Real Form                   | Maximal compact subalgebra                                                                   |
|------------|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_{n-1}$  | $\mathfrak{su}(n)$          | $\mathfrak{su}(n)$                                                                           |
| $A_{n-1}$  | $\mathfrak{su}(p, n-p)$     | $\mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(n-p) \oplus \mathfrak{u}(1), \quad 1 \leq p \leq n/2$ |
| $A_{2n-1}$ | $\mathfrak{su}^*(2n)$       | $\mathfrak{usp}(2n)$                                                                         |
| $A_{n-1}$  | $\mathfrak{sl}(n)$          | $\mathfrak{so}(n)$                                                                           |
| $B_n$      | $\mathfrak{so}(2n+1)$       | $\mathfrak{so}(2n+1)$                                                                        |
| $B_n$      | $\mathfrak{so}(2n+1-p, p)$  | $\mathfrak{so}(2n+1-p) \oplus \mathfrak{so}(p), \quad 0 \leq p \leq n$                       |
| $B_n$      | $\mathfrak{so}(n, n+1)$     | $\mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(n+1)$                                                 |
| $D_n$      | $\mathfrak{so}(2n)$         | $\mathfrak{so}(2n)$                                                                          |
| $D_n$      | $\mathfrak{so}(2n-p, p)$    | $\mathfrak{so}(2n-p) \oplus \mathfrak{so}(p), \quad 0 \leq p \leq n$                         |
| $D_n$      | $\mathfrak{so}^*(2n)$       | $\mathfrak{u}(n)$                                                                            |
| $D_n$      | $\mathfrak{so}(n, n)$       | $\mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(n)$                                                   |
| $C_n$      | $\mathfrak{usp}(2n)$        | $\mathfrak{usp}(2n)$                                                                         |
| $C_n$      | $\mathfrak{usp}(2p, 2n-2p)$ | $\mathfrak{usp}(2p) \oplus \mathfrak{usp}(2n-2p), \quad 1 \leq p \leq n/2$                   |
| $C_n$      | $\mathfrak{sp}(2n)$         | $\mathfrak{u}(n)$                                                                            |
| $G_2$      | $G_{2,-14}$                 | $G_{2,-14}$                                                                                  |
| $G_2$      | $G_{2,2}$                   | $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$                                                   |
| $F_4$      | $F_{4,-52}$                 | $F_{4,-52}$                                                                                  |
| $F_4$      | $F_{4,-20}$                 | $\mathfrak{so}(9)$                                                                           |
| $F_4$      | $F_{4,4}$                   | $\mathfrak{usp}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$                                                  |

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{so}(3) &= \mathfrak{su}(2) = \mathfrak{su}^*(2), & \mathfrak{so}(2, 1) &= \mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{su}(1, 1) = \mathfrak{sp}(2), \\
 \mathfrak{so}(4) &= \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), & \mathfrak{so}(3, 1) &= \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \\
 \mathfrak{so}(2, 2) &= \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2), & \mathfrak{so}^*(4) &= \mathfrak{su}(1, 1) \oplus \mathfrak{su}(2), \\
 \mathfrak{so}(5) &= \mathfrak{usp}(4), & \mathfrak{so}(4, 1) &= \mathfrak{usp}(2, 2), & \mathfrak{so}(3, 2) &= \mathfrak{sp}(4), \\
 \mathfrak{so}(6) &= \mathfrak{su}(4), & \mathfrak{so}(5, 1) &= \mathfrak{su}^*(4), & \mathfrak{so}(4, 2) &= \mathfrak{su}(2, 2) \\
 \mathfrak{so}(3, 3) &= \mathfrak{sl}(4), & \mathfrak{so}^*(6) &= \mathfrak{su}(3, 1), \\
 \mathfrak{so}^*(8) &= \mathfrak{so}(6, 2).
 \end{aligned}$$

To construct real forms from the compact form, i.e. to define the  $\sigma$  involutive automorphism, there are different methods.

1. **The Weyl unitary trick**: one may decompose the elements in block diagonal form and multiply the off-diagonal parts by  $i$ .
2. **Restrict the field** over which  $\mathfrak{g}$  is defined (e.g. from  $\mathbb{C}$  to  $\mathbb{R}$ )
3. **Embedding**: embed the field in a larger one, e.g.  $\mathbb{C}$  into  $\mathbb{H}$ , the field of the quaternions.

### The Weyl unitary trick

(see Preyten's note, there is a big section for it)

**restriction**

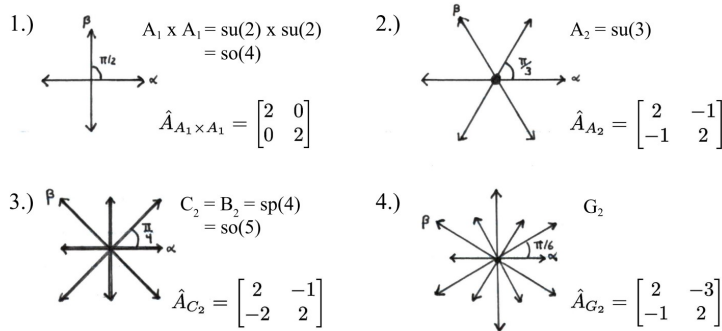
**Embedding**

## 1.6 Comparison and tables of Lie algebras

### Root diagram comparison

In rank 2, there are only:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} (A)_2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} (B) \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} (G)_2$$



A basis of  $\mathfrak{sl}(n) \cong A_{n-1}$  is then provided by the union

$$\mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_-$$

of three sets  $\mathcal{B}_o \equiv \mathcal{B}_o(A_{n-1})$  and  $\mathcal{B}_\pm \equiv \mathcal{B}_\pm(A_{n-1})$ , which are defined as

$$\begin{aligned} A_{n-1} : \quad \mathcal{B}_o(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+1,i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \\ \mathcal{B}_+(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq i < j \leq n\} \\ \mathcal{B}_-(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq j < i \leq n\} \end{aligned}$$

Together there are thus  $(n-1) + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - 1$  generators, so that the dimension of  $A_{n-1}$  is  $n^2 - 1$ .

$$\begin{aligned} B_n : \quad \mathcal{B}_o &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\}, \\ \mathcal{B}_+ &= \{\mathcal{E}_{i,j+n} + \mathcal{E}_{j,i+n} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,0} - \mathcal{E}_{0,i+n}\} \\ \mathcal{B}_- &= \{-\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\} \cup \{\mathcal{E}_{0,i} - \mathcal{E}_{i+n,0}\} \\ C_n : \quad \mathcal{B}_o &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\}, \\ \mathcal{B}_+ &= \{\mathcal{E}_{i,j+n} + \mathcal{E}_{j,i+n} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\}, \\ \mathcal{B}_- &= \{\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\} \\ D_n : \quad \mathcal{B}_o &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\}, \\ \mathcal{B}_+ &= \{\mathcal{E}_{i,j+n} - \mathcal{E}_{j,i+n} | i < j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\}, \\ \mathcal{B}_- &= \{-\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i < j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\}. \end{aligned}$$

(!!! add explanation here, see 5.6 FS)

### Isomorphisms of Lie algebras

$\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(4, 0) \simeq \mathfrak{so}(0, 4)$  и  $\mathfrak{so}(3, 1) \simeq \mathfrak{so}(1, 3)$ . То, есть три ортогональных алгебры Ли  $\mathfrak{so}(4), \mathfrak{so}(3, 1), \mathfrak{so}(2, 2)$ .

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(4) &\simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \\ \mathfrak{so}(3, 1) &\simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{so}(2, 2) &\simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(3) &= \mathfrak{su}(2) = \mathfrak{su}^*(2), \quad \mathfrak{so}(2, 1) = \mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{su}(1, 1) = \mathfrak{sp}(2), \\ \mathfrak{so}(4) &= \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2), \quad \mathfrak{so}(3, 1) = \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \\ \mathfrak{so}(2, 2) &= \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2), \quad \mathfrak{so}^*(4) = \mathfrak{su}(1, 1) \times \mathfrak{su}(2), \\ \mathfrak{so}(5) &= \mathfrak{usp}(4), \quad \mathfrak{so}(4, 1) = \mathfrak{usp}(2, 2), \quad \mathfrak{so}(3, 2) = \mathfrak{sp}(4), \\ \mathfrak{so}(6) &= \mathfrak{su}(4), \quad \mathfrak{so}(5, 1) = \mathfrak{su}^*(4), \quad \mathfrak{so}(4, 2) = \mathfrak{su}(2, 2), \\ \mathfrak{so}(3, 3) &= \mathfrak{sl}(4), \quad \mathfrak{so}^*(6) = \mathfrak{su}(3, 1), \\ \mathfrak{so}^*(8) &= \mathfrak{so}(6, 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_r &\cong \mathfrak{sl}(r+1), \quad B_r \cong \mathfrak{so}(2r+1) \\ C_r &\cong \mathfrak{sp}(r), \quad D_r \cong \mathfrak{so}(2r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &\cong B_1 \cong C_1 \cong D_1, \quad B_2 \cong C_2 \\ D_2 &\cong A_1 \oplus A_1, \quad D_3 \cong A_3 \end{aligned}$$

One can check that the Killing form  $K(-, -)$  on  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  has signature  $(2, 1)$ , so  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}_{2,1}(\mathbb{R})$ , not  $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$

(ниже не совсем верная таблица, перепису ее потом)

| name                | range                    | bosonic algebra              | fermionic      |
|---------------------|--------------------------|------------------------------|----------------|
| $SU(m-p, p n-q, q)$ | $m \neq n$               | $SU(m-p, p) \oplus$          | $(m, \bar{n})$ |
| $OSp(m^* n-q, q)$   | $SU(n-q, q) \oplus U(1)$ | $SO^*(m) \oplus USp(n-q, q)$ | $(m, n)$       |
| $F^2(4)$            |                          | $SO(5, 2) \oplus SU(2)$      | $(8, 2)$       |

## Tables of Lie algebras

| $\mathfrak{g}$ | D     | simple roots                                                                                           | positive roots                                                                                                                              |
|----------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_r$          | $r+1$ | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r$                                                                 | $e_i - e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r+1$                                                                                                    |
| $B_r$          | $r$   | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1;$<br>$e_r$                                                     | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r;$<br>$e_i, \quad 1 \leq i \leq r$                                                                   |
| $C_r$          | $r$   | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1;$<br>$2e_r$                                                    | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r;$<br>$2e_i, \quad 1 \leq i \leq r$                                                                  |
| $D_r$          | $r$   | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1;$<br>$e_{r-1} + e_r$                                           | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r$                                                                                                    |
| $E_6$          | 8     | $e_{i+1} - e_i, \quad 1 \leq i \leq 4;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{j=2}^7 e_j),$<br>$e_1 + e_2$ | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq j < i \leq 5;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{j=1}^5 (\pm)e_j),$<br>even number of minus signs          |
| $E_7$          | 8     | $e_{i+1} - e_i, \quad 1 \leq i \leq 5;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{j=2}^7 e_j),$<br>$e_1 + e_2$ | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq j < i \leq 6;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 - e_7 + \sum_{j=1}^6 (\pm)e_j),$<br>odd number of minus signs;<br>$e_8 - e_7$ |
| $E_8$          | 8     | $e_{i+1} - e_i, \quad 1 \leq i \leq 6;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{j=2}^7 e_j),$<br>$e_1 + e_2$ | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq j < i \leq 8;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + \sum_{j=1}^7 (\pm)e_j),$<br>even number of minus signs                      |
| $F_4$          | 4     | $e_2 - e_3, e_3 - e_4,$<br>$e_4,$<br>$\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$                              | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4;$<br>$e_i, \quad 1 \leq i \leq 4;$<br>$\frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$                    |
| $G_2$          | 3     | $e_1 - e_2,$<br>$e_2 + e_3 - 2e_1$                                                                     | $e_1 - e_2, e_3 - e_1, e_3 - e_2,$<br>$e_2 + e_3 - 2e_1, e_1 + e_3 - 2e_2,$<br>$-e_1 - e_2 + 2e_3$                                          |

| $\mathfrak{g}$ | Cartan matrix                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | quadratic form matrix                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_r$          | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{r+1} \times \begin{pmatrix} r & r-1 & r-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ r-1 & 2(r-1) & 2(r-2) & \dots & 6 & 4 & 2 \\ r-2 & 2(r-1) & 3(r-2) & \dots & 9 & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 & 8 & 12 & \dots & 3(r-3) & 2(r-3) & r-3 \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3(r-2) & 2(r-2) & r-2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2(r-2) & 2(r-1) & r-1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & r-2 & r-1 & r \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                |
| $B_r$          | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & \frac{3}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-3 & r-3 & r-3 & \frac{r-3}{2} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-3 & r-2 & r-2 & \frac{r-2}{2} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-3 & r-2 & r-1 & \frac{r-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \dots & \frac{r-3}{2} & \frac{r-2}{2} & \frac{r-1}{2} & \frac{r}{4} \end{pmatrix}$                                                                                         |
| $C_r$          | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-3 & r-3 & r-3 & r-3 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-3 & r-2 & r-2 & r-2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-3 & r-2 & r-1 & r-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-3 & r-2 & r-1 & r \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                           |
| $D_r$          | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-3 & r-3 & \frac{r-3}{2} & \frac{r-3}{2} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r-3 & r-2 & \frac{r-2}{2} & \frac{r-2}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \dots & \frac{r-3}{2} & \frac{r-2}{2} & \frac{r}{4} & \frac{r-2}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \dots & \frac{r-3}{2} & \frac{r-2}{2} & \frac{r-2}{4} & \frac{r}{4} \end{pmatrix}$ |

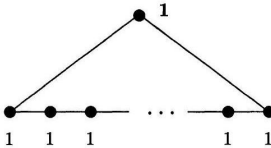
| $\mathfrak{g}$ | Cartan matrix                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | quadratic form matrix                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $E_6$          | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                                                       | $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & 4 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 4 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| $E_7$          | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$                                                                | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 9 & 6 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & \frac{15}{2} & 5 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 & 6 & \frac{9}{2} & 3 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$                  |
| $E_8$          | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$                     |
| $F_4$          | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                             | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                 |
| $G_2$          | $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

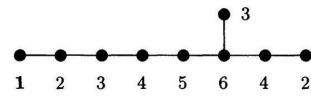
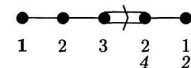
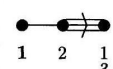
| name  | numbering of the nodes | dual Coxeter labels<br>Coxeter labels |
|-------|------------------------|---------------------------------------|
| $A_r$ |                        |                                       |
| $B_r$ |                        |                                       |
| $C_r$ |                        |                                       |
| $D_r$ |                        |                                       |
| $E_6$ |                        |                                       |
| $E_7$ |                        |                                       |
| $E_8$ |                        |                                       |
| $F_4$ |                        |                                       |
| $G_2$ |                        |                                       |

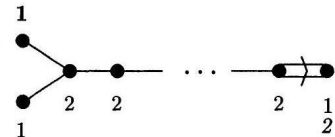
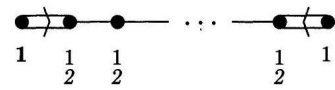
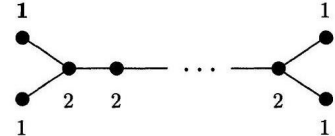
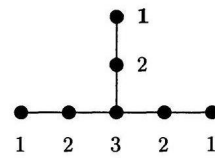
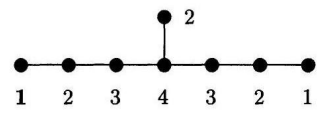


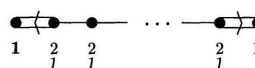
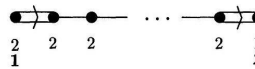
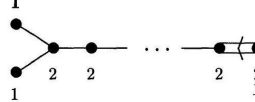
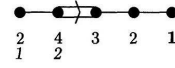
| $\bar{\mathfrak{g}}$ | $\mathfrak{g}$      | $\bar{\mathfrak{g}}_{[0]}$ | $\bar{\mathfrak{g}}_{[1]}$                   | $\bar{\mathfrak{g}}_{[2]}$ | $\dim \bar{\mathfrak{g}}_{[1]}$ |
|----------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| $A_2$                | $A_1^{(2)}$         | $A_1$                      | $4\bar{\Lambda}_{(1)}$                       | —                          | 5                               |
| $E_6$                | $F_4^{(2)}$         | $F_4$                      | $\bar{\Lambda}_{(4)}$                        |                            | 26                              |
|                      |                     | $C_4$                      | $\bar{\Lambda}_{(4)}$                        |                            | 42                              |
| $D_{r+1}$            | $B_r^{(2)}$         | $B_r$                      | $\bar{\Lambda}_{(1)}$                        |                            | $2r + 1$                        |
|                      |                     | $B_n \oplus B_{r-n}$       | $(\bar{\Lambda}_{(1)}; \bar{\Lambda}_{(1)})$ |                            | $(2n+1)(2r-2n+1)$               |
| $A_{2r}$             | $\tilde{B}_r^{(2)}$ | $B_r$                      | $2\bar{\Lambda}_{(1)}$                       |                            | $r(2r + 3)$                     |
| $A_{2r-1}$           | $C_r^{(2)}$         | $C_r$                      | $\bar{\Lambda}_{(2)}$                        |                            | $(2r + 1)(r - 1)$               |
|                      |                     | $D_r$                      | $2\bar{\Lambda}_{(1)}$                       |                            | $(2r - 1)(r + 1)$               |
| $D_4$                | $G_2^{(3)}$         | $G_2$                      | $\bar{\Lambda}_{(2)}$                        | $\bar{\Lambda}_{(2)}$      | 7                               |
|                      |                     | $A_2$                      | $3\bar{\Lambda}_{(1)}$                       | $3\bar{\Lambda}_{(2)}$     | 10                              |

| $\mathfrak{g}$ | d          | $ \Phi_+ $             | $ \Phi_+^{(<)} $ | $g^\vee$ | $g$  | $I_c$   | exponents + 1                  |
|----------------|------------|------------------------|------------------|----------|------|---------|--------------------------------|
| $A_r$          | $r^2 + 2r$ | $\frac{1}{2}(r^2 + r)$ | —                | $r + 1$  |      | $r + 1$ | $2, 3, \dots, r + 1$           |
| $B_r$          | $2r^2 + r$ | $r^2$                  | $r$              | $2r - 1$ | $2r$ | 2       | $2, 4, \dots, 2r$              |
| $C_r$          | $2r^2 + r$ | $r^2$                  | $r^2 - r$        | $r + 1$  | $2r$ | 2       | $2, 4, \dots, 2r$              |
| $D_r$          | $2r^2 - r$ | $r^2 - r$              | —                | $2r - 2$ |      | 4       | $2, 4, 6, \dots, 2r - 2, r$    |
| $E_6$          | 78         | 36                     | —                | 12       |      | 3       | $2, 5, 6, 8, 9, 12$            |
| $E_7$          | 133        | 63                     | —                | 18       |      | 2       | $2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$      |
| $E_8$          | 248        | 120                    | —                | 30       |      | 1       | $2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$ |
| $F_4$          | 52         | 24                     | 12               | 9        | 12   | 1       | $2, 6, 8, 12$                  |
| $G_2$          | 14         | 6                      | 3                | 4        | 6    | 1       | $2, 6$                         |

| A              |                                                                                                    |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathfrak{g}$ | dual Coxeter labels<br>Coxeter labels                                                              |
| $A_1^{(1)}$    | <br>1 1           |
| $A_r^{(1)}$    | <br>1 1 1 ... 1 1 |

| A (continued) |                                                                                                      |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $E_8^{(1)}$   | <br>1 2 3 4 5 6 4 2 |
| $F_4^{(1)}$   | <br>1 2 3 2 1/2     |
| $G_2^{(1)}$   | <br>1 2 1/3         |

|             |                                                                                                            |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $B_r^{(1)}$ | <br>1 2 2 ... 2 1/2     |
| $C_r^{(1)}$ | <br>1 1/2 1/2 ... 1/2 1 |
| $D_r^{(1)}$ | <br>1 2 2 ... 2 1 1     |
| $E_6^{(1)}$ | <br>1 2 3 2 1           |
| $E_7^{(1)}$ | <br>1 2 3 4 3 2 1      |

| B                                     |                                                                                                            |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathfrak{g}$                        | dual Coxeter labels<br>Coxeter labels                                                                      |
| $A_1^{(2)}$<br>$A_2^{(2)}$            | <br>2 1/2 1/2           |
| $B_r^{(2)}$<br>$D_{r+1}^{(2)}$        | <br>1 2 2 ... 2 1/2 1   |
| $\tilde{B}_r^{(2)}$<br>$A_{2r}^{(2)}$ | <br>2 2 2 ... 2 1/2 1/2 |
| $C_r^{(2)}$<br>$A_{2r-1}^{(2)}$       | <br>1 2 2 ... 2 2 1/2   |
| $F_4^{(2)}$<br>$E_6^{(2)}$            | <br>2 4 3 2 1/2 1       |
| $G_2^{(3)}$<br>$D_4^{(3)}$            | <br>3 2 1/2 1           |

## 1.7 Group theory fundamentals in a nutshell

### 1.7.1 Cosets, factor groups, homomorphisms

(очень скоро выпишу из Кострикина всё)

## О смежных классах по подгруппе

### Элементарные свойства смежных классов

Два левых смежных класса  $G$  по  $H$  совпадают или не имеют общих элементов. Разбиение  $G$  на левые смежные классы по  $H$  определяет на  $G$  отношение эквивалентности.

**Теорема Лагранжа:** Порядок конечной группы делится на порядок каждой своей подгруппы.

Поэтому порядок любого элемента делит порядок группы. Группа простого порядка  $p$  всегда циклическая и с точностью до изоморфизма единственная.

### Строение циклических групп

Теорема 3. Всякая подгруппа циклической группы есть снова циклическая группа.

Подгруппы бесконечной циклической группы  $(\mathbb{Z}, +)$  исчерпываются (бесконечными) группами  $(m\mathbb{Z}, +)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , а подгруппы циклической группы порядка  $q$  находятся во взаимно однозначном соответствии с (положительными) делителями  $d$  числа  $q$ .

## О Действие групп на множествах

(пока для меня это скорее очевидный раздел, но еще наряду задачи, наверняка, тут многое нетривиальное тоже есть)

### Гомоморфизмы $G \rightarrow S(\Omega)$

### Орбиты и стационарные подгруппы точек

### Примеры действий групп на множествах

Всякая конечная обладает центром  $Z(G) \neq e$ . ( $p$ -группа - это группа порядка  $p^n \gg 1$ , где  $p$  - простое число)

Пусть  $G$  - транзитивная группа на  $\Omega$ , и для любого  $g \in G$  пусть  $N(g)$  - число точек в  $\Omega$ , остающихся на месте при действии  $g$ . Тогда:

$$\text{i) } \sum_{g \in G} N(g) = |G|.$$

Отсюда  $\sum_{g \in G} N(g)/|G| = 1$ , поэтому, "в среднем" каждый элемент оставляет неподвижной одну точку);

$$\text{ii) если } G \text{ — 2-транзитивная группа, то } \sum_{g \in G} N(g)^2 = 2|G|.$$

### Однородные пространства

## О Факторгруппы и гомоморфизмы

### Понятие факторгруппы

Если  $H$  - нормальная подгруппа в  $G$ , то операция умножения  $aH \cdot bH = abH$  наделяет фактор-множество  $G/H$  строением группы, называемой фактор-группой  $G$  по  $H$ . Смежный класс  $H$  служит единичным элементом в  $G/H$ , а элемент  $a^{-1}H = (aH)^{-1}$  - элементом, обратным к  $aH$ .

В случае конечной группы  $G$  порядок факторгруппы  $G/H$  определяется по формуле

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = (G : H)$$

которая вытекает из всего сказанного и из теоремы Лагранжа (см. 2).

**Теоремы о гомоморфизмах групп**

**Коммутант**

**Произведения групп**

**Образующие и определяющие соотношения**

## 1.7.2 Solvable, nilpotent, simple groups and algebras

**Разрешимые группы**

(см Кострикин! стр 48)

**Разрешимые алгебры**

$$\mathfrak{g}^{(1)} := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(2)} := [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}^{(k)} := [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}], \quad \dots$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \dots \supset \mathfrak{g}^{(k)} \supset \dots$$

Разрешимая алгебра Ли - алгебра, у которой  $\exists k \geq 1 : \mathfrak{g}^{(k)} = 0$

$$\mathfrak{g}^{\{i\}} := [\mathfrak{g}^{\{i-1\}}, \mathfrak{g}^{\{i-1\}}]$$

for  $i \geq 2$ . Second, there is the sequence  $\{\mathfrak{g}_{\{i\}}\}$ , where again  $\mathfrak{g}_{\{1\}} := \mathfrak{g}'$ , but at each step one allows for brackets between the subspace and all elements of  $\mathfrak{g}$ , so that

$$\mathfrak{g}_{\{i\}} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{\{i-1\}}]$$

for  $i \geq 2$ . The sequence of subspaces labelled by superscripts that is defined by (4.29) is known as the upper central series or derived series of  $\mathfrak{g}$ , while the one with subscripts defined by (4.30) is called the lower central series. Each of the subspaces  $\mathfrak{g}^{\{i\}}$  and  $\mathfrak{g}_{\{i\}}$  is an ideal of  $\mathfrak{g}$ .

The derived algebra  $\mathfrak{g}'$  of  $\mathfrak{g}$  is not necessarily a proper subalgebra, but can also be  $\{0\}$  (and also all of  $\mathfrak{g}$ , of course). More generally, the procedures defining the derived and lower central series can, after some finite number of steps, end up with zero. These properties provide a convenient criterion for the classification of Lie algebras. If the derived series of a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  ends up with  $\{0\}$ , then one calls  $\mathfrak{g}$  solvable, and if the lower central series of  $\mathfrak{g}$  ends up with  $\{0\}$  one calls it nilpotent. One has  $\mathfrak{g}^{\{j\}} \subseteq \mathfrak{g}_{\{j\}}$  for all  $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ , so that nilpotency implies solvability.

Example:  $i(2)$  (алгебра неоднородной группы вращений  $\mathbb{R}^2$ ) является разрешимой. Она состоит из вращений  $L = x\partial_y - y\partial_x$  и сдвигов  $P_x = \partial_x P_y = \partial_y$ . Ненулевые коммутационные соотношения имеют вид  $[L, P_x] = -P_y$ ,  $[L, P_y] = P_x$ . Поэтому последовательность идеалов обрывается после второго шага:  $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{io}(2)$ ,  $\mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{g}^{(3)} = 0$  где  $\mathfrak{p}$  - двумерная абелева алгебра Ли с образующими  $P_x$  и  $P_y$  (подалгебра сдвигов).

Example:  $\mathfrak{so}(3)$  неразрешима. У нее имеются образующие  $e_i, i = 1, 2, 3$ , для которых  $[e_i, e_j] = -\varepsilon_{ijk}e^k$  и последовательность идеалов никогда не оборвется:  $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{g}^{(3)} = \dots = \mathfrak{so}(3)$

## Простые группы

**Простые группы** - неабелевы группы, в которых нет нетривиальных ( $\neq e$  и  $G$ ) нормальных подгрупп.

## 1.7.3 Finitely generated abelian groups

(Конечно порождённые абелевы группы)

## Примеры конечно порождённых абелевых групп и предварительные результаты

**Система образующих (система порождающих)** аддитивной абелевой группы  $A$  - система элементов  $a_1, \dots, a_m$ , если

$$\{n_1 a_1 + \dots + n_m a_m \mid n_i \in \mathbb{Z}\} = A,$$

В таком случае пишут  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$

Есть группы, в которых нет никакой конечной системы образующих. Например,  $\mathbb{R}^{(+)} = (\mathbb{R}, +)$  и  $U = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\}$  (группа с операцией умножения). Действительно, эти группы - несчётные множества, а группа с конечным числом образующих всегда счётна. Имеются и другие примеры:  $\mathbb{Q}^{(+)}$  или  $\mathbb{Q}^*$  (несложная проверка).

Прямая сумма  $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$  конечного числа циклических групп  $A_i$  является группой с конечным числом образующих. Доказательство: если  $A_i = \langle a_i \rangle$ , то элементы  $(a_1, 0, \dots, 0), (0, a_2, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, a_n)$  будут образующими группы  $A$ .

Прямая сумма  $A = C_m \oplus C_n$  двух конечных циклических групп взаимно простых порядков  $m, n$  является циклической группой порядка  $mn$ .

Proof(????).

## Абелевы группы без кручения

**Группа без кручения**  $A$  - группа, которая не имеет ненулевых элементов конечного порядка, т.е.  $na = 0, n \neq 0 \implies a = 0$ .

**Независимая система элементов**  $a_1, \dots, a_k \in A$  - такая система, у которой из равенства  $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = 0$ , где  $n_i \in \mathbb{Z}$ , следует, что  $n_1 = \dots = n_k = 0$ .

Базис - система элементов  $a_1, \dots, a_n \in A$ , если она: 1) независима; 2) является системой образующих группы  $A$ .

Лемма 1. Если  $A = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ , а элементы  $b_1, \dots, b_n \in A$  образуют независимую систему, то  $n \leq m$ .

(??? доказывается каким-то противоречием)

Теорема 1:

- 1) Всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  без кручения обладает базисом.
- 2) Все базисы и группы равномощны (состоят из одинакового числа элементов).

(?? доказывается на более чем страницу как-то)

Конечно порождённая абелева группа  $A$  свободной ранга  $n$  (обозначается символом  $F_n^{ab}$ ) - группа, которая

$$A = F_n^{ab} \cong \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}.$$

Ранг группы, состоящей из одного нуля, считается равным нулю. Любой базис свободной абелевой группы  $A$  называется также её свободной системой образующих.

Только что доказанная теорема 1 утверждает на самом деле, что всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  без кручения является свободной некоторого ранга  $n$ .

### Свободные абелевы группы конечного ранга

Теорема 2. Пусть  $B$  - ненулевая подгруппа свободной абелевой группы  $A$  конечного ранга  $n$ . Тогда в  $A$  и  $B$  можно выбрать базисы соответственно  $\{a_1, \dots, a_n\}$  и  $\{b_1, \dots, b_k\}$  такие, что  $b_i = m_i a_i$ , где  $m_i \geq 0$  - неотрицательные целые числа, причём  $m_{i-1} | m_i$ ;  $i = 2, 3, \dots, k, k \leq n$  (возможно, что  $m_{k+1} = \dots = m_n = 0$ ).

(?? доказательство снова на страницу)

В условиях теоремы 2 говорят о согласованности базисов в  $A$  и  $B$ .

Следствие 1. Всякая подгруппа  $B$  свободной абелевой группы  $A$  ранга  $n$  свободна ранга  $k \leq n$ .

Следствие 2. Любой гомоморфный образ  $\varphi(A)$  свободной абелевой группы  $A$  ранга  $n$  изоморфен группе

$$\mathbb{Z}^{n-k} \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

причём  $m_{i-1} | m_i, 2 \leq i \leq k$ .

(?? подумаю когда-то про доказательство)

### Строение конечно порождённых абелевых групп

Лемма 3. Пусть  $X$  - множество образующих абелевой группы  $F, |X| = n$ . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- i)  $F = F_n^{ab}$  - свободная абелева группа  $X$  - множество её свободных образующих ;
- ii) каждое однозначное отображение  $\varphi$  множества  $X$  в некоторую абелеву группу  $A$  индуцирует гомоморфизм  $\tilde{\varphi} : F \rightarrow A$ .

Теорема 3. Каждая абелева группа с  $n$  образующими является гомоморфным образом свободной абелевой группы  $F_n^{ab}$ .

Теорема 4.

1) Всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  является прямой суммой свободной абелевой группы  $F_r^{ab}$  некоторого ранга  $r \geq 0$  конечной абелевой группы.

2) Всякая конечная абелева группа является прямой суммой некоторого числа  $k$  циклических групп порядков  $m_1, \dots, m_k$ , где  $m_{i-1} | m_i, 1 < i \leq k$ .

### Другие подходы к проблеме классификации

Лемма 4. Пусть факторгруппа это прямая сумма  $A/B = \bigoplus_{i=1}^n (A_i/B)$ , причём  $B$  - прямое слагаемое в каждой подгруппе  $A_i : A_i = B \oplus J_i$ . Тогда  $B$  - прямое слагаемое в  $A$

$$A = B \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^n J_i \right)$$

Теорема 5. Пусть  $A$  - абелева группа,  $B$  - её подгруппа. Если факторгруппа  $A/B$  свободная, то  $A$  - прямая сумма  $B$  и свободной группы  $F^{ab}$ :  $A = B \oplus F^{ab}$ .

Определение. Периодической частью (или подгруппой кручения, *torsion subgroup*) абелевой группы  $A$  называется подгруппа  $T(A)$  всех элементов из  $A$  конечного порядка.

В том, что  $T(A)$  - подгруппа, легко убедиться непосредственно: если  $sa = 0, tb = 0$ ;  $a, b \in T(A)$ , то  $st(\nu a + \mu b) = \nu t(sa) + \mu s(tb) = 0$  и, значит,  $\nu a + \mu b \in T(A)$ .

Лемма 5. Факторгруппа  $A/T(A)$  - группа без кручения.

Теорема 6. Всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  является прямой суммой конечной абелевой группы  $T(A)$  и свободной абелевой группы  $F_r^{ab}$  некоторого ранга  $r$ .

Теорема 7. Всякая периодическая абелева группа  $A$  может быть записана в виде прямой суммы  $p$ -групп  $A(p)$ , отвечающих различным простым  $p$ . Прямые слагаемые  $A(p)$  однозначно определяются группой  $A$ .

Теорема 8 (Фробениус-Штикельбергер). Каждая конечная абелева группа является прямой суммой конечного числа примарных циклических групп.

(?? допишу что за примарные группы???)

Теорема 9. Если конечная абелева  $p$ -группа  $A$  разложена двумя способами в прямую сумму циклических подгрупп:

$$A_1 \oplus \dots \oplus A_r = A = B_1 \oplus \dots \oplus B_s,$$

то  $r = s$  и порядки  $|A_i|$  совпадают с порядками  $|B_j|$  при некотором упорядочении последних.

### Основная теорема о конечных абелевых группах

Теорема 10. Всякая конечная абелева группа  $A$  является прямым произведением примарных циклических подгрупп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка.

Целые числа

$$m_i = p_1^{m_{1i}} p_2^{m_{2i}} \dots p_s^{m_{si}}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

называются инвариантными факторами (или множителями) абелевой группы  $A$ . По построению

$$|A| = m_1 m_2 \dots m_k, \quad m_{i-1} | m_i; \quad 1 < i \leq k$$

Теорема 11. Пусть  $F$  - произвольное поле и  $A$  - конечная подгруппа мультипликативной группы  $F^*$ . Тогда  $A$  циклическая.

Число неизоморфных абелевых групп порядка  $N = p^n$  ( $p$  простое) равно числу  $p(n)$  упорядоченных разбиений

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_l, \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l, \quad 1 \leq l \leq n$$

$$A \cong Z_p^n = Z_p \oplus \dots \oplus Z_p.$$

Произвол в выборе одномерных базисных подпространств велик. Даже при  $n = 2$ , видно из примера в гл. 1 (??):  $Z_p^2$  допускает  $p(p+1)$  различных разложений.

Пример: перечислим все абелевы группы порядков 16 и 36:

$$|A| = 16 = 2^4, \quad p(4) = 5$$

$$Z_{16}, \quad Z_8 \oplus Z_2, \quad Z_4 \oplus Z_4, \quad Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2, \quad Z_2^4 = Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2,$$

| $ A  = 36 = 2^2 \cdot 3^2$                                  | Элементарные делители | Инвариантные факторы |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| $Z_4 \oplus Z_9 \cong Z_{36}$                               | 4,9                   | 36                   |
| $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_9 \cong Z_2 \oplus Z_{18}$         | 2, 2, 9               | 18, 2                |
| $Z_4 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \cong Z_3 \oplus Z_{12}$         | 4, 3, 3               | 12, 3                |
| $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \cong Z_6 \oplus Z_6$ | 2, 2, 3, 3            | 6, 6                 |

Пример: разложим  $Z_{72} \oplus Z_{84}$  в инвариантные факторы. Сначала выразим каждое из циклических слагаемых через циклические примарные компоненты:

$$Z_{72} = Z_8 \oplus Z_9, \quad Z_{84} = Z_4 \oplus Z_3 \oplus Z_7.$$

Далее, соберём все примарные компоненты, отвечающие заданному  $p$ :

$$Z_{72} \oplus Z_{84} = (Z_4 \oplus Z_8) \oplus (Z_3 \oplus Z_9) \oplus Z_7$$

(прямая сумма силовских  $p$ -подгрупп). Теперь осталось выделить по одному циклическому слагаемому минимального порядка в каждой примарной компоненте и повторить этот процесс с оставшимися слагаемыми:

$$Z_{72} \oplus Z_{84} = (Z_4 \oplus Z_3) \oplus (Z_8 \oplus Z_9 \oplus Z_7) = Z_{12} \oplus Z_{504}.$$

Если проделать то же самое с группой  $Z_{36} \oplus Z_{168}$ , то получится аналогичный результат. Значит,

$$Z_{72} \oplus Z_{84} = Z_{36} \oplus Z_{168}$$

В частности, отметим, что показатели обеих групп равны 504.

(!!!!??? скоро уже закончу в этом тренировке!)

## 1.7.4 Representations Concept and Types

### Основные понятия представлений групп

Линейное представление - это пара  $(\Phi, V)$ , состоящая из пространства представления  $V$  (или  $G$ -пространства) и гомоморфизма  $\Phi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . По определению

$$\Phi(e) = \mathcal{E} \text{ - единичный оператор,}$$

$$\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h) \text{ для всех } g, h \in G.$$



Условившись в обозначении  $g * v$  для действия линейного оператора  $\Phi(g)$  на вектор  $v \in V$ , мы придём к соотношениям

$$\begin{aligned} g * (u + v) &= g * u + g * v, \quad u, v \in V \\ g * (\lambda v) &= \lambda(g * v), \quad \lambda \in K \\ e * v &= v \\ (gh) * v &= g * (h * v) \end{aligned}$$

Определения изоморфных представлений:

Терминология отображений. Два линейных представления  $(\Phi, V), (\Psi, W)$  группы  $G$  называются **эквивалентными (изоморфными или подобными)**, если существует изоморфизм векторных пространств  $\sigma : V \longrightarrow W$ , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sigma} & W \\ \Phi(g) \downarrow & & \downarrow \Psi(g) \\ V & \xrightarrow{\sigma} & W \end{array} \text{ коммутативной при всех } g \in G, \text{ т. е.}$$

$$\Psi(g)\sigma = \sigma\Phi(g), \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(g) = \sigma\Phi(g)\sigma^{-1} \quad g \in G,$$

а) Изоморфные представления в терминологии  $G$ -пространств. Пусть  $G$  - группа и  $V : (g, v) \mapsto g * v, W : (g, w) \mapsto g \diamond w$  - два  $G$ -пространства с действиями  $*$ ,  $\diamond$ , удовлетворяющими условиям (1). Изоморфизм  $\sigma : V \longrightarrow W$  если

$$g \diamond \sigma(v) = \sigma(g * v)$$

для всех  $g \in G$  и  $v \in V$ . Говорят ещё, что отображение  $\sigma$  перестановочно с действием  $G$ .

б) Изоморфные представления в матричной терминологии. Если  $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle, W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$  и  $\Phi_g, \Psi_g$  - матрицы линейных операторов  $\Phi(g), \Psi(g)$  относительно выбранных базисов, то условие эквивалентности (2) выражается в виде

$$\Psi_g = C\Phi_g C^{-1},$$

где  $C$  - некоторая невырожденная матрица, одна и та же для всех  $g \in G$ . Коэффициенты всех рассматриваемых матриц принадлежат одному полю  $K$ .

Определение 3. Пусть  $(\Phi, V)$  - линейное представление группы  $G$ . Подпространство  $U \subset V$  называется **инвариантным** (или устойчивым относительно  $G$ , если  $\Phi(g)u \in U$  для всех  $u \in U$  и всех  $g \in G$ . Представление, обладающее лишь тривиальными инвариантными подпространствами, называется **неприводимым**. Представление приводимо, если у него имеется хотя бы одно нетривиальное инвариантное подпространство.

То есть, если представление  $(\Phi, V)$  приводимо с инвариантным подпространством  $U$ , то пространство  $V$  обладает базисом, относительно которого

$$\Phi_g = \left\| \begin{array}{cc} \Phi'_g & \Phi_g^0 \\ 0 & \Phi''_g \end{array} \right\| \quad \forall g \in G$$

Так как  $\Phi'_{gh} = \Phi'_g \Phi'_h, \Phi'_e = E_k$  и  $\Phi'_g(U) \subset U$ , то отображение  $\Phi' : g \mapsto \Phi'_g$  определяет представление на  $U$ , называемое подпредставлением в  $\Phi$ .

На факторпространстве  $V/U$  также определено представление. Оно называется **факторпредставлением** и задаётся матрицами  $\Phi''_g, g \in G$ .

Линейное представление  $(\Phi, V)$  называется **неразложимым**, если его нельзя выразить в виде прямой суммы двух нетривиальных подпредставлений. Говорят также о неразложимом  $G$ -пространстве  $V$ .

Определение 4. Линейное представление  $(\Phi, V)$  группы  $G$ , являющееся прямой суммой неприводимых представлений, называется **вполне приводимым**. Аналогичная терминология применяется по отношению к  $G$ -пространствам.

**О типах представлений****О регулярном представлении**

Пусть  $A$  - ассоциативная алгебра. Формула

$$T(a)x = ax \quad (a, x \in A)$$

определяет линейное представление  $T$  алгебры  $A$  в своем собственном пространстве, называемое ее **(левым) регулярным представлением**. Подчеркнем, что это именно представление алгебры, т.е.

$$T(a+b) = T(a) + T(b), \quad T(ab) = T(a)T(b), \quad T(\lambda a) = \lambda T(a).$$

**О присоединенном представлении**

Всякий элемент  $g \in G$  определяет внутренний автоморфизм  $a(g)$  группы  $G$  по формуле

$$a(g)x = gxg^{-1} \quad (x \in G).$$

Этот автоморфизм является ограничением на  $G$  линейного преобразования  $X \mapsto gXg^{-1}$  пространства  $L_n(K)$  и, в частности, дифференцируем. Его дифференциал в единице обозначается через  $\text{Ad}(g)$  и называется присоединенным оператором элемента  $g \in G$ . Оператор  $\text{Ad}(g)$  задается такой же формулой, что и  $a(g)$ :

$$\text{Ad}(g)X = gXg^{-1} \quad (X \in T(G)).$$

Свойства:

$$\text{Ad}(xy) = \text{Ad}(x)\text{Ad}(y)$$

Далее, если  $g = (g_{ij}), g^{-1} = (\tilde{g}_{ij}), X = (x_{ij})$ , то

$$\text{Ad}(g)X = (y_{ij}), \quad y_{ij} = \sum_{k,l} g_{ik}x_{kl}\tilde{g}_{lj}.$$

В качестве координат в пространстве  $T(G)$  могут быть взяты какие-то из матричных элементов; при этом остальные матричные элементы будут через них линейно выражаться. Формула (20) показывает, что матричные элементы оператора  $\text{Ad}(g)$  являются рациональными и, следовательно, дифференцируемыми функциями от элементов матрицы  $g$ .

Таким образом, отображение  $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(T(G))$  является линейным представлением группы Ли  $G$  в пространстве  $T(G)$ . Оно называется присоединенным представлением группы  $G$ .

**Projective Representations (????)**

(see Zhou for now! not used this knowledge yet, but later I'll think about it!)

$$\begin{aligned} \phi(T, 1) &= \phi(1, \bar{T}) = 0 \\ \phi(T(\theta), T(\bar{\theta})) &= f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b + \dots \end{aligned}$$

- The existence of central charges is tied to the existence of central extensions. A central extension of  $\mathfrak{g}$  is an exact sequence

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

so that  $\mathfrak{a}$  is in the center of  $\mathfrak{e}$ . It is nontrivial if the sequence does not split.

## Примеры линейных представлений

(нарезаю задачи - пойму, какие очень важные и следует отдельно написать)

### 1.7.5 Unitarity, reducibility, Maschke's theorem

#### Унитарные представления

Невырожденная форма  $(u, v) \mapsto (u|v)$  на векторном пространстве  $V$  над  $\mathbb{C}$  называется эрмитовой, если

$$\begin{aligned}(u|v) &= \overline{(v|u)}, \\ (\alpha u + \beta v|w) &= \alpha(u|w) + \beta(v|w) \\ (v|v) &> 0 \quad \forall \quad v \neq 0\end{aligned}$$

(как всегда,  $z \mapsto \bar{z}$  - автоморфизм комплексного сопряжения). Пространство  $V$ , рассматриваемое вместе с невырожденной эрмитовой формой  $(u|v)$ , называется эрмитовым пространством. Его вещественным аналогом служит евклидово пространство со скалярным произведением, задаваемым невырожденной симметричной билинейной формой. Взяв базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$ , мы запишем форму  $(u|v)$  для  $u = \sum_i u_i e_i, v = \sum_j v_j e_j$  в виде

$$(u|v) = \sum_{i,j} h_{ij} u_i \bar{v}_j.$$

Матрица  $H = (h_{ij})$  удовлетворяет условию  $\bar{h}_{ij} = h_{ji}$  и называется также эрмитовой.

Существует ортонормированный базис (определяемый условием  $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ ), относительно которого

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$$

Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , сохраняющий эту форму, т.е. обладающий свойством  $(\mathcal{A}u|\mathcal{A}v) = (u|v)$ , называется **унитарным оператором**. В вещественном случае ему соответствует **ортогональный оператор**. Условие унитарности, записанное в матричном виде  $A \cdot {}^t \bar{A} = E$  с  $A = (a_{ij}), {}^t \bar{A} = A^* = (\bar{a}_{ji})$ , нам уже встречалось в гл. 1. Обозначив (как в [BAII]) через  $\mathcal{A}^*$  линейный оператор с матрицей  ${}^t \bar{A} = A^*$ , выразим условие унитарности в виде  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{E} = \mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A}$ . Группу всех унитарных матриц (группу унитарных операторов или просто унитарную группу) принято обозначать  $U(n)$ .

По определению  $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ , и если представление  $\Phi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  таково, что  $\text{Im } \Phi \subset U(n)$ , то  $(\Phi, V)$  называется унитарным представлением.

**Теорема 1.** Всякое линейное представление  $(\Phi, V)$  над  $\mathbb{C}$  конечной группы  $G$  эквивалентно унитарному представлению.

(тут крутое доказательство, но его пока в теории буду разбирать)

#### Полная приводимость

**Теорема Машке.** Каждое линейное представление конечной группы  $G$  над полем  $K$  характеристики, не делящей  $|G|$  (в частности, нулевой), вполне приводимо.

То есть теорема Машке означает разложимость  $(\Phi, V)$  в прямую сумму неприводимых представлений.

Собственно говоря, классическая теорема Машке гласит, что каждое  $G$ -инвариантное подпространство  $U \subset V$  обладает  $G$ -инвариантным дополнением  $W$ :

$$V = U \oplus W.$$

(допишу словами суть доказательства!!)

## 1.7.6 Finite rotation groups, polyhedra, SO(3)

(! в теории групп про это подробнее будет!)

### Порядки конечных подгрупп в SO(3)

Согласно теореме Эйлера о поворотах всякий элемент  $\mathcal{A} \in \text{SO}(3)$ ,  $\mathcal{A} \neq \mathcal{E}$ , является вращением (поворотом) в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  вокруг некоторой оси. Другими словами, имеются ровно две точки на единичной двумерной сфере  $S^2$ , остающиеся неподвижными при действии  $\mathcal{A}$ : точки пересечения сферы и оси вращения. Эти две точки называются полюсами вращения  $\mathcal{A}$ .

Пусть теперь  $G$  - конечная подгруппа в  $\text{SO}(3)$ , а  $S$  - множество полюсов всех неединичных вращений из  $G$ .  $G$  действует как группа перестановок на множестве  $S$ . Если  $x$  - полюс для некоторого вращения  $\mathcal{A} \neq \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{A} \in G$ , то при любом  $\mathcal{B}$  имеем

$$(\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1})\mathcal{B}x = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}x = \mathcal{B}x,$$

т. е.  $\mathcal{B}x$  - полюс для  $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}$  и, стало быть,  $\mathcal{B}x \in S$ . Обозначим через  $\Omega$  множество всех упорядоченных пар  $(\mathcal{A}, x)$ , где  $\mathcal{A} \in G$ ,  $\mathcal{A} \neq \mathcal{E}$ ,  $x$  - полюс для  $\mathcal{A}$ . Пусть, далее,  $G_x$  - стационарная подгруппа (стабилизатор) точки  $x$ , т. е. подгруппа в  $G$  всех элементов, оставляющих  $x$  на месте.

Если  $G = G_x \cup g_2 G_x \cup \dots \cup g_{m_x} G_x$  - разложение  $G$  в левые смежные классы по  $G_x$ , то  $G$ -орбитой точки  $x$  будет множество  $G(x) = \{x, g_2 x, \dots, g_{m_x} x\}$  с числом элементов  $|G(x)| = m_x$ .

По теореме Лагранжа  $N = m_x n_x$ , где  $N = |G|$ ,  $n_x = |G_x|$  (по сравнению с §3 гл. 1 обозначения несколько изменены). Заметим, что  $n_x$  - порядок циклической подгруппы в  $G$ , каждый из элементов которой является вращением вокруг оси, проходящей через  $x$ . Говорят, что  $n_x$  - **кратность полюса**  $x$  или что  $x$  есть  $n_x$  - **полюс**.

(Тут еще есть очень важные свойства, потом их допишу, пока нужно додумать!)

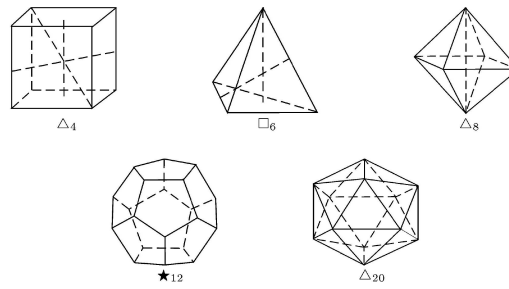
**Теорема 1.** Пусть  $G$  - конечная подгруппа в  $\text{SO}(3)$ , отличная от циклической и диэдральной. Тогда для её порядка  $N$  имеются лишь три возможности:  $N = 12, 24, 60$ . Другие ограничения на группу  $G$ :

| $N$  | Число орбит | $ S $    | Порядки централизаторов |     |     |
|------|-------------|----------|-------------------------|-----|-----|
| $n$  | 2           | 2        | $n$                     | $n$ | -   |
| $2m$ | 3           | $2m + 2$ | 2                       | 2   | $m$ |
| 12   | 3           | 14       | 2                       | 3   | 3   |
| 24   | 3           | 26       | 2                       | 3   | 4   |
| 60   | 3           | 62       | 2                       | 3   | 5   |

### Группы правильных многогранников

(интересно, но не до этого, это больше по теории групп, в записи по алгебре это очень коротко будет)

Существование групп порядков 12, 24 и 60, содержащихся в  $\text{SO}(3)$ , доказывается совсем просто. С точностью до подобия существует лишь пять (известных с античных времён) правильных выпуклых многогранников в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  (см. рис. 5): тетраэдр  $\Delta_4$ , куб  $\square_6$ , октаэдр  $\Delta_8$ , додекаэдр  $\star_{12}$  и икосаэдр  $\Delta_{20}$ :



(???? наверное, тут тоже есть важные утверждения, которые я пока не написал)

Теорема 2. Все конечные подгруппы в  $SO(3)$  исчерпываются с точностью до изоморфизма группами

$$C_n, \quad D_n, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\mathbf{T} \cong A_4, \quad \mathbf{O} \cong S_4 \quad \text{и} \quad \mathbf{I} \cong A_5.$$

Любые две изоморфные конечные подгруппы сопряжены в  $SO(3)$ .

Следствие. Указанные в теореме 2 изоморфизмы дают неприводимые трёхмерные ортогональные представления групп  $A_4, S_4$  и  $A_5$ .

Любая конечная подгруппа  $G^*$  группы  $SU(2)$ , отличная от циклической, является прообразом некоторой конечной подгруппы  $G \subset SO(3)$ . Возникают так называемые бинарные группы

$$D_n^8 = \Phi^{-1}(D_n), \mathbf{T}^* = \Phi^{-1}(\mathbf{T})$$

$$\mathbf{O}^* = \Phi^{-1}(\mathbf{O}), \mathbf{I}^* = \Phi^{-1}(\mathbf{I})$$

- бинарная группа диэдра, бинарная группа тетраэдра, бинарная группа октаэдра и бинарная группа икосаэдра. Бинарные группы, равно как и ортогональные представления

$$\Phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$$

в целом возникают естественным образом при описании состояний физической системы частиц со спином.

## 1.7.7 Characters, Schur's lemma, degrees, orthogonality

**Лемма Шура и её следствия (!!!!!!!!)**

**Лемма Шура.** Пусть  $(\Phi, V), (\Psi, W)$  - два неприводимых комплексных представления группы  $G$  и  $\sigma : V \longrightarrow W$  линейное отображение такое, что

$$\Psi(g)\sigma = \sigma\Phi(g) \quad \forall g \in G.$$

Тогда: i) если представления  $\Phi, \Psi$  неэквивалентны, то  $\sigma = 0$ ; ii) если  $V = W, \Phi = \Psi$ , то  $\sigma = \lambda \mathcal{E}$ .

In other words, any intertwiner between two irreducible modules  $V$  and  $W$  is either an isomorphism or zero.

(!!!!)

Proof. При  $\sigma = 0$  доказывать нечего. Считаем поэтому  $\sigma \neq 0$  и полагаем  $V_0 = \text{Ker } \sigma \subset V$ .

Так как  $\sigma\Phi(g)v_0 = \Psi(g)\sigma v_0$  при любом  $v_0 \in V_0$ , то  $\Phi(g)V_0 = V_0$ , т.е. подпространство  $V_0$  инвариантно относительно  $G$ . Ввиду неприводимости  $(\Phi, V)$  имеем  $V_0 = 0$  или  $V_0 = V$ .

Равенство  $V_0 = V$  невозможно, поскольку  $\sigma \neq 0$ . Стало быть,  $\text{Ker } \sigma = 0$ . Аналогично, полагая  $W_1 = \text{Im } \sigma \subset W$ , будем иметь

$$w_1 \in W, \implies \Psi(g)w_1 = \Psi(g)\sigma(v_1) = \sigma(\Phi(g)v_1) = w'_1 \in W_1,$$

так что  $W_1$  - инвариантное подпространство в  $W$ . Снова  $\sigma \neq 0 \implies W_1 \neq 0$ , а поскольку  $(\Psi, W)$  - неприводимое представление, остаётся единственная возможность  $W_1 = W$ .

i) Так как  $\text{Ker } \sigma = 0, \text{Im } \sigma = W$ , то  $\sigma : V \longrightarrow W$  - изоморфизм, и условие i) есть не что иное, как условие эквивалентности представлений  $\Phi, \Psi$  (см. § 1, определение 2). Утверждение i) доказано.

ii) По условию  $\sigma : V \longrightarrow V$  - линейный оператор на  $V$ . Пусть  $\lambda$  - одно из его собственных значений; оно существует, ибо  $\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто. Линейный оператор  $\sigma_0 = \sigma - \lambda \mathcal{E}$  имеет нетривиальное ядро (в нём содержится собственный вектор) и удовлетворяет равенству  $\Psi(g)\sigma_0 = \sigma_0\Phi(g)$ . По ранее доказанному  $\sigma_0 = 0$ , т.е.  $\sigma = \lambda \mathcal{E}$

Следствие. Пусть  $(\Phi, V), (\Psi, W)$  - два неприводимых представления над  $\mathbb{C}$  конечной группы  $G$  порядка  $|G|$  и  $\sigma : V \longrightarrow W$  произвольное линейное отображение. Тогда  $\tilde{\sigma} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Psi(g)\sigma\Phi(g)^{-1}$ :

i)  $\Phi \not\approx \Psi \implies \tilde{\sigma} = 0$ ;

ii)  $V = W, \Phi = \Psi \implies \tilde{\sigma} = \lambda \mathcal{E}, \lambda = \frac{\text{tr } \sigma}{\dim V}$ .

(!!! продумаю док-во!!!)

Согласно определению  $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma}_{ji} = |G|^{-1} \sum_{g \in G, i' \in I, j' \in J} \psi_{jj'}(g) \sigma_{j'i'} \varphi_{i'i}(g^{-1}).$$

Отображение  $\sigma : V \longrightarrow W$  у нас совершенно произвольное. Мы можем взять

$$\sigma_{ji} = 0 \quad \forall (j, i) \neq (j_0, i_0); \quad \sigma_{j_0 i_0} = 1.$$

Утверждению i) следствия тогда отвечает соотношение

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} \psi_{jj_0}(g) \cdot \varphi_{i_0 i}(g^{-1}) = 0 \quad \forall i, i_0, j, j_0$$

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} \varphi_{jj_0}(g) \varphi_{i_0 i}(g^{-1}) = \begin{cases} \frac{\delta_{ji}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

## Характеры представлений

С каждым комплексным конечномерным линейным представлением  $(\Phi, V)$  группы  $G$  связывается т.н. **характер представления**, т.е. функция  $\chi_\Phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ :

$$\chi_\Phi(g) := \text{tr } \Phi(g), \quad g \in G.$$

Пусть  $\Phi_g = (\varphi_{ij}(g))$  - матрица, отвечающая оператору  $\Phi(g)$  в некотором базисе пространства  $V$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, (n = \dim V)$  - её характеристические корни, взятые с учётом кратностей. По определению

$$\chi_\Phi(g) = \chi_V(g) = \sum_{i=1}^n \varphi_{ii}(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Если  $C$  - любая обратимая матрица, то

$$\operatorname{tr} C\Phi_g C^{-1} = \operatorname{tr} \Phi_g.$$

Но мы знаем, что всякое представление  $\Psi$ , эквивалентное  $\Phi$ , имеет вид  $g \mapsto C\Phi_g C^{-1}$ . Поэтому характеры изоморфных (эквивалентных) представлений совпадают.

**Предложение.** Пусть  $\chi_\Phi$  - характер комплексного линейного представления  $(\Phi, V)$  группы  $G$ . Тогда:

- i)  $\chi_\Phi(e) = \dim V$ ; на классах сопряжённых элементов группы  $G$ ;
  - ii)  $\chi_\Phi(hgh^{-1}) = \chi_\Phi(g) \forall g, h \in G$ , т.е.  $\chi_\Phi$  - функция, постоянная на классах сопряжённых элементов группы  $G$ ;
  - iii)  $\chi_\Phi(g^{-1}) = \overline{\chi_\Phi(g)}$  для любого элемента  $g \in G$  конечного порядка (черта означает комплексную сопряжённость);
  - iv) прямой сумме  $\Phi = \Phi' \dot{+} \Phi''$  представлений отвечает характер  $\chi_\Phi = \chi_{\Phi'} + \chi_{\Phi''}$ .
- Множество  $\mathbb{C}^G = \{G \rightarrow \mathbb{C}\}$  всех функций из  $G$  в  $\mathbb{C}$  наделено естественной структурой векторного пространства над  $\mathbb{C}$ : для  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \chi_1, \chi_2 \in \mathbb{C}^G$  под  $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2$  понимается функция со значениями

$$(\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2)(g) = \alpha_1\chi_1(g) + \alpha_2\chi_2(g).$$

Функция из  $\mathbb{C}^G$  называется **центральной**, если она постоянна на сопряжённых классах группы  $G$ . Центральные функции образуют, очевидно, векторное подпространство в  $\mathbb{C}^G$ , которое мы обозначим  $X_{\mathbb{C}}(G)$ . Вообще говоря,  $X_{\mathbb{C}}(G)$  - бесконечномерное пространство, но если в группе  $G$  имеется лишь конечное число классов сопряжённых элементов  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_r$  (так будет всегда для конечной группы  $G$ ), то пространство  $X_{\mathbb{C}}(G)$  конечномерно. Например,

$$X_{\mathbb{C}}(G) = \langle \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r \rangle_{\mathbb{C}} \quad \Gamma_i(g) := \begin{cases} 1, & \text{если } g \in \mathcal{K}_i \\ 0, & \text{если } g \notin \mathcal{K}_i \end{cases}$$

**Теорема 2. (Первое соотношение ортогональности характеров)** Пусть  $\Phi, \Psi$  - неприводимые комплексные представления конечной группы  $G$ . Тогда

$$(\chi_\Phi, \chi_\Psi)_G = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi \approx \Psi, \\ 0, & \text{если } \Phi \not\approx \Psi. \end{cases}$$

**Следствие.** Пусть

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

- разложение комплексного  $G$ -пространства  $V$  в прямую сумму неприводимых  $G$ -подпространств  $V_i$ . Если  $W$  - какое-то неприводимое  $G$ -пространство с характером  $\chi_W$ , то число слагаемых  $V_i$  в (10), изоморфных  $W$ , равно  $(\chi_V, \chi_W)_G$  и не зависит от способа разложения (кратность вхождения  $W$  в  $G$ -пространство  $V$ ). Два представления (два  $G$ -пространства) с одним и тем же характером изоморфны.

Замечания, сделанные после доказательства теоремы Машке, и следствие теоремы 2 дают возможность выразить характер  $\chi_\Phi$  любого комплексного линейного представления  $(\Phi, V)$  конечной группы  $G$  в виде целочисленной линейной комбинации  $\chi_\Phi = \sum_{i=1}^s m_i \chi_i$ . Здесь  $m_i$  - кратность, с которой неприводимое представление  $(\Phi_i, V_i)$  входит в разложение  $(\Phi, V)$ , так что  $\Phi_i \not\cong \Phi_j$  при  $i \neq j$ . Используя соотношение ортогональности (9), мы можем написать

$$(\chi_\Phi, \chi_\Phi)_G = \sum_{i=1}^s m_i^2.$$

Стало быть, скалярный квадрат  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi)_G$  характера  $\chi_\Phi$  любого комплексного представления  $\Phi$  всегда является целым числом, равным 1 в точности тогда, когда  $\Phi$  - неприводимое представление.

(!!! задачи ждут!!!)

### Число неприводимых представлений

Теорема 1. Число неприводимых попарно неэквивалентных представлений конечной группы  $G$  над  $\mathbb{C}$  равно числу её классов сопряжённых элементов.

Лемма 1. Пусть  $\Gamma$  — центральная функция на конечной группе  $G$  и  $(\Phi, V)$  - неприводимое представление над  $\mathbb{C}$  с характером  $\chi_\Phi$ . Тогда для линейного оператора

$$\Phi_\Gamma = \sum_{h \in G} \bar{\Gamma}(h) \Phi(h) : V \longrightarrow V$$

имеем

$$\Phi_\Gamma = \lambda \mathcal{E} \quad \lambda := \frac{|G|}{\chi_\Phi(e)} (\chi_\Phi, \Gamma)_G$$

( $\bar{\Gamma}$  - центральная функция, определённая равенством  $\bar{\Gamma}(g) = \overline{\Gamma(g)}$ ).

Лемма 2. Характеры  $\chi_1, \dots, \chi_s$  всех попарно неэквивалентных неприводимых представлений группы  $G$  над  $\mathbb{C}$  образуют ортонормированный базис пространства  $X_{\mathbb{C}}(G)$ .

(????? почему так????)

(еще пара умных мыслей есть, но их пока в теории и в доказательствах пропишу!)

### Степени неприводимых представлений

Рассмотрим несколько более подробно регулярное представление  $(\rho, \langle e_g | g \in G \rangle_{\mathbb{C}})$ . Обозначим через  $R_h$  матрицу линейного оператора  $\rho(h)$  в данном базисе  $\{e_g | g \in G\}$ . Так как  $\rho(h)e_g = e_{hg}$ , то все диагональные элементы матрицы  $R_h$  при  $h \neq e$  равны нулю и  $\text{tr } R_h = 0$ . Стало быть,

$$\chi_\rho(e) = |G|, \quad \chi_\rho(h) = 0 \quad \forall h \neq e.$$

Пусть теперь  $(\Phi, V)$  - произвольное неприводимое представление группы  $G$  над  $\mathbb{C}$ . Как показывает следствие теоремы 2 из §4, кратность вхождения  $\Phi$  в  $\rho$  равна скалярному произведению  $(\chi_\rho, \chi_\Phi)_G$ . Согласно (1)

$$(\chi_\rho, \chi_\Phi)_G = |G|^{-1} \sum_{h \in G} \chi_\rho(h) \overline{\chi_\Phi(h)} = |G|^{-1} \chi_\rho(e) \overline{\chi_\Phi(e)} = |G|^{-1} |G| \chi_\Phi(e) = \dim V$$



Теорема 2. Каждое неприводимое представление  $\Phi^{(i)}$  входит в разложение регулярного представления  $\rho$  с кратностью, равной своей степени  $n_i$ . Порядок  $|G|$  конечной группы  $G$  и степени  $n_1, \dots, n_r$  всех её неприводимых представлений связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^r n_i^2 = |G|$$

Для групп небольшого порядка красивого соотношения (3) достаточно, чтобы найти все степени  $n_1, \dots, n_r$ , хотя в общем случае нужны, конечно, дополнительные соображения.

Сведения о характерах неприводимых представлений (или короче: о неприводимых характерах) удобно записывать в виде таблицы характеров. В её верхней строке стоят представители всех  $r$  классов сопряжённости  $\mathcal{K}_i = g_i^G$  группы  $G$ .

Например, таблица характеров группы  $S_3$ :

| $S_3$    | $e$ | $(12)$ | $(123)$ |
|----------|-----|--------|---------|
| $\chi_1$ | 1   | 1      | 1       |
| $\chi_2$ | 1   | -1     | 1       |
| $\chi_3$ | 2   | 0      | -1      |

Обозначим  $C(g) := C_G(g)$  централизатор в группе  $G$  элемента  $g \in G$ .

Из  $|C(g)| |g^G| = |G|$  следует, что первое соотношение ортогональности

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \frac{\chi_i(g_j)}{\sqrt{|C(g_j)|}} \frac{\overline{\chi_k(g_j)}}{\sqrt{|C(g_j)|}} &= \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^r \frac{|G|}{|C(g_j)|} \chi_i(g_j) \overline{\chi_k(g_j)} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^r |g_j^G| \chi_i(g_j) \overline{\chi_k(g_j)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_k(g)} = (\chi_i, \chi_k)_G = \delta_{ik} \end{aligned}$$

означает, что  $r \times r$ -матрица  $M = \left( \frac{\chi_i(g_j)}{\sqrt{|C(g_j)|}} \right)$  унитарна по строкам. Но унитарность по строкам равносильна унитарности по столбцам ( $M \cdot {}^t \bar{M} = E = {}^t \bar{M} \cdot M$ ), так что

$$\sum_i \frac{\chi_i(g_j)}{\sqrt{|C(g_j)|}} \frac{\overline{\chi_i(g_k)}}{\sqrt{|C(g_k)|}} = \delta_{jk}$$

или, в более подробной записи, получаем т.н. **второе соотношение ортогональности** для характеров:

$$\sum_{i=1}^r \chi_i(g) \overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} 0, & \text{если } g \text{ и } h \text{ не сопряжены,} \\ |C_G(g)| & \text{иначе.} \end{cases}$$

(????)

### Представления абелевых групп

Теорема 3. Каждое неприводимое представление конечной абелевой группы  $A$  над  $\mathbb{C}$  имеет степень 1. Число таких попарно неэквивалентных представлений равно порядку  $|A|$ . Обратно, если каждое неприводимое представление группы  $A$  имеет степень 1, то  $A$  - абелева группа.

Группа характеров абелевой группы  $A$  над  $\mathbb{C}$  - множество гомоморфизмов группы  $A$  в мультипликативную группу  $\mathbb{C}^*$  поля комплексных чисел  $\hat{A} = \text{Hom}(A, \mathbb{C}^*)$ , рассматриваемое вместе с поточечной операцией умножения  $(\chi_1 \chi_2)(a) = \chi_1(a) \chi_2(a)$  ( $\chi_i \in \hat{A}, a \in A$ ). Учтено, что  $(\chi^{-1} = \bar{\chi})$ .

Теорема 4. Группы  $A$  и  $\hat{A}$  изоморфны.

Теорема 5. Представления степени 1 конечной группы  $G$  над  $\mathbb{C}$  находятся в биективном соответствии с неприводимыми представлениями факторгруппы  $G/G'$  ( $G'$  - коммутант группы  $G$ ). Их число равно индексу  $(G : G')$ .

## Представления некоторых специальных групп

### 1.7.8 Tensor product of representations

(впишу скоро, типичная конструкция)

#### Контрагredientное представление

#### Тензорное произведение представлений

(132).

#### Кольцо характеров

(133).

#### Инварианты линейных групп

(136).

## 1.8 Linear algebra fundamentals in a nutshell

(for now see my note in linear algebra)

### 1.8.1 Matrices: Basic properties and definitions

(see lin alg note for now)

### 1.8.2 Linear operators: Basic properties and definitions

(see lin alg note for now)

## 1.9 Main specific constructions for applications

### 1.9.1 Tensor Methods, tensorial representations

(see also lectures by Foster and note on linear algebra)

#### Basic definitions for tensors in algebras

(!! def of tensor repr (?))

When tensor repr is irrep? There are theorems!!!!

Given two  $\mathfrak{g}$ -modules  $V$  and  $W$ ,

$$R_V \oplus R_W : ((R_V \oplus R_W)(x))(v \oplus w) := R_V(x)v + R_W(x)w$$

$$R_V \otimes R_W : ((R_V \otimes R_W)(x))(v \otimes w) := (R_V(x)v) \otimes w + v \otimes (R_W(x)w)$$

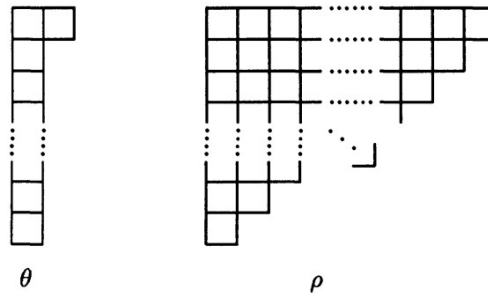
## 1.9.2 Young tableaux, symmetric group (??)

(см. также лекции Киселева, у него отдельный про них раздел)

### On Young tableaux

The symmetry properties with respect to pairs of indices are encoded by the following rule: boxes representing indices that are to be symmetrized are glued together in horizontal rows, while boxes which stand for indices that are to be antisymmetrized are glued together in vertical columns.

An arbitrary irreducible highest weight module of highest weight  $\Lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda^i \Lambda_{(i)}$  can be described by taking, for each  $i$ ,  $\Lambda^i$  copies of the  $i$ -fold antisymmetric tensor module and symmetrizing them. Hence the Young tableau has  $\sum_i \Lambda^i$  columns, which we will always arrange such that the first  $\Lambda^{n-1}$  columns consist of  $n-1$  boxes, the next  $\Lambda^{n-2}$  columns consisting of  $n-2$  boxes, and so on. For example, the Young tableaux  $Y_\theta$  of the adjoint module (with highest weight  $\Lambda_{(1)} + \Lambda_{(n-1)}$ ) and  $Y_\rho$  of the irreducible module having the Weyl vector  $\rho = \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_{(i)}$  as highest weight look:



The total number of boxes of the Young tableau of  $V_{\Lambda_{(j)}}$  is  $\sum_{j=1}^{n-1} j\Lambda^j$ . Taking this number modulo  $n$ , one obtains the conjugacy class of the module:

$$\begin{aligned}
c_\Lambda &= \sum_{j=1}^r j\Lambda^j \bmod r + 1 && \text{for } \mathfrak{g} = A_r \\
c_\Lambda &= \Lambda^r \bmod 2 && \text{for } \mathfrak{g} = B_r \\
c_\Lambda &= \sum_{j=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \Lambda^{2j-1} \bmod 2 && \text{for } \mathfrak{g} = C_r \\
c_\Lambda &= \Lambda^1 - \Lambda^2 + \Lambda^4 - \Lambda^5 \bmod 3 && \text{for } \mathfrak{g} = E_6 \\
c_\Lambda &= \Lambda^4 + \Lambda^6 + \Lambda^7 \bmod 2 && \text{for } \mathfrak{g} = E_7
\end{aligned}$$

### The Littlewood-Richardson rule

It is a simple and powerful algorithm, formulated in terms of the product of Young tableaux. This algorithm proceeds as follows: In the second tableau, we fill the first row with 1's, the second row with 2's, and so on. Then we add all the boxes with a 1 to the first tableau and keep only the resulting tableaux that satisfy the following two conditions:

(i) They must be regular: the number of boxes in a given row must be smaller or equal to the number of boxes in the row just above,

(ii) They must not contain two boxes marked by 1 in the same column. Tableaux that do not satisfy these conditions are ignored. To the resulting tableaux, we then add all the boxes marked by a 2 and again we keep only the tableaux that satisfy (i) and (ii), where in (ii), 1 is replaced by 2. We continue until all the boxes of the second tableau in the original product have been used. In this process an additional rule must be respected:

(iii) In counting from right to left and top to bottom, the number of 1's must always be greater or equal to the number of 2's, the number of 2's must always be greater or equal to the number of 3's, and so on. The resulting Littlewood-Richardson tableaux are the Young tableaux of the irreducible representations occurring in the decomposition.

### On Dimensions and quadratic Casimir eigenvalues

The dimension of an  $\mathfrak{sl}(n)$ -module is equal to the number of independent  $n$ -tuples  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  corresponding to the basis vectors  $v_{(i_1 i_2 \dots i_l)}$  with  $l$  indices  $i_1, i_2, \dots, i_l \in \{1, 2, \dots, n\}$  that have the correct symmetry properties. A pair of indices  $i_p$  and  $i_q$  which is antisymmetrized can never have the same value of  $i_p$  and  $i_q$ ; moreover, since interchanging two such indices just yields a minus sign, for counting purposes we can impose the restriction that  $i_p < i_q$  for  $1 \leq p < q \leq l$  on indices that are antisymmetrized. Indices that have to be symmetrized can take also identical values, and hence the prescription is that  $i_p \leq i_q$  for  $1 \leq p < q \leq l$ .

As a consequence, the dimension of an  $\mathfrak{sl}(n)$ -module is equal to the number of distinct possibilities to fill the boxes of its Young tableau with integers  $i_p \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $p = 1, 2, \dots, l$ , obeying  $i_p \leq i_q$  when  $i_p$  appears to the left of  $i_q$  in the same row of the tableau, as well as  $i_p < i_q$  when  $i_p$  appears above  $i_q$  in the same column of the tableau.

Dimensionality of an irreducible highest weight module  $V_\Lambda$  of  $\mathfrak{sl}(n)$  can be expressed in terms of the associated Young tableau  $Y_\Lambda$ , by the [hook formula](#):

$$d_\Lambda = \prod_{(i,j) \in Y_\Lambda} \frac{n - i + j}{h_{ij}}.$$

The pairs  $(i, j)$  label the boxes of  $Y_\Lambda$ , with  $i$  numbering the rows from top to bottom, and  $j$  numbering the columns from left to right.

Quadratic Casimir eigenvalues  $C_\Lambda = (\Lambda, \Lambda + 2\rho)$  of the  $\mathfrak{sl}(n)$ -module  $V_\Lambda$ :

$$C_\Lambda = \frac{(\theta, \theta)}{2} \left[ l(n - l/n) + \sum_{i=1}^{n_{\text{row}}} (b_i)^2 - \sum_{i=1}^{n_{\text{col}}} (a_i)^2 \right]$$

Where we have a Young tableau with  $n_{\text{row}}$  rows of length  $b_1, b_2, \dots, b_{n_{\text{row}}}$  and  $n_{\text{col}}$  columns of length  $a_1, a_2, \dots, a_{n_{\text{col}}}$ , and denote the total number of boxes of the tableau by  $l$ .

### On Tensor products

Suppose that we want to determine into which irreducible modules the tensor product of two given irreducible modules  $V_{\Lambda_1}$  and  $V_{\Lambda_2}$  of  $\mathfrak{sl}(n)$  decomposes.

(???)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline c & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & b \\ \hline & & \\ \hline c & & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & b & c \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & b & \\ \hline c & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & c & \\ \hline b & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline b & c \\ \hline \end{array} \\
 \\
 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus 2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \bullet
 \end{array}$$

For higher-dimensional modules and higher-rank algebras, the use of Young tableaux is inconvenient.

### On Young tableaux for other Lie algebras (???)

(?????, see FS 19.4)

### On Brauer-Weyl theory (???)

((???), see FS 19.5)

The group algebra  $FG$  of some finite group  $G$  (over the complex numbers  $F = \mathbb{C}$ , or more generally over any field  $F$ ) is defined as follows. The  $|G|$ -dimensional vector space  $F^{|G|}$  over  $F$ , with  $|G|$  the number of elements of  $G$ , has a standard basis  $\mathcal{B}$  whose elements we label by the group elements, i.e.  $\mathcal{B} = \{e_\gamma | \gamma \in G\}$ . On the vector space  $F^{|G|}$  one can define a product by setting

$$e_\gamma \circ e_{\gamma'} := e_{\gamma\gamma'}.$$

One can show that this turns  $F^{|G|}$  into an associative algebra. This algebra is called the group algebra  $FG$  of  $G$ . It can also be shown that group algebras are semisimple.

Also, linear representations of  $G$  extend to linear representations of the algebra  $FG$ . It follows that the  $\mathfrak{sl}(n)$ -module  $V^{\otimes l}$  carries a linear representation of  $\mathbb{C}S_l$ , just like it carries a linear representation of  $U(\mathfrak{sl}(n))$ . Now both  $U(\mathfrak{sl}(n))$  and  $\mathbb{C}S_l$  are subalgebras of the ambient algebra  $\mathfrak{gl}(V^{\otimes l})$ . One can show that in fact

$$\begin{aligned}
 U(\mathfrak{sl}(n)) &= \{x \in \mathfrak{gl}(V^{\otimes l}) \mid [x, \mathbb{C}S_l] = 0\} \\
 \mathbb{C}S_l &= \{x \in \mathfrak{gl}(V^{\otimes l}) \mid [x, U(\mathfrak{sl}(n))] = 0\}
 \end{aligned}$$

i.e. they are each others' centralizers in  $\mathfrak{gl}(V^{\otimes l})$ . These identities are the origin of relationship between the representations of  $\mathfrak{sl}(n)$  and those of  $S_l$ .

### Обзор применений диаграмм Юнга (!!!!!)

### 1.9.3 Casimir operators

(??? забыл, что там такое особенное? но про это есть теория из Зху например, так что допишу потом)

#### Main methods for Casimir operators

$$C_2 := \kappa_{ab} T^a T^b,$$

where  $\kappa_{ab}$  is the inverse of  $\kappa^{ab}$  (we consider semi-simple groups so that this inverse exists).

$$[\mathcal{C}_2, T^c] = \kappa_{ab} T^a f^{bc}_d T^d + \kappa_{ab} f^{ac}_d T^d T^b = (\kappa_{ab} f^{bc}_d + \kappa_{bd} f^{bc}_a) T^a T^d = 0.$$

The matrix  $\kappa^{ab}$  has in the basis  $\{H^i, E^\alpha, E^{-\alpha}\}$  with  $\alpha > 0$  the structure

$$\kappa^{ab} = \begin{pmatrix} G^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_\alpha^{-1} \\ 0 & c_\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \kappa_{ab} = \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_\alpha \\ 0 & c_\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= G_{ij} H^i H^j + \sum_{\alpha > 0} c_\alpha (E^\alpha E^{-\alpha} + E^{-\alpha} E^\alpha) \\ &= G_{ij} H^i H^j + \sum_{\alpha > 0} c_\alpha ([E^\alpha, E^{-\alpha}] + 2E^{-\alpha} E^\alpha) \\ &= G_{ij} H^i H^j + \sum_{\alpha > 0} c_\alpha (H^\alpha + 2E^{-\alpha} E^\alpha) \end{aligned}$$

We can further use  $H^\alpha = (\alpha^\vee)_i H^i = \frac{\alpha_i}{c_\alpha} H^i$  to obtain  $\sum_{\alpha > 0} c_\alpha H^\alpha = \sum_{\alpha > 0} \alpha_i H^i = 2(\rho, H)$ .

$$\mathcal{C}_2 = (H, H) + 2(\rho, H) + \sum_{\alpha > 0} 2c_\alpha E^{-\alpha} E^\alpha$$

When this acts on a representation, we can calculate it on the highest weight, and then the last term vanishes. further,  $H^i$  on that state is  $\Lambda^i$ . So we obtain

$$\mathcal{C}_2 V_\lambda = (\Lambda, \Lambda + 2\rho)$$

(??? examples???)

## 1.9.4 Complex numbers basics

§ 1. Поле комплексных чисел 167 1. Вспомогательная конструкция A67). 2. Плоскость комплексных чисел A68). 3. Геометрическое истолкование действий с комплексными числами A69). 4. Возведение в степень и извлечение корня A73). 5. Теорема единственности A75). 6. Элементарная геометрия комплексных чисел A76). Упражнения A79).

(см. запись по комплексному анализу пока, итак это известные темы)

## 1.9.5 Quaternions basics

### Main properties of quaternions

Quaternions can be represented  $2 \times 2$  complex matrices, using  $\tau_i = -i\sigma_i$

$$q = A_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 A_i \tau^i = \begin{pmatrix} A_0 - iA_3 & -iA_1 - A_2 \\ -iA_1 + A_2 & A_0 + iA_3 \end{pmatrix}$$

### Quaternions and spatial rotation

(see wiki)

A rotation of angle  $\theta$  around the axis defined by the unit vector

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$$

can be represented by conjugation by a unit quaternion  $\mathbf{q}$ . Since the quaternion product  $(0 + u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k})(0 - u_x \mathbf{i} - u_y \mathbf{j} - u_z \mathbf{k})$  gives 1, using the Taylor series of the exponential function, the extension of Euler's formula results:

$$\mathbf{q} = e^{\frac{\theta}{2}(u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k})} = \cos \frac{\theta}{2} + (u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}) \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$$

It can be shown [8] that the desired rotation can be applied to an ordinary vector  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$  in 3dimensional space, considered as the vector part of the pure quaternion  $\mathbf{p}'$ , by evaluating the conjugation of  $\mathbf{p}'$  by  $\mathbf{q}$ , given by:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{p}') &:= \mathbf{q} \mathbf{p}' \mathbf{q}^{-1} = (0, \mathbf{r}) \\ \mathbf{r} &= \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \right) \mathbf{p} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{u} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} (\mathbf{u} \times \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Let  $\mathbf{n}$  be the component of  $\mathbf{p}$  orthogonal to the vector part of  $\mathbf{q}$  and let  $\mathbf{n}_T = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ . It turns out that the vector part of  $L(0, \mathbf{n})$  is given by

$$\left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{n} + 2 \left( \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{n}_T = \cos \theta \mathbf{n} + \sin \theta \mathbf{n}_T$$

The conjugation of  $\mathbf{p}'$  by  $\mathbf{q}$  can be expressed with fewer arithmetic operations as:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} (\mathbf{u} \times \mathbf{p}) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{p})$$

### Example conjugation operation

Conjugating  $\mathbf{p}$  by  $\mathbf{q}$  refers to the operation  $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{q} \mathbf{p} \mathbf{q}^{-1}$ . Consider the rotation  $f$  around the axis  $\vec{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , with a rotation angle of  $120^\circ$ , or  $\frac{2\pi}{3}$  radians.

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

The length of  $\vec{v}$  is  $\sqrt{3}$ , the half angle is  $\frac{\pi}{3}$  ( $60^\circ$ ) with cosine  $\frac{1}{2}$ , ( $\cos 60^\circ = 0.5$ ) and sine  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , ( $\sin 60^\circ \approx 0.866$ ). We are therefore dealing with a conjugation by the unit quaternion

$$\begin{aligned} u &= \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{v} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{v} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(там много всякого, нужно будет - в теории продумаю)

## 1.9.6 Spinors, $\gamma$ -matrices for field theory

### On Spinors of the Lorentz group

$$(\bar{\sigma}^m)^{\dot{\alpha}\alpha} := \epsilon^{\dot{\alpha}\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^m.$$

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\psi}^{\dot{\alpha}} := i (\bar{\sigma}_2)^{\dot{\alpha}\beta} \psi_{\beta}^*$$

$$\psi_D = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ \tilde{\phi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

For Majorana spinors  $\psi_M$  the number of degrees of freedom is reduced by a factor of two by the condition (20.23); they can therefore be constructed from a single Weyl spinor  $\chi$ :

$$\psi_M = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ \tilde{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

### Spinor metric by Kiselev (????)

(пропишу это, это же в квантмехе и теорполе)

### Spinor representations by FS

Let us first assume that  $n = 2r + 1$  is odd. Then there are two conjugacy classes, which for highest weight  $\Lambda = \sum_{i=1}^r \Lambda^i \Lambda_{(i)}$  are characterized by  $\Lambda^r \bmod 2$ . If  $\Lambda^r$  is even, the representation is called a tensor representation, otherwise it is called a spinor representation. In the case of  $n$  even,  $n = 2r$ , the conjugacy classes are classified by an element of  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  if  $r$  is even, while for odd  $r$  they are described by an element of the cyclic group  $\mathbb{Z}_4$ . However, for our present purposes we do not need the full information and only recall that in any case there is a  $\mathbb{Z}_2$ -valued conjugacy class  $c_\Lambda = \Lambda^{r-1} - \Lambda^r \bmod 2$ . Again it distinguishes between spinors ( $c_\Lambda$  odd) and tensors ( $c_\Lambda$  even).

$$s_{ij} := \mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j,i}$$

with  $i < j$ , where the matrices  $\mathcal{E}_{i,j}$  are the matrix units defined in equation (5.28), i.e.  $(\mathcal{E}_{i,j})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ . The matrices (20.1) span the Lie algebra  $\mathfrak{so}(n)$ , with commutation relations

$$[s_{ij}, s_{kl}] = \delta_{jk}s_{il} + \delta_{il}s_{jk} - \delta_{jl}s_{ik} - \delta_{ik}s_{jl}.$$

### On details

#### On other dim representation

(суть статьи про представления спина. подумаю еще раз - и пропишу!)

## 1.9.7 Clifford algebras, Spin groups, twistors

(потом подумаю - и пропишу сюда все основные указания)

### Clifford algebras

The Clifford algebra is by definition the associative algebra that is freely generated by a unit element 1 and the basis elements  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , modulo the anti-commutation relations

$$e_i e_j + e_j e_i = 2g(e_i, e_j) 1$$

By counting the tensor power, this infinite-dimensional algebra comes with a  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -gradation. According to the quotienting procedure outlined in section 14.2, in this algebra we can implement the relations of the Clifford algebra by dividing out the twosided ideal  $\mathcal{I}$  that is spanned by all elements of the form  $x \otimes y - 2g(x, y)\mathbf{1}$ .



Clearly, this ideal  $\mathcal{I}$  violates the  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -gradation of the tensor algebra. However, the  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -gradation also induces a coarser gradation, namely the  $\mathbb{Z}_2$ -gradation that is obtained by taking the value of the  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -gradation modulo two. The ideal  $\mathcal{I}$  respects this gradation, and hence the induced  $\mathbb{Z}_2$ -gradation still makes sense in the Clifford algebra. Correspondingly we can also introduce the even subalgebras  $\mathcal{C}^+(\mathbb{C}^n)$  and  $\mathcal{C}_{p,q}^+(\mathbb{R}^n)$  of  $\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$  and  $\mathcal{C}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ , respectively.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{0,i} &= -\mathcal{S}_{i,0} := e_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n \\ \mathcal{S}_{i,j} &= -\mathcal{S}_{j,i} := [e_i, e_j] \quad \text{for } i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j \\ \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(2, 0) &\simeq \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(1, 1) \simeq \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(почитаю Катанаева про это ещё)

## Representation theory of Clifford algebras

Before describing the general Clifford algebra, let us look at the case of  $\mathcal{C}(\mathbb{C}^3)$  which is  $2^3 = 8$ -dimensional. It is easy to check that the Pauli matrices form an irreducible representation of  $\mathcal{C}(\mathbb{C}^3)$  by  $R_1(e_i) = \sigma_i$  which, however, is not faithful. Another representation of  $\mathcal{C}(\mathbb{C}^3)$  is given by  $R_1(e_i) = -\sigma_i$ ; these two representations are inequivalent. In fact,  $\mathcal{C}(\mathbb{C}^3)$  is isomorphic to the direct sum of two matrix algebras of  $2 \times 2$ -matrices:

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}^3) \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}^{n+2}) \cong \mathcal{C}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{C}^2)$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}^n) \cong \begin{cases} \mathcal{M}_{2^{n/2}}(\mathbb{C}) & \text{for } n \in 2\mathbb{Z} \\ \mathcal{M}_{2^{(n-1)/2}}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{2^{(n-1)/2}}(\mathbb{C}) & \text{for } n \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{C}^+(\mathbb{C}^n) \cong \mathcal{C}(\mathbb{C}^{n-1})$$

## Representations of orthogonal algebras and groups

$$\rho'_i := \sum_{j=1}^n T_i^j \rho_j$$

$$\rho'_i = M(\gamma) \rho_i M(\gamma)^{-1}$$

The matrix product  $M(\gamma_1) M(\gamma_2)$  implements the action of the element  $\gamma_1 \gamma_2 \in \text{SO}(n)$  on the matrices  $\rho_i$ . This implies that

$$M(\gamma_1 \gamma_2) = \omega(\gamma_1, \gamma_2) M(\gamma_1) M(\gamma_2)$$

with  $\omega$  a scalar depending on  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$ . As we have learned in section 12.2, the relation (20.14) is the defining relation for a ray or projective representation of  $\text{SO}(n)$ .

### On Zoology of spinors

(!!!! кстати, тут то же, что и у меня в теории поля и КТП, про спиноры формулы!)

From the complexification  $V_{\mathbb{C}}$  of  $V$  and the complex-bilinear extension  $g := \eta_{\mathbb{C}}$  of the bilinear form  $\eta$  we can construct a complex Clifford algebra  $\mathcal{C}(V_{\mathbb{C}}, g)$ . When considered as real associative algebras, the algebra  $\mathcal{C}(V_{\mathbb{C}}, g)$  and the complexification  $\mathcal{C}(V, \eta)_{\mathbb{C}}$  of the algebra  $\mathcal{C}(V, \eta)$  are isomorphic:

$$\mathcal{C}(V_{\mathbb{C}}, g) \cong \mathcal{C}(V, \eta)_{\mathbb{C}} \equiv \mathcal{C}(V, \eta) \otimes \mathbb{C}.$$

(пока об этом в теорполе напишу)

### Twistors by FS

For four space-time dimensions, the conformal group is thus  $SO(4, 2)$  (for some details about this group, see e.g. [Mack and Salam 1969]). Recalling the isomorphism

$$\mathfrak{so}(4, 2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{so}(6)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(4)_{\mathbb{C}}$$

of the associated complex Lie algebras, one is led to consider complexified compactified Minkowski space  $\bar{M}_{\mathbb{C}}$  with an action of the group  $G := SL(4, \mathbb{C})$ . We can then describe  $\bar{M}_{\mathbb{C}}$  as the coset space  $G/P_1$ , where  $P_1$  is the parabolic subgroup of  $G$  which consists of matrices of the form

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

with  $*$  standing for an arbitrary complex entry.

It can be shown that  $G/P_1$  is isomorphic to the space of complex two-dimensional subspaces of a fourdimensional complex vector space  $\mathbb{C}^4$ .

Next we consider also two other parabolic subgroups of  $G$ , namely the group  $P_2$  consisting of all matrices of the form

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

and  $P_{12} := P_1 \cap P_2$ . One can show that  $G/P_2$  is the complex projective space  $\mathbb{P}^3$ .

The coset space  $G/P_{12}$  can be related to  $\bar{M}_{\mathbb{C}}$  and  $\mathbb{P}\mathbb{C}^3$  by two natural projections:

$$\pi_1 : G/P_{12} \rightarrow G/P_1 \equiv \bar{M}_{\mathbb{C}} \quad \text{and} \quad \pi_2 : G/P_{12} \mapsto G/P_2 \equiv \mathbb{P}\mathbb{C}^3.$$

A closer analysis shows that these two projections form a so-called double fibration, i.e. the restriction of each of the maps  $\pi_i$  on a fiber  $\pi_j^{-1}(x)$  of the other map is injective.

To make this construction somewhat more explicit we restrict ourselves to complexified Minkowski space, dropping the compactification. Then  $M_{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C}^4$  is lifted by  $\pi_1$  to the subset  $M_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}\mathbb{C}^1$  of  $G/P_{12}$ . The projection  $\pi_2$  maps this to a subset  $P := \mathbb{P}\mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{P}\mathbb{C}^1$  of  $\mathbb{P}\mathbb{C}^3$ , i.e. to the three-dimensional complex projective space with one complex line deleted. The space  $P$  is called the projective twistor space. Given a point  $x$  in Minkowski space and a two-vector  $v$  with components  $v_{\dot{\alpha}}$ , the explicit form of the projection  $\pi_1$  is

$$\pi_1 : (x, [v]) \mapsto x,$$

where  $[v]$  denotes the ray containing  $v$ . To describe points in  $P$ , we introduce fourvectors, which we write as a pair  $(u^\alpha, v_\alpha)$  of two-vectors. These four-vectors are called twistors; they can be regarded as vectors in the defining module of  $G = \mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$ , which is called the twistor space and denoted by  $T$ . If to any four-vector in Minkowski space we associate a  $2 \times 2$ -matrix as in (20.26), then  $\pi_2$  can be written

$$\pi_2 : (x, [v]) \mapsto [(u^\alpha = -ix^{\alpha\dot{\alpha}}v_{\dot{\alpha}}, v)].$$

We read (20.58) and (20.59) also as follows: To any point  $x$  of Minkowski space we can associate the complex line  $[(u^\alpha = -ix^{\alpha\dot{\alpha}}v_{\dot{\alpha}}, v)]$ , a so-called twistor line in twistor space  $T$ . This way all objects in a theory defined on Minkowski space can be mapped to objects defined over twistor space, which are however trivial on any twistor line. Conversely, given a twistor line  $(u, v)$  we can associate to it all points in Minkowski space that satisfy  $u^\alpha = -ix^{\alpha\dot{\alpha}}v_{\dot{\alpha}}$ ; the set of these points forms a so-called  $\beta$ -plane. This is a two-dimensional linear subspace of Minkowski space whose tangent space consists only of lightlike vectors and which is anti-selfdual in the sense that the tensors constructed from any two linearly independent tangent vectors are antiselfdual. Thus the transformation to twistor lines is one-to-one only for objects that are trivial on  $\beta$ -planes. In gauge theories e.g. the curvature has to vanish on any  $\beta$ -plane; correspondingly the twistor transform is particularly useful for the study of anti-selfdual gauge fields. Another application of this transform is in supersymmetric theories: Any construction formulated in this language easily carries over to the supersymmetric case by replacing groups by supergroups and Lie algebras by Lie superalgebras

## 1.10 Algebras in physics: main ideas examples

### 1.10.1 Symmetries and conservation laws from algebra (!?)

(пока не сильно въезжаю, как это алгебраически работает, потом подумаю.)

#### Continuous parameters and local one-parameter groups

#### Conservation laws and Noether theorem

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \sum_{i=1}^n \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in TM \times \mathbb{R}$$

**Инвариантный относительно диффеоморфизма**  $g : M \rightarrow M$  Лагранжиан  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  - если  $L(g_*(v)) = L(v)$  для любого  $v \in TM$ . Диффеоморфизм  $g$  называется симметрией замкнутой лагранжевой системы  $(M, L)$ . Группа Ли  $G$  - это группа симметрий  $(M, L)$  (группа непрерывных симметрий), если существует левое действие  $G$  на  $M$ , такое, что для любого  $g \in G$  отображение  $M \ni x \mapsto g \cdot x \in M$  - симметрия.

**Теорема Нётер:** Пусть лагранжиан  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  инвариантен относительно однопараметрической группы  $\{g_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  диффеоморфизмов  $M$ . Тогда лагранжева система  $(M, L)$  допускает интеграл движения  $I$ , записываемый в стандартных координатах на  $TM$  как

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \left( \left. \frac{dg_s^i(\mathbf{q})}{ds} \right|_{s=0} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{a}$$

где  $X = \sum_{i=1}^n a^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i}$  - векторное поле на  $M$ , соответствующее потоку  $g_s$ . Интеграл движения  $I$  называется интегралом Нётер.

Теорема Нётер обобщается на лагранжианы  $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , зависящие от времени. А именно: определим на расширенном конфигурационном пространстве  $M_1 = M \times \mathbb{R}$  не зависящий от времени лагранжиан  $L_1$  как  $L_1(\mathbf{q}, \tau, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\tau}) = L(\mathbf{q}, \frac{\dot{\mathbf{q}}}{\dot{\tau}}, \tau) \dot{\tau}$ , где  $(\mathbf{q}, \tau)$  - локальные координаты на  $M_1$ , а  $(\mathbf{q}, \tau, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\tau})$  - стандартные координаты на  $TM_1$ . Интеграл Нётер  $I_1$  для замкнутой системы  $(M_1, L_1)$  определяет интеграл движения  $I$  для системы  $(M, L)$  по формуле

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = I_1(\mathbf{q}, t, \dot{\mathbf{q}}, 1)$$

what about QFT phenomena, when off-shell motion manifests itself???

### 1.5 Classical mechanics: Hamiltonian description

### 1.6 Quantum mechanics

### 1.7 Observation of symmetries

### 1.8 Gauge 'symmetries'

### Other well-known symmetries in physics

#### 1.9 Duality symmetries

(see my note in duality for now)

## 1.10.2 Hydrogen, oscillator, (!!)

### Main symmetries of molecules (!!!!!)

(почитаю, в квантмехе всегда есть разделы про это)

### Симметрии в водороде (задаче Кеплера)

#### Вектор Рунге–Ленца–Лапласа по Тахтаджаяну (???)

(?? так сколько в итоге там сохр. вел? 5? перечислю тут четко!)

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \chi$$

$$p = \frac{M^2}{\alpha \mu} \quad \text{и} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu \alpha^2}}.$$

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\alpha}{r}$$

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M} - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$$

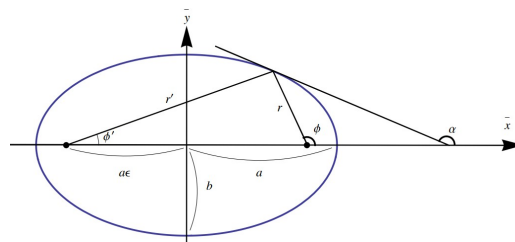
$\dot{W} = 0$  проверяется прямо.

$$\begin{aligned}\mu \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{M} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \\ \mu(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{r} &= M^2, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 &= a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2,\end{aligned}$$

$$\mathbf{W}^2 = \alpha^2 + \frac{2M^2 E}{\mu}$$

$$E := \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r}$$

Вектор Рунге–Ленца–Лапласа по Киселеву (???)



$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{p}^2}, \quad \mathbf{r}_\parallel = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{p}^2}$$

$$\mathbf{r}'' = -\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp$$

$$\mathbf{r}' = (2a - r) \frac{\mathbf{r}''}{r} = \frac{2a - r}{r} (\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp)$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} \Rightarrow \mathbf{p}^2 = -2m|E| \left( 1 - \frac{|Z|e^2}{|E|r} \right)$$

$$a = \frac{|Z|e^2}{2|E|}$$

$$\mathbf{r}_\perp = -\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{a}{|Z|e^2 m} \left( 1 - \frac{2a}{r} \right)^{-1}$$

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{1}{|Z|e^2 m}$$

$$\mathcal{B}^2 = \epsilon^2 = 1 - \frac{2m|E|}{Z^2 e^4 m^2} \ell^2$$

Скобки Пуассона и симметрия  $SO(4)$

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{p}) \frac{1}{|Z|e^2 m}$$

$$\{p_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma,$$

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{B}_\gamma$$

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_P = -2\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma \frac{E}{|Z|^2 e^4 m}$$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} = \text{const.}$$

$$\mathbf{u} := \mathcal{B} \sqrt{ma|Z|e^2}$$

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma, \quad \{u_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}u_\gamma$$

$$j^{(\pm)} := \frac{1}{2}(\ell \pm \mathbf{u})$$

$$\left\{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(+)}\right\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}j_\gamma^{(+)}, \quad \left\{j_\alpha^{(-)}, j_\beta^{(-)}\right\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}j_\gamma^{(-)}, \quad \left\{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(-)}\right\}_P = 0$$

Имеем симметрии  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ .

Алгебра генераторов отвечает алгебре группы поворотов 4-мерного евклидова пространства  $SO(4)$ .

Proof: one can directly compute that

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}u_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma,$$

where  $l_{\alpha\beta} = r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha$ ,  $l_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \{\overline{1}, \overline{3}\}$

They are the same as for Coulomb field (????)

### Представления алгебры $su(2) \oplus su(2)$ и уровни атома водорода

Собственные значения операторов Казимира группы симметрии задают дискретный спектр энергии на траектории.

$$\hat{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\boldsymbol{\ell}} - \hat{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{|Z|e^2 m} = \frac{\mathbf{r}}{r} - (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\boldsymbol{\ell}} - i\hbar \hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{|Z|e^2 m}$$

После разных кручений векторных и скалярных произведений получаем

$$\hat{B}^2 = 1 + \frac{2}{Z^2 e^4 m} \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\ell}}^2 + \frac{\hbar^2}{Z^2 e^4 m^2} \left( \hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{2|Z|e^2 m}{r} \right) = 1 + \frac{2E}{Z^2 e^4 m} \hat{\boldsymbol{\ell}}^2 + \frac{2\hbar^2 E}{Z^2 e^4 m}$$

$$\hat{\mathbf{u}}^2 = \mathcal{B}^2 \frac{Z^2 e^4 m}{2|E|} = \frac{Z^2 e^4 m}{2|E|} - \hat{\boldsymbol{\ell}}^2 - \hbar^2$$

$$\frac{1}{4}(\hat{\boldsymbol{\ell}}^2 + \hat{\mathbf{u}}^2) = \frac{1}{4} \left( \frac{Z^2 e^4 m}{2|E|} - \hbar^2 \right)$$

$$\hbar^2 j(j+1) = \frac{1}{4}(\hat{\boldsymbol{\ell}}^2 + \hat{\mathbf{u}}^2)$$

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2} \frac{1}{(2j+1)^2}$$

(??? насколько важный такой вывод??)

Энергия уровней зависит только от  $n$ , и вырождение уровня энергии по  $l_z$  вычисляется как сумма арифметической прогрессии для  $2\ell + 1$  возможных проекций при заданном  $\ell$ ,

$$K = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = \frac{1}{2}n(1 + 2(n-1) + 1) = n^2$$

### Симметрии в осцилляторе

Комплексная амплитуда колебаний и группа SU(3)

$$\mathbf{A} = m\omega \mathbf{r} + i\mathbf{p}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla (m\omega^2 \mathbf{r}^2 / 2) = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m\omega \frac{\mathbf{p}}{m} - im\omega^2 \mathbf{r} = -i\omega \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}(t) = e^{-i\omega t} \mathbf{A}_0$$

$$\mathbf{A}^\dagger = m\omega \mathbf{r} - i\mathbf{p}$$

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}$$

SU(2):

$$g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\}$$

$$\det g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\} = 1$$

Преобразование симметрии изотропного гармонического осциллятора в терминах векторов  $\mathbf{A}$ :

$$A'_\beta = U_{\beta\alpha} A_\alpha, \quad U \in \text{SU}(3)$$

Это означает, что  $A_\alpha$  - это триплет 3 по SU(3), а  $A_\alpha^\dagger$  - антитриплет  $\bar{3}$  по SU(3), что заметно упрощает понимание последующих построений.

### Тензор Фрадкина

$$F_{\alpha\beta} = A_\alpha^\dagger A_\beta$$

$$\text{tr} F = F_{\alpha\alpha} = 2mE$$

$$\begin{aligned}
a_{\alpha\beta} &= -a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \{F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}\} = i m \omega \{r_{\alpha} p_{\beta} - r_{\beta} p_{\alpha}\} = i m \omega \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_{\gamma} \\
s_{\alpha\beta} &= s_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \{F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}\} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} 2mE = p_{\alpha} p_{\beta} + m^2 \omega^2 r_{\alpha} r_{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} 2mE \\
F_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} 2mE + a_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

получили разложение тензора по неприводимым представлениям группы поворотов SO(3):

$$\text{SO}(3) : \quad 3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5$$

$$S_{\alpha\beta} = p_{\alpha} p_{\beta} + m^2 \omega^2 r_{\alpha} r_{\beta}$$

$$S_{\alpha\beta} \ell_{\beta} = 0$$

Выберем направление момента импульса в качестве оси  $z : \ell \parallel z$ . Тогда тензор Фрадкина вырождается в тензор на плоскости  $(x, y)$ : все его компоненты с индексом  $z$  обращаются в нуль,

$$S_{\alpha\beta} \mapsto \Sigma = \begin{pmatrix} p_x p_x + m^2 \omega^2 x^2 & p_y p_x + m^2 \omega^2 xy \\ p_y p_x + m^2 \omega^2 xy & p_y p_y + m^2 \omega^2 y^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Sigma - \lambda) = \lambda^2 - \lambda (\mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2) + m^2 \omega^2 (x p_y - y p_x)^2 = \lambda^2 - 2mE\lambda + m^2 \omega^2 \ell^2 = 0$$

$$\lambda_{\pm} = mE \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \ell^2}{E^2}} \right) \Rightarrow \lambda_+ = \frac{\ell^2}{a^2}, \quad \lambda_- = \frac{\ell^2}{b^2}$$

$$\mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тензор  $F$  раскладывается на синглет и октет относительно преобразований группы SU(3). Синглет, т.е. инвариант, пропорционален единичной матрице, и это след тензора, т.е. фактически энергия. Октет можно представить в виде 8-мерного вектора в пространстве параметров группы:

$$F^a = \frac{1}{4m\omega} \lambda_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}.$$

### Представления $\mathfrak{su}(3)$ для 3D-осциллятора

Состояния изотропного гармонического 3-мерного осциллятора принадлежат исключительно представлениям типа  $T^{(n,0)}$  или  $T^{(0,n)}$ .

Proof:

$$\begin{aligned}
[\hat{F}^a, \hat{F}^b] &= i \hbar f^{abc} \hat{F}^c \\
\Gamma_a &= \frac{1}{\hbar} \hat{F}^a = \frac{1}{4m\hbar\omega} \hat{A}_{\alpha}^{\dagger} \lambda_{\alpha\beta}^a \hat{A}_{\beta}, \\
C_2 &= \Gamma_a \Gamma_a
\end{aligned}$$

using Fiertz rearrangement:  $(\lambda_a)_{\bullet F_2} (\lambda_a)_{F_{\bullet F_4}} = 2 \delta_{F_4}^{F_1} \delta_{F_2}^{F_3} - \frac{2}{3} \delta_{F_2}^F \delta_{F_4}^{F_3}$ .

(словами скажу преобразования потом, там страница их)



$$C_2 = \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{3} \left( E - \frac{3}{2} \hbar \omega \right)^2 + \frac{1}{\hbar} \left( E - \frac{3}{2} \hbar \omega \right)$$

что следует сравнить с допустимыми значениями этого инварианта для представления  $T^{(\tilde{n}, n)}$  согласно (???)

$$C_2 = \frac{1}{3} (n^2 + \tilde{n}^2 + n\tilde{n}) + n + \tilde{n}$$

Но это значит, что либо  $\tilde{n} = 0$ , либо  $n = 0$ , и

$$E = \hbar \omega \left( n + \frac{3}{2} \right)$$

Наконец вычислим размерность представления  $T^{(0, n)}$ , суммируя число проекций  $2\ell + 1$  для всех допустимых значений  $\ell$  при заданном  $n$ .

$$k = \sum_{\ell=2k, k=0}^{k=n/2} (2\ell + 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) (1 + 2n + 1) = \frac{1}{2} (n + 1)(n + 2) \quad (\text{even})$$

$$k = \sum_{\ell=2k+1, k=0}^{k=(n-1)/2} (2\ell + 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{n-1}{2} + 1 \right) (3 + 2n + 1) = \frac{1}{2} (n + 1)(n + 2) \quad (\text{odd})$$

### Algebra in quantum oscillator by Tahtadjayan

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q^2}{2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega\hbar}} (\omega Q + iP), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega\hbar}} (\omega Q - iP)$$

$$H = \omega\hbar \left( a^* a + \frac{1}{2} I \right) = \omega\hbar \left( a a^* - \frac{1}{2} I \right)$$

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^*] = a^*, \quad [a, a^*] = I.$$

Эти коммутационные соотношения соответствуют неприводимому унитарному представлению четырехмерной разрешимой алгебры Ли  $\mathfrak{h}$ , ассоциированной с алгеброй Гейзенберга  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$ , введенной в разделе 2.2.1. А именно:  $\mathfrak{h}$  - алгебра Ли с образующими  $e, f, h$ , и  $c$ , где  $e, f, c$  удовлетворяют соотношениям алгебры Гейзенберга  $\mathfrak{h}$  и

$$[h, e] = -f, \quad [h, f] = \omega^2 e, \quad [h, c] = 0.$$

Неприводимое интегрируемое представление  $\rho$  алгебры Гейзенберга  $\mathfrak{h}$  продолжается до унитарного представления алгебры Ли  $\mathfrak{h}$ , если положить

$$\rho(h) = -i\omega N = \frac{P^2 + \omega^2 Q^2}{2i\hbar} + \frac{i\omega}{2} I.$$

В инвариантных терминах алгебра Ли  $\tilde{\mathfrak{h}}$  - одномерное правое расширение алгебры Гейзенберга  $\mathfrak{h}$ ,

$$0 \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \tilde{\mathfrak{h}} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$$

Оно определяется  $\mathfrak{h}$ -значным 1-коциклом  $r \in Z^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$  на алгебре Ли - дифференциальным оператором на  $\mathfrak{h}$ , задаваемым на образующих формулой

$$r(e) = f, \quad r(f) = -\omega^2 e, \quad r(c) = 0$$

Конкретно, если  $h \in \tilde{\mathfrak{h}}$  таково, что  $\bar{h} = 1 \in \mathbb{R}$  при проекции  $\tilde{\mathfrak{h}} \rightarrow \mathbb{R}$ , то, отождествляя элементы  $\mathfrak{h}$  с их образами при вложении  $\mathfrak{h} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{h}}$ , имеем

$$[x + \alpha h, y + \beta h] = [x, y] - \alpha r(y) + \beta r(y), \quad x, y \in \mathfrak{h}$$

### 1.10.3 Algebra in quantum mechanics, molecules

#### Quantization

#### Heisenberg algebra in a nutshell (!!!!!)

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[X, Y] = Z; \quad [X, Z] = 0; \quad [Y, Z] = 0.$$

eg.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I; \quad [\hat{x}, i\hbar I] = 0; \quad [\hat{p}, i\hbar I] = 0$$

(words about applications (???) see notes on qm and Takhtadjan's book)

Алгебра Гейзенберга  $\mathfrak{h}_n$  с  $n$  степенями свободы - это алгебра Ли с образующими  $e^1, \dots, e^n, f_1, \dots, f_n, c$  и соотношениями

$$[e^k, c] = 0, \quad [f_k, c] = 0, \quad [e^k, f_l] = \delta_l^k c, \quad k, l = 1, \dots, n$$

По теореме Адо алгебра Гейзенберга  $\mathfrak{h}_n$  изоморфна подалгебре Ли матричной алгебры над  $\mathbb{R}$ . Явным образом она реализуется как нильпотентная подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}_{n+2}$  матриц размерности  $(n+2) \times (n+2)$  с элементами

$$\sum_{k=1}^n (u^k f_k + v_k e^k) + \alpha c = \begin{pmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & v_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Конкретно, группа Гейзенберга - это унитарная подгруппа группы Ли  $SL(n+2, \mathbb{R})$  с элементами

$$g = \begin{pmatrix} 1 & u^1 & u^2 & \cdots & u^n & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & v_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Экспоненциальное отображение  $\exp : \mathfrak{h}_n \rightarrow \mathbf{H}_n$  сюръективно, и группа Гейзенберга  $\mathbf{H}_n$  порождается двумя  $n$ -параметрическими абелевыми подгруппами

$$\exp \mathbf{u}X = \exp \left( \sum_{k=1}^n u^k f_k \right), \quad \exp \mathbf{v}Y = \exp \left( \sum_{k=1}^n v_k e^k \right), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

и однопараметрическим центром  $\exp \alpha c$ , удовлетворяющим соотношениям

$$\exp \mathbf{u}X \exp \mathbf{v}Y = \exp(-\mathbf{u}\mathbf{v}c) \exp \mathbf{v}Y \exp \mathbf{u}X, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = \sum_{k=0}^n u^k v_k$$

#### 1.10.4 Porincare groups, relativistic fields and QFT (!?)

(см. записи по теории поля и КТП пока что)

##### Main Formulas of Lorentz and Poincare groups

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(V) & \xrightarrow{r} & \mathrm{PGL}(V) \\ \uparrow \Phi & \swarrow \Pi & \uparrow \Pi^* \\ \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{p} & \mathrm{SO}^+(3, 1) \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\sigma} & \mathfrak{so}(3, 1) \\ & \searrow \Phi & \swarrow \pi \\ & \mathrm{End}(V) & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(3; 1) &\hookrightarrow \mathfrak{so}(3; 1)_{\mathbb{C}} \cong \mathbf{A}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbf{B}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \\ &\cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ &\cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus i\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \hookleftarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

This section addresses the irreducible complex linear representations of the complexification  $\mathfrak{so}(3; 1)_{\mathbb{C}}$  of the Lie algebra  $\mathfrak{so}(3; 1)$  of the Lorentz group. A convenient basis for  $\mathfrak{so}(3; 1)$  is given by the three generators  $J_i$  of rotations and the three generators  $K_i$  of boosts. They are explicitly given in conventions and Lie algebra bases.

The Lie algebra is complexified, and the basis is changed to the components of its two ideals

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{J} + i\mathbf{K}}{2}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J} - i\mathbf{K}}{2}$$

The components of  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  and  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$  separately satisfy the commutation relations of the Lie algebra  $\mathfrak{su}(2)$  and, moreover, they commute with each other, <sup>[59]</sup>

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0,$$

where  $i, j, k$  are indices which each take values 1, 2, 3, and  $\varepsilon_{ijk}$  is the three-dimensional Levi-Civita symbol. Let  $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$  and  $\mathbf{B}_{\mathbb{C}}$  denote the complex linear span of  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  respectively.

### On Representations of Poincare group

Irreducible representations for small  $(m, n)$ . Dimension in parentheses.

|               | $m = 0$                         | $\frac{1}{2}$                  | $1$                                  | $\frac{3}{2}$ |
|---------------|---------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|---------------|
| $n = 0$       | Scalar (1)                      | Left-handed<br>Weyl spinor (2) | Self-dual<br>2-form (3)              | (4)           |
| $1$           | Right-handed<br>Weyl spinor (2) | 4-vector (4)                   | (6)                                  | (8)           |
| $1$           | Anti-self-dual<br>2-form (3)    | (6)                            | Traceless<br>symmetric<br>tensor (9) | (12)          |
| $\frac{3}{2}$ | (4)                             | (8)                            | (12)                                 | (16)          |

**Algebra for Scalar field**

**Algebra for Vector field**

**Algebra for Dirac field**

(see for now my notes in field theory)

**Algebra for Rarita-Shwinger field**

(see for now my notes in field theory)

**Algebra for Yang-Mills field**

**Algebra for graviton field**

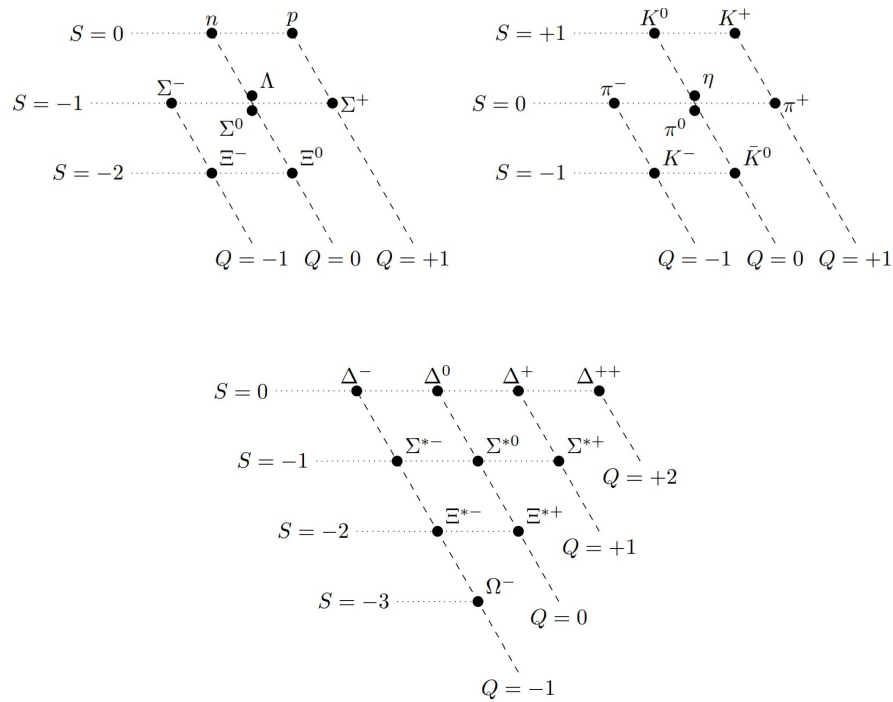
(see for now my notes in field theory)

## 1.10.5 Algebra in particle physics, quarks and Standard Model

**On isospin**

(lines about main idea)

## Overview of particles from algebra (The Eightfold Way)



(very similar is in my note about particle physics)

## Quarks

|              |              |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\bar{K}^0$  | $K^+$        | $\pi^-$      | $\pi^+$      | $K^-$        | $K^0$        |
| $(d\bar{s})$ | $(u\bar{s})$ | $(d\bar{u})$ | $(u\bar{d})$ | $(s\bar{u})$ | $(s\bar{d})$ |

|         |         |            |            |         |         |
|---------|---------|------------|------------|---------|---------|
| $n$     | $p$     | $\Sigma^-$ | $\Sigma^+$ | $\Xi^-$ | $\Xi^0$ |
| $(ddu)$ | $(uud)$ | $(dds)$    | $(uus)$    | $(ssd)$ | $(ssu)$ |

|            |            |            |               |              |          |
|------------|------------|------------|---------------|--------------|----------|
| $\Delta^-$ | $\Delta^0$ | $\Delta^+$ | $\Delta^{++}$ | $\Sigma_0^*$ | $\Omega$ |
| $(ddd)$    | $(ddu)$    | $(duu)$    | $(uuu)$       | $(sdu)$      | $(sss)$  |

| particle      | $H^1$ | $H^2$ | $I$  | $Y$  | $Q$  | $S$ |
|---------------|-------|-------|------|------|------|-----|
| $K^+$         | 1     | 1     | 1/2  | 1    | 1    | 1   |
| $p$           | 1     | 1     | 1/2  | 1    | 1    | 0   |
| $\Delta^{++}$ | 3     | 0     | 3/2  | 1    | 2    | 0   |
| u             | 1     | 0     | 1/2  | 1/3  | 2/3  | 0   |
| d             | -1    | 1     | -1/2 | 1/3  | -1/3 | 0   |
| s             | 0     | -1    | 0    | -2/3 | -1/3 | -1  |
| $\bar{s}$     | 0     | 1     | 0    | 2/3  | 1/3  | 1   |
| $\bar{d}$     | 1     | -1    | 1/2  | -1/3 | 1/3  | 0   |
| $\bar{u}$     | -1    | 0     | -1/2 | -1/3 | -2/3 | 0   |

(!! here there will be a lot of diagrams!!! (like triangular))

$$Q_{\text{elect}} = I_{\text{isosp}} + \frac{1}{2}Y_{\text{hyper ch}} = \frac{1}{3}(2H^1 + H^2) \quad (\text{Gell-Mann-Nishijima})$$

$$H_I := \frac{1}{2}H^1, \quad H_Y := \frac{1}{2\sqrt{3}}H^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}H^2$$

$$I = H_I = \frac{1}{2}H^1, \quad Y = 2\sqrt{3}H_Y = \frac{1}{3}(H^1 + 2H^2)$$

$$H_Y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(????)

$$\text{tr}(H^i H^j) = A^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{i,j}$$

$$\text{tr}(H_I H_I) = \text{tr}(H_Y H_Y) = \frac{1}{2}, \quad \text{tr}(H_I H_Y) = \text{tr}(H_Y H_I) = 0 \quad (\text{ortog. basis})$$

$$\vec{H} \equiv (H_I, H_Y),$$

$$\begin{aligned} [\vec{H}, E_{\pm}^1] &= \pm(1, 0)E_{\pm}^1, & [\vec{H}, E_{\pm}^2] &= \pm\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})E_{\pm}^2 \\ [\vec{H}, E_{\pm}^{\theta}] &= \pm\frac{1}{2}(1, \sqrt{3})E_{\pm}^{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [E_+^1, E_-^1] &= 2H_I, & [E_+^2, E_-^2] &= -H_I + \sqrt{3}H_Y \\ [E_+^{\theta}, E_-^{\theta}] &= H_I + \sqrt{3}H_Y \end{aligned}$$

$$\alpha^{(1)} = (1, 0), \quad \alpha^{(2)} = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}), \quad \theta = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3}).$$

$$\Lambda_{(1)} = \frac{1}{2} \left( 1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \Lambda_{(2)} = \frac{1}{2} \left( 0, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\Lambda_{(1)} = \frac{1}{3} (2\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}), \quad \Lambda_{(2)} = \frac{1}{3} (\alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)})$$

$$\Lambda_{(1)} + \Lambda_{(2)} = \theta$$

### Standard Model algebra

$$A_{\mu} : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \underbrace{\mathcal{L}(U(1))}_{\text{photon}} \oplus \underbrace{\mathcal{L}(SU(2))}_{W^{\pm}, Z} \oplus \underbrace{\mathcal{L}(SU(3))}_{8 \text{ gluons}}$$

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{4g_{U(1)}^2} F_{\mu\nu}^{(1)} F^{(1)\mu\nu} + \frac{1}{g_{SU(2)}^2} \kappa (F_{\mu\nu}^{(2)}, F^{(2)\mu\nu}) + \frac{1}{g_{SU(3)}^2} \kappa (F_{\mu\nu}^{(3)}, F^{(3)\mu\nu})$$

- We have a single scalar particle  $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{C}^2$  (the representation space for  $R_1$ ), the Higgs boson. Higgs boson states live in the following representation:  $(\underbrace{2}_{SU(2)}, \underbrace{1}_{SU(3)})_{+\frac{1}{2} \leftarrow U(1) \text{ charge}}$ , and

$\mathcal{L}_s = (D_{\mu}\phi, D^{\mu}\phi) - W(\phi^2)$  where  $\phi^2 = (\phi, \phi)$ ,  $W(\phi^2) := -\mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4$ . If we plot  $W(\phi^2)$  against  $|\phi|$  we can see that the vacuum of the Higgs boson is not at  $|\phi| = 0$ , but a sombrero potential.

The quarks in the following representation:

$$\underbrace{(\underline{2}, \underline{3})_{\frac{1}{6}}}_{\text{LH spinors}} \oplus \underbrace{(\underline{1}, \underline{3})_{\frac{2}{3}} \oplus (\underline{1}, \underline{3})_{-\frac{1}{3}}}_{\text{RH spinors}}$$

The leptons in the following representation:

$$(\underline{2}, \underline{1})_{-\frac{1}{2}} \oplus (\underline{1}, \underline{1})_{-1}$$

The terms for the Lagrangian for the fermions are each given by:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\mu D_\mu \psi^\alpha + \phi \psi \bar{\psi}$$

The  $\phi \psi \bar{\psi}$  terms are known as Yukawa couplings.

### On Symmetries of hadrons

|         | $Q$ | $M$    | $I$ |
|---------|-----|--------|-----|
| $\pi^+$ | +1  | 139MeV | +1  |
| $\pi^0$ | 0   | 135MeV | 0   |
| $\pi^-$ | -1  | 139MeV | +1  |

(a) Mesons.

|     | $Q$ | $M$    | $I$            |
|-----|-----|--------|----------------|
| $p$ | +1  | 938MeV | $+\frac{1}{2}$ |
| $n$ | 0   | 940MeV | $-\frac{1}{2}$ |

(b) Baryons.

### On Combining two $\mathfrak{sl}(2)$ -algebras

### On Multiple commutators

## 1.10.6 Algebra in special field theories (!!!???)

(there are a lot of such applications, I'll write them soon. see my note in field theory for now, or some other note.)

### Overview of algebra in supergravity

(see notes on duality transformations, there are a lot of ideas and classification, but it most about diff geom, not exactly algebra)

## 1.10.7 Algebra in mechanics

(пока я не особо разобрался, как конкретно именно алгебра используется в механике, см. Арнольда, но и без этого можно многое понять в механике)

### On symplectic mechanics

The symplectic Lie algebras ( $\mathfrak{sp}(n)$  or  $C_n$ )  $\subset \mathfrak{gl}(2n)$  consists of those matrices  $M \in \mathfrak{gl}(2n)$  which obey the relation  $M^t = JMJ$ , where  $J$  is the  $2n \times 2n$ -matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0_n \end{pmatrix}$$

Конфигурационное пространство твердого тела в  $\mathbb{R}^3$  с закрепленной точкой - это группа Ли  $G = \text{SO}(3)$  сохраняющих ориентацию ортогональных линейных преобразований пространства  $\mathbb{R}^3$ . Любая левоинвариантная риманова метрика  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  задает лагранжиан  $L : TG \rightarrow \mathbb{R}$  формулой

$$L(v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle, \quad v \in TG$$

Уравнения движения твердого тела - это уравнения геодезических на  $G$  по отношению к римановой метрике  $\langle, \rangle_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3)$  - алгебра Ли группы  $G$ . Вектор скорости  $\dot{g} \in T_g G$  определяет угловую скорость тела по формуле  $\Omega = (L_{g^{-1}})_* \dot{g} \in \mathfrak{g}$ , где  $L_g : G \rightarrow G$  - это левые сдвиги на  $G$ . В терминах угловой скорости лагранжиан принимает вид

$$L = \frac{1}{2} \langle \Omega, \Omega \rangle_e$$

где  $\langle, \rangle_e$  - скалярное произведение на  $\mathfrak{g} = T_e G$ , задаваемое римановой метрикой  $\langle, \rangle_{\mathfrak{g}}$  - алгебре Ли кососимметрических матриц  $3 \times 3$  - имеется инвариантное скалярное произведение  $\langle u, v \rangle_0 = -\frac{1}{2} \text{Tr } uv$  (форма Киллинга), так что  $\langle \Omega, \Omega \rangle_e = \langle \mathbf{A} \cdot \Omega, \Omega \rangle_0$  для некоторого симметрического линейного оператора  $\mathbf{A} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  (тензора инерции), положительно определенного по отношению к форме Киллинга. Главные оси инерции тела - это ортонормальные собственные векторы  $e_1, e_2, e_3$  оператора  $\mathbf{A}$ ; соответствующие собственные значения  $I_1, I_2, I_3$  называются главными моментами инерции. Положив  $\Omega = \Omega_1 e_1 + \Omega_2 e_2 + \Omega_3 e_3$ <sup>11</sup>, получаем

$$L = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

### On quaternions in mechanics



---

## Part II

# Algebra Fundamentals

Обсудим основные конструкции алгебры, применяющиеся почти везде в любых её разделах.

(пока хз, что тут писать, потом придумаю. какие-то основы. пока другими частями заниматься буду.)

## 2 Algebra Fundamentals

### 2.1 Fundamentals of groups and algebra

#### 2.1.1 Basics

(тут первая страница пропущена, и не так важно.)

#### Теория

Так как  $g \in U(2) \iff g^* = g^{-1}$ , то  $\delta = \bar{\alpha}$  и  $\gamma = -\bar{\beta}$ . Таким образом, любая матрица  $g$  из  $SU(2)$  имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Обратно, если  $g$  - матрица вида (3), то, очевидно,  $g \in SU(2)$ . Значит, каждый элемент группы  $SU(2)$  однозначно определяется парой комплексных чисел  $\alpha, \beta$  таких, что  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Если положить  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2$  с  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$ , то условие  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , переписанное в виде

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$$

даёт основание говорить, что группа  $SU(2)$  топологически эквивалентна (гомеоморфна) сфере  $S^3$  в четырёхмерном вещественном пространстве  $\mathbb{R}^4$ .

Обратим внимание на унитарные матрицы

$$b_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad c_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & i \sin(\theta/2) \\ i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Как доказывается в курсе линейной алгебры (а в данном случае проверяется непосредственно), для унитарной матрицы  $g$  вида (3) существует унитарная матрица  $u$  такая, что

$$g = ub_\varphi u^{-1}$$

с  $\varphi$ , определяемым из уравнения  $\alpha_1 = \cos(\varphi/2)$ . Отметим также, что любой матрице (3) при  $\alpha\beta \neq 0$  можно придать вид

$$a(\varphi, \theta, \psi) = b_\varphi c_\theta b_\psi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{i(\varphi+\psi)/2} & i \sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{i(\varphi-\psi)/2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{i(\psi-\varphi)/2} & \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{-i(\varphi+\psi)/2} \end{pmatrix},$$

e<sup>1)</sup>

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad -2\pi \leq \psi < 2\pi.$$

Достаточно положить

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \cos \frac{\theta}{2}, & \text{Arg } \alpha &= \frac{\varphi + \psi}{2}, \\ |\beta| &= \sin \frac{\theta}{2}, & \text{Arg } \beta &= \frac{\varphi - \psi + \pi}{2}, \end{aligned}$$

используя то обстоятельство, что каждое комплексное число  $z$  задаётся двумя вещественными параметрами,  $|z|$  и  $\arg z$  ( $\text{Arg } z$  - главное значение аргумента  $\arg z$ ).

**N)** Из дальнейшего будет видно, что  $\varphi, \theta, \psi$  - те же углы Эйлера. Унитарным матрицам  $\pm g$  ставится в соответствие одно и то же вращение в  $\mathbb{R}^2$ , поэтому область изменения  $\psi$  сжимается до полуинтервала  $[0, 2\pi)$ . Теперь мы готовы приступить к решению основной задачи этого параграфа.

### Эпиморфизм $\text{SU}(2) \longrightarrow \text{SO}(3)$ .

Поставим в соответствие каждому вектору  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$  трёхмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  с нормой  $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  комплексную матрицу второго порядка

$$H_{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{vmatrix}$$

Пространство  $M_2^+$  матриц вида (7) состоит из всех эрмитовых матриц с нулевым следом ( ${}^t \bar{H}_{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{x}}, \text{tr } H_{\mathbf{x}} = 0$ ), причём соответствие между векторами  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  и матрицами  $H_{\mathbf{x}} \in M_2^+$  является, очевидно, взаимно однозначным. В частности, базисным векторам  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$  соответствуют базисные матрицы  $h_k = H_{\mathbf{e}_k}, k = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} h_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, & h_2 &= \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}, & h_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \\ H_{\mathbf{x}} &= x_1 h_1 + x_2 h_2 + x_3 h_3, & M_2^+ &= \langle h_1, h_2, h_3 \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Заметим, что каждому линейному оператору  $\mathcal{A}^+ : H_{\mathbf{x}} \mapsto H_{\mathbf{y}}$  на  $M_2^+$  с матрицей  $A$  в базисе (8) будет отвечать вполне определённый линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$  на  $\mathbb{R}^3$  с той же матрицей  $A$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , поскольку  $H_{\alpha \mathbf{x}} = \alpha H_{\mathbf{x}}, H_{\mathbf{x} + \mathbf{x}'} = H_{\mathbf{x}} + H_{\mathbf{x}'}$ . Так как никакие другие базисы в дальнейшем не используются, то мы будем иногда отождествлять операторы и соответствующие им матрицы.

Пусть теперь  $g$  - фиксированный элемент группы  $\text{SU}(2)$ . Рассмотрим отображение

$$\Phi_g^+ : H_{\mathbf{x}} \mapsto g H_{\mathbf{x}} g^{-1}$$

Так как следы подобных матриц совпадают, то  $\text{tr } \Phi_g^+(H_{\mathbf{x}}) = \text{tr } H_{\mathbf{x}} = 0$ . Кроме того,  $g^* = {}^t g = g^{-l}$ , поэтому

$$(g H_{\mathbf{x}} g^{-1})^* = (g^{-1})^* H_{\mathbf{x}}^* g^* = g H_{\mathbf{x}} g^{-1}$$

и, следовательно,  $\Phi_g^+(H_{\mathbf{x}}) \in M_2^+$ :

$$\Phi_g^+(H_{\mathbf{x}}) = \begin{vmatrix} y_3 & y_1 + iy_2 \\ y_1 - iy_2 & -y_3 \end{vmatrix} = H_{\mathbf{y}}$$

где  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ . Из определяющих равенств (7) и (9) видно, что

$$\Phi_g^+(H_{\alpha \mathbf{x} + \alpha' \mathbf{x}'}) = \alpha \Phi_g^+(H_{\mathbf{x}}) + \alpha' \Phi_g^+(H_{\mathbf{x}'}).$$

Стало быть, отображение  $\Phi_g^+$  (соответственно  $\Phi_g$ ) - линейный оператор на  $M_2^+$  (соответственно на  $\mathbb{R}^3$ ). Покажем, что  $\Phi_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  - ортогональный оператор. В самом деле,

$$\begin{aligned} (\Phi_g(\mathbf{x})|\Phi_g(\mathbf{x})) &= (\mathbf{y}|\mathbf{y}) = -\det H_{\mathbf{y}} = -\det \Phi_g^+(H_{\mathbf{x}}) = \\ &= -\det g H_{\mathbf{x}} g^{-1} = -\det H_{\mathbf{x}} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \end{aligned}$$

т. е.  $\Phi_g$  сохраняет норму, а следовательно, и скалярное произведение. Пока не ясно, меняет ли  $\Phi_g$  ориентацию пространства  $\mathbb{R}^3$ , что зависит от знака  $\det \Phi_g$ . Мы знаем лишь, что  $\det \Phi_g = \pm 1$ . Как следует из определения,

$$\Phi_g^+(\Phi_{g'}H_{\mathbf{x}}) = g(g'H_{\mathbf{x}}g'^{-1})g^{-1} = (gg')H_{\mathbf{x}}(gg')^{-1} = \Phi_{gg'}^+(H_{\mathbf{x}})$$

причём  $\Phi_E^+$ -единичная ортогональная матрица порядка 3 для  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SU}(2)$ . Значит, соответствие

$$\Phi : g \mapsto \Phi_g \quad (\text{или } \Phi^+ : g \mapsto \Phi_g^+)$$

является гомоморфизмом  $\text{SU}(2)$  в  $\text{O}(3)$ . Ядро состоит из унитарных матриц  $g$ , для которых  $\Phi_g^+ = \Phi_E^+$ . Другими словами,

$$\begin{aligned} \text{Ker } \Phi &= \{g \in \text{SU}(2) | gH = Hg \quad \forall H \in M_2^+\} = \\ &= \{g \in \text{SU}(2) | gh_j = h_jg, j = 1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

где  $h_1, h_2, h_3$  - базис (8) пространства  $M_2^+$ . Прямая проверка показывает, что

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad gh_j = h_jg, \quad 1 \leq j \leq 3 \implies \\ &\implies g = \pm E \implies \text{Ker } \Phi = \{\pm E\} \end{aligned}$$

Посмотрим теперь на образы унитарных матриц (4) при гомоморфизме  $\Phi$ . Проведём вычисления для  $\Phi^+$  в базисе (8):

$$\begin{aligned} b_\varphi h_1 b_\varphi^{-1} &= (\cos \varphi) h_1 + (\sin \varphi) h_2 \\ b_\varphi h_2 b_\varphi^{-1} &= (-\sin \varphi) h_1 + (\cos \varphi) h_2 \\ b_\varphi h_3 b_\varphi^{-1} &= h_3 \end{aligned}$$

Значит (здесь мы свободно переходим от  $\Phi^+$  к  $\Phi$  и от матриц - к операторам),  $\Phi_{b_\varphi} = B_\varphi$  (см. (1)) - вращение трёхмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  на угол  $\varphi$  вокруг оси  $Ox_3$  (или  $h_3$ ). Если  $\varphi$  и  $u$  выбрать такими, чтобы выполнялось соотношение (5), то поскольку  $\Phi$  - гомоморфизм, будем иметь

$$\Phi_g = \Phi_u \Phi_{b_\varphi} \Phi_u^{-1}, \quad \det \Phi_g = \det \Phi_u \cdot 1 \cdot (\det \Phi_u)^{-1} = 1$$

Это показывает, что на самом деле  $\Phi$  - гомоморфизм  $\text{SU}(2)$  в  $\text{SO}(3)$ . Аналогичным образом проверяется, что  $\Phi_{c_\theta}$  - вращение на угол  $\theta$  вокруг оси  $Ox_1$ . Теперь для любой матрицы  $A \in \text{SO}(3)$  имеем

$$A = B_\varphi C_\theta B_\psi = \Phi_{b_\varphi} \Phi_{c_\theta} \Phi_{b_\psi} = \Phi_{b_\varphi c_\theta b_\psi} = \Phi_{a(\varphi, \theta, \psi)}$$

Стало быть, образ  $\text{Im } \Phi$  содержит всю группу  $\text{SO}(3)$ , и нами доказана

Теорема 1. Группа  $\text{SO}(3)$  является гомоморфным образом группы  $\text{SU}(2)$  при гомоморфизме  $\Phi : g \mapsto \Phi_g$  с ядром  $\text{Ker } \Phi = \{\pm E\}$ . Каждое вращение из  $\text{SO}(3)$  отвечает ровно двум унитарным операторам  $g$  и  $-g$  из  $\text{SU}(2)$ .

### Геометрическое изображение группы $SO(3)$ .

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие. Группа  $SO(3)$  топологически эквивалентна (гомеоморфна) трёхмерному проективному вещественному пространству  $\mathbb{RP}^3$ .

В самом деле, мы видели в п. 2, что элементы из  $SU(2)$  находятся во взаимно однозначном соответствии с точками сферы  $S^3$  в четырёхмерном вещественном пространстве  $\mathbb{R}^4$ . Линейным операторам  $\pm g \in SU(2)$  отвечают диаметрально противоположные точки на  $S^3$ , которые при гомоморфизме  $\Phi$  склеиваются (отождествляются). Получается одна из моделей проективного пространства  $\mathbb{RP}^3$ .

В курсе линейной алгебры и геометрии (см. [BA II, гл. 5, 3]) проективное пространство  $\mathbb{RP}^n$  определяется как множество прямых пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящих через начало координат  $O$ . Каждая такая прямая пересекает единичную сферу  $S^n$  с центром в  $O$  ровно в двух диаметрально противоположных точках. Заданием одной из этих точек прямая однозначно восстанавливается. Это и значит, что пространство  $\mathbb{RP}^n$  может быть определено как факторпространство единичной сферы  $S^n$  из  $\mathbb{R}^{n+1}$  по отношению, устанавливающему эквивалентность диаметрально противоположных точек сферы  $S^n$ . В нашу задачу сейчас не входит задание топологии на  $\mathbb{RP}^n$ .

Мы пришли к довольно неожиданному результату. На сфере  $S^3$  и на проективном пространстве  $\mathbb{R}^3$  устанавливаются структуры группы: в первом случае -  $SU(2)$ , во втором -  $SO(3)$ . Всякая попытка задать структуру непрерывной группы на  $S^2$  или на  $\mathbb{R}^2$  окончится неудачей (результат, не относящийся к нашей теме).

Согласно теореме 1 и её следствию группа  $SO(3)$  "в два раза меньше", чем группа  $SU(2)$ . Существование эпиморфизма  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  делает естественным вопрос о существовании мономорфизма  $SO(3) \rightarrow SU(2)$ . Мы увидим в гл. 3, что ответ на этот вопрос оказывается отрицательным.

### Кватернионы.

Реализация  $SU(2)$  становится ещё более наглядной, если под  $\mathbb{R}^4$  мы будем понимать специальное четырёхмерное вещественное пространство, снабжённое структурой тела - ассоциативной, хотя и некоммутативной алгебры с делением над  $\mathbb{R}$  (все отличные от нуля элементы обратимы). Имеется в виду знаменитая алгебра кватернионов, построенная в 1848 г. Гамильтоном (W. Hamilton, 1805-1865) и в его честь обозначаемая буквой  $\mathbb{H}$ . По традиции для её базисных элементов используются символы  $1$  (единица),  $i$  (мнимая единица),  $j$  и  $k$ . Так как в  $\mathbb{H}$  должен выполняться закон дистрибутивности, то закон умножения целиком определяется "таблицей умножения":

|   | 1 | i  | j  | k  |
|---|---|----|----|----|
| 1 | 1 | i  | j  | k  |
| i | i | -1 | k  | -j |
| j | j | -k | -1 | i  |
| k | k | j  | -i | -1 |

Из этой таблицы сразу видно, что  $\mathbb{H}$  - ассоциативная (но некоммутативная) алгебра с центром  $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$  и  $1$  - её единичный элемент. Каждый элемент алгебры  $\mathbb{H}$  однозначно записывается в виде

$$q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k := \alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta k$$

с вещественными коэффициентами  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , так что

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

Между прочим, умножение в  $\mathbb{H}$  служит непосредственным продолжением умножения в поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , покрываемом кватернионами  $\alpha + \beta \mathbf{i}$  (1 отождествляется с вещественной единицей 1, а  $\mathbf{i}$  - с  $i = \sqrt{-1}$ ). Фактически  $\mathbb{H}$  можно рассматривать как двумерную алгебру над  $\mathbb{C}$ . Действительно, для  $c, c' \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{H}$  имеем

$$\begin{aligned} c(\mathbf{q} + \mathbf{q}') &= c\mathbf{q} + c\mathbf{q}', & (c + c')\mathbf{q} &= c\mathbf{q} + c'\mathbf{q} \\ (cc')\mathbf{q} &= c(c'\mathbf{q}) = c'(c\mathbf{q}) \end{aligned}$$

Так как

$$\alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{i} + \gamma \mathbf{j} + \delta \mathbf{k} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\mathbf{1} + (\gamma + \delta\sqrt{-1})\mathbf{j}$$

то  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H} = 2$ .

Аналогия с  $\mathbb{C}$  просматривается и дальше. Так, сопряжённый к  $\mathbf{q}$  называется кватернион

$$\mathbf{q}^* = \alpha - \beta \mathbf{i} - \gamma \mathbf{j} - \delta \mathbf{k}$$

(N)аналог сопряжённого комплексного числа. Если  $\mathbf{q}$  - "истый кватернион", т.е.  $\alpha = 0$ , то  $\mathbf{q}^* = -\mathbf{q}$ . Величина

$$N(\mathbf{q}) := \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

вычисляемая посредством приведённой выше таблицы, называется нормой кватерниона  $\mathbf{q}$ . Очевидно, что  $\mathbf{q} \neq 0 \implies N(\mathbf{q}) \neq 0$ , а поэтому всякий ненулевой кватернион обратим:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{N(\mathbf{q})}, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{1} = \mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{q}$$

Стало быть, множество  $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \setminus \{0\}$  является группой (мультипликативная группа алгебры кватернионов).

Элементарно проверяется, что

$$\begin{aligned} (\mu_1 \mathbf{q}_1 + \mu_2 \mathbf{q}_2)^* &= \mu_1 \mathbf{q}_1^* + \mu_2 \mathbf{q}_2^*, & (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)^* &= \mathbf{q}_2^* \mathbf{q}_1^*; \\ N(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) &= N(\mathbf{q}_1) N(\mathbf{q}_2). \end{aligned}$$

Таким образом, отображение  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}^*$  суть антиавтоморфизм (переставляющий множители) алгебры  $\mathbb{H}$ , а отображение  $\mathbf{q} \mapsto N(\mathbf{q})$  гомоморфизм мультипликативной группы  $\mathbb{H}^*$  в  $\mathbb{R}^*$  с ядром

$$\mathrm{Sp}(1) := \mathrm{Ker} N = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} | N(\mathbf{q}) = 1\}$$

Группа  $\mathrm{Sp}(1)$  называется симплектической; она имеет прямое отношение к линейным симплектическим группам  $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ , кратко рассмотренным в [BA II], но мы на этом останавливаться не будем.

Из (10), (11) и (13) видно, что группа  $\mathrm{Sp}(1)$  топологически эквивалентна сфере в специальном четырёхмерном пространстве  $\mathbb{H}$ . С аналогичным свойством, касающемся группы  $\mathrm{SU}(2)$ , мы встречались в п. 2. Соединить эти два свойства совсем несложно. Рассмотрим отображение  $\Gamma : \mathbb{H} \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ , которое каждому кватерниону  $\mathbf{q} = c + \mathbf{j}c'$  вида (10) ставит в соответствие комплексную матрицу

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \left\| \begin{array}{cc} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ -(\gamma - i\delta) & \alpha - i\beta \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} c & c' \\ -\bar{c}' & \bar{c} \end{array} \right\|$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}\Gamma(\mu_1 \mathbf{q}_1 + \mu_2 \mathbf{q}_2) &= \mu_1 \Gamma(\mathbf{q}_1) + \mu_2 \Gamma(\mathbf{q}_2), \\ \Gamma(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) &= \Gamma(\mathbf{q}_1) \Gamma(\mathbf{q}_2), \quad \Gamma(\mathbf{1}) = E\end{aligned}$$

**N)** свойства, присущие линейному представлению над  $\mathbb{C}$  в том общем смысле, который будет придан этому понятию позднее. Вспомним попутно, что в [BA I, гл. 5] первоначальным алгебраическим изображением комплексных чисел были матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Из (14) следует, что

$$\Gamma(\mathrm{Sp}(1)) = \left\{ \begin{pmatrix} c & c' \\ -\bar{c}' & \bar{c} \end{pmatrix} \mid |c|^2 + |c'|^2 = 1 \right\} = \mathrm{SU}(2)$$

т.е.  $\Gamma$  реализует изоморфизм групп  $\mathrm{SU}(2)$  и  $\mathrm{Sp}(1)$ . К искомому эпиморфизму  $\mathrm{Sp}(1) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$  мы придём следующим образом. Каждому кватерниону  $\mathbf{q}$  с единичной нормой поставим в соответствие отображение  $\Psi_{\mathbf{q}} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ , полагая

$$\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \mathbf{p} \mathbf{q}^{-1}$$

Так как  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$  (см. (12)), то

$$\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{q}^* \mathbf{q}^{-1} = (\mathbf{q}^{-1})^* \mathbf{p}^* \mathbf{q}^* = (\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}))^*$$

Если  $\mathbf{p}^* = -\mathbf{p}$  - чистый кватернион, то  $(\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}))^* = \Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}^*) = -\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$ , и, значит, подпространство  $\mathbb{H}^-$  чистых кватернионов инвариантно относительно  $\Psi_{\mathbf{q}}$ . Мы пришли к линейному оператору

$$\Psi_{\mathbf{q}} : \mathbb{H}^- \longrightarrow \mathbb{H}^-$$

Как непосредственно вытекает из (15),  $\Psi_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2} = \Psi_{\mathbf{q}_1} \Psi_{\mathbf{q}_2}$ , т.е. элементы группы  $\mathrm{Sp}(1)$  "представляются" матрицами третьего порядка:

$$\Psi_{\mathbf{q}}(x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}) = y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k}; \quad y_\mu = \sum_{\nu=1}^3 a_{\mu\nu} x_\nu$$

Отождествим трёхмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  с пространством чисто мнимых кватернионов:

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{H}^- \mid |\mathbf{p}|^2 := N(\mathbf{p}) \right\}$$

С таким определением квадрата длины  $|\mathbf{p}|^2$  имеем

$$|\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})|^2 = N(\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) = N(\mathbf{q}) |\mathbf{p}|^2 N(\mathbf{q}^{-1}) = |\mathbf{p}|^2,$$

поскольку по условию  $N(\mathbf{q}) = 1$ . Значит,  $\Psi_{\mathbf{q}}$  - линейный оператор, сохраняющий длину, и мы имеем гомоморфизм  $\Psi : \mathrm{Sp}(1) \longrightarrow \mathrm{O}(3)$ . Стоит отметить ещё раз, что  $\Psi_{\mathbf{q}} = \mathcal{E}$  в точности при  $\mathbf{q} = \pm \mathbf{1}$ , и поэтому  $\mathrm{Ker} \Psi = \{\pm \mathbf{1}\}$ .

Вспомним теперь, что  $\mathrm{Sp}(1) \sim S^3$ . Так как любую точку  $\mathbf{q} \in S^3$  можно соединить с точкой  $\mathbf{1}$  гладкой кривой  $\mathbf{r}(t)$ , то  $\Psi_{\mathbf{r}(t)}$  является кривой, соединяющей  $\Psi_{\mathbf{q}}$  с тождественным оператором  $\Psi_1$ . Определитель  $\det$  - непрерывная функция оператора, зависящего от параметра  $t$ , и так как  $\det \Psi_1 = 1$ , то  $\det \Psi_{\mathbf{r}(t)} = 1$ . В частности,  $\det \Psi_{\mathbf{q}} = 1$ . Стало быть,  $\Psi_{\mathrm{Sp}(1)} \subset \mathrm{SO}(3)$ .

Осталось убедиться, что  $\Psi$  - сюръективное отображение. С этой целью предъявим в качестве образов известные нам матрицы (1).

а)  $\mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{i} \implies \Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$ , т.е. ось  $\mathbf{i}$  в  $\mathbb{R}^3$  остаётся при этом преобразовании инвариантной. Так как

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{j}) \left( \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{i} \right) \mathbf{j} \left( \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{i} \right) &= \cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k}, \\ \Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) &= -\sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k},\end{aligned}$$

то  $\Psi_{\mathbf{q}}$  отвечает матрице  $C_{\theta}$ . Аналогично, если  $\mathbf{q} = \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{1} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{k}$ , то  $\Psi_{\mathbf{q}}$  отвечает матрице  $B_{\varphi}$  поворота вокруг оси  $\mathbf{k}$ .

Таким образом, справедлива

Теорема 1'.

Отображение  $\Psi$  (соответственно  $\Psi\Gamma^{-1}$ ) является гомоморфизмом группы  $\text{Sp}(1)$  (соответственно  $\text{SU}(2)$ ) на группу  $\text{SO}(3)$  с ядром  $\{\pm \mathbf{1}\}$  (соответственно  $\{\pm E\}$ ).

## 2.1.2 Cosets by a subgroup

### Элементарные свойства.

Пусть  $G, G'$  - две произвольные группы с нейтральными элементами  $e, e'$ . Из определения гомоморфизма  $f : G \longrightarrow G'$  и из рассмотренных нами в [ВА I; ВА II] многочисленных примеров видно,  $\text{Ker } f$  - подгруппа в  $f$ , причём  $x(\text{Ker } f) = (\text{Ker } f)x, x \in G$ .

О п р е д е л е н и е. Подгруппа  $K \subset G$  называется нормальной в  $G$ , если

$$xKx^{-1} = K \quad \forall x \in G.$$

Таким образом, ядра гомоморфизмов всегда являются нормальными подгруппами. Значение этого факта мы оценим в должной мере несколько позднее. Заметим пока, что далеко не всякая подгруппа нормальна в  $G$ . Например, в  $S_3$  циклическая подгруппа  $\langle (123) \rangle = A_3$  нормальна, а  $\langle (12) \rangle = \{e, (12)\}$  таковой не является (не рекомендуется называть  $\langle (12) \rangle$  "ненормальной подгруппой").

Обратим внимание на то обстоятельство, что все элементы множества

$$a \text{Ker } f = \{ab | b \in \text{Ker } f\}, \quad a \in G,$$

отображаются в один и тот же элемент  $f(a)$  группы  $G' : f(ab) = f(a)f(b) = f(a)e' = f(a)$ . В свою очередь, если  $f(g) = f(a)$ , то  $f(a^{-1}g) = f(a^{-1})f(g) = f(a)^{-1}f(g) = e'$ , откуда  $a^{-1}g = b \in \text{Ker } f$  и  $g = ab \in a \text{Ker } f$ . Этот факт указывает на целесообразность разбиения  $G$  на подмножества вида  $a \text{Ker } f$ . Изучим такое разбиение в общем случае независимо от гомоморфизмов.

О п р е д е л е н и е. Пусть  $H$  - подгруппа группы  $G$ . Левым смежным классом группы  $G$  по подгруппе  $H$  (коротко:  $G$  по  $H$ ) называется множество  $gH$  элементов вида  $gh$ , где  $g$  - фиксированный элемент из  $G$ , а  $h$  пробегает все элементы подгруппы  $H$ . Элемент  $g$  называется представителем смежного класса  $gH$ . Аналогично определяются правые смежные классы  $Hg$ . Иногда левые смежные классы в нашем смысле называются левыми, а правые - правыми. Важно придерживаться лишь одной какой-нибудь терминологии. Если  $H = \text{Ker } f$  - ядро гомоморфизма, то  $gH = Hg$  ввиду нормальности  $H$  в  $G$ . Заметим, что одним из смежных классов является сама подгруппа  $H = He = eH$ . Никакой другой смежный класс подгруппой не является. Действительно, если  $gH$  - подгруппа, то  $e \in gH$ , откуда  $e = gh, g = h^{-1}$  и  $gH = h^{-1}H = H$ .

Теорема 1. Два левых смежных класса  $G$  по  $H$  совпадают или не имеют общих элементов. Разбиение  $G$  на левые смежные классы по  $H$  определяет на  $G$  отношение эквивалентности.

Докажем это. Пусть классы  $g_1H$  и  $g_2H$  имеют общий элемент  $a = g_1h_1 = g_2h_2$ . Тогда  $g_2 = g_1h_1h_2^{-1}$ , а любой элемент  $g_2h$  класса  $g_2H$  имеет вид  $g_1h_1h_2^{-1}h = g_1h'$ , где  $h' = h_1h_2^{-1}h \in H$ . Значит,  $g_2H \subset g_1H$ . Аналогично доказывается, что всякий элемент из класса  $g_1H$  содержится в  $g_2H$  и, стало быть,  $g_1H = g_2H$ .

Так как любой наперёд заданный элемент  $g \in G$  содержится в  $gH$ , то проведённое рассуждение показывает, что  $G$  представляется в виде объединения непересекающихся левых смежных классов по подгруппе  $H$ :

$$G = \bigcup_i g_iH$$

Согласно общему принципу, изложенному в [ВА I, гл. 1, 6], это разбиение индуцирует на  $G$  отношение эквивалентности, которое определяется очевидным образом:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Если угодно, в рефлексивности, симметричности и транзитивности этого отношения можно убедиться непосредственно:  $a \sim a$ , поскольку  $a^{-1}a = e \in H$ ;  $a \sim b \iff a^{-1}b = h \iff b^{-1}a = h^{-1} \in H \iff b \sim a$ ;  $a \sim b, b \sim c \implies b^{-1}a = h_1, c^{-1}b = h_2 \implies c^{-1}a = c^{-1}bh_1 = h_2h_1 \in H \implies a \sim c$ .

Аналогичное утверждение имеет место для правых смежных классов.

Разложение на смежные классы возникает естественным образом в группах перестановок. Пусть, например,  $G = S_n$  - симметрическая группа, действующая на множестве  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ . Если рассмотреть совокупность  $H$  элементов  $\pi \in S_n$  таких, что  $\pi(n) = n$ , то, как нетрудно убедиться,  $H$  - подгруппа в  $S_n$ , которую можно отождествить с  $S_{n-1}$ . Пусть  $\tau_0 = e, \tau_i = (i, n)$  - транспозиция, переводящая  $n$  в  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). Ясно, что

$$S_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \tau_k S_{n-1}$$

Рассмотрим разложение  $S_3$  в левые и правые смежные классы по подгруппе  $\langle(12)\rangle = S_2$ :

$$\begin{aligned} S_3 &= \{e, (12)\} \cup \{(13), (123)\} \cup \{(23), (132)\}, \\ S_3 &= \{e, (12)\} \cup \{(13), (132)\} \cup \{(23), (123)\}. \end{aligned}$$

Мы видим, что множество левых смежных классов  $gS_2$  не совпадает с множеством правых смежных классов  $S_2g'$ . Тем не менее между множествами  $\{gH\}$  и  $\{Hg'\}$  всегда имеется биективное соответствие, при котором

$$x = gh \in gH \iff x^{-1} = h^{-1}g^{-1} \in Hg^{-1}.$$

Действительно, если, например,  $h_1g_1^{-1} = h_2g_2^{-1}$ , то  $g_1 = g_2h_2^{-1}h_1$  и  $g_1H = g_2H$ . В частности, если  $\{e, x, y, z, \dots\}$  - множество представителей левых (соответственно правых) смежных классов, то  $\{e, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}, \dots\}$  - множество представителей правых (соответственно левых) смежных классов. Мощности этих множеств совпадают.

Множество всех левых смежных классов  $G$  по  $H$  условимся обозначать символом  $G/H$  (или  $(G/H)_l$ , если возникает необходимость рассматривать одновременно множество  $(G/H)_r$  правых смежных классов  $G$  по  $H$ ). Для мощности  $\text{Card } G/H$  этого множества используется название "индекс подгруппы  $H$  в  $G$ " и вводится специальное обозначение



$(G : H)$ , хорошо согласующееся с обозначением  $(G : e)$  порядка  $|G|$  группы  $G$  (число смежных классов по единичной подгруппе). Так как отображение  $H \rightarrow gH$  взаимно однозначно (вспомните доказательство теоремы Кэли и отображение  $L_g$ ), то  $\text{Card } gH = (H : e)$ . Таким образом, имеет место легко запоминающаяся формула

$$(G : e) = (G : H)(H : e)$$

из которой вытекает классическая

### Теорема 2 (Лагранж).

Порядок конечной группы делится на порядок каждой своей подгруппы.

С л е д с т в и е. Порядок любого элемента делит порядок группы. Группа простого порядка  $p$  всегда циклическая и с точностью до изоморфизма единственная.

Действительно, порядок любого элемента  $g \in G$  совпадает с порядком порождённой им циклической подгруппы  $\langle g \rangle$  [ВА I, гл. 4, 2, теорема 2].

Если, далее,  $|G| = p$  - простое число, а  $H$  - неединичная подгруппа, то делимость  $p$  на  $|H|$  означает, что  $|H| = p$ , откуда  $H = G$ . Стало быть,  $G$  совпадает с циклической подгруппой, порождённой любым элементом  $g \neq e$ . Все циклические группы данного порядка изоморфны [ВА I, гл. 4, 2, теорема 3]. Это даёт право говорить об единственности. В связи с теоремой Лагранжа возникает "искушение" для каждого делителя  $m$  порядка  $n$  группы  $G$  искать в  $G$  подгруппу порядка  $m$ . Но для этого в общем-то нет оснований. Желаящие могут проверить (а остальные должны подтвердить это на экзамене), что в знакопеременной группе  $A_4$  порядка 12 нет подгрупп порядка 6. Тем не менее, как мы сейчас убедимся, в некоторых группах "обращение теоремы Лагранжа" справедливо.

### Строение циклических групп.

Из [ВА I] нам уже известно, что все циклические группы одинакового порядка изоморфны, а порядок элемента в любой группе совпадает с порядком порождённой им циклической подгруппы. На самом деле справедлива

Теорема 3. Всякая подгруппа циклической группы есть снова циклическая группа. Подгруппы бесконечной циклической группы  $(\mathbb{Z}, +)$  исчерпываются (бесконечными) группами  $(m\mathbb{Z}, +)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , а подгруппы циклической группы порядка  $q$  находятся во взаимно однозначном соответствии с (положительными) делителями  $d$  числа  $q$ .

Доказательство. Будем для разнообразия рассматривать произвольную циклическую группу  $A = \langle a \rangle$  в аддитивной записи. Каждый её элемент, стало быть, имеет вид  $ka$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  или же  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , если  $A$  - конечная группа порядка  $q$ . Пусть  $B$  - ненулевая подгруппа в  $A$ . Если  $ka \in B$  для какого-то  $k \neq 0$ , то и  $-ka \in B$ . Среди всех элементов  $ka \in B$  с положительными  $k$  выберем элемент  $ma$ , где  $m$  наименьшее.

Записав любое  $k > 0$  в виде  $k = lm + r$ ,  $0 \leq r < m$ , мы видим, что из  $ka \in B$  следует  $ra = ka - l(ma) \in B$ , т.е.  $r = 0$ . Значит,  $B = \langle a \rangle$  - циклическая группа.

Все бесконечные циклические группы изоморфны группе  $(\mathbb{Z}, +)$ . В данном случае образующими служат 1 или -1, так что по доказанному любая подгруппа в  $(\mathbb{Z}, +)$  определяется натуральным числом  $m$  и имеет вид

$$m\mathbb{Z} = \langle m \cdot 1 \rangle = \{0, \pm m, \pm 2m, \dots\}$$

Очевидно, что все эти подгруппы бесконечны.

Пусть теперь  $\langle a \rangle = \{0, a, \dots, (q-1)a\}$ ,  $qa = 0$ . Мы знаем, что  $B = \{0, ma, 2ma, \dots\}$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , причём  $sa \in B$ ,  $s \in \mathbb{N} \implies s = mt$ . Утверждается, что  $m$  делит  $q$ . Действительно, пусть  $q = dm + r$ ,  $0 \leq r < m$ . Тогда

$$0 = qa = d(ma) + ra$$

откуда  $ra = -d(ma) \in B$ . Минимальность  $m$  влечёт  $r = 0$ , и мы имеем  $q = dm$ . Таким образом,

$$B = \{0, ma, 2ma, \dots, (d-1)ma\} = mA$$

**N)** подгруппа в  $A$  порядка  $d$ . Когда  $m$  пробегает по всем положительным делителям числа  $q$ , то же самое делает  $d$ , и мы получаем ровно по одной подгруппе каждого порядка  $d$ , делящего  $q$ .

**С л е д с т в и е.** В циклической группе  $\langle a \rangle$  порядка  $q$  подгруппа порядка  $d$ ,  $d|q$ , совпадает с множеством элементов  $b \in \langle a \rangle$  таких, что  $db = 0$ .

**Доказательство.** Если  $dm = q$ , то  $b \in B = mA$  и  $db = 0$ . Обратно: пусть  $b = la \in \langle a \rangle$  и  $db = 0$ . Из условия  $dla = 0$  следует, что  $dl = qk = dm k$ , откуда  $l = mk$  и  $b = la = k(ma) \in mA$ .

### 2.1.3 Group actions on sets

**Гомоморфизмы  $G \rightarrow S(\Omega)$ .**

Теория групп началась для нас в [ВА I, гл. 4], с примеров групп преобразований - подгрупп группы  $S(\Omega)$  всех взаимно однозначных отображений множества  $\Omega$  на себя. Этот подход соответствует как историческому пути развития теории групп, так и значению групп преобразований в других областях математики. Так называемая абстрактная теория групп, являющаяся порождением более поздней эпохи (первая половина XX столетия), далеко отошла от групп преобразований, но многие её понятия несут на себе отпечаток старого времени. Именно, источник этих понятий чаще всего покоится на идее реализации (представления) данной группы  $G$  в  $S(\Omega)$ , где  $\Omega$  - подходящим образом выбранное множество. Под реализацией  $G$  в  $S(\Omega)$  удобно понимать любой гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow S(\Omega)$ . Если  $\Phi_g$  - преобразование из  $S(\Omega)$ , отвечающее элементу  $g \in G$ , то  $\Phi_e = e_\Omega$  - единичное преобразование  $\Omega \rightarrow \Omega$  и  $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$ ;  $g, h \in G$ . Образ  $\Phi_g(x)$  точки (элемента)  $x \in \Omega$  относительно преобразования  $\Phi_g$  часто обозначается просто символом  $gx$ , что даёт право говорить об отображении  $(g, x) \mapsto gx$  декартова произведения  $G \times \Omega$  в  $\Omega$ . Правильнее было бы писать  $g \circ x$  или  $g * x$ , чтобы не получалось путаницы с умножением в  $G$ , но большей частью в этом нет необходимости. Отмеченные выше свойства преобразования  $\Phi_g$  записываются в виде:

- i)  $ex = x, x \in \Omega$ ;
- ii)  $(gh)x = g(hx), g, h \in G$ .

Всякий раз, когда имеется отображение  $(g, x) \mapsto gx$  декартова произведения  $G \times \Omega$  в  $\Omega$ , удовлетворяющее свойствам i), ii), говорят, что группа действует (слева) на множестве  $\Omega$ , а  $\Omega$  является  $G$ -множеством. С другой стороны, имея  $G$ -множество  $\Omega$ , мы посредством формулы

$$\Phi_g(x) = gx, \quad x \in \Omega,$$

для каждого  $g \in G$  определим отображение  $\Phi_g : \Omega \rightarrow \Omega$ , причём из i), ii) следует, что  $\Phi : g \mapsto \Phi_g$  будет гомоморфизмом  $G$  в  $S(\Omega)$ . Говорят ещё (в особенности, когда  $|\Omega| < \infty$ ), что с действием  $G$  на  $\Omega$  ассоциировано представление  $(\Phi, \Omega)$  группы  $G$  в группу перестановок. Ядро  $\text{Ker } \Phi$  называют ядром действия группы  $G$ . Если  $\Phi$  - мономорфизм (иначе: если  $gx = x \quad \forall x \in \Omega \implies g = e$ ), то говорят, что группа  $G$  действует эффективно на множестве  $\Omega$ .

Замечание. Каждое действие  $G$  на  $\Omega$  индуцирует действие  $G$  на  $\Omega^k = \Omega \times \dots \times \Omega$  по очевидному правилу  $g(x_1, \dots, x_k) = (gx_1, \dots, gx_k)$ . Кроме того, имеется индуцированное действие  $G$  на множестве всех подмножеств  $\mathcal{P}(\Omega)$  (см. [BA I, гл. 1, 5, упр. 4]). Полагаем  $g\emptyset = \emptyset$ , а если  $T$  - непустое подмножество в  $\Omega$ , то  $gT = \{gt | t \in T\}$ . Свойства i), ii) проверяются непосредственно. Легко понять, что  $T$  и  $gT$  имеют одинаковую мощность, так что  $G$  индуцирует действие на подмножествах одинаковой мощности.

### Орбиты и стационарные подгруппы точек.

Две точки  $x, x' \in \Omega$  называются эквивалентными относительно группы  $G$ , действующей на  $\Omega$ , если  $x' = gx$  для некоторого элемента  $g \in G$ . Свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности, легко получающиеся при помощи i), ii) (см. п. 1), показывают, что мы имеем дело с истинным отношением эквивалентности, разбивающим  $\Omega$  на непересекающиеся классы эквивалентности. Эти классы эквивалентности принято называть  $G$ -орбитами. Орбиту, содержащую элемент  $x_0 \in \Omega$ , естественно обозначать символом  $G(x_0)$ ; таким образом,  $G(x_0) = \{gx_0 | g \in G\}$ . Используются, однако, и другие обозначения, подчёркивающие особенности того или иного действия  $G$  на  $\Omega$ . Понятие орбиты пришло из геометрии. Если, например,  $G = \text{SO}(2)$  - группа вращений на плоскости вокруг начальной точки  $O$ , то орбитой точки  $P$  будет служить окружность с центром в  $O$ , проходящая через  $P$ , а множество  $\Omega = \mathbb{R}^2$  будет объединением концентрических окружностей, включая окружность нулевого радиуса (точка  $O$ ). Для нас понятие орбиты также не является новым. Мы им пользовались в [BA I, гл. 4] при разложении перестановки  $\pi \in S_n$  в произведение независимых циклов. В качестве  $G$  бралась циклическая группа  $\langle \pi \rangle$ .

Пусть  $x_0$  - фиксированная точка в  $\Omega$ . Рассмотрим множество

$$\text{St}(x_0) = \{g \in G | gx_0 = x_0\} \subset G.$$

Так как  $ex_0 = x_0$ , а  $g, h \in \text{St}(x_0) \implies gh^{-1} \in \text{St}(x_0)$ , то  $\text{St}(x_0)$  - подгруппа в  $G$ . Она называется стационарной подгруппой (или стабилизатором) в  $G$  точки  $x_0 \in \Omega$  и часто обозначается символом  $G_{x_0}$ . Для рассмотренного выше действия группы  $\text{SO}(2)$  на  $\mathbb{R}^2$  имеем  $\text{St}(O) = \text{SO}(2)$  и  $\text{St}(P) = e$ , если  $P \neq O$ . В общем случае

$$gx_0 = g'x_0 \iff g^{-1}g' \in \text{St}(x_0) \iff g' \in g\text{St}(x_0)$$

Стало быть, левые смежные классы  $g\text{St}(x_0)$  группы  $G$  по стационарной подгруппе  $\text{St}(x_0)$  находятся во взаимно однозначном соответствии с точками орбиты  $G(x_0)$ . В частности,

$$\text{Card } G(x_0) = \text{Card}(G/\text{St}(x_0)) = (G : \text{St}(x_0)).$$

Здесь, как и раньше,  $G/\text{St}(x_0)$  - фактормножество  $G$  по  $\text{St}(x_0)$ , а  $(G : \text{St}(x_0))$  - индекс подгруппы  $\text{St}(x_0)$  в  $G$ . Мощность  $\text{Card } G(x_0)$  часто называется длиной  $G$ -орбиты точки  $x_0$ . Из (1) и из теоремы Лагранжа следует, что длина любой орбиты относительно конечной группы  $G$  является делителем порядка группы.

Обратим ещё внимание на то обстоятельство, что точку  $x_0$  в правой части соотношения (1) можно заменить на любую точку  $x'_0 \in G(x_0)$ . Действительно,

$$\text{Card } G(x_0) = \text{Card } G(x'_0) = (G : \text{St}(x'_0)).$$

Более сильное утверждение о стационарных подгруппах заключается в следующем. Пусть  $x'_0 = gx_0$ . Тогда

$$\text{St}(x'_0)gx_0 = \text{St}(x'_0)x'_0 = x'_0 = gx_0$$

откуда  $g^{-1}\text{St}(x'_0) = x_0$ , т.е.

$$g^{-1}\text{St}(x'_0)g \subset \text{St}(x_0)$$

Аналогично,

$$g\text{St}(x_0)g^{-1} \subset \text{St}(x'_0)$$

поскольку

$$\text{St}(x_0)g^{-1}x'_0 = \text{St}(x_0)x_0 = x_0 = g^{-1}x'_0.$$

Значит, имеет место равенство

$$\text{St}(x'_0) = g\text{St}(x_0)g^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in \text{St}(x_0)\}$$

В духе примера 1, рассматриваемого ниже, две подгруппы  $H, H' \subseteq G$  называются сопряжёнными, если  $H' = gHg^{-1}$  для некоторого  $g \in G$ . Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

**Теорема 1.** Пусть группа  $G$  действует на множестве  $\Omega$ . Если две точки  $x_0, x'_0 \in \Omega$  лежат в одной орбите, то их стационарные подгруппы сопряжены:

$$x'_0 = gx_0 \implies \text{St}(x'_0) = g\text{St}(x_0)g^{-1}.$$

Если, далее,  $G$  - конечная группа и

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_r$$

**N)** разбиение  $\Omega$  на конечное число орбит с представителями  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , то

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^r (G : \text{St}(x_i))$$

Формула (2) лежит в основе многих применений "метода орбит" к конечным группам.

### Примеры действий групп на множествах.

Мы остановимся лишь на примерах, относящихся собственно к теории групп.

**Пример 1** (действие сопряжением). На  $\Omega = G$  определяется действие любого элемента  $g \in G$  посредством формулы

$$x \mapsto I_g(x) = gxg^{-1} \quad \forall x \in G$$

Можно было бы писать  $g \circ x = gxg^{-1}$ , но мы предпочли воспользоваться старым нашим обозначением из [ВА I, гл. 4, 2, п. 4] для внутреннего автоморфизма  $I_g$ , отвечающего элементу  $g \in G$ .

Действие элемента  $g$ , отождествлённое с действием  $\text{Inn}(G)$ , называется сопряжением (или трансформированием). Его ядром служит центр группы  $G$ :

$$Z(G) = \{z \in G | I_g(z) = z \quad \forall g \in G\} = \{z \in G | zg = gz \quad \forall g \in G\}$$

Орбита элемента  $x \in G = \Omega$ , обозначаемая здесь символом  $x^G$ , называется классом сопряжённых элементов, классом сопряжённости или просто сопряжённым классом,

содержащим  $x$ . Если  $a, b \in x^G$ , то иногда пишут  $a \stackrel{G}{\sim} b$ . Для стационарной подгруппы  $\text{St}(x)$ , называемой в этом случае центризатором элемента  $x$ , чаще используется обозначение  $C(x)$  (или  $C_G(x)$ ), если нужно выделить группу  $G$ ).

Действие сопряжением, согласно замечанию в конце п. 1, переносится на подмножества и подгруппы в  $G$ . Два подмножества  $H, T \subset G$  сопряжены, если  $T = gHg^{-1}$  при некотором  $g \in G$ .

Пусть  $H$  - подгруппа в  $G$ . Принято говорить, что

$$N(H) := N_G(H) := \text{St}(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$$

**N)** нормализатор подгруппы  $H$  в  $G$ . В частности,  $H \triangleleft G$  ( $H$  - нормальная подгруппа в  $G$ ), если  $N(H) = G$ , что согласуется с определениями в 2, п. 1. В соответствии с соотношением (1) длина орбиты  $H^G$  (число сопряжённых с  $H$  подгрупп) совпадает с индексом нормализатора  $N(H)$  в  $G$ .

Пусть, далее,  $G$  - конечная группа и  $x_1^G, \dots, x_r^G$  - её сопряжённые классы, причём первые  $q$  из них одноэлементные:

$$x_i^G = \{x_i\}, \quad i = 1, \dots, q \quad (x_1 = e)$$

Тогда  $Z(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ , а соотношения (1) и (2) переписываются в виде

$$|x_i^G| = (G : C(x_i)), \quad i = 1, \dots, q, q+1, \dots,$$

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=q+1}^r (G : C(x_i))$$

Пусть, скажем,  $G = S_3$ . Тогда  $r = 3, q = 1$  (т.е.  $Z(S_3) = e$ ) и

$$S_3 = \{e\} \cup \{(12), (13), (23)\} \cup \{(123), (132)\}$$

**N)** разбиение  $S_3$  на сопряжённые классы. Размеры этих классов (длины орбит) делят  $|S_3| = 6$ , как и предписывается соотношением (1').

Соотношение (2') приводит немедленно к следующему интересному утверждению.

**Теорема 2.** Всякая конечная  $p$ -группа  $G$  (группа порядка  $p^n > 1, p$  - простое число) обладает центром  $Z(G) \neq e$ .

**Доказательство.** Если  $G$  - абелева группа, то  $G = Z(G)$ , и доказывать нечего. В противном случае  $r > q, (G : C(x_i)) = p^{n_i}, n_i \geq 1$  при  $i > q$ , и соотношение (2), переписанное в виде

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{i=q+1}^r p^{n_i}$$

показывает, что  $|Z(G)|$  делится на  $p$ .

Существование неабелевой  $p$ -группы установить легко. Достаточно рассмотреть группу верхних треугольных матриц

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in Z_p \right\}$$

с коэффициентами в конечном поле из  $p$  элементов.

При  $m \geq 2$  (сдвиг). Определённое формулой  $L_a(g) = ag$  отображение  $L_a : G \rightarrow G$ , которое мы использовали при доказательстве теоремы Кэли (см. [BA I, гл. 4, 3]), обычно

называют левым сдвигом на  $a$ . Так как  $eg = g$  и  $(ab)g = a(bg)$ , то левые сдвиги задают действие  $G$  на себе, которое индуцирует действие на подмножествах группы  $G$ . Пусть, в частности,  $H$  - подгруппа и  $G/H$  - множество левых смежных классов  $gH, g \in G$ .

Ясно, что отображение

$$(x, gH) \mapsto x(gH) = (xg)H$$

определяет действие  $L^H$  группы  $G$  на  $G/H$ . Ядром  $\text{Ker } L^H$  этого действия является множество

$$\{x \in G \mid L_x^H(gH) = gH \quad \forall g \in G\} = \{x \in G \mid xgH = gH \quad \forall g \in G\}$$

Другими словами,  $x \in \text{Ker } L^H \iff g^{-1}xg \in H$  для всех  $g \in G$ , или, что эквивалентно,  $x \in gHg^{-1} \forall g \in G$ . Таким образом,

$$\text{Ker } L^H = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

**N)**наибольшая нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $H$ . Эффективность действия  $G$  на  $G/H$  равносильна отсутствию подгруппы  $K \subset H, K \neq e$ , нормальной в  $G$ .

Во всяком случае, любую подгруппу  $H$  индекса  $n$  в  $G$  можно использовать для представления  $(L^H, G/H)$  группы  $G$  перестановками  $L_x^H$  на смежных классах  $G$  по  $H$ . Это представление (возможно, неточное) гораздо более экономно, чем то, которое получается посредством применения теоремы Кэли.

**Пример 3 (транзитивные группы).** Группу перестановок  $G \subset S_n$ , действующую на множестве  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ , называют транзитивной, если орбита  $G_i$  некоторой (а следовательно, и любой) точки  $i \in \Omega$  совпадает с  $\Omega$ . Другими словами, действие  $G \times \Omega \rightarrow \Omega$  транзитивно на  $\Omega$ , когда для каждой пары точек  $i, j \in \Omega$  найдётся по крайней мере один элемент  $g \in G$  с  $g(i) = j$ .

Пусть  $\Omega^{[k]}$  - совокупность упорядоченных  $k$ -элементных подмножеств в  $\Omega$ . Группа  $G$ , действующая на  $\Omega$ , индуцирует действие на  $\Omega^{[k]}$ ; если при этом имеет место транзитивность на  $\Omega^{[k]}$ , то  $G$  называется  $k$ -транзитивной на  $\Omega$ . Скажем, симметрическая группа  $S_n$   $n$ -транзитивна на  $\Omega$ , а знакопеременная группа  $A_n$   $(n-2)$ -транзитивна.

Любая группа  $G$  действует транзитивно на множестве  $G/H$  левых смежных классов  $G$  по  $H$  (см. пример 2). Действительно, если  $g_iH, g_jH$  - два смежных класса, то  $g_jg_i^{-1}(g_iH) = g_jH$ . Тем более удивительно, что получение прямыми средствами информации о  $k$ -транзитивных группах фиксированной степени  $n$  при  $k > 5$  весьма затруднительно. Лишь весьма окольным путём в начале 80-х годов XX столетия была доказана гипотеза К. Жордана, что всего таких групп две:  $S_n$  и  $A_n$ .

Мы собираемся получить любопытные количественные результаты о транзитивных группах, которые понадобятся нам в дальнейшем. Пусть  $G$  - транзитивная группа на  $\Omega$ . Стационарную подгруппу  $\text{St}(i)$  точки  $i \in \Omega$  обозначим символом  $G_i$ . Нам известно (см. теорему 1), что если  $i = g_i(1)$ , то  $G_i = g_iG_1g_i^{-1}, i = 1, 2, \dots, n$  ( $g_1 = e$ ). Кроме того, элементы  $g_i$  можно выбрать в качестве представителей левых смежных классов  $G$  по  $G_1$ :

$$G = G_1 \cup g_2G_1 \cup \dots \cup g_nG_1$$

В частности,  $|G| = n|G_1|$ , что согласуется с общими результатами о длинах орбит (см. п. 2).

**Теорема 3.** Пусть  $G$  - транзитивная группа на  $\Omega$ , и для любого  $g \in G$  пусть  $N(g)$  - число точек в  $\Omega$ , остающихся на месте при действии  $g$ .

Тогда:

- i)  $\sum_{g \in G} N(g) = |G|$  (поделив обе части равенства i) на  $|G|$ , получаем, что "в среднем" каждый элемент оставляет неподвижной одну точку);  
 ii) если  $G$  — 2-транзитивная группа, то  $\sum_{g \in G} N(g)^2 = 2|G|$ .

Доказательство. i) Имеем

$$\sum_{g \in G} N(g) = \sum_{j=1}^n \Gamma(j)$$

где  $\Gamma(j)$  — число элементов в  $G$ , оставляющих на месте символ  $j$ . Другими словами,  $\Gamma(j) = |G_j|$ . Но в силу транзитивности

$$|G_j| = |g_j G_1 g_j^{-1}| = |G_1|,$$

где  $g_j$  взяты из разложения (3). Стало быть,

$$\sum_{g \in G} N(g) = \sum_{j=1}^n |G_j| = \sum_{j=1}^n |G_1| = n |G_1| = |G|$$

ii) Условие 2-транзитивности  $G$  означает, что на множестве  $\Omega_1 = \Omega \setminus \{1\}$  стационарная подгруппа  $G_1$  действует транзитивно, т.е.  $G_1$ -орбитами будут  $\{1\}$  и  $\Omega_1$ . Пусть  $N'(x)$  — число точек в  $\Omega_1$ , неподвижных при действии  $x \in G$ . Соотношение i), применённое к паре  $(G_1, \Omega_1)$ , даёт

$$\sum_{x \in G_1} N'(x) = |G_1|$$

Так как  $N(x) = 1 + N'(x)$  для  $x \in G_1$  (добавляется точка 1), то имеем

$$\sum_{x \in G_1} N(x) = 2 |G_1|$$

Точно такие же соотношения справедливы для всех других  $G_j$ :

$$\sum_{x \in G_j} N(x) = 2 |G_j| = 2 |G_1|$$

Суммируя по  $j$ , получаем

$$\sum_{j=1}^n \sum_{x \in G_j} N(x) = 2n |G_1| = 2|G|$$

Слева  $N(x)$  считается по одному для каждой подгруппы  $G_j$ , в которой содержится  $x$ . Но  $x$  оставляет на месте  $N(x)$  точек и, следовательно, содержится ровно в  $N(x)$  подгруппах  $G_j$ . Это означает, что каждый элемент  $x$  вносит в сумму член  $N(x)^2$ . С другой стороны, любой элемент  $y \in G$ , не содержащийся в объединении  $\bigcup_j G_j$ , переставляет все точки, так что  $N(y) = 0$ . Поэтому можно записать соотношение

$$\sum_{g \in G} N(g)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{x \in G_j} N(x) = 2|G|.$$

### Однородные пространства.

Для геометрии особый интерес представляет тот случай, когда  $\Omega$  - топологическое пространство (например, прямая  $\mathbb{R}$  или сфера  $S^2$ ),  $G$  - так называемая непрерывная (или топологическая) группа, а действие  $(g, x) \mapsto gx$  подчиняется разумному требованию:

iii)  $f(x) = gx$  - непрерывная функция двух переменных  $g$  и  $x$ .

Группа  $G$ , действующая на  $\Omega$  так, что выполняются свойства i), ii) из п. 1 и iii), называется группой движений пространства  $\Omega$ . При этом могут быть движения, сохраняющие какую-нибудь метрику на  $\Omega$ . Пространство  $\Omega$  называется однородным, если  $G$  действует на  $\Omega$  транзитивно в смысле примера 3, т. е. все точки из  $\Omega$  принадлежат одной  $G$ -орбите.

Из общих соображений пп. 1-2 ясно, что имеется взаимно однозначное соответствие между точками однородного пространства  $\Omega$  и смежными классами  $G$  по одной из стационарных подгрупп  $H$ . При этом движению  $g \in G$  пространства  $\Omega$  отвечает отображение  $g'H \mapsto gg'H$  на множестве  $G/H$ .

Рассмотрим с новой точки зрения хорошо известный нам из 1 пример группы  $SO(3)$ . Группу  $SO(3)$  удобно представлять себе действующей на двумерной сфере  $S^2$  единичного радиуса. Очевидно, что любой паре точек  $P, Q \in S^2$  отвечает некоторое движение (вращение), переводящее  $P$  в  $Q$ , т. е.  $S^2$  - однородное пространство с группой движений  $SO(3)$ . Стационарная подгруппа  $St(P)$  любой точки  $P \in S^2$  оставляет неподвижной всю ось, проходящую через  $P$  и центр  $O$  сферы. Поэтому  $St(P) \cong SO(2)$  - группа вращений плоскости, перпендикулярной к оси  $OP$ . Так как элементы группы  $SO(2)$  отождествляются с точками окружности  $S^1$  единичного радиуса, то группу  $SO(3)$  можно представлять себе в виде пирога, слоями которого являются единичные окружности, "пронумерованные" точками двумерной сферы:  $SO(3)/S^1 \approx S^2$ . В этом случае говорят о расслоении (о проекции  $p : SO(3) \rightarrow S^2$ ) с базой  $S^2$  и слоем  $p^{-1}(P) \approx S^1, P \in S^2$ . Точный смысл всех этих понятий разъясняется в курсах геометрии и топологии, поэтому мы ограничимся сказанным.

### 2.1.4 Factor groups and homomorphisms (????)

Этот параграф, в особенности п. 2, представляет известные трудности, и к нему нужно возвращаться несколько раз, чтобы на конкретных примерах усвоить небольшое число абстрактных утверждений.

#### Понятие о факторгруппе.

Отношение эквивалентности  $\sim$  на группе  $G$ , определённое разложением  $G$  в смежные классы по нормальной подгруппе  $H$  (см. 2), обладает одним замечательным свойством. Именно, если  $a, b$  - произвольные элементы группы  $G$  и  $a \sim c, b \sim d$ , то по определению имеем  $a^{-1}c = h_1 \in H, b^{-1}d = h_2 \in H$ , откуда

$$(ab)^{-1}cd = b^{-1}a^{-1}cd = b^{-1}(a^{-1}c)d = b^{-1}h_1b(b^{-1}d) = h'_1h_2 \in H$$

и, стало быть,  $ab \sim cd$ . Здесь использовано свойство нормальности  $H$  в  $G$ :  $b^{-1}h_1b = h'_1 \in H$ . Итак,

$$a \sim c, b \sim d \implies ab \sim cd.$$

Фактически это означает, что операция умножения на группе  $G$  индуцирует операцию умножения на фактормножестве  $G/\sim$ , которое мы условились обозначать  $G/H$ .



Имеет смысл говорить о композиции (об умножении) произвольных подмножеств  $A, B$  группы  $G$ , понимая под  $AB$  множество всех произведений  $ab$  с  $a \in A, b \in B$ . Ассоциативность в  $G$  влечёт соотношение

$$(AB)C = \{(ab)c\} = \{a(bc)\} = A(BC)$$

и подмножество  $H \subset G$  является подгруппой в  $G$  в точности тогда, когда  $H^2 = H, H^{-1} = \{h^{-1} | h \in H\} \subset H$ .

С этой точки зрения смежный класс  $aH$  равен произведению одноэлементного множества  $\{a\}$  на подгруппу  $H$ . Произведением смежных классов  $aH, bH$  является множество  $aH \cdot bH$ , которое, вообще говоря, не обязано быть снова смежным классом по  $H$ . Рассмотренное в 2 разложение  $S_3$  по  $H = \{e, (12)\}$  показывает, например, что

$$H \cdot (13)H = (13)H \cup (23)H.$$

Совсем иная ситуация получается, когда  $H$  - нормальная подгруппа группы  $G$ . Так как  $gH = Hg$  для всех  $g \in G$ , то

$$aH \cdot bH = a(Hb)H = a(bH)H = abH^2 = abH$$

причём рассуждения, приведённые выше, показывают, что смежный класс  $abH$  не зависит от представителей  $a, b$  смежных классов  $aH, bH$ .

Свойства

$$\begin{aligned} aH \cdot bH &= abH, \\ H \cdot aH &= aH \cdot H = aH, \\ a^{-1}H \cdot aH &= aH \cdot a^{-1}H = eH = H \end{aligned}$$

показывают, что справедлива

Теорема 1. Если  $H$  - нормальная подгруппа в  $G$ , то операция умножения  $aH \cdot bH = abH$  наделяет фактормножество  $G/H$  строением группы, называемой факторгруппой  $G$  по  $H$ . Смежный класс  $H$  служит единичным элементом в  $G/H, aa^{-1}H = (aH)^{-1}$  - элементом, обратным к  $aH$ .

В случае конечной группы  $G$  порядок факторгруппы  $G/H$  определяется по формуле

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = (G : H)$$

которая вытекает из всего сказанного и из теоремы Лагранжа (см. 2).

В случае аддитивно записываемых абелевых групп бинарная операция на  $G/H$  вводится соотношением

$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H$$

Соответственно  $G/H$  часто называют группой  $G$  по модулю  $H$ , а в применении к паре  $G = \mathbb{Z}, H = m\mathbb{Z}$  употребительно также выражение "группа  $\mathbb{Z}$  по модулю  $m$ ".

### Теоремы о гомоморфизмах групп.

(??? Кострикин рекомендовал пару раз к этому возвращаться, но не сидеть над этим много!!!)

Согласно теореме 1 с каждой нормальной подгруппой  $K$  группы  $G$  ассоциируется некая новая группа  $G/K$ , которая была названа факторгруппой  $G$  по  $K$ . Так, наряду с эпиморфизмом  $\Phi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ , описанным в 1, естественно ввести факторгруппу

$SU(2)/\{\pm E\}$  и сравнить её с образом  $\text{Im } \Phi = SO(3)$ . Как нетрудно догадаться,  $SU(2)/\{\pm E\} \cong SO(3)$ , но чтобы каждый раз не проводить рассуждения заново, полезно установить ряд общих фактов о подгруппах, гомоморфизмах и факторгруппах. Впредь запись  $K \triangleleft G$  означает, что  $K$  - нормальная подгруппа в  $G$ .

Теорема 2 (основная теорема о гомоморфизмах). Пусть  $\varphi: G \rightarrow H$  - гомоморфизм групп с ядром  $K = \text{Ker } \varphi$ . Тогда  $K$  - нормальная подгруппа в  $G$  и  $G/K \cong \text{Im } \varphi$ . Обратно, если  $K \triangleleft G$ , то существует группа  $H$  (а именно  $G/K$ ) и эпиморфизм  $\pi: G \rightarrow H$ , ядро которого совпадает с  $K$ .

( $\pi$  часто называют естественным отображением или естественным гомоморфизмом.)

Далее мы уже знаем, что  $\text{Ker } \varphi = K \triangleleft G$ . Определим отображение  $\bar{\varphi}: G/K \rightarrow H$ , полагая

$$\bar{\varphi}(gK) = \varphi(g).$$

Если  $g_1K = g_2K$ , то  $g_1^{-1}g_2 \in K$ ,  $\varphi(g_1^{-1}g_2) = e$ , и, стало быть,  $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ , а это значит, что отображение  $\bar{\varphi}$  определено корректно (т.е. не зависит от выбора представителя смежного класса).

Так как  $\bar{\varphi}(g_1K \cdot g_2K) = \bar{\varphi}(g_1g_2K) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \bar{\varphi}(g_1K)\bar{\varphi}(g_2K)$ , то  $\bar{\varphi}$  - гомоморфизм. На самом деле  $\bar{\varphi}$  - мономорфизм, потому что из  $\bar{\varphi}(g_1K) = \bar{\varphi}(g_2K)$  следует  $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ , откуда  $\varphi(g_1^{-1}g_2) = e$ ,  $g_1^{-1}g_2 \in K$  и  $g_1K = g_2K$ . Ясно также, что  $\text{Im } \bar{\varphi} = \text{Im } \varphi$ .

Обратно, пусть  $K \triangleleft G$ . Возьмём в качестве  $\pi$  функцию, которая сопоставляет любому элементу из  $G$  его смежный класс по  $K$ , т.е. положим  $\pi(g) = gK$ . Ясно, что все требуемые свойства выполняются.

Следует заметить, что заданием ядра гомоморфизм определяется неоднозначно. Например, автоморфизмы  $g \mapsto g$  и  $g \mapsto g^{-1}$  абелевой группы простого порядка  $p > 2$  различны, но ядра их совпадают ( $= e$ ).

Имея гомоморфизм  $\rho: G \rightarrow G_1$  и подгруппу  $H \subset G$ , естественно посмотреть на ограничение  $\rho|_H$  и на образ подгруппы  $H$  относительно этого гомоморфизма. Следующая теорема значительно упрощает анализ всех возможных ситуаций.

Теорема 3 (первая теорема об изоморфизме). Пусть  $G$  - группа,  $H$  и  $K$  - подгруппы, причём  $K$  нормальна в  $G$ . Тогда  $HK = KH$  - подгруппа в  $G$ , содержащая  $K$ . Далее, пересечение  $H \cap K$  является нормальной подгруппой в  $H$ , а отображение

$$\varphi: hK \mapsto h(H \cap K)$$

изоморфизмом групп

$$HK/K \cong H/(H \cap K)$$

Доказательство. Условие  $K \triangleleft G$ , переписанное в виде  $gK = Kg, g \in G$ , означает, в частности, что  $hK = Kh$  для всех  $h \in H$ . Множество  $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$  состоит из некоторого числа смежных классов  $hK: HK = \bigcup_{h \in H} hK$ . Заменив здесь  $hK$  на  $Kh$ , мы придём к равенству

$$HK = \bigcup_{h \in H} hK = \bigcup_{h \in H} Kh = KH$$

Очевидно, что единичный элемент  $e$ , содержащийся в  $H$  и  $K$ , содержится также в  $HK$ . Далее,  $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} = h^{-1}(hkh^{-1})^{-1}$ , поэтому обратные ко всем элементам из  $HK$  лежат в  $HK$ . Наконец,  $HK \cdot HK = H \cdot KH \cdot K = H \cdot HK \cdot K = HK$ , т.е. множество  $HK$  замкнуто относительно умножения. Мы видим, что подмножество  $HK \subset G$  является подгруппой в  $G$ .

Так как  $K \subset HK$  и  $K \triangleleft HK$ , то имеет смысл говорить о факторгруппе  $HK/K$ . Пусть  $\pi : G \longrightarrow G/K$  - естественный эпиморфизм и  $\pi_0 := \pi|_H$  - ограничение  $\pi$  на  $H$ . Его образ  $\text{Im } \pi_0$  состоит из смежных классов  $hK, h \in H$ , т.е. из всех смежных классов  $G$  по  $K$ , имеющих представителей в  $H$ . Другими словами,  $\text{Im } \pi_0 = HK/K$ . Итак, мы имеем эпиморфизм

$$\pi_0 : H \longrightarrow HK/K$$

Его ядро  $\text{Ker } \pi_0$ , состоит из  $h \in H$ , для которых  $\pi_0(h) = hK = K$  - единица в  $HK/K$ . Но  $hK = K \iff h \in H \cap K$ , откуда  $\text{Ker } \pi_0 = H \cap K$ . Как всякое ядро гомоморфизма,  $H \cap K$  - нормальная подгруппа в  $H$  (что без труда проверяется непосредственно).

По основной теореме о гомоморфизмах (теорема 2) соответствие  $\bar{\pi}_0 : h(H \cap K) \longmapsto \pi_0(h) = hK$  устанавливает изоморфизм  $H/(H \cap K) \cong HK/K$ . Так как  $\bar{\pi}_0$  - биективное отображение, то  $\varphi := \bar{\pi}_0^{-1} : hK \longmapsto h(H \cap K)$  также является изоморфизмом групп  $HK/K$  и  $H/(H \cap K)$ .

Коль скоро имеется первая теорема об изоморфизме, то должна существовать и вторая. Так оно и есть, но мы сформулируем лишь облегчённый ее вариант, носящий специальное название.

Теорема 4 (теорема о соответствии). Пусть  $G$  - группа,  $H$  и  $K$  - её подгруппы, причём  $K \triangleleft GuK \subset H$ . Тогда  $\bar{H} = H/K$  - подгруппа в  $\bar{G} = G/K$  и  $\pi^* : H \longmapsto \bar{H}$  является биективным отображением множества  $\Omega(G, K)$  подгрупп в  $G$ , содержащих  $K$ , на множество  $\Omega(\bar{G})$  всех подгрупп группы  $\bar{G}$ . Если  $H \in \Omega(G, K)$ , то  $H \triangleleft G \iff \bar{H} \triangleleft \bar{G}$ , причём

$$G/H \cong \bar{G}/\bar{H} = (G/K)/(H/K)$$

Доказательство. Пусть  $H \in \Omega(G, K)$ . Из определения  $G/K$  непосредственно вытекает, что  $H/K$  - подгруппа в  $G/K$ . Чтобы убедиться в инъективности отображения  $\pi^* : H \longmapsto \bar{H}$ , рассмотрим две подгруппы  $H_1, H_2 \in \Omega(G, K)$ , для которых  $H_1/K = H_2/K$ . Тогда  $h_1 \in H_1 \implies h_1K = h_2K, h_2 \in H_2 \implies h_1 = h_2k$ , а так как  $K \subset H_2$ , то  $h_1 \in H_2$ , откуда  $H_1 \subset H_2$ . Аналогично проверяется включение  $H_2 \subset H_1$ . Стало быть,  $H_1 = H_2$ .

Установим теперь сюръективность отображения  $\pi^*$ . Пусть  $\bar{H} \in \Omega(\bar{G})$  и  $H$  - множество тех элементов в  $G$ , из которых состоят все смежные классы по  $K$  - элементы группы  $\bar{H} \subset \bar{G}$ . Тогда, в частности,  $K \subset H$  и  $a, b \in H \implies aK, bK \in \bar{H} \implies abK = aKbK \in \bar{H} \implies ab \in H$  и  $a \in H \implies aK \in \bar{H} \implies a^{-1}K = (aK)^{-1} \in \bar{H} \implies a^{-1} \in H$ . Стало быть,  $H$  - подгруппа в  $G$ , причём  $\bar{H} = H/K$  (обычно  $H$  называют прообразом в  $G$  подгруппы  $\bar{H} \subset \bar{G}$ ).

Довольно очевидна импликация  $H \in \Omega(G, K), H \triangleleft G \implies \bar{H} \triangleleft \bar{G}$ , формально вытекающая из равенств  $gKhK \cdot (gK)^{-1} = ghg^{-1}K = h'K \in \bar{H}$  для всех  $g \in G, h \in H$ . Но по тем же причинам  $\bar{H} \triangleleft \bar{G} \implies ghg^{-1}K = gK \cdot hK \cdot (gK)^{-1} = h'K \implies ghg^{-1} \in H \implies H \triangleleft G$ .

Наконец, в ситуации  $H \in \Omega(G, K), H \triangleleft G$ , по доказанному можно рассмотреть два естественных эпиморфизма

$$\pi : G \longrightarrow G/K, \quad \bar{\pi} : \bar{G} \longrightarrow \bar{G}/\bar{H}$$

( $\bar{g} \mapsto \bar{\pi}(\bar{g})$ , где  $\bar{g} = gK \in \bar{G}$ ) и их композицию - эпиморфизм

$$\sigma = \bar{\pi} \circ \pi : G \longrightarrow \bar{G}/\bar{H}$$

определённый правилом  $\sigma(g) = \bar{\pi}(\bar{g}) = \bar{g}\bar{H}$ . Имеем

$$\text{Ker } \sigma = \{g \in G | \sigma(g) = \bar{H}\} = \{g \in G | \bar{g} \in \bar{H}\} =$$

$$= \{g \in G | gK = hK \text{ для некоторого } h \in H\} = H$$

Следовательно, по основной теореме о гомоморфизмах отображение  $gH \mapsto \bar{g}\bar{H}$  является изоморфизмом между  $G/H$  и  $\bar{G}/\bar{H}$ .

П р и м е р 1. Пусть  $n = dm$  - натуральное число с делителем  $d > 1$ . Очевидно, что  $n\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$ , и отображение  $x \mapsto dx + n\mathbb{Z}$  является эпиморфизмом аддитивных групп:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{di + n\mathbb{Z} | i = 0, 1, \dots, m-1\}$$

с ядром  $m\mathbb{Z}$ . По теореме 2 имеем изоморфизм

$$Z_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

(что довольно понятно и так). При помощи теоремы 4 находим

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

т.е.  $Z_d \cong Z_n/Z_m$ .

Вспоминая о теореме Лагранжа, мы приходим к утверждению, что все подгруппы и факторгруппы циклической группы сами являются циклическими группами.

Этот результат можно получить, конечно, и без теорем о гомоморфизмах.

П р и м е р 2. Выделим в симметрической группе  $S_4$  подгруппы

$$\begin{aligned} V_4 &= \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \triangleleft S_4, \\ S_3 &= \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\} \end{aligned}$$

(в данном случае  $S_3$  - стационарная подгруппа точки  $i = 4$ ). Так как, очевидно,  $S_3 \cap V_4 = e$ , то для подгруппы  $H = S_3 V_4$  по теореме 3 имеем

$$H/V_4 \cong S_3/(S_3 \cap V_4) \cong S_3$$

В частности,  $|H| = |V_4| \cdot |S_3| = 24$ , т.е.  $H = S_4$ . Итак,  $S_4$  обладает подгруппой, изоморфной  $S_3$ , и аналогичной факторгруппой. Применяя теорему 4, мы получаем описание множества  $\Omega(S_4, V_4)$  подгрупп в  $S_4$ , содержащих  $V_4$ :

$$\Omega(S_4, V_4) = \{V_4, \langle(12)\rangle V_4, \langle(13)\rangle V_4, \langle(23)\rangle V_4, A_4 = \langle(123)\rangle V_4, S_4\}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что для любого делителя  $d$  числа 24 в  $S_4$  имеется хотя бы одна подгруппа порядка  $d$ . В частности, имеется ровно четыре подгруппы  $\langle(123)\rangle, \langle(124)\rangle, \langle(134)\rangle, \langle(234)\rangle$  порядка 3 и три подгруппы  $\langle(12)\rangle V_4, \langle(13)\rangle V_4, \langle(23)\rangle V_4$  порядка 8 (это так называемые 3-силовские и 2-силовские подгруппы). Собственных (т.е. не равных  $e$  и  $S_4$ ) нормальных подгрупп всего две:  $V_4$  и  $A_4$ .

Действительно, если  $K \triangleleft S_4$  и  $K \cap V_4 \neq e$ , то  $K \supset V_4$ , потому что неединичные элементы в  $V_4$  все сопряжены относительно  $S_4$ . Обращаясь к множеству  $\Omega(S_4, V_4)$ , мы видим, что  $K = V_4$  или  $K = A_4$ . Если же  $K \cap V_4 = e$ ,  $K \neq e$ , то

$$K \triangleleft S_4, V_4 \triangleleft S_4 \implies KV_4 \triangleleft S_4$$

и остаётся принять, что  $KV_4 = S_4$ ,  $K \cong S_3$ . Но  $S_3$  содержит транспозицию, а все транспозиции сопряжены в  $S_4$  и порождают  $S_4$ . С другой стороны, они должны содержаться в  $K$ . Полученное противоречие показывает, что случай  $K \cap V_4 = e$  невозможен.

**Коммутант. Выражение**

$$(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$$

называемое коммутатором элементов  $x, y$  группы  $G$ , служит корректирующим членом, необходимым для того, чтобы поменять местами  $x$  и  $y$ :

$$xy = (x, y)yx$$

Если  $x$  и  $y$  перестановочны, то  $(x, y) = e$ . Интуитивно ясно, что чем больше в группе  $G$  коммутаторов, отличных от  $e$ , тем значительнее отклонение закона умножения в  $G$  от коммутативного. Пусть  $M$  - множество всех коммутаторов в  $G$ . Коммутантом (или производной подгруппой) группы  $G$  называют подгруппу  $G' (= G^{(1)} = \langle (x, y) \mid x, y \in G \rangle)$ , порождённую множеством  $M$  (см. [BA I, гл. 4, 2, упр. 1, 2]):

$$G' = \langle (x, y) \mid x, y \in G \rangle := \text{gr}(x, y)$$

Хотя  $(x, y)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = (y, x)$  - коммутатор, произведение двух коммутаторов быть им уже не обязано, так что  $G'$  состоит из всевозможных произведений вида

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) \dots (x_k, y_k), \quad x_i, y_i \in G$$

Конечно, в каждом конкретном случае желательно иметь более точное описание коммутанта  $G'$ . При мер.  $G = S_n$ . Коммутатор  $(\alpha, \beta) = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$  любых двух перестановок  $\alpha, \beta \in S_n$  является, очевидно, чётной перестановкой. Поэтому  $S'_n \subset A_n$ . Далее,

$$(ij)(ik)(ij)^{-1}(ik)^{-1} = (ij)(ik)(ij)(ik) = (ijk),$$

а так как тройными циклами  $(ijk)$  порождается вся знакопеременная группа  $A_n$  (см. [BA I, гл. 4, 2, упр. 11]), то мы приходим к выводу, что  $S'_n = A_n$ .

Отметим, что  $S'_n \triangleleft S_n$ , и факторгруппа  $S_n/S'_n$  абелева.

Возвращаясь к общей ситуации, мы рассмотрим произвольный гомоморфизм групп  $\varphi : G \rightarrow \bar{G}$ . Так как

$$\varphi((x, y)) = \varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1}$$

то  $\varphi(G') \subset (\bar{G})'$ , причём  $\varphi(G') = (\bar{G})'$ , если  $\varphi$  - эпиморфизм. Пусть теперь  $K$  - нормальная подгруппа в  $G$  и  $\varphi = I_a : x \mapsto axa^{-1}$  внутренний автоморфизм группы  $G$ , индуцирующий какой-то эндоморфизм на  $K$ . Согласно сказанному выше  $I_a(K') \subset K'$  при любом  $a \in G$ , а это означает, что

$$K \triangleleft G \implies K' \triangleleft G.$$

В частности,  $G' \triangleleft G$ .

Докажем теперь общее утверждение, вскрывающее внутренний смысл понятия коммутанта.

**Теорема 5.** Любая подгруппа  $K \subset G$ , содержащая коммутант  $G'$  группы  $G$ , нормальна в  $G$ . Факторгруппа  $G/G'$  абелева и  $G'$  содержится в каждой нормальной подгруппе  $K$  такой, что  $G/K$  абелева (в частности, максимальный порлдок абелевой факторгруппы  $G/K$  равен индексу  $(G : G')$ ).

**Доказательство.** Если  $x \in K, g \in G$  и  $G' \subset K$ , то  $gxg^{-1} = (gxg^{-1}x^{-1})x = (g, x)x \in G'K = K$ , так что  $K \triangleleft G$ . Далее, из условий  $G' \subset K, K \triangleleft G$ , выполняющихся, в частности, при  $K = G'$  (см. (1)), следует, что

$$(aK, bK) = aK \cdot bK \cdot a^{-1}K \cdot b^{-1}K = aba^{-1}b^{-1}K = (a, b)K = K$$

т. е. коммутатор любых двух элементов факторгруппы  $G/K$  равен единичному элементу ( $= K$ ). Стало быть,  $G/K$  - абелева группа. Обратно, если  $K \triangleleft G$  и факторгруппа абелева, то

$$(a, b)K = (aK, bK) = K$$

для всех  $a, b \in G$ . Значит,  $(a, b) \in K$  и  $G' \subseteq K$ , поскольку  $G'$  порождается коммутаторами.

**З а м е ч а н и е.** Мы знаем теперь две важные нормальные подгруппы любой группы  $G$ : центр  $Z(G)$  и коммутант  $G'$ . Связь между ними, вообще говоря, слабая, но общая закономерность такова: чем "ближе"  $G$  к абелевой группе, тем больше  $Z(G)$  и тем меньше  $G'$ . Более интересен следующий факт. Факторгруппа  $G/Z(G)$  неабелевой группы  $G$  по центру  $Z(G)$  не может быть циклической.

Действительно, если  $G/Z(G)$  - циклическая группа, то  $G = \bigcup_i a^i Z(G)$ , и любой элемент из  $G$  имеет вид  $g = a^i z, z \in Z(G)$ . В таком случае  $(g, h) = (a^i z, a^j z') = a^{i+j-i-j} (z, z') = e$  для любых двух элементов  $g, h \in G$ , а это значит, что  $G' = e$  и  $G$  - абелева группа, вопреки предположению.

## Произведения групп.

Сейчас мы рассмотрим конструкцию, позволяющую по заданным группам строить новые группы. В различных частных случаях эта конструкция нам уже встречалась. Назовём (внешним) прямым произведением произвольных групп  $A$  и  $B$  множество  $A \times B$  всех упорядоченных пар  $(a, b)$  (не путать с коммутаторами!), где  $a \in A, b \in B$ , с бинарной операцией

$$(a_1, b_1) (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

Строго говоря, следовало бы писать  $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \circ a_2, b_1 \diamond b_2)$ , где  $\circ, \diamond, *$  - бинарные операции на  $A, B$  и  $A \times B$  соответственно, но для упрощения записи все операции условимся обозначать точкой (впрочем, опуская и её). При аддитивной записи групп, например, абелевых, естественно говорить о прямой сумме  $A \oplus B$ .

В  $A \times B$  содержатся подгруппы  $A \times e, e \times B$ , изоморфные соответственно  $A$  и  $B$  (ещё одна условность: единичные элементы в  $A$  и  $B$  обозначаются одним символом  $e$ ). Отображение  $\varphi : A \times B \rightarrow B \times A$ , заданное равенством  $\varphi((a, b)) = (b, a)$ , очевидно, устанавливает изоморфизм групп  $A \times B$  и  $B \times A$ . Если у нас есть три группы  $A, B, C$ , то можно говорить о прямых произведениях  $(A \times B) \times C$  и  $A \times (B \times C)$ . Положив  $\psi(((a, b), c)) = (a, (b, c))$ , мы легко убеждаемся в том, что

$$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$$

Свойства коммутативности и ассоциативности прямого произведения дают нам возможность говорить о прямом произведении любого конечного числа групп  $G_1, G_2, \dots, G_n$  и писать

$$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \prod_{i=1}^n G_i$$

не указывая явно посредством скобок, в каком порядке берутся попарные прямые произведения (мы превращаем тем самым множество всех групп в коммутативную полугруппу, элементами которой являются группы).

Теорема 6. Пусть  $G$  - группа с нормальными подгруппами  $A$  и  $B$ . Если  $A \cap B = e$  и  $AB = G$ , то  $G \cong A \times B$ .

Доказательство. Из равенства  $AB = G$  следует, что любой элемент  $g \in G$  записывается в виде  $g = ab$ , где  $a \in A, b \in B$ . Если ещё  $g = a_1b_1, a_1 \in A, b_1 \in B$ , то  $ab = a_1b_1 \implies a_1^{-1}a = b_1b^{-1} \in A \cap B = e$ . Следовательно,  $a_1 = a, b_1 = b$ , и мы приходим к выводу, что запись  $g = ab$  однозначна. Далее,  $A \triangleleft G \implies k = a(ba^{-1}b^{-1}) = aa' \in A; B \triangleleft G \implies k = (aba^{-1})b^{-1} = b'b^{-1} \in B$ , т. е. коммутатор  $k \in A \cap B = e$  - единичный элемент, и, стало быть,  $ab = ba$ .

Определим теперь отображение  $\varphi : G \longrightarrow A \times B$ , полагая  $\varphi(g) = (a, b)$  для любого  $g = ab$ . Согласно вышесказанному  $\varphi(gg') = \varphi(aba'b') = \varphi(aa'bb') = (aa', bb') = (a, b)(a', b') = \varphi(ab)\varphi(a'b') = \varphi(g)\varphi(g')$ . Далее,  $\varphi(ab) = (e, e) \iff a = e, b = e$ , т. е.  $\text{Ker } \varphi = e$ . Эпиморфность  $\varphi$  очевидна. Таким образом,  $\varphi$  удовлетворяет всем свойствам изоморфного отображения групп.

Группу  $G$ , удовлетворяющую условиям теоремы 6, принято называть (внутренним) прямым произведением своих подгрупп  $A, B$ . Отличие от внешнего прямого произведения состоит в том, что  $G$  содержит в качестве прямых множителей сами группы  $A, B$ , а не просто их изоморфные копии  $A \times e, e \times B$ . Разумеется, внешнее прямое произведение  $G = A \times B$  является также внутренним произведением подгрупп  $A \times e, e \times B$ , и при некотором навыке можно не делать различия между ними, употребляя сокращённое словосочетание "прямое произведение".

Некоторую информацию о гомоморфизмах прямых произведений даёт

Теорема 7. Пусть  $G = A \times B$ , и пусть  $A_1 \triangleleft A, B_1 \triangleleft B$ . Тогда  $A_1 \times B_1 \triangleleft G$  и  $G / (A_1 \times B_1) \cong (A/A_1) \times (B/B_1)$ . В частности,  $G/A \cong B$ .

Доказательство. Пусть  $\alpha : A \longrightarrow A/A_1$  и  $\beta : B \longrightarrow B/B_1$  естественные гомоморфизмы. Определим отображение  $\varphi : G \longrightarrow (A/A_1) \times (B/B_1)$  посредством соотношения  $\varphi(ab) = (\alpha(a), \beta(b))$ . Непосредственно проверяется, что  $\varphi$  - гомоморфизм с ядром  $\text{Ker } \varphi = A_1 \times B_1$  и образом  $\text{Im } \varphi = (A/A_1) \times (B/B_1)$ .

Как и в теории векторных пространств, легко доказать, что если  $G$  - группа с нормальными подгруппами  $G_1, \dots, G_n$ , то  $G \cong \prod_i G_i$  в том и только том случае, когда

$$G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle \text{ и } G_j \cap \langle G_1, \dots, \widehat{G_j}, \dots, G_n \rangle = e$$

для всех  $j$  ("шапка" над  $G_j$  означает, что компонента  $G_j$  опущена). То же самое выражается следующим свойством:  $G$  - прямое произведение своих нормальных подгрупп  $G_1, \dots, G_n$ , коль скоро каждый элемент  $g \in G$  допускает, и притом однозначную, запись в виде  $g = g_1 \dots g_n, g_i \in G_i$ . Прямое произведение  $n$  экземпляров группы  $H$  называют ещё  $n$ -й прямой степенью и обозначают  $H^n = H \times \dots \times H$ . В  $H^n$  выделяется специальная подгруппа - диагональ  $\Delta = \{(h, h, \dots, h) | h \in H\}$ , изоморфная  $H$ .

Если в теореме 6 опустить условие  $B \triangleleft G$ , то мы придём к понятию полупрямого произведения:  $G = AB, A \cap B = e, A \triangleleft G$  (иногда пишут  $G = A \lambda B$ ). В это определение следовало бы внести ещё описание действия подгруппы  $B$  автоморфизмами на нормальной подгруппе  $A$ , что обычно и делается в каждом конкретном случае.

Замечание. В виде прямых и полупрямых произведений представляются многие известные нам группы. Например,  $S_n$  - полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A_n$  и циклической группы  $\langle (12) \rangle$  порядка 2 :  $S_n \cong A_n \lambda Z_2$ . Используя обозначения из примера 2 п. 2, можно записать

$$A_4 = V_4 \lambda \langle (123) \rangle \cong (Z_2 \times Z_2) \lambda Z_3, \\ S_4 = V_4 \lambda S_3 \cong (Z_2 \times Z_2) \lambda (Z_3 \lambda Z_2).$$

Ещё один пример: группа  $A(1, \mathbb{R})$  аффинных преобразований  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  (см. [ВА I, гл. 4] или [ВА II]) является полупрямым произведением нормальной подгруппы сдвигов и

подгруппы  $GL(1, \mathbb{R})$  преобразований, оставляющих точку  $x = 0$  на месте.

### Образующие и определяющие соотношения.

Вопрос о системах образующих группы  $G$  уже обсуждался в [ВА I, гл. 4]. Мы возвращаемся к нему, чтобы взглянуть на некоторые известные нам группы с новой точки зрения. Из результатов [ВА I, гл. 4] вытекает, что для циклических групп нет необходимости составлять громоздкие таблицы Кэли. Условная запись

$$C_n = \langle c | c^n = e \rangle$$

даёт всю необходимую информацию об абстрактной циклической группе  $C_n$  порядка  $n$ ; подразумевается, что  $C_n = \{e, c, c^2, \dots, c^{n-1}\}$ , причём  $c^s c^t = c^{s+t}$  при  $s+t < n$  и  $c^s c^t = c^{s+t-n}$  при  $s+t \geq n$ . другой стороны, любая циклическая группа является с точностью до изоморфизма гомоморфным образом одной-единственной группы  $(\mathbb{Z}, +)$ .

Пусть теперь  $F_n$  - произвольная группа с нейтральным элементом  $e$ , порождённая  $n$  образующими  $f_1, \dots, f_n$ , так что каждый её элемент  $f$  записывается (возможно, многими способами) в виде

$$f = f_{i_1}^{s_1} f_{i_2}^{s_2} \dots f_{i_k}^{s_k}, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, n\}, s_j \in \mathbb{Z}$$

где  $i_j \neq i_{j+1}, j = 1, 2, \dots, k-1$ . Это всегда достигается элементарными заменами  $f_i^s f_i^t = f_i^{s+t}, f_i^0 = e$  и  $f_j e = e f_j = f_j$ .

При выполнении условия  $f = e \iff s_1 = \dots = s_k = 0$  для каждого  $f$ , записанного в виде (4), говорят, что  $F_n$  - свободная группа ранга  $n$ , порождённая  $n$  свободными образующими. Элементы группы  $F_n$  обычно называются словами в алфавите  $\{f_1, f_1^{-1}, \dots, f_n, f_n^{-1}\}$ . Несократимая запись (4) слова  $f$  и его длина  $l(f) = |s_1| + |s_2| + \dots + |s_k|$  однозначно определены; в противном случае пустое слово  $e := \emptyset = f f^{-1}$  (единичный элемент в  $F^n$ ) имело бы длину  $> 0$ . При данном  $n$  две свободные группы  $F_n$  и  $G_n$ , порождённые свободными образующими  $f_1, \dots, f_n$  и  $g_1, \dots, g_n$  соответственно, изоморфны; достаточно положить  $\Phi(f_i) = g_i, 1 \leq i \leq n$ , а для произвольного слова  $f$  вида (4) считать

$$\Phi(f) = g_{i_1}^{s_1} g_{i_2}^{s_2} \dots g_{i_k}^{s_k}$$

(единицы в  $F_n$  и  $G_n$  обозначаются одинаковыми символами). Если, однако,  $G_n$  не является свободной группой, то  $\Phi$  будет всего лишь эпиморфизмом с ядром  $\text{Ker } \Phi$ , состоящим из тех слов, которые при подстановке  $f_i \mapsto g_i$  переходят в единичный элемент группы  $G_n$ . Это универсальное свойство (возможность продолжения  $f_i \mapsto g_i, 1 \leq i \leq n$ , до эпиморфизма  $\Phi: F_n \rightarrow G_n$  для любой группы  $G_n$  с  $n$  образующими) можно принять за определение свободной группы  $F_n$ , но мы не будем на этом задерживаться.

Чтобы свободные группы не казались "мистическими объектами", приведём некоторые их конкретные реализации.

$n = 1$ .  $F_1 \cong (\mathbb{Z}, +)$  - свободная абелева группа ранга 1, или, что то же самое, бесконечная циклическая группа.

$n = 2$ . Пусть  $\mathbb{Z}[t]$  - кольцо многочленов от  $t$  с целыми рациональными коэффициентами. В специальной линейной группе  $SL(2, \mathbb{Z}[t])$  рассмотрим подгруппу  $F$ , порождённую матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Докажем, что  $F$  - свободная группа. Лёгкая индукция по  $k$  показывает, что элемент



$$W_k = A^{\alpha_1} B^{\beta_1} \dots A^{\alpha_k} B^{\beta_k}, \quad \alpha_i, \beta_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

имеет вид

$$W_k = \begin{vmatrix} 1 + \dots + \sigma_k t^{2k} & t(\dots + \sigma_{k-1} \alpha_k t^{2(k-1)}) \\ t(\dots + \alpha_1^{-1} \sigma_k t^{2(k-1)}) & 1 + \dots + \alpha_1^{-1} \sigma_{k-1} \alpha_k t^{2(k-1)} \end{vmatrix},$$

где  $\sigma_k = \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_k \beta_k$ , а точками обозначены одночлены меньшей степени относительно  $t$ . Ясно, что  $W_k \neq E$ . Произвольный элемент группы  $F$  записывается либо в виде  $B^\beta A^\alpha \neq E$ , либо в виде  $W = B^\beta W_k A^\alpha$ . Если  $W = E$ , то  $W_k = B^{-\beta} A^{-\alpha}$ , что, однако, невозможно (сравнить степени при  $k > 1$ , а при  $k = 1$  сделать непосредственную проверку).

Небольшое дополнительное рассуждение показывает, что при подстановке  $t = m$ , где  $m$  - любое целое число  $\geq 2$ , группа  $F$  продолжает оставаться свободной.

Введём теперь следующее

Определение. Пусть  $F_n$  - свободная группа с  $n$  свободными образующими  $f_1, \dots, f_n$ ,  $S = \{w_i, i \in I\}$  - некоторое подмножество элементов  $w_i(f_1, \dots, f_n) \in F_n$  и  $K = \langle S^{F_n} \rangle$  - наименьшая нормальная подгруппа в  $F_n$ , содержащая  $S$  (пересечение всех нормальных подгрупп, содержащих  $S$ ). Говорят, что группа  $G$  задана  $n$  образующими  $a_1, \dots, a_n$  и соотношениями  $w_i(a_1, \dots, a_n) = e, i \in I$ , если существует эпиморфизм  $\pi: F_n \rightarrow G$  с ядром  $K$  такой, что  $\pi(f_k) = a_k, 1 \leq k \leq n$ . При этом пишут

$$G = \langle a_1, \dots, a_n | w_i(a_1, \dots, a_n) = e, i \in I \rangle$$

и называют  $G$  конечно определённой группой, коль скоро  $\text{Card } I < \infty$ .

Сама группа  $F_n$  "свободна от соотношений", чем и объясняется её название. Из определения следует, что любая группа  $H$  с  $n$  образующими  $b_1, \dots, b_n$ , которые удовлетворяют тем же соотношениям  $w_i(b_1, \dots, b_n) = e, i \in I$ , и, возможно, некоторым другим, является гомоморфным образом группы  $G$ . В частности,  $|H| \leq |G|$ . Вообще говоря, одна и та же группа допускает много разных заданий образующими и соотношениями, хотя для конкретной группы  $G$  иногда не так легко указать хотя бы одно задание. Самое существенное заключается в том, что не существует общего алгоритма, который для любой конечно определённой группы давал бы ответ на вопрос о конечности группы, о равенстве двух её слов и т.д. В этой области развит обширный аппарат комбинаторной теории групп. Рассмотрим пока пару содержательных примеров, где все упомянутые вопросы решаются до конца.

### Пример 1 (группа диэдра). (???????)

Группа  $G = \langle a, b | a^3 = b^2 = abab = e \rangle$  с двумя образующими и тремя соотношениями имеет порядок  $|G| \leq 6$ , поскольку  $ba = a^{-1}b^{-1} = (a^3)^{-1}a^2b \cdot (b^2)^{-1} = a^2b$  и  $G$ , во всяком случае, исчерпывается элементами  $e, a, a^2, b, ab, a^2b$ . Так как для перестановок  $(123), (12)$ , порождающих  $S_3$ , выполняются соотношения  $(123)^3 = (12)^2 = (123)(12)(123)(12) = e$ , то отображение  $\varphi: G \rightarrow S_3$ , определённое соответствием  $a \mapsto (123), b \mapsto (12)$ , будет изоморфизмом  $G \cong S_3$ . Стало быть, симметрическая группа  $S_3$  задаётся двумя образующими и тремя соотношениями. Напомним, что  $S_3$  отождествляется также с группой всех преобразований симметрии правильного треугольника.

Полная группа преобразований симметрии правильного  $n$ -угольника  $P_n$  называется группой диэдра (диэдральной группой) и обозначается символом  $D_n$ . Вращение

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

многоугольника в его плоскости на угол  $\theta = 2\pi/n$  вокруг центра  $O$ , расположенного в начале прямоугольной системы координат, порождает циклическую группу  $\langle \mathcal{A} \rangle$  порядка  $n$ . В  $D_n$  содержится

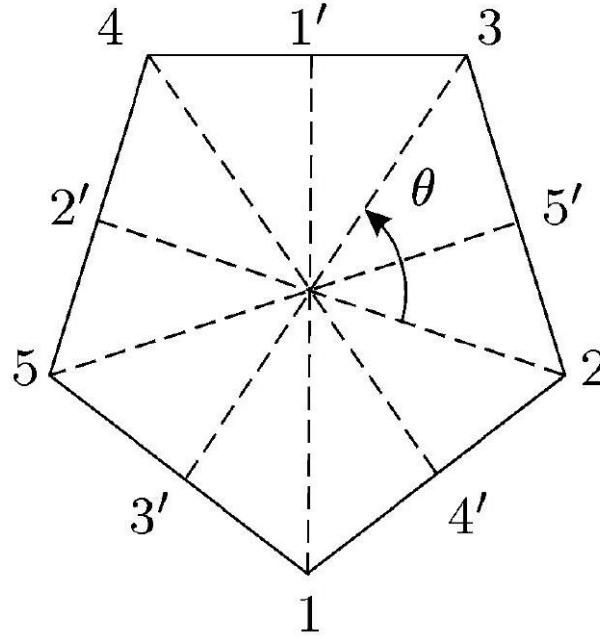


Рис. 2 ещё отражение  $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  многоугольника  $P_n$  относительно оси, проходящей через центр и одну из вершин (рис. 2).

По определению  $\mathcal{B}^2 = e$ . Различные преобразования симметрии

$$e, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^{n-1}, \quad \mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\mathcal{B}$$

в количестве  $2n$  штук исчерпывают всю группу  $D_n$ . В самом деле, всякое преобразование симметрии определяется своим действием на вершины  $1, 2, \dots, n$  многоугольника  $P_n$ . Если какое-то преобразование переводит  $1$  в  $k$ , то оно должно либо сохранять тот же циклический порядок вершин, как это делает  $\mathcal{A}^k$ , либо менять его на обратный, как это делает  $\mathcal{A}^{k-1}\mathcal{B}$ .

Поэтому никаких элементов, кроме (5), в  $D_n$  нет. Заметим, что преобразование  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  совпадает с  $\mathcal{A}^{n-1}\mathcal{B}$ , поскольку оба преобразования обращают порядок вершин и переводят  $1$  в  $n$ . Таким образом, имеют место соотношения

$$\mathcal{A}^n = e, \quad \mathcal{B}^2 = e, \quad \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B} = e.$$

Это означает, что  $D_n$  является гомоморфным образом группы

$$G = \langle a, b | a^n = b^2 = abab = e \rangle.$$

Но, как и в случае  $n = 3$ , получаем  $ba = a^{n-1}b$ , так что любое слово в алфавите  $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$  сводится либо к  $a^i$ , либо к  $a^ib$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Стало быть,  $|G| \leq 2n$ , а ввиду вышесказанного должен иметь место изоморфизм  $G \cong D_n$ . Тем самым получено задание группы диэдра образующими и определяющими соотношениями. отождествим  $G$  с  $D_n$ :

$$D_n = \langle a, b | a^n = e, b^2 = e, (ab)^2 = e \rangle.$$

Так как  $\langle a \rangle \triangleleft D_n$  и  $D_n/\langle a \rangle$  - циклическая группа, то на основании теоремы 4 для коммутанта  $D'_n$  группы  $D_n$  имеем включение  $D'_n \subset \langle a \rangle$ . Но  $a^2 = aba^{-1}b^{-1} = (a, b) \in D'_n$

и при  $n$  нечётном  $D'_n = \langle a \rangle$ , а при  $n$  чётном  $D_n / \langle a^2 \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$  - прямое произведение двух циклических групп порядка 2, откуда  $D'_n = \langle a^2 \rangle$ . В зависимости от чётности  $n$  меняются также центр  $Z(D_n)$  группы  $D_n$  и число  $r$  её классов сопряжённости. Приведём готовые (и легко проверяемые) таблицы:

$$n = 2m, \quad D'_n = \langle a^2 \rangle, (D_n : D'_n) = 4, Z(D_n) = \langle a^m \rangle, r = m + 3,$$

|     |       |     |     |           |     |      |
|-----|-------|-----|-----|-----------|-----|------|
| 1   | 1     | 2   | ... | 2         | $m$ | $m$  |
| $e$ | $a^m$ | $a$ | ... | $a^{m-1}$ | $b$ | $ab$ |

$$n = 2m + 1, \quad D'_n = \langle a \rangle, (D_n : D'_n) = 2, Z(D_n) = e, r = m + 2,$$

|     |     |     |           |       |     |
|-----|-----|-----|-----------|-------|-----|
| 1   | 2   | ... | 2         | 2     | $n$ |
| $e$ | $a$ | ... | $a^{m-1}$ | $a^m$ | $b$ |

Представители сопряжённых классов стоят в нижней строке, мощности этих классов - в верхней.

Стоит подчеркнуть, что вид определяющих соотношений (их левых частей в записи  $w_i = e$ ) существенно зависит от выбора системы образующих группы. Например, диэдральная группа  $D_n$  порождается любыми отражениями относительно двух прямых, пересекающихся под углом  $\pi/m$ . Поэтому

$$D_n = \langle g_1, g_2 | g_1^2 = g_2^2 = (g_1 g_2)^n = e \rangle$$

Если исходить из прежнего задания, то можно положить  $g_1 = ab, g_2 = b$ .

## Пример 2 (группа кватернионов).

В отличие от предыдущего примера мы с самого начала определим группу кватернионов  $Q_8$  образующими и соотношениями:

$$Q_8 = \langle a, b | a^4 = e, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Снова  $ba = a^{-1}b = a^3b$ , и поскольку  $b^2 = a^2$ , любое слово в алфавите  $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$  приводится к виду  $a^s b^t$ ,  $0 \leq s \leq 3, 0 \leq t \leq 1$ , так что  $|Q_8| \leq 8$ .

Можем ли мы утверждать, что  $|Q_8| = 8$ ? Да, но только после того, как будет предъявлена группа из 8 элементов, две образующие которой связаны теми же соотношениями, что и  $a, b$ . Такую группу порождают известные нам из упр. 3 из 1 кватернионные единицы **i, j, k** (отсюда и название группы), а также матрицы

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (i = \sqrt{-1})$$

Действительно,

$$A^4 = E, \quad B^2 = A^2, \quad BAB^{-1} = A^{-1}$$

$$\langle A, B \rangle = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Эти матрицы нам уже встречались в упр. 3 из 1. Собственно говоря, там предлагалось проверить, что отображение  $a \mapsto A, b \mapsto B$  определяет изоморфизм  $Q_8 \cong \langle A, B \rangle$ . Заметим, что  $a^2 \in Z(Q_8)$ , и так как факторгруппа по центру неабелевой группы не может быть циклической (см. замечание после доказательства теоремы 4), то  $\langle a^2 \rangle = Z(Q_8)$ . Все группы порядка 4 абелевы, поэтому  $Q_8 / Z(Q_8) \cong V_4$  - прямое произведение двух циклических групп порядка 2. Стало быть, коммутант  $Q'_8$  совпадает с  $Z(Q_8)$  и  $(Q_8 : Q'_8) = 4$ . Сведения о сопряжённых классах содержатся в таблице:

|     |       |     |     |      |
|-----|-------|-----|-----|------|
| 1   | 1     | 2   | 2   | 2    |
| $e$ | $a^2$ | $a$ | $b$ | $ab$ |

Конечно определённые группы, простейшие примеры которых мы рассмотрели, встречаются в разных областях математики, например, в качестве так называемых фундаментальных групп многообразий. Неудивительно, что ещё многие относящиеся к ним вопросы остаются открытыми.

## 2.2 Structure of groups

Изучаемые алгебраические объекты становятся более привлекательными, если их свойства можно выразить на языке элементарных, в том или ином смысле объектов и операций (циклических групп, прямых и полупрямых произведений и т.д.), а сами объекты (в нашем случае группы) обнаруживают изначально или на более позднем этапе тесную связь с другими областями математики. Мы видели в гл. 1, что даже такие маленькие группы, как  $Q_8, S_4$  допускают дальнейшее расщепление, полезное во многих отношениях. Бытовавшая когда-то наивная точка зрения, что конечные группы можно перечислять, опираясь на утверждения типа теоремы Кэли, ушла в прошлое: самые мощные компьютеры конца XX века не справились с доказательством существования "монстра  $M$ " - простой группы порядка

$$|M| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

Это было сделано человеком. С другой стороны, задача перечисления с точностью до изоморфизма групп сравнительно небольшого порядка  $4096 = 2^{12}$  представляет значительную сложность как для машин, так и для человека.

В этой главе внимание будет сосредоточено на небольшом числе классов групп, знакомство с которыми полезно каждому математику.

### 2.2.1 Solvable and simple groups

#### Разрешимые группы

Понятие коммутанта, введённое в гл. 1, приводит к важному и весьма обширному классу групп. Пусть, как и прежде,  $G'$  коммутант группы  $G$ . В  $G'$  также можно рассмотреть коммутант  $(G')' = G''$ , называемый второй производной группой (вторым коммутантом) группы  $G$ . Продолжая этот процесс, мы определим  $k$ -ю производную группу  $G^{(k)} = (G^{(k-1)})'$ . Согласно импликации (1) из 4 гл.  $1G^{(k)} \triangleleft G$  и, тем более,  $G^{(k)} \triangleleft G^{(k-1)}$ . Получается ряд нормальных подгрупп (производный ряд)

$$G \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \dots \supseteq G^{(k)} \supseteq G^{(k+1)} \supseteq \dots$$

с абелевыми факторгруппами  $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ .

Определен и е. Группа  $G$  называется разрешимой, если ряд (1) обрывается на единичной подгруппе, т.е.  $G^{(m)} = e$  для некоторого наименьшего индекса  $m$  - ступени разрешимости группы  $G$ . Очевидно, что любая абелева, в том числе циклическая группа является разрешимой ступени 1. Кроме того, в любой разрешимой группе  $G$  ступени разрешимости  $m$  имеется абелева нормальная подгруппа  $\neq e$ , а именно  $G^{(m-1)}$ . Как показывают рассмотренные в гл. 1 примеры,  $S'_4 = A_4, A'_4 = V_4, V'_4 = e$ . Стало быть, знакопеременная группа  $A_4$  разрешима ступени 2, а симметрическая группа  $S_4$  разрешима ступени 3. Более общим является

Пр и м е р. Пусть

$$T := T(n, \mathfrak{K}) = \{A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathfrak{K}) | a_{ij} = 0 \quad \forall i > j\}$$

**N)** группа верхне-треугольных матриц с коэффициентами в произвольном поле  $\mathfrak{K}$ . Прямая проверка показывает, что  $T^{(n+1)} = E$ , так что  $T(n, \mathfrak{K})$  - разрешимая группа при любом  $n$ . Между прочим, её коммутант  $T' = UT(n, \mathfrak{K})$  (группа верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали) обладает более сильным свойством, чем разрешимость. Если для произвольной группы  $G$  положить

$$G_1 := G, \quad G_2 = G', \quad G_{k+1} = (G_k, G) = \langle (u, v) | u \in G_k, v \in G \rangle,$$

то получится нижний центральный ряд группы  $G$ :

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \dots \supseteq G_k \supseteq G_{k+1} \dots$$

Группа  $G$  называется нильпотентной класса  $c$ , если  $G_c \neq e$ , но  $G_{c+1} = e$ . Группа  $UT(n, \mathfrak{K})$  нильпотентная класса  $n$ .

Справедлива следующая несложная

**Теорема 1.** Группа  $G$  с нормальной подгруппой  $K$  разрешима в том и только том случае, когда разрешимы одновременно  $K$  и  $G/K$ .

**Доказательство.** Если  $H \subset G$ , то  $H' \subset G', \dots, H^{(k)} \subset G^{(k)}$ , и отсюда непосредственно следует, что любая подгруппа  $H$  разрешимой группы  $G$  разрешима.

Пусть теперь  $K$  - нормальная подгруппа разрешимой группы  $G$  и  $\bar{G} = G/K$  - соответствующая факторгруппа. Естественный гомоморфизм  $\pi : G \longrightarrow \bar{G}$  приводит к эпиморфизму  $G'$  на  $\bar{G}'$  (поскольку, очевидно,  $\varphi((g_1, g_2)) = (\varphi(g_1), \varphi(g_2))$  для любого гомоморфизма  $\varphi : G \longrightarrow \bar{G}$ ) и, стало быть, - к эпиморфизму  $G^{(k)}$  на  $\bar{G}^{(k)}$ . Это и позволяет сделать заключение о разрешимости  $\bar{G}$ .

Чтобы доказать утверждение теоремы в обратную сторону, воспользуемся, заменив  $\varphi$  на  $\pi$ , уже отмеченным равенством

$$(\overline{g_1}, \overline{g_2}) = \overline{(g_1, g_2)}$$

т.е.  $(g_1 K, g_2 K) = (g_1, g_2) K$  (формально надо различать коммутаторы в  $G$  и в  $\bar{G}$ ). Пусть  $s$  - степень разрешимости факторгруппы  $\bar{G}$  и  $t$  - степень разрешимости подгруппы  $K$ . Многократно используя (3), мы приходим к равенству  $\bar{G}^{(i)} = (\bar{G})^{(i)}$  при любом  $i$ . В частности,  $\bar{G}^{(s)} = (\bar{G})^{(s)} = \bar{e} = K$ . Таким образом, имеет место включение  $G^{(s)} \subset K$ , откуда получаем  $G^{(s+t)} \subset K^{(t)} = e$ , т.е.  $G$  - разрешимая группа.

**С л е д с т в и е.** Пусть  $K_1, K_2$  - разрешимые нормальные подгруппы произвольной группы  $G$ . Тогда  $K_1 K_2$  является также разрешимой нормальной подгруппой в  $G$ .

**Доказательство.** Из гл. 1 мы уже знаем, что  $K_1 K_2$  - нормальная подгруппа группы  $G$ . Далее, по теореме об изоморфизме имеем

$$K_1 K_2 / K_2 \cong K_1 / (K_1 \cap K_2)$$

Теперь достаточно применить теорему 1.

Доказанное следствие приводит к следующему утверждению: произведение всех разрешимых нормальных подгрупп конечной группы  $G$  будет максимальной разрешимой нормальной подгруппой  $F(G)$  в  $G$ , и факторгруппа  $G/F(G)$  таких подгрупп уже не содержит.

Своему названию разрешимые группы обязаны теории Галуа, о чём уже упоминалось в [ВА I]. Разрешимость группы  $S_4$  и всех её подгрупп служит причиной разрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени  $n \leq 4$ . Более детально с этими вопросами можно познакомиться в гл. 5, 5.

### Простые группы.

Существуют группы  $\neq e$ , совпадающие со своим коммутантом и, стало быть, не являющиеся разрешимыми. Более того, мы сейчас установим существование неабелевых групп, в которых вообще нет нетривиальных ( $\neq e$  и  $G$ ) нормальных подгрупп. Такие группы принято называть простыми.

**Л е м м а.** Любая нормальная подгруппа  $K$  группы  $G$  является объединением некоторого множества сопряжённых классов группы  $G$ .

**Доказательство.** Если  $x \in K \triangleleft G$ , то и  $g_x g^{-1} \in K$  для всех  $g \in G$ . Следовательно, вместе с каждым элементом  $x \in K$  в  $K$  содержится целиком класс сопряжённых элементов  $x^G$  и  $K = \bigcup_{i \in I} x_i^G$ .

**Те о р е м а 2.** Знакопеременная группа  $A_5$  простая.

**Доказательство.** Действительно, в группе  $A_5$ , помимо единичной перестановки  $e$ , имеется 15 элементов  $(ij)(kl)$  порядка 2 (по три элемента этого вида в стационарной подгруппе каждой из точек  $1, 2, 3, 4, 5$ ),  $20 = 2 \binom{5}{3}$  элементов  $(ijk)$  порядка 3 и  $24 = 4!$  элемента  $(1i_1 i_2 i_3 i_4)$  порядка 5. Элементы порядка 2 все сопряжены: они, очевидно, сопряжены в  $S_5$ , а так как стационарная подгруппа (относительно действия сопряжением) элемента  $(12)(34)$  содержит нечётную перестановку  $(12)$ , то сопряжение может быть осуществлено чётными перестановками. То же самое относится к элементам порядка 3. Но элементы порядка 5, сопряжённые в  $S_5$ , в группе  $A_5$  распадаются на два класса с представителями  $(12345)$  и  $(12354)$ . В самом деле,  $(45)(12345)(45)^{-1} = (12354)$ , а централизатор (стационарной подгруппой) элемента  $(12345)$  в  $A_5$  служит циклическая группа порядка 5, порождённая этим элементом. Итак, мы имеем таблицу

|   |          |       |         |         |
|---|----------|-------|---------|---------|
| 1 | 15       | 20    | 12      | 12      |
| e | (12)(34) | (123) | (12345) | (12354) |

В нижней строке указаны представители сопряжённых классов, а в верхней - мощности этих классов. Пусть теперь  $K$  - нормальная подгруппа в  $A_5$ . Согласно лемме

$$|K| = \delta_1 \cdot 1 + \delta_2 \cdot 15 + \delta_3 \cdot 20 + \delta_4 \cdot 12 + \delta_5 \cdot 12$$

где  $\delta_1 = 1$  (так как  $e \in K$ ) и  $\delta_i = 0$  или  $\delta_i = 1$  при  $i = 2, 3, 4, 5$ . Нетрудно убедиться в том, что условие на  $|K|$  быть делителем порядка  $|A_5| = 60$  (теорема Лагранжа) оставляет лишь две возможности:

а)  $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0$ ;  $K$  - единичная подгруппа;

б)  $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 1$ ;  $K = A_5$ .

Это и доказывает, что  $A_5$  - простая группа.

Индукцией по  $n$  теперь можно установить (см. упр. 3), что простыми являются все группы  $A_n$ ,  $n \geq 5$  (результат Э. Галуа). Так как подгруппы разрешимых групп разрешимы (теорема 1), то из теоремы 2 во всяком случае следует, что симметрическая группа  $S_n$  неразрешима при  $n \geq 5$ .

**Т е о р е м а 3.** Группа вращений  $SO(3)$  является простой.

**Доказательство.** Согласно теореме 1 из 1 гл. 1 достаточно убедиться в том, что любая нормальная подгруппа  $K$  группы  $SU(2)$ , содержащая ядро  $\{\pm E\}$  эпиморфизма  $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$  и отличная от  $\pm E$ , совпадает с  $SU(2)$ . Соотношение (5) 1 гл. 1 можно интерпретировать по-новому, сказав, что в каждом сопряжённом классе группы  $SU(2)$  содержится диагональная матрица  $d_\varphi = b_{2\varphi} = \text{diag} \{e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}\}$ . Так как по лемме  $K$  является объединением некоторого семейства сопряжённых классов группы  $SU(2)$ , то без ограничения общности считаем  $d_\varphi \in K$  для некоторого  $\varphi > 0$  такого, что  $\sin \varphi \neq 0$ .

В  $K$  должен содержаться также любой коммутатор

$$\begin{aligned}
 (d_\varphi, g) &= d_\varphi (g d_\varphi^{-1} g^{-1}) = \\
 &= \left\| \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \right\| = \\
 &= |||\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{i2\varphi}
 \end{aligned}$$

где  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  (см. (3) из 1 гл. 1). Для следа матрицы  $(d_\varphi, g)$  получаем выражение

$$\text{tr}(d_\varphi, g) = 2|\alpha|^2 + |\beta|^2 (e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi}) = 2(1 - 2|\beta|^2 \sin^2 \varphi)$$

Здесь  $|\beta|$  принимает любое значение из отрезка  $[0, 1]$  и  $\sin \varphi \neq 0$ . Снова в силу (5) из 1 гл. 1 найдётся унитарная матрица  $h \in \text{SU}(2)$  такая, что  $h[d_\varphi, g]h^{-1} = d_\psi = \text{diag}\{e^{i\psi}, e^{-i\psi}\}$ , причём  $d_\psi \in K$ . Так как  $e^{i\psi}, e^{-i\psi}$  - корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (4|\beta|^2 \sin^2 \varphi - 2)\lambda + 1 = 0$$

матрицы  $(d_\varphi, g)$ , то, заставляя  $|\beta|$  пробегать значения от 0 до 1, мы получим для  $\psi$  любую точку на отрезке  $[0, 2\varphi]$ . Итак, в  $K$  содержится любой элемент  $d_\psi$  и определённый параметром  $\psi$  сопряжённый класс при  $0 \leq \psi \leq 2\varphi$ . Поскольку для всякого  $\sigma > 0$  найдётся натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию  $0 < \psi := \sigma/n \leq 2\varphi$ , можно утверждать, что в  $K$  содержится наперёд заданный элемент  $d_\sigma = d_\psi^n$ .

**Теорема 4.** Проективная специальная линейная группа  $\text{PSL}(2, F)$  над полем с числом элементов  $|F| > 3$  простая.

**Доказательство.** 1) Выделим некоторые подгруппы и элементы:

$$\begin{aligned}
 U &= \left\{ u(\alpha) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| \mid \alpha \in F \right\}, \\
 \bar{U} &= \left\{ \bar{u}(\alpha) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \right\| \mid \alpha \in F \right\}, \\
 D &= \left\{ d(\lambda) = \left\| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right\| \mid \lambda \in F^* \right\}; \\
 B &= DU = UD = \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \right\| \right\}
 \end{aligned}$$

**N)** стандартная борелевская подгруппа. Заметим, что

$$d(\lambda) = u(\lambda - 1)\bar{u}(1)u(\lambda^{-1} - 1)\bar{u}(-\lambda)$$

поэтому борелевская подгруппа  $B$  порождается унитарными подгруппами  $U$  и  $\bar{U}$ . Выделим ещё элемент

$$w = u(1)\bar{u}(-1)u(1) = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\|$$

Группа  $G = \text{SL}(2, F)$  обладает разложением

$$G = B \cup BwB, \quad B \cap BwB = \emptyset.$$

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим естественное действие  $G$  слева на столбцы. Группа изотропии столбца  $e^1 = [1, 0]$  совпадает, очевидно, с  $U$ . Орбита  $Be^1$  состоит из всех столбцов  $[\lambda, 0], \lambda \neq 0$ . С другой стороны,  $we^1 = [0, -1]$ , и поэтому орбита  $Bwe^1$  состоит из всех столбцов  $[\beta, \lambda^{-1}]$  со второй компонентой  $\neq 0$ . Так как эти две орбиты покрывают орбиту  $Ge^1$ , то отсюда следует, что  $B \cup BwB = G$ , поскольку группа изотропии  $U$  содержится в  $B$ . Разложение (4) называется разложением Бруа. Оно допускает далёкое обобщение, которого мы не касаемся.

**Борелевская подгруппа  $B$  максимальна в  $G$ .**

Действительно, из разложения (4) следует, что любой элемент  $h \in H$ , не содержащийся в  $B$ , содержится в  $BwB$ , т.е.  $h = b_1wb_2$ , откуда  $w \in H$  и, таким образом,  $H = G$ .

**N)** Если  $|F| \geq 4$ , то  $G = \text{SL}(2, F) = G'$ .

Берём  $0 \neq \lambda \in F, \lambda^2 \neq 1$ , что при  $|F| > 3$  возможно. Тогда из коммутационного соотношения

$$d(\lambda)u(\alpha)d(\lambda)^{-1}u(\alpha)^{-1} = u(\alpha(\lambda^2 - 1))$$

следует, что  $B' = U$  и  $G' \supset U$ , а поскольку  $G' \triangleleft G$ , мы получаем включение  $G' \supset wUw^{-1} = \bar{U}$ . Но, как это следует из 1) и 2),  $U$  и  $\bar{U}$  порождают  $G$ . Таким образом,  $G' = G$ .

**N)** При  $|F| \geq 4$  группа  $\text{PSL}(2, F) = \text{SL}(2, F)/Z$  простая ( $Z = \{\pm E\}$  - центр).

Воспользуемся легко проверяемым равенством

$$\bigcap_{x \in G} xBx^{-1} = Z$$

Нам нужно показать, что если  $H \triangleleft G = \text{SL}(2, F)$ , то либо  $H \subset Z$ , либо  $H \supset G'$ . Ввиду максимальной  $B$  (см. 3)), мы имеем  $HB = B$  или  $HB = G$ . Если  $HB = B$ , то  $H \subset B$ . Так как  $H \triangleleft G$ , то  $H = xHx^{-1} \subset xBx^{-1} \quad \forall x \in G$ , т.е.  $H \subset Z$ .

С другой стороны,

$$HB = G \implies w = hb, \quad h \in H, b \in B.$$

В таком случае

$$\bar{U} = wUw^{-1} = hbUb^{-1}h^{-1} = hUh^{-1} \subset HU$$

поскольку  $H \triangleleft G$ . Так как  $U \subset HU$ , а  $U, \bar{U}$  порождают  $G$ , то  $HU = G$ . Следовательно,

$$G/H = HU/H \cong U/(U \cap H)$$

**N)** абелева группа, откуда  $H \supset G'$ . Теперь утверждение о простоте группы  $\text{PSL}(2, F)$  очевидно.

Другими средствами теорема 4 была впервые доказана Э. Галуа. Уже из теорем 2-4 видно, что в классе простых групп содержатся важные для приложений группы, как конечные, так и бесконечные. Может показаться удивительным, но сколько-нибудь разумное описание всех существующих конечных простых групп потребовало бы нескольких сотен страниц.

**2.2.2 Sylow theorems****Теория**

Мы уже обращали внимание на тот факт, что в конечной группе  $G$  порядка  $|G|$  может и не быть подгруппы порядка  $d$ , делящего  $|G|$ . Минимальным таким примером служит пара  $G = A_4, d = 6$ .

Так как в неабелевой простой группе не может быть подгрупп индекса 2 (ввиду их нормальности), то по теореме 2 из 1 в знакопеременной группе  $A_5$  порядка 60 нет подгрупп порядка 30 (см. также упр. 4 из 1). На этом фоне особенно замечательными выглядят общие закономерности, установленные более 125 лет назад норвежским математиком Сивовым. Они относятся к  $p$ -группам (с которыми мы встречались в 3 из



гл. 1), содержащимся в качестве подгрупп группы  $G$ . Существование элемента порядка  $p$  в абелевой группе, порядок которой делится на  $p$ , было подмечено ещё О. Коши.

Пусть  $|G| = p^n m$ , где  $p$  - простое число, а  $m$  - целое число, взаимно простое с  $p$ . Подгруппу  $P \subset G$  порядка  $|P| = p^n$  (если таковая существует) будем называть силовской  $p$ -подгруппой группы  $G$ . Как и в 3 гл. 1, под  $N(P)$  понимается нормализатор подгруппы  $P$  в  $G$ .

**Т е о р е м а 1** (первая теорема Силова). Силовские  $p$ -подгруппы существуют.

**Т е о р е м а 2** (вторая теорема Силова). Пусть  $P$  и  $P_1$  - любые две силовские  $p$ -подгруппы группы  $G$ . Тогда найдётся элемент  $a \in G$ , для которого  $P_1 = a P a^{-1}$ . Другими словами, все силовские  $p$ -подгруппы сопряжены.

**Т е о р е м а 3** (третья теорема Силова). Для числа  $N_p$  силовских  $p$ -подгрупп группы  $G$  имеют место равенство  $N_p = (G : N(P))$  и сравнение  $N_p \equiv 1 \pmod{p}$ .

Доказательства теорем 1-3 служат иллюстрацией общих методов и соображений, изложенных в 33 из гл. 1. Начнём с теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Итак, пусть силовские  $p$ -подгруппы в  $G$  существуют и  $P$  - одна из них. Пусть, далее,  $P_1$  - произвольная  $p$ -подгруппа группы  $G$ , не обязательно силовская. Заставим  $P_1$  действовать левыми сдвигами на множестве  $G/P = \bigcup_i g_i P$  левых смежных классов  $G$  по  $P$  (ограничение действия  $G$  на  $G/P$ , описанного в 3 гл. 1). Согласно результатам гл. 1 длина любой орбиты относительно  $P_1$  делит порядок  $|P_1| = p^k, k \leq n$ . Таким образом,

$$m = \frac{p^n m}{p^n} = \frac{|G|}{|P|} = |G/P| = p^{k_1} + p^{k_2} + \dots,$$

где  $p^{k_1}, p^{k_2}, \dots$  - длины орбит. Так как  $\text{НОД}(m, p) = 1$ , то хотя бы одна орбита имеет длину  $p^{k_i} = 1$ , т. е.

$$P_1 \cdot aP = aP$$

для некоторого элемента  $a = g_i \in G$  (это похоже на доказательство теоремы 2 из 3 гл. 1). Переписав соотношение (1) в виде  $P_1 \cdot a P a^{-1} = a P a^{-1}$ , мы приходим к заключению, что

$$P_1 \subset a P a^{-1}$$

(поскольку  $a P a^{-1}$  - группа). В частности, если  $P_1$  - силовская  $p$ -подгруппа, то  $|P_1| = |P|$ , и из (2) следует, что  $P_1 = a P a^{-1}$ .

Доказательство теорем 1 и 3. Теорему 1 можно интерпретировать как следствие теоремы 3, ибо  $N_p \equiv 1 \pmod{p}$ , а  $N_p \neq 0 \iff S \neq \emptyset$ ,  $S$  - множество всех силовских  $p$ -подгрупп группы  $G$ . Что касается теоремы 3, то равенство  $N_p = (G : N(P))$  прямо вытекает из сопряжённости силовских  $p$ -подгрупп (теорема 2) и из общего утверждения о длине орбиты  $H^G$  в 3 из гл. 1. К сравнению  $N_p \equiv 1 \pmod{p}$  мы придём, рассмотрев несколько более общую ситуацию. Именно, пусть  $|G| = p^s t$ , где  $s \leq n$ ,  $t$  может делиться на  $p$ , и пусть  $N_p(s)$  - число всех подгрупп порядка  $p^s$  в  $G$ . Оказывается, что имеет место сравнение  $N_p(s) \equiv 1 \pmod{p}$ ; в частности,  $G$  содержит подгруппы любого порядка  $p^s, s = 1, 2, \dots, n$  и  $N_p(n) = N_p$ .

Рассуждаем следующим образом. Действие левыми сдвигами группы  $G$  на себе индуцирует согласно замечанию в конце п. 1 из 2 действие  $G$  на множестве

$$\Omega = \{M \subset G \mid |M| = p^s\}$$

всех  $p^s$ -элементных подмножеств  $\{g_1, \dots, g_{p^s}\}$ . Напомним, что  $g \cdot \{g_1, \dots, g_{p^s}\} = \{gg_1, \dots, gg_{p^s}\}$ . Множество  $\Omega$  разбивается  $G$ -орбиты  $\Omega_i : \Omega = \bigcup_i \Omega_i$ , так что

$$|\Omega| = \sum_i |\Omega_i|, \quad |\Omega_i| = (G : G_i)$$

где  $G_i = \{g \in G | gM_i = M_i\}$  - стационарная подгруппа некоторого представителя  $M_i \in \Omega_i$ .

Так как  $G_i M_i = M_i$ , то  $M_i = \bigcup_{j=1}^{\nu_i} G_i g_{ij}$  - объединение нескольких правых смежных классов  $G$  по  $G_i$ . Поэтому  $p^s = |M_i| = \nu_i |G_i|$ , откуда  $|G_i| = p^{s_i} \leq p^s$ . В случае  $|G_i| < p^s$  имеем  $|\Omega_i| = p^{s-s_i} t \equiv 0 \pmod{pt}$ ; равенства  $|G_i| = p^s$  и  $|\Omega_i| = t$  эквивалентны. Получаем

$$\left( \frac{|G|}{p^s} \right) = |\Omega| \equiv \sum_{|\Omega_i|=t} |\Omega_i| \pmod{pt}$$

Согласно вышесказанному  $|\Omega_i| = t \implies |G_i| = p^s \implies M_i = G_i a_i$  ( $a_i = g_{ij}$  - некоторый элемент из  $G$ ) и, стало быть,  $a_i^{-1} M_i = a_i^{-1} G_i a_i = P_i$  - подгруппа порядка  $p^s$ . Орбита  $\Omega_i$  исчерпывается некоторым числом левых смежных классов  $gP_i$  группы  $G$  по  $P_i$ .

Обратно: каждая подгруппа  $H \subset G$  порядка  $|H| = p^s$  приводит к орбите  $\Omega' = \{gH | g \in G\}$  длины  $t$ . Различные подгруппы  $H_i$  с  $|H_i| = p^s$  приводят к различным орбитам  $\Omega'_i$ , поскольку из  $H_i = gH_j$  следует  $e = gh_j$ , откуда  $g = h_j^{-1} \in H_j$  и  $H_i = H_j$ . Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между подгруппами порядка  $p^s$  и орбитами  $\Omega_i$  длины  $t$ . Сравнение (3) переписывается в виде

$$\left( \frac{|G|}{p^s} \right) \equiv \sum_{|\Omega_i|=t} |\Omega_i| \equiv t N_p(s) \pmod{pt}$$

где следовало бы писать  $N_p(s, G)$ , чтобы подчеркнуть зависимость  $N_p(s)$  от  $G$ . До сих пор специфика группы  $G$  не играла никакой роли. Если взять за  $G$  циклическую группу порядка  $p^s t$ , то для неё  $N_p(s, G) = 1$  (теорема 3 из 2 гл. 1), и поэтому

$$\left( \frac{|G|}{p^s} \right) \equiv t \cdot 1 \pmod{pt}$$

Так как левые части сравнений (4) и (5) по одному и тому же модулю  $pt$  совпадают, то имеем

$$t \equiv t N_p(s) \pmod{pt}$$

а это и даёт искомое сравнение  $N_p(s) \equiv 1 \pmod{p}$ .

Хотя фактически доказано больше, чем требовалось, мы не намерены этим воспользоваться, отсылая интересующихся к специальной литературе.

**П р и м е р.** Пусть  $G = \text{SL}(2, Z_p)$  - группа всех  $2 \times 2$ -матриц с определителем 1 над полем  $Z_p$  из  $p$  элементов. Из разложения

$$\text{GL}(2, Z_p) = \bigcup_{i=1}^{p-1} \left\| \begin{array}{cc} i & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \text{SL}(2, Z_p)$$

полной линейной группы  $\text{GL}(2, Z_p)$  в смежные классы по  $\text{SL}(2, Z_p)$  следует, что

$$|\text{GL}(2, Z_p)| = (p-1) |\text{SL}(2, Z_p)|.$$

Рассматривая  $\mathrm{GL}(2, Z_p)$  как группу автоморфизмов двумерного векторного пространства  $V$  над  $Z_p$ , легко найти порядок  $|\mathrm{GL}(2, Z_p)|$ . Действительно,  $\mathrm{GL}(2, Z_p)$  действует на множестве пар  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  базисных векторов. Образом  $\mathbf{v}_1$  может быть любой отличный от нуля вектор  $\mathbf{f}_1 \in V$  (их всего  $p^2 - 1$  штук), а при всяком выборе  $\mathbf{f}_1$  образом  $\mathbf{v}_2$  может быть любой вектор  $\mathbf{f}_2$  из  $V \setminus \langle \mathbf{f}_1 \rangle$  (таких векторов имеется  $p^2 - p$  штук). Стало быть,  $|\mathrm{GL}(2, Z_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$ , что в сочетании с (6) приводит к формуле

$$|\mathrm{SL}(2, Z_p)| = p(p^2 - 1)$$

По крайней мере две силовские  $p$ -подгруппы группы  $\mathrm{SL}(2, Z_p)$  мы находим сразу:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in Z_p \right\}, \quad \bar{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in Z_p \right\}.$$

В соответствии с теоремой 3 имеем

$$N_p = (G : N(P)) = 1 + kp > 1,$$

а так как

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, нормализатор  $N(P)$  содержит подгруппу

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \alpha, \lambda \in Z_p, \lambda \neq 0 \right\}$$

порядка  $p(p-1)$ , то остаётся единственная возможность

$$N(P) = H, \quad N_p = 1 + p$$

Между группой

$$\mathrm{SL}(2, Z_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

и симметрической группой  $S_3$  непосредственно устанавливается изоморфизм

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(обе группы имеют одинаковое задание образующими и соотношениями). При  $p > 2$  группа  $G = \mathrm{SL}(2, Z_p)$  имеет центр  $Z(G) = \{\pm E\}$  порядка 2. Факторгруппа  $\mathrm{PSL}(2, Z_p) = G/Z(G)$ , которую естественно называть, как и в [ВА II], проективной специальной группой (она является группой преобразований проективной прямой

$$Z_p \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V) = \{0, 1, \dots, p-1\} \cup \{\infty\})$$

играет важную роль в алгебре со времён Галуа. Дело в том, что при  $p > 3$  группа  $\mathrm{PSL}(2, Z_p)$  простая, и это, наряду с  $A_n$ , - один из самых ранних примеров конечных простых групп.

Обратимся снова к общему случаю и получим одно полезное уточнение теорем Силова.

Теорема 4. Справедливы следующие утверждения:

i) силовская  $p$ -подгруппа  $P$  группы  $G$  нормальна в  $G$  тогда и только тогда, когда  $N_p = 1$ ;

ii) конечная группа  $G$  порядка  $|G| = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$  является прямым произведением своих силовских  $p_i$ -подгрупп  $P_1, \dots, P_k$  в точности тогда, когда все эти подгруппы нормальны в  $G$ .

Доказательство. i) Все силовские подгруппы, отвечающие данному простому делителю  $p$  порядка  $|G|$ , по второй теореме Силова сопряжены, и если  $P$  - одна из них, то

$$N_p = 1 \iff xPx^{-1} = P \quad \forall x \in G \iff P \triangleleft G.$$

ii) Если  $G = P_1 \times \dots \times P_k$  - прямое произведение своих силовских подгрупп, то  $P_i \triangleleft G$  как любой прямой множитель. Значит, условие нормальности необходимо.

Пусть теперь  $P_i \triangleleft G$ ,  $1 \leq i \leq k$ , т.е.  $N_{p_i} = 1$ . Заметим, во-первых, что

$$x \in P_i \cap P_j, i \neq j \implies x^{p_i^s} = e, x^{p_j^t} = e \implies x = e$$

Стало быть,  $P_i \cap P_j = e$ , а отсюда для любых  $x_i \in P_i, x_j \in P_j$  имеем

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} (x_i x_j x_i^{-1}) x_j^{-1} = x'_j x_j^{-1} \in P_j \\ x_i (x_j x_i^{-1} x_j^{-1}) = x_i x'_i \in P_i \end{cases} \implies (x_i, x_j) = e$$

т.е. элементы  $x_i$  и  $x_j$  перестановочны. Представим на минуту, что единичный элемент  $e \in G$  записан в виде  $e = y_1 y_2 \dots y_k$ , где  $y_i \in P_i$  - элемент порядка  $a_i = p_i^{b_i}$ . Положив  $a = \prod_{i \neq j} a_i$  и воспользовавшись перестановочностью  $y_1, \dots, y_k$ , получим

$$e = (y_1 y_2 \dots y_k)^a = y_1^a y_2^a \dots y_k^a = y_j^a$$

Но так как  $a$  и  $a_j$  взаимно просты, то  $y_j^a = y_j^a = e \implies y_j = e$ . Это верно при любом  $j$ , и, стало быть, равенство  $e = y_1 y_2 \dots y_k$  возможно лишь при  $y_1 = y_2 = \dots = y_k = e$ .

С другой стороны, каждый элемент  $x \in G$  порядка  $r = r_1 r_2 \dots r_k$ ,  $r_i = p_i^{s_i}$ , записывается в виде

$$x = x_1 x_2 \dots x_k, \quad |\langle x_i \rangle| = r_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Достаточно положить  $x_i = x^{t_i r'_i}$ , где показатели определяются условиями

$$r'_i = \frac{r}{r_i}, \quad 1 = \sum_{i=1}^k t_i r'_i$$

Если теперь  $x = x'_1 x'_2 \dots x'_k$  - другая запись  $x$  в виде произведения  $p_i$ -элементов, то в силу перестановочности  $x_i, x'_i$  с различными нижними индексами будем иметь

$$e = (x'_1 x'_2 \dots x'_k) (x_1 x_2 \dots x_k)^{-1} = x'_1 x_1^{-1} \cdot x'_2 x_2^{-1} \dots x'_k x_k^{-1}$$

что, как было показано выше, влечет равенства  $x'_1 x_1^{-1} = x'_2 x_2^{-1} = \dots = x'_k x_k^{-1} = e$ , т.е.  $x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, \dots, x'_k = x_k$ .

Итак, каждый элемент группы  $G$  записывается, и притом единственным образом, в виде (7), т.е. (см. 2)  $G = P_1 \times \dots \times P_k$ .

3 замечание. Нормальная силовская  $p$ -подгруппа  $P$  группы  $G$  характеристична в  $G$ , т.е. инвариантна при действии любого автоморфизма  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ . Действительно,  $|\varphi(P)| = |P|$ , поэтому  $\varphi(P)$  - силовская  $p$ -подгруппа, и, стало быть,  $\varphi(P) = P$ , если  $N_p = 1$ . Достоин замечания также то, что аналоги силовских подгрупп прослеживаются в алгебраических структурах, далёких от конечных групп.

## 2.2.3 Finitely generated abelian groups

Этот параграф написан так, что его зависимость от остального материала главы минимальна.

### Примеры и предварительные результаты

Как уже не раз упоминалось, абелевы группы иногда удобно записывать аддитивно, используя  $+$  в качестве основной операции. Таким образом, если  $(A, +)$  - аддитивная абелева группа, то:

N)  $a + a' = a' + a$  для любых элементов  $a, a' \in A$ ;

N)  $na := \underbrace{a + a + \dots + a}_n$  при любом  $n > 0, n \in \mathbb{Z}$ ;

N)  $0 \cdot a = 0$  (слева  $0 \in \mathbb{Z}$ , справа  $0$  - нейтральный элемент группы);

N)  $(-n)a = \underbrace{(-a) + (-a) + \dots + (-a)}_n$  при любом  $n > 0, n \in \mathbb{Z}$ .

Понятно, что при этом выполнены свойства

$$m(na) = (mn)a, \quad (m+n)a = ma + na, \quad n(a+a') = na + na'$$

Стало быть, для любого набора элементов  $a_1, \dots, a_m \in A$  мы можем рассматривать целочисленные комбинации

$$n_1a_1 + n_2a_2 + \dots + n_ma_m \in A$$

с коэффициентами  $n_i \in \mathbb{Z}$ .

О п р е д е л е н и е. Система элементов  $a_1, \dots, a_m$  аддитивной абелевой группы  $A$  называется системой образующих или системой порождающих, если

$$\{n_1a_1 + \dots + n_ma_m | n_i \in \mathbb{Z}\} = A$$

т.е. каждый элемент  $a' \in A$  записывается, быть может, многими способами, в виде  $a' = n_1a_1 + \dots + n_ma_m$ . В таком случае пишут  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ .

П р и м е р 1. Обычная единица  $1$  - образующая группы  $(\mathbb{Z}, +)$ ;  $-1$  также будет образующей, но  $n \neq \pm 1$  образующей не является.

П р и м е р 2. Абелева группа  $\mathbb{Z}^n$  целочисленных векторов (векторов с целыми координатами) в координатном пространстве  $\mathbb{Q}^n$  обладает системой образующих

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

П р и м е р 3. В группе  $\mathbb{Z}^2$  можно взять и другие системы образующих, скажем,

$$b_1 = (1, 1), \quad b_2 = (1, -1), \quad b_3 = (4, 1)$$

Так как  $\varepsilon_1 = 3b_1 + 2b_2 - b_3$ ,  $\varepsilon_2 = -2b_1 - 2b_2 + b_3$ , то это действительно образующие группы  $\mathbb{Z}^2$ . Однако никакая пара элементов из множества  $\{b_1, b_2, b_3\}$  системой образующих группы  $\mathbb{Z}^2$  не является. Убедитесь в этом.

Нетрудно назвать группы, в которых нет никакой конечной системы образующих. Например, ими являются  $\mathbb{R}^{(+)} = (\mathbb{R}, +)$  и  $U = \{\alpha \in \mathbb{C} | |\alpha| = 1\}$  (группа с операцией умножения). Действительно, эти группы - несчётные множества, а группа с конечным числом образующих всегда счётна. Имеются и другие примеры:  $\mathbb{Q}^{(+)}$  или  $\mathbb{Q}^*$  (несложная проверка).

Предлож е н и е 1. Прямая сумма

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$$

конечного числа циклических групп  $A_i$  является группой с конечным числом образующих.

Доказательство. Действительно, если  $A_i = \langle a_i \rangle$ , то элементы

$$(a_1, 0, \dots, 0), \quad (0, a_2, \dots, 0), \quad \dots, \quad (0, 0, \dots, a_n)$$

будут образующими группы  $A$ .

Предложение 2. Прямая сумма  $A = C_m \oplus C_n$  двух конечных циклических групп взаимно простых порядков  $m, n$  является циклической группой порядка  $mn$ .

Доказательство. См. [ВА I, гл. 4, 2, упр. 3].

Итак, имеет место импликация

$$\text{НОД}(m, n) = 1 \implies C_m \oplus C_n \cong C_{mn}.$$

Мы видим, что абелевы группы с конечным числом образующих довольно разнообразны по своим свойствам. Они достойны детального изучения хотя бы потому, что возникают естественным образом в геометрии, в топологии, в гомологической алгебре. Стоит ещё добавить, что если  $G$  - произвольная конечно порождённая группа, а это обширный класс групп, то по теореме 5 из 4 гл. 1 факторгруппа по коммутанту  $G/G'$  является абелевой группой с конечным числом образующих.

1

**N)** Абелевы группы без кручения. По определению группа  $A$  без кручения, если она не имеет ненулевых элементов конечного порядка, т.е.  $na = 0, n \neq 0 \implies a = 0$ . Такие группы очень похожи на векторные пространства, как это будет видно из дальнейшего.

Определение. Система элементов  $a_1, \dots, a_k \in A$  называется независимой, если из равенства  $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = 0$ , где  $n_i \in \mathbb{Z}$ , следует, что  $n_1 = \dots = n_k = 0$ . Система элементов  $a_1, \dots, a_n \in A$  называется базисом, если она:

**N)** независима;

**N)** является системой образующих группы  $A$ .

Лемма 1. Если  $A = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ , а элементы  $b_1, \dots, b_n \in A$  образуют независимую систему, то  $n \leq m$ .

Доказательство. Выразим  $b_i$  через  $a_1, \dots, a_m$ :

$$b_i = \sum_{j=1}^m \beta_{ij} a_j, \quad \beta_{ij} \in \mathbb{Z}$$

и рассмотрим целочисленные векторы-строки  $B_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{im}) \in \mathbb{Q}^m$  (координатное векторное пространство над  $\mathbb{Q}$ ). Предположив противное,  $n > m$ , мы должны заключить, что система  $\{B_1, \dots, B_n\}$  линейно зависима. Значит, найдутся не все равные нулю  $r_i \in \mathbb{Q}$  такие, что

$$r_1 B_1 + r_2 B_2 + \dots + r_n B_n = 0$$

Пусть  $d$  - общий знаменатель рациональных чисел  $r_i$ :  $r_i = s_i/d$ ,  $s_i \in \mathbb{Z}$ . Умножая обе части равенства (2) на  $d$ , получаем соотношение

$$s_1 B_1 + s_2 B_2 + \dots + s_n B_n = 0$$

с целыми коэффициентами. Расписывая его по координатам, придём к линейной системе

$$s_1\beta_{1j} + s_2\beta_{2j} + \dots + s_n\beta_{nj} = 0, \quad 1 \leq j \leq m$$

В таком случае

$$\sum_{i=1}^n s_i b_i = \sum_{i=1}^n s_i \left( \sum_{j=1}^m \beta_{ij} a_j \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n s_i \beta_{ij} \right) a_j = 0$$

- противоречие.

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения.

N) Всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  без кручения обладает базисом.

N) Все базисы группы  $A$  равносильны (состоят из одинакового числа элементов).

Доказательство. 1) Общая идея: уменьшение числа элементов в системе образующих до тех пор, пока она не станет независимой. Пусть  $\{a_1, \dots, a_m\}$  - некоторая система образующих группы  $A$ . Выражение вида  $s_1 a_1 + \dots + s_m a_m = 0$  естественно называть соотношением на  $a_1, \dots, a_m$ . Число, равное  $\min_i |s_i|$ , будем называть высотой соотношения, а соотношение на  $a_1, \dots, a_m$ , у которого высота минимальна, - минимальным соотношением. Такое соотношение всегда существует, поскольку высота - натуральное число. С другой стороны, минимальное соотношение не обязательно единственно. Доказательство распадается на ряд простых утверждений. а) Если  $s_1 a_1 + \dots + s_m a_m = 0$  - минимальное соотношение, то НОД  $(s_1, \dots, s_m) = 1$ .

Действительно, если  $s_i = d s'_i, 1 \leq i \leq m$ , то

$$d(s'_1 a_1 + \dots + s'_m a_m) = 0 \implies s'_1 a_1 + \dots + s'_m a_m = 0$$

поскольку  $A$  - группа без кручения. При  $d > 1$  мы приходим к соотношению меньшей высоты, что исключено условием минимальности.

б) Если  $s_1 a_1 + \dots + s_m a_m = 0$  - соотношение высоты 1 и, скажем,  $|s_k| = 1$ , то множество из  $m - 1$  элементов  $\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_m\}$  будет системой образующих.

Это достаточно очевидно: по условию  $\sum_{i \neq k} s_i a_i \pm a_k = 0$ , поэтому  $a_k = \sum_{i \neq k} s'_i a_i, s'_i = \pm s_i$ , так что оставшиеся элементы порождают  $A$ .

в) Если высота минимального соотношения системы  $\{a_1, \dots, a_m\}$  равна  $h > 1$ , то можно построить новую систему образующих  $\{a'_1, \dots, a'_m\}$ , высота минимального соотношения которой будет строго меньше  $h$ .

Действительно, мы можем так перенумеровать образующие, что  $|s_1| = \min |s_i| = h$ . Умножая, если надо, соотношение на  $-1$ , полагаем  $s_1 = h$ . Согласно а) не все  $s_i$  делятся на  $h$ . Производя ещё раз перенумерацию, можем считать, что  $h \nmid s_2 : s_2 = qh + r, 0 < r < h$ . Теперь наше соотношение переписывается в виде

$$h a'_1 + r a'_2 + s_3 a'_3 + \dots + s_m a'_m = 0$$

где  $a'_1 = a_1 + q a_2, a'_i = a_i, i > 1$ . Ясно, что  $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_m\}$  будет системой образующих, удовлетворяющей соотношению высоты  $r < h$  (высота её минимального соотношения, возможно,  $\leq r$ ).

Утверждение 1) нашей теоремы доказывается теперь следующим образом. Пусть  $n$  - минимальное число образующих группы  $A$  и  $\{a_1, \dots, a_n\}$  - одна из таких систем. Считаем также, что она удовлетворяет соотношению минимальной высоты  $h$  (по всем системам мощности  $n$ ).

Если  $h = 1$ , то в соответствии с б) число образующих уменьшается по крайней мере до  $n - 1$ , что исключено нашим выбором. Если  $h > 1$ , то согласно в)  $\{a_1, \dots, a_n\}$  перестанет

быть системой с минимальным соотношением наименьшей (опять-таки по всем системам мощности  $n$ ) высоты. Остаётся признать, что  $\{a_1, \dots, a_n\}$  - независимая система, т.е. базис группы  $A$ .

1

**N)**Предположим, что  $\{a_1, \dots, a_m\}, \{b_1, \dots, b_n\}$  - какие-то два базиса группы  $A$ . Дважды применяя лемму 1, получаем неравенства  $n \leq m$  и  $m \leq n$ , т.е.  $m = n$ . О п р е д е л е н и е. Конечно порождённая абелева группа  $A$  называется свободной ранга  $n$  и обозначается символом  $F_n^{ab}$ , если

$$A = F_n^{ab} \cong \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$$

Ранг группы, состоящей из одного нуля, считается равным нулю. Любой базис свободной абелевой группы  $A$  называется также её с - бодной системой образующих.

Только что доказанная теорема 1 утверждает на самом деле, что всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  без кручения является свободной некоторого ранга  $n$ .

Действительно, если  $\{a_1, \dots, a_n\}$  - базис группы  $A$ , то любой элемент  $a \in A$  однозначно записывается в виде  $a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n, \alpha_i \in \mathbb{Z}$  (имея другую запись  $a = \alpha'_1 a_1 + \dots + \alpha'_n a_n$ , мы имели бы соотношение  $0 = a - a = (\alpha_1 - \alpha'_1) a_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) a_n$ , откуда  $\alpha'_1 = \alpha_1, \dots, \alpha'_n = \alpha_n$ ). Сопоставление  $a \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  задаёт, очевидно, изоморфизм  $A$  с группой  $\mathbb{Z}^n$  целочисленных векторов. Это и значит, что  $A$  - свободная группа ранга  $n$ .

2

**N)**Свободные абелевы группы конечного ранга. Следующее утверждение технического характера сильно упрощает изучение подгрупп и факторгрупп свободной абелевой группы.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $B$  - ненулевая подгруппа свободной абелевой группы  $A$  конечного ранга  $n$ . Тогда в  $A$  и  $B$  можно выбрать базисы соответственно  $\{a_1, \dots, a_n\}$  и  $\{b_1, \dots, b_k\}$  такие, что  $b_i = m_i a_i$ , где  $m_i \geq 0$  - неотрицательные целые числа, причём  $m_{i-1} | m_i; i = 2, 3, \dots, k, k \leq n$  (возможно, что  $m_{k+1} = \dots = m_n = 0$ ).

**Д оказательство.** Выберем в  $A$  базис  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , обладающий следующим экстремальным свойством:  $B$  содержит элемент

$$b_1 = m_1 v_1 + s_2 v_2 + \dots + s_n v_n$$

с положительным и самым минимальным коэффициентом  $m_1$ . Имеется в виду, что при другом упорядочении элементов  $v_i$ , при любом другом выборе базиса в  $A$  или для какого-либо иного элемента  $b \in B$  первый положительный коэффициент не может быть меньше  $m_1$ .

Утверждается, что тогда  $m_1 | s_i, i = 2, \dots, n$ . Действительно, если  $s_i = q_i m_1 + r_i, 0 \leq r_i < m_1$ , то

$$b_1 = m_1 a_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n$$

где  $a_1 = v_1 + q_2 v_2 + \dots + q_n v_n$ . Понятно, что  $\{a_1, v_2, \dots, v_n\}$  - базис группы  $A$ . Из экстремальности  $\{v_1, \dots, v_n\}$  следует, что  $r_2 = \dots = r_n = 0$ . Таким образом,  $b_1 = m_1 a_1$ .

По тем же причинам

$$b' = m'_1 a_1 + s'_2 v_2 + \dots + s'_n v_n \in B \implies m_1 | m'_1,$$



и если  $m'_1 = qm_1$ , то

$$b'' = b' - qb_1 \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle$$

Т.е.

$$A = \langle a_1 \rangle \oplus A_1, \quad B = \langle b_1 \rangle + B_1,$$

где  $b_1 = m_1 a_1$ ,  $B_1 \subseteq A_1 := \langle v_2, \dots, v_n \rangle$ .

Итак,  $B_1$  - подгруппа свободной абелевой группы  $A_1$  ранга  $n - 1$ . Простая индукция по рангу приводит к заключению, что для пары  $(A_1, B_1)$  утверждение теоремы справедливо, т.е. в  $A_1$  найдутся элементы  $a_2, \dots, a_n$ , для которых

$$A_1 = \langle a_2, \dots, a_n \rangle, \quad B_1 = \langle b_2, \dots, b_k \rangle, \quad b_i = m_i a_i, \quad m_{i-1} | m_i, \quad i > 2$$

На каком-то этапе, возможно, появятся нули:  $m_{k+1} = m_{k+2} = \dots = m_n = 0$ .

Осталось доказать, что  $m_1 | m_2$ . Положим  $m_2 = qm_1 + r$ ,  $0 \leq r < m_1$ , и заменим временно  $a_1$  на  $a'_1 = a_1 + qa_2$ . Относительно базиса  $\{a'_1, a_2, \dots, a_n\}$  группы  $A$  элемент  $b_1 + b_2 \in B$  имеет вид

$$b_1 + b_2 = m_1 a_1 + (qm_1 + r) a_2 = m_1 a'_1 + r a_2.$$

Отсюда видно, что при  $r > 0$  мы вступаем в противоречие со свойством экстремальности исходного базиса, или, что то же самое, с выбором  $m_1$ . Таким образом,  $r = 0$ , и доказательство завершено.

В условиях теоремы 2 говорят о согласованности базисов в  $A$  и  $B$ .

Следствие 1. Всякая подгруппа  $B$  свободной абелевой группы  $A$  ранга  $n$  свободна ранга  $k \leq n$ .

Доказательство. По теореме 2 в группах  $A, B \neq 0$  можно выбрать согласованные базисы

$$A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle, \quad B = \langle b_1, \dots, b_k \rangle, \quad b_i = m_i a_i, \quad 1 \leq i \leq k \leq n$$

где  $m_1 | m_2, m_2 | m_3, \dots, m_{k-1} | m_k$  ( $m_{k+1} = \dots = m_n = 0$ ). Итак, любой элемент  $b \in B$  записывается в виде

$$b = s_1 m_1 a_1 + s_2 m_2 a_2 + \dots + s_k m_k a_k.$$

Если для некоторых  $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{Z}$ , одновременно не равных нулю, будет  $b = 0$ , то мы приходим к нетривиальной линейной зависимости системы  $\{a_1, \dots, a_k\}$  с коэффициентами  $s_1 m_1, s_2 m_2, \dots, s_k m_k$ , что исключено, поскольку  $\{a_1, \dots, a_k\}$  - часть базиса группы  $A$ . Стало быть, система образующих  $\{b_1, \dots, b_k\}$  группы  $B$  независима (или свободна) и  $B$  - свободная группа ранга  $k \leq n$ .

При  $n = 1$  утверждение следствия 1, конечно, нам известно: в группе  $(\mathbb{Z}, +)$  каждая ненулевая подгруппа имеет вид  $m\mathbb{Z}$  и является бесконечной циклической, т.е. свободной ранга 1.

Следствие 2. Любой гомоморфный образ  $\varphi(A)$  свободной абелевой группы  $A$  ранга  $n$  изоморфен группе

$$\mathbb{Z}^{n-k} \oplus Z_{m_1} \oplus \dots \oplus Z_{m_k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

причём  $m_{i-1} | m_i$ ,  $2 \leq i \leq k$ .

Доказательство. Пусть  $B = \text{Ker } \varphi$  - ядро гомоморфизма  $\varphi$ . По теореме о гомоморфизмах (теорема 2 из 4 гл. 1)  $\varphi(A) \cong A/B$ . Опишем эту факторгруппу, для чего в соответствии с теоремой 2 выберем в  $A$  и  $B$  согласованные базисы. Пусть

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n, \quad B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$$

где

$$A_i = \mathbb{Z}a_i, \quad B_i = B \cap A_i = \begin{cases} n_i \mathbb{Z}a_i & \text{при } i \leq k \\ 0 & \text{при } i > k. \end{cases}$$

Факторизация бесконечной циклической группы  $\langle a_i \rangle = \mathbb{Z}a_i$  по подгруппе  $m_i a_i \mathbb{Z}$  приводит либо к той же группе  $\langle a_i \rangle$  при  $i > k$ , либо к циклической группе  $\langle \bar{a}_i | m_i \bar{a}_i = 0 \rangle$  порядка  $m_i$ , изоморфной  $Z_{m_i}$ ,  $i \leq k$ .

По теореме 7 из 4 гл. 1 имеем

$$\begin{aligned} A/B &\cong A_1/B_1 \oplus \dots \oplus A_k/B_k \oplus A_{k+1}/B_{k+1} \oplus \dots \oplus A_n/B_n \cong \\ &\cong Z_{m_1} \oplus \dots \oplus Z_{m_k} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-k}. \end{aligned}$$

3

**Н)Строение конечно порождённых абелевых групп.** Последнее следствие теоремы 2 даёт фактически ответ на основной вопрос о конечно порождённых абелевых группах. Предварительно докажем одно универсальное свойство свободной абелевой группы.

**Л м м а 3.** Пусть  $X$  - множество образующих абелевой группы  $F$ ,  $|X| = n$ . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

i)  $F = F_n^{ab}$  - свободная абелева группа и  $X$  - множество её свободных образующих;

ii) каждое однозначное отображение  $\varphi$  множества  $X$  в некоторую абелеву группу  $A$  индуцирует гомоморфизм  $\tilde{\varphi} : F \rightarrow A$ .

**Доказательство.** i)  $\implies$  ii). Имеем  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\varphi : X \rightarrow A$ . Так как каждый элемент из  $F$  однозначно записывается в виде  $\sum_i s_i x_i$ , то, очевидно, отображение

$$\tilde{\varphi} : \sum_i s_i x_i \mapsto \sum_i s_i \varphi(x_i)$$

является гомоморфизмом из  $F$  в  $A$ .

ii)  $\implies$  i). В этой импликации мы убедимся сразу, взяв в качестве  $A$  свободную группу со множеством образующих  $\{a_1, \dots, a_n\}$  той же мощности, что и  $X$ . Если  $\varphi : x_i \mapsto a_i$  - существующее по условию однозначное отображение, которое продолжается до гомоморфизма  $\tilde{\varphi} : F \rightarrow A$ , то

$$\sum_i s_i x_i = 0 \implies \sum_i s_i a_i = 0 \implies s_i = 0$$

т.е.  $x_1, \dots, x_n$  - свободные образующие и  $F = F_n^{ab}$ .

Понятно, что в лемме 3 условие конечности множества  $X$  не играет никакой роли, но и бесконечные множества нам рассматривать ни к чему.

**Теорема 3.** Каждая абелева группа с  $n$  образующими является гомоморфным образом свободной абелевой группы  $F_n^{ab}$ .

**Доказательство.** - непосредственное следствие леммы 3.

Соединяя следствие 2 теоремы 2 и теорему 3, мы приходим к основному результату этого параграфа.

**Теорема 4.** 1) Всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  является прямой суммой свободной абелевой группы  $F_r^{ab}$  некоторого ранга  $r \geq 0$  и конечной абелевой группы.

1

**N)** Всякая конечная абелева группа является прямой суммой некоторого числа  $k$  циклических групп порядков  $m_1, \dots, m_k$ , где  $m_{i-1} | m_i, 1 < i \leq k$ .

4

**N)** Другие подходы к проблеме классификации. Свободные группы проявляют себя и в других обстоятельствах, на которых мы вкратце остановимся.

Лемма 4. Пусть факторгруппа

$$A/B = \bigoplus_{i=1}^n (A_i/B)$$

**N)** прямая сумма, причём  $B$  - прямое слагаемое в каждой подгруппе  $A_i : A_i = B \oplus J_i$ . Тогда  $B$  - прямое слагаемое в  $A$  и

$$A = B \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^n J_i \right)$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $B$  и все подгруппы  $J_i$  порождают  $A$ . Предположим, что  $b + x_1 + \dots + x_n = 0$  с какими-то элементами  $b \in B$  и  $x_i \in J_i$ . Переходя к факторгруппе по модулю  $B$ , мы получаем соотношение

$$\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n = 0 \quad (\bar{x} = x + B)$$

Но так как по условию  $A_i/B$  - прямое слагаемое в  $A/B$ , то  $\bar{x}_i = \bar{0}$ . Стало быть,  $x_i \in B$ , т.е.  $x_i \in (B \cap J_i) = 0$ , а это приводит к заключению, что  $b = 0$ , и, значит, любая линейная зависимость  $b + x_1 + \dots + x_n = 0$  - тривиальная.

**Теорема 5.** Пусть  $A$  - абелева группа,  $B$  - её подгруппа. Если факторгруппа  $A/B$  свободная, то  $A$  - прямая сумма  $B$  и свободной группы  $F^{ab} : A = B \oplus F^{ab}$ . **Доказательство.** Так как  $A/B$  - прямая сумма бесконечных циклических групп, то по лемме 4 достаточно рассмотреть случай, когда  $A/B \cong \mathbb{Z}$ . Итак,

$$A/B = \langle \bar{a} \rangle \cong \mathbb{Z}$$

Возьмём  $0 \neq a \in \bar{a}$  (элемент смежного класса  $\bar{a}$ , не содержащийся в  $B$ ). Тогда элементы  $ka$  будут представителями смежных классов  $k\bar{a}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , т.е.  $A = B \oplus \langle a \rangle$ .

**Определение.** Периодической частью (или подгруппой кручения - от английского torsion subgroup) абелевой группы  $A$  называется подгруппа  $T(A)$  всех элементов из  $A$  конечного порядка.

В том, что  $T(A)$  - подгруппа, легко убедиться непосредственно: если  $sa = 0, tb = 0; a, b \in T(A)$ , то  $st(\nu a + \mu b) = \nu t(sa) + \mu s(tb) = 0$  и, значит,  $\nu a + \mu b \in T(A)$ .

Лемма 5. Факторгруппа  $A/T(A)$  - группа без кручения.

**Доказательство.** Предположим, что  $\bar{a} = a + T(A)$  - элемент конечного порядка в  $A/T(A)$ , т.е.  $m\bar{a} = ma + T(A) = \bar{0}$ , или, что то же самое,  $ma \in T(A)$ . Значит,  $n(ma) = 0$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}$ . Но если  $(nm)a = 0$ , то по определению периодической части  $a \in T(A)$  и  $\bar{a} = \bar{0}$ .

Пусть теперь  $A$  - абелева группа с  $n$  образующими. Как утверждает лемма,  $A/T(A)$  - группа без кручения. Число её образующих, очевидно, не превосходит  $n$ . Согласно теореме 1  $A/T(A) \cong F_r^{ab}, r \leq n$ , - свободная группа. По теореме 5 имеем разложение

$$A = T(A) \oplus F_r^{ab}$$

Теперь видно, что  $T(A) \cong A/F_r^{ab}$ , и, значит, число образующих подгруппы  $T(A)$  тоже не превосходит  $n$ . Если  $a_1, \dots, a_s$  - её образующие и  $m_1 a_1 = \dots = m_s a_s = 0$ , то, очевидно,  $T(A)$  - конечная группа порядка  $\leq m_1 \dots m_s$ . Мы пришли к следующему утверждению.

**Теорема 6.** Всякая конечно порождённая абелева группа  $A$  является прямой суммой конечной абелевой группы  $T(A)$  и свободной абелевой группы  $F_r^{ab}$  некоторого ранга  $r$ .

Фактически мы уже знаем (теорема 4), что  $T(A)$  - прямая сумма циклических групп, но мы хотим пойти другим путём.

**Теорема 7.** Всякая периодическая абелева группа  $A$  может быть записана в виде прямой суммы  $p$ -групп  $A(p)$ , отвечающих различным простым  $p$ . Прямые слагаемые  $A(p)$  однозначно определяются группой  $A$ .

**Доказательство.** Пусть  $A(p)$  состоит из всех элементов  $x \in A$ , порядка которых являются степенями простого числа  $p$  (возможно, что  $A(p) = 0$ ). Тогда  $A(p)$  - подгруппа в  $A$ , поскольку  $p^k x = 0 = p^l y$ ;  $x, y \in A$ ,  $m = \max(k, l) \implies$

$$\implies p^m(x - y) = 0 \implies x - y \in A(p).$$

Каждый элемент из  $A(p_1) + \dots + A(p_s)$  имеет порядок, который не может делиться на простое  $q$ , отличное от  $p_1, \dots, p_s$ . Следовательно,

$$A(q) \cap (A(p_1) + \dots + A(p_s)) = 0$$

А это значит, что подгруппы  $A(p)$  порождают прямую сумму  $\bigoplus_p A(p)$  (суммирование по всем простым  $p$ ).

Остаётся лишь доказать, что группа  $A$  порождается своими  $p$ -компонентами  $A(p)$ . Пусть  $a \in A$  и  $|\langle a \rangle| = n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$  с различными простыми  $p_i$ . Целые числа  $n_i$ , определённые равенствами  $n = n_i p_i^{k_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , взаимно просты и, следовательно,

$$t_1 n_1 + \dots + t_r n_r = 1$$

для некоторых  $t_i \in \mathbb{Z}$ . Таким образом,

$$a = \sum_{i=1}^r t_i (n_i a)$$

где  $n_i a \in A(p_i)$  (действительно,  $p_i^{k_i} (n_i a) = na = 0$ ). Получаем, что  $a \in A(p_1) + \dots + A(p_r)$ .

Единственность  $A(p)$  получается сразу, если заметить, что в любом прямом разложении  $A = \bigoplus_p A'(p)$  ни один элемент, не лежащий в  $A'(p)$ , не может быть порядка  $p^t$ . Стало быть,  $A'(p) \supseteq A(p)$ . Обратное включение очевидно.

**Теорема 8 (Фробениус-Штикельбергер).** Каждая конечная абелева группа является прямой суммой конечного числа примарных циклических групп.

**Доказательство.** В силу теоремы 7 можно ограничиться конечными  $p$ -группами. Докажем утверждение, представляющее независимый интерес.

Пусть  $A$  - конечная абелева  $p$ -группа,  $a \in A$  - её элемент максимального порядка  $p^k$ . Тогда циклическая группа  $\langle a \rangle$  - прямое слагаемое в  $A$ .

Действительно, пусть  $B$  - максимальная подгруппа в  $A$ , обладающая свойством  $B \cap \langle a \rangle = \{0\}$ . Тогда, очевидно,

$$H := \langle B, a \rangle = B \oplus \langle a \rangle.$$

Предположим, что  $H$  - собственная подгруппа в  $A$ . Тогда мы можем найти элемент  $x \in A$  такой, что  $x \notin H$ , но  $px \in H$  (если  $p^i x \in H, p^{i-1}x \notin H$ , то следует заменить  $x$  на  $p^{i-1}x$ ). Имеем

$$px = b + la \quad (b \in B, l \in \mathbb{Z})$$

и в силу максимальности  $p^k$

$$p^{k-1}b + p^{k-1}la = p^k x = 0.$$

Отсюда  $p^{k-1}la = 0$ , а в таком случае  $p^{k-1}l$  делится на  $p^k$ , т.е.  $l = pj$  для некоторого  $j \in \mathbb{Z}$ . Теперь для  $y = x - ja$  имеем  $py = b \in B$ ; но  $y \notin H$ , так что  $\langle B, y \rangle$  содержит (в силу максимальности  $B$ ) ненулевой элемент  $ra \in \langle a \rangle$ .

Итак,  $ra = b' + sy; b' \in B, s \in \mathbb{Z}$ . Отсюда  $sy \in B + \langle a \rangle = H$ . Если  $p|s$ , то  $sy \in B, b' + sy = b'' \in B$  и  $0 \neq ra = b'' \implies B \cap \langle a \rangle \neq 0$  - противоречие. Значит,  $(s, p) = 1$ , причём  $sy \in H$  и  $py \in H$ , откуда  $y \in H$  - снова противоречие. Таким образом,  $A = H, A = \langle a \rangle \oplus B$ , и утверждение доказано.

Теперь доказательство теоремы 8 очевидно. Мы выбираем в  $A$  элемент максимального порядка  $p^k$  и записываем  $A = \langle a \rangle \oplus B$ . Тот же процесс, применённый к  $B, |B| < |A|$ , завершает доказательство.

Важным дополнением к теореме 8 служит

Теорема 9. Если конечная абелева  $p$ -группа  $A$  разложена двумя способами в прямую сумму циклических подгрупп:

$$A_1 \oplus \dots \oplus A_r = A = B_1 \oplus \dots \oplus B_s$$

то  $r = s$  и порядки  $|A_i|$  совпадают с порядками  $|B_j|$  при некотором упорядочении последних.

Доказательство. При  $|A| = p$  теорема, очевидно, верна. Используем индукцию по  $|A|$ . Удобно с самого начала упорядочить компоненты  $A_i$  и  $B_j$  так, чтобы их порядки не возрастали:

$$\begin{aligned} A_i &= \langle a_i \rangle, \quad |\langle a_i \rangle| = p^{\mu_i}, \\ \mu_1 &\geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_q > \mu_{q+1} = \dots = \mu_r = 1; \\ B_j &= \langle b_j \rangle, \quad |\langle b_j \rangle| = p^{\nu_j}, \\ \nu_1 &\geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_t > \nu_{t+1} = \dots = \nu_s. \end{aligned}$$

Множество  $pA = \{px | x \in A\}$  является в  $A$  подгруппой, не зависящей от какого-либо разложения. С другой стороны, если

$$i_1 a_1 + \dots + i_q a_q + \dots + i_r a_r = x = j_1 b_1 + \dots + j_t b_t + \dots + j_s b_s$$

то с учётом (3) и (4) имеем

$$i_1 (pa_1) + \dots + i_q (pa_q) = x = j_1 (pb_1) + \dots + j_t (pb_t)$$

Стало быть,

$$\langle \tilde{a}_1 \rangle + \dots + \langle \tilde{a}_q \rangle = pA = \langle \tilde{b}_1 \rangle + \dots + \langle \tilde{b}_t \rangle,$$

где  $\tilde{a}_i = pa_i, \tilde{b}_j = pb_j$  - элементы порядков  $p^{\mu_i-1}$  и  $p^{\nu_j-1}$  соответственно. Так как  $|pA| < |A|$ , то по предположению индукции  $q = t$  и  $\mu_1 - 1 = \nu_1 - 1, \dots, \mu_q - 1 = \nu_q - 1$ , откуда  $\mu_1 = \nu_1, \dots, \mu_q = \nu_q$ . Замечая ещё, что

$$|A_{q+1} + \dots + A_r| = p^{r-q}, \quad |B_{t+1} + \dots + B_s| = p^{s-t}, \quad q = t$$

мы получаем

$$p^{\mu_1 + \dots + \mu_q} p^{r-q} = A = p^{\mu_1 + \dots + \mu_q} p^{s-q}$$

Значит,  $s = r$ , и все утверждения теоремы доказаны.

5

**N)** Основная теорема о конечных абелевых группах. Для разнообразия перейдём к мультипликативной записи, заменяя суммы на произведения, слагаемые на множители и т.д. Опираясь на теоремы 7-9, мы непосредственно приходим к следующему основному утверждению.

**Теорема 10.** Всякая конечная абелева группа  $A$  является прямым произведением примарных циклических подгрупп. Любые два таких разложения имеют по одинаковому числу множителей каждого порядка.

Заемствуя терминологию из теории векторных пространств, мы скажем, что элементы  $a_1, \dots, a_r$  порядков  $d_1, \dots, d_r$  составляют  $a$ -зис абелевой группы  $A$ , если каждый элемент  $x \in A$  единственным образом записывается в виде

$$x = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}, \quad 0 \leq i_k < d_k, \quad k = 1, \dots, r$$

Разумеется, в таком случае

$$A = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_r \rangle, \quad |A| = d_1 d_2 \dots d_r$$

и теорема 10 эквивалентна утверждению о существовании во всякой конечной абелевой группе  $A$  базиса, элементы которого примарны (т.е. их порядки  $d_i$  являются степенями простых  $p$ , делящих  $|A|$ ), причём система  $\{d_1, d_2, \dots, d_r\}$  не зависит от выбора базиса. По этой причине числа  $d_1, \dots, d_r$  называют инвариантными или элементарными делителями группы  $A$ . Иногда говорят ещё, что  $\{d_1, \dots, d_r\}$  — тип конечной абелевой группы  $A$ .

Выпишем все инварианты, расположив их в строки, которые отвечают различным простым делителям порядка  $|A|$ :

$$\begin{aligned} p_1^{m_{11}}, p_1^{m_{12}}, \dots, p_1^{m_{1k}}; & \quad m_{11} \leq m_{12} \leq \dots \leq m_{1k}; \\ p_2^{m_{21}}, p_2^{m_{22}}, \dots, p_2^{m_{2k}}; & \quad m_{21} \leq m_{22} \leq \dots \leq m_{2k}; \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Можно считать, что все строки из инвариантов имеют одинаковую длину  $k$ , если дополнить некоторые из них единицами.

Целые числа

$$m_i = p_1^{m_{1i}} p_2^{m_{2i}} \dots p_s^{m_{si}}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

называются инвариантными факторами (или множителями) абелевой группы  $A$ . По построению

$$|A| = m_1 m_2 \dots m_k, \quad m_{i-1} | m_i; \quad 1 < i \leq k$$

Достаточно вернуться к формулировке следствия 2 из теоремы 2, чтобы убедиться: инвариантные факторы нам уже встречались. От разложения (5), переписанного в виде

$$A = (\langle a_{11} \rangle \times \dots \times \langle a_{s1} \rangle) \times \dots \times (\langle a_{1k} \rangle \times \dots \times \langle a_{sk} \rangle),$$

мы перейдём теперь к разложению

$$A = \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \dots \times \langle u_k \rangle$$

с прямыми циклическими множителями порядков  $m_1, m_2, \dots, m_k$ . Для этого достаточно положить

$$u_i = a_{1i}a_{2i}\dots a_{si}, \quad 1 \leq i \leq k$$

и сослаться на предложение 2 или на импликацию (1).

Для примарной группы  $A$  прямые разложения (5) и (6), очевидно, совпадают, но в общем случае разложение (6) более экономно по сравнению с (5) ( $k \leq r \leq sk$ ), причём в (6) выделен элемент  $u_k$  наивысшего порядка  $m := m_k$ ; порядки всех других элементов группы  $A$  делят  $m$ . Целое число  $m$  называют ещё показателем (или экспонентой) группы  $A$ . Абелева группа  $A$  является циклической тогда и только тогда, когда её показатель совпадает с порядком  $|A|$ .

Последняя фраза играет ключевую роль в доказательстве следующего полезного утверждения о полях.

**Теорема 11.** Пусть  $F$  - произвольное поле и  $A$  - конечная подгруппа мультипликативной группы  $F^*$ . Тогда  $A$  циклическа.

**Доказательство.** Если бы группа  $A$  не была циклической, то в соответствии с вышесказанным было бы  $m < |A|$ , где  $m$  - её показатель:  $a^m = 1 \quad \forall a \in A$ . В таком случае многочлен  $X^m - 1$  имел бы в поле  $F$  более  $m$  корней, а это невозможно. Значит, группа  $A$  циклическая.

Остаётся добавить, что вопрос о существовании абелевой группы  $A$  с заданными инвариантными факторами  $m_1, m_2, \dots, m_k$  не возникает: как и ранее, достаточно рассмотреть (в аддитивной записи) прямую сумму циклических групп  $Z_{m_1}, \dots, Z_{m_k}$ . Число попарно неизоморфных абелевых групп данного порядка  $N$  может быть оценено в довольно явной форме. Так, число неизоморфных абелевых групп порядка  $N = p^n$  ( $p$  простое) равно числу  $p(n)$  упорядоченных разбиений

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_l, \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l, \quad 1 \leq l \leq n$$

Целочисленная функция  $p(n)$  встречалась нам при описании классов сопряжённых элементов в симметрической группе  $S_n$  (см. упр. 4 из 3 гл.1). Абелева группа порядка  $p^n$  и показателя  $p$  (т.е. с инвариантами  $p, \dots, p$ ) обычно называется элементарной абелевой группой. Вновь отдав предпочтение аддитивной записи, мы замечаем, что абелева группа  $A$  с  $pA = 0$  ( $p$  - простое число) является векторным пространством над конечным полем  $\mathbb{F}_p$  из  $p$  элементов. Действительно, если отождествить элементы из  $\mathbb{F}_p$  с классами вычетов  $\bar{k}$  по модулю  $p$  ( $\mathbb{F}_p = Z_p$ ) и положить  $\bar{k}a := ka, a \in A$ , то мы придём к заданию действия  $\mathbb{F}_p$  на  $A$ , превращающее  $A$  в векторное пространство над  $\mathbb{F}_p$ . Это действие определено правильно, потому что из  $\bar{k} = \bar{k}'$  следует  $(k - k')a = l(pa) = 0$ . Разложению  $A$  в прямую сумму циклических подпространств соответствует разложение векторного пространства в прямую сумму одномерных подпространств [ВА II, гл.1, теорема о базисе]. Итак,

$$A \cong Z_p^n = Z_p \oplus \dots \oplus Z_p$$

Насколько велик произвол в выборе одномерных базисных подпространств даже при  $n = 2$ , видно из примера в гл. 1:  $Z_p^2$  допускает  $p(p+1)$  различных разложений.

При  $m \equiv 4$ . В качестве примера перечислим все абелевы группы порядков 16 и 36:

$$|A| = 16 = 2^4, \quad p(4) = 5$$

$$Z_{16}, \quad Z_8 \oplus Z_2, \quad Z_4 \oplus Z_4, \quad Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2, \quad Z_2^4 = Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2,$$

| $ A  = 36 = 2^2 \cdot 3^2$                                  | Элементарные делители | Инвариантные факторы |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| $Z_4 \oplus Z_9 \cong Z_{36}$                               | 4,9                   | 36                   |
| $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_9 \cong Z_2 \oplus Z_{18}$         | 2, 2, 9               | 18, 2                |
| $Z_4 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \cong Z_3 \oplus Z_{12}$         | 4, 3, 3               | 12, 3                |
| $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \cong Z_6 \oplus Z_6$ | 2, 2, 3, 3            | 6, 6                 |

Пр и мер 5. Запишем группу  $Z_{72} \oplus Z_{84}$  в терминах инвариантных факторов. Сначала каждое из циклических слагаемых мы выразим через циклические примарные компоненты:

$$Z_{72} = Z_8 \oplus Z_9, \quad Z_{84} = Z_4 \oplus Z_3 \oplus Z_7$$

Далее, соберём все примарные компоненты, отвечающие заданному  $p$ :

$$Z_{72} \oplus Z_{84} = (Z_4 \oplus Z_8) \oplus (Z_3 \oplus Z_9) \oplus Z_7$$

(прямая сумма силовских  $p$ -подгрупп). Теперь осталось выделить по одному циклическому слагаемому минимального порядка в каждой примарной компоненте и повторить этот процесс с оставшимися слагаемыми:

$$Z_{72} \oplus Z_{84} = (Z_4 \oplus Z_3) \oplus (Z_8 \oplus Z_9 \oplus Z_7) = Z_{12} \oplus Z_{504}$$

Если проделать то же самое с группой  $Z_{36} \oplus Z_{168}$ , то получится аналогичный результат. Значит,

$$Z_{72} \oplus Z_{84} = Z_{36} \oplus Z_{168}$$

(строго говоря, всюду следовало бы ставить  $\cong$  вместо знака равенства). В частности, отметим, что показатели обеих групп равны 504.

## УПРАЖНЕНИЯ

**N)** Показать, что в конечной абелевой группе  $A$  для любого  $d \mid |A|$  существует по крайней мере одна подгруппа порядка  $d$  (обращение теоремы Лагранжа).

**N)** Показать, что при надлежащем упорядочении инварианты любой подгруппы являются делителями инвариантов абелевой группы.

**N)** Если  $A \oplus A \cong B \oplus B$ , где  $A$  и  $B$  - конечные абелевы группы, то  $A \cong B$ .

**N)** Если  $A, B, C$  - конечные абелевы группы и  $A \oplus C \cong B \oplus C$ , то  $A \cong B$ .

**N)** Всякая конечная абелева группа порядка  $n$ , не делящегося на квадрат целого числа  $> 1$ , является циклической.

**N)** Перечислить все неизоморфные абелевы группы порядка 72.

**N)** Изоморфны ли группы  $Z_{12} \oplus Z_{72}$  и  $Z_{18} \oplus Z_{48}$ ?

**N)** Сформулировать и доказать теорему о конечно порождённых абелевых группах на языке целочисленных матриц (матриц с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ ). Использовать надлежащим образом элементарные преобразования над такими матрицами.

**N)** Доказать, что индекс подгруппы  $A \subseteq F_n^{ab}$  свободной абелевой группы  $F_n^{ab}$  ранга  $n$  конечен тогда и только тогда, когда  $\text{rank } A = n$ .



## 2.2.4 Linear Lie groups

### Теория

**Н) Определения и примеры.** Формально говоря, группой Ли  $G$  называется дифференцируемое ( $C^2$  или даже класса  $C^\infty$ , гладкое) многообразие, наделённое структурой группы с гладкими отображениями - умножением  $(x, y) \mapsto xy$  и взятием обратного элемента  $x \mapsto x^{-1}$ .

От гомоморфизма  $\Phi: G \rightarrow H$  группы Ли  $G$  в группу Ли  $H$  также требуется гладкость отображения одного многообразия в другое. То же самое относится к более частным понятиям изоморфизма групп Ли и автоморфизма группы Ли. Чаще всего имеют дело с вещественными или комплексными многообразиями и соответственно с вещественными или комплексными группами Ли.

Задание структуры многообразия предполагает, в частности, наличие топологии, поэтому группы Ли являются топологическими. Это означает, что произведение  $gh$  и взятие обратного  $g^{-1}$  являются в данной топологии непрерывными операциями. Считаются известными понятия связности, локальной связности, компактности топологического пространства. В частности, группа называется компактной, если для соответствующего топологического пространства справедлива теорема Бореля-Лебега.

Строгое определение группы Ли, объединяющее понятия обычной группы, топологического пространства и дифференцируемого многообразия, довольно сложно. К тому же определение подгруппы Ли  $H \subset G$  предполагает, что  $H$  - подмногообразие (новое понятие), задаваемое в окрестности нейтрального элемента (единицы  $e \in H$ ) локальными координатами  $x_1, \dots, x_n$  на  $G$ , которые удовлетворяют системе уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

Считается, что

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_e = m$$

Это условие на систему (1), перенесённое левыми сдвигами в любую точку  $h \in H$ , снабжает  $H$  структурой  $(n - m)$ -мерного многообразия. Заметим ещё, что группу Ли  $G$  часто рассматривают локально, в надлежащей окрестности единицы  $e \in G$ . Входить в детали было бы рискованно. Так как нас интересуют классические линейные группы, то с самого начала можно считать их группами Ли, закрыв глаза на многие общие определения.

**Пример 1.**  $(\mathbb{R}^n, +)$  - группа Ли.

**Пример 2.** Пусть  $V$  - конечномерное векторное пространство над  $\mathfrak{K}$  ( $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ ). Известная нам группа  $\text{Aut } V$  автоморфизмов пространства  $V$  есть открытое подмножество в  $\text{Hom}(V, V)$ , заданное условием  $\det \neq 0$ . Стало быть,  $\text{Aut } V$  - гладкое многообразие. Естественная композиция автоморфизмов - гладкое отображение: если  $A = (a_{ij}), B = (b_{jk})$ , то  $AB = C = (c_{ik})$ , где  $c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$ . Аналогично, отображение  $x \mapsto x^{-1}$  гладко: достаточно вспомнить о формулах Крамера. Итак,  $\text{Aut } V$  - группа Ли размерности  $n^2$ . Её матричную реализацию над  $\mathfrak{K}$  мы условились обозначать  $\text{GL}(n, \mathfrak{K})$  или  $\text{GL}_n(\mathfrak{K})$ .

**Пример 3.** Для группы  $\text{SL}(n, \mathfrak{K})$  система (1) сводится к одному уравнению

$$\det X = 1, \quad X = (x_{ij}) \in \text{GL}(n, \mathfrak{K})$$

с явно выполненным условием  $\partial(\det X) / \partial x_{11}|_{X=E} = 1$ . Поэтому  $\text{SL}(n, \mathfrak{K})$  является  $(n^2 - 1)$ -мерной группой Ли.

**Пример 4.** Из [BA II, гл. 3] известно, что ортогональная группа  $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$  задаётся билинейными соотношениями

$$f_{ij}(X) = \sum_k x_{ik}x_{jk} = \delta_{ij}$$

в количестве  $m = n(n+1)/2$  штук. Легко проверяется, что минор порядка  $m$  матрицы  $\|\partial f_{ij}/\partial x_{st}\|$ , отвечающий переменным  $x_{st}$ ,  $s \leq t$ , в точке  $E$  отличен от нуля. Это значит, что  $O(n)$  - группа Ли размерности  $n^2 - m = n(n-1)/2$ .

Такую же размерность имеет подгруппа  $SO(n)$ , в окрестности единицы совпадающая с  $O(n)$ . Точнее, как топологическое пространство  $O(n)$  распадается на две связные компоненты: одна содержит  $E$ , другая  $-E$ . Очевидно,  $\det X = 1$  для всякой матрицы  $X \in O(n)$ , близкой к  $E$ .

**Пример 5.** Определение унитарной группы  $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$  в [BA II, гл. 3] аналогично определению группы  $O(n)$ , если на  $GL(n, \mathbb{C})$  смотреть как на вещественную группу, зависящую от  $2n^2$  параметров. Разделение вещественных и мнимых частей  $n(n+1)/2$  полуторалинейных соотношений приведёт к  $2n(n-1)/2 + n = n^2$  гладким функциям. Ранг соответствующей матрицы в точке  $X = E$  также равен  $n^2$ . Поэтому  $U(n)$  - группа Ли размерности  $2n^2 - n^2 = n^2$ .  $n^2 - 1$ .

Так как  $\det X = e^{i\varphi}$ ,  $X \in U(n)$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , то  $SU(n)$  - группа Ли размерности

### Кривые в матричных группах

В топологических линейных пространствах имеет смысл говорить о кривых, касательных векторах и т.п. вещах. Так, в анализе и в геометрии под кривой в конечномерном вещественном векторном пространстве  $V$  понимают непрерывное отображение (функцию)  $\Gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow V$ , где  $(\alpha, \beta)$  - интервал в  $\mathbb{R}$ . Скажем, окружность  $S^1$  единичного радиуса с центром в начале прямоугольной системы координат суть кривая  $\varphi \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Разумеется,  $V$  чаще всего снабжается структурой аффинного или евклидова пространства. Пусть  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ . Зададим кривую в параметрической форме  $\Gamma_t = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ , где  $\gamma_i(t)$  - вещественнозначная функция при любом  $i = 1, \dots, n$ . Кривая  $\Gamma$  дифференцируема в точке  $t \in (\alpha, \beta)$ , если дифференцируемы все  $\gamma_i(t)$ , т.е. существуют производные  $\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)$  и

$$\Gamma'_t := \frac{d\Gamma_t}{dt} = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

**N)**однозначно определённый вектор в  $V$ , называемый касательным вектором к в точке  $\Gamma_t$  или вектором скорости в момент времени  $t$ . В дальнейшем будем для простоты говорить о гладкой кривой  $\Gamma_t$ , отождествляя функцию с её значением.

Пусть теперь  $V = M_n(\mathbb{R})$  или  $M_n(\mathbb{C})$ , рассматриваемые как векторные пространства размерностей  $n^2$  и  $2n^2$  соответственно. Будем считать, что кривая  $\Gamma_t$  на пространстве  $M_n(\mathfrak{K})$  ( $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ ) на самом деле целиком лежит в матричной группе  $G \subset M_n(\mathfrak{K})$ , т.е.  $\Gamma_t \in G \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$ . Тогда естественно говорить о кривой в группе или на группе  $G$ . При любом  $t = t_0$  надо чётко представлять себе, что  $A_{t_0}$  есть точка кривой в  $n^2$ -мерном пространстве, реализованная в виде матрицы. Если  $A_t = (a_{ik}(t))$ ,  $B_t = (b_{kj}(t)) : (\alpha, \beta) \rightarrow G$  - две параметрические кривые в группе  $G$ , то можно определить их произведение  $C_t = A_t B_t$ , полагая

$$C_t = (c_{ij}(t)), \quad c_{ij}(t) := \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)b_{kj}(t), \quad t \in (\alpha, \beta)$$

Наша ближайшая задача — рассмотреть в классических матричных группах множество всех дифференцируемых кривых, проходящих через единичный элемент  $E$ , и множество всех касательных векторов к кривым в этой избранной точке.  $M_n(\mathbb{C})$  трактуется как вещественное пространство размерности  $2n^2$ .

Т е о р е м а 1. Пусть  $G \subset GL(n, \mathfrak{K})$  - матричная группа. Справедливы следующие утверждения.

i) Если  $A_t, B_t: (\alpha, \beta) \rightarrow G$  — две дифференцируемые кривые в  $G$ ,

то их произведение  $C_t = A_t B_t$  также дифференцируемо

$$\frac{dC_t}{dt} = (A_t B_t)' = A_t' B_t + A_t B_t'$$

ii) Пусть  $T = L(G)$  - множество всех касательных векторов  $A_0'$  к кривым  $A_t$  в  $G$  (в малой окрестности параметра  $t = 0$ ), для которых  $A_0 = E$ . Тогда  $L(G)$  - векторное подпространство в  $M_n(\mathfrak{K})$ .

Д о к а з а т е л с т в о. Утверждение i) получается прямым дифференцированием определяющего соотношения (2).

ii) Пусть  $A_0', B_0' \in T$ . Тогда  $(AB)_0 = A_0 B_0 = EE = E$  и согласно i) в  $T$  содержится вектор

$$(AB)_0' = A_0' B_0 + A_0 B_0' = A_0' E + E B_0' = A_0' + B_0'.$$

Следовательно,  $T$  - аддитивная группа.

Если теперь  $\lambda$  - произвольный скаляр и  $A_0' \in T$ , то рассмотрим кривую  $B_t = A_{\lambda t}$  в окрестности  $t = 0$ . Очевидно, что  $B_0 = A_0 = E$ , причём  $B_t$  дифференцируема и  $B_0' = \lambda A_0'$ . Так как по условию  $B_0' \in T$ , то и  $\lambda A_0' \in T$ .

О п р е д е л е н и е. Векторное пространство  $T = L(G)$  называется касательным пространством к группе  $G$  в точке  $E$ .

П р и м е р 6. Пусть  $G = GL(n, \mathbb{R})$ . Так как  $\det : G \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывная функция и  $\det E = 1$ , то можно указать столь малое  $\varepsilon > 0$  и шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в  $E$ , что для каждой матрицы  $A$  из этого шара будет выполняться неравенство  $\det A \neq 0$ , т.е.  $A \in G$ . Теперь для любой матрицы  $B \in M_n(\mathbb{R})$  (т.е. для любого вектора из вещественного векторного пространства размерности  $n^2$ ) определим кривую  $B_t$  в  $M_n(\mathbb{R})$  равенством

$$B_t = tB + E$$

Мы видим, что  $B_0 = E, B_0' = B$ , а при малых  $t$  матрицы  $B_t$  лежат в  $G$ . Стало быть, касательное пространство  $L(GL(n, \mathbb{R}))$  совпадает с  $M_n(\mathbb{R})$  и имеет размерность  $n^2$ . Аналогично показывается, что касательное пространство  $L(GL(n, \mathbb{C}))$  имеет над  $\mathbb{R}$  размерность  $2n^2$ .

П р и м е р 7. Имея дело с группой  $SL(n, \mathbb{R})$ , мы должны выбирать в  $\varepsilon$ -шаре с центром в  $E$  матрицы  $A$  с  $\det A = 1$ , а для любой матрицы  $B \in M_n(\mathbb{R})$  с нулевым следом и малого параметра  $t$  определять кривую  $B_t$ , используя экспоненту матрицы [BA II, гл. 7, 1]:

$$B_t = \exp(tB)$$

Тогда  $B_0 = E, B_t' = B \exp(tB), B_0' = B, \det B_t = \exp(\text{tr}(tB)) = 1$ . Это и означает, что касательное пространство  $L(SL(n, \mathbb{R}))$  имеет размерность  $n^2 - 1$ .

П р и м е р 8. Из примера 4 видно, что касательные пространства к многообразиям (группам Ли)  $O(n)$  и  $SO(n)$  в точке  $E$  совпадают. Пусть теперь  $B_t$  произвольная кривая в  $SO(n)$  с касательным вектором  $B_0'$  в  $E$ . Так как по определению  $B_s^t B_s = E$ , то

дифференцирование приводит к соотношению  $B_0 + {}^t B_0 = 0$ , показывающему, что любой касательный вектор кососимметричен.

С другой стороны, если  $A$  - любая кососимметричная матрица, то кривая  $A_s = \exp(sA)$ , выходящая из  $E$  ( $A_0 = E$ ), имеет в  $E$  касательный вектор  $A'_0 = A$ . Каждая точка кривой  $A_s$  - ортогональная матрица с определителем 1 [ВА II, гл. 7]. Таким образом,  $L(\mathrm{SO}(n)) = \mathfrak{so}(n)$  - пространство размерности  $n(n-1)/2$ , состоящее из всех кососимметричных матриц.

**Пример 9.** В случае унитарной группы  $U(n)$ , заменяя  $\mathfrak{so}(n)$  на пространство  $\mathfrak{su}(n)$  косоэрмитовых матриц (над  $\mathbb{R}$ ) и обращаясь к соображениям, использованным в примере 8, мы убеждаемся в том, что  $L(U(n))$  имеет размерность  $n^2$ .

Размерность линейной группы Ли определялась ранее по числу независимых параметров, задающих базисное дифференцируемое многообразие. Теперь мы видим, что справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $G$  - одна из классических линейных групп  $\pi \in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{K}), \mathrm{SL}(n, \mathfrak{K}), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ ;  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ ,  $L(G)$  - её касательное пространство в  $E$ .

Тогда  $\dim G = \dim L(G)$ .

Доказательство получается сопоставлением примеров 2 – 5, 6-9.

К указанным в теореме группам следовало бы добавить симплектическую группу, но ради простоты изложения мы условились её опускать.

### Дифференциал гомоморфизма

Всякому гомоморфизму  $\Phi: G \rightarrow H$  матричных групп  $G, H$  и всякой гладкой кривой  $A_t$  в группе  $G$  отвечает кривая  $(\Phi \circ \Gamma)_t = \Phi(\Gamma_t)$  в группе  $H$ . Гомоморфизм  $\Phi$  естественно называть гладким, если все кривые  $\Phi \circ \Gamma_t$  гладкие.

**Определение.** Гладкому гомоморфизму  $\Phi: G \rightarrow H$  матричных групп Ли и касательному вектору  $\Gamma'_0$  к  $G$  в точке  $E$  можно поставить в соответствие касательный вектор  $d\Phi(\Gamma'_0)$  к  $H$  в  $E$ , полагая

$$d\Phi(\Gamma'_0) = (\Phi \circ \Gamma)'_0$$

Отображение  $d\Phi: L(G) \rightarrow L(H)$ , заданное равенством (3), называется дифференциалом или касательным отображением гомоморфизма  $\Phi$ .

**Теорема 3.** В матричных группах справедливы следующие утверждения.

i) Дифференциал гомоморфизма групп является линейным отображением касательных пространств.

ii)  $\Phi: G \rightarrow H$ ,  $\Psi: H \rightarrow K$  - гладкие гомоморфизмы, то

$$d(\Psi\Phi) = d\Psi \cdot d\Phi$$

iii) Гладкому изоморфизму  $\Phi: G \rightarrow H$  отвечает линейный изоморфизм  $d\Phi: L(G) \rightarrow L(H)$ , причём  $\dim G = \dim H$ .

Доказательство. Пусть  $A'_0, B'_0 \in L(G)$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} d\Phi(\mu A'_0 + \nu B'_0) &= (\Phi \circ (\mu A + \nu B))'_0 = \\ &= (\mu(\Phi \circ A) + \nu(\Phi \circ B))'_0 = \mu(\Phi \circ A)'_0 + \nu(\Phi \circ B)'_0 = \\ &= \mu d\Phi(A'_0) + \nu d\Phi(B'_0). \end{aligned}$$

Это доказывает утверждение i).

Что касается ii), то заметим сначала, что композиция  $\Psi\Phi$  является гладким гомоморфизмом, поэтому выражение  $d(\Psi\Phi)$  имеет смысл. Далее,

$$d(\Psi\Phi)(A'_0) = ((\Psi\Phi) \circ A)'_0 = d\Psi(\Phi \circ A)'_0 = d\Psi \cdot d\Phi(A'_0)$$

Наконец, изоморфность  $d\Phi$  вытекает из следующих соображений. Так как  $\Phi^{-1}\Phi$  - тождественное отображение, то в соответствии с ii) имеем тождественное отображение  $d\Phi^{-1} \cdot d\Phi : L(G) \rightarrow L(G)$ , и поэтому  $d\Phi$  - инъективное отображение, а  $d\Phi^{-1}$  - сюръективное. Но и  $\Phi\Phi^{-1}$  — тождественное отображение, поэтому  $d\Phi^{-1}$  инъективно, а  $d\Phi$  сюръективно. Это даёт всё, что нужно.

Отсылая к [34] за деталями, приведём без доказательства следующую содержательную теорему о группах Ли.

Теорема 4. Гомоморфизм связной группы Ли в произвольную группу Ли однозначно определяется своим дифференциалом.

### Алгебра Ли группы Ли

Что такое алгебра Ли  $\mathcal{L}$ , нам известно из [ВА II]. Так как произведение элементов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$  принято обозначать  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ , то для коммутатора элементов  $g, h \in G$  в группе Ли используем обычное обозначение  $(g, h) = ghg^{-1}h^{-1}$ . Напомним, что коммутирование в алгебре Ли линейно по каждому аргументу, кососимметрично и удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] + [[\mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{x}] + [[\mathbf{z}, \mathbf{x}], \mathbf{y}] = 0$$

Из примеров 6-9 и из [ВА II, гл. 7] видно, что касательные пространства классических линейных групп Ли наделены структурой алгебры Ли. Однако поучительно посмотреть на связь между операциями умножения в группе и коммутированием в соответствующей алгебре Ли, причём в более общей ситуации любых связных групп Ли.

Итак, пусть  $G$  - связная группа Ли с нейтральным элементом  $e$ ,  $L(G)$  - её касательное пространство в  $e$ . Коммутатор  $[g'_0, h'_0]$  касательных векторов  $g'_0, h'_0 \in L(G)$  к кривым  $g_t, h_s, 0 \leq s, t \leq 1$ , на группе  $G$ , выходящим из  $e : g_0 = e = h_0$ , определим соотношением

$$[g'_0, h'_0] := \left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} (g_t, h_s) \right|_{t=s=0}$$

Положив

$$f(t, s) = (g_t, h_s),$$

мы видим, что  $f(t, 0) = e$  и

$$q'_t = \left. \frac{\partial}{\partial s} f(t, s) \right|_{s=0} \in L(G)$$

суть касательный вектор к кривой  $q : s \rightarrow f(t, s)$ , а

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} f(t, s) \right|_{t=s=0}$$

Н)касательный вектор к кривой  $q'_t$  в пространстве  $L(G)$ . Коммутатор  $(\Gamma_t, \Delta_s)$  элементов  $n$ -мерной группы  $G$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(y_1, \dots, y_n)$  выражается через дифференцируемые функции  $f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), 1 \leq i \leq n$ . Вид функций  $f_i$ , целиком определённый группой, не зависит от конкретных элементов, поэтому для коммутатора  $[g'_0, h'_0]$  получаем следующее явное выражение:

$$[g'_0, h'_0]_i = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial y_k} \bigg|_{(e,e)} (g'_0)_j (h'_0)_k$$

Из (6) видно, что частная производная в (5) не зависит от выбора координат, а коммутатор линеен по каждому аргументу.

Если воспользоваться легко проверяемым соотношением  $(a, b) = (b, a)^{-1}$ , то можно убедиться, что коммутатор (5) кососимметричен. Тожество (4) доказать несколько труднее, но если перейти к линейным группам Ли, не обязательно классическим, то ситуация упрощается. Именно, пусть  $L(G) \subset M_n(\mathfrak{K})$ ;  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ . Для любых двух матриц  $X, Y \in L(G)$ , являющихся касательными векторами к кривым  $\exp(tX), \exp(sY) \in G$ , прямые вычисления со степенными рядами показывают, что с точностью до членов степени  $\geq 3$

$$\exp(tX) \exp(sY) = E + tX + sY + tsXY + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{s^2}{2}Y^2 + \dots \in G$$

и, значит,

$$\begin{aligned} (\exp(tX), \exp(sY)) &= \\ &= \left( E + tX + sY + tsXY + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{s^2}{2}Y^2 + \dots \right) \times \\ &\times \left( E - tX - sY + tsXY + \frac{t^2}{2}X^2 + \frac{s^2}{2}Y^2 + \dots \right) = \\ &= E + ts(XY - YX) + t^2sU(X, Y, t, s) + ts^2V(X, Y, t, s), \end{aligned}$$

где  $\deg_{X,Y} U(X, Y, t, s) \geq 3$ ,  $\deg_{X,Y} V(X, Y, t, s) \geq 3$ . Теперь по формуле (5) находим

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left( E + ts(XY - YX) + t^2sU(X, Y, t, s) + ts^2V(X, Y, t, s) \right) \bigg|_{t=s=0} = \\ &= XY - YX \end{aligned}$$

т.е. для коммутатора  $[X, Y]$ , определённого абстрактным образом, получается естественное выражение  $[X, Y] = XY - YX$ , которым мы пользовались ранее. Тожество Якоби при таком коммутировании очевидным образом выполняется. Тем самым получена Теорема 5. Касательная алгебра всякой линейной группы Ли снабжена структурой алгебры Ли с операцией коммутирования  $[X, Y] = XY - YX$ .

## Логарифм

Экспоненциальному отображению  $\exp : L(G) \rightarrow G$  в случае матричных групп отвечает антипод - логарифмическое отображение

$$\log X = (X - E) - \frac{(X - E)^2}{2} + \frac{(X - E)^3}{3} - \frac{(X - E)^4}{4} + \dots$$

определённое для любой вещественной  $n \times n$ -матрицы  $X$ , достаточно близкой к  $E$ . Чтобы убедиться в этом, положим  $Y := X - E = (y_{ij})$ , считая  $|y_{ij}| < \varepsilon$ . Простая индукция по  $k$  приводит к оценке  $\left| (Y^k)_{ij} \right| \leq n^{k-1} \varepsilon^k$ , и поэтому для отношения модулей двух соседних членов в (7) находим

$$\frac{\left| (Y^{k+1})_{ij} \right|}{\left| (Y^k)_{ij} \right|} \frac{k}{k+1} \frac{n^k \varepsilon^{k+1}}{n^{k-1} \varepsilon^k} = \frac{k}{k+1} n \varepsilon$$

Таким образом, ряд (7) сходится для любой матрицы  $X$  с  $|(X - E)_{ij}| < < 1/n$ .

Теорема 6. Пусть  $U_E$  - окрестность  $E$  в  $M_n(\mathbb{R})$ , где определено отображение  $\log$ , а  $U_0$  - окрестность нуля, в которой  $\exp(U_0) \subset U_E$ . Тогда:

- i)  $\exp \log X = X, X \in U_E; \log \exp Y = Y, Y \in U_0$ .
- ii) если  $A, B$  коммутируют и близки к  $E$ , то

$$\log(AB) = \log A + \log B$$

Докладывая с то i) ничем не отличается от числового случая. Что касается ii), то  $\exp(\log(AB)) = AB = (\exp(\log A))(\exp(\log B)) = \exp(\log A + \log B)$ . Осталось воспользоваться биективностью  $\exp$  вблизи 0.

Отдельные замечания.

1) Назовём однопараметрической подгруппой линейной группы Ли  $G$  гладкий гомоморфизм  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow G$ . Так как  $\sigma(t) = (\sigma(t/n))^n$ , то  $\sigma$  определяется своими значениями вблизи  $0 \in \mathbb{R}$ . Пример в [ВА II, гл. 7], однопараметрической группы  $\sigma : t \mapsto \exp(tA)$ , определённой квадратной матрицей  $A$ , является в некотором смысле общим, поскольку локально  $G$  порождается кривыми  $\exp(tA), A \in L(G)$ .

2) Под линейным представлением группы Ли  $G$  понимается дифференцируемый гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ , где  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Коэффициенты матриц  $\Phi_g$  являются по определению дифференцируемыми функциями от  $g \in G$ . Наличие вещественной или комплексной структуры в  $G$  и  $V$  проявляется в нескольких вариантах (см., например, [1]). Линейные представления компактных групп Ли фактически определяются представлениями соответствующих алгебр Ли. Хорошей иллюстрацией служит описание неприводимых представлений группы  $\text{SU}(2)$  в гл. 3 и её алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$  в гл. 4.

## 2.3 Fundamentals of group theory by Lang

(пока хз, о чем раздел этот, потому что итак это есть в части про группы)

### 2.3.1 Free groups

(see Lang)

### 2.3.2 Normal subgroups

(see Lang)

### 2.3.3 Group action on a set

(see Lang)

### 2.3.4 Sylow subgroups

(see Lang)

## 2.3.5 Categories and functors

(see Lang)

## 2.3.6 Free groups

(see Lang)

## 2.3.7 Direct sums and free abelian groups

(see Lang)

## 2.3.8 Finitely generated abelian groups

(see Lang)

## 2.3.9 Dual group

(see Lang)

## 2.4 Elements of representation theory

### Теория

Точным определением теории линейных представлений групп мы предпошлим две близкие по духу задачи.

Задана 1. В  $(m+1)$ -мерном пространстве  $V_m$  вещественных однородных многочленов

$$f(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \dots + a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m$$

(или, скорее, полиномиальных функций  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ ) степени  $m$  выделяется множество решений двумерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

в частных производных (см. [ВА I, упр. 9 из 1 гл. 6]). Оператор Лапласа  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  линеен:

$$\Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Поэтому решения уравнения (\*) образуют некоторое подпространство  $H_m$  пространства  $V_m$ . Непосредственно проверяется, что

$$\Delta f = \sum_{k=0}^{m-2} [(m-k)(m-k-1)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}] x^{m-k-2} y^k$$

Следовательно,

$$\Delta f = 0 \iff$$

$$\iff (m-k)(m-k-1)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0, \quad 0 \leq k \leq m-2,$$

и все коэффициенты  $a_k$  выражаются через два из них, скажем, через  $a_0$  и  $a_1$ . Таким образом,  $\dim H_m \leq 2$ .



Но два линейно независимых решения можно указать сразу. Действительно, распространив по линейности действие оператора  $\Delta$  на многочлены с комплексными коэффициентами, будем иметь

$$\Delta(x + iy)^m = m(m-1)(x + iy)^{m-2} + imi(m-1)(x + iy)^{m-2} = 0$$

$$i^2 = -1$$

Выделяя вещественную и мнимую части, получим

$$z_m(x, y) = (x + iy)^m = u_m(x, y) + iv_m(x, y)$$

откуда

$$\Delta u_m + i\Delta v_m = \Delta z_m = 0 \implies \Delta u_m = 0, \Delta v_m = 0$$

Итак,

$$H_m = \langle u_m(x, y), v_m(x, y) \rangle_{\mathbb{R}}$$

Интерпретируя теперь  $x, y$  как координаты вектора в евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  с фиксированной прямоугольной системой координат, посмотрим, что произойдёт при ортогональной замене координат повороте плоскости  $\mathbb{R}^2$  вокруг начальной точки на произвольный угол  $\theta$ :

$$x' = \Phi_\theta(x) = x \cos \theta - y \sin \theta,$$

$$y' = \Phi_\theta(y) = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Известное из анализа (и легко проверяемое для многочленов) правило дифференцирования сложных функций даёт

откуда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \cdot \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \cdot \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Это значит, что уравнение (\*) остаётся инвариантным при ортогональной замене переменных, или, как мы ещё могли бы сказать, при действии группы  $SO(2) = \{\Phi_\theta\}$ . В частности, многочлены  $u_m(x', y')$ ,  $v_m(x', y')$  будут решениями уравнения (\*) и как таковые будут линейно выражаться через  $u_m(x, y), v_m(x, y)$ . Таким образом, группа  $SO(2)$  действует на пространстве решений уравнения Лапласа. При этом говорят о двумерном вещественном линейном представлении

$$\Phi^{(m)} : \Phi_\theta \mapsto \Phi^{(m)}(\theta)$$

группы  $SO(2)$ .

Обратившись опять к комплексным многочленам, мы замечаем, что

$$x' + iy' = xe^{i\theta} + iye^{i\theta} = e^{i\theta}(x + iy),$$

$$(x' + iy')^m = e^{im\theta}(x + iy)^m$$

Сохраняя за комплексифицированным линейным оператором  $\Phi^{(m)}(\theta)$  его прежнее обозначение, будем иметь

$$\Phi^{(m)}(\theta) : z_m \mapsto z'_m = e^{im\theta} z_m$$

Так называемые одномерные унитарные представления  $\Phi^{(m)} : \Phi_\theta \mapsto \mapsto e^{im\theta}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , группы  $SO(2)$  играют важную роль в анализе. Заметим, что действие  $\Phi$  индуцирует действие группы  $SO(2)$  на всём пространстве  $V_m$ , и с этой точки зрения  $H_m$  - инвариантное подпространство в  $V_m$ .

3 адача 2. Оценка числа возможных органических соединений, например, в химии циклических углеводородов, сводится к следующей отвлечённо-житейской задаче. Сколько можно изготовить различных ожерелий длины  $n$  из неограниченного запаса жемчужин  $q$  различных цветов?

Попытаемся (вслед за Г. Полия) ответить на этот вопрос, считая, что ожерелья ориентированы, т.е. перевёрнутое ожерелье, вообще говоря, не отождествляется с исходным.

Заметим, что нитяных отрезков с нанизанными на них  $n$  жемчужинами имеется всего  $q^n$  (число слов длины  $n$  в свободной полугруппе с  $q$  образующими). На множестве  $\Omega_n$  этих отрезков действует циклическая группа порядка  $n$  с образующей  $\sigma = (12...n) \in S_n$ , циклически переставляющей жемчужины на каждом отрезке. Ожерельем естественно считать  $\langle \sigma \rangle$ -орбиту отрезка или, если угодно, некоторое множество концентрических окружностей (рис. 4).

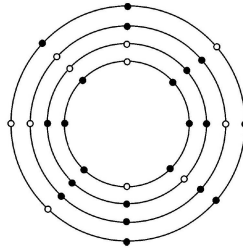


Рис. 4.

Вторая интерпретация более наглядна. Она связана с изоморфизмом

$$\Phi : \sigma \mapsto \Phi(\sigma) = \begin{vmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{vmatrix}$$

который уже встречался нам ранее и который будет назван позднее двумерным линейным вещественным представлением группы  $\langle \sigma \rangle$ . Искомое число  $r$  ожерелий выражается формулой из упр. 83 гл. 1. Если  $d|n$ , то элемент  $\sigma^d$  порядка  $n/d$  оставляет на месте те отрезки (и ожерелья), которые распадаются на  $d$  периодов длины  $n/d$  (см. в этой связи [ВА I, гл. 4, 2, упр. 12,13]). Поэтому  $N(\sigma^d) = q^d$ , а  $N(\sigma^k) = q^m$ ,  $m = \text{НОД}(n, k)$ . Величине  $N(\sigma^k)$  с  $\text{НОД}(n, k) = d$  в сумме  $\sum_k N(\sigma^k)$  отвечает ровно  $\varphi(n/d)$  слагаемых ( $\varphi$  - функция Эйлера). Это означает, что

$$r = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) q^d$$

Переход к физически различным (неориентируемым) ожерельям связан с дополнительными отождествлениями элементов в  $\Omega_n$  посредством обычного двумерного линейного представления группы диэдра  $D_n$ ). Попробуйте сделать это самостоятельно.

Не только в рассмотренных примерах, но и в реальных физических задачах линейные представления групп возникают самопроизвольно как отражение той или иной симметрии.

Соответственно идеи и язык теории представлений весьма естественны. Так, примеры, приводимые в 1, касаются хорошо известных задач и не дают, как будто, ничего нового. Между тем сам факт появления их "под одной крышей" должен наводить на полезные размышления.

Цель, преследуемая теорией представлений, двоякая: 1) чисто математическая, диктуемая отчасти желанием использовать дополнительный аппарат для исследования самих групп; 2) прикладная, иллюстрируемая, скажем, ярким её вкладом в кристаллографию и в квантовую механику. Ни один из этих аспектов по существу не отражён в настоящей главе, цель которой более чем скромная - сказать нечто содержательное о теории представлений, основываясь исключительно на доступном нам материале из линейной алгебры и из теории групп.

## 2.4.1 Definitions and examples of linear representations

### Основные понятия

Строго говоря, мы уже занимались теорией представлений, когда рассматривали в 22 гл. 1 действие групп на множествах. Возьмём теперь в качестве множества векторное пространство  $V$  размерности  $n$  над полем  $K$  и выделим в группе  $S(V)$  всех биективных преобразований  $V \rightarrow V$  подгруппу  $GL(V)$  - группу обратимых линейных операторов на  $V$  (или группу автоморфизмов пространства  $V$ ). Ясно, что при любом выборе базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  группа  $GL(V)$  становится обычной матричной группой  $GL(n, K)$ , которую можно считать группой автоморфизмов арифметического линейного пространства  $K^n$ . Каждому линейному оператору  $\mathcal{A} \in GL(V)$  при этом отвечает матрица  $A = (a_{ij})$  такая, что

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i, \quad a_{ij} \in K, \quad \det A \neq 0$$

Определение 1. Пусть  $G$  - какая-то группа. Всякий гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  называется линейным представлением группы  $G$  в пространстве  $V$ . Представление называется точным, если ядро представления  $\text{Ker } \Phi$  состоит только из единичного элемента группы  $G$ , и тривиальным (или единичным), если  $\Phi(g) = \mathcal{E}$  - единичный оператор для всех элементов  $g \in G$ . Размерность  $\dim_K V$  называется также степенью представления. При  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  говорят соответственно о рациональном, вещественном или комплексном представлении группы  $G$ .

Таким образом, линейное представление - это пара  $(\Phi, V)$ , состоящая из пространства представления  $V$  (или  $G$ -пространства) и гомоморфизма  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ . По определению

$$\begin{aligned} \Phi(e) &= \mathcal{E} - \text{единичный оператор,} \\ \Phi(gh) &= \Phi(g)\Phi(h) \text{ для всех } g, h \in G. \end{aligned}$$

Условившись в обозначении  $g * v$  для действия линейного оператора  $\Phi(g)$  на вектор  $v \in V$ , мы придём к соотношениям

$$\begin{aligned} g * (u + v) &= g * u + g * v, \quad u, v \in V, \\ g * (\lambda v) &= \lambda(g * v), \quad \lambda \in K, \\ e * v &= v, \\ (gh) * v &= g * (h * v), \end{aligned}$$

имитирующим свойства линейных операторов, причём последние два соотношения заменяют то, что выражено выше посредством  $\Phi$  (сравнить с i), ii) в 22 гл. 1). Соотношениями (1) в линейном представлении  $(\Phi, V)$  на первое место выдвигается  $G$ -пространство  $V$ , что бывает удобно делать по тем или иным причинам (например, когда  $V$  - не абстрактное линейное пространство, а какая-то его конкретная реализация).

С другой стороны, пространство  $V$  можно и не упоминать, если под линейным представлением понимать попросту гомоморфизм  $\Phi$  группы  $G$  в матричную группу  $GL(n, K)$ . По-прежнему  $\Phi_{gh} = \Phi_g \Phi_h$ , но здесь  $\Phi_g$  - невырожденная матрица, причём  $\Phi_e = E$  - единичная матрица. Матричная интерпретация более приемлема с вычислительной точки зрения, но она менее инвариантна и лишена пространственной наглядности. На самом деле важно владеть (несложным) искусством свободного перехода от  $G$ -пространств к матричным представлениям, и обратно.

Напомним в этой связи хорошо известный из курса линейной алгебры [ВА II] факт, что две матрицы  $A, B$ , отвечающие одному и тому же линейному оператору в различных базисах, подобны:  $B = CAC^{-1}$  ( $C$  - матрица перехода от одного базиса к другому). В случае представлений, когда речь идёт о группе линейных операторов, зависимость от выбора базиса учитывается следующим образом.

Определение 2. Два линейных представления  $(\Phi, V), (\Psi, W)$  группы  $G$  называются эквивалентными (изоморфными или подобными), если существует изоморфизм векторных пространств  $\sigma : V \rightarrow W$ , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sigma} & W \\ \Phi(g) \downarrow & & \downarrow \Psi(g) \\ V & \xrightarrow{\sigma} & W \end{array}$$

коммутативной при всех  $g \in G$ , т. е.

$$\Psi(g)\sigma = \sigma\Phi(g), \quad g \in G$$

или, что равносильно,

$$\Psi(g) = \sigma\Phi(g)\sigma^{-1}$$

(сравнить с определением эквивалентности действий группы на множествах, данным в упр. 1 из 2 гл. 1). Будем иногда писать  $\Phi \approx \Psi$  для эквивалентных и  $\Phi \not\approx \Psi$  для неэквивалентных представлений.

Приведём ещё два варианта определения 2.

а) Терминология  $G$ -пространств. Пусть  $G$  - группа и  $V : (g, v) \mapsto g*v, W : (g, w) \mapsto g \diamond w$  - два  $G$ -пространства с действиями  $*, \diamond$ , удовлетворяющими условиям (1). Изоморфизм  $\sigma : V \rightarrow W$  векторных пространств является изоморфизмом  $G$ -пространств, если

$$g \diamond \sigma(v) = \sigma(g*v)$$

для всех  $g \in G$  и  $v \in V$ . Говорят ещё, что отображение  $\sigma$  перестановочно с действием  $G$ .

б) Матричная терминология. Если  $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle, W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$  и  $\Phi_g, \Psi_g$  - матрицы линейных операторов  $\Phi(g), \Psi(g)$  относительно выбранных базисов, то условие эквивалентности (2) выражается в виде

$$\Psi_g = C\Phi_g C^{-1}$$

где  $C$  - некоторая невырожденная матрица, одна и та же для всех  $g \in G$ . Коэффициенты всех рассматриваемых матриц принадлежат одному полю  $K$ .

Отношение подобия матриц, выраженное условием (2''), есть отношение эквивалентности, разбивающее множество  $M_n(K)$  на непересекающиеся классы. Соответственно и представления группы  $G$  разбиваются на классы эквивалентных представлений. Из дальнейшего будет ясно, что для теории представлений интересны и существенны именно классы эквивалентных представлений.

Обращаясь вновь к курсу линейной алгебры, попытаемся более наглядно представить себе действие группы  $\Phi(G)$  на пространстве  $V$ . Относительно линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  в  $V$  может существовать инвариантное подпространство  $U : u \in U \Rightarrow \mathcal{A}u \in U$ . Дополнив произвольный базис  $(e_1, \dots, e_k)$  в  $U$  до базиса всего пространства  $V = \langle e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ , мы увидим, что матрица оператора  $A$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$  примет блочно-треугольный вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

Блок  $A_1$  соответствует инвариантному подпространству  $U$ , а блок  $A_2$  - факторпространству  $V/U$ . Если  $A_0$  - нулевая матрица, то  $A = A_1 + A_2$  - прямая сумма блоков и  $V = U \oplus W$  - прямая сумма инвариантных подпространств.

Существование собственного инвариантного подпространства относительно  $\mathcal{A}$  всегда обеспечено, коль скоро основное поле  $K$  алгебраически замкнуто (см. [ВА II]). Если, например,  $K = \mathbb{C}$ , то найдётся вектор  $v \in V, v \neq 0$ , для которого  $\mathcal{A}v = \lambda v$ . Здесь  $\lambda$  - корень характеристического многочлена

$$f_A(t) = |tE - A| = t^n - (\text{tr } A)t^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

( $A$  - произвольная матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$ ). Это соображение позволяет выбрать в  $V$  базис, относительно которого  $A$  принимает треугольный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

с характеристическими корнями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  по диагонали. Несколько более тонкий анализ заканчивается приведением  $A$  к жордановой нормальной форме  $J(A)$  (см. [ВА II]) - прямой сумме жордановых клеток

$$J_{m,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

( $m \times m$  - размер клетки,  $\lambda$  - один из характеристических корней).

Заметим, что если  $A^q = E$ , то  $J_{m,\lambda}^q = E$  - единичная  $m \times m$  матрица для каждой жордановой клетки  $J_{m,\lambda}$  матрицы  $A$ , а это, очевидно, возможно только тогда, когда  $m = 1$  и  $\lambda$  - корень степени  $q$  из 1 (по-прежнему считаем  $K = \mathbb{C}$ ). Значит,

$$A^q = E \implies CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i^q = 1,$$

для некоторой обратимой матрицы  $C$ . То же самое следует из более простого критерия диагональности линейного оператора  $\mathcal{A}$  с матрицей  $A$  и характеристическим многочленом  $f_A(t) = t^q - 1$  без кратных корней.

Все эти соображения, относящиеся к изолированному линейному оператору  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , полезно иметь в виду при переходе к группе  $\{\Phi(g) | g \in G\}$  линейных операторов.

**О п р е д е л е н и е 3.** Пусть  $(\Phi, V)$  - линейное представление группы  $G$ . Подпространство  $U \subset V$  называется инвариантным (или *ус тойчивым*) относительно  $G$ , если  $\Phi(g)u \in U$  для всех  $u \in U$  и всех  $g \in G$ . Нулевое подпространство и само пространство  $V$  представления  $\Phi$  относятся к тривиальным инвариантным подпространствам. Представление, обладающее лишь тривиальными инвариантными подпространствами, называется неприводимым. Представление приводимо, если у него имеется хотя бы одно нетривиальное инвариантное подпространство.

Согласно сказанному выше в случае приводимого представления  $(\Phi, V)$  с инвариантным подпространством  $U$  пространство  $V$  обладает базисом, относительно которого

$$\Phi_g = \begin{pmatrix} \Phi'_g & \Phi_g^0 \\ 0 & \Phi''_g \end{pmatrix}$$

для всех  $g \in G$ . Так как  $\Phi'_{gh} = \Phi'_g \Phi'_h$ ,  $\Phi'_e = E_k$  и  $\Phi'_g(U) \subset U$ , то отображение  $\Phi' : g \mapsto \Phi'_g$  определяет представление на  $U$ , называемое подпредставлением в  $\Phi$ . На факторпространстве  $V/U$  также определено представление. Оно называется факторпредставлением и задаётся матрицами  $\Phi''_g, g \in G$ .

Если базис в  $V$  можно выбрать так, что все матрицы  $\Phi_g^0$  в (4) нулевые, то говорят о разложимом представлении  $\Phi$ , а точнее, о прямой сумме представлений  $\Phi = \Phi' \dot{+} \Phi''$ . Разложение  $(\Phi, V)$  в прямую сумму осуществимо в точности тогда, когда инвариантное подпространство  $U \subset V$  имеет дополнительное инвариантное подпространство  $W$ , так что  $V = U \oplus W$  - разложение в прямую сумму подпространств и  $\Phi(U) \subset U, \Phi(W) \subset W$ . Если это так, то  $\Phi' = \Phi|_U, \Phi'' = \Phi|_W$  - ограничения  $\Phi$  на  $U$  и на  $W$  соответственно.

Линейное представление  $(\Phi, V)$  называется неразложимым, если его нельзя выразить в виде прямой суммы двух нетривиальных подпредставлений. Говорят также о неразложимом  $G$ -пространстве  $V$ .

Последовательно расщепляя, если это возможно,  $V, U, W$  и т. д. в прямые суммы инвариантных подпространств, мы придём к прямой сумме  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$  нескольких инвариантных подпространств (соответственно к прямой сумме  $\Phi = \Phi^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} \Phi^{(r)}$  нескольких представлений). При надлежащем выборе базиса в  $V$  матрицы линейных операторов примут вид

$$\Phi_g = \begin{pmatrix} \Phi_g^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_g^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_g^{(r)} \end{pmatrix}$$

**О п р е д е л е н и е 4.** Линейное представление  $(\Phi, V)$  группы  $G$ , являющееся прямой суммой неприводимых представлений, называется вполне приводимым. Аналогичная терминология применяется по отношению к  $G$ -пространствам.

Интуитивно ясно, что неприводимые представления играют роль строительных блоков, из которых конструируются произвольные линейные представления. Вполне приводимые представления получаются в результате применения простейшей конструкции - прямой суммы. Из дальнейшего будет видно, что во многих случаях этого достаточно для описания всех представлений. Заметим, что некоторые важные для физики группы, такие, как группа Лоренца, имеют бесконечномерные неприводимые представления. Естественно, что они никак не сводятся к конечномерным и должны изучаться отдельно.

### Примеры линейных представлений

Мы ввели все существенные понятия теории представлений. Осталось наполнить их реальным содержанием, для чего на первых порах весьма полезно познакомиться (и основательно разобраться) с приводимой ниже серией примеров.

**Пример 1.** Полная линейная группа  $GL(n, K)$  над полем  $K$  имеет по определению точное неприводимое линейное представление степени  $n$  с пространством представления  $V = K^n$ . На этом же пространстве действует любая линейная группа  $H \subset GL(n, K)$  - точно, но, возможно, приводимо.

Аналогичные замечания относятся к другим классическим группам, указанным в 1 гл. 1. Скажем, унитарная группа  $U(n)$  действует неприводимым образом на эрмитовом пространстве, а ортогональная  $O(n)$  - на евклидовом. Это непосредственно следует из доказанного в [BA II] более сильного утверждения, что группы  $U(n)$  и  $O(n)$  действуют транзитивно (в смысле примера 3 из п. 32 гл. 1) на множестве векторов единичной длины.

**Пример 2.** Заставив действовать  $GL(n, K)$  на векторном пространстве  $M_n(K)$  матриц порядка  $n$  по правилу  $\Psi_A : X \mapsto AX (A \in GL(n, K), X \in M_n(K))$ , мы без труда убеждаемся в том, что  $\Psi_A(\alpha X + \beta Y) = \alpha \Psi_A(X) + \beta \Psi_A(Y)$  и  $\Psi_{AB} = \Psi_A \Psi_B$ . Поэтому  $(\Psi, M_n(K))$  - линейное представление степени  $n^2$ . Пусть  $M_n^{(i)}$  - подпространство матриц

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & \dots & x_{1i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & x_{ni} & \dots & 0 \end{array} \right\|$$

с единственным отличным от нуля столбцом  $X^{(i)}$ . Как легко проверить, это подпространство инвариантно относительно  $\Psi_A, A \in GL(n, K)$ , неприводимо и изоморфно (как  $GL(n, K)$ -пространство) естественному пространству  $K^n$ , на котором действует  $GL(n, K)$ . Таким образом,

$$M_n(K) = M_n^{(1)}(K) \oplus \dots \oplus M_n^{(n)}(K)$$

**N)** разложение в прямую сумму  $n$  изоморфных  $GL(n, K)$ -подпространств, чему соответствует разложение

$$\Psi = \Psi^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} \Psi^{(n)}$$

в прямую сумму  $n$  эквивалентных представлений. Символически этот факт записывают в виде

$$M_n(K) \cong nM_n^{(1)}(K), \quad \Psi \approx n\Psi^{(1)}$$

**Пример 3.** Определим теперь действие  $\Phi$  группы  $GL(n, K)$  на  $M_n(K)$ , положив  $\Phi_A : X \mapsto AXA^{-1}$ . Снова  $(\Phi, M_n(K))$  - линейное представление степени  $n^2$ . Если  $X = (x_{ij})$ ,

то, как обычно,  $\text{tr } X = \sum_{i=1}^n x_{ii}$  - след матрицы  $X$ . Хорошо известно, что  $\text{tr}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \text{tr } X + \beta \text{tr } Y$  (линейность функции  $\text{tr}$ ) и  $\text{tr } \Phi_A(X) = \text{tr } X$ . Отсюда следует, что множество  $M_n^0(K)$  матриц с нулевым следом является инвариантным подпространством относительно  $\Phi$ . С другой стороны,  $\Phi_A(\lambda E) = \lambda E$  и  $\text{tr } \lambda E = n\lambda$ . Таким образом, в случае поля  $K$  нулевой характеристики имеет место разложение в прямую сумму  $\text{GL}(n, K)$ -подпространств

$$M_n(K) = \langle E \rangle \oplus M_n^0(K)$$

размерностей 1 и  $n^2 - 1$  соответственно. Заметим, что при  $n = p$  и  $K = Z_p$  разложение типа (5) отсутствует, поскольку в этом случае  $\text{tr } E = 0$ .

Согласно определению жорданова нормальная форма  $J(X)$  матрицы  $X$  является не чем иным, как удобным и простейшим представителем  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ -орбиты, содержащей  $X$ . Ограничение  $\Phi$  на любую подгруппу  $H \subset \text{GL}(n, K)$  делает естественным вопрос о канонических представителях  $H$ -орбит.

При  $n = 4$ . В предыдущем примере положим  $K = \mathbb{R}$  и ограничим  $\Phi$  на ортогональную группу  $O(n)$ . Так как  $A \in O(n) \iff {}^t A = A^{-1}$ , то  ${}^t (AXA^{-1}) = {}^t A^{-1} \cdot {}^t X \cdot {}^t A = A^t X A^{-1}$ . Выбирая в качестве  $X$  матрицу  $Y + {}^t Y$  или  $Y - {}^t Y$ , мы видим, что пространство представления  $M_n(\mathbb{R})$  группы  $O(n)$  записывается в виде суммы  $O(n)$ -подпространств

$$M_n(\mathbb{R}) = \langle E \rangle_{\mathbb{R}} \oplus M_n^+(\mathbb{R}) \oplus M_n^-(\mathbb{R})$$

$\mathbb{N}$ -одномерного пространства  $\langle E \rangle_{\mathbb{R}}$  скалярных матриц  $(n + 2)(n - 1)/2$ -мерного пространства симметричных матриц с нулевым следом и  $n(n - 1)/2$ -мерного пространства кососимметричных матриц. Хорошо известно взаимно однозначное соответствие между симметричными (кососимметричными) матрицами и симметричными (соответственно кососимметричными) билинейными формами. Действие  $O(n)$  на  $\langle E_{\mathbb{R}} \rangle \oplus M_n^+(\mathbb{R})$  и на  $M_n^-(\mathbb{R})$  переносится на пространства соответствующих форм. Теорема о приведении квадратичной формы  $q(x)$  к главным осям есть не что иное, как возможность выбора в  $O(n)$ -орбите, содержащей  $q(x)$ , диагональной формы  $\sum_i \lambda_i x_i^2$  с вещественными  $\lambda_i$ , определёнными однозначно с точностью до перестановки.

Заменяя  $\mathbb{R}$  на  $\mathbb{C}$  и  $O(n)$  на унитарную группу  $U(n)$ , мы придём к разложению

$$M_n(\mathbb{C}) = \langle E \rangle_{\mathbb{C}} \oplus M_n^+(\mathbb{C}) \oplus M_n^-(\mathbb{C})$$

в прямую сумму  $U(n)$ -подпространств скалярных, эрмитовых с нулевым следом и косоэрмитовых матриц. Случай  $n = 2$  был подробно разобран в 1 гл. 1. При  $n = 5$ . Пусть  $G$  - группа перестановок, действующая на некотором множестве  $\Omega$  с числом элементов  $|\Omega| = n > 1$ , т.е.  $G \subset S_n$ . Векторное пространство

$$V = \langle e_i \mid i \in \Omega \rangle_K$$

над полем  $K$  нулевой характеристики с базисом, занумерованным элементами множества  $\Omega$ , мы превратим в  $G$ -пространство, полагая

$$\Phi(g) \left( \sum_{i \in \Omega} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i \in \Omega} \lambda_i \Phi(g) e_i = \sum_{i \in \Omega} \lambda_i e_{g(i)}$$

( $i \mapsto g(i)$ ) - действие перестановки  $g \in G$  на  $i \in \Omega$ . Так как  $(gh)(i) = g(h(i))$ , то получается линейное представление степени  $n$  группы  $G$ . Оно никогда не является неприводимым, поскольку



$$V = \left\langle \sum_{i \in \Omega} e_i \right\rangle \oplus \left\{ \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \in K \right\}$$

**N)** разложение в прямую сумму одномерного и  $(n - 1)$ -мерного инвариантных подпространств (если  $\text{char } K = p > 0$  и  $p \nmid n$ , то прямой суммы уже не получится). Выделим два частных случая.

а)  $G = S_n$ . Мономорфизм  $S_n \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ , построенный в упр. 13 из 4 гл. 1, совпадает с нашим линейным представлением  $\Phi$ , если взять в качестве  $e_i$   $i$ -й координатный столбец  $E^{(i)}$ . Разложение (6) показывает, что для  $S_n$  существует более экономное вложение  $S_n \longrightarrow \text{GL}(n - 1, \mathbb{Q})$ . Позднее будет доказана неприводимость этого линейного представления степени  $n - 1$  (даже над полем  $\mathbb{C}$ ).

б) Регулярное представление. Пусть  $G$  - произвольная конечная группа. Положив  $\Omega = G$ , мы получим так называемое регулярное  $G$ -пространство  $V = \langle e_g \mid g \in G \rangle$  и соответственно регулярное представление  $(\rho, V)$  группы  $G$ :  $\rho(a)e_g = e_{ag}$  для всех  $a, g \in G$ . Если угодно, регулярное представление в несколько иных обозначениях нам уже встречалось при доказательстве теоремы Кэли [BA I, гл. 4], но нас интересовало тогда не пространство  $V$ , а множество  $\{e_g\}$  его базисных векторов. Значение регулярного представления конечной группы  $G$  заключается в том, что оно содержит все неприводимые представления  $G$ , рассматриваемые с точностью до эквивалентности (см. 5).

**Пример 6.** Представление степени 1 - это просто гомоморфизм  $\Phi : G \longrightarrow K^*$  группы  $G$  в мультипликативную группу поля  $K$  ( $K$  - одномерное векторное пространство над собой). Так как мультипликативная группа поля абелева, то  $\text{Ker } \Phi \supset G'$ , где  $G'$  - коммутант группы  $G$  (теорема 5 из 4 гл. 1). Заметим, что эквивалентность двух одномерных представлений  $\Phi', \Phi''$  (с одинаковым пространством представления) равносильна их совпадению, так как

$$a\Phi'(g)a^{-1} = \Phi''(g) \implies \Phi'(g) = \Phi''(g) \implies \Phi' = \Phi''$$

Пусть  $g^n = e$ . Тогда  $\Phi(g)^n = \Phi(g^n) = \Phi(e) = 1$ , т.е.  $\Phi(g)$  - корень из единицы. Ядро любого одномерного представления может быть нетривиальным даже для циклической группы  $G$ . Если, например,  $G = Z_4$  и  $K = Z_{11}$ , то  $\text{Ker } \Phi \supset 2Z_4$ . С другой стороны, в случае  $K = \mathbb{C}$  любая циклическая группа имеет точное одномерное представление.

а)  $G = (\mathbb{Z}, +)$ . Представление  $k \mapsto \lambda^k$  при  $|\lambda| \neq 1$  точно. Если  $|\lambda| = 1$ , то по формуле Эйлера  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , и ядро отображения  $k \mapsto e^{2\pi i \theta k}$  отлично от нуля только при  $\theta \in \mathbb{Q}$ . Группа  $\mathbb{Z}$  обладает неразложимыми комплексными представлениями сколь угодно высокой степени, которые, однако, не являются неприводимыми. Достаточно сослаться на теорему о жордановой нормальной форме матрицы и рассмотреть отображение

$$k \mapsto J_{m,1}^k = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\|^k$$

б)  $G = \langle a \mid a^n = e \rangle$ . Пусть  $\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$  - примитивный корень степени  $n$  из 1. Из  $n$  одномерных представлений

$$\Phi^{(m)} : a^k \mapsto \varepsilon^{mk}, \quad m = 0, 1, \dots, n - 1$$

точными будут  $\varphi(n)$ . Отметим интересный факт: циклическая группа порядка  $n$  имеет ровно  $n$  попарно неэквивалентных неприводимых представлений над  $\mathbb{C}$ . Все они одномерны и имеют вид (7).

Действительно, нужно убедиться лишь в том, что у конечной циклической группы нет неприводимых над  $\mathbb{C}$  представлений размерности  $> 1$ . Но перед определением 3 отмечался тот факт, что любой линейный оператор  $\Phi(g)$  конечного порядка диагонализирован над  $\mathbb{C}$ . В данном случае это равносильно полной приводимости представления  $\Phi$ . Если  $\dim \Phi = r$ , то  $\Phi$  распадается в прямую сумму  $r$  одномерных представлений.

Для циклической группы конечного порядка получено по существу описание всех комплексных линейных представлений. С точностью до эквивалентности

$$\Phi_g = \left\| \begin{array}{ccc} \Phi_g^{(i_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Phi_g^{(i_r)} \end{array} \right\|$$

где  $\Phi^{(m)}$  - одно из представлений вида (7).

Нашей целью является установление подобных закономерностей в общем случае.

Пример 7. Уже в предыдущих примерах чувствовалась сильная зависимость свойств линейного представления  $\Phi$  группы  $G$  от основного поля  $K$ . Внесём дополнительную ясность в этот вопрос.

Циклическая группа  $G = \langle a | a^p = e \rangle$  простого порядка  $p$ , действующая на двумерном векторном пространстве  $V = \langle v_1, v_2 \rangle$  над произвольным полем  $K$  характеристики  $p$  по правилу  $a * v_1 = v_1, a * v_2 = v_1 + v_2$ , определяет неразложимое представление  $(\Phi, V)$ :

$$a^k \mapsto \Phi_a^k = \left\| \begin{array}{cc} 1 & k \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad 0 \leq k \leq p-1$$

В самом деле, матрица  $\Phi_a$  имеет характеристический корень 1 кратности 2. Поэтому разложимость  $\Phi$  в прямую сумму двух одномерных представлений означала бы существование обратимой матрицы  $C$ , для которой  $C\Phi_a C^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|$ . Но тогда  $\Phi_a = C^{-1}EC = E$ , что не так.

Пусть, далее,  $G = \langle a | a^3 = e \rangle$  - циклическая группа порядка 3 и  $K = \mathbb{R}$ . Двумерное представление  $(\Phi, V), V = \langle v_1, v_2 \rangle$ , заданное в указанном базисе матрицей

$$\Phi_a = \left\| \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|$$

неприводимо, поскольку характеристический многочлен  $t^3 + t + 1$  этой матрицы не имеет вещественных корней. Если же  $V$  рассматривать над  $\mathbb{C}$ , то, естественно,  $V$  разлагается в прямую сумму одномерных  $G$ -подпространств

$$V = \langle v_1 + \varepsilon^{-1}v_2 \rangle \oplus \langle v_1 + \varepsilon v_2 \rangle$$

и

$$C\Phi_a C^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{array} \right\|, \quad \varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad C = \left\| \begin{array}{cc} 1 & -\varepsilon^{-1} \\ 1 & -\varepsilon \end{array} \right\|.$$

Таким образом, при расширении поля свойство неприводимости представления может утрачиваться.

В дальнейшем, за редким исключением, основное поле  $K$  будет полем комплексных чисел (наиболее важным с практической точки зрения) или же произвольным алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики.

## 2.4.2 Unitarity and reducibility

### Теория

**Н) Унитарные представления.** Напомним (см. [ВА II]), что в курсе линейной алгебры невырожденная форма  $(u, v) \mapsto (u|v)$  на векторном пространстве  $V$  над  $\mathbb{C}$  называется эрмитовой, если

$$\begin{aligned}(u|v) &= \overline{(v|u)} \\ (\alpha u + \beta v|w) &= \alpha(u|w) + \beta(v|w), \\ (v|v) &> 0 \quad \text{для всех } v \neq 0\end{aligned}$$

(как всегда,  $z \mapsto \bar{z}$  - автоморфизм комплексного сопряжения). Пространство  $V$ , рассматриваемое вместе с невырожденной эрмитовой формой  $(u|v)$ , называется эрмитовым пространством. Его вещественным аналогом служит евклидово пространство со скалярным произведением, задаваемым невырожденной симметричной билинейной формой. Взяв базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$ , мы запишем форму  $(u|v)$  для  $u = \sum_i u_i e_i, v = \sum_j v_j e_j$  в виде

$$(u|v) = \sum_{i,j} h_{ij} u_i \bar{v}_j$$

Матрица  $H = (h_{ij})$  удовлетворяет условию  $\bar{h}_{ij} = h_{ji}$  и называется также эрмитовой.

Существует ортонормированный базис (определяемый условием  $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ ), относительно которого

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$$

Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , сохраняющий эту форму, т.е. обладающий свойством  $(\mathcal{A}u|\mathcal{A}v) = (u|v)$ , называется унитарным оператором. В вещественном случае ему соответствует ортогональный оператор. Условие унитарности, записанное в матричном виде  $A \cdot {}^t \bar{A} = E$  с  $A = (a_{ij}), {}^t \bar{A} = A^* = (\bar{a}_{ji})$ , нам уже встречалось в гл. 1. Обозначив (как в [ВА II]) через  $\mathcal{A}^*$  линейный оператор с матрицей  ${}^t \bar{A} = A^*$ , выразим условие унитарности в виде  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{E} = \mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A}$ . Группу всех унитарных матриц (группу унитарных операторов или просто унитарную группу) принято обозначать  $U(n)$ . По определению  $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ , и если представление  $\Phi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  таково, что  $\text{Im } \Phi \subset U(n)$ , то  $(\Phi, V)$  называется унитарным представлением.

**Теорема 1.** Вслкое линейное представление  $(\Phi, V)$  над  $\mathbb{C}$  конечной группы  $G$  эквивалентно унитарному представлению.

**Доказательство.** Выберем в пространстве представления  $V$  группы  $G$  какую-нибудь невырожденную эрмитову форму

$$H : (u, v) \mapsto H(u, v) = \sum_{i,j} h_{ij} u_i \bar{v}_j$$

(запись относительно некоторого базиса  $(f_1, \dots, f_n)$  пространства  $V$ ) и рассмотрим форму  $(u|v)$ , получающуюся из  $H(u, v)$  "усреднением" по  $G$ :

$$(u|v) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} H(\Phi(g)u, \Phi(g)v)$$

Множитель  $|G|^{-1}$  несуществен и поставлен лишь для того, чтобы в случае унитарности  $\Phi$  имело место равенство  $(u|v) = H(u, v)$ . Так как

$$H(\Phi(g)u, \Phi(g)v) = \overline{H(\Phi(g)v, \Phi(g)u)}$$

$$\begin{aligned} H(\Phi(g)(\alpha u + \beta v), \Phi(g)w) &= H(\alpha\Phi(g)u + \beta\Phi(g)v, \Phi(g)w) = \\ &= \alpha H(\Phi(g)u, \Phi(g)w) + \beta H(\Phi(g)v, \Phi(g)w), \\ H(\Phi(g)v, \Phi(g)v) &> 0 \end{aligned}$$

для  $v \neq 0$  и всех  $g \in G$ , то форма (2) удовлетворяет условиям (1) и является, следовательно, невырожденной эрмитовой формой.

Кроме того (и это самое главное),

$$\begin{aligned} (\Phi(h)u | \Phi(h)v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H(\Phi(g)\Phi(h)u, \Phi(g)\Phi(h)v) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H(\Phi(gh)u, \Phi(gh)v) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} H(\Phi(t)u, \Phi(t)v) = (u | v), \end{aligned}$$

т.е. оператор  $\Phi(g)$  при любом  $g \in G$  оставляет форму  $(u | v)$  инвариантной. Выберем в  $V$  ортонормированный относительно формы  $(u | v)$  базис. Тогда в этом базисе матрицы  $\Phi_g$  операторов  $\Phi(g)$  будут унитарными.

**З а м е ч а н и е 1.** Утверждение теоремы 1 не вытекает автоматически из известного нам факта, что каждая отдельная матрица  $\Phi_g$   $g^m = e$  подобна унитарной  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  с  $\lambda_i^m = 1$ .

**З а м е ч а н и е 2.** В вещественном случае совершенно аналогичное рассуждение показывает, что представление  $(\Phi, V)$  эквивалентно ортогональному.

**З а м е ч а н и е 3.** По многим причинам унитарные представления играют важную роль в приложениях теории представлений, и весьма замечательно, что теорема 1 продолжает оставаться справедливой для гораздо более широкого класса компактных групп таких, как  $U(n)$  и  $O(n)$ . Доказательство то же самое, но суммирование по элементам группы заменяется интегрированием (по некоторой мере) на группе. Вспомним, что компактная группа  $SU(2)$  геометрически не отличима от трёхмерной сферы  $S^3$ , и поэтому имеет смысл говорить, например, о её объеме. Вообще, существует значительный параллелизм в теории представлений конечных и компактных групп, но мы лишены возможности на этом останавливаться. Из примера 6, а) 1 видно, что представления некомпактных групп (например,  $G = \mathbb{Z}$ ) унитарными быть не обязаны.

В заключение отметим, что хотя доказательство теоремы 1 конструктивно, было бы не очень практичным использовать его для отыскания унитарной реализации имеющегося представления. Например, для группы  $G$ , порождённой элементами  $a_1, \dots, a_d$ , достаточно добиться унитарности матриц  $\Phi_{a_1}, \dots, \Phi_{a_d}$ . Тогда и группа  $\Phi(G)$  будет унитарной.

**П р и м е р 1.** Симметрическая группа  $S_3 = \langle (12), (123) \rangle$  обладает двумерным представлением  $\Phi$ , содержащимся в качестве прямого слагаемого в естественном трёхмерном представлении (см. пример 5 из 1). Именно, если

$$\Phi(\pi)e_i = e_{\pi i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad f_1 = e_1 - e_3, \quad f_2 = e_2 - e_3$$

то

$$\begin{aligned} \Phi((12))f_1 &= e_2 - e_3 = f_2, & \Phi((12))f_2 &= e_1 - e_3 = f_1, \\ \Phi((123))f_1 &= e_2 - e_1 = -f_1 + f_2, & \Phi((123))f_2 &= e_3 - e_1 = -f_1. \end{aligned}$$

Так как  $\pi = \begin{pmatrix} 12 & 3 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 12 \\ j \end{pmatrix}$ , где  $i = 0, 1$  или  $2$  и  $j = 0$  или  $1$ , то без труда получаются все матрицы  $\Psi_\pi = \Phi(\pi)|_{\langle f_1, f_2 \rangle}$ :

$$\begin{aligned}
 e_1 &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \\
 (12) &\mapsto \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 \left( \begin{array}{cc} 13 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \\
 (23) &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \\
 \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \right) &\mapsto \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \\
 \left( \begin{array}{ccc} 1 & 32 & 2 \end{array} \right) &\mapsto \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Из соотношений  $\det \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$  и  $\left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \right)^3 = e$  следует, что

$$C \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} C^{-1} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

для некоторой невырожденной матрицы  $C$ . Сопряжение при помощи  $C$  не должно нарушать свойства унитарности матрицы  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ . Линейным условиям

$$C \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} C, \quad C \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{vmatrix} C$$

удовлетворяет матрица

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -\varepsilon^2 \\ -\varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Теперь мы имеем возможность выписать известные нам унитарные представления группы  $S_3$ , а именно единичные  $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} : \pi \mapsto \text{sgn}(\pi) = \pm 1$  и только что полученное двумерное представление  $\Phi^{(3)} \approx \Psi$ . Для последующих ссылок удобна такая таблица:

| $\overline{S_3}$ | $e$ | (12) | (13)                 | (23)                 | (123)                | (132)                |
|------------------|-----|------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\Phi^{(1)}$     | 1   | 1    | 1                    | 1                    | 1                    | 1                    |
| $\Phi^{(2)}$     | 1   | -1   | -1                   | -1                   | 1                    | 1                    |
| $\Phi^{(3)}$     | 10  | 0 1  | 0                    | 0 $\varepsilon^{-1}$ | $\varepsilon$ 0      | $\varepsilon^{-1}$ 0 |
|                  | 0 1 | 1 0  | $\varepsilon^{-1}$ 0 | $\varepsilon$ 0      | 0 $\varepsilon^{-1}$ | $\varepsilon$        |

При мер 2. Естественное ортогональное представление бесконечной группы, а именно  $SU(2)$ , доставляет эпиморфизм  $\Phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ , построенный в 1 гл. 1.

### Полная приводимость

Из определений и замечаний, сделанных в 1, ясно, насколько фундаментальным является следующее утверждение.

**Т е о р е м а 2** (теорема Машке). Каждое линейное представление конечной группы  $G$  над полем  $K$  характеристики, не делящей  $|G|$  (в частности, нулевой), вполне приводимо.

Напомним, что утверждение теоремы 2 означает разложимость  $(\Phi, V)$  в прямую сумму неприводимых представлений. Собственно говоря, классическая теорема Машке гласит следующее.

(M) Каждое  $G$ -инвариантное подпространство  $U \subset V$  обладает  $G$ -инвариантным дополнением  $W$ :

$$V = U \oplus W$$

Мы будем доказывать именно это утверждение, из которого теорема 2 следует автоматически. Действительно, либо представление  $(\Phi, V)$  неприводимо, и тогда нечего доказывать, либо существует собственное  $G$ -инвариантное подпространство  $U$ , и тогда имеет место разложение (3) с некоторым  $G$ -подпространством  $W$ . В этом случае  $\dim U < \dim V, \dim W < \dim V$ . Применяя к  $U$  и  $W$  те же рассуждения и используя индукцию по размерности, получаем требуемое разложение на неприводимые компоненты.

Переходим к доказательству утверждения (M). Нас по-прежнему больше интересует случай поля  $K = \mathbb{C}$ , поэтому полезно привести два независимых рассуждения.

Первое доказательство ( $K = \mathbb{C}$ ). Согласно теореме 1 существует невырожденная эрмитова форма  $(u|v)$  на пространстве представления  $V$ , инвариантная относительно линейных операторов  $\Phi(g)$ . Для каждого подпространства  $U \subset V$  существует ортогональное дополнение

$$U^\perp = \{v \in V \mid (u|v) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

и по известной теореме из курса линейной алгебры

$$V = U \oplus U^\perp$$

причём  $(U^\perp)^\perp = U$ . Предположим теперь, что  $U$  —  $G$ -подпространство в  $V$ , т.е.  $\Phi(g)U \subset U$  для всех  $g \in G$ . Так как  $\Phi(g)|_U$  — автоморфизм, то любой элемент  $u \in U$  записывается в виде  $u = \Phi(g)u'$ ,  $u' \in U$ . Остаётся воспользоваться инвариантностью формы

$$v \in U^\perp \implies (u|\Phi(g)v) = (\Phi(g)u'|\Phi(g)v) = (u'|v) = 0$$

Стало быть,  $v \in U^\perp \implies \Phi(g)v \in U^\perp$ . Положив  $W = U^\perp$ , придём к разложению (3).

В т о р о е д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, как и прежде,  $U$  — инвариантное относительно действия  $G$  подпространство в  $V$ . Рассмотрим прямую сумму

$$V = U \oplus U'$$

где  $U'$  — произвольным образом выбранное дополнение к  $U$ . Вообще говоря,  $U'$  не является  $G$ -инвариантным. Рассмотрим оператор проектирования  $\mathcal{P} : V \longrightarrow U'$ , определённый соотношением

$$\mathcal{P}v = u'$$

для всякого вектора  $v = u + u'$ . Имеем

$$v - \mathcal{P}v \in U, \quad \mathcal{P}(U) = 0, \quad \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

Введём теперь “усреднённый” линейный оператор

$$\mathcal{P}_G = |G|^{-1} \sum_{h \in G} \Phi(h) \mathcal{P} \Phi(h^{-1})$$

(деление на  $|G|$  по условию возможно). Имеем

$$\Phi(g) \mathcal{P}_G = \mathcal{P}_G \Phi(g) \quad \forall g \in G$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\Phi(g)\mathcal{P}_G\Phi(g^{-1}) &= |G|^{-1} \sum_{h \in G} \Phi(g)\Phi(h)\mathcal{P}\Phi(h^{-1})\Phi(g^{-1}) = \\ &= |G|^{-1} \sum_{h \in G} \Phi(gh)\mathcal{P}\Phi((gh)^{-1}) = |G|^{-1} \sum_{t \in G} \Phi(t)\mathcal{P}\Phi(t^{-1}) = \mathcal{P}_G,\end{aligned}$$

что и приводит к соотношению (5). Положим

$$W = \mathcal{P}_G(V) = \{\mathcal{P}_G v | v \in V\}$$

Согласно (5)

$$\Phi(g)w = \Phi(g)\mathcal{P}_G v = \mathcal{P}_G \Phi(g)v = \mathcal{P}_G v' = w' \in W$$

для всякого  $w \in W$ , так что векторное подпространство  $W \subset V$  является на самом деле  $G$ -подпространством. Осталось показать, что  $V = U \oplus W$  - прямая сумма  $G$ -подпространств. Так как  $\Phi(h^{-1})v - \mathcal{P}\Phi(h^{-1})v \in U$  (см. (4)), то

$$v - \Phi(h)\mathcal{P}\Phi(h^{-1})v = \Phi(h)\{\Phi(h^{-1})v - \mathcal{P}\Phi(h^{-1})v\} \in \Phi(h)U = U$$

(инвариантность  $U$ ). Следовательно,

$$v - \mathcal{P}_G v = |G|^{-1} \sum_{h \in G} \{v - \Phi(h)\mathcal{P}\Phi(h^{-1})v\} = u \in U$$

и мы получаем  $v = u + w$  с  $w = \mathcal{P}_G v \in W$ , т.е.  $V = U \oplus W$ .

Далее,

$$\Phi(h^{-1})U \subset U \implies \mathcal{P}\Phi(h^{-1})U = 0 \text{ (см. (4))} \implies$$

$$\implies \Phi(h)\mathcal{P}\Phi(h^{-1})U = 0 \implies \mathcal{P}_G(U) = 0.$$

Стало быть,

$$v - \mathcal{P}_G v = u \in U \implies \mathcal{P}_G(v - \mathcal{P}_G v) = 0$$

откуда  $\mathcal{P}_G v = \mathcal{P}_G^2 v$  для всех  $v \in V$ . Это значит, что  $\mathcal{P}_G$  - проектирование на  $W$  вдоль  $U$ :

$$\mathcal{P}_G(U) = 0, \quad \mathcal{P}_G^2 = \mathcal{P}_G$$

Теперь  $v \in U \cap W \implies \mathcal{P}_G v = 0$ , поскольку  $v \in U$ , и  $v = \mathcal{P}_G v'$ , поскольку  $v \in \mathcal{P}_G(V) = W$ . Используя (6), получаем

$$0 = \mathcal{P}_G v = \mathcal{P}_G(\mathcal{P}_G v') = \mathcal{P}_G^2 v' = \mathcal{P}_G v' = v \implies U \cap W = 0.$$

Было бы неосторожным сделать более сильное заключение об однозначности разложения на неприводимые компоненты (неприводимые  $G$ -подпространства):

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$$

Если, например,  $\Phi(g) = \mathcal{E}$  - единичный оператор для всех  $g \in G$ , то любое прямое разложение  $V$  на одномерные подпространства будет разложением на неприводимые компоненты, а таких разложений бесконечно много. Другое дело, если мы сгруппируем все изоморфные неприводимые компоненты:

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$$

Так как мы не различаем изоморфные  $G$ -пространства, то можно считать

$$U_1 = V_1 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_1 = n_1 V_1,$$

.....

$$U_s = V_s \oplus V_s \oplus \dots \oplus V_s = n_s V_s,$$

где  $n_i$  — кратность вложения неприводимой компоненты  $V_i$  в раз-

ложение  $V$ . Мы увидим, что кратности определяются однозначно.

## 2.4.3 Finite rotation groups

### Теория

Со времён античности и вплоть до нашего времени объекты, обладающие богатой симметрией, постоянно привлекают внимание учёных. Наиболее известные и яркие примеры таких объектов - знаменитые пять платоновых тел, красота которых непосредственно, на чувственном уровне, доступна каждому человеку. В разные эпохи эта красота вдохновляла философов, математиков, астрономов, физиков на создание как мистических, так и научных систем, эстетически созвучных правильным многогранникам по своей стройности и завершённости. В изданном в 1968 г. в русском переводе цикле лекций "Симметрия", прочитанных великим математиком XX в. Германом Вейлем [8], раскрыто значение исследований различных аспектов симметрии как в становлении всего научного мировоззрения, так и математики в частности. Уже по этой популярной брошюре можно чётко проследить два основных, дополняющих друг друга аспекта в математическом описании симметричных объектов: нахождение необходимых условий существования (в простейших случаях формулируемых в виде одного или нескольких диофантовых уравнений для основных параметров (см. ниже (1)) и проблема конструктивногеометрического описания, когда действительно существующие объекты строятся в явном виде (ниже - изображения платоновых тел). С развитием теории групп и теории представлений групп спектр исследований в области симметрии чрезвычайно расширился, затронув самые различные разделы математики, физики, химии, биологии и других научных дисциплин.

В этом параграфе речь пойдёт о конечных подгруппах группы  $SO(3)$ . Зная их, мы заодно получим ортогональные неприводимые представления таких групп, как  $A_4, S_4, A_5$ , причём в легко запоминаемой геометрической оболочке. При первом чтении можно опустить п. 1 и доказательство (весьма конспективное) теоремы 2, но тому, кто пожелает проверить прочность усвоения общей идеи "действия группы" (3 гл. 1), будет полезно познакомиться с содержанием всего параграфа.

**N) Порядки конечных подгрупп в  $SO(3)$ .** Согласно теореме Эйлера из курса линейной алгебры [BA II] всякий элемент  $A \in SO(3)$ ,  $A \neq E$ , является вращением (поворотом) в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  вокруг некоторой оси. Другими словами, имеются ровно две точки на единичной двумерной сфере  $S^2$ , остающиеся неподвижными при действии  $A$ : точки пересечения сферы и оси вращения. Эти две точки называются полюсами вращения  $A$ .

Пусть теперь  $G$  - конечная подгруппа в  $SO(3)$ , а  $S$  - множество полюсов всех неединичных вращений из  $G$ . Ясно, что  $G$  действует как группа перестановок на множестве  $S$ . Если  $x$  - полюс для некоторого вращения  $A \neq E$ ,  $A \in G$ , то при любом  $B$  имеем



$$(\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1})\mathcal{B}x = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}x = \mathcal{B}x$$

т. е.  $\mathcal{B}x$  - полюс для  $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}$  и, стало быть,  $\mathcal{B}x \in S$ . Обозначим через  $\Omega$  множество всех упорядоченных пар  $(\mathcal{A}, x)$ , где  $\mathcal{A} \in G, \mathcal{A} \neq \mathcal{E}$ ,  $x$  - полюс для  $\mathcal{A}$ . Пусть, далее,  $G_x$  - стационарная подгруппа (стабилизатор) точки  $x$ , т. е. подгруппа в  $G$  всех элементов, оставляющих  $x$  на месте. Если

$$G = G_x \cup g_2 G_x \cup \dots \cup g_{m_x} G_x$$

N) разложение  $G$  в левые смежные классы по  $G_x$ , то  $G$ -орбитой точки  $x$  будет множество

$$G(x) = \{x, g_2 x, \dots, g_{m_x} x\}$$

с числом элементов  $|G(x)| = m_x$ . По теореме Лагранжа  $N = m_x n_x$ , где  $N = |G|, n_x = |G_x|$  (по сравнению с 3 гл. 1 обозначения несколько изменены). Заметим, что  $n_x$  - порядок циклической подгруппы в  $G$ , каждый из элементов которой является вращением вокруг оси,

проходящей через  $x$ . Говорят, что  $n_x$  — кратность полюса  $x$  или что

$x$  есть  $n_x$ -полюс. Каждому элементу  $\mathcal{A} \neq \mathcal{E}$  из  $G$  соответствует два полюса, поэтому  $|\Omega| = 2(N - 1)$ . С другой стороны, для каждого полюса  $x$  имеется  $n_x - 1$  элементов из  $G$ , отличных от  $e$  и оставляющих неподвижным полюс  $x$ . Следовательно, число пар  $(\mathcal{A}, x)$  равно сумме

$$|\Omega| = \sum_{x \in S} (n_x - 1)$$

Взяв за  $\{x_1, \dots, x_k\}$  множество полюсов, по одному из каждой орбиты, положив  $n_i := n_{x_i}, m_i := m_{x_i}$  и заметив, что  $n_x = n_{x_i} = n_i$  для всех  $x \in G(x_i)$ , мы получим

$$|\Omega| = \sum_{x \in S} (n_x - 1) = \sum_{i=1}^k m_i (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k (N - m_i)$$

Таким образом,

$$2N - 2 = \sum_{i=1}^k (N - m_i)$$

Разделив на  $N$  обе части равенства, будем иметь

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

Предполагаем  $N > 1$ , так что  $1 \leq 2 - 2/N < 2$ . Так как  $n_i \geq 2$ , то  $1/2 \leq 1 - 1/n_i < 1$ , а поэтому  $k$  должно равняться 2 или 3.

Случай 1.  $k = 2$ . Тогда

$$2 - \frac{2}{N} = \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n_2}\right)$$

или, что равносильно,

$$2 = \frac{N}{n_1} + \frac{N}{n_2} = m_1 + m_2$$

откуда  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $n_1 = n_2 = N$ . Стало быть,  $G$  имеет в точности одну ось вращения и  $G = C_N$  - циклическая группа порядка  $N$ .

Случай  $2.k = 3$ . Пусть для определённости  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ . Если  $n_1 \geq 3$ , то мы имели бы

$$\sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \geq \sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$$

что невозможно. Таким образом,  $n_1 = 2$ , и уравнение (1) записывается в виде  $1/2 + 2/N = 1/n_2 + 1/n_3$ . Очевидно,  $n_2 \geq 4 \Rightarrow 1/n_2 + 1/n_3 \leq 1/2$  - противоречие. Поэтому  $n_2 = 2$  или  $n_2 = 3$ .

Если  $n_2 = 2$ , то  $n_3 = N/2 = m$  (т.е.  $N$  должно быть чётным) и  $m_1 = m_2 = m, m_3 = 2$ . Эти данные соответствуют группе диэдра  $D_m$  (см. пример 1 из п. 54 гл. 1). Если  $n_2 = 3$ , то  $1/6 + 2/N = 1/n_3$ , и мы имеем лишь три возможности:

- 2')  $n_3 = 3, N = 12, m_1 = 6, m_2 = 4, m_3 = 4$ ;
- 2'')  $n_3 = 4, N = 24, m_1 = 12, m_2 = 8, m_3 = 6$ ;
- 2''')  $n_3 = 5, N = 60, m_1 = 30, m_2 = 20, m_3 = 12$ .

Соберём все эти данные в табл. 1.

Таблица 1

| $N$<br>централизаторов | Число<br>орбит | $ S $    | Порядки |     |     |
|------------------------|----------------|----------|---------|-----|-----|
| $n$                    | 2              | 2        | $n$     | $n$ | -   |
| $2m$                   | 3              | $2m + 2$ | 2       | 2   | $m$ |
| 12                     | 3              | 14       | 2       | 3   | 3   |
| 24                     | 3              | 26       | 2       | 3   | 4   |
| 60                     | 3              | 62       | 2       | 3   | 5   |

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть  $G$  - конечная подгруппа в  $SO(3)$ , отличная от циклической и диэдральной. Тогда для её порядка  $N$  имеются лишь три возможности:  $N = 12, 24, 60$ . Другие ограничения на группу  $G$  содержатся в табл. 1.

### Группы правильных многогранников

Существование групп порядков 12, 24 и 60, содержащихся в  $SO(3)$ , доказывается совсем просто. С точностью до подобия существует лишь пять (известных с античных времён) правильных выпуклых многогранников в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  (см. рис. 5): тетраэдр  $\Delta_4$ , куб  $\square_6$ , октаэдр  $\Delta_8$ , додекаэдр  $\star_{12}$  и икосаэдр  $\Delta_{20}$ :

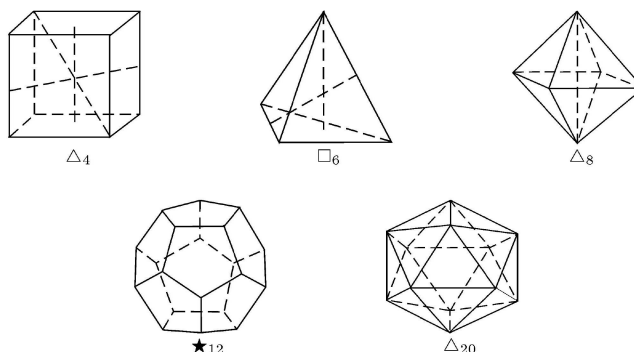


Рис. 5

Если центр правильного многогранника  $M$  поместить в начальную точку пространства  $\mathbb{R}^3$ , то вращения из  $SO(3)$ , совмещающие  $M$  с собой, составят конечную подгруппу. При этом, однако, возникает не пять, а всего лишь три различные (неизоморфные) группы вращений, поскольку для куба и октаэдра, а также для додекаэдра и икосаэдра они одинаковы. Это очень легко объяснить геометрически. Если соединить отрезками середины смежных граней куба, то эти отрезки будут рёбрами вписанного в куб октаэдра. Всякое вращение в  $\mathbb{R}^3$ , оставляющее куб инвариантным, переводит в себя вписанный октаэдр, и обратно. Аналогичное замечание относится к паре додекаэдр-икосаэдр.

В табл.  $2N_0$  - число вершин многогранника,  $N_1$  - число рёбер,  $N_2$  - число граней,  $\mu$  - число сторон (рёбер) каждой грани, а  $\nu$  - число граней, сходящихся к одной вершине. Как и ранее,  $N$  - порядок соответствующей группы.

Таблица 2

|           | $N_0$ | $N_1$ | $N_2$ | $\mu$ | $\nu$ | $N$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| Тетраэдр  | 4     | 6     | 4     | 3     | 3     | 12  |
| Куб       | 8     | 12    | 6     | 4     | 3     | 24  |
| Октаэдр   | 6     | 12    | 8     | 3     | 4     | 24  |
| Додекаэдр | 20    | 30    | 12    | 5     | 3     | 60  |
| Икосаэдр  | 12    | 30    | 20    | 3     | 5     | 60  |

В соответствии с геометрической теоремой Эйлера о многогранниках

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

Общее число полюсов равно

$$N_0 + N_1 + N_2 = 2N_1 + 2$$

При любом вращении, переводящем многогранник в себя, данное ребро  $a_1b_1$  совмещается с любым другим: с  $a_ib_i$  или с  $b_ia_i$ , так что  $N = 2N_1$ . Заметим ещё, что  $\{\mu, \nu\} = \{n_2, n_3\}$ , где  $n_2, n_3$  - введённые в п. 1 кратности полюсов.

Пусть, далее, **T** - группа тетраэдра, **O** - группа куба (октаэдра) и **I** - группа икосаэдра (додекаэдра).

Элементами **T** являются вращения на углы вокруг четырёх осей, соединяющих вершины с центрами противоположных граней, вращения на угол  $\pi$  вокруг каждой из трёх осей, соединяющих середины противоположных рёбер, и единичное вращение.

В группе **O**, кроме единичного, имеются вращения на углы  $\pi/2, \pi, 3\pi/2$  вокруг трёх осей, соединяющих центры противоположных граней куба, вращения на углы  $2\pi/3, 4\pi/3$  вокруг четырёх осей, соединяющих экстремально противоположные вершины, и вращения на угол  $\pi$  вокруг каждой из шести осей, соединяющих середины диагонально-противоположных рёбер. Правильный тетраэдр вписывается в куб и остаётся инвариантным относительно некоторых вращений из **O** порядка 3 и 2. Вместе с единицей их набирается 12 штук и они составляют как раз группу **T**. Следовательно,  $\mathbf{T} \subset \mathbf{O}$ , а так как  $|\mathbf{O} : \mathbf{T}| = 2$ , то  $\mathbf{T} \triangleleft \mathbf{O}$ .

Каждому элементу из **O** соответствует ровно одна перестановка на множестве, состоящем из четырёх больших диагоналей куба. Из равенства порядков групп  $|\mathbf{O}| = |S_4| = 24$  следует их изоморфизм:  $\mathbf{O} \cong S_4$ .

Соответственно  $\mathbf{T} \cong A_4$ .

Упр. 2 показывает, что  $\mathbf{I} \cong A_5$ .

Возвращаясь к доказательству теоремы 1, заметим, что при  $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 3$  имеются две четырёхэлементные орбиты

$$G(p_1) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

$$G(q_1) = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

полюсов, где  $p_i$  и  $q_i$  - противоположные точки на сфере  $S^2$ . Если  $\Delta_4^0$  - тетраэдр с вершинами  $p_i$ , то его группа преобразований симметрии  $\mathbf{T}^0$  содержит  $G$ . Из  $|G| = 12$  следует, что  $\Delta_4^0$  - правильный тетраэдр, т.е.  $\Delta_4^0 = \Delta_4$  и  $\mathbf{T}^0 = G = \mathbf{T}$ .

При  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 4$  берём шестиэлементную орбиту  $G(p_1) = \{p_1, \dots, p_6\}$  полюсов, которые разбиваются на пары, поскольку  $i \neq 3 \implies n_i \neq 4$ . Эти три пары точек на сфере  $S^2$  мы берём за три пары противоположных вершин октаэдра  $\Delta_8^0$ . Как и в предыдущем случае,  $|G| = 24 \implies \Delta_8^0$  (в том смысле, что  $\Delta_8^0$  - правильный октаэдр) и  $\mathbf{O}^0 = G = \mathbf{O}$ .

Наконец, при  $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5$  строится икосаэдр  $\Delta_{20}^0$  с вершинами  $p_i$ , взятыми из орбиты  $G(p_i) = \{p_1, \dots, p_{20}\}$ . Снова  $|G| = 60$  влечёт правильность икосаэдра  $\Delta_{20}^0$  и совпадение групп:  $\mathbf{I}^0 = G = \mathbf{I}$ . Осталось заметить, что любые два правильных многогранника одного и того же типа, вписанные в сферу  $S^2$ , получаются друг из друга некоторым вращением (замена системы координат). Этим устанавливается сопряжённость в  $\text{SO}(3)$  изоморфных подгрупп.

Соберём полученные результаты в виде теоремы.

**Теорема 2.** Все конечные подгруппы в  $\text{SO}(3)$  исчерпываются с точностью до изоморфизма группами

$$C_n, \quad D_n, \quad n \in \mathbb{N} \\ \mathbf{T} \cong A_4, \quad \mathbf{O} \cong S_4 \quad \text{и} \quad \mathbf{I} \cong A_5$$

Любые две изоморфные конечные подгруппы сопряжены в  $\text{SO}(3)$ .

**Следствие.** Указанные в теореме 2 изоморфизмы дают неприводимые трёхмерные ортогональные представления групп  $A_4, S_4, A_5$ .

Используя теорему 2 и эпиморфизм  $\Phi : \text{SU}(2) \longrightarrow \text{SO}(3)$  (теорема 1 из 1 гл. 1), мы легко придём к описанию всех конечных подгрупп группы  $\text{SU}(2)$  (можно действовать и в обратном порядке). Любая такая группа  $G^*$ , отличная от циклической, является прообразом некоторой конечной подгруппы  $G \subset \text{SO}(3)$ . Возникают так называемые бинарные группы

$$D_n^* = \Phi^{-1}(D_n), \mathbf{T}^* = \Phi^{-1}(\mathbf{T}) \\ \mathbf{O}^* = \Phi^{-1}(\mathbf{O}), \mathbf{I}^* = \Phi^{-1}(\mathbf{I})$$

$\mathbf{N}$ )бинарная группа диэдра, бинарная группа тетраэдра, бинарная группа октаэдра и бинарная группа икосаэдра. Бинарные группы, равно как и ортогональные представления

$$\Phi : \text{SU}(2) \longrightarrow \text{SO}(3)$$

в целом возникают естественным образом при описании состояний физической системы частиц со спином.

## 2.4.4 Characters of linear representations

### Лемма Шура и её следствие

Одним из краеугольных камней теории представлений является следующее утверждение.

**Т е о р е м м а 1** (лемма Шура). Пусть  $(\Phi, V), (\Psi, W)$  —  $\partial$  неприводимых комплексных представления группы  $G$  и  $\sigma : V \longrightarrow W$  - линейное отображение такое, что

$$\Psi(g)\sigma = \sigma\Phi(g) \quad \forall g \in G$$

Тогда:

- i) если представления  $\Phi, \Psi$  неэквивалентны, то  $\sigma = 0$ ;
- ii) если  $V = W, \Phi = \Psi$ , то  $\sigma = \lambda\mathcal{E}$ .

Д оказателъст во. При  $\sigma = 0$  доказывать нечего. Считаем поэтому  $\sigma \neq 0$  и полагаем  $V_0 = \text{Ker } \sigma \subset V$ .

Так как  $\sigma\Phi(g)v_0 = \Psi(g)\sigma v_0$  при любом  $v_0 \in V_0$ , то  $\Phi(g)V_0 = V_0$ , т.е. подпространство  $V_0$  инвариантно относительно  $G$ . Ввиду неприводимости  $(\Phi, V)$  имеем  $V_0 = 0$  или  $V_0 = V$ . Равенство  $V_0 = V$  невозможно, поскольку  $\sigma \neq 0$ . Стало быть,  $\text{Ker } \sigma = 0$ .

Аналогично, полагая  $W_1 = \text{Im } \sigma \subset W$ , будем иметь

$$w_1 \in W, \implies \Psi(g)w_1 = \Psi(g)\sigma(v_1) = \sigma(\Phi(g)v_1) = \sigma' \in W_1$$

так что  $W_1$  - инвариантное подпространство в  $W$ . Снова  $\sigma \neq 0 \implies W_1 \neq 0$ , а поскольку  $(\Psi, W)$  - неприводимое представление, остаётся единственная возможность  $W_1 = W$ .

i) Так как  $\text{Ker } \sigma = 0, \text{Im } \sigma = W$ , то  $\sigma : V \longrightarrow W$  - изоморфизм, и условие i) есть не что иное, как условие эквивалентности представлений  $\Phi, \Psi$  (см. 1, определение 2). Утверждение i) доказано.

ii) По условию  $\sigma : V \longrightarrow V$  - линейный оператор на  $V$ . Пусть  $\lambda$  - одно из его собственных значений; оно существует, поскольку основное поле  $\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто. Линейный оператор  $\sigma_0 = \sigma - \lambda\mathcal{E}$  имеет нетривиальное ядро (в нём содержится собственный вектор) и удовлетворяет равенству  $\Psi(g)\sigma_0 = \sigma_0\Phi(g)$ . По ранее доказанному  $\sigma_0 = 0$ , т.е.  $\sigma = \lambda\mathcal{E}$ .

Следствие. Пусть  $(\Phi, V), (\Psi, W)$  -  $\partial$  неприводимых представления над  $\mathbb{C}$  конечной группы  $G$  порядка  $|G|$  и  $\sigma : V \longrightarrow W$  - произвольное линейное отображение.

Тогда усреднённое отображение

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Psi(g)\sigma\Phi(g)^{-1}$$

обладает следующими свойствами:

- i)  $\Phi \not\sim \Psi \implies \tilde{\sigma} = 0$  ii)  $V = W, \Phi = \Psi \implies \tilde{\sigma} = \lambda\mathcal{E}, \lambda = \frac{\text{tr } \sigma}{\dim V}$ .

Доказательств в. Имеем

$$\begin{aligned} \Psi(g)\tilde{\sigma}\Phi(g)^{-1} &= |G|^{-1} \sum_{h \in G} \Psi(g)\Psi(h)\sigma\Phi(h)^{-1}\Phi(g)^{-1} = \\ &= |G|^{-1} \sum_h \Psi(gh)\sigma\Phi(gh)^{-1} = |G|^{-1} \sum_{t \in G} \Psi(t)\sigma\Phi(t)^{-1} = \tilde{\sigma} \end{aligned}$$

так что  $\Psi(g)\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\Phi(g) \quad \forall g \in G$ . По лемме Шура сразу получаются оба утверждения, причём уточнение, касающееся константы  $\lambda$ , вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} (\dim V)\lambda &= \text{tr } \lambda\mathcal{E} = \text{tr } \tilde{\sigma} = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \text{tr } \Phi(g)\sigma\Phi(g)^{-1} = \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \text{tr } \sigma = \text{tr } \sigma. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известным свойством функции следа:  $\text{tr } CAC^{-1} = \text{tr } A$ .

Нам понадобится матричная формулировка следствия. С этой целью выберем в пространствах  $V, W$  какие-нибудь базисы:

$$V = \langle e_i \mid i \in I \rangle, \quad W = \langle f_j \mid j \in J \rangle$$

Запишем в этих базисах наши отображения (отождествляя их с соответствующими матрицами):

$$\begin{aligned} \Phi_g &= (\varphi_{ii'}(g)), & \Psi_g &= (\psi_{jj'}(g)), \\ \sigma &= (\sigma_{ji}), \tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_{ji}); & i, i' &\in I, \quad j, j' \in J \end{aligned}$$

Согласно определению  $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma}_{ji} = |G|^{-1} \sum_{g \in G, i' \in I, j' \in J} \psi_{jj'}(g) \sigma_{j'i'} \varphi_{i'i}(g^{-1})$$

Отображение  $\sigma : V \longrightarrow W$  у нас совершенно произвольное. Мы можем взять

$$\sigma_{ji} = 0 \quad \forall (j, i) \neq (j_0, i_0); \quad \sigma_{j_0 i_0} = 1$$

Утверждению i) следствия тогда отвечает соотношение

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} \psi_{jj_0}(g) \cdot \varphi_{i_0 i}(g^{-1}) = 0 \quad \forall i, i_0, j, j_0$$

( $\Phi$  и  $\Psi$  - неэквивалентные представления).

Если теперь  $V = W$  и  $\Phi = \Psi$ , то

$$\begin{aligned} \text{tr } \sigma &= \sum_i \sigma_{ii} = \sum_{i', j'} \delta_{j'i'} \sigma_{j'i'} \\ \tilde{\sigma} &= \frac{\text{tr } \sigma}{\dim V} \mathcal{E} \implies \tilde{\sigma}_{ji} = \delta_{ji} \frac{\text{tr } \sigma}{\dim V} = \frac{\delta_{ji}}{\dim V} \sum_{i', j'} \delta_{j'i'} \sigma_{j'i'} \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с (2), получаем

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G, i', j'} \varphi_{jj'}(g) \sigma_{j'i'} \varphi_{i'i}(g^{-1}) = \frac{1}{\dim V} \sum_{i', j'} \delta_{ji} \delta_{j'i'} \sigma_{j'i'}$$

откуда в силу произвола в выборе  $\sigma$  (см. (3)) приходим к выводу, что утверждению ii) следствия отвечает соотношение

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} \varphi_{jj_0}(g) \varphi_{i_0 i}(g^{-1}) = \begin{cases} \frac{\delta_{ji}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В соотношениях (4) и (5) заключена вся нужная нам информация.

### Характеры представлений

С каждым комплексным конечномерным линейным представлением  $(\Phi, V)$  группы  $G$  связывается функция

$$\chi_\Phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

определённая соотношением

$$\chi_\Phi(g) = \text{tr } \Phi(g), \quad g \in G$$

и называемая характером представления. Её обозначают также символом  $\chi_V$  или просто  $\chi$ , если ясно, о каком представлении идёт речь.

Пусть  $\Phi_g = (\varphi_{ij}(g))$  - матрица, отвечающая оператору  $\Phi(g)$  в некотором базисе пространства  $V$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, (n = \dim V)$  - её характеристические корни, взятые с учётом кратностей. По определению

$$\chi_\Phi(g) = \chi_V(g) = \sum_{i=1}^n \varphi_{ii}(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Если  $C$  - любая обратимая матрица, то

$$\text{tr } C\Phi_g C^{-1} = \text{tr } \Phi_g$$

Но мы знаем, что всякое представление  $\Psi$ , эквивалентное  $\Phi$ , имеет вид  $g \mapsto C\Phi_g C^{-1}$ . Поэтому характеры изоморфных (эквивалентных) представлений совпадают. Это замечание показывает, что понятие характера определено правильно.

Отметим ещё ряд элементарных свойств характеров.

Пр е д л о ж е н и е. Пусть  $\chi_\Phi$  - характер комплексного линейного представления  $(\Phi, V)$  группы  $G$ . Тогда:

i)  $\chi_\Phi(e) = \dim V$ ;

ii)  $\chi_\Phi(hgh^{-1}) = \chi_\Phi(g) \forall g, h \in G$ , т.е.  $\chi_\Phi$  - функция, постоянная на классах сопряжённых элементов группы  $G$ ; iii)  $\chi_\Phi(g^{-1}) = \overline{\chi_\Phi(g)}$  для любого элемента  $g \in G$  конечного порядка (черта означает комплексную сопряжённость);

iv) прямой сумме  $\Phi = \Phi' \dot{+} \Phi''$  представлений отвечает характер  $\chi_\Phi = \chi_{\Phi'} + \chi_{\Phi''}$ .

Доказательство. Действительно,  $\chi_\Phi(e) = \text{tr } \Phi(e) = \text{tr } \mathcal{E} = \dim V$ . Далее,

$$\chi_\Phi(hgh^{-1}) = \text{tr } \Phi(hgh^{-1}) = \text{tr } \Phi(h)\Phi(g)\Phi(h)^{-1} = \text{tr } \Phi(g) = \chi_\Phi(g).$$

Для доказательства iii) заметим, что

$$g^m = e \implies \Phi(g)^m = \mathcal{E}$$

и если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - характеристические корни оператора  $\Phi(g)$ , то  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$  - характеристические корни оператора  $\Phi(g)^k$ . В частности,  $\lambda_i^m = 1, 1 \leq i \leq n$ , и, стало быть,  $|\lambda_i| = 1, \bar{\lambda}_i = \lambda_i^{-1}$ . Поэтому

$$\chi_\Phi(g^{-1}) = \text{tr } \Phi(g^{-1}) = \sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_i \bar{\lambda}_i = \overline{\sum_i \lambda_i} = \overline{\chi_\Phi(g)}.$$

Наконец, в случае  $\Phi = \Phi' \dot{+} \Phi''$  мы знаем, что при надлежащем выборе базиса в пространстве представления  $V$  все матрицы  $\Phi_g, g \in G$ , примут вид

$$\Phi_g = \left\| \begin{array}{cc} \Phi'_g & 0 \\ 0 & \Phi''_g \end{array} \right\|$$

откуда  $\text{tr } \Phi_g = \text{tr } \Phi'_g + \text{tr } \Phi''_g$ . Это и значит, что  $\chi_\Phi(g) = \chi_{\Phi'}(g) + \chi_{\Phi''}(g)$ .

Заметим, что при  $n = \dim V = 1$  будет  $\chi_\Phi(g) = \Phi(g)$ , но при  $n > 1$  характер  $\chi_\Phi$  не является гомоморфизмом  $G$  в  $\mathbb{C}^*$ .

П р и м е р 1. Рассмотрим группу  $SU(2)$  в её естественном двумерном представлении. Пусть  $\chi$  - соответствующий характер. Согласно (5) из 1 гл. 1 любая матрица  $g \in SU(2)$  сопряжена с матрицей

$$b_\varphi = \left\| \begin{array}{cc} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{array} \right\|, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

так что классы сопряжённых элементов группы  $SU(2)$  параметризуются вещественными числами  $\varphi$  из указанного интервала. В соответствии со свойством ii) характеров имеем

$$\chi(g) = \chi(hb_\varphi h^{-1}) = \chi(b_\varphi) = e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

При каноническом представлении  $\Phi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$  матрица  $b_\varphi$  переходит в матрицу

$$B_\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

которая также служит удобным представителем в классе сопряжённых ортогональных матриц группы  $SO(3)$ . Очевидно, что

$$\chi_\Phi(B_\varphi) = 1 + 2 \cos \varphi.$$

Формулой (6) мы воспользуемся позднее.

Множество  $\mathbb{C}^G = \{G \longrightarrow \mathbb{C}\}$  всех функций из  $G$  в  $\mathbb{C}$  наделено естественной структурой векторного пространства над  $\mathbb{C}$ : для  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{C}^G$  под  $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2$  понимается функция со значениями

$$(\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2)(g) = \alpha_1\chi_1(g) + \alpha_2\chi_2(g)$$

Функция из  $\mathbb{C}^G$  называется центральной, если она постоянна на сопряжённых классах группы  $G$ . Центральные функции образуют, очевидно, векторное подпространство в  $\mathbb{C}^G$ , которое мы обозначим  $X_{\mathbb{C}}(G)$ . Вообще говоря,  $X_{\mathbb{C}}(G)$  - бесконечномерное пространство, но если в группе  $G$  имеется лишь конечное число классов сопряжённых элементов  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_r$  (так будет всегда для конечной группы  $G$ ), то пространство  $X_{\mathbb{C}}(G)$  конечномерно. Например,

$$X_{\mathbb{C}}(G) = \langle \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r \rangle_{\mathbb{C}}$$

где

$$\Gamma_i(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } g \in \mathcal{K}_i \\ 0, & \text{если } g \notin \mathcal{K}_i \end{cases}$$

По доказанному (предложение ii)) характеры группы  $G$  принадлежат пространству  $X_{\mathbb{C}}(G)$ . Мы увидим, что натянутое на них подпространство на самом деле совпадает с  $X_{\mathbb{C}}(G)$ , по крайней мере для конечной группы  $G$ .

Далее предполагаем, что группа  $G$  конечна. Превратим  $\mathbb{C}^G$  в эрмитово пространство со скалярным произведением

$$(\sigma, \tau)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g) \overline{\tau(g)}, \quad \sigma, \tau \in \mathbb{C}^G$$

Легко проверяется, что форма  $(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma, \tau)_G$  удовлетворяет всем свойствам невырожденной эрмитовой формы. Её сужение на подпространство  $X_{\mathbb{C}}(G) \subset \mathbb{C}^G$  оказывается весьма полезным инструментом, в особенности при изучении характеров линейных представлений.

Теорема 2. Пусть  $\Phi, \Psi$  - неприводимые комплексные представления конечной группы  $G$ . Тогда



$$(\chi_\Phi, \chi_\Psi)_G = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi \approx \Psi \\ 0, & \text{если } \Phi \not\approx \Psi \end{cases}$$

Доклад о. В матричных обозначениях имеем

$$\chi_\Phi(g) = \sum_{i=1}^n \varphi_{ii}(g), \quad \chi_\Psi(g) = \sum_{i=1}^n \psi_{ii}(g)$$

Полагая  $i_0 = i, j_0 = j$  в соотношении (4), а затем суммируя по  $i$  и  $j$  (в допустимых для  $i$  и  $j$  пределах), получим

$$\begin{aligned} 0 &= |G|^{-1} \sum_{g, i, j} \psi_{jj}(g) \varphi_{ii}(g) |G|^{-1} = \sum_g \left( \sum_j \psi_{jj}(g) \right) \left( \sum_i \varphi_{ii}(g^{-1}) \right) = \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi_\Psi(g) \chi_\Phi(g^{-1}) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi_\Psi(g) \overline{\chi_\Phi(g)} = (\chi_\Psi, \chi_\Phi)_G \end{aligned}$$

для любых неэквивалентных неприводимых представлений  $\Phi, \Psi$  группы  $G$ .

Используем теперь (при  $i_0 = i, j_0 = j$ ) соотношение (5):

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\sum_{j,i} \delta_{ji}}{\dim V} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_j \varphi_{jj}(g) \right) \left( \sum_i \varphi_{ii}(g^{-1}) \right) = \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi_\Phi(g) \chi_\Phi(g^{-1}) = (\chi_\Phi, \chi_\Phi)_G. \end{aligned}$$

Так как характеры изоморфных представлений совпадают, то и  $(\chi_\Phi, \chi_\Psi)_G = 1$  при  $\Phi \approx \Psi$ .

Соотношение (9) называется (первым) соотношением ортогональности для характеров.

Следствие. Пусть

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

Н) разложение комплексного  $G$ -пространства  $V$  в прямую сумму неприводимых  $G$ -подпространств  $V_i$ . Если  $W$  - какое-то неприводимое  $G$ -пространство с характером  $\chi_W$ , то число слагаемых  $V_i$  в (10), изоморфных  $W$ , равно  $(\chi_V, \chi_W)_G$  и не зависит от способа разложения (кратность вхождения  $W$  в  $G$ -пространство  $V$ ). Два представления (два  $G$ -пространства) с одним и тем же характером изоморфны.

Доказательство. Как мы уже отмечали ранее (предложение iv)),  $\chi_V = \chi_{V_1} + \dots + \chi_{V_k}$ , и поэтому

$$(\chi_V, \chi_W)_G = (\chi_{V_1}, \chi_W)_G + \dots + (\chi_{V_k}, \chi_W)_G$$

По теореме 2 справа стоит сумма из  $k$  нулей и единиц, причём число единиц совпадает с числом  $G$ -подпространств  $V_i$ , изоморфных  $W$ . Но скалярное произведение  $(\chi_V, \chi_W)_G$  вообще не зависит от какого-либо разложения (см. определяющее соотношение (8)), так что одновременно нами доказана инвариантность кратности вхождения  $W$  в  $G$ -пространство  $V$ .

Два  $G$ -пространства  $V, V'$  с одним и тем же характером  $\chi = \chi_V = \chi_{V'}$  содержат в своих разложениях любое слагаемое, изоморфное данному неприводимому  $G$ -пространству  $W$ , одинаковое число раз, а именно  $(\chi, \chi_W)_G$ . Поэтому в разложениях

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V_i, \quad V' = \bigoplus_{j=1}^l V'_j$$

на неприводимые прямые слагаемые мы можем считать  $l = k, V'_i \cong V_i, 1 \leq i \leq k$ . Следовательно, изоморфны и сами  $G$ -пространства  $V, V'$ .

Замечания, сделанные после доказательства теоремы Машке, и следствие теоремы 2 дают возможность выразить характер  $\chi_\Phi$  любого комплексного линейного представления  $(\Phi, V)$  конечной группы  $G$  в виде целочисленной линейной комбинации

$$\chi_\Phi = \sum_{i=1}^s m_i \chi_i$$

Здесь  $m_i$  - кратность, с которой неприводимое представление  $(\Phi_i, V_i)$  входит в разложение  $(\Phi, V)$ , так что  $\Phi_i \not\cong \Phi_j$  при  $i \neq j$ . Используя соотношение ортогональности (9), мы можем написать

$$(\chi_\Phi, \chi_\Phi)_G = \sum_{i=1}^s m_i^2$$

Стало быть, скалярный квадрат  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi)_G$  характера  $\chi_\Phi$  любого комплексного представления  $\Phi$  всегда является целым числом, равным 1 в точности тогда, когда  $\Phi$  - неприводимое представление.

Мы пришли к замечательному результату. Характеры, или "следы представлений", несущие скудные сведения о каждом отдельном линейном операторе  $\Phi(g)$ , выражают существенные свойства их совокупности  $\{\Phi(g) | g \in G\}$ , т.е. свойства самого представления  $\Phi$ .

**Пример 2.** Убедимся в неприводимости над  $\mathbb{C}$  представлений групп  $A_4, S_4$ , и  $A_5$  вращениями трёхмерного пространства. Для этого надо вернуться к следствию теоремы 2 из 3 и воспользоваться формулами (6) и (11). Представление  $\Phi$ , описанное в 3, показывает, что если  $\pi$  - перестановка порядка  $q$ , то  $\Phi(\pi)$  - поворот на угол  $k \cdot 2\pi/q$ ,  $\text{НО}(k, q) = 1$ , вокруг некоторой оси. Поэтому значения характера  $\chi = \chi_\Phi$  вычисляются непосредственно по формуле (6):

$$\chi(\pi) = 1 + 2 \cos k \frac{2\pi}{q} = 3, -1, 0, 1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

если соответственно  $q = 1, 2, 3, 4, 5 (k = \pm 1), 5 (k = \pm 2)$ . Заметим, что

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \text{tr} \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \varepsilon + \varepsilon^{-1} + 1, \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} + 1$$

$$\varepsilon = \exp \left( \frac{2\pi i}{5} \right).$$

Вычисление порядка перестановки  $\pi$  по её разложению на независимые циклы описано в [ВА I, гл. 4, 2, упр. 13]. Распределение элементов по классам сопряжённости приводилось ранее в виде таблиц. Вот те же таблицы, дополненные значениями характера  $\chi$ :

|        |     |          |       |       |
|--------|-----|----------|-------|-------|
| 12     | 1   | 3        | 4     | 4     |
| $A_4$  | $e$ | (12)(34) | (123) | (132) |
| $\chi$ | 3   | -1       | 0     | 0     |

|        |     |            |        |         |          |
|--------|-----|------------|--------|---------|----------|
| 24     | 1   | 3          | 6      | 8       | 6        |
| $S_4$  | $e$ | $(12)(34)$ | $(12)$ | $(123)$ | $(1234)$ |
| $\chi$ | 3   | -1         | -1     | 0       | 1        |

|        |     |            |         |                    |                    |
|--------|-----|------------|---------|--------------------|--------------------|
| 60     | 1   | 15         | 20      | 12                 | 12                 |
| $A_5$  | $e$ | $(12)(34)$ | $(123)$ | $(12345)$          | $(12354)$          |
| $\chi$ | 3   | -1         | 0       | $(1 + \sqrt{5})/2$ | $(1 - \sqrt{5})/2$ |

Соотношения

$$\begin{aligned}
 (\chi, \chi)_{A_4} &= \frac{1}{12} \{1 \cdot 3^2 + 3(-1)^2 + 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2\} = 1 \\
 (\chi, \chi)_{S_4} &= \frac{1}{24} \{1 \cdot 3^2 + 3(-1)^2 + 6(-1)^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1^2\} = 1 \\
 (\chi, \chi)_{A_5} &= \frac{1}{60} \left\{ 1 \cdot 3^2 + 15(-1)^2 + 20 \cdot 0^2 + 12 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + 12 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \right\} = 1
 \end{aligned}$$

показывают, что представление  $\Phi$  с характером  $\chi$  неприводимо над  $\mathbb{C}$  (см. (11)).

## 2.4.5 Irreducible representations of finite groups

### Число неприводимых представлений

В случае конечных групп предыдущие рассмотрения позволяют ответить на принципиальные вопросы теории представлений. Одной из основных является следующая

**Теорема 1.** Число неприводимых попарно неэквивалентных представлений конечной группы  $G$  над  $\mathbb{C}$  равно числу её классов сопряжённых элементов.

Доказательство теоремы содержится в леммах 1 и 2, если заметить, что число  $r$  классов сопряжённости группы  $G$  мы интерпретируем как размерность пространства  $X_{\mathbb{C}}(G)$  центральных комплекснозначных функций на  $G$  (см. (7) из 4). Так как характеры линейных представлений — центральные функции, то они порождают в  $X_{\mathbb{C}}(G)$  линейное подпространство некоторой размерности  $s \leq r$ . По теореме 2 из 4 характеры неприводимых представлений составляют ортонормированный базис (в метрике  $(*, *)_G$  этого подпространства. Стало быть, интересующее нас число совпадает с  $s$ , и оно не превосходит  $r$ . Осталось установить равенство  $s = r$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\Gamma$  - центральная функция на конечной группе  $G$ ,  $\Phi$  - неприводимое представление над  $\mathbb{C}$  с характером  $\chi_{\Phi}$ .

Тогда для линейного оператора

$$\Phi_{\Gamma} = \sum_{h \in G} \bar{\Gamma}(h) \Phi(h) : V \longrightarrow V$$

имеем  $\Phi_{\Gamma} = \lambda \epsilon$ , где

$$\lambda = \frac{|G|}{\chi_{\Phi}(e)} (\chi_{\Phi}, \Gamma)_G$$

( $\bar{\Gamma}$  - центральная функция, определённая равенством  $\bar{\Gamma}(g) = \overline{\Gamma(g)}$ ). Доказательство. Так как  $\Gamma$  - центральная функция, то

$$\begin{aligned}\Phi(g)\Phi_\Gamma\Phi(g)^{-1} &= \sum_{h \in G} \bar{\Gamma}(h)\Phi(g)\Phi(h)\Phi(g^{-1}) = \\ &= \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(ghg^{-1})}\Phi(ghg^{-1}) = \sum_{t \in G} \bar{\Gamma}(t)\Phi(t) = \Phi_\Gamma\end{aligned}$$

Итак,  $\Phi_\Gamma\Phi(g) = \Phi(g)\Phi_\Gamma \forall g \in G$ . Лемма Шура (теорема 1 из 4), применённая к случаю  $\sigma = \Phi_\Gamma$ , показывает, что  $\Phi_\Gamma = \lambda\mathcal{E}$ . Вычисляя след операторов, стоящих в обеих частях этого равенства, находим

$$\begin{aligned}\lambda\chi_\Phi(e) &= \lambda \dim V = \text{tr } \lambda\mathcal{E} = \text{tr } \Phi_\Gamma = \sum_{h \in G} \bar{\Gamma}(h) \text{tr } \Phi(h) = \\ &= |G| \left\{ |G|^{-1} \sum_{h \in G} \chi_\Phi(h) \overline{\Gamma(h)} \right\} = |G| (\chi_\Phi, \Gamma)_G.\end{aligned}$$

Лемма 2. Характеры  $\chi_1, \dots, \chi_s$  всех попарно неэквивалентных неприводимых представлений группы  $G$  над  $\mathbb{C}$  образуют ортонормированный базис пространства  $X_{\mathbb{C}}(G)$ .

Доказательство. По теореме 2 из 4 система  $\chi_1, \dots, \chi_s$  ортонормирована, и её можно включить в ортонормированный базис пространства  $X_{\mathbb{C}}(G)$ . Пусть  $\Gamma$  - произвольная центральная функция, ортогональная ко всем  $\chi_i : (\chi_i, \Gamma)_G = 0$ . Тогда по лемме 1 линейный оператор  $\Phi_\Gamma^{(i)}$ , отвечающий представлению  $\Phi^{(i)}$  с характером  $\chi_i$ , равен нулю.

По теореме Машке всякое комплексное представление  $\Phi$  можно разложить в прямую сумму

$$\Phi = m_1\Phi^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} m_s\Phi^{(s)}$$

с некоторыми кратностями  $m_1, \dots, m_s$ . В соответствии с этим разложением для оператора  $\Phi_\Gamma$ , определённого соотношением

$$\Phi_\Gamma = \sum_{h \in G} \bar{\Gamma}(h)\Phi(h)$$

имеем

$$\Phi_\Gamma = m_1\Phi_\Gamma^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} m_s\Phi_\Gamma^{(s)} = 0.$$

В частности, это относится к линейному оператору  $\rho_\Gamma$ , где  $\rho$  - регулярное представление (см. пример 5 из 1). Но в таком случае будем иметь (обозначая временно единичный элемент группы  $G$  символом 1, чтобы избежать сочетания  $e_e$ )

$$0 = \rho_\Gamma(e_1) = \sum_{h \in G} \bar{\Gamma}(h)\rho(h)e_1 = \sum_{h \in G} \bar{\Gamma}(h)e_h \implies \bar{\Gamma}(h) = 0.$$

Это верно при любом  $h \in G$ , поэтому  $\bar{\Gamma} = 0$  и, следовательно,  $\Gamma = 0$ . **Пример 1.** Теорема 1, применённая к симметрической группе  $S_3$ , утверждает, что эта группа обладает ровно тремя неприводимыми комплексными представлениями. Искать их не нужно: таблица в конце п. 1 из 2 содержит всю необходимую информацию. Заметим, между прочим, что квадраты степеней представлений  $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}$  удовлетворяют соотношению  $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = |S_3|$ . Сейчас мы увидим, что и в общем случае выполняется аналогичное соотношение.

### Степени неприводимых представлений

Рассмотрим несколько более подробно регулярное представление  $(\rho, \langle e_g | g \in G \rangle_{\mathbb{C}})$ . Обозначим через  $R_h$  матрицу линейного оператора  $\rho(h)$  в данном базисе  $\{e_g | g \in G\}$ . Так как  $\rho(h)e_g = e_{hg}$ , то все диагональные элементы матрицы  $R_h$  при  $h \neq e$  равны нулю и  $\text{tr } R_h = 0$ . Стало быть,

$$\chi_{\rho}(e) = |G|, \quad \chi_{\rho}(h) = 0 \quad \forall h \neq e.$$

Пусть теперь  $(\Phi, V)$  - произвольное неприводимое представление группы  $G$  над  $\mathbb{C}$ . Как показывает следствие теоремы 2 из 4, кратность вхождения  $\Phi$  в  $\rho$  равна скалярному произведению  $(\chi_{\rho}, \chi_{\Phi})_G$ . Согласно (1)

$$\begin{aligned} (\chi_{\rho}, \chi_{\Phi})_G &= |G|^{-1} \sum_{h \in G} \chi_{\rho}(h) \overline{\chi_{\Phi}(h)} = \\ &= |G|^{-1} \chi_{\rho}(e) \overline{\chi_{\Phi}(e)} = |G|^{-1} |G| \chi_{\Phi}(e) = \dim V. \end{aligned}$$

Мы видим, что каждое неприводимое представление (рассматриваемое с точностью до эквивалентности) входит в регулярное с кратностью, равной своей степени. По теореме 1 имеется  $r$  попарно неэквивалентных неприводимых представлений

$$\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(r)}$$

( $r$  - число классов сопряжённости группы  $G$ ), которым соответствуют характеры

$$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r, \quad \chi_i = \chi_{\Phi}^{(i)}$$

степеней

$$n_1, n_2, \dots, n_r, \quad n_i = \chi_i(e)$$

Обычно за  $\Phi^{(1)}$  берут единичное представление, так что  $\chi_1(g) = 1 \quad \forall g \in G$ . Соотношение (2) показывает, что

$$\rho = n_1 \Phi^{(1)} + \dots + n_r \Phi^{(r)},$$

откуда

$$\chi_{\rho} = n_1 \chi_1 + \dots + n_r \chi_r$$

В частности,

$$|G| = \chi_{\rho}(e) = n_1 \chi_1(e) + \dots + n_r \chi_r(e) = n_1^2 + \dots + n_r^2$$

Теорема 2. Каждое неприводимое представление  $\Phi^{(i)}$  входит в разложение регулярного представления  $\rho$  с кратностью, равной своей степени  $n_i$ . Порядок  $|G|$  конечной группы  $G$  и степени  $n_1, \dots, n_r$  всех её неприводимых представлений связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^r n_i^2 = |G|$$

Для групп небольшого порядка красивого соотношения (3) достаточно, чтобы найти все степени  $n_1, \dots, n_r$ , хотя в общем случае нужны, конечно, дополнительные соображения.

Сведения о характерах неприводимых представлений (или короче: о неприводимых характерах) удобно записывать в виде таблицы

| $G$      | $e$     | $g_2$         | $g_3$         | $\dots$ | $g_r$         |
|----------|---------|---------------|---------------|---------|---------------|
| $\chi_1$ | $n_1$   | $\chi_1(g_2)$ | $\chi_1(g_3)$ | $\dots$ | $\chi_1(g_r)$ |
| $\chi_2$ | $n_2$   | $\chi_2(g_2)$ | $\chi_2(g_3)$ | $\dots$ | $\chi_2(g_r)$ |
| $\dots$  | $\dots$ | $\dots$       | $\dots$       | $\dots$ | $\dots$       |
| $\chi_r$ | $n_r$   | $\chi_r(g_2)$ | $\chi_r(g_3)$ | $\dots$ | $\chi_r(g_r)$ |

называемой таблицей характеров. В её верхней строке стоят представители всех  $r$  классов сопряжённости  $\mathcal{K}_i = g_i^G$  группы  $G$ . Например, таблица характеров группы  $S_3$  имеет вид

| $S_3$    | $e$ | (12) | (123) |
|----------|-----|------|-------|
| $\chi_1$ | 1   | 1    | 1     |
| $\chi_2$ | 1   | -1   | 1     |
| $\chi_3$ | 2   | 0    | -1    |

(сравнить с таблицей в конце п. 1 из 2). Как всегда, обозначим символом  $C(g) = C_G(g)$  централизатор в группе  $G$  элемента  $g \in G$ . Мы знаем, что  $|C(g)| |g^G| = |G|$  (см. п. 2 из 3 гл. 1). Поэтому соотношение (9) из 4 (первое соотношение ортогональности), переписанное в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \frac{\chi_i(g_j)}{\sqrt{|C(g_j)|}} \frac{\overline{\chi_k(g_j)}}{\sqrt{|C(g_j)|}} &= \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^r \frac{|G|}{|C(g_j)|} \chi_i(g_j) \overline{\chi_k(g_j)} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^r |g_j^G| \chi_i(g_j) \overline{\chi_k(g_j)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \overline{\chi_k(g)} = \\ &= (\chi_i, \chi_k)_G = \delta_{ik} \end{aligned}$$

означает, что  $r \times r$ -матрица

$$M = \left( \frac{\chi_i(g_j)}{\sqrt{|C(g_j)|}} \right)$$

унитарна по строкам. Но унитарность по строкам равносильна унитарности по столбцам ( $M \cdot {}^t \bar{M} = E = {}^t \bar{M} \cdot M$ ), так что

$$\sum_i \frac{\chi_i(g_j)}{\sqrt{|C(g_j)|}} \frac{\overline{\chi_i(g_k)}}{\sqrt{|C(g_k)|}} = \delta_{jk}$$

или, в более подробной записи,

$$\sum_{i=1}^r \chi_i(g) \overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} 0, & \text{если } g \text{ и } h \text{ не сопряжены,} \\ |C_G(g)| & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad \square$$

Соотношение (4) называется вторым соотношением ортогональности для характеров.

### Представления абелевых групп

Описание неприводимых представлений циклических групп в примере 6 из 11 допускает следующее естественное обобщение.

**Т е о р е м а 3.** Каждое неприводимое представление конечной абелевой группы  $A$  над  $\mathbb{C}$  имеет степень 1. Число таких попарно неэквивалентных представлений равно порядку  $|A|$ . Обратно, если каждое неприводимое представление группы  $A$  имеет степень 1, то  $A$  - абелева группа.

Доказательство. Число  $r$  классов сопряжённости абелевой группы  $A$  совпадает с её порядком, поэтому первые два утверждения вытекают из теоремы 2 (см. также упр. 3 из 4). Положив, далее, в соотношении (3) все  $n_i$  равными 1, мы получим  $r = |A|$ , что равносильно коммутативности группы.

О п р е д е л е н и е. Пусть  $A$  - абелева группа. Множество

$$\hat{A} = \text{Hom}(A, \mathbb{C}^*)$$

гомоморфизмов группы  $A$  в мультипликативную группу  $\mathbb{C}^*$  поля комплексных чисел, рассматриваемое вместе с поточечной операцией умножения

$$(\chi_1 \chi_2)(a) = \chi_1(a) \chi_2(a)$$

$(\chi_i \in \hat{A}, a \in A)$ , называется группой характеров группы  $A$  над  $\mathbb{C}$  ( $\chi^{-1} = \bar{\chi}$ ).

Теорема 4. Группы  $A$  и  $\hat{A}$  изоморфны.

Доказательство. Из теоремы 3 мы знаем во всяком случае, что  $|A| = |\hat{A}|$ . Согласно результатам 3 из гл. 2 группа  $A$  допускает разложение

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$$

в прямое произведение циклических групп  $A_i = \langle a_i \rangle$  (неважно каких, примарных или нет; мы выбираем мультипликативную запись закона умножения в  $A$ ). Если  $|A_i| = s_i$  и  $\varepsilon_i$  - примитивный корень  $s_i$ -й степени из 1, то каждому элементу  $a = a_1^{t_1} a_2^{t_2} \dots a_k^{t_k}$  из  $A$  отвечает характер  $\chi_a \in \hat{A}$ , определённый соотношением

$$\chi_a(a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k}) = \varepsilon_1^{r_1 t_1} \varepsilon_2^{r_2 t_2} \dots \varepsilon_k^{r_k t_k}$$

Очевидно, что  $\chi_a \chi_{a'} = \chi_{aa'}$  (см. определение). Если

$$a = a_1^{t_1} a_2^{t_2} \dots a_k^{t_k} \neq a_1^{t'_1} a_2^{t'_2} \dots a_k^{t'_k} = a'$$

то существует индекс  $i$  с  $t_i \neq t'_i$ . Тогда

$$\chi_a(a_i) = \varepsilon_i^{t_i} \neq \varepsilon_i^{t'_i} = \chi_{a'}(a_i).$$

Следовательно, все характеры  $\chi_a$  попарно различны и отображение  $a \mapsto \chi_a$  устанавливает требуемый изоморфизм между  $A$  и  $\hat{A}$ .

Метод доказательства теоремы 4 даёт, очевидно, явную конструкцию всех неприводимых представлений абелевой группы.

П р и м е р. Пусть  $V_{2^n}$  - элементарная абелева группа порядка  $2^n$ ,  $\chi$  - её неприводимый комплексный характер, отличный от единичного, т.е.  $\chi(a) \neq 1$  для некоторого  $a \in V_{2^n}$ . Тогда  $\text{Ker } \chi = B \cong V_{2^{n-1}}$  и имеет место разложение  $V_{2^n} = B \cup aB$  на смежные классы по  $B$ , так что

$$\chi(a^i b) = (-1)^i, \quad i = 0, 1$$

В частности, четверная группа (Клейна)  $V_4$ , о представлениях которой упоминалось в задаче 2 из 2 гл. 1, имеет следующую таблицу характеров:

| $V_4$    | $e$ | $a$ | $b$ | $ab$ |
|----------|-----|-----|-----|------|
| $\chi_1$ | 1   | 1   | 1   | 1    |
| $\chi_2$ | 1   | -1  | 1   | -1   |
| $\chi_3$ | 1   | 1   | -1  | -1   |
| $\chi_4$ | 1   | -1  | -1  | 1    |

Результаты о представлениях абелевых групп позволяют получить некоторую информацию и о представлениях произвольных конечных групп.

**Теорема 5.** Представления степени 1 конечной группы  $G$  над  $\mathbb{C}$  находятся в биективном соответствии с неприводимыми представлениями Факторгруппы  $G/G'$  ( $G'$  – коммутант группы  $G$ ). Их число равно индексу  $(G : G')$ .

**Доказательство.** Сделаем сначала общее замечание. Пусть  $G$  – произвольная группа,  $K$  – её нормальная подгруппа. Если  $\Phi$  – представление группы  $G$  с ядром  $\text{Ker } \Phi \supset K$ , то можно определить представление  $\bar{\Phi}$  факторгруппы  $G/K$ , полагая

$$\bar{\Phi}(gK) = \Phi(g), \quad g \in G$$

Корректность этого определения очевидна (см. доказательство теоремы 1 из 4 гл. 1). Далее,  $\text{Ker } \bar{\Phi} = (\text{Ker } \Phi)/K$ . В частности, при  $K = \text{Ker } \Phi$  получается точное представление  $\bar{\Phi}$ .

Обратно: всякое линейное представление  $\Psi$  группы  $H$  индуцирует представление  $\Phi$  группы  $G$ , допускающей эпиморфизм  $\pi : G \rightarrow H$ . Достаточно положить

$$\Phi(g) = \Psi(\pi(g))$$

Так как  $\pi$  – эпиморфизм, то  $\Phi(G) = \Psi(H)$  и  $\Phi, \Psi$  одновременно приводимы или неприводимы. По теореме о соответствии (теорема 3 из 4 гл. 1)  $\text{Ker } \Phi = \pi^{-1}(\text{Ker } \Psi)$ . С любым одномерным представлением  $\Phi$  группы  $G$  ассоциируется абелева (а точнее, циклическая) группа  $\text{Im } \Phi$ , так что  $\text{Ker } \Phi \supset G'$ . Доказательство теоремы получается теперь в результате простого соединения теоремы 3, сделанного выше замечания, и теоремы 4 из 4 гл. 1.

### Представления некоторых специальных групп

Хотя в принципе для получения всех неприводимых представлений конечной группы  $G$  достаточно разложить её регулярное представление (теорема 2), на практике это вызывает значительные трудности и приходится избирать обходные пути. Обычно бывает проще построить сначала таблицу характеров, а затем уже конструировать сами представления (см. в этой связи 4 из гл. 4). Впрочем, в тех сравнительно несложных примерах, которые приводятся ниже, прибегать к каким-либо ухищрениям нет необходимости.

А) Пусть  $G$  – произвольная 2-транзитивная группа перестановок, действующая на множестве  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  (см. пример 3 из 3 гл. 1). Пусть, далее,  $\Phi$  – естественное представление группы  $G$  на пространстве  $V = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  с действием  $\Phi(g)e_i = e_{g(i)}$  (см. пример 5 из 1). Как нетрудно понять, значение  $\chi_\Phi(g)$  совпадает с числом  $N(g)$  точек  $i \in \Omega$  (базисных векторов  $e_i$ ), остающихся неподвижными при действии  $g$ . По теореме 3 из 3 гл. 1 имеем

$$\sum_{g \in G} \chi_\Phi(g) \overline{\chi_\Phi(g)} = \sum_{g \in G} \chi_\Phi(g)^2 = \sum_{g \in G} N(g)^2 = 2|G|$$

что, очевидно, переписывается в виде

$$(\chi_\Phi, \chi_\Phi)_G = 2$$

Сравнивая (5) с соотношением (11) из 4, мы приходим к заключению, что  $\Phi$  – прямая сумма двух неприводимых представлений ( $2 = 1 + 1$  – единственная запись 2 в виде суммы квадратов натуральных чисел). Но нам известно также, что  $\Phi = \Phi^{(1)} \dot{+} \Psi$ , где  $(\Phi^{(1)}, U)$  – единичное представление, а  $\Psi$  –  $(n-1)$ -мерное представление, действующее на пространстве  $W = \langle e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n \rangle$ . Если бы разложение  $V = U \oplus W$



можно было продолжить за счёт разложения  $W$ , то неприводимых слагаемых получилось бы больше двух. Таким образом, имеет место следующее нетривиальное утверждение.

Естественное линейное представление  $(\Phi, V)$  2-транзитивной группы перестановок  $G$  над полем  $\mathbb{C}$  является суммой единичного представления и ещё одного неприводимого представления.

В частности, каждая из групп  $S_n, n > 2; A_n, n > 3$ , обладает неприводимым представлением  $\Psi$  над  $\mathbb{C}$  степени  $n - 1$  с характером  $\chi_\Psi$ , вычисляемым по формуле

$$\chi_\Psi(g) = N(g) - 1$$

Как было показано на примере группы  $S_3$  (пример 1 из п. 12), матрицы  $\Psi_g$  находятся без особого труда. Для вычисления значений  $\chi_\Psi(g)$  по формуле (6) достаточно знать цикловую структуру перестановки  $g$ . Небольшая иллюстрация:

|             |     |            |         |         |
|-------------|-----|------------|---------|---------|
| $A_4$       | $e$ | $(12)(34)$ | $(123)$ | $(132)$ |
| $\chi_\Psi$ | 3   | -1         | 0       | 0       |

|             |     |            |        |         |          |
|-------------|-----|------------|--------|---------|----------|
| $S_4$       | $e$ | $(12)(34)$ | $(12)$ | $(123)$ | $(1234)$ |
| $\chi_\Psi$ | 3   | -1         | 1      | 0       | -1       |

|             |     |            |         |           |           |
|-------------|-----|------------|---------|-----------|-----------|
| $A_5$       | $e$ | $(12)(34)$ | $(123)$ | $(12345)$ | $(12354)$ |
| $\chi_\Psi$ | 4   | 0          | 1       | -1        | -1        |

Б) Неприводимые представления знакопеременной группы  $A_4$ . Мы соберём уже известные нам факты. Группа  $A_4$  имеет четыре класса сопряжённых элементов. Представители классов и их мощности указаны в двух верхних строках таблицы

|          |     |            |                    |                    |
|----------|-----|------------|--------------------|--------------------|
| 12       | 1   | 3          | 4                  | 4                  |
| $A_4$    | $e$ | $(12)(34)$ | $(123)$            | $(132)$            |
| $\chi_1$ | 1   | 1          | 1                  | 1                  |
| $\chi_2$ | 1   | 1          | $\varepsilon$      | $\varepsilon^{-1}$ |
| $\chi_3$ | 1   | 1          | $\varepsilon^{-1}$ | $\varepsilon$      |
| $\chi_4$ | 3   | -1         | 0                  | 0                  |

Коммутант  $A'_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  имеет индекс 3 в  $A_4$ , и поэтому  $A_4$  обладает тремя одномерными представлениями:  $\Phi^{(1)} = \chi_1, \Phi^{(2)} = \chi_2, \Phi^{(3)} = \chi_3$  (с ядром  $A'_4$  и с  $\varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1$ ), и одним трёхмерным представлением  $\Phi^{(4)}$  ( $12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$ ). Сравнив таблицы для  $A_4$  из примера 1 и из примера 2 из 4, мы убедимся в том, что представление  $\Phi^{(4)}$  с характером  $\chi_4$  эквивалентно представлению  $\Phi$  группы  $A_4$  вращениями (группа тетраэдра) и представлению  $\Psi$ , связанному с 2-транзитивностью группы  $A_4$ .

В) Неприводимые представления симметрической группы  $S_4$ . Две верхние строки таблицы

|          |     |            |        |         |          |
|----------|-----|------------|--------|---------|----------|
| 24       | 1   | 3          | 6      | 8       | 6        |
| $S_4$    | $e$ | $(12)(34)$ | $(12)$ | $(123)$ | $(1234)$ |
| $\chi_1$ | 1   | 1          | 1      | 1       | 1        |
| $\chi_2$ | 1   | 1          | -1     | 1       | -1       |
| $\chi_3$ | 2   | 2          | 0      | -1      | 0        |
| $\chi_4$ | 3   | -1         | -1     | 0       | 1        |
| $\chi_5$ | 3   | -1         | 1      | 0       | -1       |

взяты из упр. 43 гл. 1. Представление  $\Phi^{(1)} = \chi_1$  единичное. Представление  $\Phi^{(2)}$  задаётся чётностью (знаком) перестановок из  $S_4$ . Так как  $(S_4 : S'_4) = 2$  (пример из п. 24 гл. 1), то одномерных представлений больше нет. Двумерное представление  $\Phi^{(3)}$  с характером  $\chi_3$  и с ядром  $V_4 \triangleleft S_4$  получается из соображений, изложенных в доказательстве теоремы 5. Представление  $\Phi^{(4)}$  с характером  $\chi_4$  отвечает вращениям куба (см. таблицу для  $S_4$  из примера 24). Представление  $\Phi^{(5)} = \Psi$  с характером  $\chi_5$  (см. таблицу в примере 1) связано с 2-транзитивностью группы  $S_4$ . Оно эквивалентно также представлению, отвечающему всем преобразованиям симметрии тетраэдра  $\Delta_4$  (вращения плюс отражения; именно эти преобразования важны при описании колебаний молекулы фосфора (задача 2 из 2 гл. 1 в [BA I]).

Г) Неприводимые представления группы кватернионов  $Q_8$ . О группе  $Q_8$  всё сказано в примере 2 из п. 54 гл. 1. Там же приведено (но не названо своим именем) двумерное неприводимое представление  $\Phi^{(5)}$  с характером  $\chi_5$ ;

|          |     |       |     |     |      |
|----------|-----|-------|-----|-----|------|
| 8        | 1   | 1     | 2   | 2   | 2    |
| $Q_8$    | $e$ | $a^2$ | $a$ | $b$ | $ab$ |
| $\chi_1$ | 1   | 1     | 1   | 1   | 1    |
| $\chi_2$ | 1   | 1     | -1  | -1  | 1    |
| $\chi_3$ | 1   | 1     | -1  | 1   | -1   |
| $\chi_4$ | 1   | 1     | 1   | -1  | -1   |
| $\chi_5$ | 2   | -2    | 0   | 0   | 0    |

Четыре одномерных представления имеют своим ядром коммутант  $\langle a^2 \rangle$  и определяются из таблицы в примере п. 3.

## 2.4.6 Representations of SU(2) and SO(3)

### Описание представлений групп SU(2) и SO(3)

Частью "физического" мышления являются конкретные образы, связанные с представлениями группы SO(3). Действие SO(3), отражающее симметрию многих физических задач, с математической точки зрения интересно, в частности, тем, что оно индуцирует действие на пространстве решений уравнения  $\Delta f = 0$ , где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Н) дифференциальный оператор Лапласа. Двумерный аналог этой задачи был рассмотрен в самом начале главы (задача 1).

Всякий элемент группы SO(3) является произведением нескольких операторов  $B_\varphi, C_\theta$  вида (1) из 1 гл. 1. Но  $B_\varphi$  не действует на  $z$ , а  $C_\theta$  на  $x$ . Поэтому инвариантность уравнения  $\Delta f = 0$  относительно  $B_\varphi$  и  $C_\theta$  вытекает из тех выкладок, которые были проведены в двумерном случае. Мы приходим к заключению, что уравнение  $\Delta f = 0$  инвариантно относительно всей группы SO(3), или, что то же самое,

$$\Delta f = 0 \implies \Delta (\Phi_g f) = 0 \quad \forall g \in \text{SO}(3),$$

где  $\Phi_g f$  - функция, определённая соотношением

$$(\Phi_g f)(x, y, z) = f(g^{-1}(x), g^{-1}(y), g^{-1}(z))$$

По условию для ортогонального преобразования  $g^{-1}$  с матрицей  $(a_{ij})_1^3$  столбец новых переменных имеет вид

$$\begin{vmatrix} g^{-1}(x) \\ g^{-1}(y) \\ g^{-1}(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

Согласно (1)

$$\begin{aligned} (\Phi_g(\Phi_h f))(x, y, z) &= (\Phi_h f)(g^{-1}(x), g^{-1}(y), g^{-1}(z)) = \\ &= f(h^{-1}(g^{-1}(x)), h^{-1}(g^{-1}(y)), h^{-1}(g^{-1}(z))) = \\ &= f((gh)^{-1}(x), (gh)^{-1}(y), (gh)^{-1}(z)) = (\Phi_{gh} f)(x, y, z). \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\Phi_g \Phi_h = \Phi_{gh}$$

т.е. линейные операторы  $\Phi_g, g \in SO(3)$ , действуют на функциях так, что отображение  $\Phi : g \mapsto \Phi_g$  является представлением группы  $SO(3)$ . Этот весьма естественный способ построения представлений (фактически применённый нами ранее при рассмотрении симметрических функций с действующей группой  $S_n$ ), годится в принципе для широкого класса групп и относится к типичным методам функционального анализа. Нужно лишь, исходя из конкретных условий, выбрать надлежащее пространство функций и затем разложить его на неприводимые инвариантные подпространства (задача гармонического анализа).

В случае группы  $SO(3)$ , когда все неприводимые представления конечномерны (общий факт для компактных групп), за функции берутся однородные многочлены

$$f(x, y, z) = \sum_{s,t} a_{s,t} x^s y^t z^{m-s-t}$$

фиксированной степени  $m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ). Они образуют пространство  $P_m$  размерности  $\binom{m+2}{2}$  (см. [BA I, гл. 5, 2, упр. 4]). Так как  $\Delta f \in P_{m-2}$ , то условие  $\Delta f = 0$  эквивалентно  $\binom{m}{2}$  линейным условиям на коэффициенты  $a_{s,t}$ . Решения  $f \in P_m$  уравнения  $\Delta f = 0$  называются однородными гармоническими многочленами (гармоническими полиномами) степени  $m$ . Ввиду линейности оператора  $\Delta$  они образуют подпространство  $H_m$  размерности  $\binom{m+2}{2} - \binom{m}{2} = 2m + 1$  (у нас  $\leq 2m + 1$ , но на самом деле имеет место равенство). Согласно вышесказанному  $H_m$  инвариантно относительно действия  $\Phi = \Phi^{(m)}$  группы  $SO(3)$ . Оказывается, справедлива теорема о том, что пространство  $H_m$  представлений  $\Phi^{(m)}$  неприводимо над  $\mathbb{C}$  и любое неприводимое над  $\mathbb{C}$  представление группы  $SO(3)$  эквивалентно одному из представлений  $(\Phi^{(m)}, H_m)$  нечётной размерности  $2m + 1$ . Вместо того чтобы доказывать эту теорему, мы, ограничившись сказанным, обратимся к группе  $SU(2)$ , где несколько легче получить семейство неприводимых представлений. Ввиду наличия естественного эпиморфизма  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  с ядром из матриц  $\pm E$  (см. 1 из гл. 1) всякое представление  $\Psi$  группы  $SO(3)$  можно считать также представлением  $SU(2)$  (см. доказательство теоремы 5 из 5), удовлетворяющим так называемому условию чётности:  $\Psi_{-e} = \Psi_e$ . При этом, разумеется, будет также выполняться равенство  $\Psi_{-g} = \Psi_g$  для всех  $g \in SU(2)$ . Обратно: при выполнении условия чётности представление  $\Psi$  группы  $SU(2)$  является одновременно представлением группы  $SO(3)$ . Физический смысл имеют и "двузначные" представления  $SO(3)$ , т.е. представления группы  $SU(2)$ , не удовлетворяющие условию чётности. К их числу относится, например, обычное двумерное (спинорное) представление.

Отметим ещё, что любое неприводимое представление группы SO(3), отличное от единичного, является точным, как это прямо вытекает из простоты SO(3) (теорема 3 из 1 гл. 2).

Теорема 1. Пусть  $V_n = \langle x^k y^{n-k} | k = 0, 1, \dots, n \rangle_{\mathbb{C}}$  - пространство однородных многочленов степени  $n$  от двух комплексных переменных с действием  $\Psi^{(n)}$  на нём группы SU(2), определённым по правилу

$$(\Psi_g^{(n)} f)(x, y) = f(\bar{\alpha}x - \beta y, \bar{\beta}x + \alpha y)$$

для каждого элемента

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Тогда  $(\Psi^{(n)}, V_n)$  - неприводимое представление группы SU(2) размерности  $n + 1$ . При  $n$  чётном  $(\Psi^{(n)}, V_n)$  является также неприводимым представлением группы SO(3).

Доказательство. Предположим, что многочлен

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k x^k y^{n-k} \neq 0$$

содержится в некотором инвариантном подпространстве  $U \subset V_n$ . Тогда также

$$\sum_{k=0}^n (e^{-i\varphi})^k a_k x^k y^{n-k} = e^{-in\varphi/2} (\Psi_{b_\varphi}^{(n)} f)(x, y) \in U$$

где  $b_\varphi$  - элемент из SU(2) вида (4) из 1 гл. 1. Так как  $\varphi$  - произвольное вещественное число из интервала  $(0, 2\pi)$ , то можно составить линейную систему с определителем Вандермонда, из которой следует, что

$$f(x, y) \in U \implies x^k y^{n-k} \in U$$

для любого одночлена с коэффициентом  $a_k \neq 0$ . Но если  $x^k y^{n-k} \in U$  для какого-то  $k$ , то и

$$\bar{\alpha}^k \bar{\beta}^{n-k} x^n + \dots + (\bar{\alpha}x - \beta y)^k (\bar{\beta}x + \alpha y)^{n-k} = \Psi_g^{(n)}(x^k y^{n-k}) \in U$$

Взяв  $g$  с  $\alpha\beta \neq 0$ , мы придём в силу (2) к включению  $x^n \in U$ , которое в свою очередь даёт нам

$$\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \bar{\alpha}^s (-\beta)^{n-s} x^s y^{n-s} \in U$$

Так как  $\binom{n}{s} \bar{\alpha}^s (-\beta)^{n-s} \neq 0$ , то  $x^s y^{n-s} \in U, s = 0, 1, \dots, n$ . Стало быть,  $U = V_n$ , и неприводимость  $(\Psi^{(n)}, V_n)$  доказана.

Далее

$$\Psi_{-e}^{(n)}(x^k y^{n-k}) = (-x)^k (-y^{n-k}) = (-1)^n x^k y^{n-k}$$

так что при  $n = 2m$  выполнено условие чётности (см. замечание выше) и  $(\Psi^{(2m)}, V_{2m})$  можно считать неприводимым представлением размерности  $2n + 1$ .

На самом деле  $\Psi^{(2m)}$  эквивалентно представлению  $\Phi^{(m)}$  группы SO(3) на пространстве однородных гармонических многочленов степени  $m$ , но мы на этом не

останавливаемся, как и не пытаемся (хотя это возможно) выбрать в  $V_n$  такой базис, чтобы представление  $\Psi^{(n)}$  стало унитарным. Отметим только, заимствуя терминологию из тензорного анализа, что представление  $\Psi^{(n)}$  группы  $SU(2)$  реализуется также в классе ковариантных симметричных тензоров ранга  $n$ . Полную и достаточно прозрачную теорию представлений компактных групп, включая  $SU(2)$  и  $SO(3)$ , обычно развивают в рамках инфинитезимального метода, опирающегося на соответствие между группами и алгебрами Ли. Немного по этому поводу говорилось в гл. 2.

## 2.4.7 Tensor product of representations

### Контрагredientное представление

Пусть  $(\Phi, V)$  - представление группы  $G$  над полем  $\mathbb{C}$ . Введём в рассмотрение дуальное пространство  $V^*$  (пространство линейных функций на  $V$ ) и положим

$$(\Phi^*(g)f)(v) = f(\Phi(g^{-1})v), \quad f \in V^*, \quad v \in V$$

Линейность оператора  $\Phi^*(g)$  проверяется немедленно. Выберем, далее, в  $V$  и  $V^*$  дуальные базисы:

$$V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle, \quad V^* = \langle f_1, \dots, f_n \rangle, \quad f_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Матрица линейного оператора  $\Phi^*(g)$  в базисе  $(f_1, \dots, f_n)$  является транспонированной к матрице оператора  $\Phi(g^{-1})$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$ :

$$\Phi_g^* = {}^t\Phi_{g^{-1}}$$

Так как

$$\Phi_{gh}^* = {}^t\Phi_{(gh)^{-1}} = {}^t\Phi_{h^{-1}g^{-1}} = {}^t(\Phi_{h^{-1}}\Phi_{g^{-1}}) = {}^t\Phi_{g^{-1}} {}^t\Phi_{h^{-1}} = \Phi_g^* \Phi_h^*,$$

то соотношением (2) (или (1)) определяется, вообще говоря, новое линейное представление  $(\Phi^*, V^*)$  группы  $G$ ; оно называется представлением, контрагredientным (или дуальным) к  $(\Phi, V)$ . Необходимость рассмотрения таких представлений возникает каждый раз, когда группу, действующую на векторах (контравариантные тензоры), мы заставляем, как это фактически уже было в 6, действовать на координатах векторов (ковариантные тензоры). Как нетрудно видеть хотя бы из (2),  $(\Phi^*)^* \approx \Phi$ . Представления, контрагredientные друг к другу, могут и не отличаться или быть эквивалентными. Если, например,  $(\Phi, G)$  - вещественное ортогональное представление, то  $\Phi_g^* = {}^t\Phi_g^{-1} = \Phi_g$ . Но в общем случае представления  $\Phi^*$  и  $\Phi$  не эквивалентны, как показывает простейший пример:

$$C_3 = \langle a | a^3 = e \rangle; \quad \Phi(a) = \varepsilon, \quad \Phi^*(a) = \varepsilon^{-1} \quad (\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0).$$

Для конечной группы  $G$  точный критерий эквивалентности контрагredientных представлений получается на языке теории характеров. Так как характеристические многочлены матриц  $A$  и  ${}^tA$  совпадают, то из элементарных свойств характеров (предложение из 4) вытекает, что

$$\chi_{\Phi^*}(g) = \overline{\chi_{\Phi}(g)}$$

В частности, представление  $\Phi$  с характером, принимающим только вещественные значения, эквивалентно  $\Phi^*$ . Разумеется, всегда

$$(\chi_{\Phi^*}, \chi_{\Phi^*})_G = (\chi_{\Phi}, \chi_{\Phi})_G$$

так что  $\Phi^*, \Phi$  одновременно приводимы или неприводимы. 2. Тензорное произведение представлений. В [BA II] определено и построено тензорное произведение  $T = V \otimes W$  произвольных векторных пространств  $V, W$  над полем  $P$ . Было определено также тензорное произведение

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$$

линейных операторов  $\mathcal{A} : V \longrightarrow V, \mathcal{B} : W \longrightarrow W$ . Имеется в виду, что

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(v \otimes w) = \mathcal{A}v \otimes \mathcal{B}w$$

а далее по линейности

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \left( \sum_{i,j} v_i \otimes w_j \right) = \sum_{i,j} \mathcal{A}v_i \otimes \mathcal{B}w_j$$

Отметим непосредственно вытекающие из определения (3) соотношения

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) &= \mathcal{A}\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}\mathcal{D} \\ (\mathcal{A} + \mathcal{C}) \otimes \mathcal{B} &= \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{C} \otimes \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} + \mathcal{D}) &= \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \\ \mathcal{C}\mathcal{A} \otimes \lambda\mathcal{B} &= \lambda\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \end{aligned}$$

а также формулу для следа

$$\text{tr } \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \text{tr } \mathcal{A} \cdot \text{tr } \mathcal{B}.$$

Пусть теперь  $(\Phi, V), (\Psi, W)$  - два линейных представления группы  $G$  с характерами  $\chi_{\Phi}$  и  $\chi_{\Psi}$  соответственно. Определим естественным образом представление  $(\Phi \otimes \Psi, V \otimes W)$ , полагая

$$(\Phi \otimes \Psi)(g) = \Phi(g) \otimes \Psi(g) \quad \forall g \in G$$

Из общих свойств тензорного произведения линейных операторов и из формулы (4) вытекает, что отображение  $\Phi \otimes \Psi$  будет действительно задавать представление группы  $G$  с пространством представления  $V \otimes W$  и с характером

$$\chi_{\Phi \otimes \Psi} = \chi_{\Phi} \chi_{\Psi}$$

Будем говорить, что  $(\Phi \otimes \Psi, V \otimes W)$  - тензорное произведение представлений  $(\Phi, V)$  и  $(\Psi, W)$ . При  $\Psi = \Phi, W = V$  говорят также о тензорном квадрате. В правой части формулы (5) стоит обычное поточечное произведение центральных функций  $\chi_{\Phi}$  и  $\chi_{\Psi}$ .

Совершенно очевидно, что если  $U$  -  $G$ -инвариантное подпространство в  $V$ , то и  $U \otimes W$  будет  $G$ -инвариантным подпространством в  $V \otimes W$ . Аналогичное замечание относится к  $G$ -инвариантным подпространствам в  $W$ . Но из неприводимости  $V$  и  $W$  вовсе не следует неприводимость  $V \otimes W$ , как показывает пример тензорного квадрата  $\Phi^{(3)} \otimes \Phi^{(3)}$  двумерного представления группы  $S_3$  (см. таблицу в п. 25). В самом деле,  $\dim_{\mathbb{C}} \Phi^{(3)} \otimes \Phi^{(3)} = 4$ , а максимальная степень неприводимого представления группы  $S_3$  равна 2.

Задача эффективного описания неприводимых представлений, содержащихся в  $\Phi \otimes \Psi$  и, более общо, в тензорном произведении

$$\Phi^{(1)} \otimes \Phi^{(2)} \otimes \dots \otimes \Phi^{(p)}$$

нескольких линейных представлений, имеет принципиальное значение, поскольку многие важные и весьма естественные представления групп возникают как тензорные произведения. Именно с этой точки зрения нужно смотреть на представления групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$  (см. 6), а также на примеры 3 и 4 из п. 21. Инвариантные подпространства симметричных и кососимметричных ковариантных (или контравариантных) тензоров постоянно встречаются в различных геометрических приложениях. Рассматриваемая задача привлекательна в особенности тогда, когда справедлива теорема о полной приводимости представлений.

### Кольцо характеров

Для простоты ограничимся случаем конечной группы  $G$  и поля  $\mathbb{C}$ . Пусть  $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(r)}$  - полное множество попарно неэквивалентных неприводимых представлений группы  $G$  над  $\mathbb{C}$  и  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$  - соответствующие им характеры ( $r$  - число классов сопряжённых элементов в  $G$ ). Нам известно, что

$$\Phi \otimes \Psi \approx m_1 \Phi^{(1)} + \dots + m_r \Phi^{(r)},$$

где кратности  $m_i$  зависят только от  $\Phi$  и  $\Psi$ . По формуле (5)

$$\chi_\Phi \chi_\Psi = m_1 \chi_1 + \dots + m_r \chi_r$$

Пусть  $X_{\mathbb{Z}}(G)$  - множество всевозможных целочисленных линейных комбинаций характеров  $\chi_1, \dots, \chi_r$ . Мы доказали ранее, что  $(\chi_1, \dots, \chi_r)$  - ортонормированный базис пространства  $X_{\mathbb{C}}(G)$ , поэтому  $X_{\mathbb{Z}}(G) \subset X_{\mathbb{C}}(G)$  является во всяком случае свободной абелевой группой  $\cong \mathbb{Z}^r$  с образующими  $\chi_1, \dots, \chi_r$ . Её элементы называются обобщёнными характерами группы  $G$ . Истинными характерами будут лишь комбинации  $\sum m_i \chi_i$  с  $m_i \geq 0$ .

Из предыдущих рассуждений видно, что тензорное произведение представлений индуцирует на  $X_{\mathbb{Z}}(G)$  бинарную алгебраическую операцию - коммутативную, ассоциативную, подчиняющуюся законам дистрибутивности. Короче говоря, справедлива

**Т е о р е м а 1.** Обобщённые характеры образуют коммутативное ассоциативное кольцо  $X_{\mathbb{Z}}(G)$  с единицей - единичным характером  $\chi_1$ .

В свою очередь  $X_{\mathbb{C}}(G)$  - коммутативная ассоциативная алгебра размерности  $r$  над  $\mathbb{C}$ . Строение кольца  $X_{\mathbb{Z}}(G)$  (алгебры  $X_{\mathbb{C}}(G)$ ) полностью определяется структурными константами - целыми числами  $m_{ij}^k$  из соотношений

$$\chi_i \chi_j = \sum_k m_{ij}^k \chi_k$$

В частности, равенства  $m_{ij}^k = m_{ji}^k$ ,  $m_{1j}^k = \delta_{kj}$  отражают свойства коммутативности  $X_{\mathbb{Z}}(G)$  и единичности  $\chi_1$ . Согласно (6)

$$\chi_i(g) \chi_j(g) = \sum_k m_{ij}^k \chi_k(g) \quad \forall g \in G$$

Умножив обе части этого соотношения на  $\frac{1}{|G|} \overline{\chi_s(g)}$ , просуммировав по  $g \in G$  и воспользовавшись первым соотношением ортогональности для характеров, получим

$$m_{ij}^s = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g) \overline{\chi_s(g)}$$

Таким образом, структурные константы выражаются в терминах самих характеров. Из (7) можно извлечь одно несложное утверждение. Именно,

$$\begin{aligned} m_{ij}^1 &= \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_i(g) \chi_j(g) \overline{\chi_1(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_i(g) \chi_j(g) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_i(g) \overline{\chi_j(g)} = (\chi_i, \chi_j^*)_G, \end{aligned}$$

где  $\chi_j^* = \chi_\Psi$ ,  $\Psi = \Phi^{(j)*}$  - характер представления, контрагredientного к  $\Phi^{(j)}$  (см. п. 1). Таким образом, единичное представление входит в качестве компоненты в разложение  $\Phi^{(i)} \otimes \Phi^{(j)}$  тогда и только тогда, когда  $\Phi^{(i)}$  эквивалентно представлению  $\Phi^{(j')} = \Phi^{(j)*}$  (в противном случае  $m_{ij}^1 = (\chi_i, \chi_j^*)_G = 0$ ). Отметим ещё, что тензорное произведение одномерного представления  $\Phi^{(i)}$  и произвольного неприводимого представления  $\Phi^{(j)}$  всегда является неприводимым представлением той же размерности, что и  $\Phi^{(j)}$ . Это довольно понятно без всяких объяснений, а формально вытекает из критерия неприводимости характеров. Если

$$\chi = \chi_{\Phi^{(i)} \otimes \Phi^{(j)}} = \chi_i \chi_j$$

то  $\chi_i(g)$  - комплексный корень некоторой степени из 1 и  $\chi_i(g) \overline{\chi_i(g)} = 1$ , а поэтому

$$\begin{aligned} (\chi, \chi)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_i(g) \chi_j(g) \overline{\chi_i(g) \chi_j(g)} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_j(g) \overline{\chi_j(g)} = (\chi_j, \chi_j)_G = 1 \end{aligned}$$

При  $m = 1$ .  $G = S_3$  (см. таблицы в п. 1 из 2 и в п. 2 из 5):

$$\Phi^{(1)} \otimes \Phi^{(3)} \approx \Phi^{(2)} \otimes \Phi^{(3)} \approx \Phi^{(3)}.$$

При  $m = 2$ .  $G = S_4$  (см. пример 3 из п. 45):

$$\Phi^{(2)} \otimes \Phi^{(4)} \approx \Phi^{(5)}, \quad \Phi^{(2)} \otimes \Phi^{(5)} \approx \Phi^{(4)}.$$

Наконец, докажем следующую любопытную теорему, служащую обобщением теоремы 2 из 5 о разложении регулярного представления.

**Теорема 2.** Пусть  $\chi = \chi_\Phi$  - характер точного представления  $(\Phi, V)$  конечной группы  $G$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , принимающий на  $G$  ровно  $m$  различных значений.

Тогда каждый неприводимый характер  $\chi_k$  входит с ненулевым коэффициентом в разложение хотя бы одного характера  $\chi^0 = \chi_1, \chi, \chi^2, \dots, \chi^{m-1}$ . Другими словами, всякое неприводимое представление содержится в разложении некоторой тензорной степени  $\Phi^{\otimes i} = \Phi \otimes \dots \otimes \Phi$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ , любого точного представления  $\Phi$ .

**Доказательство.** Пусть  $\omega_j = \chi(g_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ , различные значения, принимаемые характером  $\chi$  на  $G$ , причём  $\omega_0 = \deg \Phi$ . Пусть, далее,

$$G_j = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(g_j) = \omega_j\}.$$

Ввиду точности представления  $\Phi$  имеем



$$G_0 = \text{Ker } \Phi = \{e\}$$

Пусть  $\chi_k$  - неприводимый характер группы  $G$ , не входящий в разложение ни одного из характеров  $\chi^i$ . Тогда

$$0 = |G| (\chi^i, \chi_k)_G = \\ = \sum_{j=0}^{m-1} (\chi(g_j))^i \sum_{g \in G_j} \overline{\chi_k(g)} = \sum \omega_j^i T_j, \quad 0 \leq i \leq m-1$$

N) однородная система линейных уравнений относительно

$$T_j = \sum_{g \in G_j} \overline{\chi_k(g)}$$

с определителем

$$\det(\omega_j^i) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \dots & \omega_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_0^{m-1} & \omega_1^{m-1} & \dots & \omega_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}$$

отличным от нуля (определитель Вандермонда). Таким образом,  $T_j = 0, j = 0, 1, \dots, m-1$ , т.е.

$$\sum_{g \in G_j} \chi_k(g^{-1}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

В частности,

$$0 = \sum_{g \in G_0} \chi_k(g^{-1}) = \chi_k(e)$$

N) противоречие, доказывающее теорему.

В случае регулярного представления  $\rho$ , очевидно,  $m = 2$ .

## Инварианты линейных групп

Линейной группой степени  $n$  мы, как обычно, называем любую подгруппу в  $\text{GL}(n, P)$ , где  $P$  - некоторое поле. В дальнейшем можно считать  $P = \mathbb{R}$  или  $P = \mathbb{C}$ . Если  $G$  - абстрактная группа и  $\Phi : G \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  - её линейное представление, то пару  $(G, \Phi)$  мы тоже будем называть линейной группой. Линейные преобразования  $\Phi_g$  действуют на столбцы переменных  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\left\| \begin{array}{c} \Phi_g(x_1) \\ \vdots \\ \Phi_g(x_n) \end{array} \right\| = \Phi_g \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\|$$

Они переводят любую форму (однородный многочлен)  $f$  степени  $m$  снова в форму степени  $m$ :

$$(\tilde{\Phi}_g f)(x_1, \dots, x_n) = f(\Phi_{g^{-1}}(x_1), \dots, \Phi_{g^{-1}}(x_n))$$

Различные частные случаи этого действия нам уже встречались (см. 6). Отображение  $\tilde{\Phi}$  определяет представление группы  $G$  на пространстве  $P_m$  форм над  $\mathbb{C}$  степени  $m$  (или ковариантных симметричных тензоров ранга  $m$ ).

Определим. Форма  $f \in P_m$ , остающаяся неподвижной при действии  $\tilde{\Phi}_g$  (т.е.  $\tilde{\Phi}_g f = f \quad \forall g \in G$ ), называется (целым) инвариантом степени  $m$  линейной группы  $(G, \Phi)$ .

На самом деле нужно было бы брать остающийся на месте при действии  $\tilde{\Phi}(G)$  многочлен от коэффициентов "общей" формы степени  $m$ . Так поступают в общей теории инвариантов, но мы для простоты ограничимся данным определением. Если в качестве  $f$  взять рациональную функцию, то можно прийти к понятию рационального инварианта. Важным является также понятие относительного инварианта  $f$ , когда

$$\tilde{\Phi}_g f = \omega_g f$$

где  $\omega_g \in \mathbb{C}$  - множитель, зависящий от элемента  $g \in G$ .

Ясно, что любое множество  $\{f_1, f_2, \dots\}$  инвариантов линейной группы  $(G, \Phi)$  порождает в  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  подкольцо  $\mathbb{C}[f_1, f_2, \dots]$  инвариантов.

Рассмотрим небольшое число примеров. П р и м е р 3. Квадратичная форма  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  и любые многочлены от неё являются целыми инвариантами ортогональной группы  $O(n)$ .

П р и м е р 4. Элементарные симметрические многочлены  $s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, s_n(x_1, \dots, x_n)$  являются целыми инвариантами симметрической группы  $S_n$ , рассматриваемой вместе с каноническим мономорфизмом  $\Phi: S_n \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ . Основная теорема о симметрических многочленах утверждает, что инварианты  $s_1, \dots, s_n$  степеней  $1, 2, \dots, n$  алгебраически независимы, а полиномиальными (рациональными) функциями от них исчерпываются все целые (рациональные) инварианты группы  $(S_n, \Phi)$ .

Относительными инвариантами линейной группы  $(S_n, \Phi)$  служат кососимметрические многочлены:  $\Phi_\pi f = (\det \Phi_\pi) f = \epsilon_\pi f$ . Мы видели [BA I, гл. 6, 2, упр. 4], что любой кососимметрический многочлен  $f$  имеет вид  $f = \Delta_n \cdot g$ , где  $\Delta_n = \prod_{j < i} (x_i - x_j)$ , а  $g$  - произвольный симметрический многочлен, т. е. абсолютный инвариант.

П р и м е р 5. Представлению  $\Phi_A: X \mapsto AXA^{-1}$  степени  $n^2$  полной линейной группы  $GL(n, K)$  с пространством представления  $M_n(K)$  (см. пример 3 из 1) отвечает система из  $n$  алгебраически независимых инвариантов - коэффициентов характеристического многочлена матрицы  $X = (x_{ij})$ . К ним относятся, в частности, хорошо известные нам инварианты  $\text{tr } X = \sum_i x_{ii}$  и  $\det X$ .

П р и м е р 6. На квадратичную форму

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j$$

записанную в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = {}^t X A X, \quad ; A = (a_{ij}) = {}^t A, X = [x_1, \dots, x_n]$$

действует ортогональная группа  $O(n)$ :

$$C \in O(n) \implies (C^{-1}f)(x_1, \dots, x_n) = {}^t(CX)A(CX) = {}^t X {}^t C A C X = {}^t X (C^{-1}A C) X.$$

В этом случае принято говорить об инвариантах квадратичной формы  $f$  относительно  $O(n)$ :  $\text{tr } A, \dots, \det A$ . Для бинарной квадратичной формы  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  инварианты  $a + c$  и  $ac - b^2$ , характеризующие метрически различные классы кривых второго порядка, известны ещё из курса аналитической геометрии.

Пр и м е р 7. Симметрическую группу  $S_3$  рассмотрим как линейную группу степени 2, используя представление  $\Gamma$ , эквивалентное представлению  $\Phi^{(3)}$  из таблицы в конце п. 12:

$$\Gamma_{(123)} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{(23)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

Эквивалентность осуществляется посредством сопряжения

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi_{\sigma}^{(3)} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma_{\sigma}$$

Пусть  $u, v$  - независимые переменные, линейно преобразующиеся посредством  $\Gamma_{\sigma}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{(123)}(u) &= \varepsilon u, & \Gamma_{(123)}(v) &= \varepsilon^{-1} v; \\ \Gamma_{(23)}(u) &= v, & \Gamma_{(23)}(v) &= u. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{(123)}(uv) &= \Gamma_{(123)}^{-1}(u) \Gamma_{(123)}^{-1}(v) = \varepsilon^{-1} u \cdot \varepsilon v = uv \\ \tilde{\Gamma}_{(23)}(uv) &= vu = uv \\ \tilde{\Gamma}_{(123)}(u^3 + v^3) &= (\varepsilon^{-1} u)^3 + (\varepsilon v)^3 = u^3 + v^3 \\ \tilde{\Gamma}_{(23)}(u^3 + v^3) &= v^3 + u^3 = u^3 + v^3 \end{aligned}$$

то группа  $(S_3, \Gamma)$  имеет формы

$$I_1 = uv, \quad I_2 = u^3 + v^3$$

степеней 2 и 3 в качестве своих инвариантов.

Далее, группа  $S_3$  действует естественным образом на многочленах  $f(x_1, x_2, x_3)$  от трёх независимых переменных:

$$(\sigma f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, x_{\sigma 3})$$

Положив

$$\begin{aligned} u &= x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3 \\ v &= x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 \end{aligned}$$

мы увидим, что

$$\Gamma_{\sigma}(u) = x_{\sigma 1} + \varepsilon^2 x_{\sigma 2} + \varepsilon x_{\sigma 3}.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \Gamma_{(123)}(u) &= x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \varepsilon x_1 = \varepsilon u \\ \Gamma_{(23)}(u) &= x_1 + \varepsilon^2 x_3 + \varepsilon x_2 = v \\ \Gamma_{(123)}(v) &= x_2 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon^{-1} v \\ \Gamma_{(23)}(v) &= x_1 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^2 x_2 = u \end{aligned}$$

т.е. действия  $\Gamma_{\sigma}$  на  $u, v$  и  $\sigma$  на  $x_1, x_2, x_3$  согласованы. При подстановке (8) в инварианты (7) последние перейдут в симметрические функции от  $x_1, x_2, x_3$ , которые по теореме 1

из [ВА I, гл. 6, 2] можно выразить через элементарные симметрические функции  $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i(x_1, x_2, x_3)$ . Небольшое упражнение показывает, что

$$I_2 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + 12x_1x_2x_3 = 2\mathbf{s}_1^3 - 9\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 + 27\mathbf{s}_3$$

Специализируем значения  $I_1, I_2$ , взяв за  $x_1, x_2, x_3$  три корня неполного кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0$$

Тогда  $\mathbf{s}_1 = 0, \mathbf{s}_2 = p, \mathbf{s}_3 = -q$ , и, следовательно,

$$I_1 = -3p, \quad I_2 = -27q$$

Но из (7) следует, что

$$v = \frac{I_1}{u}, \quad I_2 = u^3 + \frac{I_1^3}{u^3}, \quad u = \sqrt[3]{\frac{I_2}{2} \pm \sqrt{\frac{I_2^2}{4} - I_1^3}}.$$

Все радикалы выбираются такими, что после подстановки значений (9) получатся формулы

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q + \frac{3}{2}\sqrt{-3D}} \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q - \frac{3}{2}\sqrt{-3D}} \\ uv &= -3p \end{aligned}$$

с величиной  $D = -4p^3 - 27q^2$  - дискриминантом нашего кубического уравнения (см. в [ВА I, гл. 6, 2, формулу (16)]). Так как  $u$  и  $v$  теперь известны, то из линейной системы

$$\begin{aligned} x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3 &= u, \\ x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 &= v, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

находятся сами корни. Мы пришли довольно естественным путём к формулам Кардано, о которых упоминалось в [ВА I, гл. 1, 2, задача 1].

Последний пример не случайно устанавливает связь между инвариантами группы  $S_3$ , являющейся группой Галуа общего кубического уравнения, и формулами Кардано. Теория Галуа в значительной мере связана с изучением инвариантов полей (и соответствующих им групп), порождённых корнями алгебраических уравнений.

Отметим некоторые факты, относящиеся к системе образующих кольца инвариантов. Пусть  $w$  - произвольная форма от  $n$  независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Конечная группа  $G$  с линейным представлением  $\Phi$  степени  $n$  действует как группа перестановок на множестве

$$\Omega = \{\bar{\Phi}_g(w) | g \in G\}$$

Ясно, что любая однородная симметрическая функция  $|G|$  элементов из  $\Omega$  (или, возможно, некоторого делителя числа  $|G|$ ) будет инвариантом линейной группы  $(G, \Phi)$ . Если теперь взять в качестве  $w$  переменную  $x_i$ , то  $x_i$  будет корнем алгебраического уравнения

$$\prod_{g \in G} (X - \Phi_g(x_i)) = 0$$

коэффициенты которого являются инвариантами группы  $(G, \Phi)$ . Таким образом, каждая переменная  $x_i$  является (алгебраической) функцией инвариантов. Если бы алгебраически независимых инвариантов было меньше, чем  $n$ , то мы выразили бы  $x_1, \dots, x_n$  через меньшее число алгебраически независимых переменных, а это невозможно. Следовательно, мы доказали (если можно назвать доказательством столь смелое обращение с алгебраической зависимостью величин) одну из важных теорем теории инвариантов. Теорема 3. Конечная линейная группа степени  $n$  всегда обладает системой из  $n$  алгебраически независимых инвариантов.

Для группы  $(S_3, \Gamma)$  такими инвариантами являются формы (7).

Можно было бы дополнить теорему 3 утверждением о том, что всё кольцо целых инвариантов конечной группы степени  $n$  порождается  $n$  алгебраически независимыми инвариантами  $f_1, f_2, \dots, f_n$  и, как правило, ещё одним инвариантом  $f_{n+1}$  (являющимся алгебраической функцией первых  $n$  инвариантов). Другими словами, все остальные инварианты являются многочленами от  $f_1, \dots, f_n, f_{n+1}$ . Этот факт справедлив для многих других линейных групп, как дискретных, так и непрерывных.

Общая теория инвариантов, развитая в середине XIX века трудами Кэли, Сильвестра, Якоби, Эрмита, Клебша, Гордана и других, а затем испытавшая второе рождение в нескольких фундаментальных работах Д. Гильберта, в наши дни стала частью алгебраической геометрии и теории алгебраических групп. Постоянный интерес к теории инвариантов обусловлен также широкими возможностями её применений во многих областях механики и физики.

## 2.5 Rings, algebras, modules

Повторное рассмотрение алгебраических структур, уже изучавшихся ранее, мотивируется следующими соображениями. Во-первых, хотелось бы в какой-то мере пополнить содержательными утверждениями наши сведения о полях и кольцах, опираясь, где это необходимо, на солидную теоретико-групповую базу. Во-вторых, результаты главы о представлениях групп естественным образом включаются в общую теорию модулей над кольцами, и было бы жаль не упомянуть об этом хотя бы в краткой форме. Фундаментальное понятие модуля важно само по себе и достойно изучения в гораздо более широком аспекте, но для этого читателю рекомендуется обратиться к другим источникам.

### 2.5.1 Ring-theoretic constructions

#### Идеалы колец и факторкольца

Кольца классов вычетов и гомоморфизмы колец, рассмотренные в [ВА I, гл. 4, 3], подготовили достаточно благоприятную почву для введения общих понятий. Напомним, что ядром гомоморфизма

$$f : (K, +, \cdot) \longrightarrow (K', \oplus, \odot)$$

называется подкольцо  $\text{Ker } f = \{a \in K \mid f(a) = 0'\} \subset K$ . Непосредственно видно, что это отнюдь не произвольное подкольцо. Действительно, если  $J = \text{Ker } f \subset K$ , то  $J \cdot x \subseteq J$  (поскольку  $f(zx) = f(z) \odot f(x) = 0' \odot f(x) = 0'$  для всех  $z \in J$ ) и  $x \cdot J \subseteq J$  для всех  $x \in K$ . Стало быть,  $JK \subset J$  и  $KJ \subset J$ . Подкольцо  $J$ , обладающее этими свойствами,

называется (двусторонним) идеалом кольца  $K$ . Итак, ядра гомоморфизмов всегда являются идеалами.

Пример  $m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  подсказывает способ построения идеалов (возможно, не всех) в произвольном коммутативном кольце  $K$ : если  $a$  - какой-то элемент из  $K$ , то множество  $aK$  всегда является идеалом в  $K$ . Действительно,

$$ax + ay = a(x + y), \quad (ax)y = a(xy)$$

Говорят, что  $K$  - главный идеал, порождённый элементом  $a \in K$ .

Если брать кольца только с единицей, то идеалами будут подгруппы аддитивной группы кольца, выдерживающие умножение слева и справа на элементы кольца, а в определении гомоморфизма  $f: K \rightarrow K'$  целесообразно внести условие  $f(1) = 1'$ . При эпиморфизме это условие, конечно, автоматически выполняется. Нормальные подгруппы групп, введённые в гл. 1, и идеалы колец имеют общее происхождение - они являются ядрами гомоморфизмов. Это обстоятельство находит своё выражение и в общности конструкции факторобразований, на чём мы собираемся вкратце остановиться.

При построении факторкольца  $K/J$  кольца  $K$  по идеалу  $J$  будем

исходить из того, что "основу" кольца составляет аддитивная абелева группа. Поэтому за элементы из  $K/J$  следует брать смежные классы  $a + J$  (называемые классами вычетов по модулю идеала  $J$ ), сложение которых осуществляется по обычному правилу:

$$(a + J) \oplus (b + J) = (a + b) + J \\ \ominus(a + J) = -a + J.$$

В качестве произведения тех же классов берём

$$(a + J) \odot (b + J) = ab + J.$$

Необходима уверенность в том, что это умножение определено правильно, т.е. не зависит от выбора представителей соответствующих классов. Пусть  $a' = a + x, b' = b + y$ , где  $x, y \in J$ . Тогда

$$a'b' = ab + ay + xb' = ab + z$$

где  $z = ay + xb' \in J$ , поскольку  $J$  - двусторонний идеал. Поэтому  $a'b'$  лежит в одном смежном классе с элементом  $ab$ , а это и значит, что произведение (2) определено правильно. Для краткости положим  $\bar{a} = a + J$ , так что

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a + b}, \quad \bar{a} \odot \bar{b} = \overline{ab}$$

В частности,  $\bar{0} = J$  и  $\bar{1} = 1 + J$  (если единица 1 имеется в  $K$ ). Нужно ещё убедиться, что для множества  $\bar{K} = K/J = \{\bar{a} | a \in K\}$ , рассматриваемого с операциями  $\oplus, \odot$ , выполнены все аксиомы кольца, но это довольно очевидно, поскольку операции над классами вычетов в  $\bar{K}$  сводятся к операциям над элементами из  $K$ . Скажем, дистрибутивность проверяется так:

$$(\bar{a} \oplus \bar{b}) \odot \bar{c} = \overline{(a + b)c} = \overline{ac + bc} = \overline{ac} \oplus \overline{bc} = \bar{a} \odot \bar{c} \oplus \bar{b} \odot \bar{c}$$

Всё это показывает, что отображение

$$\pi : a \mapsto \bar{a}$$

является эпиморфизмом колец  $K \rightarrow \bar{K}$  с ядром  $\text{Ker } \pi = J$ . От частного примера факторкольца  $Z_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  и эпиморфизма  $\mathbb{Z} \rightarrow Z_m$  мы перешли к рассмотрению ситуации в произвольных кольцах.

Отметим теперь, что все гомоморфные образы кольца  $K$  исчерпываются по существу факторкольцами  $K$  по соответствующим идеалам. Действительно, если  $f : K \rightarrow K'$  - гомоморфизм и  $f(K)$  - образ кольца  $K$  относительно  $f$ , то, рассматривая  $f(K) \subset \subset K'$  вместо  $K'$ , мы придём к эпиморфизму. Чтобы не усложнять обозначений, считаем с самого начала  $f$  эпиморфизмом, т.е. полагаем  $f(K) = K'$ . Согласно общему принципу, изложенному в [ВА I, гл. 1],  $f$  определяет отношение эквивалентности  $O_f$  на  $K$ ; в данном случае  $O_f$  задаётся разбиением  $K$  на смежные классы  $a + \text{Ker } f = C_a$ . Отображение  $f$  устанавливает биективное соответствие  $f'$  между элементами  $a' \in K'$  и классами  $C_a$ , а именно  $f'(C_a) = a'$ , если  $a' = f(a)$ . При этом

$$\begin{aligned} f'(C_a + C_b) &= f'(C_{a+b}) = f(a + b) = f(a) + f(b) = f'(C_a) + f'(C_b), \\ f'(C_a \cdot C_b) &= f'(C_{ab}) = f(ab) = f(a) \cdot f(b) = f'(C_a) \cdot f'(C_b), \end{aligned}$$

так что биективное отображение  $f'$  - изоморфизм (для простоты операции сложения и умножения в  $K$ , в кольце классов вычетов  $K/\text{Ker } f$  и в  $K'$  обозначаются одинаково:  $+$  и  $\cdot$ ).

По сути дела нами доказана

**Теорема 1** (основная теорема о гомоморфизмах). Любой идеал  $J$  кольца  $K$  определяет (при помощи формул (1), (2)) структуру кольца на фактормножестве  $K/J$ , причём  $K/J$  является гомоморфным образом кольца  $K$  с ядром. Обратно: каждый гомоморфный образ  $K' = f(K)$  кольца  $K$  изоморфен факторкольцу  $K/\text{Ker } f$ .

**З а м е ч а н и е.** Правая часть формулы (2), вообще говоря, не совпадает с произведением классов вычетов  $a + J$  и  $b + J$  в теоретикомножественном смысле. Например, при  $K = \mathbb{Z}, J = 8\mathbb{Z}$  целое число  $24 \in 16 + 8\mathbb{Z}$  не содержится в  $(4 + 8\mathbb{Z})^2$ , поскольку  $(4 + 8s)(4 + 8t) = 16u$ .

Мы знаем, что  $Z_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  - поле тогда и только тогда, когда  $m = p$  - простое число. Евклидовость кольца  $\mathbb{Z}$  и кольца многочленов  $P[X]$  над полем  $P$  является причиной их большого сходства.

## Поле разложения многочлена

Как часто бывает, взгляд со стороны на хорошо известный пример даёт возможность лучше понять его и перейти к разумным обобщениям.

**Теорема 2.** Справедливы следующие утверждения:

i) всякий идеал  $J$  кольца многочленов  $P[X]$  над полем  $P$  главный, т.е.  $J = (f(X)) := f(X)P[X]$  для некоторого многочлена  $f$ ;

ii) факторкольцо  $P[X]/(f(X))$  является полем тогда и только тогда, когда  $f$  - неприводимый над  $P$  многочлен.

**Доказательство.** i) Выберем в  $J$  многочлен  $f$  минимальной степени. Если  $g$  - любой многочлен из  $J$ , то деление с остатком на  $f$  ( $P$  - поле, поэтому нет нужды заботиться об обратимости старшего коэффициента у  $g(X)$ ) даст нам равенство  $g = qf + r$ ,  $\deg r < \deg f$ . Из него следует, что  $r \in J$ , поскольку  $g, f, qf$  - элементы идеала. В силу выбора  $f$  заключаем, что  $r = 0$ . Значит,  $g(X)$  делится на  $f(X)$  и  $J = (f(X)) = f(X)P[X]$ , т.е.  $J$  состоит из многочленов, делящихся на  $f(X)$ .

ii) Если  $f(X) = a(X)b(X)$ ,  $0 < \deg a(X), \deg b(X) < \deg f(X)$ , то классы вычетов  $\overline{a(X)}, \overline{b(X)} \in P[X]/(f(X))$  отличны от нуля  $\bar{0}$ , но

$$\overline{a(X)b(X)} = \overline{f(X)} = \bar{0}.$$

Значит,  $P[X]/(f(X))$  обладает нетривиальными делителями нуля и полем быть не может.

С другой стороны, представителем любого класса вычетов в  $P[X]/(f(X))$  может выступать многочлен  $a(X)$ ,  $\deg a(X) < \deg f(X)$ , и если  $a \neq 0$ , а  $f$  неприводим, то найдутся  $b, c \in P[X]$  такие, что  $ab + cf = 1$ . В таком случае  $\bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{f} = \bar{1}$ , т.е.  $\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ . Значит, любой класс вычетов  $\bar{a} \neq \bar{0}$  обратим, и кольцо  $P[X]/(f(X))$  является полем.

Подчеркнём то обстоятельство, что элементы  $\bar{a} = a + (f)$ , где  $a \in P$ , образуют в  $P[X]/(f)$  подкольцо, изоморфное полю  $P$ . В случае неприводимого многочлена  $f(X)$  факторкольцо  $P[X]/(f)$  по теореме 2 является полем, содержащим подполе, изоморфное  $P$ .

Следствие. Для любого неприводимого многочлена  $f(X)$  над полем  $P$  существует расширение  $F \supset P$ , в котором  $f(X)$  имеет по крайней мере один корень. За  $F$  можно взять поле, изоморфное  $P[X]/(f)$ .

Доказательство. Обратим внимание на специальный элемент  $\bar{X} \in P[X]/(f)$ . Для любых  $a_0, a_1, \dots, a_m \in P$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \bar{X}^k &= \sum_k \{a_k + (f)\} \{X + (f)\}^k = \\ &= \sum_k \{a_k + (f)\} \{X^k + (f)\} = \left\{ \sum_k a_k X^k \right\} + (f) = \overline{\sum_k a_k X^k} \end{aligned}$$

Короче, если  $g(Y) = \sum_k a_k Y^k \in P[Y]$ , то  $g(\bar{X}) = \overline{g(X)}$ . Запись  $g(\bar{X})$  имеет, конечно, смысл при отождествлении  $P$  с изоморфным ему полем, содержащимся в  $P[X]/(f)$ . В частности,

$$f(\bar{X}) = \overline{f(X)} = f + (f) = (f) = \bar{0}$$

т.е. элемент  $\bar{X} \in P[X]/(f)$  является корнем многочлена  $f$ .

Замечание. По теореме 1 имеем изоморфизм  $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] \cong \mathbb{R}[X]/J$ , где  $J = \{f \in \mathbb{R}[X] | f(i) = 0\}$ . Так как  $a + ib \neq 0$  при  $(a, b) \neq (0, 0)$ , и так как  $i^2 + 1 = 0 \implies X^2 + 1 \in J$ , то из рассуждений, доказывающих теорему 2, вытекает, что  $J = (X^2 + 1)\mathbb{R}[X]$ . Элементами факторкольца  $\mathbb{R}[X]/J$  являются смежные классы  $(a + bX) + J$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ ; соответствие  $a + ib \mapsto (a + bX) + J$  устанавливает изоморфизм между  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}[X]/J$ . В соответствии с установившейся терминологией принято говорить, что расширение  $F \subset P$  из следствия получено присоединением к  $P$  одного корня  $c$  многочлена  $f : F = P(c)$ . При этом  $f(X) = (X - c)g(X)$ , где  $g \in F[X]$ . Нам представилась реальная возможность построить расширение поля  $P$ , в котором многочлен  $f$  полностью распадается на линейные множители.

Определение. Пусть  $P$  - поле,  $f$  - нормализованный, не обязательно неприводимый многочлен степени  $n$  из  $P[X]$ . Тогда расширение  $F \subset P$  называется полем разложения  $f$  над  $P$ , если  $f(X) = (X - c_1) \dots (X - c_n)$  в  $F[X]$  и  $F = P(c_1, \dots, c_n)$ , т.е.  $F$  получается из  $P$  присоединением корней  $c_1, \dots, c_n$  многочлена  $f$ .

Теорема 3. Для всякого нормализованного многочлена  $f \in P[X]$  степени  $n > 0$  существует хотя бы одно поле разложения.

Доказательство. Условие нормализованности несущественно и используется только для удобства. Пусть

$$f(X) = f_1(X) \dots f_r(X)$$

N)разложение  $f$  на неприводимые нормализованные множители в  $P[X]$ . Согласно следствию теоремы 2 существует расширение  $P_1 \supset P$ , в котором имеется хотя бы один корень многочлена  $f_1$ . Этот корень  $c_1$  будет, разумеется, корнем и для  $f$ .



Пусть уже найдено расширение  $P_k \supset \dots \supset P_1 \supset P$ , над которым  $f$  имеет разложение

$$f(X) = (X - c_1) \dots (X - c_k) g_1(X) \dots g_s(X)$$

с  $k$  (не обязательно различными) линейными множителями,  $k < n$ . Применив опять следствие теоремы 2 к полю  $P_k$  и к неприводимому нормализованному многочлену  $g_1 \in P_k[X]$ , мы построим поле  $P_{k+1} \supset P_k$ , позволяющее отщепить линейный множитель  $X - c_{k+1}$ , где  $c_{k+1} \in P_{k+1}$ , многочлена  $g_1(X)$ , а следовательно, и многочлена  $f(X)$ .

Продолжая действовать подобным образом, мы придём к полному разложению  $f$  на линейные множители над некоторым расширением  $P_n \supset P$ . Либо  $P_n$ , либо какое-то его подполе  $F$  и будет полем разложения для  $f$ . Не исключено, что  $F$  совпадает с  $P$ .

Доказательство теоремы 3 содержит слишком много произвола, чтобы можно было говорить о единственности поля разложения многочлена  $f$ . Хотя на самом деле поле разложения с точностью до изоморфизма определено однозначно, мы докажем это лишь в следующей главе. Сейчас мы ограничимся рассмотрением примеров полей разложения.

**N)** Квадратичное поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  - поле разложения многочлена  $X^2 - d$ .

**N)** Если присоединить к  $Z_2$  корень  $\theta$  неприводимого многочлена  $X^2 + X + 1$ , то получится поле  $Z_2(\theta) = \{0, 1, \theta, 1 + \theta\}$  из четырёх элементов, изоморфное как полю  $Z_2[X]/(X^2 + X + 1)$ , так и полю  $GF(4)$  из [ВА I, гл. 4, 3, п. 5]. Заметим, что

$$X^2 + X + 1 = (X - \theta)(X - \theta^2)$$

т.е.  $Z_2(\theta)$  - поле разложения многочлена  $X^2 + X + 1$ .

3) Многочлен  $X^2 + 1$  неприводим не только над  $\mathbb{R}$ , когда его полем разложения будет  $\mathbb{C}$ , но и над некоторыми другими полями, например над  $Z_3$ . Пусть  $\theta^2 = -1$  (если угодно,  $\theta = X + (X^2 + 1)Z_3[X]$  - элемент поля классов вычетов  $Z_3[X]/(X^2 + 1)$ ). Так как  $X^2 + 1 = (X - \theta)(X - \theta^3)$ , то  $Z_3(\theta) = \{a + b\theta | a, b \in Z_3\}$  - поле разложения для  $X^2 + 1$  над  $Z_3$ .

Между прочим,  $Z_3(\theta)$  изоморфно полю матриц  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in Z_3$ , из [ВА I, гл. 4, 3, упр. 11]. Вот соответствующее отображение:

$$a + b\theta \mapsto a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обратим внимание на то, что

$$\begin{aligned} Z_3(\theta)^* &= \langle \lambda \rangle, \quad \lambda = 1 + \theta, \quad \lambda^2 = -\theta, \quad \lambda^3 = 1 - \theta, \quad \lambda^4 = -1, \\ \lambda^5 &= -1 - \theta, \quad \lambda^6 = \theta, \quad \lambda^7 = -1 + \theta, \quad \lambda^8 = 1, \end{aligned}$$

т.е. мультипликативная группа поля  $Z_3(\theta)$  не только абелева, но и циклическая, как ей положено быть.

**N)** Согласно критерию Эйзенштейна многочлен  $X^3 - 2$  неприводим над  $\mathbb{Q}$ . Так как не все его корни вещественные, то  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  не может быть полем разложения. На самом деле полем разложения для  $X^3 - 2$  служит  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  - примитивный корень степени 3 из 1:

$$X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2})(X - \varepsilon\sqrt[3]{2})(X - \varepsilon^2\sqrt[3]{2})$$

Что касается колец многочленов от нескольких независимых переменных, то уже в  $\mathbb{R}[X, Y]$  идеалы заведомо не исчерпываются главными.

П р и ме р. Множество

$$J = \{Xf + Yg | f, g \in \mathbb{R}[X, Y]\}$$

состоящее из многочленов  $h(X, Y)$  таких, что  $h(0, 0) = 0$ , очевидно, является идеалом в  $\mathbb{R}[X, Y]$ . Так как  $1 \in \mathbb{R}[X, Y]$ , то из  $J = q(X, Y)\mathbb{R}[X, Y]$  следовало бы включение  $q(X, Y) \in J$ . Поэтому  $q(0, 0) = 0$  и, стало быть,  $\deg q \geq 1$ . У нас  $X, Y \in J$ , так что

$$X = qu, \quad Y = qv$$

откуда с необходимостью вытекают равенства  $\deg u = \deg v = 0$ , т.е.  $u, v \in \mathbb{R}$  и  $Y = u^{-1}vX$  - противоречие, показывающее, что идеал  $J$  не является главным.

### Теоремы об изоморфизме колец

Мы уже располагаем довольно значительным арсеналом типов колец и средств, позволяющих строить новые кольца из данного их набора. Примерами служат конструкции кольца матриц  $M_n(K)$ , поля отношений  $Q(K)$  и кольца многочленов  $K[X_1, \dots, X_n]$ , где  $K$  - коммутативное кольцо (целостное в случае  $Q(K)$ ). Полезно обсудить ещё, хотя бы вкратце, теоретико-кольцевые аналоги тех общих фактов о гомоморфизмах, которые были установлены для групп в гл. 1. Доказательства, как правило, ничем не отличаются от случая групп, и оставляются читателю в качестве упражнений.

Основную теорему о гомоморфизмах для колец (теорема 1) мы дополним двумя теоремами об изоморфизме.

Теорема 4. Пусть  $K$  - кольцо,  $L$  - подкольцо,  $J$  - идеал в  $K$ . Тогда  $L + J = \{x + y | x \in L, y \in J\}$  - подкольцо в  $K$ , содержащее

*$J$  в качестве идеала,  $L \cap J$  — идеал в  $L$ . Отображение*

$$\varphi : x + J \mapsto x + (L \cap J), \quad x \in L,$$

осуществляет изоморфизм колец:

$$(L + J)/J \cong L/(L \cap J)$$

Доказательство. Первые два утверждения совершенно очевидны. Что касается последнего, то нужно рассмотреть ограничение  $\pi_0 = \pi|_L$  естественного эпиморфизма  $\pi : K \rightarrow K/J$ . Его образ  $\text{Im } \pi_0$  состоит из смежных классов  $x + J, x \in L$ , т.е.  $\text{Im } \pi_0 = (L + J)/J$ . Ядро  $\text{Ker } \pi_0$  эпиморфизма  $\pi_0 : L \rightarrow (L + J)/J$  состоит из элементов  $x \in L$ , для которых  $x + J = J$ . Значит,  $\text{Ker } \pi_0 = L \cap J$ . По теореме 1 соответствие  $\bar{\pi}_0 : x + (L \cap J) \mapsto \pi_0(x) = x + J$  устанавливает изоморфизм  $L/(L \cap J) \cong (L + J)/J$ . Остаётся заметить, что  $\varphi = \bar{\pi}_0^{-1}$ .

Мы провели это рассуждение, скопированное с доказательства теоремы 3 из 4 гл. 1, для того, чтобы подчеркнуть полный параллелизм с теорией групп.

*Теорема 5. Пусть  $K$  — кольцо,  $J, L$  — его подкольца, причём*

*$J$  - идеал в  $K$  и  $J \subset L$ . Тогда  $\bar{L} = L/J$  - подкольцо в  $K/J$ . Отображение  $\pi^* : L \rightarrow L$  является биективным отображением множества  $\Omega(K, J)$  подколеи в  $K$ , содержащих  $J$ , на множество  $\Omega(\bar{K})$  всех подколеи кольца  $\bar{K}$ . Если  $L \in \Omega(K, J)$ , то  $L$  - идеал в  $K$  тогда и только тогда, когда  $\bar{L}$  - идеал в  $\bar{K}$ , причём*

$$K/L \cong \bar{K}/\bar{L} = (K/J)/(L/J)$$

Доказательство - лёгкое упражнение (см. доказательство теоремы 4 в 4 гл. 1).

Следствие. Пусть  $K$  - коммутативное кольцо с единицей 1. Идеал  $J$  максимален в  $K$  тогда и только тогда, когда факторкольцо  $K/J$  - поле.

На множестве идеалов кольца  $K$  определены следующие операции: сумма  $J_1 + J_2 = \{x_1 + x_2 | x_k \in J_k\}$  пересечение  $J_1 \cap J_2 = \{x | x \in J_1, x \in J_2\}$ ; произведение  $J_1 J_2 = \left\{ \sum_i x_{1i} x_{2i} | x_{ki} \in J_k \right\} \subset J_1 \cap J_2$ .

Можно также говорить о сумме, пересечении, произведении любого конечного числа идеалов, причём справедливо следующее утверждение.

Предложение. Если в кольце  $K$  с единицей имеют место равенства

$$J + J_k = K, \quad k = 1, \dots, n$$

для идеалов  $J, J_1, \dots, J_n$ , то справедливы также равенства

$$J + J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_n = K = J + J_1 J_2 \dots J_n$$

Доказательство. Так как  $J_1 J_2 \dots J_n \subset J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_n$ , то достаточно установить равенство  $J + J_1 J_2 \dots J_n = K$ . При  $n = 1$  оно верно по условию. При  $n = 2$  имеем

$$1 = 1^2 = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x + y_1 y_2$$

где  $x_1, x_2, x \in J, y_i \in J_i$ . Значит,  $1 \in J + J_1 J_2$  и  $K = J + J_1 J_2$ . Далее очевидная индукция по числу  $n$ .

Пусть  $K_1, \dots, K_n$  - конечное семейство колец,  $K = K_1 \times \dots \times K_n$  - декартово произведение множеств. Введём на  $K$  структуру кольца, определив операции сложения и умножения покомпонентно:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 y_1, \dots, x_n y_n). \end{aligned}$$

Мы приходим к внешней прямой сумме  $K = K_1 \oplus \dots \oplus K_n$  колец  $K_i$ . Каждая из компонент  $K_i$  является образом при эпиморфизме  $\pi_i: (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i, 1 \leq i \leq n$ . Если, далее,

$$J_i = \{(0, \dots, x_i, \dots, 0) | x_i \in K_i\}$$

то  $J_i \cong K_i$ ,  $J_i$  - идеал в  $K$  и  $K = J_1 + \dots + J_n$ .

Пусть теперь  $K$  - кольцо с идеалами  $J_1, \dots, J_n$ , причём

$$K = J_1 + \dots + J_n, \quad J_k \cap \left( \sum_{j \neq k} J_j \right) = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Тогда  $K = J_1 \oplus \dots \oplus J_n$  - внутренняя прямая сумма своих идеалов  $J_k$ . Как и в теории групп, различие между внутренними и внешними прямыми суммами колец чисто теоретико-множественное, и нет смысла отражать его в обозначениях.

## 2.5.2 Selected results on rings

### Теория

Этот параграф можно рассматривать как небольшое, но полезное дополнение к главам 4 и 5 в [BA I].

**N)** Целые гауссовы числа. Ранее была доказана факториальность евклидовых колец, к числу которых относятся кольца  $\mathbb{Z}$  и  $P[X]$ . Ниже приводится ещё один пример евклидова кольца, а в следующем пункте - пример факториального кольца, не являющегося евклидовым.

Т е о р е м а 1. Кольцо целых гауссовых чисел  $\mathbb{Z}[i]$  евклидово.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеется в виду числовое кольцо

$$\mathbb{Z}[i] = \{m + in \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

содержащееся в квадратичном поле  $\mathbb{Q}(i) \in \mathbb{C}, i^2 + 1 = 0$ , и геометрически отождествляемое со множеством узлов (точек) целочисленной решётки в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Понятно, что  $\mathbb{Z}[i]$  - целостное кольцо. Мы определим на  $\mathbb{Z}[i]^* = \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$  отображение  $\delta : \mathbb{Z}[i]^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ , полагая

$$\delta(m + in) = |m + in|^2 = m^2 + n^2$$

(т.е.  $\delta(a) = N(a)$  - норма числа  $a$  в  $\mathbb{Q}(i)$ ). Как известно,  $\delta(ab) = \delta(a)\delta(b)$  для всех  $a, b \in \mathbb{Z}[i]^*$ , так что свойство E1) из определения евклидова кольца (см. п. 3, 3 гл. 5 в [BA I]) автоматически выполнено. Чтобы убедиться в справедливости E2), запишем дробь  $ab^{-1}$  с  $b \neq 0$  в виде  $ab^{-1} = \alpha + i\beta$  с  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$  и возьмём ближайшие к  $\alpha, \beta$  целые числа  $k, l$  такие, что  $\alpha = k + \nu, \beta = l + \mu, |\nu| \leq 1/2, |\mu| \leq 1/2$ . Тогда

$$a = b[(k + \nu) + i(l + \mu)] = bq + r$$

где  $q = k + il \in \mathbb{Z}[i]$ , а  $r = b(\nu + i\mu)$ . Так как  $r = a - bq$ , то и  $r \in \mathbb{Z}[i]$ , причём

$$\delta(r) = |r|^2 = |b|^2 (\nu^2 + \mu^2) \leq \delta(b) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}\delta(b) < \delta(b)$$

Стало быть,  $\mathbb{Z}[i]$  - евклидово кольцо.

Кольцо целых гауссовых чисел  $\mathbb{Z}[i]$  удобно для демонстрации в миниатюре методов теории алгебраических чисел. Поэтому мы остановимся на свойствах  $\mathbb{Z}[i]$  чуть подробнее. Сначала докажем несколько простых утверждений.

О п р е д е л е н и е. Целостное кольцо  $K$ , все идеалы которого главные, т.е. имеют вид  $aK$ , называется кольцом главных идеалов.

Предложение 1. Все евклидовы кольца являются кольцами главных идеалов.

Доказательс тво. Для  $\mathbb{Z}$  и  $P[X]$  это было установлено ранее ([BA I] и теорема 2 из 1), а в общем случае рассуждения совершенно аналогичны: если  $J$  - идеал евклидова кольца  $K$ , то  $J = aK$ , как только  $a \in J$  и  $\delta(a) \leq \delta(x)$  для всех  $0 \neq x \in J$ .

Пре д л о ж е н и е 2. Пусть  $K$  - произвольное евклидово кольцо с функцией  $\delta$  и  $U(K)$  - группа его обратимых элементов. Тогда

$$u \in U(K) \iff \delta(u) = \delta(1) \iff \delta(ux) = \delta(x) \quad \forall x \in K^*$$

Доказательство. Действительно, согласно E1),  $\delta(x) = \delta(1 \cdot x) \geq \delta(1)$  для всех  $x \in K^*$ , а если  $u \in U(K)$ , то  $\delta(1) = \delta(u \cdot u^{-1}) \geq \delta(u)$ , так что  $\delta(u) = \delta(1)$ . Обратно: в соответствии с предложением 1

$$\delta(ux) = \delta(x) \forall x \in K^* \implies uxK = xK \implies$$

$$\implies x = uxv \implies uv = 1 \implies u \in U(K).$$

В применении к кольцу  $\mathbb{Z}[i]$  критерий (1) означает, что  $m + in \in U(\mathbb{Z}[i]) \iff m^2 + n^2 = 1$ . Стало быть,  $U(\mathbb{Z}[i]) = \langle i \rangle$  - циклическая группа порядка 4.

О п р е д е л е н и е. Идеал  $J$  кольца  $K$  называется максимальным, если  $J \neq K$  и всякий идеал  $T$ , содержащий  $J$  собственным образом, совпадает с  $K$ .

Предложение 3. В евклидовом кольце  $K$  свойство элемента  $p \in K$  быть простым эквивалентом условию максимальности идеала  $pK$ .

Д оказ а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть  $p$  - простой элемент и  $pK \subset T \subset K$ , где  $T$  - идеал в  $K$ . Согласно предложению 1  $T = aK$ , и так как  $p \in T$ , то  $p = ab$ , где один из элементов  $a, b$  обратим. Если  $b \in U(K)$ , то  $T = aK = abK = pK$ .

Обратно: пусть идеал  $pK$  максимален и  $p = ab$  с  $a \notin U(K)$ . Тогда  $aK \neq K$  и  $pK \subset aK \Rightarrow pK = aK \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = pu = abu \Rightarrow bu = 1 \Rightarrow b \in U(K) \Rightarrow$$

### Каноническое разложение суммы двух квадратов

Посмотрим теперь, что происходит с простым числом  $p \in \mathbb{Z}$  в кольце  $\mathbb{Z}[i]$ . Не исключено, что  $p$  остаётся простым элементом и в  $\mathbb{Z}[i]$ . В противном случае справедливо

Предложение 4. Если простое число  $p \in \mathbb{Z}$  допускает нетривиальное разложение в  $\mathbb{Z}[i]$ , то

$$p = (m + in)(m - in) = m^2 + n^2,$$

где  $m + in, m - in$  - простые элементы в  $\mathbb{Z}[i]$ .

Д оказ а т е л ь с т в о. Пусть  $p = \prod_{k=1}^r p_k$  - его единственное (по теореме 4 из [ВА I, 3, гл. 5]) разложение на простые множители  $p_k$  в количестве  $r > 1$ . В силу предложения 2 имеем  $\delta(p_k) > 1$ , так что из  $p^2 = \delta(p) = \prod \delta(p_k)$ , и из факториальности  $\mathbb{Z}$  следуют с необходимостью равенства

$$r = 2, \quad p = p_1 p_2, \quad \delta(p_1) = \delta(p_2) = p$$

Если  $p_1 = m + in$ , то

$$p = \delta(p_1) = m^2 + n^2 = (m + in)(m - in) \Rightarrow p_2 = m - in$$

в  $\mathbb{Z}[i]$ .

В частности,  $2 = (1 + i)(1 - i)$  не является простым элементом

Мы готовы теперь доказать следующий критерий.

Теорема 2. Простое число  $p \in \mathbb{Z}$  остаётся простым в  $\mathbb{Z}[i]$  тогда и только тогда, когда  $p = 4k + 1$ .

Всякое простое число  $p = 4k + 1$  представимо в виде  $p = m^2 + n^2$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Доказательство. Заметим сначала, что  $t^2 \equiv 0 \pmod{4}$  или  $t^2 \equiv 1 \pmod{4}$  для любого  $t \in \mathbb{Z}$ . Поэтому для нечётного простого числа  $p$ , не являющегося простым в  $\mathbb{Z}[i]$ , предложение 4 приводит к выводу:

$$p = m^2 + n^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod{4} \Rightarrow p = 4k + 1$$

В случае  $p = 4k + 1$  положим  $t = (2k)!$ . Так как, очевидно,

$$\begin{aligned} t &= (-1)^{2k} (2k)! = (-1)(-2)\dots(-2k) \equiv (p-1)(p-2)\dots(p-2k) \equiv \\ &\equiv ((p+1)/2)\dots(p-2)(p-1) \pmod{p}, \end{aligned}$$

то

$$t^2 \equiv (2k)!((p+1)/2)\dots(p-2)(p-1) \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

или, с учётом теоремы Вильсона [ВА I, гл. 6, 1],  $t^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Если теперь  $p$  - простой элемент в  $\mathbb{Z}[i]$ , то из равенства  $(t + i)(t - i) = t^2 + 1 = lp, l \in \mathbb{Z}$ , по теореме 1 из [ВА I, гл. 5, 3] следует делимость на  $p$  одного из элементов  $t + i, t - i$ . Но  $t \pm i = p(m + in) \Rightarrow \pm 1 = pn, n \in \mathbb{Z}$ , что явно невозможно. Из установленных нами фактов несложно извлекается общая теоретико-числовая теорема.

Теорема 3. Число  $t \in \mathbb{Z}$  представимо в виде суммы квадратов двух чисел  $m, n \in \mathbb{Z}$  тогда и только тогда, когда в каноническое разложение  $t$  на простые множители каждый простой делитель  $p = 4k - 1$  входит с чётным показателем.

Доказательство. Действительно, достаточно показать, что если  $\text{НОД}(m, n) = 1$  и  $p \mid (m^2 + n^2)$ , то  $p = 4k + 1$ . Это довольно ясно, если заметить, что:

$$\begin{aligned} \text{НОД}(m, n) = 1, m^2 + n^2 &\equiv 0 \pmod{p}, \quad mn \not\equiv 0 \pmod{p} \implies \\ &\implies m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, n^2 \equiv -m^2 \pmod{p} \implies \\ &\implies (m^{p-2}n)^2 = m^{2p-4}n^2 \equiv -m^{2p-2} \equiv -1 \pmod{p} \end{aligned}$$

Таким образом, существует целое число  $s \in \mathbb{Z}$  такое, что  $s^2 \equiv -1 \pmod{p}$ ,  $s^4 \equiv 1 \pmod{p}$ . Стало быть, порядок  $p - 1$  мультипликативной группы  $\mathbb{Z}^*$  делится на 4 и  $p = 4k + 1$ .

Согласно предложению 3 простота  $p = 4k - 1$  в  $\mathbb{Z}[i]$  эквивалентна максимальной идеалу  $p\mathbb{Z}[i]$ , что в свою очередь выражается свойством факторкольца  $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$  быть полем из  $p^2$  элементов (см. в этой связи упр. 11 в [ВА I], гл. 43 и теоремы об изоморфизме для колец в 1). Это и не удивительно, если учесть, что при  $p = 4k - 1$  многочлен  $X^2 + 1$ , рассматриваемый над  $\mathbb{Z}_p$ , неприводим. Более подробно об этом будет говориться в следующей главе.

### Полиномиальные расширения факториальных колец

Покажем, что кольца многочленов  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  и  $P[X_1, \dots, X_n]$  ( $P$  - поле) факториальны при любом  $P$ . Это важное утверждение непосредственно вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. Если факториально кольцо  $K$ , то факториально и кольцо многочленов  $K[X]$ .

Доказательство. В основе доказательства лежат свойства многочленов, связанные с понятием примитивности и примыкающие к лемме Гаусса [ВА I, гл. 5, 3]. Именно, нам понадобятся следующие два свойства.

а) Примитивные многочлены  $f, g \in K[X]$ , ассоциированные в  $Q(K)[X]$  ( $Q(K)$  - поле отношений факториального кольца  $K$ ), ассоциированы в  $K[X]$  (лёгкое упражнение).

б) Многочлен  $f \in K[X]$  положительной степени, неприводимый над  $K$ , неприводим также над  $Q(K)$  (доказательство в [ВА I] для  $K = \mathbb{Z}$  годится и в общем случае).

Приступая непосредственно к доказательству теоремы, запишем многочлен  $f \in K[X]$  положительной степени в виде  $f = d(f)f_0$ , где  $d(f)$  - содержание многочлена  $f$ , а  $f_0$  - его примитивная составляющая. Индукцией по степени примитивных многочленов мы получим разложение  $f_0$  в произведение  $f_0 = f_1 \dots f_s$  неприводимых над  $K$  примитивных многочленов  $f_1, \dots, f_s$ .

Пусть  $f_0 = g_1 \dots g_t$  - ещё одно такое же разложение. Тогда согласно б)  $f_i$  и  $g_j$  неприводимы над  $Q(K)$ , а поскольку кольцо  $Q(K)[X]$  факториально (см. [ВА I, следствие теоремы 4 из 3, гл. 5]),  $s = t$  и при надлежащем упорядочении многочлен  $f_i$  ассоциирован с  $g_i$  в  $Q(K)[X]$ , а следовательно (по а)), и в  $K[X]$ .

Что касается многочлена  $f$  с необратимым в  $K$  содержанием  $d(f)$ , то, взяв ещё разложение  $d(f) = p_1 \dots p_r$  на простые множители  $p_i \in K$ , мы придём к разложению  $f$ . Единственность такого разложения (в обычном понимании) следует из только что установленной единственности разложения  $f_0$  и из факториальности  $K$ , отвечающей за единственность разложения  $d(f) = p_1 \dots p_r$ .

Теорема 5. Имеют место строгие включения:  $\{\text{евклидовы кольца}\} \subset \{\text{кольца главных идеалов}\} \subset$

$$\subset \{ \oint \text{ акториальнее кольцо } \}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое включение установлено предложением 1. Существуют примеры (мы их не приводим), показывающие, что оно строгое.

Для доказательства второго включения рассмотрим в кольце главных идеалов  $K$  возрастающую последовательность идеалов  $(d_1) \subset (d_2) \subset \dots$ . Непосредственно проверяется, что  $D = \cup_i (d_i)$  - идеал в  $K$ . Следовательно,  $D = (d)$ . По определению  $d \in (d_m) \subset D$  для некоторого  $m$ , откуда  $(d_m) = (d_{m+1}) = \dots$ . Стабилизация на конечном шаге возрастающей цепочки идеалов влечёт обрыв цепочки необратимых делителей  $d_1, d_2, d_3, \dots$  с  $d_i | d_{i-1}$  и, стало быть, существование разложения в  $K$  на неразложимые элементы.

Единственность разложения в  $K$  является следствием тех же причин:

$$(a, b) = aK + bK = dK = (d) \implies d = \text{НО}(a, b) = ax + by$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство следствия ii) из теоремы 3 в [ВА I, гл. 53].

Идеалы  $(2, X)$  в  $\mathbb{Z}[X]$  и  $(X, Y)$  в  $\mathbb{R}[X, Y]$  не являются главными (см. пример из 1). В то же время по теореме 4 кольца  $\mathbb{Z}[i]$  и  $\mathbb{R}[X, Y]$  факториальны. Тем самым истинность цепочки (3) установлена.

Кольца главных идеалов интересны с чисто алгебраической точки зрения, поскольку они характеризуются свойствами таких естественных объектов, как ядра гомоморфизмов. С другой стороны, евклидовы кольца более удобны для исследования в силу наличия в них алгоритма деления с остатком.

### Строение мультипликативной группы $U(Z_n)$ .

Универсальное свойство прямых сумм заключается в следующем довольно очевидном утверждении. Если  $S = K_1 \oplus \dots \oplus K_n$  и  $K$  - произвольное кольцо с заданными гомоморфизмами  $\varphi_i : K \longrightarrow K_i$ , то существует единственный гомоморфизм  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n : K \longrightarrow S)$  с ядром  $\text{Ker } \varphi = \cap \text{Ker } \varphi_i$ , делающий треугольные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi_i} & K_i \\ & \searrow \varphi & \nearrow \pi_i \\ & S & \end{array}$$

при  $i = 1, \dots, n$  коммутативными ( $\pi_i$  - канонические отображения).

Применим это утверждение к кольцу  $K$  с 1 и с идеалами  $J_1, \dots, J_n$  и к прямой сумме

$$S = K/J_1 \oplus \dots \oplus K/J_n$$

Положив  $\varphi_i : K \longrightarrow K/J_i = K_i$ , мы получим гомоморфизм

$$\varphi : x \mapsto (x + J_1, \dots, x + J_n)$$

кольца  $K$  в  $S$  с ядром  $\text{Ker } \varphi = J_1 \cap \dots \cap J_n$ .

Теорема 6 (китайская теорема об остатках). Если в указанных выше условиях  $K$  - кольцо с единицей и  $J_i + J_j = K$  для  $1 \leq i \neq j \leq n$ , то отображение  $\varphi$  (см. (4)) является эпиморфизмом.

Доказательство. Нам нужно убедиться, что при любых заданных элементах  $x_1, \dots, x_n \in K$  найдётся  $x \in K$ , для которого  $x_i + J_i = x + J_i$ , т.е.  $x - x_i \in J_i, i = 1, 2, \dots, n$ . При  $n = 1$  это очевидно, а при  $n = 2$  возьмём элементы  $a_1 \in J_1, a_2 \in J_2$ , для которых  $a_1 + a_2 = 1$ , и положим  $x = x_1 a_2 + x_2 a_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} x - x_1 &= (x_1 a_2 + x_2 a_1) - x_1 (a_1 + a_2) = (x_2 - x_1) a_1 \in J_1, \\ x - x_2 &= (x_1 a_2 + x_2 a_1) - x_2 (a_1 + a_2) = (x_1 - x_2) a_2 \in J_2. \end{aligned}$$

Далее рассуждаем индукцией по  $n$ . Пусть мы уже нашли элемент  $y$ , для которого  $y - x_i \in J_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ . Так как по условию  $J_i + J_n = K, 1 \leq i \leq n-1$ , то согласно предложению из 1  $J_1 \cap \dots \cap J_{n-1} + J_n = K$ . Применим разобранный нами случай  $n = 2$  к идеалам  $J_1 \cap \dots \cap J_{n-1}, J_n$  и к элементам  $x - x_n \in J_n$ . Но

$$x - y \in J_1 \cap \dots \cap J_{n-1} \implies x - y \in J_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

С учётом выбора  $y$  получаем

$$x - x_i = (x - y) + (y - x_i) \in J_i, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Стало быть, элемент  $x$  удовлетворяет всем поставленным требованиям. В теореме 6 и в предшествующих ей рассуждениях кольцо  $K$  не предполагалось коммутативным. Пусть, далее,  $K$  - целостное кольцо и  $a_1, \dots, a_n$  - его  $n$  попарно взаимно простых элементов, т.е.  $a_i K + a_j K = K$  при  $i \neq j$  (в факториальном кольце  $K$  это определение согласуется с определением взаимной простоты, получающимся из разложения  $a_i$  на простые множители). Записывая включение  $x - x_i \in a_i K$  в виде сравнения по модулю главного идеала  $a_i K$ , мы, как обычно, пользуемся обозначением  $x \equiv x_i \pmod{a_i}$ .

Следствие 1. Пусть  $K$  - целостное кольцо и  $a_1, \dots, a_n$  - его попарно взаимно простые элементы. Тогда для любых  $x_1, \dots, x_n \in K$  найдётся элемент  $x \in K$  такой, что

$$x \equiv x_i \pmod{a_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

Следствие 2. Пусть  $n$  - натуральное число с каноническим разложением  $n = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ ,  $Z_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  - кольцо классов вычетов по модулю  $n$  и  $U(Z_n)$  - мультипликативная группа его обратимых элементов. Тогда:

- i)  $Z_n \cong Z_{p_1^{m_1}} \oplus \dots \oplus Z_{p_r^{m_r}}$  (прямая сумма колец);
- ii)  $U(Z_n) \cong U(Z_{p_1^{m_1}}) \times \dots \times U(Z_{p_r^{m_r}})$  (прямое произведение групп).

Доказательство. i) Заменив в (4)  $n$  на  $r$ , положив

$$K = \mathbb{Z}, \quad J_i = p_i^{m_i} \mathbb{Z}, \quad S = Z_{p_1^{m_1}} \oplus \dots \oplus Z_{p_r^{m_r}}$$

мы придём к гомоморфизму  $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow S$  с ядром  $\text{Ker } \varphi = \bigcap_i J_i = n\mathbb{Z}$ . Эпиморфность  $\varphi$  вытекает из теоремы 6, поскольку  $\text{НОД}(p_i, p_j) = 1$  при  $i \neq j$ .

ii) Так как в произвольной прямой сумме  $K = K_1 \oplus \dots \oplus K_r$  компоненты  $K_i$  аннулируют друг друга:  $K_i K_j = 0, i \neq j$ , то непосредственно из определения обратимых элементов следует, что  $U(K) = U(K_1) \times \dots \times U(K_r)$ . Остаётся применить это к разложению i).

Замечание. Из утверждения ii) непосредственно видно, что  $\varphi(n) = \prod_{i=1}^r \varphi(p_i^{m_i})$ , а так как  $\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1)$ , то вновь получается формула для значений функции Эйлера (см. [ВА I, гл. 1, 9, упр. 3]). Порядок элемента конечной группы является делителем порядка группы, поэтому



$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

для любого целого числа  $a$ , взаимно простого с  $n$  (обобщение малой теоремы Ферма, известное под названием теорема Эйлера).

Для полного понимания строения группы  $U(Z_n)$  нам в силу следствия 2 из теоремы 6 достаточно разобрать случай  $n = p^m$ .

Теорема 7. Пусть  $m$  - целое положительное число.

i) Если  $p$  - нечётное простое число, то  $U(Z_{p^m})$  - циклическая группа.

ii) Группы  $U(Z_2)$  и  $U(Z_4)$  - циклические порядков 1 и 2 соответственно, в то время как  $U(Z_{2^m}), m \geq 3$ , - прямое произведение циклической группы порядка  $2^{m-2}$  и циклической группы порядка 2.

Доказательство.

i) По определению взаимно простое с  $n$  целое число  $t$  имеет порядок  $r$  по модулю  $n$ , если  $|\langle t + n\mathbb{Z} \rangle| = r$ , т.е.  $t^r \equiv 1 \pmod{n}$ , но  $t^k \not\equiv 1 \pmod{n}$  для  $k < r$ . При  $r = \varphi(n)$  говорят о примитивном (или первообразном) корне  $t$  по модулю  $n$ . Обычно  $t$  берут из приведённой системы вычетов  $0, 1, \dots, n-1$  по модулю  $n$ , но мы никакой системы вычетов не фиксируем.

Согласно теореме 11 из 3, гл. 2 группа  $Z_p^* = U(Z_p)$  циклическая, т.е. существует примитивный корень  $a_0$  по модулю  $p$ . Так как  $a_0^{p^{m-1}} \equiv a_0 \pmod{p}$ , то и целое число  $a = a_0^{p^{m-1}}$  будет примитивным корнем по модулю  $p$ . С другой стороны,

$$a^{p-1} = a_0^{p^{m-1}(p-1)} = a_0^{\varphi(p^m)} \equiv 1 \pmod{p^m}$$

Значит, смежный класс  $\bar{a} = a + p^m\mathbb{Z}$  порождает в  $U(Z_{p^m})$  циклическую подгруппу порядка  $p-1$ .

Далее,

$$(1+p)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} p^i = 1 + p^2 + \frac{1}{2}(p-1)p^3 + \sum_{i \geq 3} \binom{p}{i} p^i$$

Так как  $p > 2$ , то  $(1+p)^p \equiv 1 + p^2 \pmod{p^3}$ . Предположив по индукции, что  $(1+p)^{p^j} \equiv 1 + p^{j+1} \pmod{p^{j+2}}$ , мы находим

$$\begin{aligned} (1+p)^{p^{j+1}} &= [1 + (1+sp)p^{j+1}]^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (1+sp)^i p^{(j+1)i} = \\ &= 1 + (1+sp)p^{j+2} + \frac{1}{2}(p-1)(1+sp)^2 p^{2(j+1)+1} + \dots \end{aligned}$$

откуда

$$(1+p)^{p^{j+1}} \equiv 1 + p^{j+2} \pmod{p^{j+3}}$$

В частности,

$$(1+p)^{p^{m-1}} \equiv 1 \pmod{p^m}$$

но

$$(1+p)^{p^{m-2}} \equiv 1 + p^{m-1} \not\equiv 1 \pmod{p^m}$$

и, стало быть, смежный класс  $\bar{b} = 1 + p + p^m\mathbb{Z}$  с представителем  $b = 1 + p$  порождает в  $U(Z_{p^m})$  циклическую группу порядка  $p^{m-1}$ . Согласно предложению 2 из 3 гл. 2 элементы  $\bar{a}, \bar{b}$  взаимно простых порядков  $p-1, p^{m-1}$  порождают циклическую группу  $\langle \bar{a}\bar{b} \rangle$  порядка

$$p^{m-1}(p-1) = \varphi(p^m) = |U(Z_{p^m})|.$$

С группами  $U(Z_2)$  и  $U(Z_4)$  всё ясно. При  $m > 2$ , исходя из тривиального сравнения  $5 \equiv 1 + 2^2 \pmod{2^3}$ , индукцией по  $j$  легко проверяется, что

$$5^{2^j} \equiv 1 + 2^{j+2} \pmod{2^{j+3}}.$$

В частности,

$$5^{2^{m-3}} \equiv 1 + 2^{m-1} \not\equiv 1 \pmod{2^m}, \quad 5^{2^{m-2}} \equiv 1 \pmod{2^m}$$

так что 5 имеет порядок  $2^{m-2}$  по модулю  $2^m$  и смежный класс  $5 + 2^m\mathbb{Z}$  порождает в  $U(Z_{2^m})$  циклическую подгруппу индекса 2. Заметим, что  $-1 + 2^m\mathbb{Z} \notin \langle 5 + 2^m\mathbb{Z} \rangle$ , поскольку

$$5^j \equiv -1 \pmod{2^m} \implies 5^j \equiv -1 \pmod{4} \implies 1 \equiv -1 \pmod{4}$$

**N)**противоречие. Так как  $|\langle -1 + 2^m\mathbb{Z} \rangle| = 2$ , то

$$U(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}) = \langle 5 + 2^m\mathbb{Z} \rangle \times \langle -1 + 2^m\mathbb{Z} \rangle$$

**N)**абелева 2-группа типа  $(2^{m-2}, 2)$  (см. 3 из гл. 2).

Следствие. Группа  $U(Z_n)$  является циклической (или, что равносильно, примитивный корень по модулю  $n$  существует) тогда и только тогда, когда целое число  $n > 1$  имеет вид  $2, 4, p^m$  или  $2p^m$ , где  $p$  - нечётное простое число.

## 2.5.3 Modules

Понятие модуля служит носителем фундаментального принципа, выработанного в алгебре почти сто лет назад. Он заключается в том, что предметом изучения любой алгебраической системы должны быть не только внутренние свойства этой системы, но и все её представления (в самом широком смысле этого слова).

### Первоначальные сведения о модулях

Начнём с классического определения. Пусть  $K$  - ассоциативное кольцо с единицей и  $V$  - аддитивно записываемая абелева группа. Пусть, далее, задано отображение  $(x, v) \mapsto xv$  из  $K \times V$  в  $V$ , удовлетворяющее условиям:

$$M1) \quad x(u + v) = xu + xv,$$

$$M2) \quad (x + y)v = xv + yv,$$

$$M3) \quad (xy)v = x(yv),$$

$$M4) \quad 1 \cdot v = v$$

для всех  $x, y \in K, u, v \in V$ . Тогда  $V$  называется левым  $K$ -модулем (или левым модулем над кольцом  $K$ ). Аналогично определяется правый  $K$ -модуль. В дальнейшем мы говорим просто о  $K$ -модуле, хотя в некоторых ситуациях оба вида модулей появляются вместе.

Аксиома M4) (условие унитарности модуля), естественно, является лишней, если кольцо  $K$  не обладает единицей. Более существенно, что возможны модификации аксиомы M3), приспособленные к некоторым неассоциативным кольцам. Пример модуля над неассоциативным кольцом приведён в конце главы. Пока мы будем исходить из данного выше определения.

Пусть  $V$  -  $K$ -модуль. Подгруппа  $U \subset V$  называется подмодулем в  $V$ , если  $xu \in U$  для всех  $x \in K, u \in U$ . Пусть, далее,  $U$  и  $V$  - произвольные  $K$ -модули. Гомоморфизмом  $K$ -модулей (или просто  $K$ -гомоморфизмом) из  $U$  в  $V$  называется отображение  $\sigma : U \rightarrow V$  такое, что

$$\begin{aligned} \sigma(u_1 + u_2) &= \sigma(u_1) + \sigma(u_2), \\ \sigma(xu) &= x\sigma(u) \end{aligned}$$

для всех  $u_1, u_2, u \in U, x \in K$ . Легко проверяется, что  $\text{Ker } \sigma = \{u \in U \mid \sigma(u) = 0\}$  является  $K$ -подмодулем в  $U$ , а образ  $\text{Im } \sigma$  -  $K$ -подмодулем в  $V$ .

Со всяким подмодулем  $U \subset V$  над  $K$  ассоциируется фактормодуль  $V/U = \{v+U \mid v \in V\}$  (факторгруппа аддитивной абелевой группы) с действием  $K$ , определённым по правилу

$$x(v+U) = xv + U.$$

Основная теорема о гомоморфизмах и две теоремы об изоморфизме, доказанные нами для групп, а затем для колец, дословно переносятся, с незначительным изменением доказательств, на модули.

После гл. 1, где рассматривались аксиомы типа M3), M4), и после основательной гл. 3 о представлениях групп (аксиомы M1), M3), M4)) примеры  $K$ -модулей, которые мы приведём, вряд ли вызовут ощущение новизны. Тем не менее стоит их обсудить и сопоставить друг с другом.

**N)** Всякая абелева группа  $A$  является  $\mathbb{Z}$ -модулем. Именно, отображение  $(n, a) \mapsto na$  из  $\mathbb{Z} \times A$  в  $A$  удовлетворяет всем аксиомам M1)-M4). Точка зрения на абелевы группы как на модули над  $\mathbb{Z}$  оказывается весьма полезной. В этом мы убедились в гл. 2 при описании конечно порождённых абелевых групп, где по сути дела была использована вся модульная терминология.

**N)** Всякая абелева группа  $A$  является модулем над своим кольцом эндоморфизмов  $\text{End } A$ . По определению  $\text{End } A$  состоит из всех отображений  $\varphi : A \rightarrow A$ , удовлетворяющих условию  $\varphi(a+a') = \varphi(a) + \varphi(a')$ . Операции сложения и умножения в  $\text{End } A$  вводятся естественным образом:

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(a) &= \varphi(a) + \psi(a), & (\varphi\psi)(a) &= \varphi(\psi(a)), \\ 1(x) &= x, & 0(x) &= 0. \end{aligned}$$

Отображение  $(\varphi, a) \mapsto \varphi(a)$  из  $\text{End } A \times A$  в  $A$  наделяет, очевидно,  $A$  структурой  $\text{End } A$ -модуля.

Векторное пространство  $V$  над полем  $P$  является, несомненно,  $P$ -модулем. Если нам дан ещё линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , то мы наделим  $V$  структурой модуля  $V_{\mathcal{A}}$  над кольцом многочленов  $P[X]$ , полагая

$$f(X)v = f(\mathcal{A})v = \alpha_0 v + \alpha_1 \mathcal{A}v + \dots + \alpha_k \mathcal{A}^k v$$

для любого  $v \in V$  и любого многочлена  $f \in P[X]$ . Аксиомы M1)M4) выполнены, поскольку вместе с  $\mathcal{A}$  оператор  $f(\mathcal{A})$  будет также линейным и

$$(f+g)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A}), \quad (fg)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})$$

(универсальное свойство колец многочленов). Подмодулями в  $V_{\mathcal{A}}$  будут служить  $\mathcal{A}$ -инвариантные подпространства. Различным линейным операторам одного и того же пространства  $V$  соответствуют, вообще говоря, различные (неизоморфные)  $P[X]$ -модули.

Произвольный левый идеал  $J$  кольца  $K$  наделён естественной структурой  $K$ -модуля с действием  $(x, y) \mapsto xy, x \in K, y \in J$ , индуцированным операцией умножения в  $K$ . В случае  $J = K$  кольцо  $K$  рассматривается как модуль  ${}_K K$  над собой. Этот взгляд на  $K$  приводит к плодотворным результатам.

**N)** Возвращаясь к предыдущему примеру, построим фактормодуль  $K/J = \{y+J \mid y \in K\}$ . Согласно общему определению  $(x, y+J) \mapsto xy+J$  - действие  $K$  на  $K/J$ . Заметим, что канонический эпиморфизм  $\pi : K \rightarrow K/J$ , являясь гомоморфизмом  $K$ -модулей, удовлетворяет соотношению  $\pi(xy) = xy+J = x(y+J) = x\pi(y)$ . Если же  $J$  - двусторонний идеал, то  $K/J$  - кольцо и  $\pi$  - гомоморфизм колец:  $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ .

Пересечение  $\cap_i V_i$ , любого семейства подмодулей  $V_i \subset V$  над  $K$  является подмодулем в  $V$ . В частности, пересечение всех подмодулей, содержащих заданное множество  $T \subset V$ , приводит к подмодулю  $\langle T \rangle$ , порождённому множеством  $T$  и состоящему из всевозможных элементов вида  $x_1 t_1 + \dots + x_s t_s$ , где  $x_i \in K, t_i \in T$ . Заметим, кстати, что ненулевые элементы  $t_1, \dots, t_s \in V$  называются линейно зависимыми над  $K$ , если  $x_1 t_1 + \dots + x_s t_s = 0$ , где не все  $x_i$  равны нулю. Подмодуль, порожденный семейством  $\{V_1, \dots, V_m\}$  подмодулей  $V_i$ , называется их суммой и обозначается обычным образом:  $\sum_i V_i = V_1 + \dots + V_m$ .

Модуль  $V$  над  $K$ , порождённый единственным элементом  $v$ , называется циклическим. Он имеет вид  $V = Kv = \{xv | x \in K\}$ , где  $v \in V$ , и является аналогом циклической группы. В частности, циклический модуль  ${}_K K = K \cdot 1$  (см. пример 4) - аналог группы  $(\mathbb{Z}, +)$ .

Если  $V = Kv_1 + \dots + Kv_n$  - сумма конечного числа циклических модулей, то модуль  $V$  называется конечно порождённым или  $K$ -модулем конечного типа.

Легко проверяется, что отображение  $x \mapsto xv$  является гомоморфизмом модулей  ${}_K K \rightarrow Kv$ . Его ядро  $\text{Ann}(v) = \text{Ann}_K(v) = \{x \in K | xv = 0\}$  - левый идеал в  $K$ , называемый аннулятором (или кручением) элемента  $v$ . Таким образом,  $Kv \cong K / \text{Ann}(v)$ . Элемент  $v \in V$  с  $\text{Ann}(v) \neq 0$  называется периодическим. Модуль, все элементы которого периодические, тоже называется периодическим. Если  $V$  не содержит ненулевых периодических элементов, то говорят, что  $V$  - модуль без кручения.

Аннулятором (или кручением)  $K$ -модуля  $V$  называется множество

$$\text{Ann}(V) = \{a \in K | aV = 0\} = \bigcap_{v \in V} \text{Ann}(v)$$

Модуль называется точным, если  $\text{Ann}(V) = 0$ .

К тем же понятиям можно подойти с другой стороны. Пусть  $V(x)$  - множество элементов  $v \in V$ , аннулируемых элементом  $x \in K$ . Если  $K$  - целостное кольцо, то  $V(x) + V(y) \subset V(xy)$  и имеет смысл понятие подмодуля кручения

$$\text{Tor}(V) = \sum_{x \in K} V(x)$$

(кручение - от torsion (англ.)). В случае равенства  $\text{Tor}(V) = V$  говорят, что  $V$  - модуль кручения. Если же  $\text{Tor}(V) = 0$ , то мы снова приходим к понятию модуля без кручения.

Характерные примеры периодических модулей: а) всякая конечная абелева группа (периодический модуль конечного типа над  $\mathbb{Z}$ ; кручение  $-m\mathbb{Z}$  или просто показатель  $m$  группы); б) модуль  $V_A$  над  $P[X]$ , ассоциированный с линейным оператором  $A$  (см. пример 3; кручение - главный идеал, порождённый минимальным многочленом оператора  $A$ ).

Предложение 1.  $\text{Ann}(V)$  всегда является двусторонним идеалом кольца  $K$ . Полагая  $(x + \text{Ann}(V))v = xv$ , мы наделяем  $V$  структурой точного  $K / \text{Ann}(V)$ -модуля.

Доказательство. Положим  $A = \text{Ann}(V)$ . Ясно, что  $A$  - аддитивная подгруппа в  $K$ . Далее,  $(xax')v = xa(x'v) = (xa)v' = x(av') = x \cdot 0 = 0$  для любых  $x, x' \in K, a \in A, v \in V$ , откуда и следует, что  $KA \subseteq A$ , т.е.  $A$  - двусторонний идеал в  $K$ . Если теперь  $x + A = x' + A$ , то  $x - x' \in A$ , откуда  $(x - x')v = 0$ , или  $xv = x'v$ . Стало быть,  $(x + A)v = (x' + A)v$ , т.е. действие факторкольца  $K/A$  на  $V$  определено корректно. Нетрудно проверить, что относительно этого действия  $V$  является  $(K/A)$ -модулем. Наконец,

$$(x + A)V = 0 \implies x + A \in \text{Ann}_{K/A}(V) \implies xV = 0 \implies x \in A$$

Следовательно, лишь нулевой элемент в  $K/A$  аннулирует  $V$ .

Из предложения 1 вытекает, что факторкольцо  $K / \text{Ann}(V)$  изоморфно подкольцу кольца  $\text{End}(V)$  (см. пример 2).

Если  $V, W$  - два  $K$ -модуля, то множество  $\text{Hom}_K(V, W)$  всех  $K$ -линейных гомоморфизмов  $\sigma : V \longrightarrow W$  является абелевой группой относительно операции поточечного сложения гомоморфизмов:

$$\begin{aligned} (\sigma + \tau)(xv) &= \sigma(xv) + \tau(xv) = x\sigma(v) + x\tau(v) = \\ &= x(\sigma(v) + \tau(v)) = x((\sigma + \tau)(v)). \end{aligned}$$

Для модулей  $V, W$  над коммутативным кольцом  $K$  множество  $\text{Hom}_K(V, W)$  само является  $K$ -модулем, если под  $x\sigma, x \in K, \sigma \in \text{Hom}_K(V, W)$ , понимать отображение  $v \mapsto x(\sigma(v))$ :

$$\begin{aligned} (x\sigma)(yv) &= x \cdot \sigma(yv) = x(y\sigma(v)) = (xy)(\sigma(v)) = \\ &= (yx)(\sigma(v)) = y(x\sigma(v)) = y((x\sigma)(v)). \end{aligned}$$

В случае  $W = V$  множество  $\text{End}_K(V) = \text{Hom}_K(V, V)$  является кольцом; умножением служит естественная композиция  $K$ -гомоморфизмов  $\varphi \circ \psi$ :

$$(\varphi \circ \psi)(xv) = \varphi(\psi(xv)) = \varphi(x\psi(v)) = x\varphi(\psi(v)) = x((\varphi \circ \psi)(v))$$

Следует иметь в виду, что, рассматривая  $V$  как аддитивную абелеву группу, мы пишем  $\text{End}_{\mathbb{Z}}(V)$  и, вообще говоря,  $\text{End}_K(V)$  - собственное подкольцо в  $\text{End}_{\mathbb{Z}}(V)$ . В случае векторного пространства  $V$  над полем  $K$  обычно пишут  $\mathcal{L}(V) = \text{End}_K(V)$ , называя  $\mathcal{L}(V)$  кольцом (или алгеброй) линейных операторов.

Кольцо  $\text{End}_K(V)$   $K$ -эндоморфизмов модуля  $V$  называют ещё централизатором кольца  $K$  и  $V$ . Его роль особенно заметна в случае неприводимых модулей. Модуль  $V$  над кольцом  $K$  называется неприводимым (или простым), если: а)  $V \neq 0$ ; б)  $0, V$  - единственные подмодули в  $V$ ; в)  $KV \neq 0$  (это условие автоматически выполняется, если  $K$  содержит единицу). Ясно, что  $K$ -модуль  $V \neq 0$  неприводим тогда и только тогда, когда  $V = Kv$  - циклический модуль при любом  $v \neq 0$  из  $V$ .

Примечание 2 (лемма Шура). Если  $V, W$  - неприводимых  $K$ -модулей и  $\sigma$  - ненулевой  $K$ -гомоморфизм из  $V$  в  $W$ , то  $\sigma$  - изоморфизм. Далее,  $\text{End}_K(V)$  - кольцо с делением (тело) для любого неприводимого  $K$ -модуля  $V$ .

Докладательство см. в 4 гл. 3, где та же лемма Шура (теорема 1) доказана для неприводимых  $G$ -пространств.

### Свободные модули

Мы называем  $K$ -модуль  $V$  (внутренней) прямой суммой своих подмодулей  $V_1, \dots, V_n$ , если

$$V = V_1 + \dots + V_n \quad \text{и} \quad V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, n.$$

Другими словами,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  (обозначение прямой суммы подмодулей), если любой элемент  $v \in V$  единственным образом записывается в виде линейной комбинации  $v = v_1 + \dots + v_n, v_i \in V_i$ . Внешняя прямая сумма  $K$ -модулей  $V_1, \dots, V_n$  определяется очевидным образом (как в случае колец), с действием  $x(v_1, \dots, v_n) = (xv_1, \dots, xv_n)$  элемента  $x \in K$  на строку  $(v_1, \dots, v_n), v_i \in V_i$ .

Пусть, далее,  $V$  -  $K$ -модуль и  $\{v_1, \dots, v_n\}$  - конечное подмножество в  $V$ . Говорят, что  $\{v_1, \dots, v_n\}$  порождает  $V$  свободно, если  $V = Kv_1 + \dots + Kv_n$  и каждое отображение  $\varphi$  множества  $\{v_1, \dots, v_n\}$  в какой-либо  $K$ -модуль  $W$  продолжается до  $K$ -гомоморфизма  $\tilde{\varphi} : V \longrightarrow W$ , так что  $\tilde{\varphi}(v_i) = \varphi(v_i), 1 \leq i \leq n$ .

Модуль  $V$  над  $K$ , свободно порождённый некоторым подмножеством  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , называется свободным модулем ранга  $n$ , а  $\{v_1, \dots, v_n\}$  - его (свободным) базисом над  $K$ .

Пре дложен и е 3. Эквивалентны утверждения:

i) множество  $\{v_1, \dots, v_n\}$  порождает  $V$  свободно;

ii) множество  $\{v_1, \dots, v_n\}$  линейно независимо и  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ ;

iii) каждый элемент  $v \in V$  однозначно записывается в виде  $v = \sum_i x_i v_i, x_i \in K$

iv)  $V = Kv_1 \oplus \dots \oplus Kv_n$  - прямая сумма и  $\text{Ann}(v_i) = 0$ ;

v)  $V \cong_K K \oplus \dots \oplus K$  - прямая сумма  $n$  экземпляров  ${}_K K$  (таким образом, свободный  $K$ -модуль ранга  $n$  относительно базиса  $\{v_1, \dots, v_n\}$  изоморфен модулю  $K^n$  строк  $(x_1, \dots, x_n)$  длины  $n$  с компонентами  $x_i \in K$ ).

Доказательство близко к рассуждениям, проведённым в [BA II] для линейных пространств над полем, но нужно соблюдать некоторую осторожность, связанную либо с некоммутативностью кольца  $K$ , либо с существованием необратимых элементов в  $K$ .

Имеются довольно сложные примеры некоммутативных колец с  $K^m \cong K^n$  при  $m \neq n$ , но коммутативные кольца в этом отношении ведут себя хорошо.

Пре дложен и е 4. Ранг конечно порождённого модуля над целостным кольцом  $K$  определён однозначно.

Доказ а т е л ь с т в о. Пусть  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $\{u_1, \dots, u_m\}$  - два базиса свободного модуля  $V$  над  $K$ . Тогда

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i, \quad u_i = \sum_{k=1}^n b_{ki} v_k$$

Ввиду коммутативности  $K$  для матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{kl})$  размеров  $m \times n$  и  $n \times m$  соответственно получаются соотношения

$$AB = E_m, \quad BA = E_n$$

Вложив  $K$  в поле отношений  $Q(K)$ , мы получим посредством теоремы 3 из [BA I, гл. 2, 3] (верной для любого поля, а не только для  $\mathbb{R}$ ), что  $\min(n, m) \geq m, \min(n, m) \geq n$ , откуда  $m = n$ . Добавим, что случай  $m < \infty, n = \infty$  невозможен, поскольку в выражения для  $u_i$  входит лишь конечное число базисных элементов  $v_k$ , свободно порождающих весь модуль  $V$ .

З а м е ч а н и е. В случае произвольного коммутативного кольца  $K$  с единицей будет достигнут тот же эффект, как в предложении 4, если выбрать в  $K$  некоторый максимальный идеал  $J$  и перейти к полю  $K/J$ . Детали мы опускаем. Заметим, что, в отличие от ситуации в векторных пространствах, произвольно взятое порождающее множество свободного  $K$ -модуля не обязано содержать базис модуля. Например, два различных простых числа  $p, q$  всегда порождают  $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ , поскольку  $up + vq = 1$  для некоторых  $u, v \in \mathbb{Z}$ . Но  $\{p, q\}$  не является базисом, ибо  $p \cdot q - q \cdot p = 0$ , а  $\mathbb{Z}p, \mathbb{Z}q$  - собственные подмодули в  $\mathbb{Z}$ .

Роль свободных модулей запрограммирована в их определении.

Т е о р е м а 1. Каждый  $K$ -модуль конечного типа является гомоморфным образом свободного  $K$ -модуля конечного типа.

Доказательст в о. Пусть  $U = \sum_{i=1}^n Ku_i$  -  $K$ -модуль, порождённый  $n$  элементами  $u_1, \dots, u_n$ .

Возьмём свободный  $K$ -модуль  $V$  с базисом  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Его существование обеспечено предложением 3, v). Отображение  $\varphi : v_i \mapsto u_i$  продолжаемо в соответствии с определением свободного модуля до  $K$ -гомоморфизма  $\tilde{\varphi} : V \rightarrow U$ . Образ  $\text{Im } \tilde{\varphi}$  содержит порождающее множество модуля  $U$  и, стало быть, весь модуль  $U$ .

Не всегда подмодуль свободного модуля свободен, даже если он является его прямым слагаемым. Вот простейший пример. Пусть  $K = \mathbb{Z}_6, U = K(2 + 6\mathbb{Z}), W = K(3 + 6\mathbb{Z})$ . Тогда  $K = U \oplus W$  - прямая сумма  $K$ -модулей  $U, W$ , ни один из которых не является свободным:  $|K| = 6$ , в то время как  $|U| = 3, |W| = 2$ .

**Теорема 2.** Пусть  $V = Kv_1 \oplus \dots \oplus Kv_n$  - свободный модуль ранга  $n$  над кольцом  $K$  главных идеалов. Тогда каждый его подмодуль  $U$  - свободный ранга  $m \leq n$ .

*Доказательство.* Пусть сначала  $n = 1$ , т.е.  $V \cong K$ . Любой подмодуль  $U \subset V$  изоморфен идеалу в  $K$  и, стало быть,  $U \cong (u) = Ku$ . Если  $u = 0$ , то  $U = 0$  (нулевой подмодуль можно считать свободным модулем нулевого ранга). Если же  $u \neq 0$ , то  $au \neq 0$  для всех  $0 \neq a \in K$ , поскольку  $K$  - целостное кольцо. Значит,  $U$  - свободный (циклический) модуль ранга 1. При  $n > 1$  рассуждаем по индукции.

Рассмотрим в  $V$  свободный подмодуль  $V' = Kv_2 \oplus \dots \oplus Kv_n$  ранга  $n - 1$ . Фактормодуль  $\bar{V} = V/V'$  свободный, с циклической образующей  $\bar{v}_1 = v_1 + V'$ . Он содержит подмодуль  $\bar{U} = (U + V')/V'$ . Если  $\bar{U} = 0$ , то  $U \subset V'$ , и тогда утверждение теоремы верно по предположению индукции.

Если же  $\bar{U} \neq 0$ , то рассуждение, проведенное выше для случая  $n = 1$ , показывает, что  $\bar{U}$  обладает циклической образующей  $\bar{u}_1 = u_1 + V'$ , где  $u_1 \in U$ .

Если ещё  $U \cap V' = 0$ , то

$u \in U \implies \bar{u} = u + V' \in \bar{U} \implies \bar{u} = a_1 \bar{u}_1, a_1 \in K \implies u - a_1 u_1 \in V' \implies u = a_1 u_1 \implies U = Ku_1$  - свободный модуль ранга 1.

Пусть, наконец,  $U \cap V' \neq 0$ . По индукции подмодуль  $U \cap V'$  свободного модуля  $V'$  ранга  $n - 1$  обладает свободным базисом  $\{u_2, \dots, u_m\}$ , где  $0 < m - 1 \leq n - 1$ . Почти дословно повторяя проведенное выше рассуждение, убеждаемся в том, что  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  - свободный  $K$ -базис для  $U$ . Действительно,

$$\begin{aligned} u \in U \implies \bar{u} = u + V' \in \bar{U} \implies \bar{u} = a_1 \bar{u}_1, a_1 \in K \implies \\ \implies u - a_1 u_1 \in U \cap V' \implies u - a_1 u_1 = a_2 u_2 + \dots + a_m u_m \implies \\ \implies u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m, m \leq n. \end{aligned}$$

Согласно предложению 3, ii) нам нужно убедиться в линейной независимости образующих  $u_1, \dots, u_m$ . Но  $\sum_i x_i u_i = 0 \implies x_1 \bar{u}_1 = -\sum_{i>0} x_i \bar{u}_i = 0$  в  $\bar{V}$ . Значит,  $x_1 = 0$ , поскольку  $\bar{u}_1$  - базис в  $\bar{V}$ , а так как  $\{u_2, \dots, u_m\}$  - свободный базис в  $U \cap V'$ , то

$$x_2 u_2 + \dots + x_m u_m = 0 \implies x_2 = \dots = x_m = 0$$

**Следствие.** Каждый подмодуль модуля конечного типа над кольцом главных идеалов сам является модулем конечного типа.

Доказательство вытекает из теорем 1, 2 и из второй теоремы об изоморфизме (теоремы о соответствии между подмодулями).

Достаточно несложно получить полное описание модулей конечного типа над кольцом  $K$  главных идеалов. Но самые интересные случаи нами рассмотрены (периодические модули над  $\mathbb{Z}$  и над  $P[X]$  в гл. 2 и в [ВА II, гл. 2, 3]). Демонстрацию же единого модульного подхода к другому роду задачам можно найти в списке дополнительной литературы.

### Целые элементы кольца

Пусть  $K$  - целостное кольцо. Элемент  $t \in K$  называется **целым** (иным над  $\mathbb{Z}$ ), если  $t$  - корень нормализованного многочлена  $X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[X]$ . В том случае, когда  $K$  - конечное алгебраическое расширение поля  $\mathbb{Q}$  или же  $K$  - поле, порождённое всеми комплексными алгебраическими числами, говорят о **целых алгебраических числах**, относя к ним, естественно, все элементы из  $\mathbb{Z}$ . Легко видеть (см. также гл. 5), что

рациональное число  $t$  является целым алгебраическим тогда и только тогда, когда  $t \in \mathbb{Z}$ . Если, далее,  $a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0$ , то  $(a_0 u)^n + a_0 a_1 (a_0 u)^{n-1} + \dots + a_0^n a_n = 0$ , а это значит, что любое алгебраическое число, умноженное на подходящий элемент  $a_0 \in \mathbb{Z}$ , становится целым алгебраическим числом.

Обращаясь к общему случаю, заметим, что  $K$  удобно трактовать как  $\mathbb{Z}$ -модуль. Любые элементы  $t_1, t_2, \dots, t_n \in K$  порождают в  $K$  подмодуль  $Kt_1 + Kt_2 + \dots + Kt_n$  конечного типа. Если, в частности,  $t$  - целый элемент и  $t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0, a_i \in \mathbb{Z}$ , то подкольцо  $\mathbb{Z}[t] \subset K$  является  $\mathbb{Z}$ -модулем конечного типа, поскольку  $\mathbb{Z}[t] = \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}t + \dots + \mathbb{Z}t^{n-1}$ . Обратно: пусть  $\mathbb{Z}[t] - \mathbb{Z}$ -модуль конечного типа с образующими  $v_1, \dots, v_n \in K$ . Тогда соотношения

$$tv_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n, \quad 1 \leq i \leq n$$

с матрицей  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$  приводят к выводу, что линейная однородная система

$$\begin{aligned} (t - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n &= 0 \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots + (t - a_{nn})x_n &= 0 \end{aligned}$$

рассматриваемая над полем отношений  $Q(K)$ , имеет ненулевое решение  $(x_1, \dots, x_n) = (v_1, \dots, v_n)$  (не все  $v_i$  равны нулю, поскольку  $1 \in \mathbb{Z}[t]$ ). Значит определитель системы равен нулю (см. [BA I, гл. 3]) и  $t$  - корень нормализованного многочлена  $f(T) = \det(TE - A)$ . Мы доказали, что элемент  $t \in K$  является целым тогда и только тогда, когда подкольцо  $\mathbb{Z}[t] \subset K$  является  $\mathbb{Z}$ -модулем конечного типа.

**Теорема 3.** Целые элементы кольца  $K$  образуют в  $K$  подкольцо.

**Доказательство.** Пусть  $u, v \in K$  - целые элементы. Тогда

$$\mathbb{Z}[u, v] = \sum_{i \leq n, j \leq m} \mathbb{Z}u^i v^j$$

**N)**  $\mathbb{Z}$ -модуль конечного типа. Так как  $\mathbb{Z}$  - кольцо главных идеалов, то следствие теоремы 2 (или непосредственная проверка) показывает, что подмодули  $\mathbb{Z}[u - v], \mathbb{Z}[uv]$  тоже являются  $\mathbb{Z}$ -модулями конечного типа. Согласно приведённому выше критерию элементы  $u - v, uv$  должны быть целыми.

**П р и м е р.** Корень  $\varepsilon$  любой степени из 1 является, очевидно, целым алгебраическим числом. По теореме 3 целочисленные линейные комбинации корней из 1 также будут целыми алгебраическими числами. В частности (см. доказательство предложения из 4 гл. 3), значения  $\chi_\Phi(g), g \in G$ , характера  $\chi_\Phi$  любого линейного представления  $\Phi$  над  $\mathbb{C}$  конечной группы  $G$  являются целыми алгебраическими числами.

## 2.5.4 Algebras over a field

### Теория

**N)** Определения и примеры алгебр. Мы уже пользовались понятием алгебры в самых разных ситуациях (см. гл. 11, а также [BA I, II]), поэтому определение ниже приводится фактически лишь для полноты изложения.

**О п р е д е л е н и е.** Алгеброй (или линейной алгеброй) над полем  $P$  называется пара, состоящая из кольца  $(A, +, \cdot)$  и векторного пространства  $A$  над  $P$  (базисное множество  $A$  у кольца и векторного пространства одно и то же; одинаковы также операция сложения  $+$  и нулевой элемент  $0$ ). При этом

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$



для всех  $\lambda \in P, x, y \in A$ . Алгебра называется ассоциативной, если ассоциативно кольцо  $(A, +, \cdot)$ . Размерность над  $P$  векторного пространства  $A$  называется также размерностью алгебры  $A$ .

На алгебры переносятся, с незначительными уточнениями, основные понятия теории колец. Так, подалгеброй алгебры  $A$  считается всякое подкольцо  $B$ , являющееся одновременно подпространством векторного пространства  $A$ . Если  $T$  - подмножество в  $A$ , то порождённая им подалгебра  $P[T]$  является пересечением всех подалгебр в  $A$ , содержащих  $T$ . Аналогичным образом определяются идеалы и факторалгебры по ним. Гомоморфизмами алгебр служат гомоморфизмы колец, являющиеся вместе с тем  $P$ -линейными отображениями. Центр  $Z(A)$  ассоциативной алгебры  $A$  определяется как множество всех элементов  $a \in A$ , перестановочных с каждым элементом из  $A$ :  $a \in Z(A) \iff ax = xa \quad \forall x \in A$ . Очевидно, что центр  $Z(A)$  - подалгебра в  $A$ . Равенство  $Z(A) = A$  имеет место тогда и только тогда, когда  $A$  - коммутативная алгебра.

Если  $A$  - ассоциативная алгебра с единицей 1, то непосредственно проверяется, что  $\lambda \cdot 1 \in Z(A)$ , причём соответствие  $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1 \quad \forall \lambda \in P$ , определяет мономорфное отображение  $P$  в  $A$ . В этом смысле под алгеброй  $A$  можно понимать кольцо  $A$  вместе с выделенным подполем, содержащимся в центре  $Z(A)$ .

Приведём некоторые примеры ассоциативных алгебр.

Н)Расширение  $F \supset P$  конечной степени  $[F : P]$  поля  $P$  является, очевидно, коммутативной ассоциативной алгеброй (с единицей) конечной размерности  $\dim_P F = [F : P]$ .

Н)Кольцо многочленов  $K = P[X_1, \dots, X_n]$  с коэффициентами в поле  $P$  несёт естественную структуру бесконечномерной коммутативной ассоциативной алгебры над полем  $P$ . Заметим, что

$$K = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2 \oplus \dots$$

Н)прямая сумма конечномерных векторных подпространств  $K_m$  однородных многочленов степени  $m$  ( $K_0 = P$ ), причём  $K_i K_j \subset K_{i+j}$ . Алгебры подобного типа называются градуированными.

3) Коммутативная алгебра  $X_{\mathbb{C}}(G)$  с единицей  $\chi_1$ , порождённая над  $\mathbb{C}$  всеми характеристиками конечной группы  $G$ , имеет размерность  $r$ , равную числу классов сопряжённых элементов в  $G$ .

Н)Кольцо  $M_n(P)$  квадратных матриц порядка  $n$  с коэффициентами в поле  $P$  является алгеброй размерности  $n^2$  над  $P$ .

Базисные элементы  $\{E_{ij} | i, j = 1, 2, \dots, n\}$  алгебры  $M_n(P)$  перемножаются по правилу  $E_{ik} E_{lj} = \delta_{kl} E_{ij}$ . Согласно теореме 4 из [ВА I, 3, гл. 2] центр  $Z(M_n(P)) = \{\lambda E\} \cong P$ .

Назовём ассоциативную алгебру  $A$  с единицей центральной простой над полем  $P$ , если  $Z(A) \cong P$  и в  $A$  нет двусторонних идеалов, отличных от 0 и  $A$ .

Предложение 1.  $M_n(P)$  - центральная простая алгебра.

Доказ а т е л ь с т в о. Пусть  $J$  - идеал в  $M_n(P)$ , отличный от нулевого, и пусть

$$0 \neq a = \sum_{ij} \alpha_{ij} E_{ij} \in J$$

Если  $\alpha_{kl} \neq 0$ , то  $E_{st} = \alpha_{kl}^{-1} E_{sk} \cdot a \cdot E_{lt} \in J$  при любых  $s, t = 1, \dots, n$ , и, стало быть,  $J = M_n(P)$ .

Аналогичное утверждение справедливо для полной матричной алгебры  $M_n(D)$  над произвольным телом  $D$ . Исключительно важная теорема Веддербарна, а в более общем контексте - теорема Веддербарна-Артина гласит, что всякая конечномерная ассоциативная простая алгебра над полем  $P$  изоморфна  $M_n(D)$ , где натуральное число  $n$  определено

однозначно, а тело  $D$  (являющееся алгеброй конечной размерности над  $P$ ) — с точностью до изоморфизма.

Матричная алгебра  $M_n(P)$  обладает ещё следующим универсальным свойством.

**Предложение 2.** Всякая  $n$ -мерная ассоциативная алгебра  $A$  над полем  $P$  изоморфна некоторой подалгебре в  $M_k(P)$ , где  $k \leq n + 1$ .

**Доказательство.** Будем сначала считать  $A$  алгеброй с 1 и вложим её в  $M_n(P)$ . С этой целью каждому элементу  $a \in A$  поставим в соответствие линейный оператор  $L_a : x \mapsto ax$  на векторном пространстве  $A$ . Линейность  $L_a$  является следствием билинейности операции умножения в  $A$ . Так как, очевидно,  $L_{\lambda a} = \lambda L_a$ ,  $L_{a+b} = L_a + L_b$ ,  $L_{ab} = L_a L_b$  (ассоциативность) и  $L_1 = \mathcal{E}$ , то отображение  $a \mapsto L_a$  является гомоморфизмом. Его инъективность обеспечена существованием единичного элемента:  $a \neq 0 \implies L_a \cdot 1 = a \cdot 1 = a$ ,  $L_a \neq 0$ .

Пусть теперь  $A$  — алгебра без единицы. Введём в рассмотрение векторное пространство  $\tilde{A} = P \oplus A$  и определим на нём умножение, полагая

$$(\lambda, a)(\lambda', a') = (\lambda\lambda', aa' + \lambda a' + \lambda' a).$$

Легко проверяется, что с этим законом умножения  $\tilde{A}$  является алгеброй над  $P$  с единичным элементом  $(1, 0)$ .

Так как  $\dim_P \tilde{A} = \dim_P A + 1 = n + 1$ , то предыдущее рассуждение позволяет вложить  $\tilde{A}$ , а вместе с тем и  $A$  в  $M_{n+1}(P)$ .

Нетрудно усмотреть полное сходство в доказательствах предложения 2 и теоремы Кэли [ВА I] для конечных групп. В обоих случаях используется регулярное представление. Более общо: под представлением алгебры  $A$  над  $P$  понимается любой гомоморфизм

$$A \longrightarrow \mathcal{L}(V) = \text{End}_F(V)$$

где  $F \supset P$  — некоторое расширение поля  $P$ . Другими словами, векторное пространство  $V$  над  $F$  снабжается структурой левого  $A$ -модуля в смысле определений 3, причём

$$(\lambda x) \cdot v = x \cdot (\lambda v) \quad \forall \lambda \in P, x \in A, v \in V$$

Выбрав в  $V$  какой-нибудь базис, мы придём, как и в случае групп, к матричному представлению  $A \longrightarrow M_r(F)$ , где  $r = \dim_F(V)$ .

### Алгебры с делением (тела).

Как показывает сформулированная выше теорема Веддербарна, изучение алгебр с делением важная составная часть общей структурной теории ассоциативных алгебр. Лемма Шура (предложение 2 из 3) также подтверждает это соображение. Прежде чем приводить какие-либо результаты об алгебрах с делением, остановимся на одном вспомогательном утверждении.

**Предложение 3.** В ассоциативной алгебре  $A$  (с единичным элементом 1) размерности  $n$  над полем  $P$  каждый элемент  $a \in A$  является корнем многочлена  $\mu_a \in P[X]$  степени  $\leq n$ . Элемент  $a \in A$  обратим в точности тогда, когда  $\mu_a(0) \neq 0$ . Если в  $A$  нет делителей нуля, то  $A$  — алгебра с делением. Если поле  $P$  алгебраически замкнуто, то  $n = 1$  и  $A = P$ .

**Доказательство.** В силу конечномерности  $A$  элементы  $1, a, a^2, \dots$  не могут быть все линейно независимыми над  $P$ . Стало быть, найдётся нормализованный многочлен  $\mu_a(X) = X^m + \alpha_1 X^{m-1} + \dots + \alpha_m$  наименьшей степени  $m \leq n$  с коэффициентами  $\alpha_i \in P$  такой, что  $\mu_a(a) = 0$ . Если  $\alpha_m \neq 0$ , то соотношение  $\mu_a(a) = 0$ , переписанное в виде

$$[-\alpha_m^{-1}(a^{m-1} + \alpha_1 a^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1})] a = 1$$

показывает, что  $a$  - обратимый элемент.

Обратно: предположим, что  $a \in A$  не является делителем нуля, но  $\alpha_m = 0$ . Тогда  $(a^{m-1} + \alpha_1 a^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1})a = 0 \implies$

$$\implies a^{m-1} + \alpha_1 a^{m-2} + \dots + \alpha_{m-1} = 0$$

что противоречит минимальности  $\mu_a(X)$ . Значит,  $\alpha_m \neq 0$ . В частности, все элементы в  $A$ , не являющиеся делителями нуля, обратимы.

Если поле  $P$  алгебраически замкнуто, то

$$\mu_a(X) = (X - c_1) \dots (X - c_m), \quad c_i \in P$$

откуда

$$(a - c_1)b = 0, \quad b = (a - c_2) \dots (a - c_m) \neq 0$$

Отсутствие делителей нуля в  $A$  оставляет единственную возможность:  $m = 1$  и  $a - c_1 = 0, a = c_1 \in P$ . Так как это верно для любого элемента  $a \in A$ , то  $A = P$ .

Мы видим, что свойства алгебры с делением существенно зависят от основного поля  $P$ . Естественно, что исторически алгебры с делением над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$  вызывали особый интерес. Существование поля  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$  давало повод к поискам других "гиперкомплексных" систем.

В гл. 1, п. 5 была рассмотрена алгебра кватернионов  $\mathbb{H}$ , являющаяся ассоциативной, но некоммутативной алгеброй с делением. Место, занимаемое кватернионами, хорошо выявляется следующей замечательной теоремой с красивым доказательством.

### Теорема 1 (Г. Фробениус).

Над полем  $\mathbb{R}$  существуют лишь три конечномерные ассоциативные алгебры с делением:  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ .

Прежде чем приступать к доказательству, остановимся на аддитивной структуре алгебры с делением  $A$ . В рассуждениях ниже существенно то известное нам из [BA I, BA II] обстоятельство, что минимальный многочлен  $\mu_a(t)$  (см. предложение 3) любого элемента  $0 \neq a \notin \mathbb{R}$  должен быть неприводимым и, стало быть, квадратичным. Заметим ещё, что  $\mu_a(t)$  - есть не что иное, как минимальный многочлен линейного оператора  $L_a : x \mapsto ax$  на  $A$ . Более конкретно:  $\mu_x(t) = t - \alpha$  или  $t^2 - 2\alpha t + \beta, \alpha^2 < \beta$ . Если  $x \notin \mathbb{R}$ , то, положив  $y = x - \alpha$ , будем иметь  $\mu_y(t) = t^2 + (\beta - \alpha^2)$ . Итак, каждый элемент из  $A$  имеет вид  $\alpha + y$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}, y = 0$  или  $y^2 = \gamma < 0, \gamma \in \mathbb{R}$ .

Лемма 1. Подмножество

$$A' = \{u \in A \mid u^2 \in \mathbb{R}, u^2 \leq 0\}$$

является векторным подпространством в  $A$ .

Доказательство. Ясно, что  $u \in A', \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha u \in A'$ , поэтому достаточно убедиться в справедливости импликации  $u, v \in A' \implies u + v \in A'$  для непропорциональных векторов  $u, v$ .

Сначала проверим, что линейная зависимость  $u = \alpha v + \beta$  с  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  невозможна. В самом деле, по условию  $uv \neq 0$  и

$$u^2 = \gamma < 0, \quad v^2 = \delta < 0$$

Поэтому

$$u = \alpha v + \beta \implies \gamma = u^2 = (\alpha v + \beta)^2 = \alpha^2 \delta + 2\alpha \beta v + \beta^2$$

Так как  $v \notin \mathbb{R}$ , то  $\alpha\beta = 0$ , т.е.  $\alpha = 0$  или  $\beta = 0$ . Если  $\alpha = 0$ , то  $u \in \mathbb{R}$ , а если  $\beta = 0$ , то  $u$  пропорционально  $v$ . Обе возможности заранее исключались.

Итак, линейная независимость  $u, v \in A'$  приводит к линейной независимости  $1, u, v$ . Оба элемента  $u + v, u - v$  - корни квадратных уравнений, т.е.

$$(u + v)^2 = p(u + v) + q, \quad (u - v)^2 = r(u - v) + s, \quad p, q, r, s \in \mathbb{R}$$

Используя соотношения

$$(u \pm v)^2 = u^2 \pm (uv + vu) + v^2, \quad u^2 = \gamma, v^2 = \delta$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \gamma + \delta + (uv + vu) &= p(u + v) + q \\ \gamma + \delta - (uv + vu) &= r(u - v) + s \end{aligned}$$

Складывая, находим

$$(p + r)u + (p - r)v + (q + s - 2\gamma - 2\delta) = 0$$

Но, как мы видели,  $u, v, 1$  линейно независимы, поэтому  $p = r = 0$ . Стало быть,  $(u + v)^2 = q \in \mathbb{R}$ , а так как  $u + v \notin \mathbb{R}$ , то  $q < 0$ . Это и значит, что  $u + v \in A'$ , т.е.  $A'$  - подпространство в  $A$ .

Доказательство теоремы 1. Для  $u \in A'$  пишем  $u^2 = -q(u)$ , где  $q(u) \in \mathbb{R}$  и  $q(u) \geq 0$ . Кроме того,  $q(u) = 0 \iff u = 0$ . Очевидно,  $q(\alpha u) = \alpha^2 q(u)$  и

$$f(u, v) := q(u + v) - q(u) - q(v) = -(uv + vu)$$

**N)** симметричная билинейная форма на  $A$ , отвечающая положительно определённой квадратичной форме  $q$ .

Если  $A = \mathbb{R}$ , то рассуждения заканчиваются. Пусть  $A \neq \mathbb{R}$ . Тогда  $A' \neq 0$ , и мы можем выбрать вектор  $\mathbf{i} \in A$  с  $q(\mathbf{i}) = 1$ , т.е.  $\mathbf{i}^2 = -1$ . С точностью до изоморфизма получаем равенство  $\mathbb{R}[\mathbf{i}] = \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathbf{i}$ . Если  $A = \mathbb{C}$ , то наши рассуждения снова заканчиваются.

Считаем  $A \not\subseteq \mathbb{C}$ . Тогда  $A' \not\subseteq \mathbb{R}\mathbf{i}$ , и можно выбрать элемент  $\mathbf{j} \perp \mathbb{R}\mathbf{i}$ ,  $q(\mathbf{j}) = 1$ . В этом случае  $\mathbf{j}^2 = -1$  и  $\mathbf{ij} + \mathbf{ji} = -f(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0$ , так что  $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$ . Полагая  $\mathbf{k} = \mathbf{ij}$ , получим  $\mathbf{k}^2 = -1$ ,  $\mathbf{ik} + \mathbf{ki} = 0 = \mathbf{jk} + \mathbf{kj}$ . Следовательно,  $\mathbf{k} \in A'$  и  $\mathbf{k} \perp \mathbf{i}, \mathbf{j}$ . Стало быть,  $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  линейно независимы и

$$\mathbb{R} + \mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j} + \mathbb{R}\mathbf{k} = \mathbb{H}$$

**N)** алгебра кватернионов.

Если  $A \not\subseteq \mathbb{H}$ , то существует  $\mathbf{l} \in A'$  с  $q(\mathbf{l}) = 1$  и  $\mathbf{l} \perp \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Другими словами,

$$\mathbf{li} = -\mathbf{il}, \quad \mathbf{lj} = -\mathbf{jl}, \quad \mathbf{lk} = -\mathbf{kl}$$

Однако в силу ассоциативности умножения в  $A$  первые два соотношения дают

$$\mathbf{lk} = \mathbf{l}(\mathbf{ij}) = (\mathbf{li})\mathbf{j} = -(\mathbf{il})\mathbf{j} = -\mathbf{i}(\mathbf{lj}) = \mathbf{i}(\mathbf{jl}) = (\mathbf{ij})\mathbf{l} = \mathbf{kl}$$

Получается противоречие с третьим соотношением. Значит,  $A = \mathbb{H}$ .

Замечание. Сравнительно недавно на основе глубоких топологических соображений было доказано, что над  $\mathbb{R}$  всякая конечномерная алгебра с делением (не обязательно ассоциативная) имеет размерность 1, 2, 4 или 8. Все возможности реализуются.

В начале XX века Веддербарном был получен результат о конечных телах, имеющий важное значение для геометрии. Эту теорему мы сейчас докажем, опираясь, правда,

на некоторые элементарные свойства круговых многочленов  $\Phi_n(X)$ , устанавливаемые в следующей главе. Порочного круга при этом не возникнет.

**Теорема 2 (Веддербарн).** Каждое конечное ассоциативное кольцо с делением коммутативно, т.е. является полем.

**Доказательство.** Пусть  $D$  - конечное кольцо с делением,  $Z = Z(D)$  - его центр. Очевидно, что  $Z$  - поле и  $D$  - конечномерное векторное пространство над  $Z$ :

$$D = Ze_1 + Ze_2 + \dots + Ze_n.$$

Согласно результатам, устанавливаемым в гл. 5, 2,  $Z = \mathbb{F}_q$  для некоторого  $q = p^m$ , так что  $|D| = q^n$ . Пусть, далее,  $x \in D \setminus Z$ . Перестановочные с  $x$  элементы образуют множество  $C(x) = \{y \in D \mid yx = xy\}$ , замкнутое относительно операций сложения и умножения. Другими словами,  $C(x)$  - подалгебра с делением в  $D$ , содержащая  $Z$ . Если  $q^d$  - число элементов в  $C(x)$ , то  $d = d(x)$  - делитель  $n$ ,  $d < n$ , поскольку, интерпретируя  $D$  как левое векторное пространство

$$D = C(x)f_1 + \dots + C(x)f_r$$

над  $C(x)$ , мы имеем  $q^n = |C(x)|^r = q^{dr}$ . Заметим теперь, что  $Z^*$  - центр мультипликативной группы  $D^*$ , а  $(q^n - 1) / (q^d - 1) = (D^* : C(x)^*)$  - число элементов, сопряжённых с  $x$  в  $D^*$ . Поэтому формула (2') из 3 гл. 1 принимает вид

$$q^n - 1 = |D^*| = (q - 1) + \sum_d \frac{q^n - 1}{q^d - 1}$$

где  $d$  пробегает некоторое множество делителей  $n$ , меньших  $n$ .

Свойства кругового многочлена  $\Phi_n(X)$  (см. упр. 6 из 2 гл. 5) показывают, что целое число  $\Phi_n(q)$  делит как  $q^n - 1$ , так и  $(q^n - 1) / (q^d - 1)$  при  $d|n, d < n$ . В таком случае согласно (\*)  $\Phi_n(q) \mid (q - 1)$ , а это влечёт (см. упр. 7 из 1) равенство  $n = 1$  и, стало быть, коммутативность  $D = Z$ .  $\square$

### Групповые алгебры и модули над ними.

В связи с регулярным представлением конечной группы  $G$  в 1 из гл. 3 вводилось векторное пространство  $\langle e_g \mid g \in G \rangle$  над полем  $K$ . Мы превратим его теперь в  $K$ -алгебру, полагая  $e_g e_h = e_{gh}$  и распространяя это правило по линейности на произвольные "векторы"  $\sum \alpha_g e_g, \alpha_g \in K$ . Для упрощения записи  $e_g$  обычно заменяют на  $g$  и рассматривают множество  $K[G]$  всевозможных формальных сумм  $\sum \alpha_g g, \alpha_g \in K$ . По определению

$$\sum_g \alpha_g g = \sum_g \beta_g g \iff \alpha_g = \beta_g \quad \forall g \in G.$$

Операции над формальными суммами

$$\begin{aligned} \sum_g \alpha_g g + \sum_g \beta_g g &= \sum_g (\alpha_g + \beta_g) g \\ \lambda \left( \sum_g \alpha_g g \right) &= \sum_g (\lambda \alpha_g) g \\ \left( \sum_g \alpha_g g \right) \left( \sum_h \beta_h h \right) &= \sum_{g,h} \alpha_g \beta_h gh = \sum_u \gamma_u u, \quad \gamma_u = \sum_g \alpha_g \beta_{g^{-1}u} \end{aligned}$$

задают на  $K[G]$  структуру ассоциативной алгебры. Принято называть  $K[G]$  групповой алгеброй конечной группы  $G$  над полем  $K$ . Базисными элементами пространства  $K[G]$  служат формальные произведения  $1 \cdot g, g \in G$ , отождествляемые с элементами  $g \in G$ ;  $\dim_K K[G] = |G|$ . Таким образом, группа  $G$  считается вложенной в алгебру  $K[G]$ . Единичный элемент  $e \in G$  является единицей в  $K[G]$ . В том случае, когда  $K$  - коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, получается групповое кольцо  $K[G]$  группы  $G$  над  $K$ .

Кроме того, аналогичная конструкция применима к произвольной, не обязательно конечной группе  $G$ , если условиться рассматривать лишь суммы  $\sum \alpha_g g$  с конечным числом отличных от нуля коэффициентов. Удобно также интерпретировать  $S = \sum \alpha_g g$  как функцию на группе  $G$  (со значениями  $S(g) = \alpha_g$  в  $K$ ), равную почти всюду нулю (т.е. с конечным числом отличных от нуля значений). При этом формулам (1) отвечают операции поточечного сложения

$$(S_1 + S_2)(g) = S_1(g) + S_2(g)$$

и свёртка функций

$$S_3 = S_1 * S_2, \quad S_3(u) = \sum_g S_1(g) S_2(g^{-1}u)$$

Теория групповых колец - обширный раздел алгебры, имеющий собственную проблематику, но для нас  $K[G]$  - лишь иллюстрация общих понятий, введённых в последних двух главах.

Теорема 3. Существует взаимно однозначное соответствие

*между  $K[G]$ -модулями, являющимися конечномерными векторными*

пространствами над полем  $K$ , и линейными представлениями группы  $G$ .

Доказательство. Пусть  $(\Phi, V)$  - представление группы  $G$ . Продолжим  $\Phi$  по линейности на элементы из  $K[G]$ , определяя

$$\tilde{\Phi} \left( \sum \alpha_g g \right) = \sum \alpha_g \Phi(g)$$

и положим

$$\left( \sum \alpha_g g \right) \circ v = \sum \alpha_g \Phi(g)v \quad \forall v \in V$$

Операция  $\circ$  вводит на  $V$  структуру  $K[G]$ -модуля в обычном понимании этого слова. Заметим, что

$$\begin{aligned} \left( \sum \alpha_g g \right) \circ (\lambda v) &= \sum \alpha_g \Phi(g)(\lambda v) = \sum \alpha_g \lambda \Phi(g)v = \\ &= \lambda \left( \sum \alpha_g \Phi(g)v \right) = \lambda \left( \left( \sum \alpha_g g \right) \circ v \right) \end{aligned}$$

т.е. умножения на скаляры в  $V$  и в  $K[G]$  согласованы. Пару  $(\tilde{\Phi}, V)$  естественно называть линейным представлением алгебры  $K[G]$ . Обратно: если  $V$  - векторное пространство над  $K$ , являющееся модулем над  $K[G]$  с действием

$$\left( \sum \alpha_g g, v \right) \mapsto \left( \sum \alpha_g g \right) \circ v$$

то, полагая

$$\tilde{\Phi} \left( \sum \alpha_g g \right) v = \left( \sum \alpha_g g \right) \circ v$$

мы определим гомоморфизм  $\tilde{\Phi} : K[G] \longrightarrow \text{End}_K(V)$  (т. е. представление алгебры  $K[G]$ ), ограничение которого  $\Phi = \tilde{\Phi}|_G$  на  $G$  даст нам представление группы  $G$ .

В соответствии с теоремой 3 пространство представления  $V$  группы  $G$  часто называют модулем представления группы  $G$  или, коротко, -  $G$ -модулем. Соответствующие терминологические изменения касаются других понятий теории представлений.

Пусть, далее,  $G$  - конечная группа,  $K = \mathbb{C}$  - поле комплексных чисел. Согласно результатам гл. 3 каждый неприводимый (или, говорят ещё, простой)  $G$ -модуль над  $\mathbb{C}$  (т.е.  $\mathbb{C}[G]$ -модуль) с характером  $\chi_i$  изоморфен некоторому левому идеалу  $J_i$  алгебры  $\mathbb{C}[G]$  (см. в этой связи пример 4 из 3). Если  $\dim_{\mathbb{C}}[G] = n_i$ , то  $\mathbb{C}[G]$  содержит прямую сумму

$$A_i = J_{i,1} \oplus \dots \oplus J_{i,n_i}$$

левых идеалов,  $\mathbb{C}[G]$ -изоморфных  $J = J_{i,1}$ . Выбирая в каждом классе изоморфных левых идеалов по одному представителю  $J_i$ , мы можем написать разложение

$$\mathbb{C}[G] = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_r$$

соответствующее разложению регулярного представления группы  $G$ . Заметим, что каждая из компонент  $A_i$  определена однозначно.

Если теперь  $J$  - минимальный левый идеал алгебры  $\mathbb{C}[G]$  и  $t \in \mathbb{C}[G]$ , то  $Jt$  - тоже минимальный левый идеал (возможно, нулевой). Стало быть, отображение  $\varphi : J \longrightarrow Jt$ , определённое соответствием  $v \mapsto vt (v \in J)$ , является либо нулевым отображением, либо  $\mathbb{C}[G]$ -изоморфизмом, поскольку  $xv \in J$  для любого  $x \in \mathbb{C}[G]$  и  $\varphi(xv) = (xv)t = x(vt) = x\varphi(v)$ . По этой причине  $J \subset A_i \implies Jt \subset A_i \forall t \in \mathbb{C}[G]$  и, следовательно,  $A_i$  - двусторонний идеал в  $\mathbb{C}[G]$ . Разложение (2) прямое, так что

$$i \neq j \implies A_i A_j \subset A_i \cap A_j = 0.$$

Мы собираемся получить более точную информацию о разложении (2), опираясь на развитую в гл. 3 теорию характеров. Вначале найдём центр  $Z(\mathbb{C}[G])$  групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$ . По определению

$$z \in Z(\mathbb{C}[G]) \iff zg = gz \quad \forall g \in G$$

Если  $z = \sum_{h \in G} \gamma_h h$ , то

$$\sum_{t \in G} \gamma_{g^{-1}t} t = g \left( \sum_h \gamma_h h \right) = \left( \sum_h \gamma_h h \right) g = \sum_{t \in G} \gamma_{tg^{-1}} t$$

откуда  $\gamma_{g^{-1}t} = \gamma_{tg^{-1}} \forall t \in G$ . Положив  $t = gh$ , получим  $\gamma_h = \gamma_{ghg^{-1}}$ . Это значит, что где

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \langle K_1, K_2, \dots, K_r \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$K_i = \sum_{g \in K_i} g, \quad K_i = g_i^G, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

( $g_1, g_2, \dots, g_r$  - представители классов сопряжённых элементов группы  $G$ ). Понятно, что  $K_1, K_2, \dots, K_r$  - линейно независимые элементы, и, стало быть,  $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}[G]) = r$ .

Каждому элементу  $a \in A_i$  поставим в соответствие линейный оператор  $L_a^{(i)}$ , действующий на минимальном левом идеале  $J_i = J_{i,1}$  по правилу  $L_a^{(i)}(v) = av, \quad v \in J_i$ . Так как, очевидно,

$$L_{\lambda a}^{(i)} = \lambda L_a^{(i)}, \quad L_{a+b}^{(i)} = L_a^{(i)} + L_b^{(i)}, \quad L_{ab}^{(i)} = L_a^{(i)} L_b^{(i)}$$

то  $\varphi : a \mapsto L_a^{(i)}$  - гомоморфизм алгебры  $A_i$  в алгебру эндоморфизмов  $\text{End}_{\mathbb{C}} J_i \cong M_{n_i}(\mathbb{C})$ . Предположим, что  $0 \neq a \in \text{Ker } \varphi$ , т.е.  $aJ_i = 0$ . Все левые идеалы  $J_{i,j}\mathbb{C}[G]$ -изоморфны, и если  $\varphi_j : J_i \rightarrow J_{i,j}$  - изоморфизм, то

$$aJ_{i,j} = a\varphi_j(J_i) = a\varphi_j(eJ_i) = \varphi_j(a \cdot eJ_i) = \varphi_j(0) = 0.$$

Значит,  $aA_i = aJ_{i,1} + \dots + aJ_{i,n_i} = 0$ , а в таком случае и  $a\mathbb{C}[G] = 0$ , поскольку  $a \in A_i \implies aA_j = 0$  для всех  $j \neq i$ . Однако  $ae = a \neq 0$ . Полученное противоречие показывает, что  $\text{Ker } \varphi = 0$ . Стало быть,  $\varphi$  - мономорфизм, а так как  $\dim A_i = n_i^2 = \dim M_{n_i}(\mathbb{C})$ , то  $A_i \cong_{\varphi} M_{n_i}(\mathbb{C})$ . С учётом предложения 2 мы приходим к следующей теореме о строении групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$ .

**Теорема 4.** Групповая алгебра  $\mathbb{C}[G]$  конечной группы  $G$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$  разлагается в прямую сумму (2) простых двусторонних идеалов, изоморфных полным матричным алгебрам:

$$\mathbb{C}[G] \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$$

В частности, групповая алгебра абелевой группы порядка  $n$  над  $\mathbb{C}$  изоморфна прямой сумме  $n$  экземпляров поля  $\mathbb{C}$ .

**Следствие** (теорема Бернсайд). Пусть  $\Phi$  - неприводимое матричное представление степени  $n$  над  $\mathbb{C}$  конечной группы  $G$ . Тогда среди матриц  $\Phi_g$  имеется  $n^2$  линейно независимых, т.е.  $\langle \Phi_g | g \in G \rangle_{\mathbb{C}} = M_n(\mathbb{C})$ . Строение центра  $Z(\mathbb{C}[G])$  как коммутативной подалгебры в  $\mathbb{C}[G]$  полностью определяется структурными константами - целыми числами  $n_{ij}^k$  из соотношений

$$K_i K_j = \sum_{s=1}^r n_{ij}^s K_s$$

Имея в виду выражение (3) для  $K_i$ , легко понять, что  $n_{ij}^s$  - число пар  $(g, h)$ ,  $g \in \mathcal{K}_i, h \in \mathcal{K}_j$ , для которых  $gh = g_s \in \mathcal{K}_s$ . Выберем в  $Z(\mathbb{C}[G])$  другой базис

$$I_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s=1}^r \overline{\chi_i(g_s)} K_s = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} g, \quad 1 \leq i \leq r$$

Здесь, как и в 5 из гл. 3,  $\chi_1, \dots, \chi_r$  - характеры неприводимых представлений,  $n_1, \dots, n_r$  - их степени. Обратный переход совершается по формуле

$$K_s = |\mathcal{K}_s| \sum_{i=1}^r \frac{\chi_i(g_s)}{n_i} I_i$$

Чтобы убедиться в этом, нужно воспользоваться соотношением (4) из 5 гл. 3. Оно же показывает, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r I_i &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \sum_i n_i \overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \sum_i \chi_i(e) \overline{\chi_i(g)} = \\ &= \frac{1}{|G|} e |C_G(e)| = e. \end{aligned}$$

Далее, применяя обобщённое соотношение ортогональности из упр. 1 4 гл. 3, мы находим



$$\begin{aligned}
I_i I_j &= \frac{n_i n_j}{|G|^2} \sum_{g, t \in G} \overline{\chi_i(g)} \chi_j(t) g t = \frac{n_i n_j}{|G|} \sum_{h \in G} \left\{ \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \chi_j(hg) \right\} h^{-1} = \\
&= \frac{n_i n_j}{|G|} \frac{\delta_{ij}}{n_i} \sum_{h \in G} \chi_j(h) h^{-1} = \delta_{ij} I_j.
\end{aligned}$$

Таким образом, центральные элементы  $I_i$ , вычисляемые по формуле (5), удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
e &= I_1 + I_2 + \dots + I_r, \\
I_i^2 &= I_i, \quad I_i I_j = 0, \quad i \neq j,
\end{aligned}$$

и называются по этой причине центральными ортогональными идемпотентами групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$ . Соотношение  $e = I_1 + \dots + I_r$  - условие полноты этой системы. Положив  $B_i = I_i \mathbb{C}[G]$ , мы немедленно обнаруживаем, что  $B_i$  - двусторонний идеал в  $\mathbb{C}[G]$  с единичным элементом  $I_i$  и что имеет место разложение в прямую сумму

$$\mathbb{C}[G] = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_r$$

Непосредственно из (5) следует, что

$$\chi_j(I_i) = n_i \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\chi_i(g)} \chi_j(g) = n_i \delta_{ij}$$

Поэтому  $B_i$  содержит минимальный левый идеал  $J \subset A_i$ , отвечающий характеру  $\chi_i$ . Так как  $A_i$  и  $B_i$  - двусторонние идеалы, то  $A_i \subset B_i$ . Сравнивая разложения (2) и (7), мы заключаем, что  $A_i = B_i$ . Итак, доказан усовершенствованный вариант теоремы 3.

Теорема 5. Элементы  $I_i, 1 \leq i \leq r$ , вычисляемые по формуле (5), образуют полную систему центральных ортогональных идемпотентов групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$  конечной группы  $G$ . Простая компонента  $I_i \mathbb{C}[G]$  прямого разложения

$$\mathbb{C}[G] = I_1 \mathbb{C}[G] \oplus I_2 \mathbb{C}[G] \oplus \dots \oplus I_r \mathbb{C}[G]$$

изоморфная полной матричной алгебре  $M_{n_i}(\mathbb{C})$ , содержит все минимальные левые идеалы, отвечающие характеру  $\chi_i$ .

Всю теорию представлений групп можно развить, исходя из теоремы Веддербарна-Артина (см. п. 1) и из общей структурной теории групповых алгебр (её заключительный вывод для конечных групп сформулирован в теореме 3). Мы шли в обратном направлении, опираясь по существу лишь на лемму Шура.

В заключение докажем два полезных утверждения о степенях и значениях характеров неприводимых представлений.

Теорема 6. Степень  $n$  неприводимого представления  $(\Phi, V)$  над  $\mathbb{C}$  конечной группы  $G$  делит порядок  $|G|$ .

Доказательство. Пусть  $\tilde{\Phi}$  - соответствующее представление групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$ . По лемме Шура (предложение 3 из 3) линейный оператор  $\tilde{\Phi}(K_i)$ , перестановочный со всеми  $\Phi(g), g \in G$ , и потому принадлежащий  $\text{End}_{\mathbb{C}[G]}(V)$ , должен быть кратен единичному оператору:  $\tilde{\Phi}(K_i) = \omega_i \mathcal{E}$ . Имеем

$$n \omega_i = \text{tr } \omega_i \mathcal{E} = \text{tr } \tilde{\Phi}(K_i) = \sum_h \text{tr } \Phi(h g_i h^{-1}) = |K_i| \chi_{\Phi}(g_i)$$

откуда

$$\omega_i = \frac{|K_i| \chi_{\Phi}(g_i)}{n}$$

Применяя  $\tilde{\Phi}$  к соотношениям (4), получим

$$\omega_i \omega_j = \sum_{k=1}^r n_{ij}^k \omega_k$$

Стало быть,  $\mathbb{Z}[\omega_i]$  - подмодуль  $\mathbb{Z}$ -модуля  $\mathbb{Z}[\omega_1, \dots, \omega_r]$  конечного типа и согласно результатам п. 3 из  $\mathbb{Z}\omega_i$  - целое алгебраическое число. По тем же причинам

$$\begin{aligned} \frac{|G|}{n} &= \frac{|G|}{n} (\chi_\Phi | \chi_\Phi)_G = \frac{1}{n} \sum_g \chi_\Phi(g) \overline{\chi_\Phi(g)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r |\mathcal{K}_i| \cdot \chi_\Phi(g_i) \overline{\chi_\Phi(g_i)} = \sum \omega_i \overline{\chi_\Phi(g_i)} \end{aligned}$$

— целое алгебраическое число. Значит,  $|G|/n \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

## Лемма 2.

Пусть  $A$  - циклическая группа и  $\chi$  - её характер, возможно, приводимый. Положим  $S = \{a \in A | A = \langle a \rangle\}$ . Допустим, что  $\chi(s) \neq 0 \forall s \in S$ . Тогда

$$\sum_{s \in S} |\chi(s)|^2 \geq |S|$$

Доказательство. Пусть  $n = |A|$  и  $F$  - поле разложения многочлена  $X^n - 1$  над  $\mathbb{Q}$ . В следующей главе изучается группа Галуа  $G = \text{Gal} F/\mathbb{Q}$  и действие  $G$  на характерах. Для наглядности будем изображать это действие экспоненциально. Если  $\sigma \in G$  и  $\zeta$  - корень степени  $n$  из 1, то  $\zeta^\sigma = \zeta^m$ ,  $\text{НОД}(m, n) = 1$ . Далее,  $\chi(s) = \zeta_1 + \dots + \zeta_k$ ,  $\zeta_i^n = 1$ , и по определению

$$\chi^\sigma(s) = \zeta_1^m + \dots + \zeta_k^m = \chi(s^m)$$

Группа  $G$  абелева и  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ ,  $\alpha \in F$ , - тоже элемент из  $G$ , так что  $\overline{\alpha^\sigma} = (\bar{\alpha})^\sigma$ ,  $\alpha \in F$ ,  $\sigma \in G$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} |\alpha^\sigma|^2 &= \alpha^\sigma \overline{\alpha^\sigma} = \alpha^\sigma (\bar{\alpha})^\sigma = (\alpha \bar{\alpha})^\sigma = (|\alpha|^2)^\sigma, \\ (|\chi(s)|^2)^\sigma &= |\chi(s^m)|^2, \quad \text{НОД}(m, n) = 1 \end{aligned}$$

( $m$  зависит только от  $\sigma$ ).

Заметим, что  $s \in S \implies s^m \in S$ , если  $\text{НОД}(m, n) = 1$ . Кроме того,  $x \mapsto x^m$  - биекция на  $A$ , являющаяся перестановкой. Значит,  $\sum_{s \in S} |\chi(s)|^2$  - инвариант относительно  $G$ , а потому является рациональным числом. Вместе с тем это целое алгебраическое число. Таким образом, это число должно лежать в  $\mathbb{Z}$ . По условию  $\chi(s) \neq 0$ , поэтому  $\sum_{s \in S} |\chi(s)|^2 \geq 1$ . Но

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i \geq \left( \prod_i r_i \right)^{1/k}$$

для любых положительных вещественных чисел  $r_1, \dots, r_k$ . В нашем случае

$$\frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} |\chi(s)|^2 \geq 1$$

Теорема 7 (У. Бернсайд). Пусть  $G$  - конечная группа,  $\chi \in \text{Irr}(G)$ . Если  $\chi(e) > 1$ , то  $\chi(g) = 0$  хотя бы для одного  $g \in G$ .

Доказательство. Расщепим  $G$  на классы, назвав два элемента из  $G$  эквивалентными, если они порождают одну и ту же циклическую подгруппу в  $G$ . Предположим, что  $\chi(g) \neq 0$  для любого  $g \in G$ . Тогда по лемме 2

$$\sum_{s \in S} |\chi(s)|^2 \geq |S|$$

для каждого класса эквивалентности  $S$ . Суммируя по всем классам эквивалентности неединичных элементов, получим неравенство

$$\sum_{g \neq e} |\chi(g)|^2 \geq |G| - 1$$

Таким образом,

$$|G| = \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 \geq |G| - 1 + \chi(e)^2$$

откуда  $\chi(e) \leq 1$  - противоречие.

Следствие. Если группа  $G$  совпадает со своим коммутантом  $G'$ , то

$$|G| \cdot \prod_{i=1}^r K_i = \left( \prod_{i=1}^r |\mathcal{K}_i| \right) \sum_{l=1}^r K_l$$

(т.е. центральные элементы  $\prod_i K_i$  и  $\sum_i K_i$  из  $\mathbb{Q}[G]$  пропорциональны).

Доказательство. Пусть  $g_1, \dots, g_r$  - представители классов сопряженности  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$  и  $K_1, \dots, K_r$  - суммы элементов из  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$ . Мы знаем (см. (4)), что

$$K_i K_j = \sum_{l=1}^r n_{ij}^l K_l$$

$$\omega(K_i) \omega(K_j) = \sum_l n_{ij}^l \omega(K_l)$$

где  $\omega(K_i) = \chi(g_i) |\mathcal{K}_i| / \chi(e)$  - целое алгебраическое число. Умножая обе части соотношения

$$\frac{\chi(g_i) \chi(g_j)}{\chi(e)} |\mathcal{K}_i| |\mathcal{K}_j| = \sum_l n_{ij}^l \chi(g_l) |\mathcal{K}_l|$$

на  $\overline{\chi(g_s)}$  и суммируя по  $\chi$ , получаем формулу для структурных констант

$$n_{ij}^s = \frac{|\mathcal{K}_i| |\mathcal{K}_j|}{|G|} \sum_{\chi} \frac{\chi(g_i) \chi(g_j) \overline{\chi(g_s)}}{\chi(e)}$$

По аналогии с (9), положив

$$\prod_{i=1}^r K_i = \sum_{l=1}^r N_l K_l$$

будем иметь

$$\frac{\chi(g_1) \dots \chi(g_r) \prod_{i=1}^r |\mathcal{K}_i|}{\chi(e)^{r-1}} = \sum_{l=1}^r N_l \chi(g_l) |\mathcal{K}_l|$$

так что

$$N_s = \frac{\prod_i |\mathcal{K}_i|}{|G|} \sum_{\chi} \frac{\chi(g_1) \dots \chi(g_r) \overline{\chi(g_s)}}{\chi(e)^{r-1}}$$

Если теперь  $G = G'$ , то все характеры, кроме  $1_G$ , имеют степень больше 1 (теорема 5 из 5 гл. 3) и  $\chi(g_1) \chi(g_2) \dots \chi(g_r) = 0$  для  $\chi \neq 1_G$  по теореме 6. Непосредственно из формулы (\*) имеем  $N_s = \frac{\prod_i |\mathcal{K}_i|}{|G|} \cdot 1 \ \forall s$ , т.е. то, что нужно.

**З а м е ч а н и е.** Пусть  $A$  - любая (т.е. не обязательно ассоциативная) алгебра произвольной размерности над полем  $P$ . Каждым трём элементам  $x, y, z \in A$  поставим в соответствие выражение  $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ , называемое их ассоциатором. В зависимости от тождественных соотношений, связывающих ассоциаторы или иные выражения, получаются различные типы (как ещё говорят, примитивные классы, многообразия) алгебр. Примерами служат:

- N) ассоциативные алгебры  $(x, y, z) = 0$ ;
- N) альтернативные алгебры  $(x, x, y) = 0 = (y, x, x)$ ;
- N) йордановы алгебры  $(x, y, x^2) = 0, xy - yx = 0$ .

По этому аксиоматическому пути можно, очевидно, двигаться неограниченно. Замечательно, однако, что многие классы неассоциативных алгебр возникли естественным путём в областях, далёких от алгебры как науки. В качестве наиболее ярких примеров следует назвать йордановы алгебры, пришедшие в математику, как упоминалось в [ВА II], из квантовой механики (от физика Йордана), и алгебры Ли, предназначенные первоначально исключительно для описания (при определённых условиях) локальной структуры топологических групп (Софус Ли - один из крупнейших математиков XIX века). Об алгебрах Ли речь уже шла на страницах книги, и они будут фигурировать снова в следующем параграфе.

## 2.5.5 Irreducible modules over the $\mathfrak{sl}(2)$

### Напоминание общей картины происходящего

Напомним, что в алгебре Ли  $L$  над полем  $P$  произведение элементов  $x, y \in L$  принято обозначать  $[x, y]$  или ещё проще  $[xy]$ . По определению алгебры Ли билинейная операция  $(x, y) \mapsto [xy]$  удовлетворяет двум требованиям:

- i)  $[xx] = 0$  ( $[xy] = -[yx]$  - антикоммутативность);
- ii)  $[[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y] = 0$  (тождество Якоби).

Мы знаем также из [ВА II], что если  $A$  - ассоциативная алгебра над полем  $P$ , то на векторном пространстве  $A$  можно задать структуру алгебры Ли  $L(A)$ , полагая  $[xy] = xy - yx$  (коммутатор двух элементов).

Пусть, в частности,  $A = \text{End}_P(V) = \mathcal{L}(V)$  - алгебра всех линейных операторов конечномерного векторного пространства  $V$  над  $P$ . Любой гомоморфизм

$$\varphi : L \longrightarrow L(\mathcal{L}(V))$$

называется представлением алгебры Ли  $L$ . В соответствии с терминологией предыдущих параграфов пространство представления  $V$  называется также  $L$ -модулем (или модулем над алгеброй Ли  $L$ ). Формально  $L$ -модуль задаётся тремя аксиомами:

- L1)  $x(\alpha u + \beta v) = \alpha xu + \beta xv$ ;

$$L2) (\alpha x + \beta y)v = \alpha xv + \beta yv;$$

$$L3) [xy]v = x(yv) - y(xv).$$

На самом деле каждый  $L$ -модуль является модулем над универсальной обёртывающей алгеброй  $U(L)$  - ассоциативной алгеброй, порождаемой  $L$  (теорему Биркгофа-Витта на этот счёт мы не формулируем).

При мер 1. Дифференцированием произвольной алгебры  $A$  (не обязательно ассоциативной) над полем  $P$  называется дифференцирование  $\mathcal{D}$  кольца  $(A, \cdot)$ :

$$\mathcal{D}(u + v) = \mathcal{D}(u) + \mathcal{D}(v), \quad \mathcal{D}(u \cdot v) = \mathcal{D}(u) \cdot v + u \cdot \mathcal{D}(v), \quad u, v \in A$$

перестановочное с действием констант из  $P : \mathcal{D}(\lambda a) = \lambda \mathcal{D}(a), \lambda \in P, a \in A$ . Умножение

$$[\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2] = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1$$

наделяет множество всех дифференцирований  $\text{Der}(A)$ , являющееся векторным пространством над  $P$ , структурой алгебры Ли.

Если, в частности,  $A = P[X]$  - алгебра многочленов, то  $\text{Der}(A)$  состоит из дифференцирований  $\mathcal{D}_u, u \in A$ , действующих по правилу

$$\mathcal{D}_u(f) = u \frac{df}{dX} = u f'$$

По определению

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_u \mathcal{D}_v](f) &= \mathcal{D}_u(\mathcal{D}_v f) - \mathcal{D}_v(\mathcal{D}_u f) = \mathcal{D}_u(v f') - \mathcal{D}_v(u f') = \\ &= u(v f')' - v(u f')' = u(v' f' + v f'') - v(u' f' + u f'') = (uv' - u'v) f' \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[\mathcal{D}_u \mathcal{D}_v] = \mathcal{D}_{uv' - u'v}$$

и мы видим, что алгебра  $\text{Der}(A)$  изоморфна бесконечномерной алгебре Ли  $(A, [\ast, \ast])$  с базисным пространством  $A$  и умножением  $[uv] = uv' - u'v$ . Положив  $A_{(i)} = \langle X^{i+1} \rangle_P$ , мы получим разложение  $A$  в прямую сумму

$$A = A_{(-1)} \oplus A_{(0)} \oplus A_{(1)} \oplus A_{(2)} \oplus \dots$$

обладающее свойством градуированной алгебры Ли

$$[A_{(i)}, A_{(j)}] \subset A_{(i+j)}$$

(ср. с примером 2 из п. 14). Алгебра Ли  $(K, [\ast, \ast])$  действует на векторном пространстве  $K$  двумя способами: 1)  $(a, f) \mapsto af'$  (естественное действие);

2)  $(a, f) \mapsto af' - a'f$  (действие присоединёнными эндоморфизмами). В результате

получаются два неизоморфных  $(A, [\ast, \ast])$ -модуля.

При мер 2. Трёхмерное вещественное пространство

$$\mathfrak{su}(2) = \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \rangle_{\mathbb{R}}$$

косоеэрмитовых матриц с нулевым следом наделено структурой алгебры Ли. Соотношения

$$[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2] = \mathbf{k}_3, \quad [\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3] = \mathbf{k}_1, \quad [\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1] = \mathbf{k}_2$$

в точности повторяют правила векторного произведения векторов в  $\mathbb{R}^3$ .

Из общей теории представлений компактных групп следует, что между неприводимыми представлениями группы  $SU(2)$  и её алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$  имеется взаимно однозначное соответствие. Интуитивно это можно понять, приняв во внимание непрерывность представления группы и рассмотрев в линейной оболочке операторов  $\Phi(g_t)$  (где  $g_t$  - зависящий дифференцируемым образом от  $t \in \mathbb{R}$  элемент группы  $SU(2)$ ;  $g_0 = e$ ) линейный оператор  $d\Phi(g_t)/dt|_{t=0}$ , уже содержащийся в алгебре  $\mathfrak{su}(2)$ . Чтобы подтвердить полноту списка неприводимых представлений группы  $SU(2)$ , которые были получены в 6 гл. 3, нам нужно убедиться в том, что для любого натурального  $n$  имеется с точностью до изоморфизма ровно один неприводимый  $\mathfrak{su}(2)$ -модуль размерности  $n$  над  $\mathbb{C}$ . С этой целью удобно перейти с самого начала от вещественной алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$  к её "комплексификации", совпадающей с алгеброй Ли  $L = \mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  всех комплексных  $2 \otimes 2$ -матриц с нулевым следом. Базисные элементы

$$e_{-1} = \mathbf{k}_1 - i\mathbf{k}_2, \quad e_0 = 2i\mathbf{k}_3, \quad e_1 = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2$$

алгебры  $L$  перемножаются по правилам

$$[e_{-1}e_1] = e_0, \quad [e_0e_{-1}] = -2e_{-1}, \quad [e_0e_1] = 2e_1$$

Забыв на время о происхождении  $L$ , можно считать, что  $L = \langle e_{-1}, e_0, e_1 \rangle$  - абстрактная трёхмерная алгебра Ли над  $\mathbb{C}$  с таблицей умножения (1). Легко проверить, что  $L$  - простая алгебра Ли. Стало быть, любой её неприводимый модуль размерности  $> 1$  будет точным.

### Веса и кратности.

Пусть вначале  $V \neq 0$  - произвольный  $L$ -модуль конечной размерности над  $\mathbb{C}$ , и пусть  $E_{-1}, E_0, E_1$  - линейные операторы (или матрицы при фиксированном базисе) на  $V$ , отвечающие соответственно элементам  $e_{-1}, e_0, e_1$ . В теории представлений алгебр Ли установилась своя терминология, которой мы будем придерживаться.

**О п р е д е л е н и е.** Собственное подпространство

$$V^\lambda = \{v \in V | E_0 v = \lambda v\}$$

оператора  $E_0$  в  $V$  с собственным значением  $\lambda \in \mathbb{C}$  состоит из векторов, о которых принято говорить, что они имеют вес  $\lambda$ . Размерность  $\dim V^\lambda$  называется кратностью веса  $\lambda$ .

**Лемма 1.** Если  $v \in V^\lambda$ , то

$$E_1 v \in V^{\lambda+2}, \quad E_{-1} v \in V^{\lambda-2}$$

( $E_1$  — "повыщающий" оператор, а  $E_{-1}$  — "понижающий").

**Доказательство.** В соответствии с аксиомой L3) имеем

$$E_0(E_1 v) = [E_0 E_1] v + E_1(E_0 v) = 2E_1 v + E_1(\lambda v) = (\lambda + 2)E_1 v$$

так что по определению  $E_1 v \in V^{\lambda+2}$ . Аналогично,

$$E_0(E_{-1} v) = (\lambda - 2)E_{-1} v.$$

### Старший вектор

Из [ВА II] известно, что векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы. Поэтому сумма

$$W = \sum_{\lambda} V^{\lambda} \subset V$$

прямая. Из леммы 1 следует также, что  $W$  является  $L$ -подмодулем в  $V$ . Так как  $W \neq 0$ , то в случае неприводимого  $L$ -модуля  $V$  должно выполняться равенство  $W = V$ .

Определение. Вектор  $v_0 \in V$  назовём старшим вектором веса  $\lambda$ , если  $v_0 \neq 0$  и

$$E_1 v_0 = 0, \quad E_0 v_0 = \lambda v_0.$$

Лемма 2. Любой конечномерный  $L$ -модуль  $V$  обладает старшим вектором.

Доказательство. Возьмём произвольный ( $\neq 0$ ) вектор  $v$  веса  $\mu$  и построим последовательность векторов  $v, E_1 v, E_1^2 v, \dots$  с весами  $\mu, \mu + 2, \mu + 4, \dots$  (см. лемму 1). Так как  $\dim V < \infty$ , то  $E_1^{m+1} v = 0$  для некоторого  $m$ . Взяв  $m$  минимальным, мы можем положить  $v_0 = E_1^m v$ ,  $\lambda = \mu + 2m$ .

Лемма 3. Пусть  $V_n$  - векторное пространство размерности  $n + 1$  над  $\mathbb{C}$  с фиксированным базисом  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ ,  $E_1, E_0, E_{-1}$  - операторы, определённые формулами

$$\begin{aligned} E_{-1} v_m &= (m + 1) v_{m+1}, \\ E_0 v_m &= (n - 2m) v_m, \\ E_1 v_m &= (n - m + 1) v_{m-1} \end{aligned}$$

где  $v_{-1} = 0 = v_{n+1}$ . Тогда  $V_n$  - неприводимый  $L$ -модуль.

Доказательство. Прямая проверка показывает, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned} E_1 (E_{-1} v_m) - E_{-1} (E_1 v_m) &= E_0 v_m, \\ E_0 (E_{-1} v_m) - E_{-1} (E_0 v_m) &= -2 E_{-1} v_m, \\ E_0 (E_1 v_m) - E_1 (E_0 v_m) &= 2 E_1 v_m \end{aligned}$$

согласующиеся с таблицей умножения (1) и с аксиомами  $L$ -модуля. Так как  $E_1 v_0 = (n + 1) v_{-1} = 0$ ,  $E_0 v_0 = n v_0$ , то  $v_0$  - старший вектор веса  $n$ , а всё пространство  $V_n$  записывается в виде прямой суммы

$$V_n = V^n \oplus V^{n-2} \oplus \dots \oplus V^{-n}$$

одномерных весовых подпространств  $V^{n-2m} = \langle v_m \rangle$  (каждый вес имеет кратность 1).

Предположив существование подмодуля  $U \neq 0$  в  $V_n$ , мы возьмём любой собственный вектор  $u \in U$  оператора  $E_0$ . Согласно разложению (3)  $u = \lambda v_m$  для некоторого  $m$ . Последовательное применение повышающего оператора  $E_1$  (см. формулы (2)) даст нам включения  $v_{m-1} \in U, \dots, v_0 \in U$ , а посредством понижающего оператора  $E_{-1}$  мы получим из старшего вектора  $v_0$  все остальные векторы. Значит,  $U = V_n$ , и  $V_n$  - неприводимый  $L$ -модуль.

Заметим, что  $V_0$  - тривиальный (одномерный) модуль, а  $V_1$  - модуль, соответствующий естественному определению алгебры  $L$ : в базисе  $(v_0, v_1)$  операторы  $E_{-1}, E_0, E_1$  имеют своими матрицами

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

## Классификационный результат

Следующая теорема решает стоящую перед нами задачу.

Теорема 1. Всякий неприводимый  $L$ -модуль  $V$  размерности  $n + 1$  над  $\mathbb{C}$  изоморфен  $V_n$ .

Доказательство. По лемме 2 наш модуль  $V$  обладает некоторым старшим вектором  $v_0$  веса  $\lambda$ . Положим

$$v_{-1} = 0, \quad v_m = \frac{1}{m!} E_{-1}^m v_0 = \frac{1}{m!} E_{-1} (\dots (E_{-1} v_0) \dots) \text{ при } m \geq 0.$$

Утверждается, что при любом  $m \geq 0$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} E_{-1} v_m &= (m + 1) v_{m+1}, \\ E_0 v_m &= (\lambda - 2m) v_m, \\ E_1 v_m &= (\lambda - m + 1) v_{m-1}. \end{aligned}$$

Действительно, при  $m = 0$  формулы (2') сводятся к определению старшего вектора  $v_0$  и вектора  $v_1$ , а дальше действуем индукцией по  $m$ .

а) Формулой  $E_{-1} v_m = (m + 1) v_{m+1}$  определяется вектор  $v_{m+1}$ .

б) Формула  $E_0 v_m = (\lambda - 2m) v_m$  следует из леммы 1.

в) Если уже известно, что  $E_1 v_{m-1} = (\lambda - m + 2) v_{m-2}$ , то после сокращения на  $m$  обеих частей равенства

$$\begin{aligned} m E_1 v_m &= E_1 (E_{-1} v_{m-1}) = [E_1 E_{-1}] v_{m-1} + E_{-1} (E_1 v_{m-1}) = \\ &= E_0 v_{m-1} + (\lambda - m + 2) E_{-1} v_{m-2} = \\ &= \{(\lambda - 2m + 2) + (\lambda - m + 2)(m - 1)\} v_{m-1} = m(\lambda - m + 1) v_{m-1} \end{aligned}$$

получается последняя из формул (2').

Если векторы  $v_0, v_1, \dots, v_r$  при каком-то  $r$  отличны от нуля, то, имея различные веса, они должны быть линейно независимыми. С другой стороны, в силу неприводимости  $V$  подмодуль, порождённый вектором  $v_0$ , совпадает с  $V$ , а так как  $\dim V = n + 1$ , то  $V = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$  и  $v_{n+1} = v_{n+2} = \dots = 0$ . В частности,

$$0 = E_1 v_{n+1} = (\lambda - n) v_n = 0 \implies \lambda = n$$

(обратим внимание на любопытную импликацию  $\dim V < \infty \implies \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \geq 0$ ).

Подставив значение  $\lambda = n$  в формулы (2'), мы придём фактически, с учётом выбранных обозначений, к формулам (2), которыми определялся неприводимый (по лемме 3)  $L$ -модуль  $V_n$ . Значит,  $V \cong V_n$ .

## 3 Rings by Lang

(add his book later)

### 3.1 Rings and homomorphisms

(see book by Lang)

### 3.2 Commutative rings

(see book by Lang)



### 3.3 Localization

(see book by Lang)

### 3.4 Principal ideal rings

(see book by Lang)

### 3.5 Matrix groups and their properties

### 3.6 Other Constructions

(впишу потом в нужные разделы)

#### 3.6.1 Spin of fields according to Kiselev

##### Квантование спина в общем случае

###### Подготовка

(тут все свойства и определения укажу, которые нужно знать.)

(про совместный базис напишу лучше в дополнения, пока не глубоко въехал в то, какой конкретно он?)

###### Квантование

(тут абзац - суть идеи квантования. что квадрат нормировочного коэффициента для повышающего оператора положительный, а он определяется действиями собственными значениями)

Пусть  $s$  - эрмитовы матрицы, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям генераторов группы поворотов:

$$[s_\alpha, s_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma.$$

Отсюда следует, что в полный набор наблюдаемых можно включить лишь один из генераторов, например,  $s_z$ , так как два других генератора не коммутируют с ним и не могут иметь совместного с ним базиса собственных векторов.

Ясно, что нулевой коммутатор у генератора поворотов может быть только с самим собой или со скалярной величиной, которая не преобразуется при поворотах, поскольку собственное значение скалярной величины до поворота и после поворота не изменяется. Из генераторов группы поворотов можно построить лишь один независимый скаляр <sup>11</sup>,  $s^2$ . Вычислим коммутатор

$$[s^2, s_\alpha] = [s_\beta s_\beta, s_\alpha]$$

с помощью тождества

$$[AB, C] = ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B,$$

откуда

$$[s_\beta s_\beta, s_\alpha] = s_\beta [s_\beta, s_\alpha] + [s_\beta, s_\alpha] s_\beta = i\epsilon_{\beta\alpha\gamma}(s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\beta).$$

Здесь в круглых скобках - симметричный относительно перестановок индексов  $\beta$  и  $\gamma$  тензор второго ранга - сворачивается с тензором  $\epsilon_{\beta\alpha\gamma}$ , антисимметричным по

перестановкам тех же индексов  $\beta$  и  $\gamma$ , но такая свертка симметричного тензора с антисимметричным всегда тождественно равна нулю. В итоге,

$$[\mathbf{s}^2, s_\alpha] = 0,$$

и полный набор наблюдаемых составляют  $\{s^2, s_z\}$ . Базис тензорных полей удовлетворяет уравнениям на собственные значения полного набора наблюдаемых для группы поворотов:

$$s^2 |\lambda_s, m_s\rangle = \lambda_s |\lambda_s, m_s\rangle, \quad s_z |\lambda_s, m_s\rangle = m_s |\lambda_s, m_s\rangle$$

Будем считать этот базис ортонормированным. В силу (3.31) повышающий и понижающий генераторы

$$s_\pm = s_x \pm i s_y,$$

коммутируют с квадратом спина:

$$[\mathbf{s}^2, s_\pm] = 0$$

и это означает, что значение  $\lambda_s$  не меняется при действии бесконечно малых преобразований с генераторами  $s_{x,y}$ , но при действии тех же преобразований меняется значение  $m_s$ , так как в противном случае, эти генераторы коммутировали бы с  $s_z$ , что неверно. Такое положение указывает, что одному и тому же значению  $\lambda_s$  отвечают несколько значений  $m_s$ , т.е. имеет место вырождение спектра собственных значений  $\lambda_s$  по значениям  $m_s$ . Между прочим, мы установили общее условие вырожденности спектра эрмитовой матрицы  $A$ : если эрмитова матрица  $A$  коммутирует с эрмитовыми матрицами  $B$  и  $C$ , но сами матрицы  $B$  и  $C$  не коммутируют между собой, то спектр собственных значений матрицы  $A$  вырожден, например, по собственным значениям в совместном базисе с матрицей  $B$ .

Найдем действие повышающего и понижающего генератора на совместный базис  $|\lambda_s, m_s\rangle$ . Для этого сначала вычислим коммутаторы

$$[s_\pm, s_z] = [s_x, s_z] \pm i [s_y, s_z] = -i s_y \pm i s_x = \mp s_\pm$$

Тогда

$$s_z s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = (s_\pm s_z \pm s_\pm) |\lambda_s, m_s\rangle = (m_s \pm 1) s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle.$$

Значит, вектор  $s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle$  имеет собственные значения  $s_z$ , равные  $m_s \pm 1$ :

$$s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = N_\pm(\lambda_s, m_s) |\lambda_s, m_s \pm 1\rangle \quad \Rightarrow \quad (s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle)^\dagger = \langle \lambda_s, m_s | s_\mp = N_\pm(\lambda_s, m_s) \langle \lambda_s, m_s \pm 1 |$$

где мы задали комплексную фазу собственного вектора  $|\lambda_s, m_s\rangle$  так, чтобы нормировочный коэффициент был бы вещественным. Найдем нормировочный коэффициент  $N_\pm(\lambda_s, m_s)$ . Для этого выразим выражения  $s_\pm s_\mp$ , расписав дважды  $s^2$ :

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_+ s_- + i [s_x, s_y] + s_z^2 = s_+ s_- - s_z + s_z^2,$$

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_- s_+ - i [s_x, s_y] + s_z^2 = s_- s_+ + s_z + s_z^2.$$

Тогда

$$\langle \lambda_s, m_s | s_\mp s_\pm | \lambda_s, m_s \rangle = (s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle)^\dagger s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = N_\pm^2(\lambda_s, m_s),$$

Т.е.

$$N_\pm^2(\lambda_s, m_s) = \langle \lambda_s, m_s | s_\mp s_\pm | \lambda_s, m_s \rangle = \langle \lambda_s, m_s | (s^2 - s_z^2 \mp s_z) | \lambda_s, m_s \rangle = \lambda_s - m_s(m_s \pm 1).$$

Поскольку нормировка вектора не может быть отрицательной,  $N_\pm^2(\lambda_s, m_s) \geq 0$ . Это условие может быть выполнено, только если в цепочках многократного действия

повышающего и понижающего операторов, во-первых, значения  $m_s$  не произвольны, а принимают такие значения, чтобы

$$m_s(m_s \pm 1) \leq \lambda_s,$$

и во-вторых, должны существовать максимальное  $m_s^{\max}$  и минимальное  $m_s^{\min}$  значения, которые дают в точности нулевые значения нормы вектора после повышения и понижения, соответственно, так как в противном случае повышение и понижение приводило бы к возникновению векторов с отрицательной нормой, что недопустимо, т.е.

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) = \lambda_s, \quad m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = \lambda_s.$$

Вместе с тем, действуя многократно на вектор  $|\lambda_s, m_s^{\max}\rangle$  понижающим оператором  $n$  раз, мы получим  $m_s = m_s^{\max} - n$  и в конце концов вектор, в точности равный  $|\lambda_s, m_s^{\min}\rangle$ , в силу существования минимально допустимого значения  $m_s$ , т.е. для некоторого неотрицательного целого значения  $n$  верно  $m_s^{\min} = m_s^{\max} - n$ . Тогда связь минимального и максимального значений проекции спина на ось  $z$  с собственным значением квадрата спина  $\lambda_s$  приводит к единственному решению в виде

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = 0, \Rightarrow m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - (m_s^{\max} - n)(m_s^{\max} - n - 1) = 0,$$

$$m_s^{\max} = \frac{n}{2}, \quad m_s^{\min} = -\frac{n}{2}.$$

Максимальное значение проекции спина на ось  $z$  обозначают символом  $s$ , так что

$$s = \frac{n}{2},$$

т.е. допустимые значения проекции спина - это положительные полуцелые и целые значения. Целые значения отвечают полям, которые называют тензорными, а полуцелые - спинорным полям.

Базис полей, таким образом, образуют совместные собственные векторы квадрата спина и его проекции на выбранную ось, так что изменяя обозначения путем подстановки  $\lambda_s = s(s + 1) \mapsto s$  запишем его в виде

$$|s, m_s\rangle, \quad m_s \in \{-s, -s + 1, \dots, s - 1, s\}.$$

Действие повышающей и понижающей матриц спина на базисные вектора строго определено,

$$s_{\pm} |s, m_s\rangle = \sqrt{s(s + 1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle.$$

В частном случае  $s = 1$ , мы убедились, что соотношения (3.36) являются тождествами согласно проведенной нами процедуре прямого построения матриц спина и собственных векторов для матрицы  $s_z$ . Размерность пространства собственных векторов квадрата спина и его проекции на выбранную ось равна один старший вектор с максимальным значением проекции и  $n$  шагов от старшего вектора до младшего, т.е. вектора с минимальным значением проекции, а значит,

$$k = 1 + n = 1 + 2s.$$

Это число компонент называют мультиплетностью неприводимого представления группы поворотов для поля. Неприводимым это представление называют потому, что при поворотах, а значит, при многократном действии генераторов спина, вектор с заданной проекцией спина на ось  $z$  перемешивается со всеми другими векторами базиса с тем же значением квадрата спина, т.е. пространство собственных векторов с заданным

квадратом спина не содержит в себе подпространств, вектора которых не смешивались бы друг с другом при действии группы поворотов.

Для скаляра  $s = 0$ , и поле имеет одну единственную компоненту, поэтому скаляр называют синглетом и обозначают символом 1. У вектора  $s = 1$ , и поле имеет три компоненты, это — триплет (символ 3), у спинора  $s = 1/2$ , и поле имеет две компоненты, это — дублет (символ 2).

Напомним, что построенный нами базис называют стандартным, он решает задачу классификации полей по базису собственных векторов генераторов спина. Задача 47. Найдите преобразование матриц спина векторного поля, которое переводит эти матрицы из базиса декартовых координат к матрицам в стандартном базисе собственных векторов с заданными значениями проекции спина на ось  $z$ .

### Иллюстрация квантованного спина (???)

(как можно представить тот результат, который мы получили?)

### Как догадаться до того, что спин квантуется (???)

(потом подумаю, пока так)

**О том, когда квантование спина переходом к нормировочному коэффициенту для повышающего или понижающего оператора не работает или дает не такой результат (???)**

(не всегда такой спин, укажу, почему и как мог бы он быть другим.)

(мб если пространство двумерное, там вообще нет такой алгебры? пока остался вопрос.)

### Вращение поля со спином $s = 1$

(?? это же было про векторное поле, тут к чему мы вообще готовимся, просто параметры находим?? мб вставлю сюда часть про вект поле)

### Собственные значения

Собственные значения эрмитовой матрицы  $s_z$  находятся из

$$\det(s_z - \lambda \cdot \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Итак, проекция спина имеет три собственных значения  $\lambda = \{-1, 0, +1\}$  в трехмерном пространстве, так что спектр собственных значений невырожден. Отнормируем собственные кет-вектора  $|\lambda\rangle$  на единицу, так что с точностью до комплексной фазы найдем

$$|+1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные вектора матрицы спина  $s_z$  не являются собственными для матриц  $s_x$  и  $s_y$ . Более того, вводят повышающие и понижающие матрицы

$$s_{\pm} = s_x \pm i s_y, \quad s_+^{\dagger} = s_-, \quad s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Легко найти, что повышающий оператор увеличивает значение проекции на единицу,

$$s_+|+1\rangle = 0, \quad s_+|0\rangle = \sqrt{2}|+1\rangle, \quad s_+|-1\rangle = \sqrt{2}|0\rangle$$

**О деталях (?)**

**Вращение со спином  $s = 1/2$**

**Вращение со спином  $s = 1/2$**

Рассмотрим поле с полуцелым спином,  $s = \frac{1}{2}$ . В этом случае соответствующая спиновая матрица представляется в виде

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma},$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  - матрицы Паули. Найдем явный вид матриц Паули, используя общие выражения для действия матриц спина на базисные поля. Базис спиновых состояний для краткости обозначений записывают как

$$\left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle = |+\rangle, \quad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = |-\rangle,$$

причем это - собственные векторы проекции спина

$$s_z|+\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle, \quad s_z|-\rangle = -\frac{1}{2}|-\rangle.$$

Следовательно, эта матрица в рассматриваемом базисе имеет диагональный вид

$$s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (3.36) ненулевые матричные элементы повышающего и понижающего операторов

$$\begin{aligned} \langle +|s_+|-\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) - (-1)\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1\right)} = 1, \\ \langle -|s_-|+\rangle &= (\langle +|s_+|-\rangle)^{\dagger} = 1, \end{aligned}$$

откуда

$$s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратное преобразование  $s_{\pm} \leftrightarrow s_{x,y}$  дает

$$s_x = \frac{1}{2}(s_+ + s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$s_y = \frac{1}{2i}(s_+ - s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому сигма-матрицы Паули - это

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы отличать фиксированный набор матриц (3.51) от матриц, которые получаются при проецировании на произвольно заданные оси декартовых координат  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  часто для матриц Паули используют обозначения  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Поле со спином  $\frac{1}{2}$ , которое называют спинором, обладает двумя поляризациями<sup>15</sup>

$$|\theta^\alpha\rangle, \quad \alpha = \{1, 2\}, \quad |\theta^{(1)}\rangle = |+\rangle, \quad |\theta^{(2)}\rangle = |-\rangle,$$

Далее будем использовать для спинорных индексов греческие буквы в начале алфавита:  $\alpha, \beta, \dots$ , - а для векторных индексов латинские буквы:  $a, b, \dots$  поле спинора

$$\langle \psi(\mathbf{r}) | \theta^\alpha \rangle = \psi^\alpha(\mathbf{r})$$

- это так называемый двухкомпонентный спинор Паули. Преобразования спинора при поворотах имеют такой же вид, как и для тензоров:

$$R(\phi) \circ \psi(\mathbf{r}) = \hat{R}_S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_\phi(\mathbf{r}_\phi) = \hat{R}_S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}),$$

где  $\phi = \phi \mathcal{O}$  - вектор поворота на угол  $\phi$  вокруг оси  $\mathcal{O}$ ,  $R(\phi)$  операция преобразования поля спинора, а  $\hat{R}_S(\phi)$  спинное преобразование компонент спинора, которое при бесконечно малых углах равно

$$\hat{R}_S(\phi) \approx \mathbb{1} - i \mathbf{s} \cdot \phi, \quad \phi \rightarrow 0$$

Поскольку матрицы спина не зависят от угла поворота, можно записать, что

$$\hat{R}_S(\phi + d\phi) = (\mathbb{1} - i \mathbf{s} \cdot d\phi) \cdot \hat{R}_S(\phi)$$

а значит, имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{d\hat{R}_S(\phi)}{d\phi} = -i \mathbf{s} \cdot \hat{R}_S(\phi),$$

которое легко интегрируется

$$\hat{R}_S(\phi) = e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}.$$

Итак, при поворотах спинор преобразуется согласно

$$\psi_\phi^\alpha(\mathbf{r}_\phi) = \{e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}\}_{\bullet\beta}^\alpha \psi^\beta(\mathbf{r}),$$

где мы указали матричные индексы в явном виде. Для вычисления матричной экспоненты установим два факта: 1. коммутационные соотношения

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c$$

следуют из коммутационных соотношений для момента импульса:  $[\frac{1}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b] = i\epsilon_{abc}\frac{1}{2}\sigma_c$ ; 2. антикоммутационные соотношения

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab}$$

устанавливаются прямыми вычислениями произведений матриц Паули (с использованием повышающей и понижающей матриц с учетом их размера  $2 \times 2$ ).

В самом деле, двукратное повышение приводит к нулю, поскольку при спине  $s = \frac{1}{2}$  допустим только один шаг от младшего вектора к старшему, а последующие шаги уже действуют на нулевой вектор. Значит,

$$\sigma_+^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x^2 + i(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) - \sigma_y^2 = 0,$$

Но с учетом того, что, очевидно,  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \mathbb{1}$ , сразу находим антикоммутатор

$$\{\sigma_x, \sigma_y\} = 0.$$

Точно также, вычисляя значение проекции спина на ось  $z$  до и после повышения, устанавливаем, что на базисных векторах

$$\sigma_+\sigma_z + \sigma_z\sigma_+ = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\sigma_x, \sigma_z\} + i\{\sigma_y, \sigma_z\} = 0.$$

Но антикоммутатор сигма-матриц Паули - это эрмитово самосопряженная матрица, так что в последнем равенстве антикоммутаторы независимо обращаются в нуль, что, конечно, завершает доказательство (3.57). Поскольку

$$\sigma_a\sigma_b = \frac{1}{2}[\sigma_a, \sigma_b] + \frac{1}{2}\{\sigma_a, \sigma_b\}$$

находим

$$\sigma_a\sigma_b = i\epsilon_{abc}\sigma_c + \delta_{ab}.$$

Домножая это тождество на векторы  $A_a$  и  $B_b$ , получаем

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = i(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  - векторное произведение векторов. В частности,

$$(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{\phi}^2.$$

Тогда в экспоненте матрицы конечных поворотов

$$\hat{R}_S = e^{-i\boldsymbol{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{2^n n!} (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^n$$

четные степени разложения пропорциональны единичной матрице, а нечетные - оператору где  $\mathcal{O}$  - единичный вектор вдоль оси поворота. Тогда суммирование четных и нечетных степеней дает

$$\hat{R}_S = e^{-i\boldsymbol{\phi}} = \cos\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \cdot \mathcal{O})\right) - i(\mathcal{O} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \cdot \cdot)\right).$$

При повороте вокруг оси на угол  $2\pi = (\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{o})$  получаем  $\mathbf{r}^\phi = \mathbf{r}$  и

$$e^{-1/\phi}|_{2\pi} = -1.$$

Значит,

$$\psi^\alpha(\mathbf{r})|_{2\pi} = -\psi^\alpha(\mathbf{r}),$$

т.е. пале спинора меняет знак после поворота на угол  $2\pi$ . Это свойство, очевидно, является общим для всех частиц с полуцелым спином, которых называют фермионами.

Напомним теперь, что мы стартовали с алгебры группы поворотов 3-мерного евклидова пространства. Как видим, среди представлений этой алгебры имеются спинорные, причем группа поворотов спиноров не совпадает с группой  $SO(3)$ . В самом деле <sup>17</sup>,

$$\det \hat{R}_S = \exp\left\{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\phi} \cdot \text{tr}\boldsymbol{\sigma}\right\} = 1,$$

и это специальные преобразования 2-мерных комплексных столбцов, т.е. группа  $SU(2)$ . Существует гомоморфизм  $SU(2) \mapsto SO(3)$ . Действительно, сигма-матрицы Паули - генераторы группы преобразований спиноров Паули  $\psi^\alpha$ , и, следовательно, они переводят спинор в спинор, а значит, имеют матричные индексы  $\sigma_\alpha^\beta$ , где верхний индекс  $\beta$  относится к столбцам (исходное 2-мерное векторное пространство), которые преобразуются матрицами  $\hat{R}_S$ , а нижний индекс  $\alpha$  относится к строкам (пространство, сопряженное к исходному 2-мерному пространству столбцов, т.е. ковекторное пространство), которые преобразуются, конечно, обратными матрицами  $\hat{R}_S^{-1}$ , а они совпадают с эрмитово сопряженными  $\hat{R}_S^\dagger = \hat{R}_S^{-1}$ . Это значит, что закон преобразования сигма-матриц в группе  $SU(2)$  выглядит следующим образом:

$$\sigma \mapsto \hat{R}_S \sigma \hat{R}_S^\dagger$$

Рассмотрим теперь  $2 \times 2$ -матрицу

$$\hat{V} = V_a \sigma^a,$$

где  $V_a$  – 3-мерный ковектор. По матрице  $\hat{V}$  можно определить вектор

$$V^b = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \hat{V}),$$

поскольку

$$\text{tr} (\sigma^b \sigma^a) = \text{tr} (\sigma^a \sigma^b) = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \sigma^a + \sigma^a \sigma^b) = \frac{1}{2} 2\delta^{ab} \text{tr} \mathbb{1} = 2\delta^{ab}.$$

Детерминант матрицы  $\hat{V}$  является инвариантом,

$$\det (\hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^\dagger) = \det (\hat{V} \hat{R}_S^\dagger \hat{R}_S) = \det \hat{V}.$$

Этот инвариант легко вычисляется из явного вида сигма-матриц,

$$\det \hat{V} = \det \begin{pmatrix} V_z & V_x - iV_y \\ V_x + iV_y & -V_z \end{pmatrix} = -(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = -\mathbf{V}^2,$$

и  $(-1) \det \hat{V}$  – это квадрат длины вектора  $\mathbf{V}$ , который не меняется при поворотах. Разложим преобразованную матрицу по матрицам Паули,

$$\hat{V}' = \hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^\dagger = V'_a \sigma^a,$$

откуда

$$V'^b = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \hat{V}') = V_a \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \hat{R}_S \sigma^a \hat{R}_S^\dagger).$$

Но это значит, что 3-вектор  $\mathbf{V}$  преобразуется  $3 \times 3$  матрицей

$$V^b = R_a^b V^a, \quad R_a^b = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^\dagger).$$

Покажем, что это – матрица поворотов евклидова пространства. Для этого рассмотрим бесконечно малые преобразования

$$\hat{R}_S \approx \mathbb{1} - \frac{i}{2} \phi^c \sigma_c, \quad \hat{R}_S^\dagger \approx \mathbb{1} + \frac{i}{2} \phi^c \sigma_c.$$

Тогда

$$R_a^b \approx \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \sigma_a) - \frac{i}{2} \phi^c \text{tr} (\sigma^b \sigma_c \sigma_a - \sigma^b \sigma_a \sigma_c) = \delta_a^b - \frac{i}{2} \phi^c \text{tr} (\sigma^b 2i\epsilon_{caa'} \sigma^{a'}) = \delta_a^b + \epsilon_{ca}^b \phi^c.$$



Значит, инфинитезимальное преобразование вектора имеет вид

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{V},$$

и оно действительно представляет собой поворот на угол  $\phi$ . В итоге, гомоморфизм  $SU(2)$  на  $SO(3)$  задается формулой преобразования матриц

$$R_a^b = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \sigma^b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^\dagger \right).$$

Отсюда сразу следует, что матрицы  $\hat{R}_S$  и  $-\hat{R}_S$  приводят к одной и той же матрице преобразований  $SO(3)$ , и, в частности, ядро гомоморфизма, т.е. преобраз единицы, нетривиально и это  $\pm \mathbb{1}$ . Ясно, что группа  $SU(2)$  дважды накрывает  $SO(3)$ . Итак, представления алгебры группы  $SO(3)$  дают представления универсальной накрывающей группы  $SU(2)$ . Термин «универсальная накрывающая» относится к гомотопическим свойствам гладких многообразий, которые мы здесь не рассматриваем (см. [5]).

## Спинорная метрика

### Суть и основные формулы спинорной метрики (!?!)

(пройду - сразу же напишу это тут.)

### Теория

Введем вещественную матрицу  $\hat{\epsilon}$ ,

$$\hat{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad \hat{\epsilon}^2 = -\mathbb{1} = \hat{\epsilon}, \quad \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon}^T = -\hat{\epsilon},$$

и определим сопряженный к спинору  $\psi$  спинор  $\psi_c$  с помощью комплексного сопряжения и матричного умножения,

$$\psi_c \stackrel{\text{def}}{=} -\hat{\epsilon}\psi^* = -i\sigma_2\psi^*,$$

а затем рассмотрим, как он преобразуется при поворотах,

$$\psi_c^\phi = -\hat{\epsilon} \left( \hat{R}_S \psi \right)^* = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} (-\hat{\epsilon}\psi^*) = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} \psi_c$$

Значит, нам необходимо найти матрицу  $\hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1}$ . При этом, матрица поворотов спиноров  $\hat{R}_S$  имеет вид экспоненты (3.60). В общем случае, так как  $\hat{\epsilon} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \mathbb{1}$ , разложение экспоненты от матрицы в ряд Тейлора приводит к

$$\hat{\epsilon} \circ \exp\{A\} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \}^n = \exp \{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \}.$$

В случае матрицы поворотов

$$\begin{aligned} \hat{R}_S &= \exp \left( -\frac{i}{2} \phi (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}) \right), \\ \hat{R}_S^* &= \exp \left( \frac{i}{2} \phi (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}) \right). \end{aligned}$$

так что Для вычисления  $\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon}^{-1}$  заметим, что матрицы  $\sigma_x, \sigma_z$  симметричные и вещественные, так что

$$\sigma_x^* = \sigma_x^T = \sigma_x, \quad \sigma_z^* = \sigma_z^T = \sigma_z,$$

а матрица  $\sigma_y$  чисто мнимая и антисимметричная, так что

$$\sigma_y^* = \sigma_y^T = -\sigma_y.$$

Поэтому в силу

$$\sigma_x \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_x, \quad \sigma_z \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_z, \quad \sigma_y \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} \sigma_y,$$

получаем

$$\hat{\epsilon} \circ \sigma^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^T \circ \hat{\epsilon}^{-1} = -\boldsymbol{\sigma}.$$

Значит,

$$\hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \exp \left( \frac{i}{2} \phi (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathcal{O}) \right) \hat{\epsilon}^{-1} = \exp \left( \frac{i}{2} \phi (\hat{\epsilon} \boldsymbol{\sigma}^* \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \mathcal{O}) \right) = \hat{R}_S,$$

Напомним, что контравариантные спиноры  $\psi^\alpha$ , которые при матричной записи можно по договоренности считать столбцами  $\psi^\alpha$ , преобразуются матрицами  $\hat{R}_S$ , а ковариантные спиноры  $\psi_\alpha$ , которые можно считать строками  $\psi \cdot \alpha$ , преобразуются обратными матрицами  $\hat{R}_S^{-1}$ . При этом,  $R_S$  - это унитарная матрица:

$$R_S \cdot R_S^\dagger = \mathbb{1}, \quad R_S^\dagger = R_S^{-1},$$

и поэтому эрмитово сопряженный спинор преобразуется как ковариантный. Говорят, что соотношение (3.70) устанавливает эквивалентность транспонированного представления группы поворотов спиноров эрмитово сопряженному представлению этой группы или, в данном случае, еще и эквивалентность транспонированного контравариантного представления ковариантному, а соотношение (3.69) - эквивалентность комплексно сопряженного представления контравариантному спинорному представлению. Итак, при поворотах

$$\psi_c^\phi = \hat{R}_S \psi_c,$$

где мы воспользовались соотношением (3.69). Значит, этот спинор при поворотах преобразуется также, как и сам спинор  $\psi$ . Поэтому произведение двух любых спиноров

$$\psi_c^\dagger \chi = (-\hat{\epsilon} \psi^*)^\dagger \chi = \psi^T (-\hat{\epsilon})^\dagger \chi = \psi^T \hat{\epsilon} \chi = \psi^\alpha \hat{\epsilon}_{\alpha\beta} \chi^\beta$$

является скаляром, т.е. инвариантом группы поворотов спиноров. Значит, формула определяет скалярное произведение двух спиноров. Поэтому согласно общему представлению о метрическом тензоре как о квадратичной инвариантной линейной функции  $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$  - полностью антисимметричный ковариантный тензор второго ранга в двумерном пространстве:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{12} = 1.$$

В терминах метрики скалярное произведение двух произвольных спиноров  $\psi$  и  $\chi$

$$\psi \cdot \chi = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\alpha \chi^\beta.$$

Метрика определяет ковариантные спиноры с нижними индексами

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta,$$

так что скалярное произведение

$$\psi \cdot \chi = \psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\beta \chi^\beta$$

Обратная метрика  $\epsilon^{\alpha\beta}$  определяется согласно

$$\epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha.$$

Очевидно,

$$\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}, \quad \epsilon^{12} = -1.$$

Определенный выше спинор  $\psi_c$  обозначают также спинором с чертой, который имеет верхний индекс с точкой, так как он преобразуется по представлению, эквивалентному представлению, которое действует в комплексно сопряженном спинорном пространстве:

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} (-\hat{\epsilon}\psi^*)^{\dot{\alpha}}.$$

Как мы показали, этот спинор при поворотах преобразуется также, как и обычный спинор. Поэтому скаляром будет величина (см. знаки в (3.72))

$$-\chi^{\dagger} \cdot \psi_c = -\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}},$$

где мы ввели обозначение для спинора с чертой и с нижним индексом с точкой как эрмитово сопряженного к обычному спинору-столбцу:

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = (\chi^{\dagger})_{\dot{\alpha}}$$

Элементарно

$$\chi^{\dagger} = \{\chi^*\}^T = \{\hat{\epsilon}(-\hat{\epsilon}\chi^*)\}^T = \{\hat{\epsilon}\bar{\chi}\}^T = -\bar{\chi}^T \hat{\epsilon}.$$

Поэтому

$$-\bar{\chi} \cdot \bar{\psi} = \bar{\chi}^T \hat{\epsilon} \bar{\psi} = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}, \quad \epsilon_{12} = 1,$$

т.е. метрика  $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  в спинорных индексах с точкой совпадает с метрикой  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в спинорных индексах без точек.

Метрика остается инвариантной при поворотах спиноров. Действительно, справедливо соотношение изометрии:

$$\hat{R}_S^T \hat{\epsilon} \hat{R}_S = -\hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \left( \hat{\epsilon} \hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} \right) \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^{\dagger} \hat{R}_S = \hat{\epsilon}$$

где мы воспользовались тождеством (3.70). Группа инвариантности спинорной метрики с  $\det \hat{R}_S = 1$  называется специальной унитарной группой на двухкомпонентных спинорах:  $SU(2)$ . Это трехпараметрическая группа.

Мы исследовали алгебру генераторов группы при построении поворотов спиноров. Эта алгебра совпадает с алгеброй генераторов группы поворотов трехмерного евклидова пространства  $SO(3)$ . Тем не менее, сами группы отличаются, так как в  $SU(2)$  допустимы и полуцелые собственные значения генератора  $s_z$ , а в  $SO(3)$  - только целые значения  $s_z$ . Это особенно ярко проявляется при проведенном выше рассмотрении поворота на угол  $2\pi$ : для спиноров этот поворот дает фактор  $-1$ , а для бозонов, полей с целым значением спина, - фактор  $+1$ . Существование полей с полуцелым спином возможно, но оно не следует, вообще говоря, из группы поворотов евклидова пространства. Факт такого существования экспериментальный. Подчеркнем, что спинорная метрика задает инвариант

$$\psi \cdot \psi = \psi^{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\beta} = \psi^{(1)} \psi^{(2)} - \psi^{(2)} \psi^{(1)}$$

и это инвариант обратился бы в нуль<sup>18</sup>, если бы спиноры описывались обычными комплексными числами! Этот факт напрямую связан с тем, что спиноры - частный случай фермионов с полуцелым спином, для которых имеет место принцип запрета Паули. Из принципа запрета Паули, как мы знаем (см. стр. 11 раздел 1.1.), следует, что перестановка наблюдаемых параметров тождественных фермионов, в данном случае,

перестановка номеров поляризации (проекция спина на ось  $z$ ) в амплитуде вероятности должна сопровождаться сменой знака амплитуды. В частности, следует положить, что

$$\psi^{(1)}\psi^{(2)} = -\psi^{(2)}\psi^{(1)}$$

что в математике называют алгеброй Грассмана, а сами числа с такими свойствами - грассмановыми переменными.

Укажем лишь, что в релятивистской теории устанавливается связь спина со статистикой: собственное значение оператора перестановок тождественных частиц равно  $+1$  для частиц с целым спином (бозонов) и  $-1$  для частиц с полуцелым спином (фермионов).

Тогда становится понятным, почему метрика пространства как инвариантная квадратичная форма на вещественных векторах симметрична, а метрика спинорного пространства на грассмановых спинорах антисимметрична.

### О произвольном спине (!!?)

Обсудим произвольный спин.

#### Коротко сам алгоритм определения генераторов произвольного спина

Можно делать методом Крамерса, а можно угадыванием.

Заметим, что там могут быть разные вообще матрицы, если брать разные знаки у их элементов! (?? так и должно быть, что много есть спинорных матриц вообще? похоже что.)

#### Preparation: $SU(2)$ , $O(3)$ and all that.

(!!! в теории групп напишу это!!!!!!)

I begin with brief review of some standard material, partly to underscore how elementary are the essential ideas, and partly to establish some notational conventions. It is upon this elementary foundation that we will build.

Let  $M$  be any  $2 \times 2$  matrix. From  $\det(M - \lambda I) = \lambda^2 - (\text{tr} M)\lambda + \det M$  we by the Cayley-Hamilton theorem have (??? проверю потом)

$$M^{-1} = \frac{(\text{tr} M)I - M}{\det M} \quad \text{unless } M \text{ is singular}$$

which gives for “unimodular”  $M$  ( $\det M = 1$ )

$$M^{-1} = (\text{tr} M)I - M$$

Trivially, any  $2 \times 2$  matrix  $M$  can be written

$$M = \frac{1}{2}(\text{tr} M)I + \underbrace{\left\{ M - \frac{1}{2}(\text{tr} M)I \right\}}_{\text{traceless}}$$

while we have just established that in unimodular cases

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(\text{tr} M)I - \left\{ M - \frac{1}{2}(\text{tr} M)I \right\}$$

Evidently such a matrix will be unitary if and only if

$a_0 \equiv \frac{1}{2}\text{tr}\mathbb{M}$  is real, and

$\mathbb{A} \equiv \left\{ \mathbb{M} - \frac{1}{2}(\text{tr}\mathbb{M})\mathbb{I} \right\}$  is antihermitian:  $\mathbb{A}^\dagger = -\mathbb{A}$ .

The Pauli matrices  $\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  are traceless hermitian, and permit the most general such  $\mathbb{A}$ -matrix to be notated

$$\mathbb{A} = i \{a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\}$$

We then have

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}$$

and recover unimodularity by imposing upon the real numbers  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$  the requirement that

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

Such matrices will henceforth be denoted  $\mathbb{S}$ , to emphasize that they have been Specialized; they provide the natural representation of the special unimodular group  $SU(2)$ . In terms of the so-called Cayley-Klein parameters <sup>8</sup>

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv a_0 + ia_3 \\ \beta &\equiv a_2 + ia_1 \end{aligned} \right\}$$

we have

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 1$$

Note the several points at which the argument has hinged on circumstances special to the 2-dimensional case.

Swifter and more familiar is the line of argument that proceeds from the observation that

$$\mathbb{S} = e^{i\mathbb{H}}$$

is unitary if and only if  $\mathbb{H}$  is hermitian, and by  $\det \mathbb{S} = e^{\text{tr}(i\mathbb{H})}$  will be unimodular if and only if  $\mathbb{H}$  is also traceless. The most general such  $\mathbb{H}$  can in 2-dimensions be written

$$\mathbb{H} = h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2 + h_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} h_3 & h_1 - ih_2 \\ h_1 + ih_2 & -h_3 \end{pmatrix}$$

Then

$$\mathbb{H}^2 = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

which implies and is implied by the statements

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{I} \\ \sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1 \\ \sigma_2\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_2 \\ \sigma_3\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_3 \end{aligned} \right\}$$

Also demonstrably true-but not implicit in the preceding line of argument are the statements

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3 \\ \sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_1 \\ \sigma_3\sigma_1 &= i\sigma_2 \end{aligned} \right\}$$

Results now in hand lead us to write

$$\mathbf{h} = \theta \mathbf{k} \quad : \quad \mathbf{k} \text{ a real unit 3-vector}$$

and obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \exp [i\theta \{k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3\}] \\ &= \cos \theta \cdot \mathbb{I} + i \sin \theta \cdot \{k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3\} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta + ik_3 \sin \theta & (k_2 + ik_1) \sin \theta \\ -(k_2 - ik_1) \sin \theta & \cos \theta - ik_3 \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in which notation the Cayley-Klein parameters (4) become

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \theta + ik_3 \sin \theta \\ \beta &= (k_2 + ik_1) \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

The Cayley-Klein parameters were introduced by Felix Klein in connection with the theory of tops; i.e., as aids to the description of the 3-dimensional rotation group  $O(3)$ , with which we have now to establish contact. This we will accomplish in two different ways. The more standard approach is to introduce the traceless hermitian matrix

$$\mathbb{X} \equiv x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

and to notice that  $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X} \equiv \mathbb{S}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{S}$  sends  $\mathbb{X}$  into a matrix which is again traceless hermitian, and which has the same determinant:

$$\det \mathbb{X} = \det \mathbb{X} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Evidently

$$\mathbb{X} \mapsto \mathbb{S}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{S} \equiv \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad \mathbb{S} \in SU(2)$$

and

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \mathbb{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad \mathbb{R} \in O(3)$$

say substantially the same thing, but in different ways.

The simplest way to render explicit the  $SU(2) \leftrightarrow O(3)$  connection is to work in the neighborhood of the identity; i.e., assume  $\theta$  to be small and to retain only terms of first order. Thus

$$\mathbb{S} = \mathbb{I} + i\delta\theta \cdot (k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3) + \dots$$

and  $\mathbb{X} \equiv \mathbb{S}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{S}$  becomes

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= \{\mathbb{I} - i\delta\theta \cdot (k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3)\} (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3) \{\mathbb{I} + i\delta\theta \cdot (k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3)\} \\ &= \mathbb{X} - i\delta\theta [(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3), (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3)] + \dots \\ &= \mathbb{X} + \delta\mathbb{X} \end{aligned}$$

But by (6)

$$\begin{aligned} [\text{etc.}] &= (k_1x_2 - k_2x_1)[\sigma_1, \sigma_2] + (k_2x_3 - k_3x_2)[\sigma_2, \sigma_3] + (k_3x_1 - k_1x_3)[\sigma_3, \sigma_1] \\ &= 2i \{ (k_1x_2 - k_2x_1)\sigma_3 + (k_2x_3 - k_3x_2)\sigma_1 + (k_3x_1 - k_1x_3)\sigma_2 \} \end{aligned}$$

so we have

$$\delta\mathbb{X} = \delta x_1\sigma_1 + \delta x_2\sigma_2 + \delta x_3\sigma_3 = 2\delta\theta \{ \text{etc.} \}$$

which can be expressed

$$\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = 2\delta\theta \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

More compactly  $\delta\mathbf{x} = 2\delta\theta \cdot \mathbb{K}\mathbf{x}$  with  $\mathbb{K} = k_1\mathbb{T}_1 + k_2\mathbb{T}_2 + k_3\mathbb{T}_3$ , which entails

$$\mathbb{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The real antisymmetric matrices  $\mathbb{T}$  are-compare (6.3) -not multiplicatively closed, but are closed under commutation:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2] &= \mathbb{T}_3 \\ [\mathbb{T}_2, \mathbb{T}_3] &= \mathbb{T}_1 \\ [\mathbb{T}_3, \mathbb{T}_1] &= \mathbb{T}_2 \end{aligned} \right\}$$

Straightforward iteration leads now to the conclusion that

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \exp[i\theta \{k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3\}] \\ \mathbb{R} &= \exp[2\theta \{k_1\mathbb{T}_1 + k_2\mathbb{T}_2 + k_3\mathbb{T}_3\}] \end{aligned}$$

If  $\{x_1, x_2, x_3\}$  refer to a right hand frame, then  $\mathbb{R}$  describes a right handed rotation through angle  $2\theta$  about the unit vector  $\mathbf{k}$ . Notice that-and how elementary is the analytical origin of the fact that - the association (15) is biunique: reading from (7.1) we see that

$$\mathbb{S} \rightarrow -\mathbb{S} \text{ as } \theta \text{ advances from } 0 \text{ to } \pi$$

and that  $\mathbb{S}$  returns to its initial value at  $\theta = 2\pi$ . But from the quadratic structure of  $\mathbb{X} \equiv \mathbb{S}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{S}$  we see that  $\pm\mathbb{S}$  both yield the same  $\mathbb{X}$ ; i.e., that  $\mathbb{R}$  returns to its initial value as  $\theta$  advances from 0 to  $\pi$ , and goes twice around as  $\mathbb{S}$  goes once around. One speaks in this connection of the "double-valuedness of the spin representations of the rotation group," and it is partly to place us in position to do so - but mainly to prepare for things to come - that I turn now to an alternative approach to the issue just discussed.

Introduce the

$$\text{2-component spinor } \xi \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(which is by nature just a complex 2-vector) and consider transformations of the form

$$\xi \mapsto \xi' \equiv \mathbb{S}\xi$$

From the unitarity of  $\mathbb{S}$  (unimodularity is in this respect not needed) it follows that

$$\xi'^t \xi' = \xi^t \xi$$

In more explicit notation we have

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

and

$$u'^*u' + v'^*v' = u^*u + v^*v$$

At (8) we acquired descriptions of  $\alpha$  and  $\beta$  to which we can now assign rotational interpretations in Euclidean 3-space. But how to extract  $O(3)$  from (19) without simply hiking backward along the path we have just traveled?

### Kramer's method for recovering $O(3)$ . (!!!!!!!)

In 1930/31 Kramers developed an algebraic approach to the quantum theory of spin/angular momentum which - though clever, and computationally powerful-gained few adherents.

We proceed from this question:

$$\text{What is the } \begin{pmatrix} uu \\ uv \\ vv \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u'u' \\ u'v' \\ v'v' \end{pmatrix} \text{ induced by } \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}?$$

Immediately

$$\begin{pmatrix} u'u' \\ u'v' \\ v'v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha u + \beta v)(\alpha u + \beta v) \\ (\alpha u + \beta v)(-\beta^* u + \alpha^* v) \\ (-\beta^* u + \alpha^* v)(-\beta^* u + \alpha^* v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ -\alpha\beta^* & \alpha\alpha^* - \beta\beta^* & \beta\alpha^* \\ (\beta^*)^2 & -2\alpha^*\beta^* & (\alpha^*)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uu \\ uv \\ vv \end{pmatrix}$$

which we agree to abbreviate

$$\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$$

where  $\mathbb{Q}$  is intended to suggest "quadratic."

At an early point in his argument Kramers develops an interest in null 3 -vectors  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ . Such a vector, if we are to avoid triviality, must necessarily be complex. He writes

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + i\mathbf{c} \quad : \quad \text{require } b^2 = c^2 \text{ and } \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$$

Since  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$  entails  $a_3 = \pm i\sqrt{(a_1 + ia_2)(a_1 - ia_2)}$  it becomes fairly natural to introduce complex variables

$$\begin{aligned} u &\equiv \sqrt{a_1 - ia_2} \\ v &\equiv i\sqrt{a_1 + ia_2} \end{aligned}$$

Then

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ a_2 &= i\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ a_3 &\equiv -iuv \end{aligned} \right\}$$

The  $\mathbf{a}(u, v)$  thus defined has the property that

$$\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{a}(-u, -v)$$

We conclude that, as  $(u, v)$  ranges over complex 2 -space,  $\mathbf{a}(u, v)$  ranges twice over the set of null 3 -vectors, of which  $a_1, a_2, a_3$  provides a parameterized description.

Thus prepared, we ask: What is the  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}'$  that results when  $\mathbb{S}$  acts by  $\xi \mapsto \xi \equiv \mathbb{S}\xi$  on the parameter space? We saw that

$$\zeta \mapsto \zeta = \mathbb{Q}\zeta$$



while at (23) we obtained

$$\mathbf{a} = \mathbb{C}\zeta \text{ with } \mathbb{C} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 0 & i \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

So we have

$$\mathbf{a} \longmapsto \mathbf{a} = \mathbb{R}\mathbf{a} \\ \mathbb{R} \equiv \mathbb{C}\mathbb{Q}\mathbb{C}^{-1}$$

Mathematica is quick to inform us that, while  $\mathbb{R}$  is a bit of a mess, it is a mess with the property that every element is manifestly conjugation-invariant (meaning real). And, moreover, that  $\mathbb{R}^\top \mathbb{R} = \mathbb{I}$ . In short,

$\mathbb{R}$  is a real rotation matrix, an element of  $O(3)$

To sharpen that statement we again (in the tradition of Sophus Lie) retreat to the neighborhood of the identity and work in first order; from (8) we have

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1 + ik_3 \delta\theta \\ \beta &= (k_2 + ik_1) \delta\theta \end{aligned} \right\}$$

Substitute into  $\mathbb{Q}$ , abandon terms of second order and obtain

$$\mathbb{Q} = \mathbb{I} + \begin{pmatrix} 2ik_3 & 2(k_2 + ik_1) & 0 \\ -(k_2 - ik_1) & 0 & (k_2 + ik_1) \\ 0 & -2(k_2 - ik_1) & -2ik_3 \end{pmatrix} \delta\theta + \dots$$

whence (by calculation which I have entrusted to Mathematica)

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} - \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & +k_1 \\ +k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & +k_2 & 0 \end{pmatrix} 2\delta\theta + \dots$$

$\uparrow$   
 Note!

This describes a doubled-angle rotation about  $\mathbf{k}$  which is, however, retrograde.

The preceding argument has served-redundantly, but by different means to establish

$$SU(2) \longleftrightarrow O(3)$$

The main point of the discussion lies, however, elsewhere. We now back up to  $\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$  and head off in a new direction.

(то есть я удалю кучу теории раньше, потому что она не по теме!)

### Spin matrices by Kramer's method.

For reasons that will soon acquire a high degree of naturalness, we agree at this point in place of (17) to write

$$\xi \left( \frac{1}{2} \right) \longmapsto \xi \left( \frac{1}{2} \right) \equiv \mathbb{S} \left( \frac{1}{2} \right) \xi \left( \frac{1}{2} \right)$$

and to adopt this abbreviation of  $\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$ :

$$\zeta(1) \longmapsto \zeta(1) \equiv \mathbb{Q}(1)\zeta(1)$$

Mathematica informs us that the  $3 \times 3$  matrix  $\mathbb{Q}(1)$  is unimodular

$$\det \mathbb{Q}(1) = 1$$

but not unitary... nor do we expect it to be: the invariance of  $u^*u + v^*v$  implies that not of  $(uu)^*(uu) + (uv)^*(uv) + (vv)^*(vv)$  but of

$$\begin{aligned} (u^*u + v^*v)^2 &= (uu)^*(uu) + 2(uv)^*(uv) + (vv)^*(vv) \\ &= \zeta^t(1) \mathbb{G}(1) \zeta(1) \\ \mathbb{G}(1) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Define

$$\xi(1) \equiv \sqrt{\mathbb{G}} \zeta(1) \quad \text{with} \quad \sqrt{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Then the left side of

$$\xi^t(1) \xi(1) = (u^*u + v^*v)^2 = \left[ \xi^t \left( \frac{1}{2} \right) \xi \left( \frac{1}{2} \right) \right]^2$$

is invariant under the induced transformation

$$\begin{aligned} \xi(1) &\longmapsto \xi'(1) \equiv \mathbb{S}(1) \xi(1) \\ \mathbb{S}(1) &\equiv \mathbb{G}^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{Q}(1) \cdot \mathbb{G}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

because the right side is invariant under  $\xi \left( \frac{1}{2} \right) \longmapsto \xi \left( \frac{1}{2} \right) \equiv \mathbb{S} \left( \frac{1}{2} \right) \xi \left( \frac{1}{2} \right)$ .

We are not surprised to discover that the  $3 \times 3$  matrix

$$\mathbb{S}(1) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\alpha\beta & \beta^2 \\ -\sqrt{2}\beta^*\alpha & (\alpha^*\alpha - \beta^*\beta) & \sqrt{2}\alpha^*\beta \\ (\beta^*)^2 & -\sqrt{2}\alpha^*\beta^* & (\alpha^*)^2 \end{pmatrix}$$

is unitary and unimodular:

$$\mathbb{S}^t(1) \mathbb{S}(1) = \mathbb{I} \quad \text{and} \quad \det \mathbb{S}(1) = 1$$

In the infinitesimal case we have

$$\mathbb{S}(1) = \mathbb{I} + \begin{pmatrix} +2ik_3 + \sqrt{2}(k_2 + ik_1) & & 0 \\ -\sqrt{2}(k_2 - ik_1) & 0 & +\sqrt{2}(k_2 + ik_1) \\ 0 - \sqrt{2}(k_2 - ik_1) & & -2ik_3 \end{pmatrix} \delta\theta + \dots$$

which (compare (12)) can be written

$$\mathbb{S}(1) = \mathbb{I} + i\delta\theta \cdot (k_1\sigma_1(1) + k_2\sigma_2(1) + k_3\sigma_3(1)) + \dots$$

with

$$\begin{aligned}\sigma_1(1) &\equiv \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & +\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2(1) &\equiv i \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3(1) &\equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

The  $3 \times 3$  matrices  $\sigma_j(1)$  are manifestly traceless hermitian—the generators, evidently, of a representation of  $SU(2)$  contained within the 8-parameter group  $SU(3)$ . They are, unlike the Pauli matrices (see again (6.3)), not closed under multiplication, but are closed under commutation. In the latter respect they precisely mimic the  $2 \times 2$  Pauli matrices:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \sigma_1\left(\frac{1}{2}\right), \sigma_2\left(\frac{1}{2}\right) \right] &= 2i\sigma_3\left(\frac{1}{2}\right) \\ \left[ \sigma_2\left(\frac{1}{2}\right), \sigma_3\left(\frac{1}{2}\right) \right] &= 2i\sigma_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ \left[ \sigma_3\left(\frac{1}{2}\right), \sigma_1\left(\frac{1}{2}\right) \right] &= 2i\sigma_2\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\} \text{ similarly } \left. \begin{aligned} [\sigma_1(1), \sigma_2(1)] &= 2i\sigma_3(1) \\ [\sigma_2(1), \sigma_3(1)] &= 2i\sigma_1(1) \\ [\sigma_3(1), \sigma_1(1)] &= 2i\sigma_2(1) \end{aligned} \right\}$$

There are, however, some notable differences, which will acquire importance:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2\left(\frac{1}{2}\right) + \sigma_2^2\left(\frac{1}{2}\right) + \sigma_3^2\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_1^2(1) + \sigma_2^2(1) + \sigma_3^2(1) &= 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

We are within sight now of our objective, which is to say: we are in possession of technique sufficient to construct  $(2\ell + 1)$ -dimensional traceless hermitian triples

$$\{\sigma_1(\ell), \sigma_2(\ell), \sigma_3(\ell)\} \quad : \quad \ell = \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

with properties that represent natural extensions of those just encountered. But before looking to the details, I digress to assemble the...

### Bare bones of the quantum theory of angular momentum.

Classical mechanics engenders interest in the construction  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ; i.e., in

$$\begin{aligned}L_1 &= x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ L_2 &= x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ L_3 &= x_1 p_2 - x_2 p_1\end{aligned}$$

The primitive Poisson bracket relations

$$[x_m, x_n] = [p_m, p_n] = 0 \quad \text{and} \quad [x_m, p_n] = \delta_{mn}$$

are readily found to entail

$$\begin{aligned}[L_1, L_2] &= L_3 \\ [L_2, L_3] &= L_1 \\ [L_3, L_1] &= L_2\end{aligned}$$

and

$$[L_1, L^2] = [L_2, L^2] = [L_3, L^2] = 0$$

where  $L^2 \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ .

In quantum theory those classical observables become hermitian operators  $L_1, L_2, L_3$  and  $L^2 \equiv L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$  and Dirac's principle  $[x_m, p_n] = \delta_{mn} \longrightarrow [\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_n] = i\hbar \mathbf{l}$  gives rise to commutation relations that mimic the preceding Poisson bracket relations:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] &= i\hbar \mathbf{L}_3 \\ [\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3] &= i\hbar \mathbf{L}_1 \\ [\mathbf{L}_3, \mathbf{L}_1] &= i\hbar \mathbf{L}_2 \end{aligned} \right\}$$

The function-theoretic approach to the subject <sup>16</sup> proceeds from

$$x \rightarrow \mathbf{x} \cdot \quad \text{and} \quad \mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

and leads (one works actually in spherical coordinates) to the theory of spherical harmonics

$$Y_\ell^m(\mathbf{x}) \quad : \quad \left\{ \begin{aligned} &\ell = 0, 1, 2, \dots \\ &m = -\ell, -(\ell-1), \dots, -1, 0, +1, \dots, +(\ell-1), +\ell \\ &L^2 Y_\ell^m = \ell(\ell+1) \cdot Y_\ell^m \\ &L_3 Y_\ell^m = m\hbar \cdot Y_\ell^m \end{aligned} \right\}$$

But the subject admits also of algebraic development, and that approach, while it serves to reproduce the function-theoretic results just summarized, leads also to a physically important algebraic extension

$$\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

of the preceding theory.

One makes a notational adjustment

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{J}$$

to emphasize that one is talking now about an expanded subject (fusion of the "theory of orbital angular momentum" and a "theory of intrinsic spin") and introduces non-hermitian "ladder operators"

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_+ &= \mathbf{J}_1 + i\mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_- &= \mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2 \end{aligned} \right\}$$

One finds the  $\ell^{\text{th}}$  eigenspace of  $\mathbf{J}^2$  to be  $(2\ell+1)$ -dimensional, and uses  $\mathbf{J}_3$  to resolve the degeneracy. Let the normalized simultaneous eigenvectors of  $\mathbf{J}^2$  and  $\mathbf{J}_3$  be denoted  $|\ell, m\rangle$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}^2 |\ell, m\rangle &= \ell(\ell+1)\hbar^2 \cdot |\ell, m\rangle \\ \mathbf{J}_3 |\ell, m\rangle &= m\hbar \cdot |\ell, m\rangle \\ m|\ell', m'\rangle &= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \end{aligned} \right\}$$

One finds that

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_+ |\ell, m\rangle &\sim |\ell, m+1\rangle & : & \quad m < \ell \\ \mathbf{J}_+ |\ell, m\rangle &= 0 & : & \quad m = \ell \\ \mathbf{J}_- |\ell, m\rangle &\sim |\ell, m-1\rangle & : & \quad m > -\ell \\ \mathbf{J}_- |\ell, m\rangle &= 0 & : & \quad m = -\ell \end{aligned} \right\}$$

and that one has to introduce ugly renormalization factors  $\frac{1}{\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm 1)}}$  to turn the  $\sim$  's into  $=$  's.

My plan is not to make active use of this standard material, but to show that the results we achieve by other means exemplify it. We note in that connection that if matrices  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  satisfy commutation relations of the form (38), then the matrices

$$\mathbb{J}_n \equiv \frac{1}{2}\hbar\sigma_n \quad : \quad n = 1, 2, 3$$

bear the physical dimensionality of  $\hbar$  (i.e., of angular momentum) and satisfy (41); such matrices are called "angular momentum matrices" (more pointedly: spin matrices).

To reduce notational clutter we agree at this point to adopt units in which  $\hbar$  is numerically equal to unity. Simple dimensional analysis would serve to restore all missing  $\hbar$ -factors.

Look now to particulars of the case  $\ell = \frac{1}{2}$ . We have

$$\mathbb{J}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

whence

$$\begin{aligned} \mathbb{J}^2 &\equiv \mathbb{J}_1^2 + \mathbb{J}_2^2 + \mathbb{J}_3^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

All 2-vectors are eigenvectors of  $\mathbb{J}^2$ . To resolve that universal degeneracy we select  $\mathbb{J}_3$  which, because it is diagonal, has obvious spectral properties:

$$\left. \begin{array}{l} \text{eigenvalue } +\frac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{eigenvalue } -\frac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

17 The commutators of the generators  $\mathbb{T}_n$  of  $O(3)$  were found at (14) to mimic the Poisson bracket relations  $[L_1, L_2] = L_3$ , etc. But if, in the spirit of the preceding discussion, we construct  $\mathbb{J}_n \equiv i\hbar\mathbb{T}_n$  we obtain  $[\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2] = -i\hbar\mathbb{J}_3$ , etc. which have reverse chirality.  $\mathbb{J}_1$  and  $\mathbb{J}_2$  have spectra identical to that of  $\mathbb{J}_3$ , but distinct sets of eigenvectors. The ladder operators (45) become non-hermitian ladder matrices

$$\mathbb{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

By inspection we have

$$\begin{array}{l} \text{action of } \mathbb{J}_+ : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{action of } \mathbb{J}_- : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \searrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \searrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

which are illustrative of (47). Note the absence in this case of normalization factors; i.e., that the  $\sim$  's have become equalities.

### Case Spin 1

A better glimpse of the situation-in-general is provided by the case  $\ell = 1$ . Reading from (37) we have

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{J}_1(1) &\equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & +\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_2(1) &\equiv i\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_3(1) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

whence

$$\begin{aligned} \mathbb{J}^2 &\equiv \mathbb{J}_1^2 + \mathbb{J}_2^2 + \mathbb{J}_3^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &2 = 1(1+1) \end{aligned}$$

All 3 -vectors are eigenvectors of  $\mathbb{J}^2$ . To resolve that universal degeneracy we select  $\mathbb{J}_3$  which, because it is diagonal, has obvious spectral properties:

$$\left. \begin{aligned} \text{eigenvalue } +1 \text{ with normalized eigenvector } |1, +1) &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{eigenvalue } 0 \text{ with normalized eigenvector } |1, 0) &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{eigenvalue } -1 \text{ with normalized eigenvector } |1, -1) &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

The ladder matrices become

$$\mathbb{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

which by quick calculation give

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_+|1, -1) &= \sqrt{2}|1, 0) \\ \mathbb{J}_+|1, 0) &= \sqrt{2}|1, +1) \\ \mathbb{J}_+|1, +1) &= 0 \\ \mathbb{J}_-|1, +1) &= \sqrt{2}|1, 0) \\ \mathbb{J}_-|1, 0) &= \sqrt{2}|1, -1) \\ \mathbb{J}_-|1, -1) &= 0 \end{aligned}$$

Normalization now is necessary, and the factor

$$N_{\pm}(\ell, m) \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)}}$$

advertised at (48) does in fact do the job, since

$$\begin{aligned} N_+(1, -1) &= 1/\sqrt{2} \\ N_+(1, 0) &= 1/\sqrt{2} \\ N_-(1, +1) &= 1/\sqrt{2} \\ N_-(1, 0) &= 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

### Case Spin 3/2.

We look now to the case  $\ell = \frac{3}{2}$ , which was of special interest to Penrose or in QFT, and is of special interest therefore also to us. The simplest extension of the argument that gave  $\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$  now gives

$$\begin{pmatrix} u^p r u^p r u^p r \\ u^p r u^p r v^p r \\ u^p r v^p r v^p r \\ v^p r v^p r v^p r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2\beta & 3\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ -\alpha^2\beta^* & \alpha^2\alpha^* - 2\alpha\beta\beta^* & 2\alpha\alpha^*\beta - \beta^2\beta^* & \alpha^*\beta^2 \\ \alpha(\beta^*)^2 & -2\alpha\alpha^*\beta^* + \beta(\beta^*)^2 & \alpha(\alpha^*)^2 - 2\alpha^*\beta\beta^* & (\alpha^*)^2\beta \\ -(\beta^*)^3 & 3\alpha^*(\beta^*)^2 & -3(\alpha^*)^2\beta^* & (\alpha^*)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uuu \\ uvv \\ uvv \\ vvv \end{pmatrix}$$

which we agree to abbreviate

$$\zeta^{pr} \left( \frac{3}{2} \right) = \mathbb{Q} \left( \frac{3}{2} \right) \zeta \left( \frac{3}{2} \right)$$

Write

$$\begin{aligned} (u^*u + v^*v)^3 &= (uuu)^* (uuu) + 3(uuv)^*(uuv) + 3(uvv)^*(uvv) + (vvv)^*(vvv) \\ &= \zeta^t \left( \frac{3}{2} \right) \mathbb{G} \left( \frac{3}{2} \right) \zeta \left( \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbb{G} \left( \frac{3}{2} \right) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Define

$$\xi \left( \frac{3}{2} \right) \equiv \sqrt{\mathbb{G}} \zeta \left( \frac{3}{2} \right) \quad \text{with} \quad \sqrt{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Then the left side of

$$\xi^t \left( \frac{3}{2} \right) \xi \left( \frac{3}{2} \right) = (u^*u + v^*v)^3 = \left[ \xi^t \left( \frac{1}{2} \right) \xi \left( \frac{1}{2} \right) \right]^3$$

is invariant under the induced transformation

$$\begin{aligned} \xi \left( \frac{3}{2} \right) &\mapsto \xi' \left( \frac{3}{2} \right) \equiv \mathbb{S} \left( \frac{3}{2} \right) \xi \left( \frac{3}{2} \right) \\ \mathbb{S} \left( \frac{3}{2} \right) &\equiv \mathbb{G}^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{Q} \left( \frac{3}{2} \right) \cdot \mathbb{G}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Mathematica informs us - now not at all to our surprise - that the  $4 \times 4$  matrix

$$\mathbb{S} \left( \frac{3}{2} \right) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \sqrt{3}\alpha^2\beta & \sqrt{3}\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ -\sqrt{3}\alpha^2\beta^* & \alpha^2\alpha^* - 2\alpha\beta\beta^* & 2\alpha\alpha^*\beta - \beta^2\beta^* & \sqrt{3}\alpha^*\beta^2 \\ \sqrt{3}\alpha(\beta^*)^2 & -2\alpha\alpha^*\beta^* + \beta(\beta^*)^2 & \alpha(\alpha^*)^2 - 2\alpha^*\beta\beta^* & \sqrt{3}(\alpha^*)^2\beta \\ -(\beta^*)^3 & \sqrt{3}\alpha^*(\beta^*)^2 & -\sqrt{3}(\alpha^*)^2\beta^* & (\alpha^*)^3 \end{pmatrix}$$

is unitary and unimodular:

$$\mathbb{S}^\dagger \left( \frac{3}{2} \right) \mathbb{S} \left( \frac{3}{2} \right) = \mathbb{I} \quad \text{and} \quad \det \mathbb{S} \left( \frac{3}{2} \right) = 1$$

Drawing again upon  $\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 + ik_3\delta\theta \\ \beta = (k_2 + ik_1)\delta\theta \end{array} \right\}$  we in leading order have

$$\mathbb{S} \left( \frac{3}{2} \right) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \sqrt{3}\beta & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}\beta^* & \alpha^2\alpha^* & 2\beta & 0 \\ 0 & -2\beta^* & \alpha(\alpha^*)^2 & \sqrt{3}\beta \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\beta^* & (\alpha^*)^3 \end{pmatrix} + \dots$$

which becomes

$$\mathbb{S} \left( \frac{3}{2} \right) = \mathbb{I} + i\delta\theta \cdot \left( k_1\sigma_1 \left( \frac{3}{2} \right) + k_2\sigma_2 \left( \frac{3}{2} \right) + k_3\sigma_3 \left( \frac{3}{2} \right) \right) + \dots$$

with

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \left( \frac{3}{2} \right) \equiv \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & +2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & +\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 \left( \frac{3}{2} \right) \equiv i \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \left( \frac{3}{2} \right) \equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

By quick computation we verify that

$$\begin{aligned} \left[ \sigma_1 \left( \frac{3}{2} \right), \sigma_2 \left( \frac{3}{2} \right) \right] &= 2i\sigma_3 \left( \frac{3}{2} \right) \\ \left[ \sigma_2 \left( \frac{3}{2} \right), \sigma_3 \left( \frac{3}{2} \right) \right] &= 2i\sigma_1 \left( \frac{3}{2} \right) \\ \left[ \sigma_3 \left( \frac{3}{2} \right), \sigma_1 \left( \frac{3}{2} \right) \right] &= 2i\sigma_2 \left( \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

and find that (compare (39))

$$\sigma_1^2 \left( \frac{3}{2} \right) + \sigma_2^2 \left( \frac{3}{2} \right) + \sigma_3^2 \left( \frac{3}{2} \right) = 15 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Thus are we led by (49 :  $\hbar = 1$ ) to the spin matrices



$$\begin{aligned}\mathbb{J}_1 \left( \frac{3}{2} \right) &\equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & +2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & +\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_2 \left( \frac{3}{2} \right) &\equiv i \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_3 \left( \frac{3}{2} \right) &\equiv \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{which give } \mathbb{J}^2 \left( \frac{3}{2} \right) \equiv \mathbb{J}_1^2 \left( \frac{3}{2} \right) + \mathbb{J}_2^2 \left( \frac{3}{2} \right) + \mathbb{J}_3^2 \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{15}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ here } \frac{15}{4} = \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right).$$

All 4 -vectors are eigenvectors of  $\mathbb{J}^2 \left( \frac{3}{2} \right)$ . To resolve that universal degeneracy we select  $\mathbb{J}_3 \left( \frac{3}{2} \right)$  which, because it is diagonal, has obvious spectral properties:

$$\begin{aligned}\text{eigenvalue } +\frac{3}{2} \text{ with normalized eigenvector } \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{eigenvalue } +\frac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{eigenvalue } -\frac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{eigenvalue } -\frac{3}{2} \text{ with normalized eigenvector } \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathbb{J}_1 \left( \frac{3}{2} \right)$  and  $\mathbb{J}_2 \left( \frac{3}{2} \right)$  have spectra identical to that of  $\mathbb{J}_3 \left( \frac{3}{2} \right)$ , but distinct sets of eigenvectors. The ladder operators (45) become non-hermitian ladder matrices

$$\mathbb{J}_+ \left( \frac{3}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{J}_- \left( \frac{3}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

By inspection we have

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{J}_+ \left( \frac{3}{2} \right) \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle & \text{with } N \left( \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) &= 1/\sqrt{3} \\ \mathbb{J}_+ \left( \frac{3}{2} \right) \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= 2 \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle & \text{with } N \left( \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) &= 1/2 \\ \mathbb{J}_+ \left( \frac{3}{2} \right) \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle & \text{with } N \left( \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right) &= 1/\sqrt{3} \\ \mathbb{J}_+ \left( \frac{3}{2} \right) \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle &= 0 \end{aligned} \right\}$$

and similar equations describing the step-down action of  $\mathbb{J}_- \left(\frac{3}{2}\right)$ . Matrices identical to (60.1) and (60.5) appear on p. 203 of Schiff and p. 345 of Powell & Crasemann. <sup>7</sup>

### Case Spin 2.

Let's use Kramer's method to find matrices for spin 2. We start with considering

$$\zeta(2) \equiv \begin{pmatrix} uuuu \\ uuuu \\ uuvv \\ uvvv \\ vvvv \end{pmatrix}$$

and obtain  $\zeta'(2) = \mathbb{Q}(2)\zeta(2)$  where  $\mathbb{Q}(2)$  is a  $5 \times 5$  mess. From

$$(u^*u + v^*v)^4 = \zeta^\dagger(2)\mathbb{G}(2)\zeta(2)$$

$$\mathbb{G}(2) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(вычислениям верю, потом проделаю.) we are led to write

$$\xi(2) \equiv \sqrt{\mathbb{G}}\zeta(2) \quad \text{with} \quad \sqrt{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

giving

$$\xi(2) \mapsto \xi'(2) \equiv \mathbb{S}(2)\xi(2)$$

$$\mathbb{S}(2) \equiv \mathbb{G}^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{Q}(2) \cdot \mathbb{G}^{-\frac{1}{2}}$$

where  $\mathbb{S}(2)$  is again a patterned mess (Mathematica assures us that  $\mathbb{S}(2)$  is unitary and unimodular) which, however, simplifies markedly in leading order:

$$\mathbb{S}(2) = \begin{pmatrix} \alpha^4 & 2\beta & 0 & 0 & 0 \\ -2\beta^* & \alpha^3\alpha^* & \sqrt{6}\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6}\beta^* & \alpha^2(\alpha^*)^2 & \sqrt{6}\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6}\beta^* & \alpha(\alpha^*)^3 & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta^* & (\alpha^*)^4 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \mathbb{I} + i \begin{pmatrix} 4k_3 & 2(k_1 - ik_2) & 0 & 0 & 0 \\ 2(k_1 + ik_2) & 2k_3 & \sqrt{6}(k_1 - ik_2) & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}(k_1 + ik_2) & 0 & \sqrt{6}(k_1 - ik_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}(k_1 + ik_2) & -2k_3 & 2(k_1 - ik_2) \\ 0 & 0 & 0 & 2(k_1 + ik_2) & -4k_3 \end{pmatrix} + \dots$$

From it we extract

$$\mathbb{J}_1(2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & +\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & +\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2(2) = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

And  $\mathbb{J}_1^2(2) + \mathbb{J}_2^2(2) + \mathbb{J}_3^2(2) = 6\mathbb{I}$ , where  $6 = 2(2 + 1)$ .

The ladder matrices become

$$\mathbb{J}_+(2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{J}_-(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

in which connection we notice that

$$\begin{aligned} N_+(2, +2) &= \infty & N_-(2, +2) &= 1/2 \\ N_+(2, +1) &= 1/2 & N_-(2, +1) &= 1/\sqrt{6} \\ N_+(2, 0) &= 1/\sqrt{6} & N_-(2, 0) &= 1/\sqrt{6} \\ N_+(2, -1) &= 1/\sqrt{6} & N_-(2, -1) &= 1/2 \\ N_+(2, -2) &= 1/2 & N_-(2, -2) &= \infty \end{aligned}$$

(??? проверю потом, если не будет лень.)

### Extrapolation to the general case with guessing method.

The method just reviewed, as it relates to the case  $\ell = 2$ , can in principle be extended to arbitrary  $\ell$ , but the labor increases as  $\ell^2$ . The results in hand are, however, so highly patterned and so simple that one can readily guess the design of  $\{\mathbb{J}_1(\ell), \mathbb{J}_2(\ell), \mathbb{J}_3(\ell)\}$ , and then busy oneself demonstrating that one's guess is actually correct.

#### Case Spin $\frac{5}{2}$

I illustrate how one might proceed in the case  $\ell = \frac{5}{2}$ . We expect in any event to have

$$\mathbb{J}_3\left(\frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & & & & & \\ & \frac{3}{2} & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & & \\ & & & & -\frac{3}{2} & \\ & & & & & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

where (as henceforth) the omitted matrix elements are 0's. And we guess that  $\mathbb{J}_1\left(\frac{5}{2}\right)$  and  $\mathbb{J}_2\left(\frac{5}{2}\right)$  are of the designs

$$\mathbb{J}_1\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +a & & & & \\ a & 0 & +b & & & \\ & b & 0 & +c & & \\ & & c & 0 & +d & \\ & & & d & 0 & +e \\ & & & & e & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2\left(\frac{5}{2}\right) = i\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -a & & & & \\ a & 0 & -b & & & \\ & b & 0 & -c & & \\ & & c & 0 & -d & \\ & & & d & 0 & -e \\ & & & & e & 0 \end{pmatrix}$$

To achieve  $\mathbb{J}_1\mathbb{J}_2 - \mathbb{J}_2\mathbb{J}_1 = i_3$  we ask Mathematica to solve the equations

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a^2) &= +\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) &= +\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}(c^2 - b^2) &= +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(d^2 - c^2) &= -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(e^2 - d^2) &= -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}(-e^2) &= -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

and are informed that

$$\begin{aligned}a &= \pm\sqrt{5} \\ b &= \pm\sqrt{8} \\ c &= \pm\sqrt{9} \\ d &= \pm\sqrt{8} \\ e &= \pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

where the signs are independently specifiable. Take all signs to be positive (any of the  $2^5 - 1 = 31$  alternative sign assignments would, however, work just as well) and obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{J}_1\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{5} & & & & \\ \sqrt{5} & 0 & +\sqrt{8} & & & \\ & \sqrt{8} & 0 & +\sqrt{9} & & \\ & & \sqrt{9} & 0 & +\sqrt{8} & \\ & & & \sqrt{8} & 0 & +\sqrt{5} \\ & & & & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_2\left(\frac{5}{2}\right) &= i\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5} & & & & \\ \sqrt{5} & 0 & -\sqrt{8} & & & \\ & \sqrt{8} & 0 & -\sqrt{9} & & \\ & & \sqrt{9} & 0 & -\sqrt{8} & \\ & & & \sqrt{8} & 0 & -\sqrt{5} \\ & & & & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

The commutation relations check out, and we have

$$\begin{aligned}\mathbb{J}_1^2\left(\frac{5}{2}\right) + \mathbb{J}_2^2\left(\frac{5}{2}\right) + \mathbb{J}_3^2\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{35}{4}\mathbb{I} \\ \frac{35}{4} &= \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} + 1\right)\end{aligned}$$

We observe that for  $N_{\pm}(\ell, m) \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm 1)}}$

$$\begin{aligned}N_+\left(\frac{5}{2}, +\frac{5}{2}\right) &= \infty & N_+\left(\frac{5}{2}, +\frac{5}{2}\right) &= 1/\sqrt{5} \\ N_+\left(\frac{5}{2}, +\frac{3}{2}\right) &= 1/\sqrt{5} & N_+\left(\frac{5}{2}, +\frac{3}{2}\right) &= 1/\sqrt{8} \\ N_+\left(\frac{5}{2}, +\frac{1}{2}\right) &= 1/\sqrt{8} & N_+\left(\frac{5}{2}, +\frac{1}{2}\right) &= 1/\sqrt{9} \\ N_+\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= 1/\sqrt{9} & N_+\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= 1/\sqrt{8} \\ N_+\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= 1/\sqrt{8} & N_+\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= 1/\sqrt{5} \\ N_+\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) &= 1/\sqrt{5} & N_+\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) &= \infty\end{aligned}$$

### General case

In the general case we would

(i) compute the numbers

$$1/N_+(\ell, m) \quad : \quad m = -\ell, \dots, +(\ell - 1)$$

(ii) insert them into off-diagonal positions in the now obvious way to construct  $\mathbb{J}_1(\ell)$  and  $\mathbb{J}_2(\ell)$ , (iii) adjoin

$$\mathbb{J}_3 = \begin{pmatrix} \ell & & & & \\ & (\ell - 1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(\ell - 1) & \\ & & & & -\ell \end{pmatrix}$$

and be done.

### Другое о спине

#### Бытовые аналогии спина (??)

(тоже потом напишу, не до этого пока)

#### Когда нужны спины более чем 1? (!!??)

(напишу потом с примером!)

(p. 454 in I. Duck & E. C. G. Sudarshan, Pauli and the Spin-Statistics Theorem) for a charged spin- $\frac{3}{2}$  field the anticommutator... depends on the external field in such a manner that quantization becomes inconsistent."

#### Когда и почему спин может быть не целый и не полуцелым (???)

(пока все еще есть этот вопрос, не до этого. распишу потом с формулами.)

---

## Part III

# Group Theory and Linear Algebra Fundamentals

(мб из предыдущих частей сюда перенесу что-то)

## 4 Discrete group theory

### 4.1 Finite Groups

#### 4.1.1 2.1 Representations by Zhou

We now review the basics of group representation theory.

- A representation of a group  $G$  is an action of  $G$  on a vector space  $V$  by linear transformations, where the element  $g$  corresponds to the linear operator  $D(g)$ . Equivalently, a representation of  $G$  is a group homomorphism  $D : G \rightarrow GL(V)$ . The representation is faithful if  $D(g)$  is distinct for every distinct  $g$ . Physicists often think of the  $D(g)$  as matrices, so we will write many results below in both notations.

- The dimension of a representation is the dimension of  $V$ . In physics, especially in quantum mechanics, the space  $V$  itself may be called the representation because it contains the particle states, which are often of more interest than the operators  $D(g)$ .

- Two representations  $D(g)$  and  $D'(g)$  are equivalent if they are related by  $D'(g) = SD(g)S^{-1}$ . In mathematics,  $S$  is called an intertwiner.

- Using Dirac notation for vectors, all groups have the regular representation,

$$D(g) |g'\rangle = |gg'\rangle$$

which has dimension  $|G|$ . Each representation matrix has exactly one 1 in each row and column, with all other elements zero. As another example, taking the determinant of every  $D(g)$  always gives a one-dimensional representation.

- A representation is real/complex if  $V$  is a real/complex vector space. In physics, we're almost always interested in the complex case, partly because of quantum mechanics and partly because we may freely complexify linear problems involving only real quantities. For this section only, we'll explicitly state if representations are complex; everywhere else they are implicitly complex.

- A representation is reducible if there is a subspace  $U \subset V$  so that  $D(g)$  keeps  $U$  inside itself. Equivalently, a representation is reducible if the  $D(g)$  can be brought into block upper-triangular form. An irreducible representation is called an irrep.

- A representation is completely reducible if the  $D(g)$  can be brought into block-diagonal form, with each block irreducible.

Example. Not all representations are completely reducible. Consider the representation of  $\mathbb{Z}$ ,

$$D(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

It is reducible, but not completely reducible as the  $D(n)$  are not diagonalizable for  $n \neq 0$ . Lemma (Schur). If  $D_1(g)$  and  $D_2(g)$  are two irreps, then

$$SD_1(g) = D_2(g)S$$

for all  $g$  implies either  $S = 0$  or the irreps are equivalent. Also, for a complex irrep  $D(g)$ , if

$$SD(g) = D(g)S$$

for all  $g$  then  $S \propto I$ .

Proof. For the first part, note that  $\text{Im}(S)$  and  $\text{Ker}(S)$  are both invariant subspaces. Since  $D_1$  and  $D_2$  are irreps, they must be trivial or the entire space. The only two possibilities are  $S = 0$  or  $S$  invertible, but in the latter case this means the representations are equivalent.

For the second part, note that  $S$  must have an eigenvector since we're working with complex representations. The fact that  $D(g)$  and  $S$  commute means that  $D(g)$  maps this eigenvector to other eigenvectors of  $S$  with the same eigenvalue. But since  $D$  is irreducible, the  $D(g)$  act transitively, so  $S \propto I$ .

Definition. A unitary representation is one where every matrix is unitary,

$$D(g)^\dagger = D(g)^{-1}$$

This implies the  $D(g)$  preserve the inner product. Equivalently, if we think of the  $D(g)$  as linear transformations, there exists a Hermitian form on  $V$  preserved by the  $D(g)$ ,

$$\langle D(g)v, D(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$$

This implies all unitary representations are completely reducible, because if a subspace  $W$  is preserved, then  $W^\perp$  must be preserved as well.

Prop. For a finite group, all complex representations are equivalent to unitary representations.

Proof. We use the "group averaging trick". Define

$$S = \sum_i D(g_i)^\dagger D(g_i)$$

Then we have

$$SD(g)^{-1} = \sum_i D(g_i)^\dagger D(g_i g^{-1}) = \sum_i D(g_i g)^\dagger D(g_i) = D(g)^\dagger \sum_i D(g_i)^\dagger D(g_i) = D(g)^\dagger S$$

where we reindexed in the second step. Now,  $S$  is positive definite and thus has a well-defined square root, and the above shows that  $D'(g) = S^{1/2} D(g) S^{-1/2}$  give a unitary representation.

Alternatively, if we think of the  $D(g)$  as linear transformations, we can phrase this proof in terms of choosing a Hermitian form by averaging. Given any Hermitian form  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ , we define

$$\langle v, w \rangle = \sum_i \langle D(g_i) v, D(g_i) w \rangle_0$$

Then it's straightforward to see by reindexing that the  $D(g)$  preserve this form.

We make some remarks about this result, previewing results to come.

- The key intuition for the result comes from the one-dimensional case. Since all elements of a finite group have finite order, they must be represented by pure phases, which are unitary. Similarly, to maintain finite order in higher dimensions, we should only represent by rotations, not scalings.

- The construction works for real representations as well, replacing 'unitary' with 'orthogonal'. By combining these results, we have Maschke's theorem: every real or complex representation of a finite group is completely reducible.

• The same proof can be used for a compact continuous group, with integration over a group measure replacing the sum. Since we'll deal almost entirely with compact or finite groups, all representations we consider below will be assumed to be unitary.

• It also turns out that all irreps of a compact group are finite-dimensional, though this is difficult to prove.

• As a converse, consider a finite-dimensional unitary representation of a non-compact connected semisimple Lie group  $G$ . If  $G$  is simple, or more generally if  $G$  contains no nontrivial normal closed subgroups, then the representation must be trivial.

• This results applies to the connected Lorentz group, but this is acceptable because the representations used in relativistic field theory are non-unitary; quantum fields are not state vectors.

• In the case of the Poincare group, the translations form a nontrivial normal closed subgroup, so we can have nontrivial finite-dimensional unitary representations that only respond to translations. These are uninteresting, and demanding that rotations and boosts act nontrivially forces the representation to be trivial. This is acceptable because the Hilbert spaces in quantum field theory are always infinite-dimensional.

Finally, we cover some ways to construct new representations from old.

• We define the direct sum and tensor product of two representations  $D^r(g)$  and  $D^s(g)$  by

$$D^{r\oplus s}(g) = D^r(g) \oplus D^s(g), \quad D^{r\otimes s}(g) = D^r(g) \otimes D^s(g)$$

Generally, the product of two irreps will not be an irrep. Tensor products are most easily managed in the physicist's index notation,

$$(D^{r\otimes s}(g))_{iajb} = D^r(g)_{ij} D^s(g)_{ab}$$

where we index components product space with one index from each element in the product.

• We define the dual, or contragradient representation by

$$(D'(g)\omega)(D(g)v) = \omega(v), \quad \omega \in V^*$$

Converting the linear operator to a matrix by working in the dual basis, we have

$$D'(g) = D(g^{-1})^T.$$

The dual representation isn't emphasized in physics because for unitary matrix representations, the dual representation is the same as the conjugate representation.

• Any representation of  $G$  induces a representation of  $H \subset G$  by restriction. Restricting to a subgroup can break apart irreps, by "branching". Similarly, moving to a larger group can combine irreps together, a key idea behind unification.

• Given a representation  $D$  of  $H \subseteq G$  on  $V$ , we may induce a representation of  $G$ . The induced representation on  $G$  acts on  $|G|/|H|$  copies of  $V$ , one copy for each coset. The elements of this space are written as  $v_i$  where  $i$  indexes the coset.

• Taking coset representatives  $g_i$ , an arbitrary group element  $g$  may be written as  $g = g_i^{-1} g_j h$ , and it acts as

$$v_i \mapsto D(h)v_j$$

That is, we act as  $H$  would have, and also shift the coset accordingly. If  $D(h)$  is irreducible, so is the induced representation. The most important application of induced representations is Wigner's classification, which we'll see below.

• Let  $\text{Hom}(V, W)$  be the set of linear maps  $V \rightarrow W$ . Then



$$\text{Hom}(V, W) \cong W \otimes V'$$

Given representations  $D_V$  and  $D_W$  of  $G$ , we hence have an induced representation

$$D_{\text{Hom}(V, W)} = D_W \otimes D'_V$$

More explicitly, in mathematical notation a linear operator  $\varphi$  is mapped as

$$D_{\text{Hom}(V, W)}(g)(\varphi) = D_W(g) \circ \varphi \circ D_V^{-1}(g)$$

while in the physicist's notation a matrix  $M$  is mapped as

$$M \mapsto D_W(g) M D_V(g)^{-1}$$

### 4.1.2 2.2o Characters and Orthogonality

Character theory will help us identify irreps and decompose general representations. We begin by proving a powerful orthogonality theorem.

Theorem (Great Orthogonality). Given a  $d$ -dimensional irrep  $D(g)$  of a finite group  $G$ ,

$$\sum_g D(g^{-1})_{ij} D(g)_{k\ell} = \frac{|G|}{d} \delta_{\ell}^i \delta_j^k$$

Moreover, given two inequivalent irreps  $D^r(g)$  and  $D^s(g)$ ,

$$\sum_g D^r(g^{-1})_{ij} D^s(g)_{k\ell} = 0$$

Proof. To prove the first part, we use the reindexing trick. For an arbitrary  $X$ , let

$$A = \sum_g D(g^{-1}) X D(g)$$

By reindexing the sum, we find

$$A = D(g^{-1}) A D(g) \text{ for all } g \in G$$

which implies that  $A = \lambda I$  by Schur's lemma. Taking the trace of both sides gives  $\lambda = (|G|/d) \text{tr } X$ . The theorem follows by setting  $X$  to be the matrix with  $X_{jk} = 1$  and zeroes everywhere else. The second part of the theorem uses the other half of Schur's lemma; taking  $X$  to be an arbitrary matrix with the right dimensions, we have  $A = 0$ , and setting  $X$  as before gives the result.

Note. The intuition for this result is that all 'orientational' information is washed out by averaging over the group. (This is even more explicit when we integrate over, say, the continuous group of rotations.) Thus the only possible results for the sum are the 'invariant tensors' built from  $\delta$ . In the case of inequivalent representations, we cannot form any  $\delta$ 's at all because the indices  $ij$  and  $k\ell$  live in 'different spaces' and cannot be contracted, so the result must be zero.

This theorem is especially useful when applied to the characters of a representation.

- Given a representation  $D^r(g)$ , the character is

$$\chi^r(g) = \text{tr } D^r(g)$$

Since the trace is invariant under conjugation, the character is constant on conjugacy classes.

- Under direct sum, tensor product, and dual we have

$$\chi^{r \oplus s}(g) = \chi^r(g) + \chi^s(g), \quad \chi^{r \otimes s}(g) = \chi^r(g)\chi^s(g), \quad \chi'(g) = \chi(g)^*$$

- Setting  $i = j$  and  $k = l$  in the orthogonality theorem gives the orthogonality of characters,

$$\langle \chi_r, \chi_s \rangle \equiv \frac{1}{|G|} \sum_g (\chi^r(g))^* \chi^s(g) = \sum_c n_c (\chi^r(c))^* \chi^s(c) = \delta^{rs}$$

where  $c$  is a conjugacy class representative and  $n_c$  is the size of the class. Here we used the fact that the representations were unitary, so taking the inverse conjugates the character.

- More generally, suppose a reducible representation contains the irrep  $r$ ,  $n_r$  times. Then the norm of the character is  $\langle \chi, \chi \rangle = \sum n_r^2$ , so a representation is reducible only if the norm of its character is 1. We compute the numbers  $n_r$  by computing  $\langle \chi, \chi_r \rangle$ .

- Going back to the orthogonality theorem, we can think of  $D(g)_{ij}$  for fixed  $i$  and  $j$  as a vector in a  $|G|$ -dimensional complex vector space. If we work with unitary representations, then

$$\sum_g D(g)_{ji}^* D(g)_{kl} = \frac{|G|}{d} \delta_{\ell}^i \delta_j^k$$

which tells us that these vectors are all orthogonal. There are  $\sum_r d_r^2$  vectors in total, giving the bound  $\sum_r d_r^2 \leq |G|$ .

- Let the group algebra consist of complex linear combinations of the group elements under group multiplication. The regular representation acts on it by  $D^{\text{reg}}(g)g' = gg'$  extended by linearity. An alternate physics-inspired notation is  $g|g'\rangle = |gg'\rangle$ .

- The characters of all classes but the identity vanish. Carrying out the sum shows that the regular representation contains every irrep  $D^r$  precisely  $d_r$  times, so  $\sum_r d_r^2 = |G|$ .

- This tells us that the  $|G|$  'vectors'  $D^r(g)_{ij}$  form a complete set, so

$$\sum_{r,i,j} d_r D^r(g)_{ij} D^{r\dagger}(g')_{ji} = |G| \delta_{gg'}$$

This is the completeness relation that complements the great orthogonality theorem.

- Suppose there are  $N(C)$  conjugacy classes and  $N(R)$  irreps. Then character orthogonality implies we must have  $N(R) \leq N(C)$ . The completeness relation above can be used to show that  $N(R) = N(C)$ .

### 4.1.3 2.3 Examples and Applications

Example. Consider an abelian group  $G$ . There are  $|G|$  conjugacy classes, so  $|G|$  irreps, each of which must have dimension one. Our results above essentially say the character table is a unitary matrix; every irrep simply assigns a phase to every group element which adds under group multiplication. This generalizes the Fourier modes from characters of  $\mathbb{Z}_n$ . More generally, the orthogonality of characters generalizes Fourier modes to general groups.

Groups and their irreps appear often in quantum mechanics.

- Let the Hamiltonian  $H$  have a symmetry group  $G$ , represented on the Hilbert space by a unitary representation  $D(g)$  where  $[H, D(g)] = 0$  for all  $g$ . Then if  $|v\rangle$  is an energy eigenstate with energy  $E$ , so is  $D(g)|v\rangle$ . Therefore, the Hilbert space breaks into irreps of  $G$  containing degenerate states. We can also see this directly from Schur's lemma, which implies  $H$  must be proportional to the identity when restricted to each irrep.

- A standard example of this is rotational invariance, where the Hilbert space decomposes into irreps of  $G = SU(2)$ . In the case where  $G$  is abelian, no degeneracy can result since all

irreps are one-dimensional, but it can still be computationally useful because time evolution will keep states within one class of irrep by Schur's lemma. For example, for a  $\mathbb{Z}_2$  parity symmetry, we may decompose the Hilbert space into odd and even parts, and an even state remains even for all times. The same applies to  $T^2$  where  $T$  is time reversal.

- We may also have 'accidental degeneracies' where distinct irreps may have equal energies. However, this is often due to fine tuning of parameters, or a consequence of a larger symmetry group we haven't taken into account.

Example. For a discrete translational symmetry, the irreps are Bloch wavefunctions, which are periodic up to a fixed phase factor per translation. This does not yield any degeneracy, but if we have both translational symmetry and parity symmetry, there are two-dimensional irreps corresponding to the degeneracy of the  $\pm k$  states. This also holds for a free particle, where it explains the degeneracy of  $e^{\pm ikx}$ .

Example. A set of  $N$  masses in  $d$  dimensions connected by springs has equation of motion

$$H\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{x}$$

where  $\mathbf{x}$  is a vector with  $Nd$  entries containing all the positions concatenated together. Now suppose the system has a group of symmetries  $G$ . This furnishes an  $Nd$ -dimensional representation  $D(g)$ . Since  $H$  is rotationally invariant, each irrep is a set of normal modes with the same frequency.

As a simple example, consider two atoms connected in one dimension. The atoms can be exchanged, giving the symmetry group  $S_2$  with character table:

| class $c$ | $n_c$ | 1 | $\bar{1}$ |
|-----------|-------|---|-----------|
| $e$       | 1     | 1 | 1         |
| (12)      | 1     | 1 | -1        |

This tells us the normal modes are either even or odd under reflection, corresponding to the 1 and  $\bar{1}$  representation. Less trivially, consider three atoms in an equilateral triangle, where there are six normal modes and the symmetry group is  $S_3$ , with character table:

| class $c$ | $n_c$ | 1 | $\bar{1}$ | 2  | phys |
|-----------|-------|---|-----------|----|------|
| $e$       | 1     | 1 | 1         | 2  | 6    |
| (123)     | 2     | 1 | 1         | -1 | 0    |
| (12)      | 3     | 1 | -1        | 0  | 2    |

Here, the last column denotes the physical representation. We know that  $\chi(e) = 6$  since it is six-dimensional, and  $\chi((123)) = 0$  since all atoms are moved by the transformation. However, (12) fixes the third atom, giving  $\chi((12)) = 2$ . Taking the inner product gives  $\text{phys} = 1 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 2$ . Thus, there are two two-fold degeneracies.

The normal modes in 1 must be rotationally invariant, while the normal modes in each 2 must transform into each other under rotation. Hence the two translations form a 2 with frequency zero, while uniform rotation and "breathing" are the 1's. The other 2 contains the "scissoring" modes.

Next, we turn to the Wigner-Eckart theorem.

- Consider the tensor product of two irreps, indexed by  $\mu$  and  $\nu$ , whose vectors are indexed by  $i$  and  $j$ . The resulting vector space has a basis  $\{|\alpha\lambda\ell\rangle\}$ , where  $|\alpha\lambda\ell\rangle$  is vector  $\ell$  in occurrence  $\lambda$  of irrep  $\alpha$ . The two bases are related by 'Clebsch-Gordan coefficients',

$$|\alpha\lambda\ell\rangle = |ij\rangle\langle ij|\alpha\lambda\ell\rangle$$

where the summation convention is used. The coefficients implicitly depend on  $\mu$  and  $\nu$ .

- The two bases transform as

$$U(g)|ij\rangle = D^\mu(g)_{i'i} D^\nu(g)_{j'j} |i'j'\rangle, \quad U(g)|\alpha\lambda\ell\rangle = D^\lambda(g)_{\ell'\ell} |\alpha\lambda\ell'\rangle$$

By inserting some copies of the identity, we have

$$D^\mu(g)_{i'i} D^\nu(g)_{j'j} = \langle i'j' | \alpha\lambda\ell' \rangle D^\lambda(g)_{\ell'\ell} \langle \alpha\lambda\ell | ij \rangle.$$

Conceptually, this shows how the tensor product representation matrices are decomposed. Applying it in reverse allows us to construct the matrices for larger irreps from smaller ones.

- Next, consider a general representation in a vector space containing two irreps  $|\mu i\rangle$  and  $|\nu j\rangle$ , where the two irreps are not equivalent. Then we claim the vectors are orthogonal. First,

$$\langle \nu j | \mu i \rangle = \langle \nu j | U^\dagger(g) U(g) | \mu i \rangle = \langle \nu k | \mu \ell \rangle D^{\nu\dagger}(g)_{jk} D^\mu(g)_{\ell i}.$$

Now we average over the group and apply the orthogonality theorem, giving

$$\langle \nu j | \mu i \rangle = \frac{1}{|G|} \langle \nu k | \mu \ell \rangle \sum_g D^{\nu\dagger}(g)_{jk} D^\mu(g)_{\ell i} = d_\mu^{-1} \langle \nu k | \mu \ell \rangle \delta_\nu^\mu \delta_i^j \delta_\ell^k = 0$$

since  $\mu \neq \nu$  and  $d_\mu$  is the dimension of  $\mu$ . In the case where the irreps are equivalent, but not identically the same, we can apply a change of basis to restore orthogonality.

- This result is a generalization of the fact that eigenvectors of a Hermitian operator with different eigenvalues are orthogonal. In the case of rotational symmetry, we already knew that states with distinct values of  $\ell$  are orthogonal because they have different  $L^2$  eigenvalues. But the fact we've shown above applies much more generally.

- A set of operators  $O_i^\mu$  is said to be a set of irreducible operators if

$$U(g) O_i^\mu U(g)^{-1} = O_j^\mu D^\mu(g)_{ji}$$

They are also sometimes called irreducible tensors.

- Note that the vectors  $O_i^\mu |\nu j\rangle$  transform under the direct product representation,

$$U(g) O_i^\mu |\nu j\rangle = U(g) O_i^\mu U(g)^{-1} U(g) |\nu j\rangle = D^\mu(g)_{ki} D^\nu(g)_{\ell j} O_k^\mu |\nu \ell\rangle.$$

Therefore, we may decompose the vectors as

$$O_i^\mu |\nu j\rangle = |\alpha\lambda\ell\rangle \langle \alpha\lambda\ell | ij \rangle$$

Acting with  $\langle \lambda\ell |$ , using orthogonality, and reindexing, we have the Wigner-Eckart theorem

$$\langle \lambda\ell | O_i^\mu | \nu j \rangle = \sum_\alpha \langle \alpha\lambda\ell | ij \rangle \left( \frac{1}{d_\lambda} \sum_k \langle \lambda k | \alpha\lambda k \rangle \right).$$

The quantity in parentheses is called a reduced matrix element; crucially, it only depends on the on the irrep indices. The remaining factor is purely group-theoretic.

- Note the labeling conventions here:  $\lambda$  indexes irreps in the full space, with different  $\lambda$  values possibly corresponding to equivalent but distinct irreps, while  $\alpha\lambda$  indexes irreps in the direct product representation, where different  $\lambda$  values automatically mean inequivalent irreps. These schemes coincide when no irreps appear multiple times, as happens for simple  $\mathfrak{su}(2)$  setups.

- In many practical contexts, we instead work infinitesimally, i.e. with representations of  $\mathfrak{su}(2)$  instead of  $SU(2)$ . Much of the reasoning above goes through unchanged, with conjugation replaced with commutation with generators. Computationally, the Wigner-Eckart theorem just says we can move around an irrep by applying raising and lowering operators to both sides.

Example. An explicit  $\mathfrak{su}(2)$  example. Letting  $\alpha$  and  $\beta$  be irrep indices, let

$$\langle 1/2, 1/2, \alpha | r_3 | 1/2, 1/2, \beta \rangle = A, \quad \langle 1/2, 1/2, \alpha | r_1 | 1/2, -1/2, \beta \rangle = B$$

Here, the states  $r_i | 1/2, m, \beta \rangle$  form the reducible representation  $1/2 \times 1 = 1/2 + 3/2$ , and our goal is to relate  $A$  and  $B$ . To begin, we need to change the  $r_i$  basis. Since  $[J_3, r_3] = 0$ , we know that  $r_3$  carries  $m = 0$ , so

$$r^0 = r_3$$

We can then find the  $m = 1$  and  $m = -1$  operators by raising and lowering,

$$r^1 = -\frac{r_1 + ir_2}{\sqrt{2}}, \quad r^{-1} = \frac{r_1 - ir_2}{\sqrt{2}}$$

The operators  $\{r^{-1}, r^0, r^1\}$  are irreducible tensors, as desired. Thus to complete the problem we just need to know a Clebsch-Gordan coefficient. Alternatively, for this simple case we can explicitly compute them using raising and lowering operators. We start with

$$|3/2, 3/2\rangle = r^1 |1/2, 1/2, \beta\rangle$$

and lower both sides to yield

$$|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} r^0 |1/2, 1/2, \beta\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} r^1 |1/2, -1/2, \beta\rangle$$

Finally, using the fact that  $\langle 1/2, 1/2, \alpha | 3/2, 1/2 \rangle = 0$ , we find

$$0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle 1/2, 1/2, \alpha | r^0 | 1/2, 1/2, \beta \rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \langle 1/2, 1/2, \alpha | r^1 | 1/2, -1/2, \beta \rangle$$

We thus conclude that  $A = B$ .

Note. Note that in the above example, we couldn't have found  $|1/2, 1/2\rangle$  in terms of the  $\beta$  states by orthogonality with  $|3/2, 1/2\rangle$ , because we don't know the norms of the states  $r^i | 1/2, m, \beta \rangle$ . Instead, we can find  $|1/2, 1/2\rangle$  by demanding that it be annihilated by  $J^+$ . The same goes for putting operators in the irreducible tensor basis: we simply use the algebra, without the 'crutch' of orthogonality.

#### 4.1.4 2.4 Real and Complex Representations by Zhou

From this point on, all representations will be complex, as promised earlier. Hence it is useful and conventional in physics to use the word "complex" to mean something else.

- Given a representation  $D(g)$ , its conjugate representation is  $D^*(g) = D(g)^*$ . A representation is said to be complex if it is not similar to its conjugate; then every representation with a non-real character is complex.

- Now suppose an irrep  $D(g)$  is not complex. Then

$$D(g)^* = S D(g) S^{-1}$$

Transposing and using unitarity gives

$$D(g^{-1}) = S^{-1T} D(g)^T S^T$$

and plugging this equation into itself gives

$$D(g) = (S^{-1} S^T)^{-1} D(g) (S^{-1} S^T)$$

By Schur's lemma, this implies  $S^{-1}S^T = \eta I$ , so

$$S^T = \pm S$$

If  $S$  is symmetric, we say the representation is real; if  $S$  is antisymmetric, we say the representation is pseudoreal, or quaternionic.

- Note that taking the transpose of an antisymmetric  $n \times n$  matrix keeps its determinant the same, but also multiplies the determinant by  $(-1)^n$ . Therefore pseudoreal representations can only exist in even  $n$  since  $S$  must be invertible.

- The matrix  $S$  can always be chosen unitary. Solving for  $S$  above gives

$$S = D(g)^T S D(g), \quad S^\dagger = D(g)^\dagger S^\dagger D(g)^*$$

Multiplying these gives

$$S^\dagger S = D(g)^\dagger S^\dagger S D(g)$$

so that  $S^\dagger S$  is proportional to the identity, again by Schur's lemma. A bit more work shows that the proportionality constant is real. Hence we can always scale  $S$  by a constant so  $S^\dagger S = I$ .

- The matrices in a real representation are always equivalent to real matrices. First, note that since  $S$  is unitary and symmetric, we have  $S = e^{iH}$  where  $H$  is symmetric. Letting  $W = e^{iH/2}$ , we have  $S = W^2$  where  $W$  is also unitary and symmetric. Now

$$W^2 D(g) W^{-2} = D(g)^*$$

which implies

$$W D(g) W^{-1} = W^{-1} D(g)^* W = (W D(g) W^{-1})^*$$

Then the matrices  $W D(g) W^{-1}$  are real as desired.

- Equivalently, we may work with Lie algebra representations, letting  $D(e^{iX}) = e^{id(X)}$  for a generator  $X$ , where  $d(X)$  is Hermitian. In this case the conjugate representation of  $d$  is the negative conjugate, so for a non-complex representation we have

$$d(X) = -S d(X)^* S^{-1}$$

where  $S$  is the same as for the Lie group representation. For real representations,  $d(X)$  can be made pure imaginary, so  $D(g)$  is real. For pseudoreal representations,  $d(X)$  can be made real.

- Another way of thinking about  $S$  is that it is a rank 2 invariant tensor. For example, rearranging the above equation we have

$$d(X)S + S d(X)^T = d(X)_i^k S_{kj} + d(X)_j^k S_{ik} = 0$$

which is just the infinitesimal transformation of an invariant tensor.

- For a real or pseudoreal representation  $d$ , the trivial representation appears exactly once in  $d \otimes d$ . The tensor  $S$  projects out the trivial representation, by contraction with it, so  $d$  is real if the trivial representation is in  $(d \times d)_s$  and pseudoreal if it is in  $(d \times d)_a$ .

- Physically, the conjugate representation is important because antiparticles transform in the conjugate representation. Intuitively, any representation that arises from physical rotations of coordinates is real.

Next, we build a 'reality checker' for general irreps.

- If an irrep is real or pseudoreal, then  $y^T S x$  is an invariant bilinear, as

$$y^T Sx \rightarrow y^T D(g)^T S D(g)x = y^T S D(g)^\dagger S^{-1} S D(g)x = y^T Sx$$

Conversely, the existence of such an invariant bilinear shows the irrep is real or pseudoreal.

- Note that  $y^\dagger x$  is always trivially an invariant since the  $D(g)$  are unitary; the difference here is that we have  $y^T$  rather than  $y^\dagger$ . In the simplest case where the matrices of  $D(g)$  are already real, the invariant bilinear is just  $y^T x$ , i.e. the  $D(g)$  are orthogonal.

- To construct  $S$ , we use the averaging trick. Define

$$S = \sum_g D(g)^T X D(g)$$

for arbitrary  $X$ . Then  $D(g)^T S D(g) = S$ , giving an invariant bilinear as desired. Since we can always define  $S$  this way, we must have  $S = 0$  for a complex representation. If we suppose that  $X_{i\ell} = 1$  with all other entries zero, we have

$$\sum_g D(g)^{ij} D(g)^{\ell k} = 0$$

Finally set  $j = \ell$  and  $i = k$  to find

$$\sum_g \chi(g^2) = 0$$

This is our test for a complex representation.

- On the other hand, for a pseudoreal representation,  $S^T = \eta S$ , which gives

$$\sum_g D(g)^T X^T D(g) = \eta \sum_g D(g)^T X D(g)$$

Performing the same procedure above, we find

$$\sum_g \chi(g^2) = \eta \sum_g \chi(g)^2 = \eta |G|$$

where we used the fact that the character is real. The quantity  $\sum_g \chi(g^2)$  is called the FrobeniusSchur indicator.

Example. The fundamental representation of  $\mathfrak{su}(2)$ . The representations of the generators are the Pauli matrices. They clearly cannot be made pure imaginary by a basis change, since there is only one antisymmetric pure imaginary  $2 \times 2$  matrix. The representation is instead pseudoreal, with

$$\sigma_a = -\sigma_2 \sigma_a^* \sigma_2$$

where  $\sigma_2$  is antisymmetric as expected. The fact that we use  $\sigma_2$  to do the transformation is purely a matter of convention; it is because the usual phase conventions make  $\sigma_2$  alone non-real. Up to a phase factor,  $\sigma_2$  is just the invariant tensor  $\epsilon^{ab}$ , and the fundamental is pseudoreal because the antisymmetric combination is in the trivial representation. This latter reasoning makes it easy to see that all nontrivial representations of  $\mathfrak{su}(2)$  are pseudoreal.

### 4.1.5 2.5 The Group Algebra by Zhou

We return to the group algebra, to prepare for classifying the representations of  $S_n$ . For clarity, we reserve the letter  $g$  for group elements, while  $r$  and  $s$  stand for algebra elements, and write the group algebra as  $\tilde{G}$ .

- Representations of the group yield representations of the group algebra by linearity, and the group multiplication itself yields the regular representation, which decomposes into irreps as

$$\tilde{G} = \bigoplus_{\mu} L^{\mu}, \quad L^{\mu} = \bigoplus_{a=1}^{n_{\mu}} L_a^{\mu}, \quad n_{\mu} = \dim D^{\mu}$$

where  $\mu$  indexes the distinct irreps.

- An subrepresentation  $L$  of  $D^R$  is spanned by a basis  $|r\rangle$  so that  $|sr\rangle \equiv s|r\rangle \in L$  for all  $s \in \tilde{G}$ . Thinking of the group algebra as a ring, subrepresentations of the regular representation are left ideals, and irreps  $L_a^{\mu}$  are minimal left ideals. Thus finding all minimal left ideals will give all inequivalent irreps.

- We define projection operators  $P_a^{\mu}$  onto the minimal left ideals  $L_a^{\mu}$  by

$$P_a^{\mu} \tilde{G} = L_a^{\mu}, \quad P_a^{\mu} = \text{identity on } L_a^{\mu}, \quad P_a^{\mu} P_b^{\nu} = \delta^{\mu\nu} \delta_{ab} P_a^{\mu}$$

We also define projection operators  $P^{\mu}$  onto the left ideals  $L^{\mu}$  by  $P^{\mu} = \sum_a P_a^{\mu}$ .

- Note that the projection operators commute with all of  $\tilde{G}$ ,

$$P_a^{\mu} r = r P_a^{\mu}$$

This can be shown by acting on an arbitrary element with decomposition  $\sum_{\mu,a} |s_a^{\mu}\rangle$ . Intuitively, it's because group multiplication can't take an element in or out of a left ideal.

Next, we construct the projection operators more explicitly.

- Decompose the identity element  $e$  as

$$e = \sum_{\mu} e_{\mu}, \quad e_{\mu} \in L^{\mu}$$

Then we claim the projection operators are given by right-multiplication by  $e_{\mu}$ ,

$$P^{\mu} |r\rangle = |r e_{\mu}\rangle.$$

Using right-multiplication is useful, because  $P^{\mu}$  automatically commutes with any  $r$  since left-multiplication and right-multiplication commute.

- To show this, consider an arbitrary element  $r = \sum_{\mu} r_{\mu}$ . Then

$$r = r e = \sum_{\mu} r e_{\mu}$$

but the fact that the  $L^{\mu}$  are left-ideals means that  $r_{\mu} = r e_{\mu}$  by taking the  $\mu$  component of both sides. Hence  $P^{\mu}$  is indeed a projector.

- Finally, note that

$$e_{\nu} = e_{\nu} e = \sum_{\mu} e_{\nu} e_{\mu}$$

and taking the  $\mu$  component of both sides gives



$$e_\nu e_\mu = \delta_{\mu\nu} e_\mu$$

In particular,  $e_\mu e_\mu = e_\mu$ . Any algebra element satisfying this relation is called an idempotent and can be used to define a projection operator onto a left ideal.

- Similarly we may define  $e_\mu^a$  for the  $L_\mu^a$ . The  $e_\mu^a$  are primitive idempotents, generating minimal left ideals, while the  $e_\mu$  are not, as they can be written as a sum of idempotents,  $e_\mu = \sum_a e_\mu^a$ .

- An idempotent  $e_i$  is primitive if and only if  $e_i r e_i = \lambda_r e_i$  for all  $r \in \tilde{G}$ , where  $\lambda_r$  is a scalar.

To prove the forward direction, note that  $e_i$  generates a minimal left ideal  $L$ , and right-multiplication by  $e_i r e_i$  is also a projection operator onto  $L$ , which commutes with all elements of  $\tilde{G}$ . Then by Schur's lemma,  $e_i r e_i$  is proportional to the identity on  $L$ , giving the result.

To show the converse, suppose that  $e r e = \lambda_r e$  and that  $e$  decomposes into idempotents as  $e = e' + e''$  where  $e' e'' = 0$ . Then  $e e' e = e' e = e'$  and hence  $e' = \lambda e$ . Then  $e'$  generates exactly the same left ideal as  $e$  does, so  $e$  is primitive.

- Two primitive idempotents  $e_1$  and  $e_2$  generate equivalent irreps if and only if  $e_1 r e_2 \neq 0$  for some  $r \in \tilde{G}$ .

Let  $e_1$  and  $e_2$  generate the minimal left ideals  $L_1$  and  $L_2$ . To prove the backward direction, note that  $|q\rangle \rightarrow |q e_1 r e_2\rangle$  is a nonzero linear transformation from  $L_1$  to  $L_2$  which commutes with (left-multiplication by) any element of  $\tilde{G}$ . Then by Schur's lemma,  $L_1$  and  $L_2$  are equivalent. The forward direction is similar.

Example. The reduction of the regular representation of  $C_3$ . Let the generator be  $a$ . The idempotent for the identity representation is always just the average of the group elements,

$$e_1 = \frac{1}{3} (e + a + a^{-1})$$

Next, suppose another idempotent is  $e_2 = x e + y a + z a^{-1}$ . We have the constraints

$$e_1 e_2 = 0, \quad e_2 e_2 = e_2$$

which yield the three solutions

$$e' = \frac{1}{3} (2e - a - a^{-1}), \quad e_+ = \frac{1}{3} (e + \omega a + \omega^{-1} a^{-1}), \quad e_- = \frac{1}{3} (e + \omega^{-1} a + \omega a^{-1}), \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

One can see that  $e'$  is not primitive since it is the sum of  $e_+$  and  $e_-$ . To check that  $e_+$  and  $e_-$  are idempotent, we manually compute  $e_\pm a e_\pm$  and  $e_\pm a^{-1} e_\pm$  and apply the above theorem; this is simple since  $e_\pm$  just pick up phase shifts upon multiplication by any group element. We do a similar check to show that  $e_+$  and  $e_-$  generate inequivalent representations, giving the three irreps of  $C_3$ .

We can combine the group algebra with character theory to provide alternative proofs of some of the representation theory results above.

- For each conjugacy class  $c$ , we define the class average

$$K(c) = \frac{1}{n_c} \sum_i g_i^{(c)}$$

in the group algebra. Class averages can be multiplied together using the same operation as the group algebra, and it can be shown they also form an algebra called the class algebra, with

$$K(c)K(d) = \sum_e \Gamma(c, d; e)K(e)$$

where the  $\Gamma$ 's are positive integers.

• The group and class algebra can be realized in representations, where the addition operation is simply matrix addition. For an irrep  $D(g)$ , the class average is

$$\mathcal{D}(c) = \frac{1}{n_c} \sum_{g \in c} D(g)$$

By reindexing, we have  $D(g'^{-1})\mathcal{D}(c)D(g') = \mathcal{D}(c)$ , so by Schur's lemma

$$\mathcal{D}(c) = \frac{\chi(c)}{\chi(I)} I.$$

• Therefore, the identity

$$\mathcal{D}(c)\mathcal{D}(d) = \sum_e \Gamma(c, d; e)\mathcal{D}(e)$$

translates to

$$\chi(c)\chi(d) = \chi(I) \sum_e \Gamma(c, d; e)\chi(e)$$

• Now we restore the irrep index  $r$  and sum over all irreps, giving

$$\sum_r \chi^r(c)\chi^r(d) = \sum_e \Gamma(c, d; e) \sum_r \chi^r(I)\chi^r(e) = \sum_e \Gamma(c, d; e)\chi^{\text{reg}}(e) = \Gamma(c, d; I)|G|$$

where we used the decomposition of the regular representation.

• If  $c$  is a conjugacy class, then so is  $\bar{c}$ , the set of inverses of elements of  $c$ . Moreover,  $\Gamma(c, d; I)$  is only nonzero for  $d = \bar{c}$ , giving

$$\sum_r \chi^r(c)\chi^r(d) \propto \delta^{d\bar{c}}$$

Since the representations are unitary, this implies

$$\sum_r \chi^r(c)^* \chi^r(c') \propto \delta^{cc'}$$

Thus, the rows of the character table are orthogonal, proving that  $N(R) \leq N(C)$ .

• A useful result is that in a representation  $D$ , the projector onto irreps isomorphic to  $D_i$  is

$$P_i = \frac{\dim D_i}{|G|} \sum_g \chi_i(g)^* D(g)$$

To see this, note that  $P_i$  commutes with all group elements,  $hP_i h^{-1} = P_i$ , by reindexing. Thus  $P_i$  is block diagonal, proportional to the identity on each irrep. In particular, restricting to  $D_j$ ,

$$\text{tr } P_i|_{D_j} \propto \sum_g \chi_i(g)^* \chi_j(g) \propto (\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$$

Hence  $P_i$  vanishes on all irreps not isomorphic to  $D_i$  and is the identity otherwise. The projector  $P_i$  works whether it acts on the left or the right.

• For example,  $\sum_g D(g)$  projects onto the trivial irrep as we've seen above; it yields vectors that are fixed by the group. For the regular representation, the projectors are the  $e_\mu$ .

### 4.1.6 2.6 Representations of $S_n$ by Zhou

We now use our machinery to find the irreps of  $S_n$ . We warm up with the one-dimensional irreps.

• All transpositions are conjugate, so we must assign them all the same number. Since transpositions have order 2, the number must be  $\pm 1$ . Since transpositions generate the entire group, there are only two distinct one-dimensional representations.

• Denote the sign of a permutation  $p$  by  $(-1)^p$ . Then the two one-dimensional representations map  $p$  to one, and  $p$  to  $(-1)^p$ . The corresponding primitive idempotents, up to a constant, are

$$s = \sum_p p, \quad a = \sum_p (-1)^p p$$

• To check this, note that for any  $q$ ,

$$qs = sq = s, \quad qa = aq = (-1)^q a, \quad sa = as = 0$$

Then we have  $sqs = ss = n!s$  and  $aq a = (-1)^q aa = (-1)^q n!a$ , so both are indeed primitives. The corresponding irreps have basis vectors  $|qs\rangle$  and  $|qa\rangle$  for some arbitrary  $q$ . To check the irreps are not equivalent, note that  $sqa = sa = 0$  for any  $q$ .

For higher-dimensional irreps, it is useful to introduce Young diagrams.

• A partition  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  of  $n$  is a sequence of positive integers  $\lambda_i$  satisfying

$$\lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i = n$$

We say  $\lambda > \mu$  if the first nonzero number in the sequence  $\lambda_i - \mu_i$  is positive.

• A partition  $\lambda$  is represented by a Young diagram, which consists of  $n$  squares arranged in  $r$  rows, where row  $i$  contains  $\lambda_i$  squares.

• Partitions of  $n$  are in one-to-one correspondence with possible cycle structures of permutations, where elements that are left alone are regarded as 1-cycles. Then there is one conjugacy class and hence one irrep for every Young diagram. For example, the identity element is  $1 + 1 + \dots + 1$ , and a transposition is  $2 + 1 + \dots + 1$ .

• A Young tableau is obtained by labeling the squares of a Young diagram with the numbers 1 through  $n$ , using each number once. The normal Young tableau  $\Theta_\lambda$  associated with  $\lambda$  has the numbers in left-to-right, top-to-bottom order. A standard Young tableau is one where the numbers always increase when going down or to the right.

• A permutation acts on a Young tableau by permuting the numbers. Then an arbitrary Young tableau can be written as  $p\Theta_\lambda = \Theta_\lambda^p$ .

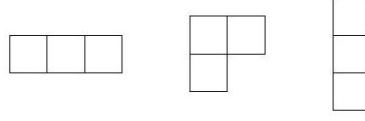
• Given a Young tableau  $\Theta_\lambda^p$ , the horizontal permutations  $h_\lambda^p$  are the ones which only permute numbers within rows, and the vertical permutations  $v_\lambda^p$  are the ones which only permute numbers within columns.

• The symmetrizer  $s_\lambda^p$ , antisymmetrizer  $a_\lambda^p$ , and irreducible symmetrizer or Young symmetrizer  $e_\lambda^p$  associated with the Young tableau  $\Theta_\lambda^p$  are defined as

$$s_\lambda^p = \sum_h h_\lambda^p, \quad a_\lambda^p = \sum_v (-1)^{v_\lambda} v_\lambda^p, \quad e_\lambda^p = s_\lambda^p a_\lambda^p = \sum_{h,v} (-1)^{v_\lambda} h_\lambda^p v_\lambda^p$$

Our main result will be that  $e_\lambda^p$  is a primitive idempotent. To avoid confusion, note that the Young symmetry acts on the right, and multiplication of permutations obeys  $f \star g = f \circ g$  when  $f, g \in S_n$  are viewed as automorphisms of  $S_n$ .

Example. The simple example of  $S^3$ . There are three Young diagrams, shown below.



Labeling the corresponding normal Young tableaux  $\Theta_1, \Theta_2$ , and  $\Theta_3$ , we have

- $s_1 = s, a_1 = e, e_1 = s$ .
- $s_2 = e + (12), a_2 = e - (13), e_2 = s_2 a_2 = e + (12) - (13) - (321)$ .
- $s_3 = e, a_3 = a, e_3 = a$ .
- The fourth standard Young tableau,  $\Theta_2^{(23)}$ , has  $s_2^{(23)} = e + (13), a_2^{(23)} = e - (12)$ , and  $e_2^{(23)} = e + (13) - (12) - (123)$ .

We note the following features of the example and state they hold generally without proof.

- The horizontal permutations form a subgroup and  $s_\lambda$  is its symmetrizer. Then by similar logic to before,  $s_\lambda$  is idempotent with  $s_\lambda s_\lambda = |\{h_\lambda\}| s_\lambda$ . Similarly,  $a_\lambda$  is idempotent.
- Generally, neither  $s_\lambda$  nor  $a_\lambda$  are primitive, but  $e_\lambda$  is. Moreover,  $e_\lambda^p$  generates an irrep distinct from but isomorphic to that of  $e_\lambda$ . All nonisomorphic irreps correspond to exactly one  $e_\lambda$ .
- The four minimal left ideals generated by the idempotents of the standard Young tableaux span the entire group algebra space  $S_3$ . Explicitly,  $e = (1/6) (e_1 + 2e_2 + 2e_2^{(23)} + e_3)$ .
- Hence in general, we claim that normal Young tableaux correspond to inequivalent irreps, while standard Young tableaux decompose the regular representation.
- Since a  $d$ -dimensional irrep occurs  $d$  times in the regular representation, the dimension of the irrep corresponding to a Young diagram is the number of standard Young tableaux on it.
- For each box in a Young diagram, a hook is a right angle with vertex in that box, which opens down and to the right; the length of the hook  $h_i$  is the number of boxes it contains. For each hook, the box with the vertex is the smallest number with probability  $1/h_i$  so we expect that

$$\dim(e_\lambda \text{ irrep}) = \text{standard tableaux} = \frac{n!}{\prod_i h_i}.$$

This is called the hook length formula.

- The proof above is incorrect because we cannot simply multiply probabilities for nonindependent events. However, it serves as a useful mnemonic, since the real proof is much more difficult.

Example. We give a few more details. First, we explicitly construct the irrep generated by  $e_2$ .

- The irrep certainly contains  $e_2$  itself, i.e.  $e + (12) - (13) - (321)$ . It is convenient to write the vectors in terms of the image of the string "123" under the corresponding permutations, so that  $e_2 = |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |312\rangle$ .
- The irrep also contains all the vectors  $|pe_2\rangle$ , which can be written in our notation by applying a permutation  $p$  to the numbers in the states. For example, for  $p = (12)$ , we get

$$|123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |312\rangle \rightarrow |213\rangle + |123\rangle - |312\rangle - |321\rangle$$

while for  $p = (13)$  we get

$$|123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |312\rangle \rightarrow |321\rangle + |231\rangle - |123\rangle - |132\rangle$$

Computing the other permutations, we find a two-dimensional irrep, in accordance with the hook length formula.

- The ordering is a bit confusing. Given a permutation  $p$ , the Young symmetrizer is applied on the right, giving  $pe_2$ . If the  $\{pe_2\}$  are an irrep, then  $gpe_2$  is in their span for any  $g$ . But to see how  $pe_2$  acts on an element  $g$  of the regular representation, we compute  $pe_2g$ .

Example. Symmetry classes of tensors. Given an  $m$ -dimensional real vector space  $V_m$ , the tensor product space  $V_m^n$  of rank  $n$  tensors is acted on by  $GL(m, \mathbb{R})$ , and we would like to decompose  $V_m^n$  into irreps of  $GL(m, \mathbb{R})$ . The symmetric group enters because  $S_n$  acts on  $GL(m, \mathbb{R})$  by permuting the indices, and this commutes with the action of  $GL(m, \mathbb{R})$ , which does the same thing to each index. Therefore, irreps of  $GL(m, \mathbb{R})$  in  $V_m^n$  have definite symmetry; specifically they are

$$\{e_\lambda^p|\alpha\rangle || \alpha\rangle \in V_m^n\}$$

for each  $\lambda$  and  $p$ . These are tensors of the symmetry class  $\Theta_\lambda^p$ . Tensors of the symmetry type  $\Theta_\lambda$  correspond to the set of all tensors of the symmetry class  $\Theta_\lambda^p$  for all  $p$ .

As an example, consider rank 3 tensors with  $m = 2$ , and the same numbering as in the previous example. Then  $e_3 = a$  annihilates everything, while  $e_1 = s$  gives the irrep

$$\{|++\rangle, s|+-\rangle, s|--\rangle, |---\rangle\}$$

containing all totally symmetric tensors. The irrep given by  $e_2$  is spanned by

$$e_2|++-\rangle = 2|++-\rangle - |-++\rangle - |+-+\rangle$$

and

$$e_2|--+\rangle = 2|--+\rangle - |+-+\rangle - |-+-\rangle$$

where  $e_2$  acting on any other basis element gives zero or one of these two. Finally,  $e_2^{(23)}$  gives the last irrep, accounting for all of the states. Note that in general, some irreps will correspond to non-standard Young tableaux, since nothing here is sensitive to the order of the indices.

Note. One might be tempted to say the  $e_2$  irrep contains tensors symmetric in the first two indices and antisymmetric in the first and third, but this is wrong: the symmetrization partially destroys the result of the antisymmetrization. In fact, it's simply impossible for an index to be simultaneously symmetrized with one and antisymmetrized with another. If a rank 3 tensor is symmetric in its first indices and antisymmetric in the last two,

$$T_{abc} = T_{bac} = -T_{bca} = -T_{cba} = T_{cab} = T_{acb} = -T_{abc}$$

so the tensor is identically zero.

Note. Different sources can differ on the action of the  $e_\lambda$  in several ways.

- While we antisymmetrize first here, one could also symmetrize first; this also yields irreps. However, we generally won't get the same irreps. Our convention above splits the  $e_2$  symmetry class into two irreps both with symmetry in two indices, but we could also split it into two irreps both with antisymmetry in two indices.

- This alternate splitting is legal, for the same reason that we can choose any basis in a degenerate subspace: we have two copies of the same irrep, so any "change of basis" between them will also yield two irreps.

- We have taken the permutations to act on the slots, so that

$$(23)(12)|ijk\rangle = (23)|jik\rangle = |jki\rangle.$$

However, we could also label the permutation with the same letters we index the basis of  $V_m^n$ , then act on the letters. That is, we could have

$$(jk)(ij)|ijk\rangle = (jk)|jik\rangle = |kij\rangle$$

where in the last step we swapped the letters  $j$  and  $k$ , not the last two slots.

- The latter is more intuitive if we are thinking in terms of tensor components, where we usually act on letters ("antisymmetrize  $i$  and  $j$ ") rather than slots. Swapping between these two conventions is equivalent to swapping the order of operations: if the first convention is  $g_1g_2$ , then the second is equivalent to doing  $(g_2g_1g_2^{-1})g_2 = g_2g_1$ . Indeed, we have

$$(12)(23)|ijk\rangle = (12)|ikj\rangle = |kij\rangle.$$

- Finally, we may phrase everything in terms of transforming the basis states  $|ijk\rangle$  or transforming the tensor components  $\langle ijk|\alpha\rangle$ . Generally, these transform oppositely. For example, we have

$$(\alpha')^{ijk} = \langle ijk|(23)(12)|\alpha\rangle = \langle ikj|(12)|\alpha\rangle = \langle kij|\alpha\rangle = \alpha^{kij}$$

If we wanted to compute this directly by moving the tensor indices around, we would first swap the second and third indices, then swap the first and second indices. That is, the order of operations is flipped because we're acting on  $|ijk\rangle$  from the right.

- In summary, there are three possible convention differences, each of which is equivalent to flipping the order of symmetrization and antisymmetrization. Our convention matches that of most pure math sources. Most physics sources flip all three, ending up with a net order flip.

For concrete computations, we'll generally use the physics convention. The difference between the two generally won't matter because we're mostly concerned with how tensor products of irreps decompose, or how irreps split upon restricting to subgroups.

Example. Consider the symmetry classes of the Riemann tensor. We know that

$$R_{abcd} = -R_{bacd}, \quad R_{abcd} = -R_{abdc}, \quad R_{abcd} = R_{cdab}, \quad R_{[abcd]} = 0$$

Taking the physics convention, the first two identities indicate that  $ab$  and  $cd$  have to be in columns, giving the candidates

|     |     |
|-----|-----|
| $a$ | $c$ |
| $b$ | $d$ |
|     | $a$ |
|     | $b$ |
|     | $c$ |
|     | $d$ |

Both satisfy the third identity, but the fourth rules out the second candidate. Hence the Riemann tensor is a  $GL(n, \mathbb{R})$  irrep. Restricting to a subgroup breaks apart irreps, and indeed restricting to the Lorentz transformations  $SO(n-1, 1)$ , the Riemann tensor decomposes into the Ricci scalar, Ricci tensor, and Weyl tensor.

## 4.1.7 Illustrations of representations according to Kostrikin

(??? я забыл, откуда это??? не нашел у Кострикина пока что)

Многое можно пояснить, не прибегая к теории характеров.

**Задача 1.**

Требуется установить, что неприводимое комплексное представление  $(\Phi, V)$ ,  $\dim V = n > 1$ , симметрической группы

$$S_3 = \langle a, b | a^3 = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^2 \rangle, \quad a = (123), \quad b = (12),$$

с точностью до эквивалентности единственно.

Положим  $\Phi(a) = \mathcal{A}$ ,  $\Phi(b) = \mathcal{B}$  и выберем в  $V$  базис, в котором  $B = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ . Так как  $Z(S_3) = e$ , то  $B$  имеет в качестве собственных значений как  $-1$ , так и  $+1$ . Пусть  $\mathcal{B}v = v$ . Очевидно,  $\mathcal{A}v \neq v$ , поскольку  $n > 1$ , т.е.  $w = \mathcal{A}v - v \neq 0$ . С другой стороны,

$$(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})w = (\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})(\mathcal{A} - \mathcal{E})v = (\mathcal{A}^3 - \mathcal{E})v = 0$$

Утверждается, что  $\langle w, \mathcal{A}w \rangle$  —  $\Phi(G)$ -инвариантное подпространство (которое должно совпадать с  $V$  в силу неприводимости). Действительно,  $\mathcal{A}$ -инвариантность установлена. Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}w &= \mathcal{B}(\mathcal{A}^2 - \mathcal{A})v = (\mathcal{A} - \mathcal{A}^2)\mathcal{B}v = (\mathcal{A} - \mathcal{A}^2)v = -\mathcal{A}w \\ \mathcal{B}w &= \mathcal{B}\mathcal{A}v - \mathcal{B}v = \mathcal{A}^2\mathcal{B}v - v = (\mathcal{A}^2 - \mathcal{E})v = (\mathcal{A} + \mathcal{E})w \end{aligned}$$

Значит, в базисе  $(w, \mathcal{A}w)$  имеем

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix}.$$

Мы однозначно восстановили  $(\Phi, V)$ . В частности,  $n = 2$ .

**Задача 2.**

Та же проблема для группы кватернионов: имеем точное неприводимое представление  $(\Phi, V)$  и операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  на  $V$ , порождающие  $Q_8$  и связанные соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^4 &= \mathcal{E}, \quad \mathcal{B}^2 = \mathcal{A}^2 = -\mathcal{E}, \\ \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1} &= \mathcal{A}^{-1} = -\mathcal{A}. \end{aligned}$$

Выбираем в  $V$  базис, относительно которого

$$B = \text{diag}(i, \dots, i, -i, \dots, -i)$$

Так как  $\Phi$  точное, то в качестве собственных значений выступают  $+i$  и  $-i$ . Пусть  $v$  — собственный вектор, для которого  $\mathcal{B}v = iv$ . Соотношения

$$\mathcal{A}^2v = -v, \quad \mathcal{B}(\mathcal{A}v) = -\mathcal{A}\mathcal{B}v = -i(\mathcal{A}v)$$

и неприводимость  $(\Phi, V)$  показывают, что  $V = \langle v, \mathcal{A}v \rangle$ , причём

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Bmatrix}.$$

Представление однозначно восстановлено.

**3 а да ча 3.**

Знакопеременная группа  $A_4$  определяется заданием

$$A_4 = \langle a, b, c | a^2 = b^2 = (a, b) = e = c^3; cac^{-1} = b, \quad cbc^{-1} = ab \rangle$$

Точность и неприводимость представления  $(\Phi, V)$  позволяют выбрать в  $V$  базис, относительно которого

$$C = \Phi_c = \text{diag} (1, \dots, \zeta, \dots, \zeta^{-1}).$$

Без ограничения общности выбираем  $0 \neq f \in V$ , для которого  $Cf = \zeta f, \zeta \neq 1, \zeta^3 = 1$ . Если  $Af = f$ , то

$$Bf = CAC^{-1}f = CA\zeta^{-1}f = f$$

противоречие с неприводимостью  $\Phi$ . Значит,  $u = Af - f \neq 0$ . Аналогично,  $v = Bf - f \neq 0, w = ABf - f \neq 0$ . Имеем

$$CAf = CAC^{-1}Cf = B\zeta f = \zeta Bf$$

**5 Другое о теории групп****5.1 Coverings (???)****5.2 Lie groups****5.3 Groups for Special Mathematical Physics (???)****5.3.1 Schur polynomials (!!!!!)**

(пока вики, потом нужно будет - разберу)

**Определение**

Ньютона связаны со значениями характеров соответствующих представлений симметрической группы  $S_n$ .

Многочлен Шура, соответствующий разбиению  $\lambda$ , равен <sup>[1]</sup>

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det \left( x_i^{\lambda_j + n - j} \right)_{i,j=1}^n}{\det \left( x_i^{n-j} \right)_{i,j=1}^n}.$$

Также имеются формулы, выражающие многочлены Шура через элементарные симметрические многочлены  $e_r$  и полные симметрические многочлены  $h_r$ :

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \det (h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ где } n \geq l(\lambda),$$

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \det (e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}, \text{ где } \lambda' - \text{сопряжённое к } \lambda \text{ разбиение, а также } m \geq l(\lambda').$$

**О случаях применения (???)****Связь с представлениями симметрической группы**

Многочлен Шура  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ , соответствующий диаграмме Юнга  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , выражается через элементарные симметрические многочлены Ньютона



$p_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_j x_j^k$  с коэффициентами, выражающимися через значения характера  $\chi_\lambda$ , соответствующего  $\lambda$  представления симметрической группы  $S_n$ . А именно,

$$s_\lambda = \sum_{\rho=(1^{r_1}, 2^{r_2}, 3^{r_3}, \dots)} \chi^\lambda(\rho) \cdot \prod_k \frac{p_k^{r_k}}{r_k!},$$

где запись  $\rho = (1^{r_1}, 2^{r_2}, 3^{r_3}, \dots)$  означает, что в классе сопряжённости  $\rho$  в разложении подстановки на непересекающиеся циклы имеется  $r_j$  циклов длины  $j$ .

## 5.4 Applications of group theory

(all about it is here, maybe later I'll create a section for them)

## 6 Fundamentals of linear algebra [see note on lin alg!]

(тут какие-то основы тоже будут написаны.)

### 6.1 Structure of bilinear forms according to Lang

(ленг, думаю, там предостаточно информации, нужно будет - напишу.)

#### 6.1.1 Preliminary information, orthogonal sums

#### 6.1.2 Quadratic mappings

#### 6.1.3 Symmetric forms, orthogonal bases

#### 6.1.4 Hyperbolic spaces

#### 6.1.5 Witt's theorem

#### 6.1.6 Witt group

#### 6.1.7 Symmetric forms over ordered fields

### 6.2 Other Well-known Constructions of Linear Algebra

#### 6.2.1 Alternating forms

#### 6.2.2 Pfaffian

#### 6.2.3 Hermitian forms

#### 6.2.4 Spectral theorem (Hermitian case)

#### 6.2.5 Spectral theorem (symmetric case)

### 6.3 Fundamentals of tensor algebra

(пока в линале пишу, потом сюда добавлю основы00)

---

## Part IV

# Lie Algebra Fundamentals

## 7 Main constructions

### 7.1 General concepts of Lie algebras

#### 7.1.1 Introduction by Zhou

In this course, we will investigate symmetries in physical laws and their mathematical representations. First, we consider how symmetries arise in nature.

- In general, we will consider a symmetry to be a mapping of the physical states of a system which leaves the dynamics invariant.

- Solutions of variational problems are often symmetrical. For example, soap bubbles are spherical because they minimize their area, giving  $SO(3)$  symmetry. Similarly, paths  $\mathbf{x}(t)$  that minimize the action for a rotationally symmetric Lagrangian remain valid paths when rotated.

- Exact symmetries can arise from redundancies in our description, e.g. gauge symmetries.

- Coordinate transformations contain rotations  $SO(3)$ , or more generally Lorentz transformations  $SO(3,1)$ , or even more generally Poincare transformations. In general relativity we will also include arbitrary diffeomorphisms. These symmetries are collectively called spacetime symmetries; all others are called internal symmetries.

- We also have gauge symmetries from the  $U(1)$ ,  $SU(2)$ , and  $SU(3)$  gauge groups. These are not truly 'symmetries' in the sense we have defined since they map a physical state to a different description of the exact same state.

- The Coleman-Mandula theorem says that spacetime and internal symmetries cannot be combined nontrivially in relativistic quantum field theory. The famous exception is supersymmetry.

- Approximate symmetries can arise from neglecting the difference between two things. For example, isospin symmetry holds for up and down quarks if we neglect their charges and the difference in their masses, giving an  $SU(2)$  symmetry. Adding the strange quark gives  $SU(3)$ , realized in the Eightfold Way.

As shown above, many of the groups relevant in physics are Lie groups.

- A Lie group is a group  $G$  which is also a smooth manifold, where the group operation is compatible with the smooth structure.

- The above definition is strongly constraining. A Lie group is nearly determined by its tangent space at the identity  $T_e(G)$ , which defines a Lie algebra  $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G)$  when equipped with a bracket operation. In this course we will work with matrix Lie groups ( $G \subset GL(n, \mathbb{F})$ ) for which the bracket is the matrix commutator.

- The Cartan classification states that all finite-dimensional semi-simple Lie algebras over  $\mathbb{C}$  belong to four infinite families,  $A_n, B_n, C_n$ , and  $D_n$  (for positive integer  $n$ ) and the five exceptional cases  $E_6, E_7, E_8, G_2$ , and  $F_4$ .

- In classical mechanics, Lie groups and Lie algebras correspond to finite and infinitesimal symmetry transformations, which yield conserved quantities by Noether's theorem.

- In Lagrangian mechanics, symmetries preserve the action, and the conserved quantity can be read off from the Euler-Lagrange equations.

- In Hamiltonian mechanics, symmetries are phase space flows which preserve the Hamiltonian  $H$ , and they are generated by quantities  $G(q, p)$  which are conserved. Mathematically, we require the Poisson bracket of  $G$  and  $H$  to vanish.

- Quantum mechanics is similar to Hamiltonian mechanics; groups and algebras correspond to unitary and Hermitian operators which commute with the Hamiltonian, and the latter are exactly the conserved physical quantities.

- The crucial feature is the antisymmetry of the commutator/Poisson bracket. This tells us, e.g. that rotating a configuration don't change the energy if and only if time evolution doesn't change the angular momentum. This is how symmetry and conservation are generically related.

- There is one more piece to this statement: in classical mechanics, the symmetry generators are the same as the real-valued observables that we measure. In quantum mechanics, this is not true, because they must be anti-Hermitian and Hermitian respectively. We instead relate them by a factor of  $i$ , one reason that quantum mechanics requires complex numbers.

- Mathematically, the commutator and Poisson bracket make the set of infinitesimal transformations into a Lie algebra. Using the Jacobi identity shows that the set of infinitesimal symmetries is closed under the bracket and is hence a Lie subalgebra.

The link between symmetry and conservation can be somewhat subtle.

- There can be conserved quantities not associated with a continuous symmetry. For example, if a space is disconnected, the connected component a particle is in is conserved, but there is no associated continuous symmetry because the components are topologically invariant. Conserved quantities of this type are called topological charges.

- There can be algebras of symmetries that do not exponentiate to groups of symmetries; these appear in the study of supersymmetry and quantum groups. However, we still find conserved quantities, as Noether's theorem only requires infinitesimal symmetries, not finite ones.

- In both classical and quantum mechanics, continuous symmetries lead to locally conserved currents by Noether's theorem, which integrate to conserved charges. In addition, in quantum mechanics, discrete symmetries also lead to conserved charges; they partition the Hilbert space into subspaces which evolve independently.

- In simple cases, these conserved quantities can be described in terms of "quantum numbers". For example, a continuous  $U(1)$  symmetry yields a conserved quantity that adds between particles. For example, translations, rotations about a single axis, and phase rotations correspond to momentum, angular momentum, and charge.

- For discrete symmetries, a unitary symmetry operator that is its own inverse is also Hermitian, and so corresponds to a conserved quantity that multiplies between particles. Examples include the eigenvalues of parity, charge conjugation, and time reversal. The reason the quantum numbers from continuous symmetries add instead of multiply is because they are defined via the eigenvalues of infinitesimal symmetries, which effectively takes a logarithm.

- However, in general symmetries groups can be non-Abelian, where the associated conservation laws cannot be understood by quantum numbers alone. Instead, particle states can be classified into irreducible representations of the group, and the allowed processes can be found by decomposing the tensor products of representations. For example, this reasoning gives rise to selection rules associated with angular momentum conservation.

- Another phenomenon occurs with non-Abelian symmetry groups. In general, the Hilbert space is partitioned into irreducible representations of the symmetry group, and states within each irrep have the same energy. Since the irreps of abelian groups are one-dimensional, only non-Abelian symmetries can explain degeneracies. For example, the approximate eight-fold degeneracy in the baryon spectrum can be explained by an approximate  $SU(3)$  flavor symmetry.

Symmetries in quantum mechanics are a bit more subtle because quantum states are only defined up to phase factors.

- Wigner's theorem states that symmetries which preserve the norms of inner products must be either unitary linear or unitary anti-linear; the latter appears for time reversal symmetry.

- Even for unitary operators, we can have projective representations  $U(g)$ , which satisfy

$$U(g_i)U(g_j) = e^{i\gamma(g_i, g_j)}U(g_i g_j)$$

Note that by phase redefinitions we can always set  $U(e) = I$ .

- In the case where

$$\gamma(g_i, g_j) = \alpha(g_i g_j) - \alpha(g_i) - \alpha(g_j)$$

we can remove all phase factors by redefining  $U(g)$  as  $e^{i\alpha(g)}U(g)$ . If the phase factors are nontrivial (in a topological sense) they cannot be removed and give an inherently projective representation.

- Often, but not always, finding the projective representations of  $G$  is equivalent to finding the representations of the universal cover  $\tilde{G}$ . This leads to the introduction of spinors, representations of  $SU(2)$ , since  $SU(2)$  is the universal cover of  $SO(3)$ .

We will return to these issues in greater detail later.

## 7.1.2 Fundamentals of Lie algebras according to Kiselev

обобщением понятия таких преобразований является концепция группы. Более того, сами преобразования могут зависеть от непрерывных параметров, и в этом случае понятие, адекватно описывающее непрерывные преобразования, - это гладкое многообразие. С этого мы и начинаем изучение теории непрерывных групп.

Описание физической системы требует введения пространства ее квантовых состояний, среди которых роль опорного примера для наших рассуждений играет рассмотрение векторных пространств полей спина  $s$  размерности  $\mathcal{D} = 2s + 1$  в теории группы поворотов <sup>2</sup> | в пространстве квантовых состояний существует такой ортонормированный базис, что каждое базисное состояние является собственным для оператора проекции спина на ось  $z$ , а это значит, что на каждом состоянии базиса проекция спина на ось  $z$  равна собственному значению. Коэффициенты разложения рассматриваемого состояния квантовой системы по такому базису имеют вполне определенный физический смысл, а именно, эти коэффициенты задают амплитуду вероятности обнаружить при измерении проекции спина ее собственное значение. Поскольку вероятность нормируется на единицу, постольку пространство квантовых состояний снабжено евклидовой нормой и является гильбертовым пространством <sup>3</sup> При таком подходе встает вопрос не только о том, как преобразуются при групповых преобразованиях наблюдаемые величины, но и о том, как при этом преобразуются квантовые состояния, а отвечает на этот вопрос теория представлений, т.е. описание действия операторов, реализующих элементы группы, на векторы гильбертова пространства.

Мы предполагаем, что читатель знаком с классической теорией групп в объеме учебника ван дер Вардена «Алгебра» [5]. Тем не менее, для полноты и целостности восприятия в ходе изложения, ориентированного на физика, мы будем приводить определения тех математических понятий, которые используются в нашем изложении <sup>4</sup>.

В качестве обобщения преобразований физических величин, особенно при наличии симметрии, в математике вводится понятие группы:

Группой называется множество элементов  $\mathfrak{G}$ , в котором

- задана композиция любых двух элементов, принадлежащая группе:  $\forall g_{1,2} \in \mathfrak{G} \quad \exists g_1 \cdot g_2 \in \mathfrak{G}$
- имеет место ассоциативность композиции,  $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \equiv g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$
- существует единичный элемент,  $\exists e \in \mathfrak{G} : \quad \forall g \in \mathfrak{G}, \quad e \cdot g = g \cdot e = g$ ,
- для каждого элемента группы существует обратный,  $\forall g \in \mathfrak{G} \quad \exists g^{-1} \in \mathfrak{G} : \quad g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .

Группу называют абелевой, если ее композиция перестановочна, т.е. имеет место тождество

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$$

для любых двух элементов.

### Киселев-2022-1

. Рассмотрите  $2 \times 2$ -матрицы поворотов на плоскости. Покажите, что они образуют абелеву группу.

Группа Ли - это группа в приведенном выше стандартном понимании, элемент которой определен значениями конечного числа действительных непрерывных параметров, называемых координатами <sup>5</sup> Иначе: на группе Ли можно вблизи любого элемента ввести взаимнооднозначное соответствие между элементами группы и координатами в области конечномерного линейного пространства параметров, т.е. определить координатную сетку, причем эти координатные сетки для разных подмножеств группы согласованы в том смысле, что координаты элемента группы в одной сетке взаимнооднозначно связаны с координатами того же элемента в другой сетке в области их перекрытия. Это отвечает математическому понятию многообразия. Значит, группа Ли - это множество, которое снабжено структурами группы и многообразия. Область с координатной сеткой (открытое подмножество) называют картой, набор координатных сеток, покрывающих всю группу, - это атлас карт многообразия. Так как каждый атлас карт покрывает всю группу, а преобразования от координат одной карты в атласе к координатам другой карты в другом атласе в области их перекрытия взаимнооднозначны, разные атласы дают эквивалентное описание многообразия. Открытую координатную область мы будем отождествлять с областью конечномерного (евклидова) пространства <sup>6</sup>

Число непрерывных параметров группы  $N_G$  называют размерностью группы.

Итак, мы полагаем, что координатные сетки во всех точках многообразия имеют одну и ту же размерность. Минимальное число координатных сеток, покрывающих всю группу, мы будем полагать конечным. Более того, мы будем считать, что функции перехода от одних координат к другим дифференцируемы необходимое число раз, а двум различным элементам многообразия могут быть сопоставлены непересекающиеся области координатных сеток <sup>7</sup> (условие Хаусдорфа).

<sup>2</sup> См. также учебник Эллиота и Добера по теории групп в применении к физике <sup>2</sup>, а также классическую книгу Петрашень и Трифонова [3].

<sup>3</sup> По умолчанию, мы рассматриваем исключительно конечномерные гильбертовы пространства. В общем же случае, когда базис квантовых состояний бесконечно счетный, необходимо вводить понятия сходимости по норме и сепарабельности базиса, а читателю стоит обратиться к учебникам по квантовой механике, например, к книге В.В.Киселева [10, где вводится и понятие оснащенного гильбертова пространства, когда спектр собственных значений наблюдаемой может быть непрерывным.

<sup>4</sup> Строгое математическое изложение можно найти в книге В.Арнольда <sup>4</sup> по математическим методам классической механики и в курсах <sup>6</sup>] (Дубровин, Новиков, Фоменко) и <sup>9</sup>] (Новиков, Тайманов), описывающих геометрические структуры на современном математическом языке, а также в учебниках <sup>7</sup>] (Ф.Уорнер) и <sup>8</sup>] (Исаев, Рубаков) по теории групп и алгебр Ли.

<sup>5</sup> Рассмотрение комплексных групп Ли мы оставляем математикам в специальных общих курсах, так как в этой книге мы преследуем более скромную цель: в самом начале университетского образования познакомить физиков с основными идеями и понятиями, которые в рамках вещественных групп Ли уже нашли достойное место в поисках реальных физических закономерностей и входят в свод инструментов современной науки о природе.

**Киселев-2022-**

2. Рассмотрите нехаусдорфово многообразие «окружность на прямой»: как ввести координаты на этом многообразии, и где расположены точки, окрестности которых неизбежно пересекаются?

**Киселев-2022-**

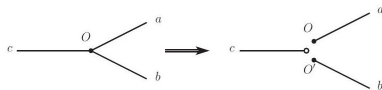
3. Плоскость может быть описана атласом с одной единственной картой: необходимо задать базис из двух независимых векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , так что любая точка плоскости взаимнооднозначно описывается координатами  $(a^{(1)}, a^{(2)})$ , а разные базисы - разные атласы. С помощью стереографической проекции из полюса сферы на плоскость, касательную к противоположному полюсу, покажите, что для описания многообразия сферы необходимо задать атлас как минимум из двух карт. Подчеркните роль условия взаимнооднозначности соответствия координатной области точки на карте и области элемента на сфере.

В физике элементы группы Ли - это обратимые параметризованные преобразования, которые действуют как функции на физические величины  $f[x]$ . При этом ассоциативность есть прямое следствие определения сложной функции<sup>8</sup> для которой расставление скобок представляется излишним:  $f_1(f_2(f_3[x])) \equiv f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3)[x] \equiv (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3[x]$ .

Наличие групповой структуры означает, что элементу  $g_A$  с координатами  $\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \leftrightarrow A^\alpha \leftrightarrow \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_G}$  и элементу  $g_B$  с координатами  $\{B^{(1)}, \dots, B^{(n)}\} \leftrightarrow B^\beta \leftrightarrow \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_G}$  сопоставляется элемент  $g_C = g_A \cdot g_B$  с координатами  $C^\gamma = C^\gamma(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , где операция отображения точки  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  из прямого произведения двух координатных карт группы в точку  $C \in \mathbb{R}^{N_G}$  на координатной карте этой же группы  $C^\gamma(\bullet, \diamond)$  математически выражает закон композиции в группе (со всеми вытекающими отсюда последствиями на языке функций<sup>10</sup> от двух элементов: существование в группе обратных элементов, единицы и т.п.). Определенное таким образом отображение в карту группы как результат групповой композиции мы будем называть бинарной операцией. Для абелевой группы бинарная операция симметрична по перестановке двух своих координатных аргументов<sup>11</sup>, а в общем случае такой перестановочной симметрии нет.

<sup>6</sup> На самом деле координатные сетки на картах могут быть криволинейными, так что касательные векторы к координатным линиям в каждой точке многообразия образуют базис векторного пространства, которое называется касательным пространством в заданной точке многообразия, а в криволинейных координатах базисы в разных точках многообразия могут быть разными. При этом в понятие многообразия, вообще говоря, не входит понятие метрики в касательном пространстве, хотя для простоты можно считать, что открытое множество возле точки многообразия задается строгим условием ограничения на евклидово расстояние от исходной точки до точки в открытой окрестности.

<sup>7</sup> Стандартный пример нехаусдорфова многообразия - три луча  $Oa, Ob, Oc$ , где точка  $O$  особая, так как по сути в



одномерном пространстве в этой точке при движении к ней по лучу  $Oc$  можно указать два пути продолжения координатной сетки, т.е. имеет место ветвление одномерной координаты. В этом случае для описания в терминах координатных сеток следует выколота точку  $O$  на луче  $Oc$  и считать, что для лучей  $Oa$  и  $Ob$  концы, т.е. точки  $O$  и  $O'$  - это разные точки. В этом случае любые непустые малые окрестности различных точек  $O$  и  $O'$  всегда пересекаются на луче  $Oc$ , где точка  $O$  выколота. Этот пример соответствует физической ситуации: траектория светового луча, который отражается и преломляется на границе двух сред.

<sup>8</sup> Простой пример неассоциативности можно легко построить, если рассмотреть множество обратимых матриц  $2 \times 2$ , например, и дополнить его новым элементом  $\mathbf{Inv}$ , а композицию элементов задать так: для двух матриц  $A$  и  $B$  ввести

уникальную композицию — натуральное умножение  $A \cdot B$ , для двух элементов  $\mathbf{Inv}$  и  $\mathbf{Inv}$  композиция равна  $\mathbf{Inv} \cdot \mathbf{Inv} = 1$ .

для матрицы  $A$  и  $\mathbf{Inv}$  неупорядоченная композиция равна обратной матрице  $\mathbf{Inv} \cdot A = (A \cdot \mathbf{Inv}) = A^{-1}$ . Для такой композиции удовлетворяются почти все пункты для определения группы: есть единица и

В принятых нами сейчас обозначениях элемент группы Ли  $\mathfrak{G}$  обозначается буквой  $g$  с индексом  $\mathbf{A}$ , который указывает координаты этого элемента,  $g_A$ .

Наличие структуры дифференцируемого многообразия, т.е. зависимость элементов группы от непрерывных параметров, позволяет определять производные по направлению. В этом отношении особую роль играют элементы группы вблизи единицы, так как в этом случае групповые законы преобразования записываются в наиболее интуитивно простом виде, хотя все устанавливаемые вблизи единицы групповые закономерности эквивалентным образом переносятся в окрестность любого другого элемента группы. В самом деле, на карте в окрестности элемента группы  $g_0$  рассмотрим координаты  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  элементов  $g_{A_0}$  и  $g_{B_0}$ . Произведение этих элементов группы  $g_{A_0} \cdot g_{B_0} = g_{C_0}$  описывается многокомпонентными функциями  $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)$  бинарной операции на координатах элементов  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  со значением набора координат элемента  $\mathbf{C}_0$ . Построим элементы группы  $g_A = g_{A_0} \cdot g_0^{-1}$  и  $g_B = g_{B_0} \cdot g_0^{-1}$ , которые в результате действия  $g_0^{-1}$  находятся вблизи единицы  $e$  и имеют на карте в окрестности единицы координаты  $\mathbf{A} = \phi_0^{-1}(\mathbf{A}_0)$  и  $\mathbf{B} = \phi_0^{-1}(\mathbf{B}_0)$ , соответственно, где  $\phi_0^{-1}$  — это взаимно однозначное гладкое преобразование координат из окрестности элемента группы  $g_0$  в координаты вблизи единицы, где закон группового преобразования координат описывается многокомпонентной функцией бинарной операции  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ . Подействуем на элементы группы в окрестности единицы  $g_A$  и  $g_B$  элементом  $g_0$  слева и построим  $g_{\tilde{A}} = g_0 \cdot g_A$  и  $g_{\tilde{B}} = g_0 \cdot g_B$ , которые находятся в окрестности  $g_0$  и имеют координаты  $\tilde{\mathbf{A}} = \phi_0(\mathbf{A})$  и  $\tilde{\mathbf{B}} = \phi_0(\mathbf{B})$  на той же карте, что и изначальные координаты  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ . Таким образом с одной стороны мы установили взаимно однозначное преобразование координат  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  в координаты  $\tilde{\mathbf{A}}$  и  $\tilde{\mathbf{B}}$  в окрестности  $g_0$ , а с другой стороны, — взаимно однозначные соответствия как координат  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ , так и координат  $\tilde{\mathbf{A}}$  и  $\tilde{\mathbf{B}}$  в окрестности  $g_0$  координатам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в окрестности единицы. Другими словами, использование любой пары координат  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ ,  $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)$  и  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  эквивалентно в смысле изоморфизма. Это значит, что и записи закона композиции элементов группы как бинарных операций на координатах в виде  $\tilde{\mathbf{C}}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$  и  $\mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , например, или  $\mathbf{C}_0(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)$  и  $\mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  также связаны этим изоморфизмом. Итак, бинарная операция на координатах  $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)$ , соответствующая групповой композиции элементов из окрестности  $g_0$  может быть описана на языке бинарной операции на координатах двух элементов группы из окрестности единицы  $\mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .

Более формальное описание эквивалентности закона группового преобразования возле различных точек группы строится с использованием специального отображения на основе понятия гомоморфизма. Напомним, что гомоморфизмом групп  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{G}'$  называют отображение  $\phi$  элементов группы  $\mathfrak{G}$  в подмножество элементов группы  $\mathfrak{G}'$ ,

$$g \xrightarrow{\phi} g' = \phi(g), \quad \forall g \in \mathfrak{G}$$

которое сохраняет групповые свойства:

$$g_1 \cdot g_2 \xrightarrow{\phi} g'_1 \cdot g'_2, \quad g \cdot e \xrightarrow{\phi} g' \cdot e', \quad g^{-1} \cdot g \xrightarrow{\phi} (g')^{-1} \cdot g'$$

обратный элементы. Но теперь расставление скобок становится существенным, так как при  $A \neq 1, B \neq 1$  замечаем, что  $\text{Inv} \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot A^{-1} \neq (\text{Inv} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot B$ .

9 Двусторонними стрелками мы связываем эквивалентные обозначения.

103 здесь мы имеем в виду, что задаются многокомпонентные функции по числу координат на карте многообразия от двух наборов координат.

<sup>11</sup> Важно отметить, что набор координат допускает отождествление с элементами векторного пространства в случае криволинейных координатных сеток, только если провести переход к касательному пространству в фиксированной точке координатной сетки, т.е. при разложении по базису векторов, которые являются касательными к линиям координатной сетки в заданной точке.

Взаимно однозначный гомоморфизм <sup>13</sup> элементов

$$g \leftrightarrow \text{Aut}_0(g) \stackrel{\text{def}}{=} g_0 \cdot g \cdot g_0^{-1}$$

называют внутренним автоморфизмом. При внутреннем автоморфизме <sup>14</sup>

$$\text{Aut}_0(e) = e$$

$$\text{Aut}_0(g^{-1} \cdot g) = \text{Aut}_0(g^{-1}) \cdot \text{Aut}_0(g) = e \Rightarrow \text{Aut}_0(g^{-1}) = (\text{Aut}_0(g))^{-1},$$

$$\text{Aut}_0(g_1 \cdot g_2) = \text{Aut}_0(g_1) \cdot \text{Aut}_0(g_2),$$

а это значит, что образ этого внутреннего автоморфизма группы  $\mathfrak{G} = \text{Aut}_0(\mathfrak{G})$  - группа. В силу взаимной однозначности соответствия элементов  $g \leftrightarrow \text{Aut}_0(g)$  имеет место взаимно однозначное соответствие исходных координат  $\mathfrak{G}$  и координат  $\tilde{\mathfrak{G}} = \text{Aut}_0(\mathfrak{G})$ . Поэтому есть также и взаимно однозначное соответствие групповой структуры  $\mathfrak{G}$  и  $\tilde{\mathfrak{G}} = \text{Aut}_0(\mathfrak{G})$ , т.е. законов композиции: многокомпонентные функции  $\mathbf{C}$  имеют взаимно однозначное соответствие с компонентными функциями  $\tilde{\mathbf{C}}$ . Именно это взаимно однозначное соответствие как между координатами, так и между явными выражениями бинарной операции на координатах, соответствующей композиции элементов группы, называют эквивалентностью групповой структуры. Мы убедились, что координатную сетку из окрестности единицы можно перенести в окрестность любого другого элемента группы так, чтобы закон группового умножения, как в окрестности единицы, так и в окрестности любого элемента, выражался в терминах координат возле единицы, т.е. функционально в одном и том же виде. Таким образом координатная структура групповой композиции элементов, т.е. бинарная операция на координатах двух элементов группы, соответствующая групповому умножению, в окрестности любой точки в группе путем изоморфизма всегда сводится к бинарной операции на координатах возле единицы.

По построению в самом общем случае гомоморфный образ группы  $\mathfrak{G}$  в  $\mathfrak{G}'$  является подгруппой в  $\mathfrak{G}'$ . При гомоморфизме, вообще говоря, прообразом единицы  $e'$  может служить подгруппа элементов  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ : действительно, композиция элементов из  $\mathfrak{H}$  переходит в единицу  $\mathfrak{G}'$ ,  $h_1 \cdot h_2 \mapsto e' \cdot e' = e'$ , т.е.  $h_1 \cdot h_2$  принадлежит опять же множеству  $\mathfrak{H}$ , а значит, имеют место все свойства, необходимые для определения группы. При этом элементы вида  $g \cdot h \cdot g^{-1}$  преобразуются при гомоморфизме согласно  $g \cdot h \cdot g^{-1} \mapsto g' \cdot e' \cdot (g')^{-1} = e'$ , т.е. также являются элементами подгруппы  $\mathfrak{H}$ ,  $\forall h \in \mathfrak{H}, g \in \mathfrak{G}$ .

В общем случае говорят, что подгруппа  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$  является инвариантной относительно внутренних автоморфизмов ] т.е. гомоморфизмов вида  $g \cdot h \cdot g^{-1}, \forall g \in \mathfrak{G}$ , или нормальной подгруппой, если  $\forall h \in \mathfrak{H}$  все образы внутренних автоморфизмов  $g \cdot h \cdot g^{-1} \in \mathfrak{H}$ .

<sup>a</sup> В отличие от внутренних произвольный автоморфизм есть гомоморфизм группы в свое подмножество, т.е. подгруппу.

Заметим, что прообраз единицы, который называют также ядром гомоморфизма группы  $\mathfrak{G}$  в  $\mathfrak{G}'$ , - это нормальная подгруппа <sup>15</sup> в группе  $\mathfrak{G}$ . Примерами нормальной подгруппы могут служить, во-первых, единица группы  $e$ , которая составляет подгруппу  $\mathfrak{E}$  из одного элемента, а во-вторых, сама группа  $\mathfrak{G}$ , все внутренние автоморфизмы которой, естественно, принадлежат ей самой по построению группы.

<sup>12</sup> Начало координат  $\mathbf{0}$  на карте возле  $g_0$  отвечает элементу  $g_0$ .

<sup>13</sup> Покажите, что если образы внутреннего автоморфизма совпадают, то и прообразы тоже совпадают. Обратите внимание на то, что элемент  $g_0$  фиксирован.

<sup>14</sup> Обратить внимание на то, что число различных внутренних автоморфизма группы задается количеством элементов в группе: для элемента  $g_k$  определен внутренний автоморфизм  $\text{Aut}_k(g) \stackrel{\text{def}}{=} g_k \cdot g \cdot g_k^{-1}$ , так что обозначение внутреннего автоморфизма  $\text{Aut}_0(g)$  указывает на вполне определенный элемент группы для этого изоморфизма:  $g_k \mapsto g_0$ .



Группа называется простой, если она не содержит нормальных подгрупп, отличных от единичной и себя самой. Группа называется полупростой, если она не содержит абелевых нормальных подгрупп, но в полупростой группе может быть неабелева инвариантная подгруппа, которая не совпадает с самой группой. Для полупростой группы Ли нормальная подгруппа, отличная от единицы, также является группой Ли 16

### Киселев-2022-

4. Рассмотрите трансляции на плоскости. Покажите, что они образуют абелеву группу. Найдите все нормальные подгруппы этой группы.

Взаимно однозначный гомоморфизм называют изоморфизмом. В случае изоморфизма прообраз единицы содержит единственный элемент - единицу, а значит, все групповые свойства образа и прообраза изоморфизма абсолютно эквивалентны.

Итак, мы установили, что структура группы Ли, т.е. свойства композиции, вблизи единицы изоморфна ее структуре в окрестности любого другого элемента группы.

Остановимся теперь подробнее на свойствах группы Ли в окрестности единицы, т.е. на свойствах бинарной операции, задающей композицию в терминах координат элементов группы. Итак, по определению для элементов группы бесконечно мало отличающихся от единиц <sup>17</sup> имеет место описание композиции двух элементов многокомпонентными функциями бинарной операции

$$g_X \cdot g_A \mapsto C^\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{A}) \leftrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{A})$$

принимая значения в  $\mathbb{R}^{N_G}$ , причем композиция с единичным элементом, имеющим координату  $\mathbf{0}$ ,

$$g_X \cdot e = g_X \mapsto \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{0}) = \mathbf{X}, \quad e \cdot g_A = g_A \mapsto \mathbf{C}(\mathbf{0}, \mathbf{A}) = \mathbf{A}$$

откуда

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \mathbf{X} + \mathbf{A} + c_{\alpha\beta} X^\alpha A^\beta (1 + \mathcal{O}(\mathbf{A}, \mathbf{X})).$$

### Киселев-2022-

5. Объясните, почему в законе группового преобразования координат возле единичного элемента  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{A})$  нет вкладов, квадратичных только по  $\mathbf{X}$  и квадратичных только по  $\mathbf{A}$ .

Согласно (I.1.7) введем многокомпонентное поле  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{A}) - \mathbf{X}$$

<sup>15</sup> Теория групп достаточно полно излагается в учебнике ван дер Вардена 5, к которому и следует обратиться заинтересованному читателю, так что мы не будем здесь углубляться в детали, вводя понятия смежных классов, факторгрупп и т.п.

<sup>16</sup> Инвариантная подгруппа может, вообще говоря, оказаться не группой Ли, а дискретной группой, на которой невозможно ввести взаимно однозначное соответствие между открытой областью в группе и открытой областью координат, т.е. такая группа будет включать в себя счетное (часто конечно счетное) число изолированных элементов. Например, в группе с матричным умножением элементы  $\mathbb{1}$  и  $-\mathbb{1}$  образуют инвариантную подгруппу из 2-х элементов, и эта дискретная подгруппа не является группой Ли.

<sup>17</sup> Термин «бесконечно малый» в научной литературе также используется в варианте «инфинитезимальный». При описании окрестности единицы группы Ли как гладкого многообразия это понятие подразумевает, что координатная карта, которая содержит единичный элемент группы, во-первых, может быть сколь угодно малой в смысле открытой области евклидова пространства, а во-вторых, координата единицы соответствует началу отсчета координат на этой карте, т.е. векторному нулю пространства параметров  $\mathbf{0}$ .

которое по построению удовлетворяет условию

$$\mathbf{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{A}$$

В этой книге мы будем рассматривать компоненты координат точки (элемента группы Ли) как компоненты вектора, если в согласии с принятой в математике терминологией

- i. для какого-либо элемента группы Ли на координатной сетке введены базисные векторы, которые определены как касательные к линиям координатной сетки в этой точке, так что линейные комбинации этих базисных векторов образуют векторное пространство, которое называется касательным, с началом отсчета в выбранном элементе группы Ли,
- ii. координаты близлежащих точек относительно координат начала отсчета, т.е. относительно выбранной начальной точки, рассматриваются как коэффициенты разложения вектора по такому базису.

Эти положения проиллюстрированы на рис. 1.1 для малой окрестности единичного элемента  $e$  группы Ли с двумерной картой, где показана точка  $\mathbf{A}$  и вектор  $\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{A}$  в касательном пространстве единицы. На этом примере поясним, что в окрестности групповой единицы с координатами  $(0,0)$  мы ввели два эквивалентных описания группового элемента. Во-первых,  $g_A$  - элемент группы с двухкомпонентными координатами  $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ . Во-вторых, введение базиса касательных векторов координатной сетки в точке  $(0,0)$  позволяет определить вектор в касательном пространстве групповой единицы согласно сформулированным выше правилам:

$$\mathbf{a} = \epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2 \longleftrightarrow (A_1, A_2) \longleftarrow g_A,$$

так что элемент группы  $g_A$  можно также обозначать как  $g_a$ , тем самым указывая вектор в касательном пространстве групповой единицы, построенный по координатам точки элемента  $g_A$ . В итоге, для группового элемента  $g_A$  с координатами  $\mathbf{A}$  на карте в окрестности групповой единицы допустимо эквивалентное обозначение с использованием маркера вектора  $\mathbf{a}$ , т.е.  $g_a \equiv g_A$ .

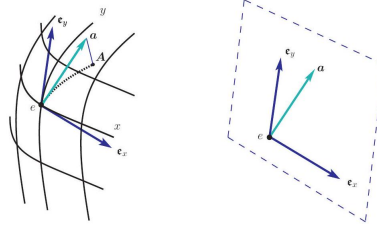


Рис. 1.1: Координатная сетка двумерной карты  $(x, y)$  возле групповой единицы  $e$ . Базис  $(\epsilon_x, \epsilon_y)$  в касательном пространстве возле единицы, построенный для заданной координатной сетки. Точка  $\mathbf{A}$  в координатной сетке и ее образ  $\mathbf{a}$  в касательном пространстве возле единицы. Справа для наглядности изображена только касательная плоскость возле групповой единицы.

В рамках подобной конструкции в каждой точке координатной сетки определен свой базис векторного пространства, которое называется касательным в этой точке, а координаты близлежащего элемента группы отвечают вектору в касательном пространстве. Важно, что при замене базиса, которая возникает при переходе от одной координатной сетки к другой возле рассматриваемой точки, индуцируется

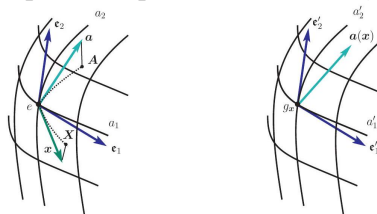


Рис. 1.2: Преобразование вектора  $\mathbf{a}$  из касательного пространства групповой единицы в вектор  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  в касательном пространстве элемента  $g_{\mathbf{x}}$ .

замена базиса в касательном пространстве к этой точке, что определяет и формулу замены компонент векторов при переходе от одного базиса к другому, т.е. закон преобразования векторов.

Тогда в касательном пространстве элемента группы  $g_{\mathbf{x}}$  с координатами  $\mathbf{x}$  на координатной сетке возле групповой единицы векторное поле  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  определяется как линейное преобразование вектора  $\mathbf{a}$  в касательном пространстве единицы  $e$  группы Ли в вектор касательного пространства элемента  $g_{\mathbf{x}}$  при действии группового закона преобразования (I.1.7), в котором учитываются только вклады, линейные по векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{x}$  в касательном пространстве групповой единицы:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} + c_{\alpha\beta} x^{\alpha} a^{\beta}$$

В математической литературе для векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  вводится специальный термин - левоинвариантное поле - с целью особо подчеркнуть то, что это поле строится в терминах групповой композиции, в которой элемент  $g_{\mathbf{x}}$  стоит слева от элемента  $g_{\mathbf{a}}$ . Специальный термин необходим, потому что в касательном пространстве в точке  $\mathbf{x}$  могут быть определены разные векторные поля  $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ , но только одно из этих полей задано линеаризацией бинарной функции групповой композиции и отображает вектор  $\mathbf{a}$  из касательного пространства групповой единицы в вектор  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  в касательном пространстве группового элемента  $g_{\mathbf{x}}$ . Говоря о поле  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , мы имеем в виду, что аргумент этого поля  $\mathbf{x}$  может принимать разные значения, определяя множество векторов, каждый из которых лежит в своем касательном пространстве в зависимости от точки  $\mathbf{x}$ .

Итак, вектор  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , т.е. значение левоинвариантного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  при фиксированном значении его аргумента  $\mathbf{x}$ , лежит в касательном пространстве группового элемента с координатами  $\mathbf{x}$ , которые указаны как вектор в касательном пространстве групповой единицы (см. рис. 1.2). Поэтому станем говорить о точке касательного пространства, которая указана вектором в этом касательном пространстве, причем в каждой такой точке  $\mathbf{x}$ , которая обозначает и координаты группового элемента  $g_{\mathbf{x}}$ , есть свое касательное пространство - касательное пространство элемента  $g_{\mathbf{x}}$ . В частности, вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{0})$  лежит в касательном пространстве единичного элемента группы, так как единица по построению имеет координату, равную нулю, поэтому можно говорить о векторе  $\mathbf{a}(\mathbf{0})$ , который лежит в касательном пространстве точки  $\mathbf{0}$ .

Подчеркнем, что в формуле преобразования (I.1.10) для векторов касательных пространств исключены нелинейные члены по координатам элементов группы. Этот переход от группового преобразования многокомпонентных координат, которые обозначаются заглавными буквами, к преобразованиям векторов касательного пространства мы условимся показывать в формулах с помощью символа  $\text{tangent}$ . Например,

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{A}) - \mathbf{X} \stackrel{\text{tangent}}{\longmapsto} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} + c_{\alpha\beta} x^{\alpha} a^{\beta},$$

Поясним также для чего при определении многокомпонентного поля координат  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$  в формуле (I.1.8), которую мы продублировали строчкой выше, был исключен так называемый «аффинный сдвиг», т.е. проведено вычитание координат  $\mathbf{X}$ . Как следует из приведенных нами формул (I.1.7) - (I.1.10), это вычитание аффинного сдвига из координат  $\mathbf{C}$ , которые получаются при действии группового преобразования  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ , позволяет точке начала отсчета из касательного пространства групповой единицы, т.е. вектору  $\mathbf{0}$ , поставить в соответствие не координаты  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{0}) = \mathbf{X}$ , а точку начала

отсчета в касательном пространстве точки  $\mathbf{x}$ , которое также имеет нулевые координаты в касательном пространстве  $g_{\mathbf{x}}$ , так как левоинвариантное векторное поле  $\mathbf{0}(\mathbf{x})$ , построенное как образ нулевого вектора  $\mathbf{0}$  в касательном пространстве групповой единицы, само тождественно равно нулевому вектору в точке  $\mathbf{x}$ .

Переход от соотношений в терминах координатных сеток к соотношениям в терминах касательных пространств мы помечаем в равенствах маркером `tangent`. Введенная нами процедура тангенциального подхода в исследовании групп Ли определяет линейные преобразования из одного векторного пространства в другое. Свойства этого линейного преобразования задаются групповой композицией в группе Ли. Именно эти свойства - предмет нашего исследования. Они важны, так как мы можем говорить и о решении обратной задачи: изучив все допустимые свойства линейных преобразований касательных пространств, мы сможем говорить о всех допустимых свойствах групп Ли. Сама идея исследования билинейных преобразований в касательном пространстве является центральной: это основа концепции построения алгебры Ли для группы Ли.

Особо подчеркнем, что введенное нами левоинвариантное векторное поле (I.1.10) линейно по координатам в касательном пространстве групповой единицы. В тангенциальном подходе с использованием определения левоинвариантного поля имеют место соотношения

$$g_{\mathbf{x}} \cdot g_{\mathbf{a}} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{\mathbf{x}} \cdot g_{\mathbf{a}} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{\mathbf{x}+\mathbf{a}(\mathbf{x})}$$

Свойство линейности по координатам в касательном пространстве групповой единицы означает, что

$$g_{\mathbf{y}} \cdot g_{\mathbf{x}} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{\mathbf{y}+\mathbf{x}(\mathbf{y})} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{\mathbf{y}+\mathbf{x}}$$

так как для координат в касательном пространстве групповой единицы

$$\mathbf{x}(\mathbf{y})|_e = \mathbf{x}.$$

Это становится очевидным в предельных случаях, когда координаты в касательном пространстве групповой единицы пропорциональны,  $\mathbf{y} = \epsilon \mathbf{x}$ , а нелинейные вклады не дают вклада в соотношения для касательного пространства. В частности, при  $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$

$$g_{-\mathbf{x}} \cdot g_{\mathbf{x}} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-\mathbf{x}+\mathbf{x}} = e$$

что согласуется со стандартными соотношениями

$$g_{\mathbf{x}} \cdot g_{\mathbf{x}}^{-1} = e = g_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot g_{\mathbf{x}}$$

если положить, что

$$g_{\mathbf{x}}^{-1} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-\mathbf{x}}$$

Тогда левоинвариантность векторного поля означает, что левоинвариантное поле, полученное при рассмотрении произведения групповых элементов  $(g_{\mathbf{y}} \cdot g_{\mathbf{x}})$  так, что

$$(g_{\mathbf{y}} \cdot g_{\mathbf{x}}) \cdot g_{\mathbf{a}} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{\mathbf{y}+\mathbf{x}} \cdot g_{\mathbf{a}} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{\mathbf{y}+\mathbf{x}+\mathbf{a}(\mathbf{y}+\mathbf{x})},$$

• это поле  $\mathbf{a}(\mathbf{y} + \mathbf{x})$ , которое в точности совпадает с левоинвариантным полем, которое получается при последовательном построении поля:

$$g_{\mathbf{y}} \cdot (g_{\mathbf{x}} \cdot g_{\mathbf{a}}) \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{\mathbf{y}} \cdot g_{\mathbf{x}+\mathbf{a}(\mathbf{x})} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{\mathbf{y}+\mathbf{x}+\mathbf{a}(\mathbf{y}+\mathbf{x})}$$

где на последнем шаге вывода равенства использовалось свойство линейности по координатам. Итак, определение левоинвариантного поля, как вектора в касательном пространстве, который линейно зависит от координат в касательном пространстве групповой единицы, согласовано с ассоциативностью групповой композиции:

$$(g_y \cdot g_x) \cdot g_a = g_y \cdot (g_x \cdot g_a)$$

Формализм левоинвариантных векторных полей в касательном пространстве, т.е. рассмотрение отображений векторов из касательного пространства одного группового элемента в касательное пространство соседнего группового элемента становится более развернутым и понятным, если рассмотреть производную тензорной величины по направлению или производную Ли.

Итак, групповая композиция задает левоинвариантные поля, например, поле  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  (I · 1.10, которое лежит в касательном пространстве точки  $\mathbf{x}$ . Для того, чтобы описать свойства левоинвариантного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , необходимо сравнить его с другим полем  $\mathbf{a}'(\mathbf{x})$  в том же касательном пространстве так, чтобы можно было определить, насколько левоинвариантное поле  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  отличается от исходного вектора  $\mathbf{a}$ , заданного в касательном пространстве групповой единицы. С геометрической точки зрения для этого необходимо провести параллельный перенос исходного вектора  $\mathbf{a}$  из касательного пространства групповой единицы в касательный вектор в точке  $\mathbf{x}$ : вектор  $\mathbf{a}_{\parallel}(\mathbf{x})$ , который и считать вектором  $\mathbf{a}'(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{a}_{\parallel}(\mathbf{x})$ , выбранным нами для сравнения с левоинвариантным вектором  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ .

В наиболее общем случае рассмотрим две точки, отвечающих векторам  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$  в касательном пространстве групповой единицы, и два касательных пространства в этих точках и определим конструкцию параллельного переноса на основе следующих геометрически обоснованных построений. Пусть  $\mathbf{e}_{\alpha}$  образуют базис в касательном пространстве исходной точки  $\mathbf{x}$ , построенный как набор касательных векторов к линиям координатной сетки в этой исходной точке, а  $\mathbf{e}'_{\beta}$  - таким же способом построенный базис в касательном пространстве другой точки  $\mathbf{x}'$  (штрихованной), так что вектор  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  раскладывается в касательном пространстве исходной точке по базису  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = b^{\alpha}(\mathbf{x})\mathbf{e}_{\alpha}$ , а параллельно перенесенный вектор  $\mathbf{b}_{\parallel}(\mathbf{x}')$  раскладывается по штрихованному базису  $\mathbf{b}_{\parallel}(\mathbf{x}') = b_{\parallel}^{\beta}(\mathbf{x}')\mathbf{e}'_{\beta}$ . В частности, рассмотрим векторы дифференциалов координат в разных точках координатной сетки, а именно, дифференциалы координат в исходной точке:

$$d\mathbf{x} = dx^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$$

дифференциалы координат, параллельно перенесенные из исходной точки в штрихованную точку  $\mathbf{x}'$ :

$$d\mathbf{x}_{\parallel} = dx_{\parallel}^{\beta}\mathbf{e}'_{\beta},$$

дифференциалы координат в штрихованной точке  $\mathbf{x}'$ :

$$d\mathbf{x}' = dx'^{\beta}\mathbf{e}'_{\beta},$$

и постулируем, что, во-первых, вектор параллельно перенесенных дифференциалов - это тот же вектор дифференциалов

$$d\mathbf{x}_{\parallel} = d\mathbf{x}$$

а, во-вторых, по построению координатной сетки параллельный перенос дифференциалов координат в штрихованную точку задает дифференциалы координат в штрихованной точке

$$d\mathbf{x}_{\parallel} = d\mathbf{x}'$$

Тогда покомпонентная запись в двух базисах дает следующие равенства:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{x}' \Rightarrow dx^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = dx'^{\beta} \mathbf{e}'_{\beta} \Rightarrow dx^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} \mathbf{e}'_{\beta} = dx^{\alpha} \Lambda_{\bullet\alpha}^{\beta} \mathbf{e}'_{\beta}$$

Здесь мы ввели матрицу перехода, которая определяется частными производными

$$\Lambda_{\bullet\alpha}^{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \equiv \partial_{\alpha} x'^{\beta}$$

и задается преобразованием для дифференциалов координат

$$dx'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta}$$

если координаты штрихованной точки  $\mathbf{x}'$  задаются в виде многокомпонентной функции от вектора  $\mathbf{x}$ . В частности, при малом сдвиге в касательном пространстве в направлении векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  имеем

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x})dt$$

с малым параметром сдвига  $dt \rightarrow 0$ . В этом случае согласно (I.1.13 в линейном приближении по  $dt$  матрица преобразований компонент вектора равна

$$\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha} = \partial_{\beta} x'^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + dt \partial_{\beta} a^{\alpha}(\mathbf{x}),$$

Возвращаясь к построению параллельного переноса, обратим внимание на то, что последнее равенство в формуле (I.1.11), определяет закон матричного преобразования базиса при переходе из касательного пространства исходной точки в касательное пространство штрихованной точки

$$\mathbf{e}_{\alpha} = \Lambda_{\bullet\alpha}^{\beta} \mathbf{e}'_{\beta}$$

Заметим, что согласно I.1.12 компоненты дифференциалов преобразуются как компоненты контравариантного вектора, что согласуется с преобразованием базисных векторов (I.1.15), номера которых преобразуются как компоненты ковектора, т.е. матрицей, обратной к матрице преобразований компонент дифференциалов от исходных к штрихованным,

$$\mathbf{e}'_{\beta} = (\Lambda^{-1})_{\bullet\beta}^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$$

После этих замечаний естественно положить, что параллельный перенос вектора  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  означает, что после параллельного переноса вектор  $\mathbf{b}_{\parallel}(\mathbf{x}')$  - это тот же самый вектор, т.е.  $\mathbf{b}_{\parallel}(\mathbf{x}') = \mathbf{b}(\mathbf{x})$ . В компонентах

$$b_{\parallel}^{\beta} \mathbf{e}'_{\beta} = b^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = b^{\alpha} \Lambda_{\bullet\alpha}^{\beta} \mathbf{e}'_{\beta}, \Rightarrow b_{\parallel}^{\beta}(\mathbf{x}') = \Lambda_{\bullet\alpha}^{\beta} b^{\alpha}(\mathbf{x}),$$

а для сдвига координат по направлению поля  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  согласно (I.1.13 и (I.1.14

$$b_{\parallel}^{\beta}(\mathbf{x}') = b^{\beta}(\mathbf{x}) + b^{\alpha}(\mathbf{x}) dt \partial_{\alpha} a^{\beta}(\mathbf{x}).$$

Теперь мы можем определить различие левоинвариантного поля  $\mathbf{b}(\mathbf{x}')$ , заданного согласно групповой композиции в касательном пространстве точки  $\mathbf{x}'$  так, как это было описано раньше в формуле (I.1.10, от вектора  $\mathbf{b}_{\parallel}(\mathbf{x}')$ , полученного параллельным

переносом по направлению левоинвариантного векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , и ввести производную вектора  $\mathbf{b}$  по направлению при сдвиге (I.1.13, т.е. производную Ли

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a b^\alpha(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \{b^\alpha(\mathbf{x}') - b_\parallel^\alpha(\mathbf{x}')\} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \{b^\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x})dt) - b_\parallel^\alpha(\mathbf{x}')\} = \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \{(b^\alpha(\mathbf{x}) + a^\beta(\mathbf{x})dt\partial_\beta b^\alpha(\mathbf{x})) - (b^\alpha(\mathbf{x}) + b^\beta(\mathbf{x})dt\partial_\beta a^\alpha(\mathbf{x}))\} \\ &= a^\beta(\mathbf{x})\partial_\beta b^\alpha(\mathbf{x}) - b^\beta(\mathbf{x})\partial_\beta a^\alpha(\mathbf{x})\end{aligned}$$

где сначала производится вычитание компонент двух векторных полей при одном и том же значении набора аргументов (со штрихом). Так как вычитание компонент вектора производится в одной и той же точке векторного пространства координат, т.е. в одном и том же базисе, то такая разность - тензорная величина, которая имеет закон преобразования вектора при сдвинутом согласно (I.1.13) значении аргумента (в заданной точке векторного пространства координат со штрихом).

Важно подчеркнуть, что при вычислении производной по направлению мы рассматриваем разность значений двух полей в одной и той же точке касательного векторного пространства координат (со штрихом), которая получается при бесконечно малом сдвиге исходной точки координатного пространства по направлению векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ . Но при  $dt \rightarrow 0$  результат вычисления производной по направлению относится к исходному набору координат вектора  $\mathbf{x}$ , т.е. к точке касательного пространства  $\mathbf{x}$ : это важно, поскольку в каждой точке векторного пространства можно задать преобразование базиса именно в этой точке, а это значит, что преобразование тензорных величин, т.е. их компонент, зависит от точки, где задан тензор, в частности, вектор или скаляр<sup>18</sup> со значением исходного скалярного поля  $f$  при исходных значениях аргумента  $\mathbf{x}$ ,

$$f'(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x})$$

Такое преобразование значения скалярной функции  $f$  в точке  $\mathbf{x}$  в значение скалярной функции  $f'$  в точке  $\mathbf{x}'$  согласно I.1.17 называют также параллельным переносом скаляра из точки  $\mathbf{x}$  в точку  $\mathbf{x}'$ :

$$f_\parallel(\mathbf{x}') \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{x})$$

Поэтому при малом сдвиге в касательном пространстве в направлении векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  согласно (I.1.13) производная скаляра по направлению  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  задается величиной

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a f(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}') - f_\parallel(\mathbf{x}')}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}') - f'(\mathbf{x}')}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})}{dt} = \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x})dt) - f(\mathbf{x})}{dt} = a^\alpha \partial_\alpha f(\mathbf{x})\end{aligned}$$

где мы сначала провели вычитание значений двух скалярных функций при одном и том же значении аргумента (со штрихом), а затем воспользовались тем, что значение новой скалярной функции, полученной при параллельном переносе при сдвинутом значении аргумента согласно (I.1.13, равно значению исходной скалярной функции при исходном значении аргумента (без штриха), а затем ввели символ частной производной

---

<sup>18</sup> Для сравнения рассмотрим определение производной по направлению для скалярной функции  $f \in \mathbb{R}$  от вектора  $\mathbf{x}$ :  $f(\mathbf{x})$ . Скаляр или, как говорят, скалярное поле при замене координат в векторном пространстве  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$  преобразуется как инвариант: значение нового скалярного поля  $f'$  (со штрихом) при штрихованных значениях аргумента  $\mathbf{x}'$  совпадает

функции  $\partial_\alpha$  по компоненте вектора с номером альфа в аргументе этой функции, пометив её ковариантным (нижним) индексом,

$$\partial_\alpha f(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f(\mathbf{x})$$

Саму компоненту вектора координат мы помечаем контравариантным (верхним) индексом, так как закон преобразования компонент контравариантной величины отличен от закона преобразования компонент ковариантной величины, и мы специально указываем это в стандартных индексных обозначениях.

Подчеркнем, что разность векторов, которые относятся к двум разным точкам координатного пространства, т.е. лежат в разных касательных пространствах, не является тензорной величиной, так как каждый из таких векторов преобразуется, вообще говоря, разными матрицами, которые относятся к разным точкам векторного пространства координат: базисы в различных точках векторных пространств, касающихся рассматриваемого многообразия в разных точках, могут преобразовываться по разным линейным законам, зависящим от точки касания. Поэтому при определении производной вектора  $\mathbf{b}$  по направлению  $\mathbf{a}$  мы брали разность векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{b}_\parallel$ , заданных в одной и той же точке  $\mathbf{x}'$ , т.е. величин, которые преобразуются по одному и тому же закону при произвольных обратимых заменах базиса в касательном пространстве, которое относится к точке  $\mathbf{x}'$ , а значит, результирующая производная также является вектором в том же касательном пространстве, так что при  $dt \rightarrow 0$  результат вычисления производной по направлению относится к исходной точке  $\mathbf{x}$ . Эта векторная величина называется производной Ли и часто обозначается в виде скобки Ли

$$\mathcal{L}_a \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Найдем скобку Ли для введенных по закону групповой композиции (I.1.10) левоинвариантных векторных полей  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  бесконечно близко к групповой единице, когда согласно I.1.10 при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$

$$a^\alpha \partial_\alpha b^\gamma(\mathbf{x}) = a^\alpha \partial_\alpha (b^\gamma + c_{\alpha'\beta}^\gamma x^{\alpha'} b^\beta) = a^\alpha c_{\alpha\beta}^\gamma b^\beta, \quad b^\alpha \partial_\alpha a^\gamma(\mathbf{x}) = b^\alpha c_{\alpha\beta}^\gamma a^\beta,$$

а значит, в касательном пространстве в нуле

$$\mathcal{L}_a \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = c_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta - c_{\alpha\beta} a^\beta b^\alpha = f_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$$

где мы ввели структурные константы

$$f_{\alpha\beta}^\gamma = c_{\alpha\beta}^\gamma - c_{\beta\alpha}^\gamma, \quad f_{\alpha\beta}^\gamma = -f_{\beta\alpha}^\gamma,$$

которые задаются законом композиции в группе Ли и являются антисимметричными по перестановке ковариантных (нижних) индексов, а следовательно,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}], \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_a \mathbf{b} = -\mathcal{L}_b \mathbf{a}$$

т.е. скобка Ли антисимметрична по перестановке своих аргументов. Очевидно также, что скобка Ли по построению линейна по каждому из своих аргументов.

Итак, производная Ли I.1.19 в касательном пространстве единицы группы Ли - это скобка Ли (I.1.20), которая задает линейно зависящее от направления  $\mathbf{a}$  линейное преобразование векторов касательного пространства  $\mathbf{b}$  через структурные константы группы Ли (I.1.21). Как мы уже говорили чуть выше, исследование свойств этого линейного преобразования позволяет классифицировать свойства структурных констант группы Ли. В этом смысле нам необходимо установить свойства скобки Ли.



**Киселев-2022-**

6. Найдите групповые константы для группы поворотов 3-мерного евклидова пространства  $SO(3)$ .

С той же точностью линейных преобразований в касательном пространстве возле координаты единичного элемента, которая полагается равной нулю, т.е. во втором порядке малости отклонения от координат единичного элемента, но в линейном приближении по каждому из векторов в касательном пространстве находим

$$C(a, b) - C(b, a) \stackrel{\text{tangent}}{=} c(a, b) - c(b, a) = f_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = [a, b], \quad a, b \rightarrow 0$$

Это соотношение допускает элементарную аналитическую интерпретацию. Сначала установим, что при бесконечно малых преобразованиях координаты обратного элемента  $g_u^{-1}$  в касательном пространстве даются просто компонентами вектора  $-u$ , т.е.

$$g_u^{-1} \equiv g_{\tilde{u}} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-u}$$

В самом деле, так как  $g_u \cdot g_u^{-1} \equiv g_u \cdot g_{\tilde{u}} = g_{\tilde{u}} \cdot g_u = e$ , следовательно,  $C(u, \tilde{u}) = C(\tilde{u}, u) = 0$ , где координаты обратного элемента  $\tilde{u} = \tilde{u}(u)$  так, что  $\tilde{u}(0) = 0$ , в то время как с точностью до второго порядка малости по  $u$

$$C(u, -u) = u - u + \mathcal{O}(u^2) = 0 + \mathcal{O}(u^2),$$

а поскольку в касательном пространстве рассматриваются только линейные преобразования, то

$$C(u, -u) \stackrel{\text{tangent}}{=} u - u = 0$$

Условие инфинитезимальности координат элементов группы соответствует понятию касательного пространства к точке многообразия, в данном случае это касательное пространство возле единичного элемента группы. Тогда в касательном пространстве единичного элемента группы Ли с заданной точностью второго порядка малости по координатам элементов  $a, b \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} g_a \cdot g_b &= g_{C(a,b)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{c(b,a)} \mapsto c(a, b), \\ (g_b \cdot g_a)^{-1} &= g_{C(b,a)}^{-1} = g_{-C(b,a) + \mathcal{O}(C^2(b,a))} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-c(b,a)} \mapsto -c(b, a), \end{aligned}$$

а соотношение (I.1.23) отвечает композиции

$$\begin{aligned} (g_b \cdot g_a)^{-1} \cdot g_a \cdot g_b &= g_{C(b,a)}^{-1} \cdot g_{C(a,b)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-c(b,a)} \cdot g_{c(a,b)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{-c(b,a) + c(a,b)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]} \text{ или} \\ g_a \cdot g_b \cdot (g_b \cdot g_a)^{-1} &= g_{C(a,b)} \cdot g_{C(b,a)}^{-1} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{c(a,b)} \cdot g_{-c(b,a)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{c(a,b) - c(b,a)} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]}, \end{aligned}$$

где отличие между двумя выражениями может возникнуть только в третьем порядке по малости координат, или с той же точностью второго порядка при  $a, b \rightarrow 0$ , но в любом

<sup>19</sup> Вдумчивому читателю мы предлагаем самостоятельно поразмыслить над вопросом о том, что скобка Ли, вычисленная в касательном пространстве не возле групповой единицы, а в касательном пространстве возле любого другого элемента группы, т.е. не при  $x \rightarrow 0$ , выражается через левоинвариантные поля  $a(x)$  и  $b(x)$  с теми же структурными константами  $f_{\alpha\beta}^\gamma$ . Этот факт - один из форматов утверждения об эквивалентности групповой структуры группы Ли в окрестностях разных групповых элементов. При этом мы уже качественно описали этот факт при введении бинарной операции группового умножения так, что координатные векторы из окрестности группового элемента изоморфно переносятся в координатные векторы в окрестности групповой единицы.

случае только при нелинейных преобразованиях, т.е. вне рамок тангенциального подхода. В итоге в касательном пространстве имеет место равенство

$$g_a \cdot g_b \stackrel{\text{tangent}}{=} g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]}.$$

Итак, соотношение (I.1.23) определяет разность касательных векторов, которая задает элемент группы, построенный в виде композиции двух элементов группы в прямом и в обратном порядке в окрестности единицы,

$$g_{[a,b]} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_b^{-1} \cdot g_a^{-1} \cdot g_b \cdot g_a$$

Отметим, что точное соотношение имеет вид

$$g_a \cdot g_b = g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]} + \mathcal{O}(3_{ab}),$$

где  $\mathcal{O}(3_{ab})$  обозначает векторную функцию третьего или более высокого порядка малости по векторам касательного пространства, которая нелинейна хотя бы одному из аргументов, так что в тангенциальном подходе этот вклад не имеет значения.

Итак, мы показали, что интерпретация соотношений (I.1.20)-(I.1.23) для производной и скобки Ли может быть сформулирована в терминах групповой композиции двух элементов группы вблизи единицы: групповое произведение двух элементов группы выражается через групповое произведение тех же элементов в обратном порядке, умноженное на групповой элемент, координаты которого в касательном пространстве групповой единицы задаются скобкой Ли векторов координат двух рассматриваемых элементов группы.

Соотношение группового преобразования (I.1.26) позволяет записать внутренний автоморфизм группового элемента  $g_b$  в окрестности групповой единицы

$$\text{Aut}_a(g_b) = g_a \cdot g_b \cdot g_a^{-1}$$

в виде

$$g_a \cdot g_b \cdot g_a^{-1} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]} \cdot g_a^{-1} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_b \cdot g_{[a,b]} \cdot g_a \cdot g_a^{-1} = g_b \cdot g_{[a,b]} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{b+[a,b]}.$$

Это означает, что внутренний изоморфизм можно трактовать как линейное преобразование в касательном пространстве групповой единицы, а именно для бесконечно малого преобразования с  $\mathbf{a} \mapsto \epsilon \mathbf{a}$  в пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$  получаем

$$\mathbf{b} \xrightarrow{\text{Aut}} \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \epsilon [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

т.е. в компонентах

$$b'^\gamma = b^\gamma + \epsilon f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha b^\beta = (\mathbb{1} + \epsilon f_a)_{\bullet\beta}^\gamma b^\beta$$

где матрица

$$(f_a)_{\bullet\beta}^\gamma = f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha$$

В итоге, среди линейных преобразований в касательном пространстве групповой единицы в частности можно выделить специальные линейные преобразования, связанные со скобкой Ли группы, которые согласно I. 1.31 задают внутренние автоморфизмы группы Ли. Эта связь групповых преобразований с линейными преобразованиями является важной, как мы увидим при дальнейшем построении свойств алгебр Ли и представлений групп Ли.

Таким образом, скобка Ли I.1.20) задается законом композиции в группе Ли (I.1.7), и она представляет из себя билинейное векторное преобразование двух векторов в касательном пространстве возле единичного элемента группы. Результат этого билинейного преобразования, рассматриваемого как действие линейного преобразования, линейно зависящего от первого вектора в билинейной форме, на второй вектор в билинейной форме, принадлежит тому же касательному пространству, которое обозначают малой готической буквой, одноименной с обозначением группы Ли, т.е., например, группе  $\mathfrak{G}$  отвечает касательное пространство  $\mathfrak{g}$ .

Наряду с антисимметрией скобки Ли, которая следует из построения производной по направлению и того факта, что произведения двух элементов группы в прямом и обратном порядке отличаются на элемент группы, определяемый, как мы установили в (I.1.26), скобкой Ли, другое важнейшее свойство скобки Ли устанавливается из факта ассоциативности композиции в группе. Действительно, воспользуемся (I.1.26) в произведении  $(g_a \cdot g_b) \cdot g_c$ , последовательно меняя порядок следования элементов на обратный с точностью до линейных преобразований в касательном пространстве возле единицы в группе Ли

$$\begin{aligned} (g_a \cdot g_b) \cdot g_c &\stackrel{\text{tangent}}{=} (g_b \cdot g_a) \cdot (g_{[a,b]} \cdot g_c) \stackrel{\text{tangent}}{=} g_b \cdot (g_a \cdot g_c) \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} (g_b \cdot g_c) \cdot g_a \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot g_b \cdot (g_{[b,c]} \cdot g_a) \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot g_b \cdot g_a \cdot g_{[b,c]} \cdot g_{[[b,c],a]} \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} g_a \cdot (g_b \cdot g_c) &\stackrel{\text{tangent}}{=} (g_a \cdot g_c) \cdot g_b \cdot g_{[b,c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot g_a \cdot (g_{[a,c]} \cdot g_b) \cdot g_{[b,c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot (g_a \cdot g_b) \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[[a,c],b]} \cdot g_{[b,c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} \\ &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_c \cdot g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[[a,c],b]} \cdot g_{[b,c]}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу ассоциативности из равенства (I.1.33) и (I.1.34) после сокращения на  $g_c \cdot g_b \cdot g_a$  заключаем, что

$$g_{[b,c]} \cdot g_{[[b,c],a]} \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[a,b]} \cdot g_{[[a,b],c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]} \cdot g_{[a,c]} \cdot g_{[[a,c],b]} \cdot g_{[b,c]}.$$

В этом равенстве имеются члены второго и третьего порядка малости по параметрам в касательном пространстве  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , а точнее билинейные и трилинейные векторные функции на касательном пространстве. Дальнейшие перестановки множителей приведут лишь к появлению элементов в высших степенях малости, а именно, к нелинейным функциям высшего порядка на касательном пространстве, которые не дают вклада в тангенциальном подходе, а значит, координаты записанных групповых элементов в касательном пространстве задаются выражениями

$$g_{[b,c]+[[b,c],a]+[a,c]+[a,b]+[[a,b],c]} \stackrel{\text{tangent}}{=} g_{[a,b]+[a,c]+[[a,c],b]+[b,c]},$$

откуда

$$[b, c] + [a, c] + [a, b] + [[b, c], a] + [[a, b], c] = [a, b] + [a, c] + [b, c] + [[a, c], b].$$

Но для билинейных векторных функций находим

$$[b, c] + [a, c] + [a, b] = [a, b] + [a, c] + [b, c]$$

т.е. тривиальное тождество. Для трилинейных векторных функций устанавливаем тождество

$$[[b, c], a] + [[a, b], c] = [[a, c], b]$$

так что, воспользовавшись антисимметрией скобки Ли  $[a, c] = -[c, a]$ , окончательно запишем

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$$

Это тождество Якоби для скобки Ли в касательном пространстве единичного элемента группы Ли следствие ассоциативности группы, зависящей от непрерывных параметров.

Элементарное, но важное замечание состоит в том, что в касательном пространстве выбор координатной сетки, естественно, не однозначен, а следовательно, возможны замены переменных, при которых построенные нами векторные поля преобразуются как векторы, а структурные константы как тензор третьего ранга смешанного типа: дважды ковариантный по паре нижних индексов и контравариантный по верхнему. Другими словами, структурные константы группы Ли зависят от выбора координат вблизи единичного элемента, но эта зависимость определяется линейными преобразованиями в касательном векторном пространстве. При этом остаются инвариантными свойства скобки Ли, что позволяет нам сделать определение.

Векторное пространство  $\mathfrak{g}$  называется алгеброй Ли, если в нем

- задана скобка Ли (антисимметричная билинейная композиция элементов),
- для двойных скобок Ли удовлетворяются тождества Якоби.

Итак, мы установили, что группе Ли соответствует ее алгебра Ли, в которой скобка Ли определяется структурными константами группы, т.е. законом групповой композиции

20

### 7.1.3 Representation of a Lie group and generators

В квантовой механике преобразования симметрии отвечают операторам, действующим на гильбертовом пространстве квантовых состояний <sup>21</sup>. Гомоморфизм группы на группу операторов, которые действуют на пространстве квантовых состояний, называется ее представлением. В случае изоморфизма говорят о точном представлении группы, с которым мы в дальнейшем и будем иметь дело.

В отличие от самой группы ее представление в виде операторов обладает важным отличием: для операторов имеет место не только умножение, определяемое как последовательное действие операторов на квантовые состояния, но и сложение с произвольными комплексными множителями, поскольку в базисе конечномерного гильбертова пространства, которым мы ограничиваем свое рассмотрение, операторы являются матрицами, для которых определены и матричное умножение, и матричное сложение. Поэтому возможно прямое введение производной оператора по параметру, которое отвечает рассмотренному нами выше понятию производной по направлению в касательном пространстве группы Ли.

Пусть  $T(\mathfrak{G}) = G$  - представление группы Ли:

$$g_a \xrightarrow{T} G_a$$

где индекс  $a$  указывает на координату элемента в группе Ли, а  $G_a$  соответствующий оператор с той же координатой, который действует в пространстве квантовых состояний. Точное представление означает, что единица группы взаимнооднозначно переходит в единичный оператор

$$e \xrightarrow{T} \mathbb{1}.$$

Последнее взаимно однозначное соответствие означает, что начало координат в касательном пространстве возле единицы переходит в начало координат, отвечающее тождественному оператору.

Определим генератор как производную оператора,

$$\Gamma_a \stackrel{\text{def}}{=} i \left. \frac{\partial G_a}{\partial a^\alpha} \right|_{a \rightarrow 0}$$

Значит, для бесконечно малых преобразований

$$g_a \xrightarrow{T} G_a \stackrel{\text{tangent}}{\cong} \mathbb{1} - i\Gamma_a$$

и, как обычно,  $\Gamma_a a^\alpha = \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{a} = \Gamma_a$ . Это фактически означает, что генератор определяется с точностью до фактора -  $i$  как элемент касательного пространства для оператора преобразований квантовых состояний. Тогда с тангенциальной точностью, т.е. если пренебречь нелинейными по векторам касательного пространства параметрами группы вкладами  $\Gamma_{aa} = \mathcal{O}(a^2)$  и  $\Gamma_{bb} = \mathcal{O}(b^2)$  в разложении матриц групповых преобразований по координатам в окрестности единичной матрицы, найдем, что

$$g_a \cdot g_b \xrightarrow{T} G_a \cdot G_b \stackrel{\text{tangent}}{\cong} (\mathbb{1} - i\Gamma_a)(\mathbb{1} - i\Gamma_b) = \mathbb{1} - i\Gamma_a - i\Gamma_b - \Gamma_a\Gamma_b,$$

и записанное в предыдущем параграфе равенство (I.1.26) в операторном представлении с линейной точностью по векторам касательного пространства сводится к виду

$$\begin{aligned} g_a \cdot g_b &\stackrel{\text{tangent}}{\cong} g_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]} \xrightarrow{T} G_a \cdot G_b \stackrel{\text{tangent}}{\cong} G_b \cdot G_a \cdot G_{[a,b]} \mapsto \\ &\mapsto \mathbb{1} - i\Gamma_a - i\Gamma_b - \Gamma_a\Gamma_b \stackrel{\text{tangent}}{\cong} (\mathbb{1} - i\Gamma_a - i\Gamma_b - \Gamma_b\Gamma_a)(\mathbb{1} - i\Gamma_{[a,b]}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{1} - i\Gamma_a - i\Gamma_b - \Gamma_a\Gamma_b = \mathbb{1} - i\Gamma_a - i\Gamma_b - \Gamma_b\Gamma_a - i\Gamma_{[a,b]} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{1} - (\Gamma_a\Gamma_b - \Gamma_b\Gamma_a) = \mathbb{1} - i\Gamma_{[a,b]} \Rightarrow i\Gamma_{[a,b]} = [\Gamma_a, \Gamma_b]. \end{aligned}$$

В конце этой формулы мы ввели стандартное обозначение для коммутатора двух операторов,

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_a\Gamma_b - \Gamma_b\Gamma_a$$

Для представления группы

$$\Gamma_{[a,b]} = \Gamma_\gamma[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^\gamma = \Gamma_\gamma f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha b^\beta, \quad [\Gamma_a, \Gamma_b] = a^\alpha b^\beta [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta],$$

так что тождество (I.2.3 при произвольных малых параметрах  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \rightarrow 0$ , т.е. в логике касательного пространства сводится к следующему выражению для коммутатора генераторов преобразований

<sup>20</sup> Скобку Ли группы Ли часто называют скобкой Ли алгебры Ли.

<sup>21</sup> Здесь мы предполагаем, что читатель освоил описание группы поворотов и квантование спина, так что, опираясь на этот опыт рассмотрения группы поворотов, под гильбертовым пространством мы понимаем конечномерное векторное пространство с евклидовой нормой. Базис этого пространства состоит из общих собственных векторов нескольких эрмитово самосопряженных операторов, которые взаимно коммутируют и составляют полный набор наблюдаемых величин физической системы, а размерность гильбертова пространства  $\mathcal{D}$  определяется свойствами старшего вектора состояния - собственными значениями для наблюдаемых из полного набора наблюдаемых. В случае группы поворотов гильбертово пространство квантовых состояний со спином  $s$  имеет размерность  $\mathcal{D} = 2s + 1$ , а полный набор наблюдаемых - это квадрат спина  $s(s+1)$  и проекция спина на ось  $z$ , т.е.  $m_s$ .

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = if_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma$$

Итак, мы установили связь коммутатора генераторов групповых преобразований в пространстве квантовых состояний со структурными константами группы Ли [1.20, [1.21, которые возникли при введении скобки Ли.

Справедливость тождества Якоби для генераторов,

$$[\Gamma_a, [\Gamma_b, \Gamma_c]] + [\Gamma_b, [\Gamma_c, \Gamma_a]] + [\Gamma_c, [\Gamma_a, \Gamma_b]] = 0$$

циклическая перестановка порядка следования элементов в двойных коммутаторах, элементарно следует из ассоциативности умножения операторов (матриц) при раскрытии входящих в это равенство коммутаторов <sup>22</sup>

Следовательно, генераторы, которые образуют векторное пространство, в силу того, что их можно складывать с произвольными комплексными коэффициентами, согласно (1.2.6) наделены скобкой Ли (коммутатор антисимметричен, а его результат принадлежит линейной оболочке генераторов), и эта скобка удовлетворяет тождеству Якоби. Поэтому они реализуют представление алгебры Ли.

### Киселев-2022-

7. Рассмотрите генератор группы поворотов на плоскости и найдите его собственные векторы. Запишите матрицу конечных поворотов в терминах генератора и единичной матрицы и ее действие на собственные векторы. Убедитесь, что действие группы  $SO(2)$  на собственные векторы с нормой  $|\mathbf{r}|$  эквивалентно преобразованию группы  $U(1)$  на комплексных числах  $z$  с модулем  $|z| = |\mathbf{r}|$  и комплексно сопряженных числах  $\bar{z} = z^*$ .

задает правило вычисления произведения генераторов, указанного в левой части равенства. В таком случае говорят, что заданы образующие элементы абстрактной ассоциативной алгебры (векторного пространства с умножением элементов), так что  $\Gamma_\alpha \cdot \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha|\beta}$ , а

$$\Gamma_{\alpha|\beta} = if_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma + \Gamma_{\beta|\alpha},$$

и эта алгебра отвечает группе, которая называется универсальной обертывающей группой для исходной группы Ли с теми же структурными константами. Не углубляясь в эти построения, скажем только, что алгебры Ли исходной группы Ли и универсальной обертывающей группы по построению изоморфны.

### 7.1.4 Adjoint representation

В квантовой механике размерность матрицы, отвечающей генератору  $\Gamma_\alpha$ , зависит от числа базисных квантовых состояний, которое в свою очередь тоже не может быть произвольным, а зависит от структуры группы, т.е. коммутационных соотношений для генераторов. Мы это знаем на примере группы поворотов, генераторы которой - компоненты векторного оператора момента импульса  $\mathbf{j}$ . При заданном значении  $\mathbf{j}^2 = j(j+1)$  базис образуют  $2j+1$  состояний с различными проекциями момента. Выяснение вопроса о числе базисных состояний для заданной группы - одна из целей проводимого изучения свойств алгебр Ли. Однако всегда можно указать представление,

<sup>22</sup> Запись коммутатора в виде

$$\Gamma_\alpha \cdot \Gamma_\beta = if_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma + \Gamma_\beta \cdot \Gamma_\alpha$$

существование которого предопределено самим коммутатором, а значит, алгеброй Ли самой по себе. А именно, коммутатор

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = i f_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma$$

есть линейное преобразование в векторном пространстве размерности  $N_G$ , которое образовано самими генераторами  ${}^{23}\Gamma_\alpha$  - генератор по имени  $\alpha$  переводит  $\Gamma_\beta$  - генератор по имени  $\beta$  в суперпозицию генераторов  $i f_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma$ , что и является линейным преобразованием. Иными словами, коммутатор генераторов мы трактуем как действие генератора алгебры, стоящего на первой позиции в коммутаторе, на генератор, записанный на второй позиции. Так как пространство генераторов есть линейная оболочка, построенная на независимых  $N_G$  генераторах, то коммутатор (I.2.6 мы рассматриваем как действие оператора  $\Gamma_\alpha$  на базисный вектор  $\Gamma_\beta$  пространства присоединенного представления, а результат действия - правая часть выражения для коммутатора (I.2.6), которая также является вектором пространства присоединенного представления. А если мы знаем, как действует оператор на любом базисном векторе, то мы можем написать результат действия этого оператора на любой вектор пространства представления. И в силу того, что мы имеем дело с алгеброй, для которой определена операция сложения и умножения на комплексные числа, мы знаем, как действует любой оператор, являющийся элементом линейной оболочки на операторах  $\Gamma_\alpha$ .

В этой же логике линейных преобразований касательного пространства учтем связь внутреннего автоморфизма возле групповой единицы (I.1.28), которую мы вывели для касательного пространства в форме (I.1.31):

$$\text{Aut}_a(g_b) = g_a \cdot g_b \cdot g_a^{-1} \Rightarrow b'^\gamma = b^\gamma + f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha b^\beta = (\mathbb{1} + f_a)_{\bullet\beta}^\gamma b^\beta, \quad (f_a)_{\bullet\beta}^\gamma = f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha.$$

Запишем эти же выражения в представлении группы Ли

$$(\mathbb{1} - i\Gamma_a) \cdot (\mathbb{1} - i\Gamma_b) \cdot (\mathbb{1} - i\Gamma_a) \stackrel{\text{tangent}}{\cong} \mathbb{1} - i\Gamma_b - [\Gamma_a, \Gamma_b] = \mathbb{1} - i\Gamma_b - i f_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma a^\alpha b^\beta = \mathbb{1} - i\Gamma_{b+[a,b]}$$

Это значит, что коммутатор ковекторного генератора  $\Gamma_\beta$  с генератором  $\Gamma_a$  задает линейное преобразование этого ковектора

$$\Gamma_\beta \mapsto \Gamma_\beta - i[\Gamma_a, \Gamma_\beta] = \Gamma_\beta + f_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_\gamma a^\alpha = (\delta_\beta^\gamma + f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha) \Gamma_\gamma = (G_a)^\gamma{}_\beta \Gamma_\gamma.$$

При этом  $N_G \times N_G$ -матрица такого линейного преобразования  $G_a$  задается структурными константами группы, что определяет присоединенное (adjoint) или регулярное представление алгебры Ли <sup>24</sup>.

$$\Gamma_\alpha \stackrel{\text{ad}}{\mapsto} (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\beta}^\gamma = i f_{\alpha\beta}^\gamma$$

В итоге, линейное преобразование, связанное с внутренним автоморфизмом группы, запишется в виде, который согласуется с принятым нами определением генератора в (I.2.1) и I.2.2):

$$\Gamma_\beta \mapsto (\mathbb{1} - i(\text{ad } \Gamma_\alpha) a^\alpha)_{\bullet}^\gamma \Gamma_\gamma$$

Эта формула в явном виде указывает на то, что действие группового элемента, бесконечно близкого к тождественному преобразованию, в присоединенном

представлении - это матричное умножение строки на матрицу группового элемента в этом представлении.

$$\{\text{ad } \mathbf{a}(\mathbf{b})\}^\gamma = \{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\}^\gamma = f_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha b^\beta = -i (if_{\alpha\beta}^\gamma a^\alpha) b^\beta = -i (\text{ad } \Gamma_\alpha)^\gamma \cdot a^\alpha b^\beta = -i (\text{ad } \Gamma_\alpha)^\gamma \cdot b^\beta.$$

Здесь мы специально подчеркнули, что в матричной записи линейного преобразования в ковариантном пространстве генераторов (обратите внимание на то, что «имя» генератора  $\alpha$  - это нижний индекс, который связан с преобразованиями координат группы в касательном пространстве  $2^{25}$ ) порядок следования матричных индексов  $\beta$  и  $\gamma$  обозначен с помощью символа  $\cdot$ , так как этот порядок становится существенным при вычислении композиции двух линейных преобразований как произведения матриц. В этих обозначениях  $\alpha$  - это тензорный индекс, который отвечает ковариантному индексу ковектора при преобразованиях координат в касательном пространстве алгебры Ли размерности  $N_G$ , а  $\beta$  и  $\gamma$  - это матричные индексы в присоединенном представлении той же размерности  $N_G$ . Матричные индексы преобразуются при замене базиса в присоединенном представлении, и эта замена базиса представления никак не связана с преобразованиями координат группы возле единицы. Это отличие матричных индексов генератора и его индексного имени необходимо специально подчеркнуть, так как размерности этих индексов в присоединенном представлении совпадают, и может возникнуть недопонимание того, как и какие преобразования изменяют величины с такими разными индексами. Более формально этот вопрос мы детализируем ниже на стр. [46, где перечислены все векторные пространства, которые задействованы в описании представления группы Ли в дополнение к касательному пространству координат возле единичного элемента группы.

Итак, запомним наши «убеждения». Спросим себя: на векторы какого пространства действуют матрицы-операторы присоединенного представления? И как устроен базис пространства, в котором эти матрицы имеют вид, зафиксированный в формуле (I.2.10)? Базис составляют  $N_G$  генераторов  $\Gamma_\nu$ . Соответственно, компоненты элемента в этом векторном пространстве можно записать как  $a^\nu$ , которые задают разложение по базису так, что  $\Gamma_\alpha = \Gamma_\nu a^\nu$  в инвариантной записи (без индексов). Матрица-оператор  $\text{ad } \Gamma_\alpha$ , являющийся элементом алгебры Ли, чье присоединенное представление мы строим, есть матрица размера  $N_G \times N_G$  с первым верхним и вторым нижним индексом,  $(\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu$ , так что линейное преобразование компонент  $a^\nu$  в записи с использованием матричного умножения имеет вид 26

$$a'^\nu = (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu a^\mu$$

Тогда элемент пространства

$$\Gamma_{\mathbf{a}'} = \Gamma_\nu a'^\nu = \Gamma_\nu (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu a^\mu = \Gamma'_\alpha$$

что и является линейным преобразованием генераторов в присоединенном представлении,

<sup>23</sup>  $N_G$  - число параметров группы Ли, равное числу генераторов и размерности пространства координат в группе.

<sup>24</sup> В математике записывают определение  $\text{ad } \mathbf{a}(\mathbf{b}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , которое читается следующим образом: действие векторного поля  $\mathbf{a}$  в присоединенном представлении на поле  $\mathbf{b}$  определяется как скобка Ли этих векторов в касательном пространстве. Но поскольку скобка Ли - это линейное преобразование, т.е. матрица в касательном пространстве, мы фактически приводим это определение в явном виде с учетом введенного фактора  $-i$  при определении генератора как элемента касательного пространства операторов преобразования (см. (I.2.2): в индексах



$$\Gamma_\nu (\text{ad } \Gamma_\alpha)_\bullet^\nu = [\Gamma_\alpha, \Gamma_\mu] = \text{ad } \Gamma_\alpha \cdot \Gamma_\mu \Leftrightarrow \Gamma'_\alpha = [\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha] = (\text{ad } \Gamma_\alpha) \cdot \Gamma_\alpha$$

Ясно, что по определению присоединенного представления произведение матриц как преобразования в пространстве генераторов сводится к виду

$$(\text{ad } \Gamma_\alpha \cdot \text{ad } \Gamma_\beta)_\bullet^\nu \Gamma_\nu = (\text{ad } \Gamma_\alpha)_\bullet^\nu (\text{ad } \Gamma_\beta)_\bullet^\mu \Gamma_\nu = -f_{\alpha\mu}^\nu f_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_\nu,$$

и с учетом

$$[\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma] = if_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_\mu, \quad [\Gamma_\alpha, \Gamma_\mu] = if_{\alpha\mu}^\nu \Gamma_\nu$$

находим, что

$$(\text{ad } \Gamma_\alpha \cdot \text{ad } \Gamma_\beta)_\gamma^\nu \Gamma_\nu = [\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma]]$$

Точно также, переобозначая индексы  $\alpha \leftrightarrow \beta$ , получаем

$$(\text{ad } \Gamma_\beta \cdot \text{ad } \Gamma_\alpha)_\gamma^\nu \Gamma_\nu = [\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\gamma]] = -[\Gamma_\beta, [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]]$$

где мы учли, что коммутатор антисимметричен относительно перестановки матриц. Тогда найдем действие коммутатора двух линейных преобразований в присоединенном представлении

$$(\text{ad } \Gamma_\alpha \cdot \text{ad } \Gamma_\beta)^\nu \cdot \gamma \Gamma_\nu - (\text{ad } \Gamma_\beta \cdot \text{ad } \Gamma_\alpha)_\bullet^\nu \Gamma_\nu = [\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]]$$

что в силу тождеств Якоби

$$[\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha]] + [\Gamma_\gamma, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] = 0$$

сводится к

$$-[\Gamma_\gamma, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] = [[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta], \Gamma_\gamma] = if_{\alpha\beta}^\mu [\Gamma_\mu, \Gamma_\gamma] = if_{\alpha\beta}^\mu (if_{\mu\gamma}^\nu) \Gamma_\nu = if_{\alpha\beta}^\mu (\text{ad } \Gamma_\mu)_\bullet^\nu \Gamma_\nu$$

Значит, мы установили, что

$$(\text{ad } \Gamma_\alpha \cdot \text{ad } \Gamma_\beta)^\nu \cdot \gamma \Gamma_\nu - (\text{ad } \Gamma_\beta \cdot \text{ad } \Gamma_\alpha)_\bullet^\nu \Gamma_\nu = if_{\alpha\beta}^\mu (\text{ad } \Gamma_\mu)_\bullet^\nu \cdot \gamma \Gamma_\nu$$

и в присоединенном представлении действительно имеет место необходимое выражение для коммутатора матриц генераторов

$$[\text{ad } \Gamma_\alpha, \text{ad } \Gamma_\beta] = if_{\alpha\beta}^\mu \text{ad } \Gamma_\mu$$

Это соотношение - квадратичное условие на структурные константы группы, так как его матричная запись дает

---

25 Для более детального понимания того, как ставятся матричные индексы в формуле 1.2.10, где они согласованы с I.2.6, напомним, что, если  $a^\alpha$  - это контрвектор в касательном пространстве координат группового элемента возле единицы, то закон его линейного преобразования можно записать в матричном виде как  $a'^\gamma = \Lambda_\bullet^\gamma a^\beta$ , где  $\Lambda_\bullet^\gamma$  - это матрица линейного преобразования координат группы, обратная матрице линейного преобразования базиса в координатном пространстве, а закон линейного преобразования ковектора  $\Gamma_\beta$  как  $\Gamma'_\beta = (\Lambda^{-1})^\gamma_\beta \Gamma_\gamma$ . Поэтому, если в качестве линейного преобразования матрицей  $\Lambda^{-1}$  в этих формулах преобразования ковектора подставить линейное преобразование, которое возникает в присоединенном представлении при вычислении коммутатора, т.е.  $\Lambda^{-1} \mapsto \text{ad } \Gamma_\alpha$ , то запись (I.2.10) становится естественной: она повторяет общее правило записи линейного преобразования координат ковектора в частном случае, когда линейное преобразование - это действие коммутатора.

<sup>26</sup> В последующих рассуждениях мы опускаем часть линейного преобразования, которая является тождественным преобразованием.

$$if_{\alpha\mu}^{\nu}if_{\beta\lambda}^{\mu} - if_{\beta\mu}^{\nu}if_{\alpha\lambda}^{\mu} = if_{\alpha\beta}^{\mu}if_{\mu\lambda}^{\nu}$$

Свернув I.2.15 с  $\Gamma_{\nu}$ , перепишем это тождество в терминах коммутаторов,

$$[\Gamma_{\alpha}, [\Gamma_{\beta}, \Gamma_{\lambda}]] - [\Gamma_{\beta}, [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\lambda}]] = [[\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}], \Gamma_{\lambda}]$$

что, пользуясь антисимметрией коммутатора, можно привести к тождеству Якоби (I.2.7),

$$[\Gamma_{\alpha}, [\Gamma_{\beta}, \Gamma_{\lambda}]] + [\Gamma_{\beta}, [\Gamma_{\lambda}, \Gamma_{\alpha}]] + [\Gamma_{\lambda}, [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}]] = 0$$

Напомним (см. Главу 1, 1, стр. 17), что тождество Якоби является следствием ассоциативности групповой композиции. Кроме того, тождеством Якоби мы пользовались, когда выводили матричную форму коммутатора генераторов алгебры Ли в присоединенном представлении (I.2.14).

#### Киселев-2022-

8. Вычислите размерность присоединенного представления специальной ортогональной группы  $SO(N)$ .

Решение. Количество углов поворота задается числом плоскостей, в которых эти повороты осуществляются, т.е. неупорядоченной выборкой двух элементов из  $N$ ,

$$N_G = \dim SO(N) = C_N^2 = \frac{1}{2} N(N-1)$$

#### Киселев-2022-

9. Вычислите размерность присоединенного представления специальной унитарной группы  $SU(N)$ .

Решение. Квадратные  $N \times N$ -матрицы имеют  $N^2$  комплекснозначных элементов, т.е.  $2N^2$  вещественных параметров. Унитарные матрицы  $U$  удовлетворяют условию

$$U^{\dagger}U = \mathbb{1}$$

откуда сразу заключаем, что  $\det U^{\dagger} \cdot \det U = 1$ , а так как

$$\det U^{\dagger} = (\det U^T)^* = (\det U)^*$$

то  $|\det U| = 1$ . Специальное условие

$$\det U = 1$$

фиксирует фазу комплекснозначного детерминанта, т.е. уменьшает число независимых параметров на 1.

Оператор  $U^{\dagger}U$  является эрмитово самосопряженным,

$$(U^{\dagger}U)^{\dagger} = U^{\dagger}U$$

и следовательно, у этой матрицы на диагонали могут быть только вещественные числа, в данном случае равные 1 в силу унитарности матриц, что накладывает еще  $N$  вещественных условий на параметры унитарной матрицы  $U$ . Недиagonальные элементы произведения  $U^{\dagger}U$  могут быть комплексными, но в силу эрмитовости  $U^{\dagger}U$  элементы этого произведения ниже диагонали комплексно сопряжены элементам выше диагонали:

$(U^\dagger U)_{mn} = (U^\dagger U)_{nm}^*$ . Число элементов выше диагонали равно сумме арифметической прогрессии

$$\sum_{k=1}^N (N - k) = \frac{1}{2} N(N - 1)$$

По условию унитарности эти комплексные числа равны нулю, что задает еще  $N(N - 1)$  вещественных условий. В итоге, число независимых вещественных параметров в группе  $SU(N)$

$$N_G = \dim SU(N) = 2N^2 - 1 - N - N(N - 1) = N^2 - 1$$

### 7.1.5 Killing metric and Cartan's criterion

Разделение преобразований базиса в пространстве состояний присоединенного представления и преобразований генераторов под воздействием преобразований параметров группы Ли, след произведения двух генераторов.

Матрицы генераторов в присоединенном представлении позволяют определить инвариант - метрику Киллинга, симметричный по индексам след произведения матриц, который не меняется при линейных обратимых преобразованиях базиса векторного пространства генераторов <sup>27</sup>

$$g_{\alpha\beta} \equiv \text{tr}(\text{ad } \Gamma_\alpha \cdot \text{ad } \Gamma_\beta) = (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\gamma (\text{ad } \Gamma_\beta)_{\bullet\gamma}^\mu = -f_{\alpha\mu}^\gamma f_{\beta\gamma}^\mu.$$

В самом деле, в векторном пространстве представления, которое мы в дальнейшем часто называем пространством состояний, отождествляя его с пространством квантовых состояний, возникающим при описании реальных систем в физике, можно преобразовывать базис, не меняя координаты в группе, т.е. оставляя прежний базис в касательном пространстве. Например, в группе поворотов 3-мерных векторов евклидова пространства  $\mathbf{r}$  три угла поворота вокруг трех ортогональных декартовых осей задают 3 генератора - матрицы  $s_x, s_y$  и  $s_z$ , которые являются матрицами  $3 \times 3$ , имеющими вполне определенный вид в случае преобразований векторов координат  $\mathbf{r}$ , так что этот вид матриц однозначно задан структурными константами группы поворотов, когда выбраны декартовы координаты. Однако при рассмотрении представлений со спином  $s = 1$ , отличных от векторного пространства декартовых координат, выбор базиса представления может быть разным: стандартный ортонормированный базис состояний  $|s, m_s\rangle$ , который характеризуется заданным значением проекции спина на ось  $z$ , равным  $m_s$ , для  $s = 1$  это базис  $|1, m_s\rangle$ , где  $m_s \in \{+1, 0, -1\}$ . Указанный базис отличается от декартова базиса и задается собственными векторами эрмитово самосопряженной матрицы  $s_z$ . Однако допустим и такой базис квантовых состояний, который задается собственными векторами эрмитово самосопряженной матрицы  $s_x$ , например. Поэтому ясно, что при заданных параметрах группы - углах поворотов в декартовых координатах преобразования базиса в представлении изменяет вид матриц генераторов, не меняя их определения как производных операторов поворота по одному из углов.

Итак, возвращаясь от примера с группой поворотов к общему изложению, констатируем, что при рассмотрении векторов в пространстве присоединенного представления

$$\mathbf{B} = B_\nu \mathbf{h}^\nu,$$

где  $\mathbf{h}^\nu$  - это  $N_G$  базисных векторов, а  $B_\nu$  - компоненты вектора в этом базисе, и при введении преобразования базиса обратимой матрицей  $S$

$$h'^{\mu} = S^{\mu}_{\bullet\nu} h^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{h} \mapsto S \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h}'$$

имеют место обратимые преобразования как компонент вектора

$$B_{\nu} \mapsto B'_{\mu} = (S^{-1})^{\nu}_{\bullet\mu} B_{\nu}$$

так и матриц линейных преобразований компонент векторов присоединенного представления,

$$\text{ad } \Gamma_{\alpha} \mapsto S \cdot \text{ad } \Gamma_{\alpha} \cdot S^{-1} \Leftrightarrow (\text{ad } \Gamma_{\alpha})^{\mu}_{\bullet\nu} \mapsto S^{\mu}_{\bullet\mu'} \cdot (\text{ad } \Gamma_{\alpha})^{\mu'}_{\bullet\nu'} \cdot (S^{-1})^{\nu'}_{\bullet\nu}$$

где  $S = N_G \times N_G$ -матрица преобразования базиса в пространстве состояний. Ясно, что такие преоб-

разования оставляют инвариантным значение следа в (I.2.17), и поэтому величина (I.2.17) называется инвариантной метрикой Киллинга, играющей важнейшую роль в теории групп Ли, поскольку она, с одной стороны, определяет объект, инвариантный относительно преобразований базиса в пространстве представления, а с другой стороны, является тензором по отношению к обратимым преобразованиям координат группы в касательном пространстве. Метрика Киллинга задает геометрическую структуру, позволяющую оперировать с индексами тензоров в касательном пространстве, а значит, и с индексами именами генераторов преобразований в пространстве состояний. Для того, чтобы подчеркнуть эти свойства, повторим, что след произведения матриц является числом, на которое можно умножать матрицы-генераторы по стандартным правилам умножения матриц на числа: коммутаторы матриц-генераторов  $\text{ad } \Gamma_{\alpha}$  с произвольными числами  $b$  равны нулю,

$$[b, \text{ad } \Gamma_{\alpha}] \equiv b \cdot \text{ad } \Gamma_{\alpha} - \text{ad } \Gamma_{\alpha} \cdot b = 0$$

так как результаты умножения матрицы на число справа и слева совпадают

$$\text{ad } \Gamma_{\alpha} \cdot b = b \cdot \text{ad } \Gamma_{\alpha}$$

Поэтому и коммутатор матриц-генераторов с каждым элементом метрики Киллинга, который задан как число, равно следу двух матриц-генераторов, тождественно равен нулю,

$$[g_{\alpha\beta}, \text{ad } \Gamma_{\gamma}] = 0$$

так как индексы элементов матрицы Киллинга суть имена чисел, а не матричные индексы на пространстве представления, являющегося линейной оболочкой базиса

<sup>27</sup> При дальнейшем рассмотрении представлений алгебры Ли станет ясно, что векторное пространство представления - это конечномерное пространство состояний с ортонормированным базисом, который задается общими собственными векторами попарно коммутирующих операторов из набора наблюдаемых, включающих в себя эрмитовы генераторы. Размерность пространства присоединенного представления задается числом непрерывных параметров (координат) группы Ли. В пространстве представления можно совершать обратимые преобразования базиса, и именно относительно таких замен базиса в пространстве представления метрика Киллинга инвариантна. Другой вопрос - обратимые преобразования координат в группе, например, в окрестности единицы: это преобразования векторов координат в касательном пространстве. Относительно обратимых преобразований векторов координат метрика Киллинга - ковариантный тензор второго ранга. К примеру, если в координатах возле единицы в присоединенном представлении ввести  $\Gamma_{\alpha} = (\text{ad } \Gamma_{\alpha}) a^{\alpha}$  и  $\Gamma_{\beta} = (\text{ad } \Gamma_{\beta}) b^{\beta}$ , то можно рассмотреть величину

$$\text{tr } (\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta}) = a^{\alpha} b^{\beta} \text{tr } (\text{ad } \Gamma_{\alpha} \cdot \text{ad } \Gamma_{\beta}) = a^{\alpha} b^{\beta} g_{\alpha\beta}$$

которая инвариантна относительно замены базиса координат, а значит,  $g_{\alpha\beta}$  - это ковариантный тензор второго ранга на векторах координат в касательном пространстве. Согласно I.2.16 метрика Киллинга задает скалярное произведение векторов в касательном пространстве.

нормированных состояний. При этом, если метрика Киллинга, которая есть тензор с двумя ковариантными индексами относительно преобразований параметров группы Ли (а не базиса пространства представления!), невырождена, можно было бы определить обратную метрику  $g^{\alpha\gamma}$ , для которой  $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$ .

Мы будем полагать, во-первых, что метрика Киллинга как симметричная квадратная матрица  $N_G \times N_G$  невырождена, а значит, имеет обратную, а во-вторых, положительно определена, т.е. все ее собственные значения положительны. Первое из условий отвечает критерию Картана полупростоты группы Ли, а второе - компактности группы. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением алгебр Ли для полупростых компактных групп Ли<sup>28</sup>

• Критерий Картана о полупростых группах: если группа имеет инвариантную абелеву подгруппу, то метрика Киллинга вырождена, т.е. детерминант матрицы  $g_{\alpha\beta}$  равен нулю,  $\det \|g_{\alpha\beta}\| = 0$ . И обратно, если метрика Киллинга вырождена, то группа имеет инвариантную абелеву подгруппу Ли, т.е. подгруппу, элементы которой задаются непрерывным подпространством координат группы Ли. Значит, для того, чтобы группа Ли была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы метрика Киллинга была невырожденной.

Покажем, что наличие инвариантной абелевой подгруппы приводит к вырождению метрики Киллинга. Действительно, пусть  $\mathfrak{G}'$  абелева подгруппа. Значит, для ее элементов, координаты которых мы обозначаем символами со штрихом вблизи единицы (при  $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \rightarrow \mathbf{0}$ ), групповое умножение перестановочно и для билинейного преобразования в касательном пространстве  $\mathbf{c}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$  приводит к следующему соотношению:

$$g_{a'} \cdot g_{b'} = g_{b'} \cdot g_{a'} \Rightarrow \mathbf{c}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \mathbf{c}(\mathbf{b}', \mathbf{a}') \Rightarrow \mathbf{c}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - \mathbf{c}(\mathbf{b}', \mathbf{a}') = 0 \Rightarrow [\mathbf{a}', \mathbf{b}'] = 0,$$

а значит, алгебра абелевой подгруппы коммутативна: ее генераторы коммутируют, так как они реализуют точное представление алгебры Ли,

$$[\Gamma_{\alpha'}, \Gamma_{\beta'}] = 0$$

т.е. для представления группы  $T(\mathfrak{G}) = G$  согласно I.2.5

$$[\mathbf{a}', \mathbf{b}'] = 0 \xrightarrow{T} \Gamma_{[\mathbf{a}', \mathbf{b}']} = \Gamma_\mu [\mathbf{a}', \mathbf{b}']^\mu = \Gamma_\mu f_{\alpha'\beta'}^\mu (a')^{\alpha'} (b')^{\beta'} = -i\Gamma_\mu (if_{\alpha'\beta'}^\mu) (a')^{\alpha'} (b')^{\beta'} = -i[\Gamma_{\alpha'}, \Gamma_{\beta'}] (a')^{\alpha'} (b')^{\beta'}$$

Следовательно, структурные константы с двумя нижними индексами, которые относятся к касательному пространству абелевой подгруппы, обращаются в нуль, как для координат в подгруппе (индексы со штрихом, например,  $\gamma'$ ), так и для координат вне этой подгруппы (индексы с двумя штрихами, например,  $\gamma''$ )

$$f_{\alpha'\beta'}^\mu = 0 \Rightarrow f_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = 0, \quad f_{\alpha'\beta'}^{\gamma''} = 0$$

<sup>28</sup> Положительная определенность метрики Киллинга позволяет задать положительно определенную меру векторов в касательных пространствах точек на картах группы Ли  $\mathfrak{G}$ . Эти векторы, как мы увидим, задают координаты универсальной накрывающей группы  $U\mathfrak{G}$ , так что компактность пространства координат  $U\mathfrak{G}$  в виде строгого неравенства на длину вектора координат, заданной с помощью положительно определенной метрики Киллинга, обеспечивается автоматически: множество координат группы  $U\mathfrak{G}$  ограничено и замкнуто. Если условие ограниченности на множество координат не учитывать, то получится некомпактная группа Ли с положительно определенной метрикой Киллинга, и в такой группе Ли нет квантования и возникают бесконечномерные представления (например, модули Верма), что в физике отвечает системам, где нет квантования спина или заряда, и эти величины принимают дискретные, но произвольные значения, что уже наводит на мысль, что область применения некомпактных групп Ли с комплексными координатами не затрагивает симметрии физических величин.

Пусть теперь  $\mathfrak{G}'$  - инвариантная подгруппа: см. определение в I.1.4. Тогда внутренний автоморфизм ее элементов в окрестности единицы, когда элемент  $g_a$  лежит вне подгруппы

$$g_a^{-1} \cdot (g_{c'} \cdot g_a) \stackrel{\text{tangent}}{=} g_a^{-1} \cdot g_a \cdot g_{c'} \cdot g_{[c', a]} = g_{c'} \cdot g_{[c', a]}$$

также принадлежит этой абелевой подгруппе, т.е. с учетом перехода от элементов группы Ли к элементам алгебры Ли

$$g_{c'} \cdot g_{[c', a]} = g_{b'} \Rightarrow g_{[c', a]} = g_{c'}^{-1} \cdot g_{b'} = g_{\tilde{b}'} \Rightarrow \tilde{b}' = [c', a] = f_{\alpha'\nu}(c')^{\alpha'} a^\nu$$

Подчеркнем, что в последнем выражении индекс  $\nu$  может относиться как к касательному пространству инвариантной подгруппы, так и к касательному пространству вне этой подгруппы, что согласуется с проведенным выше рассмотрением абелевой подгруппы в  $\sqrt{\text{I.2.19}}$ , когда еще и  $f_{\alpha'\beta'}^\mu = 0$ .

В математической литературе алгебры и группы рассматриваются по отдельности, так что аналогом инвариантной подгруппы Ли является понятие инвариантной подалгебры Ли  $\mathfrak{A}'$  в алгебре  $\mathfrak{A}$ , которое также соответствует понятию идеала  $\mathfrak{A}'$ , а именно,  $\mathfrak{A}'$  - идеал, если  $\forall c' \in \mathfrak{A}', a \in \mathfrak{A}$  скобка Ли  $[c', a] = -[a, c'] = b' \in \mathfrak{A}'$ .

Итак, инвариантность подгруппы согласно (I.2.20) означает, что подалгебра инвариантной подгруппы является идеалом в алгебре Ли, и

$$f_{\alpha'\nu}^{\gamma''} = 0$$

Тогда в метрике Киллинга блок с индексами абелевой инвариантной подгруппы обращается в нуль  $g_{\alpha'\beta'} = 0$ , так как согласно определению элементов метрики Киллинга (I.2.17)

$$g_{\alpha'\beta'} = -f_{\alpha'\mu}^\nu f_{\beta'\nu}^\mu$$

но индекс  $\nu$  в константах  $f_{\alpha'\mu}^\nu$ , если эти константы отличны от нуля, согласно [2.21] может принимать только штрихованные значения  $\gamma'$ , а индекс  $\mu$  в константах  $f_{\beta'\nu}^\mu$  точно также только штрихованные значения  $\iota'$ , а значит,

$$g_{\alpha'\beta'} = -f_{\alpha'\mu}^\nu f_{\beta'\nu}^\mu = -f_{\alpha'\iota'}^{\gamma'} f_{\beta'\gamma'}^{\iota'}$$

но  $f_{\alpha'\iota'}^{\gamma'} = 0$  и  $f_{\beta'\gamma'}^{\iota'} = 0$  в силу того, что подгруппа абелева и имеет место I.2.19. То же верно и для недиагональных элементов со смешанными индексами,  $g_{\alpha'\beta''} = 0$ , так как согласно определению элементов метрики Киллинга (I.2.17)

$$g_{\alpha'\beta''} = -f_{\alpha'\mu}^\nu f_{\beta''\nu}^\mu$$

но индекс  $\nu$  в константах  $f_{\alpha'\mu}^\nu$ , если эти константы отличны от нуля, согласно [2.21] может принимать только штрихованные значения  $\gamma'$ , а отсюда следует, что индекс  $\mu$  в константах  $f_{\beta''\nu}^\mu$  принимает только штрихованные значения  $\iota'$ , а значит,

$$g_{\alpha'\beta''} = -f_{\alpha'\mu}^\nu f_{\beta''\nu}^\mu = -f_{\alpha'\iota'}^{\gamma'} f_{\beta''\gamma'}^{\iota'}$$

но  $f_{\beta''\gamma'}^{\iota'} = 0$  в силу абелевости подгруппы. Итак, в матрице метрики есть хотя бы один нулевой столбец или строка  $g_{\alpha'\mu} = 0$  в силу симметричности метрики по перестановке индексов. Это значит, что ее детерминант обращается в нуль.

Верно и обратное утверждение<sup>30</sup>, которое дает необходимое условие полупростоты группы: если детерминант  $\det \|g_{\alpha\beta}\| = 0$  обращается в нуль, то алгебра содержит нетривиальный абелев идеал, а значит, группа не является полупростой, т.е.

невырожденность метрики Киллинга является необходимой для полупростоты группы. В этом случае ранг матрицы Киллинга  $r < N_G$ , и после линейных преобразований можно обратить в нуль  $N_G - r$  столбцов и симметричных им стро <sup>31</sup> в метрике Киллинга. Отсюда можно показать, что имеются  $N_G - r$  генераторов, которые образуют подалгебру инвариантной подгруппы т.е. идеал, с нулевой метрикой Киллинга.

Факт нулевой метрики Киллинга в идеале  $\mathfrak{A}'$  позволяет установить так называемую разрешимость этой инвариантной подалгебры: образ скобки Ли двух произвольных элементов подалгебры сам является подалгеброй меньшей размерности  $\mathfrak{A}''$  или, как пишут  $[\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'] = \mathfrak{A}''$ , причем эту редукцию подалгебр в силу нулевой метрики Киллинга в подалгебре  $\mathfrak{A}'$  можно продолжить до тех пор, пока не будет достигнут последний шаг, при котором  $[\mathfrak{A}' \cdots', \mathfrak{A}' \cdots'] = 0$ , а значит, на этом шаге редукции алгеб <sup>33</sup> возникает как раз абелева подалгебра  $\mathfrak{A}' \cdots'$ , т.е. в терминах элементов группы имеется абелева инвариантная подгруппа.

Алгебра вложений  $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}'' = [\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'] \supset \dots \supset \mathfrak{A}' \cdots'$  с  $[\mathfrak{A}' \cdots', \mathfrak{A}' \cdots'] = 0$  называется нильпотентной, так как элементы этих алгебр реализуются в виде верхнетреугольных матриц. Нильпотентность идеала  $\mathfrak{A}'$  в случае нулевой метрики Киллинга доказывается в математических курсах. При этом, более общий взгляд на алгебры Ли, чем рассмотрение алгебр с обратимой метрикой Киллинга, которому мы следуем в этой книге, предполагает введение разбиения Фиттинга всех генераторов алгебры Ли  $\mathfrak{A}$  на два класса: нильпотентные генераторы и их корневое дополнение, понятие о котором будет введено нами позже. Заинтересованного читателя мы отсылаем к разделу 2.4 Главы 2 где мы сделали специальный комментарий по вопросу о разложении Фиттинга после описания корней присоединенного представления простой компактной группы Ли.

За счет линейных преобразований в касательном пространстве координат группы Ли, относительно которых метрика - это ковариантный тензор второго ранга, можно сначала преобразовать положительно определенную квадратичную форму Киллинга <sup>34</sup> к диагональному виду с положительными матричными элементами, а потом за счет смены масштаба групповых координат добиться того, чтобы метрика Киллинга оказалась бы пропорциональной единичной матрице  $g_{\alpha\beta} = \Omega^2 \delta_{\alpha\beta}$ ,  $\Omega^2 > 0$ .

Например, для группы поворотов структурные константы задаются тензором Леви-Чивиты,

$$f_{\alpha\beta}^{\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma'} \delta^{\gamma'\gamma}$$

так что

$$(\text{ad } \Gamma_{\alpha})_{\bullet\mu}^{\gamma} = i \epsilon_{\alpha\mu\gamma'} \delta^{\gamma'\gamma}$$

<sup>29</sup> Если элемент внутреннего автоморфизма  $g_a$  принадлежит подгруппе, то образ автоморфизма принадлежит подгруппе в силу самого понятия подгруппы, и утверждение об образе такого автоморфизма становится элементарным, и мы этот случай уже рассмотрели чуть выше.

<sup>32</sup> Скалярное произведение любого элемента алгебры  $\mathfrak{A}$  на элемент подалгебры  $\mathfrak{A}'$ , образованной  $n' = N_G - r$  генераторами, которые отвечают нулевым строкам и столбцам метрики Киллинга, равно нулю. В частности, и для любого коммутатора элементов алгебры

$$\text{tr}([\text{ad } \mathbf{x}, \text{ad } \mathbf{y}] \cdot \text{ad } \mathbf{a}') = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{A}, \forall \mathbf{a}' \in \mathfrak{A}',$$

а так как справедливо равенство следов

$$\text{tr}([\text{ad } \mathbf{x}, \text{ad } \mathbf{y}] \cdot \text{ad } \mathbf{a}') = \text{tr}(\text{ad } \mathbf{x} \cdot [\text{ad } \mathbf{y}, \text{ad } \mathbf{a}']) = 0$$

мы заключаем, что элемент алгебры  $[\text{ad } \mathbf{y}, \text{ad } \mathbf{a}'] \in \mathfrak{A}'$ , поскольку он ортогонален любому элементу алгебры Ли, а именно так и определялась подалгебра  $\mathfrak{A}'$ . Следовательно,  $\mathfrak{A}'$  - идеал. А идеал - это подалгебра инвариантной подгруппы Ли.

а метрика Киллинга согласно (I.2.17)

$$g_{\alpha\beta} = -f_{\alpha\mu}^{\gamma} f_{\beta\gamma}^{\mu} = -\epsilon_{\alpha\mu\gamma'} \delta^{\gamma'\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\mu'} \delta^{\mu'\mu} = -\epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\mu} = \epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon_{\beta\mu\gamma} = 2\delta_{\alpha\beta}.$$

Метрика Киллинга позволяет опускать индексы, а обратная к ней поднимать их (если метрика единичная матрица, которая совпадает со своей обратной матрицей, то нет отличия между верхними и нижними индексами). Вычислим, например,

$$\text{tr}([\text{ad } \Gamma_{\alpha}, \text{ad } \Gamma_{\beta}] \text{ad } \Gamma_{\gamma}) = i f_{\alpha\beta}^{\mu} \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\mu} \text{ad } \Gamma_{\gamma}) = i f_{\alpha\beta}^{\mu} g_{\mu\gamma} \equiv i f_{\alpha\beta|\gamma}$$

Подчеркнем, что по договоренности в I.2.25 опущенный с помощью метрики  $g_{\mu\gamma}$  индекс  $\mu$  структурных констант  $f_{\alpha\beta}^{\mu}$  располагается последним среди нижних индексов,  $f_{\alpha\beta|\gamma}$ . С другой стороны, пользуясь равенством

$$\text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\beta} \text{ad } \Gamma_{\gamma} = \text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\gamma} \text{ad } \Gamma_{\beta} + \text{ad } \Gamma_{\alpha} [\text{ad } \Gamma_{\beta}, \text{ad } \Gamma_{\gamma}]$$

выражением для коммутатора

$$[\text{ad } \Gamma_{\beta}, \text{ad } \Gamma_{\gamma}] = i f_{\beta\gamma}^{\mu} \text{ad } \Gamma_{\mu}$$

и аналогичными преобразованиями для произведения  $\text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\gamma}$ , с учетом определения метрики Киллинга как следа произведения генераторов в присоединенном представлении (I.2.17), получим

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\beta} \text{ad } \Gamma_{\gamma}) &= \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\gamma} \text{ad } \Gamma_{\beta}) + \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha} [\text{ad } \Gamma_{\beta}, \text{ad } \Gamma_{\gamma}]) = \\ &= \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\gamma} \text{ad } \Gamma_{\beta}) + i f_{\beta\gamma}^{\mu} \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\mu}) = \\ &= \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\gamma} \text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\beta}) + i f_{\alpha\gamma}^{\mu} \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\mu} \text{ad } \Gamma_{\beta}) + i f_{\beta\gamma}^{\mu} g_{\alpha\mu} = \\ &= \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\gamma} \text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\beta}) + i f_{\alpha\gamma}^{\mu} g_{\mu\beta} + i f_{\beta\gamma}^{\mu} g_{\alpha\mu}. \end{aligned}$$

Учитывая равенство двух следов в начале и в конце цепочки этих равенств (порядок следования матриц в их произведении при взятии следа можно изменять циклически, откуда следует также симметричность метрики Киллинга)

$$\text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\beta} \text{ad } \Gamma_{\gamma}) = \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\gamma} \text{ad } \Gamma_{\alpha} \text{ad } \Gamma_{\beta})$$

находим соотношение на структурные константы

$$f_{\alpha\gamma}^{\mu} g_{\mu\beta} + f_{\beta\gamma}^{\mu} g_{\mu\alpha} = 0 \Rightarrow f_{\alpha\gamma|\beta} + f_{\beta\gamma|\alpha} = 0, \quad f_{\alpha\gamma|\beta} = -f_{\beta\gamma|\alpha}, \quad -f_{\gamma\alpha|\beta} = f_{\gamma\beta|\alpha}.$$

В итоге, структурные константы с индексами одного типа, только всеми нижними или только всеми верхними, являются полностью антисимметричными: они меняют знак при перестановке любой пары индексов. Поэтому при записи структурных констант простой компактной группы Ли не указывают разделитель трех ковариантных индексов

$$f_{\alpha\beta\gamma} \equiv f_{\alpha\beta|\gamma}$$

Если метрика Киллинга группы невырождена и положительно определена, а параметры группы выбраны так, что метрика Киллинга диагональна, а еще лучше,

<sup>33</sup>Этот шаг редукции может оказаться и первым, если  $[\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'] = 0$ , т.е., если исходный идеал абелев.

<sup>34</sup> В математике формой Киллинга называют инвариант, построенный из метрики и двух контр-векторов,  $g_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta}$ .

<sup>35</sup> Величину  $\Omega \in \mathbb{R}$  называют масштабным или конформным фактором, а саму метрику конформно эквивалентной евклидовой метрике или просто конформно евклидовой метрикой.



пропорциональна символу Кронекера, то полностью антисимметричны и структурные константы сами по себе (имеются в виду  $f_{\alpha\beta}^\gamma$  с одним верхним индексом, например,  $f_{(12)}^{(3)} = -f_{(13)}^{(2)}$ ), как мы видели это на примере структурных констант группы поворотов.

Подчеркнем теперь, что при выборе параметров группы такими, что метрика Киллинга становится единичной матрицей отличие между нижними и верхними индексами исчезает, а в общем случае с помощью метрики можно провести операцию опускания индексов, т.е. переход от контравекторных величин к ковекторным, чтобы определить матрицы генераторов в присоединенном представлении с нижними индексами

$$(\text{ad } \Gamma_\alpha)_\bullet^\mu g_{\mu\gamma} \equiv (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\gamma\beta} = i f_{\alpha\beta}^\mu g_{\mu\gamma} = i f_{\gamma|\alpha\beta}.$$

Отметим, что в последней формуле при опускании верхнего индекса матрицы в присоединенном представлении мы записали опущенный матричный индекс первым, чтобы сохранить порядок следования номеров в столбцах  $\mu$  и в строках  $\beta$  для исходной матрицы и после опускания индекса  $\mu \mapsto \gamma$  (сначала матричный индекс  $\gamma$ , а потом матричный индекс  $\beta$ ), но в силу антисимметричности структурных констант с индексами одного типа по перестановке любой пары индексов две последовательных перестановки не изменяют значения структурных констант,

$$f_{\gamma|\alpha\beta} = f_{\alpha\beta|\gamma} = f_{\alpha\beta\gamma}$$

а значит, опущенный индекс можно записать последним, а не первым, как мы это делали в своих построениях согласно (I.2.25).

Для нас существенным результатом является тот факт, что структурные константы  $f_{\alpha\beta\gamma}$  являются эрмитово самосопряженными относительно любой пары матричных индексов: транспонирование перестановка порядка следования матричных индексов - дает знак минус, а комплексное сопряжение переводит мнимую единицу в  $i^* = -i$ . Заметим при этом, что структурные константы группы Ли являются вещественными, потому что они построены из преобразований вещественных координат в вещественные координаты, так что

$$\left\{ (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\beta\gamma} \right\}^\dagger = i^* f_{\gamma\alpha\beta} = i f_{\beta\alpha\gamma} = (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\beta\gamma}.$$

Можно убедиться, что для метрики Киллинга, пропорциональной евклидовой метрике, генераторы алгебры Ли в присоединенном представлении являются эрмитово самосопряженными.

### Киселев-2022-1

0. Покажите, что для метрики, которая является конформно евклидовой (см. определение в сноске 35 на стр. 26),  $g_{\mu\gamma} = \Omega^2 \delta_{\mu\gamma}$ , эрмитовость матриц-генераторов имеет стандартный вид равенства с учетом действия на матрицу композиции транспонирования и комплексного сопряжения,

$$(\text{ad } \Gamma_\alpha)_\bullet^\mu = \left( (\text{ad } \Gamma_\alpha)_\bullet^\beta \right)^*.$$

Так как мы рассматриваем точные представления алгебры Ли, то изоморфизм матриц генераторов в присоединенном представлении на матрицы генераторов в другом представлении означает, что и в любом другом точном представлении матрицы генераторов полупростой компактной алгебры Ли тоже эрмитовы.

Антисимметричность структурных констант гарантирует, что след генератора полупростой группы Ли обращается в нуль,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad} \Gamma_\alpha) = if_{\alpha\mu}^\mu = if_{\alpha\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0$$

где мы учли, что свертка антисимметричного по перестановкам немых индексов  $\mu \leftrightarrow \nu$  символа  $f_{\alpha\mu\nu} = -f_{\alpha\nu\mu}$  с симметричным тензором обратной метрики  $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$  тождественно равна нулю. Таким образом, сумма вещественных собственных значений эрмитова самосопряженного генератора с учетом вырождения каждого собственного значения<sup>36</sup> равна нулю. В самом деле, так как генератор это эрмитова матрица, можно в пространстве состояний (представления) перейти к базису собственных векторов этой матрицы. Тогда в базисе своих собственных векторов матрица диагональна, и на диагонали стоят её собственные значения, причем, каждое собственное значение встречается столько раз, сколько собственных векторов соответствует этому собственному значению (число этих собственных векторов называется кратностью вырождения собственного значения). Тогда сумма собственных значений для каждого квантового базисного состояния в пространстве представления и есть след матрицы генератора.

С другой стороны, след матрицы, действующей на пространстве состояний, инвариантен относительно замены базиса состояний (I.2.18), так что вычисление следа в любом базисе как раз и дает сумму собственных значений.

Утверждение о равенстве нулю следа генератора справедливо в любом точном представлении, а не только в присоединенном. Для доказательства рассмотрим след произведения матриц в неприводимом представлении  $T_R(\mathfrak{G})$ , которое может отличаться от присоединенного представления  $\mathrm{ad}$ ,

$$\mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta)_R = \mathrm{tr}(\Gamma_\beta \Gamma_\alpha)_R \Rightarrow \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta - \Gamma_\beta \Gamma_\alpha)_R = 0$$

откуда

$$\mathrm{tr}([\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta])_R = 0 \Rightarrow if_{\alpha\beta}^\gamma \mathrm{tr}(\Gamma_\gamma)_R = 0, \quad \forall \alpha, \beta$$

Пусть существует отличный от нуля ковектор  $b_\gamma = \mathrm{tr}(\Gamma_\gamma)_R$ , который в силу своего определения не меняется при замене базиса векторного пространства представления, аналогичной описанной в формулах (I.2.18). Это значит, что этот вектор инвариантен относительно замены базиса в пространстве состояний, в котором действуют матрицы генераторов, так как при такой замене базиса с помощью обратимой матрицы  $S$  след остается неизменным:  $\mathrm{tr}(S \Gamma S^{-1})_R = \mathrm{tr}(\Gamma)_R$ . Выведенное нами выше условие равенства нулю следа коммутатора генераторов в любом точном представлении запишется в виде

$$if_{\alpha\beta}^\gamma \mathrm{tr}(\Gamma_\gamma)_R = 0, \forall \alpha, \beta \Rightarrow f_{\alpha\beta}^\gamma b_\gamma = 0, \forall \alpha, \beta.$$

Значит, при выборе параметров (координат) группы для простоты записи таким образом, чтобы метрика Киллинга была равной символу Кронекера, когда верхние и нижние индексы по своим свойствам идентичны, генератор  $\Gamma_b = \Gamma_\gamma b_\gamma$  коммутирует с любым генератором алгебры Ли,

$$[\Gamma_b, \Gamma_\alpha] = if_{\gamma\alpha\beta} \Gamma_\beta b_\gamma = 0, \quad \forall \alpha$$

Отсюда заключаем, что  $\Gamma_b$  - это генератор в инвариантной абелевой подгруппе, так как он коммутирует со всеми другими генераторами группы, что не может иметь места в полупростой компактной группе, где метрика Киллинга может быть преобразована к евклидовой. Поэтому

<sup>36</sup> Суммирование ведется по базису состояний представления.

$$\text{tr}(\Gamma_\gamma)_R = 0$$

Итак, сумма собственных значений генератора полупростой компактной группы Ли равна нулю в любом представлении. С точки зрения физики собственные значения такого генератора - это значения наблюдаемой физической величины в ее собственных квантовых состояниях для системы, которая описывается представлением  $R$  группы Ли. Раз эти собственные значения принадлежат вполне определенному дискретному множеству как для заданного представления, так и для других представлений, говорят, что наблюдаемая величина квантуется, а сумма квантов наблюдаемой величины в каждом представлении физической системы равна нулю. Это свойство нетривиально и очень важно в физических моделях и теориях. Например, система может допускать описание своих свойств как симметрии в рамках полупростой компактной группы, только если сумма зарядов различных состояний системы равна нулю, когда эти заряды трактуются как собственные значения некоторой наблюдаемой<sup>37</sup>.

Соотношение (I.2.28) можно сформулировать и в терминах группового умножения: композиция элементов группы в координатах касательного пространства с одним из элементов с координатой

$$b^\gamma = g^{\gamma\gamma'} \text{tr}(\Gamma_{\gamma'})_R$$

выражается через композицию трех элементов, координата одно из которых задается как раз скобкой Ли с выделенным особым вектором  $\mathbf{b}$  так, что

$$\begin{aligned} g_b \cdot g_a &\stackrel{\text{tangent}}{=} g_a \cdot g_b \cdot g_{[b,a]}, \\ [b, a]^\beta &= b^\gamma a^\alpha f_{\gamma\alpha}^\beta = b^\gamma a^\alpha f_{\gamma\alpha\beta'} g^{\beta'\beta} = g^{\beta'\beta} a^\alpha b^\gamma f_{\alpha\beta'\gamma} = g^{\beta'\beta} a^\alpha b_\gamma f_{\alpha\beta'}^\gamma = 0, \\ -ib^\gamma a^\alpha i f_{\gamma\alpha}^\beta \Gamma_\beta &= -ib^\gamma a^\alpha [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha] = -ia^\alpha [\Gamma_b, \Gamma_\alpha] = 0 \Rightarrow \\ g_{[b,a]} &= e \Rightarrow g_b \cdot g_a = g_a \cdot g_b, \end{aligned}$$

т.е. все элементы группы перестановочны с  $g_b$ , а значит, и со всеми элементами с координатами вдоль направления  $\mathbf{b}$ , что и определяет инвариантную абелеву подгруппу Ли с координатами  $\mathbf{b}(c) = c \cdot \mathbf{b}$ , что недопустимо для полупростых компактных групп Ли.

В этих построениях мы опирались на равенства в окрестности групповой единицы, т.е. для касательного пространства координат. Для того, чтобы делать точные утверждения для элементов вне рамок бесконечно малых преобразований, необходимо ввести экспоненциальное представление групповых элементов, построенное по представлению алгебры Ли. Эта конструкция подробно описывается в Главе 1, 4 раздел 4.1 на стр. 51. В итоге, в полупростой компактной группе инвариантный относительно замены базиса в представлении вектор (согласно связи (I.2.30) этот вектор взаимнооднозначно связан со следом генератор 28 всегда равен нулю в любом точном представлении. Заметим, что след любой линейной суперпозиции генераторов также обращается в нуль.

Другими словами, в полупростой алгебре Ли нет инвариантных не равных нулю векторов в касательном пространстве: вектор  $\mathbf{b}$  касательного пространства возле единицы группы является инвариантным, если для любого ненулевого вектора  $\mathbf{a}$  из касательного пространства скобка Ли  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv 0$ , т.е. действие внутреннего автоморфизма  $g_a \cdot g \cdot g_a^{-1}$  на элемент группы  $g = g_b$  с координатами, равными инвариантному вектору, оставляет  $g_b$  неизменным. Отсюда сразу следовало бы, что в группе существует

<sup>37</sup> Пример подобной гипотезы мы рассмотрим при изучении спинорных частиц первого поколения Стандартной модели в Главе 285

однопараметрическая абелева инвариантная подгруппа, что противоречит условию рассмотрения полупростых групп.

### Основные примеры и применения метрики Киллинга (!?!?!?!?)

(??? допишу скоро.)

## 7.1.6 Casimir operators

Роль метрики Киллинга является важной и при построении однородного по генераторам квадратичного оператора Казимира. Операторы Казимира степени  $k$  мы определяем как однородные полиномы по генераторам алгебры Ли со степенью однородности  $k$  и с такими коэффициентами, что оператор Казимира коммутирует с любым из генераторов алгебры Ли. Такие операторы, отличные от нуля, существуют для полупростых компактных групп Ли: они могут быть явно построены по схеме, схожей с той, что мы сейчас опишем на примере квадратичного оператора Казимира. В силу коммутативности со всеми генераторами и эрмитовости квадратичный оператор Казимира - физическая величина из полного набора наблюдаемых квантовой системы. Итак, покажем, что однородный оператор <sup>39</sup> второй степени

$$\hat{C}_2 = g^{\alpha\beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = g_{\alpha'\beta'} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = g_{\alpha'\beta'} \Gamma^{\alpha'} \Gamma^{\beta'}$$

коммутирует с любым из генераторов групповых преобразований, т.е.

$$[\Gamma_\gamma, \hat{C}_2] = 0$$

### Киселев-2022-1

1. Докажите, что коммутатор

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

Решение. Раскроем определение коммутатора

$$[A, BC] = ABC - BCA$$

и добавим справа специально подобранный нуль

$$0 = -BAC + BAC$$

так что

$$[A, BC] = ABC - BCA - BAC + BAC = (AB - BA)C + B(AC - CA) = [A, B]C + B[A, C].$$

Пользуясь формулой (I.2.33), вычислим коммутатор генератора с квадратичным оператором Казимира и воспользуемся метрикой для опускания индексов, а также обратной метрикой для поднимания индексов так, что

$$\begin{aligned} [\Gamma_\gamma, \hat{C}_2] &= g^{\alpha\beta} [\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha \Gamma_\beta] = g^{\alpha\beta} ([\Gamma_\gamma, \Gamma_\alpha] \Gamma_\beta + \Gamma_\alpha [\Gamma_\gamma, \Gamma_\beta]) = g^{\alpha\beta} (if_{\gamma\alpha}^\mu \Gamma_\mu \Gamma_\beta + if_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_\alpha \Gamma_\mu) = \\ &= g^{\alpha\beta} (if_{\gamma\alpha\mu}^\mu \Gamma_\beta + if_{\gamma\beta\mu}^\mu \Gamma_\alpha \Gamma^\mu) = if_{\gamma\alpha\mu}^\mu \Gamma^\mu \Gamma^\alpha + if_{\gamma\beta\mu}^\mu \Gamma^\beta \Gamma^\mu = if_{\gamma\alpha\mu}^\mu (\Gamma^\mu \Gamma^\alpha + \Gamma^\alpha \Gamma^\mu) \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы заменили немой индекс  $\beta$  на немой индекс  $\alpha$ . В итоге, получилась свертка симметричного по перестановкам немых индексов  $\mu$  и  $\alpha$  выражения  $\Gamma^\mu \Gamma^\alpha + \Gamma^\alpha \Gamma^\mu$  с антисимметричными по перестановкам тех же немых индексов структурными константами  $f_{\gamma\alpha\mu}$ . Такая свертка тождественно равна нулю, и значит, построенный с помощью метрики Киллинга квадратичный оператор коммутирует с генераторами полупростой компактной группы Ли (I.2.32) и является, таким образом, оператором Казимира второй степени.

Для примера в группе поворотов  $g_{\alpha\beta} = 2\delta_{\alpha\beta}$ ,  $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}$ , и

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{j}^2$$

т.е. с точностью до двойки квадратичный оператор Казимира - квадрат момента импульса.

Другие инвариантные величины - операторы Казимира высших степеней могут быть сконструированы аналогичным образом: необходимо построить с помощью следа  $k$  матриц генераторов в присоединенном представлении симметризованный <sup>40</sup> многокомпонентный следовый тензор <sup>41</sup> ранга  $k$  в присоединенном представлении

$$g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha_1} \dots \text{ad } \Gamma_{\alpha_k})$$

и соответствующий ему однородный по генераторам многочлен степени  $k$

$$\hat{C}_k = g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \Gamma^{\alpha_1} \dots \Gamma^{\alpha_k}$$

Так же, как и в случае квадратичного оператора, построенного с метрикой Киллинга, все операторы  $k$ -того порядка, построенные как однородные по генераторам алгебры Ли полиномы с помощью симметрических следовых тензоров ранга  $k$ , также коммутируют со всеми генераторами алгебры Ли 42, и, следовательно, они являются операторами Казимира. Более того, операторы Казимира коммутируют и между собой, поскольку составлены из генераторов, а любой из генераторов перестановочен с операторами Казимира. Тогда говорят, что линейные комбинации инвариантов Казимира составляют центр алгебры Ли 43. В центре алгебры Ли произвольный оператор Казимира, как станет понятно при дальнейшем изложении, выражается в виде полинома от ограниченного набора операторов Казимира. Этот ограниченный набор может включать в себя минимальное количество операторов Казимира, которые называются образующими центра алгебры Ли. Выбор образующих неоднозначен, но число образующих центр алгебры операторов Казимира оказывается равным рангу группы Ли. При таком видении центра алгебры Ли имеет смысл говорить о том, что образующие центра алгебры Ли - это независимые операторы Казимира, а операторы Казимира вне множества образующих центра алгебры Ли являются зависимыми инвариантами 4.

Обратим внимание на то, что вычисление метрики Киллинга и других следовых тензоров в присоединенном представлении  $g_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}$ , если они отличны от нуля, позволяет строить с этими тензорами однородные полиномы из контравариантных генераторов вида  $\Gamma^{\alpha_1} = g^{\alpha_1 \alpha'_1} \Gamma_{\alpha'_1}$  так, что по отношению к линейным преобразованиям в касательном пространстве возле групповой единицы, эти полиномы операторы Казимира  $\hat{C}_k$

<sup>38</sup> Если метрика не является конформно евклидовой или вырождена, то контравариантный вектор  $b^\gamma$  может оказаться либо равным нулю, либо вообще неопределен, даже если след генератора отличен от нуля, и нет взаимной однозначности соответствия между ковектором и контрвектором в терминах операции поднимания и опускания индексов метрикой.

<sup>39</sup> Генераторы с верхними координатными индексами получаются с помощью обратной метрики:  $\Gamma^\alpha = g^{\alpha\alpha'} \Gamma_{\alpha'}$ .

являются инвариантными. Но среди линейных преобразований есть те, что порождаются внутренними автоморфизмами так, что

$$\text{Aut}_b(\hat{C}_k) = G_b \cdot \hat{C}_k \cdot G_b^{-1} \stackrel{b \rightarrow 0}{\Rightarrow} (\mathbb{1} - i\Gamma_b) \cdot \hat{C}_k \cdot (\mathbb{1} - i\Gamma_b) \stackrel{b \rightarrow 0}{\Rightarrow} \hat{C}_k - i[\Gamma_b, \hat{C}_k],$$

а скаляр относительно линейных преобразований переходит сам в себя. Поэтому

$$\hat{C}_k - i[\Gamma_b, \hat{C}_k] = \hat{C}_k$$

В итоге, скалярные операторы  $\hat{C}_k$  коммутируют со всеми генераторами группы Ли и являются инвариантами Казимира,

$$[\Gamma_b, \hat{C}_k] = 0$$

Наличие центра алгебры Ли приводит к важным физическим следствиям. Если рассматривать точное представление группы как пространство собственных векторов независимых инвариантных операторов Казимира, т.е. образующих центр алгебры Ли с фиксированными собственными значениями этих образующих, то базис состояний такого пространства называют мультиплетом, поскольку собственные значения инвариантов Казимира обязаны быть вырождены по собственным значениям одного или нескольких генераторов алгебры  $\Gamma_l$ . В самом деле, так как операторы Казимира и генератор  $\Gamma_l$  - это эрмитово самосопряженные операторы, которые коммутируют между собой, можно построить базис состояний представления из совместных собственных состояний образующих центра алгебры и генератора  $\Gamma_l$ . Но в полупростой компактной алгебре Ли найдется хотя бы один генератор  $\Gamma_\alpha$ , который не будет коммутировать с генератором  $\Gamma_l$ , поскольку в противном случае генератор  $\Gamma_l$  относился бы к инвариантной абелевой подгруппе, чего не может быть в полупростой компактной группе Ли. В итоге мы получаем условие вырождения собственного значения оператора Казимира по собственным значениям генератора  $\Gamma_l$ , как это описано в Приложении, 1. раздел 1.4 на

<sup>40</sup> Антисимметричный по какой-либо паре вклад тут же сводится к коммутатору, который выражается через линейную комбинацию генераторов, а значит, этот член выражается через величину  $g$  с меньшим числом индексов и не является независимым.

<sup>41</sup> Операция  $\mathcal{S}_{\text{sym}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  означает, что мы берем сумму следов от матричного произведения генераторов в присоединенном представлении при всех перестановках индексов генераторов, а затем делим эту сумму на число перестановок.

<sup>42</sup> Мы не проводим доказательство этого утверждения, оставляя его читателю в качестве упражнения для самостоятельной работы.

<sup>43</sup> Ясно, что чисто математически любой из генераторов алгебры можно переопределить, добавляя к нему произвольную линейную комбинацию операторов из центра алгебры. Это приведет к тому, что при вычислении коммутаторов подобных переопределенных генераторов в правой части наряду с суммой генераторов со структурными константами возникнут новые вклады с суммой по операторам центра алгебры, т.е. новый тип алгебры. Мы не углубляемся в подобные вопросы, потому что в физике генераторы построены из размерных величин с вполне определенным физическим смыслом, а их переопределение через величины другой размерности требует обоснования причин подобных преобразований. Например, в группе поворотов генераторы момента количества движения имеют вполне определенную размерность действия, а квадрат момента - квадрат действия, так что образование линейной комбинации генератора проекции момента с его квадратом, скорее всего, не имеет физического смысла.

<sup>44</sup> Естественным обобщением описанных полиномиальных инвариантов в центре алгебры Ли являются функции от образующих центр алгебры, если эти функции рассматривать как сходящиеся ряды Тейлора по степеням образующих, причем эти ряды для представлений, пространства которых образованы линейными оболочками собственных состояний операторов Казимира, сводятся к числовым рядам Тейлора по степеням собственных значений операторов Казимира.

стр. 190. Это значит, что в пространстве собственного значения оператора Казимира есть несколько состояний с разными собственными значениями генератора  $\Gamma_l$ .

Для иллюстрации расчетов кубического оператора Казимира вычислим в группе поворотов следовый тензор третьего ранга по ковариантным групповым индексам. Подстановка матриц генераторов в присоединенном представлении (I.2.23) в формулу для следа произведения трех генераторов приводит к выражению

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha_1} \text{ad } \Gamma_{\alpha_2} \text{ad } \Gamma_{\alpha_3}) &= (\text{ad } \Gamma_{\alpha_1})_{\bullet}^{\mu} (\text{ad } \Gamma_{\alpha_2})_{\bullet\lambda}^{\nu} (\text{ad } \Gamma_{\alpha_3})_{\bullet\mu}^{\lambda} = \\ &= i^3 \left( \epsilon_{\alpha_1\nu\mu'} \delta^{\mu'\mu} \right) \left( \epsilon_{\alpha_2\lambda\nu'} \delta^{\nu'\nu} \right) \left( \epsilon_{\alpha_3\mu\lambda'} \delta^{\lambda'\lambda} \right) = -i \left( \epsilon_{\alpha_1\nu\mu'} \delta^{\nu'\nu} \epsilon_{\alpha_2\lambda\nu'} \right) \left( \delta^{\mu'\mu} \epsilon_{\alpha_3\mu\lambda'} \delta^{\lambda'\lambda} \right) = \\ &= i (\delta_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{\mu'\lambda} - \delta_{\alpha_1\lambda} \delta_{\alpha_2\mu'}) \delta^{\mu'\mu} \delta^{\lambda'\lambda} \epsilon_{\alpha_3\lambda\mu} = -i \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \end{aligned}$$

так что симметризация полностью антисимметричного тензора Леви-Чивиты дает тождественный нуль, и кубический оператор Казимира равен нулю в отличие от квадратичного оператора Казимира, который задает квадрат момента количества движения.

Образующие центра алгебры Ли независимые операторы Казимира важны при изучении представлений алгебры Ли: собственные значения независимых операторов Казимира однозначно задают неприводимые представления, которые мы определим позже в Главе 2, 2 на стр. 80 как нетривиальные классы эквивалентности элементов пространства представления по отношению к групповым преобразованиям.

Ответ на вопрос о числе независимых инвариантов мы получим в ходе построения представлений групп Ли.

### Киселев-2022-1

2. Докажите, что отличный от нуля след симметризованного произведения генераторов в точном неприводимом представлении  $T_R(\mathfrak{G})$  пропорционален следу произведения тех же генераторов в присоединенном представлении полупростой алгебры Ли,

$$\mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr}(\Gamma_{\alpha_1} \cdots \Gamma_{\alpha_k})_R = K_{\text{ad}}^R[k] \mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha_1} \cdots \text{ad } \Gamma_{\alpha_k}),$$

где  $K_{\text{ad}}^R[k]$  - постоянная, которая не зависит от ни от выбора координат в группе, ни от базиса состояний в представлении.

Решение. В точном представлении  $T_R(\mathfrak{G})$  прообраз  $\mathbb{1}_R$  - это единственный элемент группы  $\mathfrak{G}$ , равный единице  $\mathfrak{e}$ , а отображение генераторов в генераторы присоединенного представления является изоморфизмом,

$$\Gamma_{\alpha_m} \leftrightarrow \text{ad } \Gamma_{\alpha_m},$$

так что все свойства произведения матриц генераторов и преобразования этого произведения при замене координат группы в двух представлениях совпадают. Отличаются только размерности представлений:  $\mathcal{D}_R$  и  $\mathcal{D}_{\text{ad}} = N_G$ .

По условию, отличный от нуля симметричный ковариантный тензор  $k$ -того ранга относительно преобразований координат группы в касательном пространстве

$$\mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha_1} \cdots \text{ad } \Gamma_{\alpha_k}) = g_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$$

является инвариантным относительно замен базиса в векторном пространстве представления, и с его помощью задается инвариантный оператор Казимира  $k$ -того порядка, собственное значение которого, вообще говоря, зависит от представления,

$$\hat{C}_k^R = g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} (\Gamma^{\alpha_1} \dots \Gamma^{\alpha_k})_R, \quad \hat{C}_k^{\text{ad}} = g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \text{ad } \Gamma^{\alpha_1} \dots \text{ad } \Gamma^{\alpha_k}$$

Для неприводимого представления оператор Казимира - это диагональная матрица в этом представлении, каждый элемент которой - собственное значение этого оператора в данном представлении:

$$\hat{C}_k^R = C_k^R \cdot \mathbb{1}_R, \quad \hat{C}_k^{\text{ad}} = C_k^{\text{ad}} \cdot \mathbb{1}_{\text{ad}}$$

Мы рассматриваем случай, когда  $C_k^{\text{ad}} \neq 0$ .

Матрица

$$\mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} (\Gamma_{\alpha_1} \dots \Gamma_{\alpha_k})_R$$

построена из эрмитовых матриц генераторов, а симметризация приводит к тому, что симметризованное произведение является эрмитовой матрицей: для композиции двух эрмитовых матриц это утверждение элементарно, и тогда по индукции умножение симметризованного эрмитова произведения матриц еще на одну эрмитову матрицу с учетом симметрии этого произведения по перестановке матриц опять дает эрмитову матрицу. Следовательно, эрмитова матрица (I.2.42) может быть разложена по базису из единичной матрицы и бесследовых эрмитовых матриц  $\Lambda^m$  с вещественными коэффициентами  $A_m^R$ ,

$$\mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} (\Gamma_{\alpha_1} \dots \Gamma_{\alpha_k})_R = Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R \cdot \mathbb{1}_R + \sum (A_m^R)_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \Lambda^m.$$

И точно также для присоединенного представления

$$\mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{ad } \Gamma_{\alpha_1} \dots \text{ad } \Gamma_{\alpha_k} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\text{ad}}} g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \cdot \mathbb{1}_{\text{ad}} + \sum (A_m^{\text{ad}})_{\alpha_1 \dots \alpha_k} (\Lambda_{\text{ad}})^m$$

При взятии следа в разложении останется только вклад от единичной матрицы, например,

$$\text{tr} (\mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{ad } \Gamma_{\alpha_1} \dots \text{ad } \Gamma_{\alpha_k}) = \frac{1}{\mathcal{D}_{\text{ad}}} g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \cdot \text{tr } \mathbb{1}_{\text{ad}} = g_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$$

В силу изоморфизма неприводимых представлений тензоры над касательным пространством группы,  $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^R$  и  $g_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ , которые возникают при разложении произведений генераторов

$$\mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} (\Gamma_{\alpha_1} \dots \Gamma_{\alpha_k})_R \longleftrightarrow \mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{ad } \Gamma_{\alpha_1} \dots \text{ad } \Gamma_{\alpha_k}$$

также изоморфны, так как

$$\mathbb{1}_R \leftrightarrow \mathbb{1}_{\text{ad}}, \quad Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R \leftrightarrow g_{\alpha_1 \dots \alpha_k}.$$

Изоморфизм означает, что тензоры отличаются разве что на скалярный множитель,

$$Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R = K^R g_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$$

который легко найти, так как

$$g^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} (\Gamma_{\alpha_1} \dots \Gamma_{\alpha_k})_R = C_k^R \cdot \mathbb{1}_R$$

т.е.

$$g^{\alpha_1 \dots \alpha_k} Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R = C_k^R$$



откуда

$$C_k^R = K^R g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} g^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = K^R C_k^{\text{ad}} \mathcal{D}_{\text{ad}}$$

где мы воспользовались определением симметричного ковариантного тензора  $k$ -того ранга (I.2.40) и операторов Казимира (I.2.41 в случае присоединенного представления).

Значит,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr} (\Gamma_{\alpha_1} \cdots \Gamma_{\alpha_k})_R &= Q_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^R \text{tr} \mathbb{1}_R = K^R g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \cdot \mathcal{D}_R = \frac{C_k^R \mathcal{D}_R}{C_k^{\text{ad}} \mathcal{D}_{\text{ad}}} \cdot g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \\ &= K_{\text{ad}}^R[k] g_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = K_{\text{ad}}^R[k] \mathcal{S}_{\text{sym}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \text{tr} (\text{ad } \Gamma_{\alpha_1} \cdots \text{ad } \Gamma_{\alpha_k}). \end{aligned}$$

В итоге,

$$K_{\text{ad}}^R[k] = \frac{C_k^R \mathcal{D}_R}{C_k^{\text{ad}} \mathcal{D}_{\text{ad}}}, \quad C_k^{\text{ad}} \neq 0$$

и мы показали, что искомый коэффициент  $K_{\text{ad}}^R[k]$  действительно определяется собственными значениями операторов Казимира  $k$ -того порядка и размерностями представлений.

В частности, в принятой нормировке квадратичный оператор Казимира в присоединенном представлении имеет собственное значение, равное единице, так как

$$\hat{C}_2^{\text{ad}} = g^{\alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{2} (\text{ad } \Gamma_{\alpha_1} \text{ad } \Gamma_{\alpha_2} + \text{ad } \Gamma_{\alpha_2} \text{ad } \Gamma_{\alpha_1}) = g^{\alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{\mathcal{D}_{\text{ad}}} g_{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \mathbb{1}_{\text{ad}} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\text{ad}}} g^{\alpha_1 \alpha_2} g_{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \mathbb{1}_{\text{ad}} = \frac{1}{\mathcal{D}_{\text{ad}}} \mathcal{D}_{\text{ad}} \cdot \mathbb{1}_{\text{ad}} = \mathbb{1}_{\text{ad}}$$

Поэтому след произведения двух генераторов в неприводимом представлении пропорционален метрике Киллинга, которая задает след в присоединенном представлении,

$$\text{tr} (\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta})_R = C_2^R \frac{\mathcal{D}_R}{\mathcal{D}_{\text{ad}}} g_{\alpha\beta} \equiv T_R \delta_{\alpha\beta}$$

где введено общепринятое обозначение для постоянной  $T_R$ , которая задает коэффициент пропорциональности следа единичной евклидовой метрике и называется индексом Дынкина.

Другое стандартное обозначение  $C_A \equiv T_{\text{ad}}$ , и, следовательно, метрика Киллинга простой компактной группы Ли в этих терминах

$$g_{\alpha\beta} = C_A \delta_{\alpha\beta}, \quad C_A > 0$$

Тогда обратная метрика

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{C_A} \delta^{\alpha\beta}$$

Однако в литературе для определения квадратичного оператора Казимира принято использовать оператор, пропорциональный стандартному, когда вместо обратной метрики для свертки генераторов используется символ Кронекера. Мы установили, что

$$\delta^{\alpha\beta} = C_A g^{\alpha\beta}$$

Тогда, например, квадратичный оператор Казимира (с тильдой) переопределяют как

$$\tilde{C}_2 \equiv \delta^{\alpha\beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \Gamma_\alpha = C_A \hat{C}_2$$

В частности, для присоединенного представления  $\tilde{C}_2^{\text{ad}} = C_A$ , но при этом выражение для индекса Дынкина остается в силе

$$T_R = \tilde{C}_2^R \frac{\mathcal{D}_R}{\mathcal{D}_{\text{ad}}}$$

### 7.1.7 Details of general concepts of Lie algebras, based on concepts below

Suppose we know a lot of theory which is explained below, let's answer general important questions about Lie algebras.

(maybe I'll change the structure later)

**How to get do some root diagrams, Dynkin diagrams and something else if we start just with commutator relations? (!!!!)**

(important question, don't have a well formulated answer yet.)

## 7.2 Lie Groups

### 7.2.1 3.1 Matrix Groups by Zhou

We review some basic examples of matrix Lie groups.

- Let  $\text{Mat}(n, \mathbb{F})$  denote the set of  $n \times n$  matrices with entries in  $\mathbb{F}$ , which will be  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{C}$ . It is not a group, because not all matrices are invertible, so we define  $GL(n, \mathbb{F})$  to be the subset of invertible matrices.

- We define the special linear group  $SL(n, \mathbb{F})$  to be the subset of  $GL(n, \mathbb{F})$  with unit determinant. In general, 'special' stands for 'unit determinant'. Considering these groups as real manifolds,  $\dim GL(n, \mathbb{R}) = n^2$ ,  $\dim GL(n, \mathbb{C}) = 2n^2$ ,  $\dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$ ,  $\dim SL(n, \mathbb{C}) = 2n^2 - 2$ . The unit determinant constraint  $\det M = 1$  is one constraint over  $\mathbb{R}$  and two constraints over  $\mathbb{C}$ , as it sets  $\det M = 1 + 0i$ .

- A Lie group is a group that is a smooth manifold, where the group operations are smooth; we'll skip the proof that the groups above are Lie groups. We define a Lie subgroup to be a subgroup of a Lie group that is also a smooth submanifold; one can show that Lie subgroups are Lie groups in themselves.

- The orthogonal group is

$$O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) | M^T M = 1\}$$

which implies  $\det M = \pm 1$ . The subset  $SO(n)$  is called the proper rotations, and

$$\dim O(n) = \dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

To show this, note that  $M^T M$  is symmetric, so subtracting the constraints gives  $n^2 - n(n+1)/2$ . Alternatively, note that  $n(n-1)/2$  is the number of independent planes in  $n$  dimensions.

- More generally, define  $O(p, q)$  as the subset of  $GL(n, \mathbb{R})$ , with  $n = p + q$ , where

$$M^T \eta M = \eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

For example, the Lorentz group is  $O(3, 1)$ . It is noncompact, and splits into four components since we also have time reversal. The dimension is still  $n(n-1)/2$ .

- Define the unitary groups as

$$U(n) = \{U \in GL(n, \mathbb{C}) | U^\dagger U = 1\}$$

Unitary matrices preserve length and have determinants with unit norm. We have

$$\dim U(n) = n^2, \quad \dim SU(n) = n^2 - 1$$

To derive this, note that we start with  $2n^2$  degrees of freedom, and the matrix  $U^\dagger U = 1$  is Hermitian. Then it contains  $n(n-1)$  constraints on the off-diagonal, but only  $n$  constraints on the diagonal, because the diagonal is automatically real. Switching to the special unitary group gives one constraint since  $\det U$  is a phase.

- As a simple example,  $U(1) \cong SU(2)$ . This is the first of a few 'accidental' Lie group isomorphisms which we'll understand later in terms of the classification of Lie algebras.

- The elements of  $SU(2)$  can be parametrized as

$$U = a_0 1 + i \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

where the  $\boldsymbol{\sigma}$  are the Pauli matrices. Thus  $SU(2) \cong S^3$  as a manifold.

- The centers of these groups only contain elements proportional to the identity, by Schur's lemma and the fact that the fundamental representation is irreducible. For example, the center of  $U(n)$  is  $\{e^{i\theta} I\} \cong U(1)$ , while the center of  $SU(n)$  is  $\{e^{2\pi i k/n} I\} \cong \mathbb{Z}_n$ .

- By varying the metric, we may also define  $O(p, q)$ ,  $SU(p, q)$ , and  $U(p, q)$ . Since Lie algebras only depend on infinitesimal structure, changing the signature doesn't change the dimension. The  $SU(n)$  and  $SO(n)$  groups are often used in particle physics, while  $SU(p, q)$  and  $SO(p, q)$  appear more often in string dualities.

- Globally, the (special) unitary groups are all connected and simply connected, and compact when the signature is definite. The groups  $SO(n)$  are connected and compact, but not simply connected, with double cover  $\text{Spin}(n)$ .

Note. Generally, when we define a subset of  $\mathbb{R}^n$  by constraint equations, the result is not necessarily a manifold; we get an object called an algebraic variety which may have singular points. In this case the group structure forbids this: if there were a singularity at  $g_1$ , then there must be a singularity at any other group element  $g_2$ , since the action of multiplication by  $g_2 g_1^{-1}$  is smooth. But varieties cannot be singular everywhere, so the group must be smooth everywhere.

Example. We consider the possible eigenvalues of  $M \in O(n)$ . Since  $M$  is real, eigenvalues come in complex conjugate pairs. Moreover, since  $M$  preserves lengths, they have norm 1. Thus for  $n = 2$  we have eigenvalues  $e^{\pm i\theta}$  and for  $n = 3$  we have eigenvalues 1 and  $e^{\pm i\theta}$ . The eigenvector with  $\lambda = 1$  specifies the axis of rotation.

The general group element of  $SO(3)$  can be written as

$$M(\hat{\mathbf{n}}, \theta)_{ij} = \cos \theta \delta_{ij} + (1 - \cos \theta) n_i n_j - \sin \theta \epsilon_{ijk} n_k$$

This is redundant, since  $M(\hat{\mathbf{n}}, 2\pi - \theta) = M(-\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ . To remove this we restrict  $\theta \in [0, \pi]$  and identify  $(\hat{\mathbf{n}}, \pi)$  with  $(-\hat{\mathbf{n}}, \pi)$ . Then the  $SO(3)$  group manifold is obtained by taking the ball  $B_3$  and identifying antipodal points on the boundary.

Example. There is an embedding of  $SU(n)$  in  $SO(2n)$ . This is intuitive because each complex dimension can be thought of as two real dimensions. Formally, the map is

$$U = U_1 + iU_2 \mapsto \begin{pmatrix} U_1 & -U_2 \\ U_2 & U_1 \end{pmatrix}$$

where  $U_1$  and  $U_2$  are real. This is an orthogonal matrix, and it is in  $SO(2n)$  since  $SU(n)$  is connected.

### 7.2.2 3.2 Lie Algebras by Zhou

We begin with some fundamental definitions.

- A Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is a vector space with a bracket operation  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  satisfying antisymmetry, linearity, and the Jacobi identity,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Its dimension is the dimension of  $\mathfrak{g}$  as a vector space. The Lie algebra is real if it is over  $\mathbb{R}$  and complex if it is over  $\mathbb{C}$ .

- For any vector space  $V$ , given an associative linear product  $\star : V \times V \rightarrow V$ , the commutator  $[X, Y] = X \star Y - Y \star X$  is a Lie bracket. For example, for the vector space of matrices such a product is matrix multiplication.

- For a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  over  $\mathbb{F}$  with basis  $T^a$ , we define

$$[T^a, T^b] = f_c^{ab} T^c$$

where the  $f_c^{ab} \in \mathbb{F}$  are called the structure constants. They are antisymmetric in  $a$  and  $b$  by the antisymmetry of the bracket, while the Jacobi identity gives

$$f_c^{ab} f_e^{cd} + f_c^{da} f_e^{cb} + f_c^{bd} f_e^{ca} = 0.$$

Here one lower index is free, another is contracted, and the rest are cyclically permuted.

- A Lie algebra isomorphism is a map  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  which is an isomorphism of vector spaces and preserves the bracket. A Lie algebra homomorphism is defined similarly.

- A subalgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  is a subspace of  $\mathfrak{g}$  which satisfies  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ . An ideal of  $\mathfrak{g}$  is a subalgebra which satisfies  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ . We now give some examples of ideals.

- The empty set and all of  $\mathfrak{g}$  are trivially ideals; all others are nontrivial ideals.
- The center  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  is the set of elements in  $\mathfrak{g}$  which have vanishing bracket with all of  $\mathfrak{g}$ .
- If  $\mathfrak{h}$  and  $\mathfrak{k}$  are ideals, so are  $\mathfrak{h} + \mathfrak{k}$ ,  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ , and  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ .
- The kernel of any Lie algebra homomorphism is an ideal; this is really the motivation behind the definition. They are analogous to normal subgroups of groups.

- We write  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$  if this holds considering the Lie algebras as vector spaces, and  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] = 0$ .
- An abelian Lie algebra is one where the bracket identically vanishes, i.e.  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ .
- We say  $\mathfrak{g}$  is simple if it is nonabelian and has no nontrivial ideals, and  $\mathfrak{g}$  is semi-simple if it has no abelian ideals; then semi-simple Lie algebras are direct sums of simple ones.

Note. For completeness, we'll say a bit more about the general structure of Lie algebras.

- The derived algebra  $\mathfrak{i} = \text{span}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$  is the set of linear combinations of brackets in  $\mathfrak{g}$ . A Lie algebra is perfect if  $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$ , so all semi-simple Lie algebras are perfect.

- The derived series is defined by  $\mathfrak{i}_n = \text{span}([\mathfrak{i}_{n-1}, \mathfrak{i}_{n-1}])$  with  $\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{i}$ , and a Lie algebra is solvable if  $\mathfrak{i}_n$  is empty for some  $n$ . Intuitively a solvable Lie algebra is "almost commutative", while a semisimple Lie algebra is the opposite: we could have equivalently defined a semi-simple Lie algebra as one with no solvable ideals.

- As an example, the subalgebra of upper triangular matrices in  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$  is solvable, as taking repeated commutators sets more and more diagonals to zero. A theorem due to Lie states that all representations of a solvable Lie algebra  $\mathfrak{g}$  are upper-triangular in some basis, and moreover every complex irrep of a solvable Lie algebra is one-dimensional. Hence solvable Lie algebras behave just like abelian ones in terms of representation theory.

• The radical  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  is the sum of all solvable ideals of  $\mathfrak{g}$ . Then there is a short exact sequence

$$0 \rightarrow \text{rad}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0$$

where  $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  is semisimple.

• Levi's theorem states that, furthermore, every Lie algebra is the direct sum of a solvable Lie algebra and a semisimple one, which is in turn the direct sum of simple Lie algebras.

• For example, the Poincare algebra decomposes as  $\mathbb{R}^4 \oplus \mathfrak{so}(3, 1)$ . Note that the semisimple part is not an ideal. In all complex irreps, elements in the radical act by scalar multiplication.

We now formally relate Lie groups and Lie algebras, for the case of matrix Lie groups.

• Given an  $n$ -dimensional matrix Lie group  $G$ , the tangent space  $\mathfrak{g} = T_e(G)$  is an  $n$ -dimensional vector space. Given coordinates  $\theta$  on  $G$ , the tangent space is spanned by the vectors

$$X^i = \left. \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^i} \right|_{\theta=0}$$

The bracket operation is simply the matrix commutator, which we know satisfies the axioms.

• The nontrivial step is to show closure under the bracket. Consider two paths

$$g_i(t) = 1 + X_i t + W_i t^2 + O(t^3)$$

which satisfy

$$g_1(t)g_2(t) = 1 + (X_1 + X_2)t + (X_1X_2 + W_1 + W_2)t^2 + O(t^3)$$

with a similar expression for  $g_2(t)g_1(t)$ . Then  $h(t) = g_1^{-1}(t)g_2^{-1}(t)g_1(t)g_2(t)$  obeys

$$g_1(t)g_2(t) = g_2(t)g_1(t)h(t)$$

and hence we have

$$h(t) = 1 + [X_1, X_2]t^2 + O(t^3)$$

Then  $h(\sqrt{t})$  is a curve with tangent vector  $[X_1, X_2]$ , as desired. We see the Lie bracket is the infinitesimal version of the commutator of group elements.

We now give some examples of matrix Lie algebras. Note that all these examples are real Lie algebras even though the matrices are complex; the dimension are real dimensions. A complex Lie algebra would instead give us a complex Lie group, which lives on a complex manifold; we will not consider such objects here.

• For  $GL(n, \mathbb{F})$ , the Lie algebra is  $\text{Mat}(n, \mathbb{F})$  since the determinant is continuous. Restricting to  $SL(n)$  restricts the Lie algebra to contain matrices with zero trace, because

$$\det \exp X = \exp \text{tr} X$$

This provides an easy way to compute  $\dim GL(n, \mathbb{F})$ , as it is equal to  $\dim \text{Mat}(n, \mathbb{F})$ .

• For  $O(n)$ , we have  $R^T R = 1$  and setting  $R = 1 + X$  gives  $X^T = -X$ . Note that the Lie algebra of  $SO(n)$  is the same, because antisymmetric matrices are automatically traceless.

• Similarly, for  $U(n)$ , we get  $X^\dagger = -X$ . We restrict to  $SU(n)$  by requiring  $\text{tr} X = 0$ , which counts as a single constraint since the trace of an anti-Hermitian matrix is imaginary.

• We consider the structure of  $\mathfrak{su}(2)$  in detail. One basis is

$$T^a = -\frac{i}{2}\sigma_a$$

This differs from the angular momentum by a factor of  $i$ , since it is anti-Hermitian. Now

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} I + i \epsilon_{abc} \sigma_c$$

which implies that in our basis,  $f_c^{ab} = \epsilon_{abc}$ .

- Similarly, we may define the following basis for  $\mathfrak{so}(3)$ ,

$$T^1 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} & \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

where has the properties

$$(T^a)_{bc} = -\epsilon_{abc}, \quad [T^a, T^b] = \epsilon_{abc} T^c$$

which establishes that  $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ .

Next we define some maps on the Lie group and Lie algebra.

- Left translation  $L_h$  is a diffeomorphism of  $G$  with corresponds to multiplying by  $h$  on the left,

$$L_h g = hg$$

Taking the differential gives a map  $L_h^* : T_g \rightarrow T_{hg}$ .

- For matrix Lie groups,  $L_h^*$  is implemented by matrix multiplication. That is, for  $X \in \mathfrak{g}$ ,

$$L_h^*(X) = hX \in T_h$$

To prove this explicitly, note that a curve  $g(t) = I + tX + O(t^2)$  maps by  $L_h$  to the curve  $h(t) = h + thX + O(t^2)$  which passes through  $h$  with tangent vector  $hX$ .

- Given  $X \in \mathfrak{g}$ , we may define the left-invariant vector field  $V$  by

$$V(g) = L_g^*(X)$$

Conversely, if a manifold has a Lie group structure, this means it has a global field of frames, which is a strong constraint; it means that  $S^2$  cannot be a Lie group.

- An integral curve  $g(t)$  of the left-invariant vector field  $V$  associated with  $X \in \mathfrak{g}$  satisfies

$$\frac{dg(t)}{dt} = V(g(t)) = L_{g(t)}^*(X) = g(t)X, \quad g(t) = \exp(tX)$$

where the exponential for a matrix Lie group is defined as a series.

- The curve  $\exp(tX)$  defines a one-parameter subgroup with

$$\exp(t_1 X) \exp(t_2 X) = \exp(t_2 X) \exp(t_1 X) = \exp((t_1 + t_2) X)$$

by expanding out the series. Note that the subgroup might be isomorphic to either  $\mathbb{R}$  or  $U(1)$ .

- Setting  $t = 1$ , we have a map  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  which is bijective in a neighborhood of the identity. It is not injective if  $G$  has a  $U(1)$  subgroup, and it is obviously not surjective if  $G$  is not connected.

• If  $G$  is connected, it turns out that the exponential map is not necessarily surjective if  $G$  is not compact, though any group element can still be written as the product of two exponentials. On the other hand, it turns out that the exponential map is surjective for the Lorentz group, which isn't compact, but the proof is difficult and relies on particular properties of that group.

- Writing  $g_X = \exp(X)$ , the Baker-Campbell-Hausdorff theorem states

$$g_X g_Y = g_Z, \quad Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots$$

Thus the group multiplication law is encoded in the Lie bracket.

Example. The group  $SU(2)$  is a double cover of  $SO(3)$  by the map

$$d : SU(2) \rightarrow SO(3), \quad d(A)_{ij} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\sigma_i A \sigma_j A^\dagger)$$

where  $\ker d = \{\pm I\}$ , as can be checked by using the identity

$$\sum_i (\sigma_i)_{\alpha\beta} (\sigma_i)_{\delta\gamma} = 2\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\delta\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma}$$

The inverse of this map is

$$A = \pm \frac{I_2 + \sigma_i R_{ij} \sigma_j}{2\sqrt{1 + \operatorname{tr} R}}$$

### 7.2.3 3.3 Representations

We now define representations for Lie group and Lie algebras. We will be casual with notation, writing equations that only work for matrix Lie groups.

- A representation  $D(g)$  of a Lie group is a homomorphism  $D : G \rightarrow \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ , or alternatively an action of  $G$  on  $V$  by linear transformations. A representation of a Lie algebra is a linear map  $d : \mathfrak{g} \rightarrow \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$  which preserves the bracket. Here,  $n$  is the dimension of the representation, which may be different from the dimension  $m$  of the group and algebra.

- Every representation  $D$  of  $G$  corresponds to a representation  $d$  of  $\mathfrak{g}$  by

$$d(X) = \left. \frac{d}{dt} D(g(t)) \right|_{t=0}$$

for a curve  $g(t)$  passing through the identity at  $t = 0$  with tangent vector  $X$ . That is,

$$D(1_m + tX + O(t^2)) = 1_n + td(X) + O(t^2).$$

- Linearity is easy to see, but checking the bracket is preserved is a bit trickier. Consider curves  $g_1(t)$  and  $g_2(t)$  as defined above. Then as before,

$$h(t) = g_1^{-1}(t)g_2^{-1}(t)g_1(t)g_2(t) = 1_m + t^2 [X_1, X_2] + O(t^3)$$

Taking the representation of both sides,

$$D(h(t)) = 1_n + t^2 d([X_1, X_2]) + O(t^3).$$

On the other hand, we can also write

$$D(h(t)) = D(g_1^{-1}(t)) D(g_2^{-1}(t)) D(g_1(t)) D(g_2(t)) = 1_n + t^2 [d(X_1), d(X_2)] + O(t^3)$$

by the same logic, giving the result.

- Similarly, given a representation  $d(X)$ , we can define  $D(g) = \exp d(X)$  where  $g = \exp X$ . Since the exponential map is not generally bijective, this may not be a representation of  $G$ , but it is at least a representation 'locally'. To verify it is a representation, note that if  $g_1 = \exp(X_1)$  and  $g_2 = \exp(X_2)$ ,

$$\begin{aligned}
D(g_1 g_2) &= \exp \left( d \left( X_1 + X_2 + \frac{1}{2} [X_1, X_2] + \dots \right) \right) \\
&= \exp \left( d(X_1) + d(X_2) + \frac{1}{2} [d(X_1), d(X_2)] + \dots \right) \\
&= \exp(d(X_1)) \exp(d(X_2)) = D(g_1) D(g_2)
\end{aligned}$$

where we applied the Baker-Campbell-Hausdorff theorem twice.

• The representation space of a representation of a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is also called a  $\mathfrak{g}$ -module. In general, for a ring  $R$ , an  $R$ -module is simply a vector space where the scalars are elements of  $R$ . A Lie algebra is a ring where the operation is the bracket, and 'scalar multiplication' by  $X$  in the  $\mathfrak{g}$ -module is application of  $d(X)$ .

We now give some basic examples of Lie group and Lie algebra representations.

- Starting with the trivial representation  $D(g) = I$ , we get the trivial representation  $d(X) = 0$ .
- Starting from the fundamental representation  $D(g) = g$ , for an  $n$ -dimensional matrix Lie group, we have the fundamental representation  $d(X) = X$ , which is also  $n$ -dimensional.
- The adjoint representation of  $G$  has representation space  $\mathfrak{g}$ , and

$$D(g)X = (\text{Ad } g)X = gXg^{-1}$$

To show the action of  $\text{Ad } g$  is closed, note that if  $X$  is the tangent vector of a curve  $h(t)$ , then  $(\text{Ad } g)X$  is the tangent vector of a curve  $gh(t)g^{-1}$ .

- The adjoint representation of  $G$  corresponds to the adjoint representation of  $\mathfrak{g}$ ,

$$d(X) = \text{ad}_X, \quad \text{ad}_X(Y) = [X, Y]$$

whose dimension is also  $\dim \mathfrak{g}$ . Concretely, expand in a basis  $T^a$  of  $\mathfrak{g}$ , giving

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y] = X_a Y_b [T^a, T^b] = X_a Y_b f_c^{ab} T^c$$

Therefore, we have

$$[\text{ad}_X(Y)]_c = (X_a f_c^{ab}) Y_b, \quad (\text{ad}_X)_c^b = X_a f_c^{ab}.$$

- If we didn't know how the adjoint representation was derived, we would have to check that

$$[\text{ad}_X, \text{ad}_Y] = \text{ad}_{[X, Y]}$$

where  $[\cdot, \cdot]$  means the commutator on the left and the Lie bracket on the right. This follows directly from the Jacobi identity, so one might say the point of the Jacobi identity for an abstract Lie algebra is to ensure that the adjoint representation still exists.

- If  $\mathfrak{g}$  is semi-simple, then the adjoint representation is faithful, because its kernel is the center of  $\mathfrak{g}$ , i.e. an abelian ideal. If  $\mathfrak{g}$  is simple, then the adjoint representation is irreducible, because if  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  were a nontrivial invariant subspace then  $\mathfrak{h}$  would be a nontrivial ideal.

Note. Below are some powerful general results, which we will not prove.

- For every Lie group  $G$  there is a bijection between connected Lie subgroups  $H \subseteq G$  and Lie subalgebras  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  given by the tangent map.

• Any finite-dimensional Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is isomorphic to the Lie algebra of a Lie group. Specifically, there is a unique connected simply-connected Lie group  $G$  with Lie algebra  $\mathfrak{g}$ , and all others are of the form  $G/Z$  for a discrete central subgroup  $Z \subseteq G$ .



• If  $G_1$  and  $G_2$  are Lie groups and  $G_1$  is connected and simply connected, then  $\text{Hom}(G_1, G_2) = \text{Hom}(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ . Combining this with the previous point, the categories of finite-dimensional Lie algebras and connected, simply-connected Lie groups are equivalent.

• A crucial ingredient in the proof of this statement is Ado's theorem, which states that every Lie algebra is isomorphic to a matrix Lie algebra. This allows us to focus on matrix Lie algebras without loss of generality.

### 7.2.4 3.4 Integration by Zhou

In this section, we define a measure for integration over a Lie group.

• Previously, we showed the orthogonality of characters for a finite group. We would like to do the same for a continuous group, but this requires replacing the sum  $\sum_g$  with an integration measure  $\int d\mu(g)$ .

• In the case of a finite group, the crucial step was being able to 'shift the sum',

$$A = \sum_g D^\dagger(g) X D(g) \text{ satisfies } D^\dagger(g) A D(g) = A$$

For a Lie group, we have

$$D^\dagger(g) \left( \int d\mu(g') D^\dagger(g') X D(g') \right) D(g) = \int d\mu(g') D^\dagger(g'g) X D(g'g) = \int d\mu(g'g^{-1}) D^\dagger(g') X D(g').$$

Then the analogous requirement is  $d\mu(g) = d\mu(g')$  for any two group elements.

• More concretely, suppose we take a small patch of the group manifold. The patch can be moved around by multiplication by a group element, and we demand this leaves the measure of the patch invariant. Alternatively, we are defining a volume form invariant under group multiplication, which shows that all Lie groups are orientable.

• The 'volume' of a group is  $\int d\mu(g)$ . Unlike the cardinality of a group, it has no canonical normalization; it is finite when the group is compact.

• Expanding in terms of coordinates, we are requiring

$$d\mu(g) = dx^1 \dots dx^n \rho(x^1, \dots, x^n), \quad dx^1 \dots dx^n \rho(x^1, \dots, x^n) = dx'^1 \dots dx'^n \rho(x'^1, \dots, x'^n)$$

where the primed quantities are defined by group multiplication.

• As a first example, consider  $SO(2)$ . If we parametrize by  $\theta$ , then the group multiplication law  $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$  means that a segment of length  $\delta\theta$  is mapped to a segment of length  $\delta\theta$ . Then we have  $\rho(\theta) = \rho(\theta')$  for any two angles, so  $d\mu(\theta) = d\theta$ . In this case, orthogonality of characters recovers Fourier series.

• Next, consider the restricted Lorentz group  $SO(1, 1)$ . If we parametrize by rapidity  $\varphi$ , we have  $L(\varphi)L(\varphi') = L(\varphi + \varphi')$  so  $d\mu(\varphi) = d\varphi$ . On the other hand, if we parametrize by velocity, we have to calculate. We have

$$L(u)L(v) = L(v'), \quad v' = \frac{v + u}{1 + vu}$$

Now consider the segment  $[v, v + dv]$ . A direct computation gives

$$dv' = \frac{1 - u^2}{(1 + uv)^2} dv, \quad \rho(v) = \frac{1 - u^2}{(1 + uv)^2} \rho\left(\frac{v + u}{1 + uv}\right)$$

Finally, setting  $v = 0$  gives  $\rho(u) = \rho(0)/(1 - u^2)$ . We could also have found this by changing variables from rapidity, picking up a Jacobian. In both cases, the group volume is infinite.

• The analogue of the great orthogonality theorem is called the Peter-Weyl theorem, and it applies to all compact Lie groups. It contains as special cases many of the orthogonality and completeness results we've used.

As an application, we consider the extended example of  $SO(3)$ .

• We recall that elements  $SO(3)$  can be parametrized as  $R(\mathbf{n}, \psi)$  where  $\psi$  is the rotation angle. Hence  $SO(3)$  is a three-dimensional ball with opposite points on the boundary identified. The equivalence classes are rotations with the same  $\psi$ .

• Now consider computing the character of the spin- $j$  representation of  $SO(3)$  on the equivalence class with angle  $\psi$ . It is convenient to choose  $\mathbf{n} = \mathbf{z}$ , so that

$$R(\mathbf{z}, \psi)|jm\rangle = e^{i\psi J_3}|jm\rangle = e^{im\psi}|jm\rangle$$

Then the character is

$$\chi(j, \psi) = \sum_{m=-j}^j e^{im\psi} = \frac{\sin(j + 1/2)\psi}{\sin(\psi/2)}$$

• Choosing coordinates  $(\theta, \varphi, \psi)$ , the measure on  $SO(3)$  has the form

$$d\mu(g) = d\Omega d\psi f(\psi), \quad d\Omega = d\theta d\varphi \sin \theta$$

by rotational invariance. For small  $\psi$ , we expect  $f(\psi) \propto \psi^2$  since the group is 'locally Euclidean'.

• The trick is to consider rotations next the identity, expanded as

$$R(\delta, \epsilon, \sigma) = I + \begin{pmatrix} 0 & -\delta & \sigma \\ \delta & 0 & -\epsilon \\ -\sigma & \epsilon & 0 \end{pmatrix} = I + A$$

By direct multiplication, we have  $R(\delta, \epsilon, \sigma)R(\delta', \epsilon', \sigma') \approx R(\delta + \delta', \epsilon + \epsilon', \sigma + \sigma')$  up to second order terms. Then the measure is  $d\delta d\epsilon d\sigma$ .

• Next, we transport this result across the group by multiplying it with a finite rotation and seeing how it changes  $(\theta, \varphi, \psi)$ . We have

$$R(\mathbf{n}, \psi') = R(\mathbf{z}, \psi)R(\delta, \epsilon, \sigma), \quad R(\mathbf{z}, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A long calculation shows that

$$n_1 = \frac{\epsilon \sin \psi + \sigma(1 + \cos \psi)}{2 \sin \psi}, \quad n_2 = (-\sigma \sin \psi + \epsilon(1 + \cos \psi))(2 \sin \psi), \quad n_3 = 1, \quad \psi' = \psi + \delta$$

to first order.

• Switching back to our original parametrization, we have

$$d\Omega d\psi = d\epsilon d\sigma \left( \frac{\partial(n_1, n_2)}{\partial(\epsilon, \sigma)} \right) d\delta$$

where the factor in parentheses is a Jacobian, and we only need to evaluate a  $2 \times 2$  Jacobian because  $\delta$  only affects  $\psi$ . We thus find

$$d\mu(g) = d\Omega d\psi \sin^2(\psi/2)$$

which indeed is proportional to  $\psi^2$  for small  $\psi$ . Thus the integral of a class function  $F(g)$  is

$$\int d\mu(g)F(g) = \int_0^\pi d\psi \sin^2(\psi/2)F(\psi)$$

- Using this result, we can check character orthogonality,

$$\int d\mu(g)\chi(k, \psi)^*\chi(j, \psi) = \frac{\pi}{2}\delta_{jk}$$

We can also run this argument in reverse; character orthogonality can be used to find the measure. We can also decompose tensor products of representations, where the characters multiply, reproducing the usual Clebsch-Gordan decomposition.

Note. The general procedure works as follows. For a matrix Lie group, consider some parametrization  $A(\xi)$  where the coordinates are  $\xi$  and  $A \in G$ . Take a basis  $J_\alpha$  of  $\mathfrak{g}$ , and let

$$A^{-1}\frac{\partial A}{\partial \xi_i} = J_\alpha \tilde{A}(\xi)_i^\alpha$$

Then the weight function for the measure is

$$\rho(\xi) = \det \tilde{A}(\xi)$$

To understand this, note that the vectors  $\partial A/\partial \xi_i$  form a parallelepiped at  $A(\xi)$  and left multiplying by  $A^{-1}$  moves it to the identity. Here its volume can be compared to the parallelepiped formed by the Lie algebra elements  $J_\alpha$ , with the conversion factor being the Jacobian of the transformation between them. We have essentially done this procedure above.

Finally, we turn to the final example of  $SU(2)$ .

- As we've seen,  $SU(2)$  is geometrically the sphere  $S^3$  by the parametrization

$$U = t + i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad t^2 + x^2 = 1$$

By symmetry, the measure on  $SU(2)$  is just the rotationally symmetric measure on the sphere.

- To find the measure on the sphere, we define  $t = \cos \zeta$  and parametrize  $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  by the usual spherical coordinates. For a fixed value of  $t$ , the  $\mathbf{x}$  coordinates trace out a sphere of radius  $\sin \zeta$ . Then the measure is  $\sin^2 \zeta d\Omega d\zeta$ .

- To compare this with our earlier result, note that  $\psi = 2\zeta$  is the angle of rotation, so the integral of a class function of  $SU(2)$  would be

$$\int_0^{2\pi} d\psi \sin^2(\psi/2)F(\psi)$$

This is identical to our result for  $SO(3)$ , which makes sense since the two are locally isomorphic, but has double the integration range since  $SU(2)$  double covers  $SO(3)$ .

- We can now apply a 'reality check' to the spin- $j$  representation of  $SU(2)$ , using

$$\eta^{(j)} = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi^{(j)}(g^2) = \frac{\int d\mu(g)\chi(j, 2\psi)}{\int d\mu(g)}$$

Carrying out the integral shows that the integer spin representations are real and the half-integer spin representations are pseudoreal.

- Finally, there is a local isomorphism between  $SO(4)$  and  $SU(2) \times SU(2)$  given by

$$W \rightarrow W' = U^\dagger W V$$

where  $W, U$ , and  $V$  are in  $SU(2)$ , and  $W$  and  $W'$  are regarded geometrically as points in  $S^3$ . Then two elements of  $SU(2)$  yield a rotation of the sphere, and it can be shown that any small rotation of the sphere can be written this way.

## 7.3 The Cartan Classification

### 7.3.1 The Cartan-Weyl Basis by Zhou

In this section, all Lie algebras are implicitly complex.

- We say  $X \in \mathfrak{g}$  is ad-diagonalizable if  $\text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  is diagonalizable. A Cartan subalgebra  $\mathfrak{h}$  of  $\mathfrak{g}$  is a maximal abelian subalgebra containing only ad-diagonalizable elements. They are not unique, but their dimension  $r = \dim \mathfrak{h}$  is, and is called the rank of  $\mathfrak{g}$ . Physically, the rank is the number of independent quantum numbers.

- The adjoint maps of the generators  $H^i$  of a Cartan subalgebra  $\mathfrak{g}$  commute, as

$$[H^i, H^j] = 0, \quad [\text{ad}_{H^i}, \text{ad}_{H^j}] = \text{ad}_{[H^i, H^j]} = 0$$

Then they are simultaneously diagonalizable, and the rest of the Lie algebra is spanned by simultaneous eigenvectors  $E^\alpha$ , called step operators, which satisfy

$$[H^i, E^\alpha] = \alpha^i E^\alpha$$

where  $\alpha$  is an  $r$ -dimensional complex vector called a root. Note that  $\alpha$  is nonzero, because elements with  $\alpha = 0$  would be in the Cartan subalgebra. A basis consisting of the  $H^i$  and  $E^\alpha$  is called a Cartan-Weyl basis of  $\mathfrak{g}$ .

- The set of roots  $\Phi$  of  $\mathfrak{g}$  is called the root space. We can think of each root  $\alpha$  as an element of the dual space  $\mathfrak{h}^*$ , so that  $\alpha(H)$  is the eigenvalue of  $E^\alpha$  under  $\text{ad}_H$ ,

$$[H, E^\alpha] = \alpha^i e_i E^\alpha = \alpha(H) E^\alpha, \quad H = H^i e_i$$

Here the  $e_i \in \mathbb{C}$  are the components of  $H$ .

Example. As we've already seen, for  $\mathfrak{su}(2)$  we have  $r = 1$ , where we may take  $\mathfrak{g}_0$  to be spanned by  $H = 2iT^3 = \text{diag}(1, -1)$ . For  $\mathfrak{su}(n)$  note that we have the commuting operators

$$(H^i)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta i} - \delta_{\alpha(i+1)} \delta_{\beta(i+1)}$$

To show that this is indeed a Cartan subalgebra, note that the general element in the span of the  $H^i$  has the form  $H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  with the  $\lambda_i$  summing to zero. Then if  $\text{ad}_H X = \mu X$ ,

$$(\lambda_\ell - \lambda_m) X_{\ell m} = \mu X_{\ell m}$$

with no summation. The solutions are of the form

$$X = E^{(r,s)}, \quad E_{\ell m}^{(r,s)} = \delta_{\ell r} \delta_{ms}, \quad \mu = \lambda_r - \lambda_s$$

with  $r \neq s$ . Together, the  $H^i$  and the  $E^{(r,s)}$  span the algebra, and all of the roots of the  $E^{(r,s)}$  are nonzero. Hence the  $H^i$  are a Cartan subalgebra and  $\mathfrak{su}(n)$  has rank  $n - 1$ .

Note. In the special case of  $\mathfrak{su}(n)$ , the ad-diagonalizable elements are precisely the diagonal elements. In general, for a matrix Lie algebra, a good guess for a Cartan subalgebra is the elements that are diagonal or almost diagonal, as we'll see in more detail below.

To make further progress, we introduce the Killing form.

- The Killing form is defined as

$$\kappa(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y)$$

It is symmetric by the cyclic property of the trace, which is a trace for linear operators on  $\mathfrak{g}$ , and bilinear, so it is an inner product.

- Explicitly, working in a basis  $\{T^a\}$ , we have

$$[X, [Y, Z]] = X_a Y_b Z_c [T^a, [T^b, T^c]] = X_a Y_b Z_c f_e^{ad} f_d^{bc} T^e$$

Finally, taking the trace contracts the indices  $e$  and  $c$  together, giving

$$\kappa(X, Y) = \kappa^{ab} X_a Y_b, \quad \kappa^{ab} = f_c^{ad} f_d^{bc}$$

where the  $\kappa^{ab}$  are the components of the Killing form.

- The Killing form is invariant under the adjoint action of  $\mathfrak{g}$ ,

$$\kappa([Z, X], Y) + \kappa(X, [Z, Y]) = 0$$

To show this, we simply expand the definitions,

$$\kappa([Z, X], Y) = \text{tr}(\text{ad}_{[Z, X]} \text{ad}_Y) = \text{tr}(\text{ad}_Z \text{ad}_X \text{ad}_Y - \text{ad}_X \text{ad}_Z \text{ad}_Y)$$

This cancels with the other term using the cyclic property of the trace. Intuitively, this is just the infinitesimal version of the adjoint action of  $G$  on  $\mathfrak{g}$ , i.e. conjugation by a group element, and the two terms come from the product rule. This indicates that the Killing form is 'the same' everywhere in the group.

- For a simple Lie algebra, it can be shown that the properties of symmetry, linearity, and invariance under the adjoint action determine the inner product up to scalar multiples.

- A real Lie algebra is of compact type if there is a basis where the Killing form is negative definite. It can be shown that every finite-dimensional complex semi-simple Lie algebra has a real form of compact type, and if a Lie group  $G$  is compact, its Lie algebra is of compact type.

- Cartan's criterion states the Killing form is nondegenerate if and only if  $\mathfrak{g}$  is semi-simple.

We'll show only the forward direction. Suppose  $\mathfrak{g}$  has an abelian ideal  $\mathfrak{i}$  so that the ideal has basis  $\{T^i\}$  and the rest of the Lie algebra has basis  $\{T^a\}$ . Then  $[T^i, T^j] = 0$  since  $\mathfrak{i}$  is abelian, and  $[T^i, T^a] \in \mathfrak{i}$  since  $\mathfrak{i}$  is an ideal.

Now consider  $\text{ad}_X \text{ad}_Y Z$  where  $Y \in \mathfrak{i}$ . If  $Z \in \mathfrak{i}$ , this is automatically zero. If  $Z \notin \mathfrak{i}$ , then  $\text{ad}_Y Z \in \mathfrak{i}$ , and hence  $\text{ad}_X \text{ad}_Y Z \in \mathfrak{i}$ . Hence  $\text{tr} \text{ad}_X \text{ad}_Y = 0$ , so  $\kappa(X, Y) = 0$  for any  $Y \in \mathfrak{i}$ , so  $\kappa$  is degenerate.

- As a partial converse, we'll show that if  $\mathfrak{g}$  is simple, the Killing form is nondegenerate. If the Killing form were degenerate, then the set of elements  $Y$  so that  $\kappa(X, Y) = 0$  for all  $X \in \mathfrak{g}$  forms a nontrivial ideal  $\mathfrak{i}$ , as

$$\kappa(X, [Z, Y]) = -\kappa([Z, X], Y) = 0$$

for any  $Z \in \mathfrak{g}$ , so  $[Z, Y] \in \mathfrak{i}$ .

Example. Consider a simple matrix Lie algebra. Then  $\text{tr} XY$  satisfies the properties of the Killing form, so it is proportional to the Killing form; this makes computations much easier. In particular, it's easy to show the Killing form is negative definite for  $\mathfrak{u}(n)$ , since for  $X \in \mathfrak{u}(n)$ ,

$$\text{tr} X^2 = -\text{tr} X X^\dagger = -\sum_{ij} |X_{ij}|^2 < 0$$

for any nonzero  $X$ .

One might wonder why  $\text{tr} X \text{tr} Y$  wouldn't work as well. This quantity vanishes identically, since  $\text{tr} E^\alpha = 0$  since there are no diagonal elements, while  $\text{tr} H^i = 0$  because the eigenvalues of  $\mathfrak{su}(2)$  representations sum to zero. Note that the latter statement fails when there are abelian ideals.

Note. The Killing form defines a metric on  $T_e G$ , and we may extend this to a metric on  $G$  by left and right-translation. Adding an extra minus sign, if  $\mathfrak{g}$  is of compact type, then the metric on  $G$  is positive definite, and it can be shown that  $G$  is compact. Geodesics corresponding to the Levi-Civita connection of this metric are precisely the one-parameter subgroups of  $G$ .

Note. The Killing form is used to raise and lower all indices in  $\mathfrak{g}$ , e.g. we may define  $f^{abc} = \kappa^{cd} f^ab_d$ . Now for a Lie algebra of compact type, suppose we choose a basis  $T^a$  where  $\kappa^{ab} = -\delta^{ab}$ . Then

$$0 = \kappa(T^a, [T^b, T^c]) + \kappa([T^b, T^a], T^c) = f^{bca} + f^{bac}$$

so in this basis,  $f^{abc}$  is totally antisymmetric. We've often chosen our bases to satisfy this, such as in  $\mathfrak{su}(2)$ , where we had  $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ . As another example, the quadratic Casimir is generally defined as  $\kappa^{ab} T_a T_b$ , but we defined it earlier as  $\sum_a (T_a)^2$  because we used this special basis.

Next, we find some more properties of the root system of a semi-simple Lie algebra.

- The roots span all of  $\mathfrak{h}^*$ . This is just because if some direction were not represented, we would have a Cartan subalgebra element that commuted with everything in the group, giving an abelian ideal.

- The roots are nondegenerate, so there is exactly one step operator  $E^\alpha$  for each root  $\alpha$ . We'll prove this fact below and simply take it as given here.

- Note that  $\text{ad}_{E^\alpha}$  raises roots by  $\alpha$ , where we regard the Cartan subalgebra itself as associated with the zero root. Then we must have

$$\kappa(H^i, E^\alpha) = 0, \quad \kappa(E^\alpha, E^\beta) = 0 \text{ if } \alpha + \beta \neq 0$$

because only  $\text{ad}_{E^\alpha} \text{ad}_{E^{-\alpha}}$  and  $\text{ad}_{H^i} \text{ad}_{H^j}$  can take roots to themselves.

- To prove these results more formally, we can use the invariance of the Killing form. Since

$$\alpha(H') \kappa(H, E^\alpha) = \kappa(H, [H', E^\alpha]) = -\kappa([H, H'], E^\alpha) = 0$$

for any  $H'$ , we must have  $\kappa(H, E^\alpha) = 0$ . Similarly

$$(\alpha(H') + \beta(H')) \kappa(E^\alpha, E^\beta) = \kappa([H', E^\alpha], E^\beta) + \kappa(E^\alpha, [H', E^\beta]) = 0$$

so if  $\alpha + \beta \neq 0$ , then  $\kappa(E^\alpha, E^\beta) = 0$ .

- Next, we can get constraints from the nondegeneracy of the Killing form.
- If  $\alpha$  is a root, so is  $-\alpha$ , with  $\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) \neq 0$ , because otherwise  $\kappa(E^\alpha, \cdot) = 0$ .
- The Killing form is nondegenerate on  $\mathfrak{h}$ , as if  $\kappa(H^i, H^j) = 0$  for all  $j$ , then  $\kappa(H^i, \cdot) = 0$ .
- Since the Killing form is a nondegenerate inner product on  $\mathfrak{h}$ , we may use it to correspond elements of  $\mathfrak{h}$  and  $\mathfrak{h}^*$  and hence define a nondegenerate inner product on  $\mathfrak{h}^*$ . In components,

$$\kappa(H, H') = \kappa^{ij} e_i e'_j, \quad H = H^i e_i, \quad H' = H^i e'_i$$

and the dual element  $H^\alpha$  of  $\alpha$  is defined by

$$\kappa(H^\alpha, H) = \alpha(H), \quad H^\alpha = (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^j H^i$$

We define an inner product on the  $H^\alpha$ , and hence an inner product on the roots, by

$$(\alpha, \beta) = \kappa(H^\alpha, H^\beta) = (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^i \beta^j.$$

The inverse here is just the result of lowering indices, analogous to how the metric and inverse metric are related in differential geometry.

Next, we work out more of the algebra in the Cartan-Weyl basis.

- By the Jacobi identity, we have

$$[H^i, [E^\alpha, E^\beta]] = -[E^\alpha, [E^\beta, H^i]] - [E^\beta, [H^i, E^\alpha]] = (\alpha^i + \beta^i) [E^\alpha, E^\beta].$$

Therefore,  $[E^\alpha, E^\beta]$  is proportional to  $E^{\alpha+\beta}$  if  $\alpha + \beta$  is a root, as anticipated above.

- For the case  $\alpha + \beta = 0$ , note that

$$\kappa([E^\alpha, E^{-\alpha}], H) = \kappa(E^\alpha, [E^{-\alpha}, H]) = \alpha(H)\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) = \kappa(H^\alpha, H)\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha})$$

where we used the invariance of the Killing form. By the results we found from nondegeneracy of the Killing form, we may conclude

$$H^\alpha = \frac{[E^\alpha, E^{-\alpha}]}{\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha})}$$

- In summary, the algebra for the step operators takes the form

$$[E^\alpha, E^\beta] = \begin{cases} \kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) H^\alpha & \alpha + \beta = 0 \\ N_{\alpha, \beta} E^{\alpha+\beta} & \alpha + \beta \in \Phi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Here, the  $N_{\alpha, \beta}$  are unknown complex numbers. Finally, we have

$$[H^\alpha, E^\beta] = (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^i [H^j, E^\beta] = (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^i \beta^j E^\beta = (\alpha, \beta) E^\beta.$$

- To simplify these relations, we rescale all of our operators, as

$$e^\alpha = \sqrt{\frac{2}{(\alpha, \alpha)\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha})}} E^\alpha, \quad h^\alpha = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} H^\alpha$$

Here we've implicitly assumed that  $(\alpha, \alpha) \neq 0$ , which we will show below. Our algebra simplifies to the final form

$$[h^\alpha, h^\beta] = 0, \quad [h^\alpha, e^\beta] = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} e^\beta, \quad [e^\alpha, e^\beta] = \begin{cases} h^\alpha & \alpha + \beta = 0 \\ n_{\alpha, \beta} e^{\alpha+\beta} & \alpha + \beta \in \Phi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

### 7.3.2 The Root Space by Zhou

Our normalization above makes it easy to identify  $\mathfrak{sl}(2)$  subalgebras of  $\mathfrak{g}$ .

- For any root  $\alpha$ , the set  $\{h^\alpha, e^\alpha, e^{-\alpha}\}$  obeys

$$[h^\alpha, e^{\pm\alpha}] = \pm 2e^{\pm\alpha}, \quad [e^\alpha, e^{-\alpha}] = h^\alpha$$

which are exactly the commutation relations for  $\mathfrak{sl}(2)$ . We call this subalgebra  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$ .

- Define the  $\alpha$ -string passing through  $\beta$  as the set

$$S_{\alpha, \beta} = \{\beta + n\alpha \in \Phi | n \in \mathbb{Z}\}$$

and define a corresponding subspace of  $\mathfrak{g}$ ,

$$V_{\alpha, \beta} = \text{span}(\{e^\delta | \delta \in S_{\alpha, \beta}\}).$$

- Next, consider the action of  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$  on  $V_{\alpha, \beta}$ . We have

$$[h^\alpha, e^{\beta+n\alpha}] = \frac{2(\alpha, \beta + n\alpha)}{(\alpha, \alpha)} e^{\beta+n\alpha} = \left( \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} + 2n \right) e^{\beta+n\alpha}$$

and

$$[e^{\pm\alpha}, e^{\beta+n\alpha}] \propto \begin{cases} e^{\beta+(n\pm 1)\alpha} & \text{if } \beta + (n \pm 1)\alpha \text{ is a root} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Therefore,  $V_{\alpha, \beta}$  is a representation of  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$ .

• Now we can prove the nondegeneracy of the roots. Let  $V_{\alpha, \alpha}$  contain all raising and lowering operators with roots  $n\alpha$ , plus the single operator  $h^\alpha$  for the 'zero root'. By similar reasoning to above, it is a representation of  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$ , where all the weights are even integers.

Since there is only one element with weight zero,  $V_{\alpha, \alpha}$  is an odd-dimensional  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$  irrep. But we also know  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$  is a subrepresentation of  $V_{\alpha, \alpha}$ , so  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha = V_{\alpha, \alpha}$ . Then the roots  $\pm\alpha$  are nondegenerate, and furthermore no other integer multiples of  $\alpha$  can be roots.

• Note that roots of the form  $\beta = \pm\alpha/2$  above are allowed by  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$  representation theory. But if  $\beta$  is a root, then  $2\beta$  is a root, a contradiction. Therefore if  $\alpha$  is a root, the only nonzero multiple of it that is also a root is  $-\alpha$ .

• Returning to the general case  $V_{\alpha, \beta}$  note that the weights are

$$S = \left\{ \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} + 2n \mid \beta + n\alpha \in S_{\alpha, \beta} \right\}$$

Since the weights are nondegenerate and evenly spaced, the representation is a finite-dimensional irrep. Therefore we must have  $S = \{\Lambda, -\Lambda + 2, \dots, \Lambda - 2, \Lambda\}$  for some integer  $\Lambda$ .

• If the range of  $n$  is  $n_- \leq n \leq n_+$ , we have

$$-\Lambda = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} + 2n_-, \quad \Lambda = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} + 2n_+$$

Adding these equations gives

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = -(n_+ + n_-) \in \mathbb{Z}$$

The result above gives a strong constraint as the roots, as we now show.

• First, we return to the original definition of the Killing form. Since  $[H^i, E^\alpha] = \alpha^i E^\alpha$ ,

$$\kappa^{ij} = \kappa(H^i, H^j) = \text{tr}(\text{ad}_{H^i} \text{ad}_{H^j}) = \sum_{\delta \in \Phi} \alpha^i \alpha^j$$

This is essentially a completeness relation, as

$$(\alpha, \beta) = \alpha^i \beta^j (\kappa^{-1})_{ij} = \alpha_i \beta_j \kappa^{ij} = \sum_{\delta \in \Phi} \alpha_i \delta^i \delta^j \beta_j = \sum_{\delta \in \Phi} (\alpha, \delta) (\beta, \delta)$$

• Now, we know the ratio  $(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$  is real from our work above. But then

$$\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = \sum_{\delta \in \Phi} \frac{(\alpha, \delta)}{(\alpha, \alpha)} \frac{(\beta, \delta)}{(\beta, \beta)}$$

which tells us that  $(\beta, \beta)$  is real, and hence  $(\alpha, \beta)$  is real. Moreover, we have

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{\delta \in \Phi} (\alpha, \delta)^2 > 0$$



by nondegeneracy. Therefore, if we restrict the root space  $\mathfrak{h}^*$  to the real span of the roots  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ , we have a Euclidean inner product. This is important, since so far every structure introduced has been complex.

- The real span of the roots has the same dimension, as a real vector space, as  $\mathfrak{h}^*$  does as a complex vector space. To see this, choose a basis of roots  $\alpha_{(i)} \in \mathfrak{h}^*$ . Then for any  $\beta \in \Phi$ ,

$$\beta = \sum_i \beta^i \alpha_{(i)}, \quad (\beta, \alpha_{(j)}) = \sum_i \beta^i (\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)})$$

Since the inner product is nondegenerate, combining these equations for all  $j$  gives  $\beta^i \in \mathbb{R}$ , so  $\Phi \subset \text{span}_{\mathbb{R}}(\{\alpha_{(i)}\})$ , which is an  $r$ -dimensional real vector space.

- We can thus define the length of a root  $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ , as well as angles  $\phi$  between roots in the standard way. Now we apply our earlier constraints, for

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2|\beta|}{|\alpha|} \cos \phi \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} = \frac{2|\alpha|}{|\beta|} \cos \phi \in \mathbb{Z}$$

Multiplying these equations gives

$$4 \cos^2 \phi \in \mathbb{Z}$$

which implies the angles between roots must be  $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ , or their supplements.

- These conditions are geometrically intuitive. The constraint  $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$  says that the states in the  $\alpha$ -string through  $\beta$  have  $\alpha$  values that are half-integers or integers, in accordance with  $\mathfrak{sl}(2)$  representation theory. The other constraint says the same for the  $\beta$ -string through  $\alpha$ . Then the constraint is trivial when  $\alpha$  and  $\beta$  are orthogonal, but very restrictive otherwise.

- To summarize, in the Cartan-Weyl basis the Killing form is a block-diagonal matrix, with a block for the Cartan subalgebra, and  $2 \times 2$  blocks for pairs of roots  $\pm \alpha$ .

Next, we define simple and positive roots.

- We divide  $\Phi$  into two halves  $\Phi_{\pm}$ , called the positive and negative roots, by drawing an arbitrary hyperplane through the origin that does not intersect any root. Note that the  $\Phi_{\pm}$  are each closed under addition. We call step operators associated with positive roots raising operators, and with negative roots lowering operators.

- A simple root is a positive root which cannot be written as a positive linear combination of positive roots. Geometrically, these are typically the positive roots closest to the hyperplane.

- If  $\alpha$  and  $\beta$  are simple roots, then  $\alpha - \beta$  is not a root. To see this, note that if  $\alpha - \beta$  were a positive root,  $\alpha$  could not be simple, while if it were a negative root,  $\beta$  could not be simple.

- If  $\alpha$  and  $\beta$  are distinct simple roots, then the  $\alpha$ -string through  $\beta$  has

$$n_- = 0, \quad n_+ = -\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$$

Since we know  $n_+ \geq 0$ , we have  $(\alpha, \beta) \leq 0$ .

- The simple roots are linearly independent. Denoting the simple roots by  $\alpha_{(i)}$ , let

$$\lambda = \sum_{c_i \geq 0} c_i \alpha_{(i)} + \sum_{c_i < 0} c_i \alpha_{(i)} \equiv \lambda_+ - \lambda_-$$

Then we have, assuming the  $c_i$  are not all zero,

$$(\lambda, \lambda) = (\lambda_+ - \lambda_-, \lambda_+ - \lambda_-) > -2(\lambda_+, \lambda_-) = 2 \sum_{c_i \geq 0} \sum_{c_j < 0} c_i c_j (\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)}) > 0$$

because  $(\alpha, \beta) \leq 0$  for simple roots, so  $\lambda \neq 0$  as desired.

• Every positive root can be written as a linear combination of the simple roots with nonnegative integer coefficients. This can be shown recursively: if  $\alpha$  is positive and simple, we're done. Otherwise  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  and we may repeat the procedure until we get the desired decomposition.

• As a result, all roots can be written as an integer combination of the simple roots. Then the simple roots are a basis for  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ , so there are  $r$  of them.

### 7.3.3 The Cartan Matrix by Zhou

The content of the simple roots can be encoded in the Cartan matrix.

• Define the elements of the Cartan matrix by

$$A^{ij} = \frac{2(\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)})}{(\alpha_{(j)}, \alpha_{(j)})} \in \mathbb{Z}$$

We note that  $A^{ii} = 2$ , and  $A^{ij} = 0$  if and only if  $A^{ji} = 0$ . Since the inner product of roots is negative,  $A^{ij} \leq 0$  for  $i \neq j$ . Intuitively,  $-A^{ij}$  is the number of times  $\alpha_{(j)}$  can be added to  $\alpha_{(i)}$  and yield a root; this interpretation also works for the diagonal elements.

• For each simple root  $\alpha_{(i)}$ , we have an  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebra with operators  $h^i \equiv h^{\alpha_{(i)}}$ ,  $e_{\pm}^i \equiv e_{\pm}^{\alpha_{(i)}}$ ,

$$[h^i, e_{\pm}^i] = \pm 2e_{\pm}^i, \quad [e_+^i, e_-^i] = h^i$$

These  $3r$  operators together generate all of  $\mathfrak{g}$  by brackets. A Cartan-Weyl basis chosen so that these  $3r$  operators are normalized in this way is called a Chevalley basis.

• In a Chevalley basis, the algebra is

$$[h^i, h^j] = 0, \quad [h^i, e_{\pm}^j] = \pm A^{ji} e_{\pm}^j, \quad [e_+^i, e_-^j] = \delta_{ij} h^i$$

We also have the Serre relations

$$\left(\text{ad}_{e_{\pm}^i}\right)^{1-A^{ji}} e_{\pm}^j = 0$$

by the intuitive interpretation of  $A^{ij}$  above.

• A finite-dimensional, semi-simple complex Lie algebra is uniquely determined by its Cartan matrix. To reconstruct  $\mathfrak{g}$ , we start with the simple roots and construct all  $\alpha^{(i)}$  strings through  $\alpha^{(j)}$ , with the Cartan matrix telling us the length of all root strings. We then repeat this procedure until no more new roots appear.

• The Cartan matrix satisfies  $\det A > 0$ . To see this, note that the inner product in the basis of simple roots is

$$(\lambda, \mu) = (\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)}) \lambda^i \mu^j, \quad \lambda = \sum_i \lambda^i \alpha_{(i)}, \quad \mu = \sum_i \mu^i \alpha_{(i)}$$

Since the inner product is positive definite, the matrix with entries  $(\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)})$  is positive definite and hence has positive determinant. The Cartan matrix is the product of this matrix with a diagonal matrix with entries  $2/(\alpha_{(i)}, \alpha_{(i)})$  which also has positive determinant.

• If  $\mathfrak{g}$  is simple, then the Cartan matrix is not reducible, i.e. there is no reordering of the simple roots that makes  $A$  block-diagonal. Essentially, if the Cartan matrix were reducible, then the step operators generated by one of the blocks of simple roots (along with the corresponding Cartan subalgebra elements) would form a proper ideal of  $\mathfrak{g}$ .

The above constraints very strongly restrict the form of the Cartan matrix.

• By our previous identities, we have

$$A^{ij}A^{ji} = 4\cos^2\phi \in \mathbb{Z}$$

which implies that  $A^{ij}A^{ji} \in \{0, 1, 2, 3\}$ . There are only a few possibilities. Taking the  $\alpha^{(i)}$  root to not be shorter without loss of generality, we have:

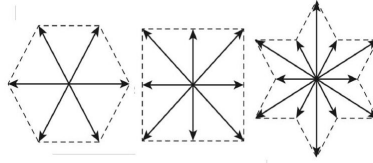
- $A^{ij} = A^{ji} = 0$ . The simple roots are perpendicular with indefinite ratio of lengths; no other roots are attained by adding them.

- $A^{ij} = A^{ji} = -1$ . The simple roots have equal length and angle  $120^\circ$ , and one additional root is attained by adding them.

- $A^{ij} = -2, A^{ji} = -1$ . Then  $|\alpha_{(i)}| = \sqrt{2}|\alpha_{(j)}|$  and the angle is  $135^\circ$ .

- $A^{ij} = -3, A^{ji} = -1$ . Then  $|\alpha_{(i)}| = \sqrt{3}|\alpha_{(j)}|$  and the angle is  $150^\circ$ .

The roots generated by these three latter possibilities are shown below.



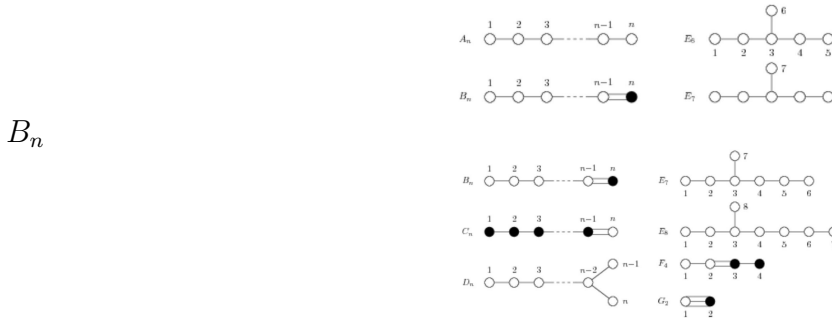
There are no more possibilities, by the  $\det A > 0$  constraint.

- One useful fact is that if  $\alpha$  and  $\beta$  are roots, then so is the 'Weyl reflection' of  $\beta$  in the hyperplane normal to  $\alpha$ . This can be shown by casework with our results on root strings. The set of Weyl reflections form the Weyl group.

- If  $\mathfrak{g}$  is simple, it can be shown that the simple roots can only have two distinct lengths. In fact, one can show there are only two distinct lengths among all the roots. The proof is easy if we ignore the case of perpendicular roots; we can deal with those by Weyl reflection.

- The information in the Cartan matrix can be written in a Dynkin diagram. We draw a node for every simple root  $\alpha_{(i)}$ , then connect nodes  $i$  and  $j$  with  $\max(|A^{ij}|, |A^{ji}|)$  lines. If the roots have different lengths, we draw an arrow pointing from the longer root to the shorter, or shade the shorter roots black. Note that Dynkin diagrams must be connected, by simplicity.

- The set of all Dynkin diagrams is shown below, classifying all simple complex Lie algebras.



Apart from the five exceptional cases, the four infinite families are known in physics as

$$A_n = \mathfrak{su}(n+1) \cong \mathfrak{sl}(n+1), \quad B_n = \mathfrak{so}(2n+1), \quad C_n = \mathfrak{sp}(2n), \quad D_n = \mathfrak{so}(2n)$$

In all cases the subscript indicates the number of roots. Note that  $D_1$  isn't counted since  $\mathfrak{so}(2)$  is not simple. Also,  $D_2$  technically does not belong since it is disconnected.

- Generally, any angle besides  $90^\circ$  provides a strong constraint since it generates new roots, so most angles must be  $90^\circ$ . After that, angles of  $120^\circ$  are nice, as they form regular polyhedra in higher dimensions. An angle of  $150^\circ$  makes such a strange pattern that it only appears in the rank 2 Lie algebra  $G_2$ , whose root system is shown above.

- Looking at the Dynkin diagrams, we can read off some low-dimensional coincidences for the  $\mathfrak{so}(n)$ . The isomorphic algebras correspond to the spin groups, which double cover  $SO(n)$ .

- We have  $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$  from  $B_1 \cong A_1$ , and  $SU(2) = \text{Spin}(3)$ .
- We have  $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  from  $D_2 \cong A_1 \oplus A_1$ , and  $SU(2) \times SU(2) = \text{Spin}(4)$ .
- We have  $\mathfrak{so}(5) \cong \mathfrak{sp}(4)$  from  $B_2 \cong C_2$ , and  $Sp(4) = \text{Spin}(5)$ .
- We have  $\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{su}(4)$  from  $D_3 \cong A_3$ , and  $SU(4) = \text{Spin}(6)$ .

Note that  $E_5$  and  $E_4$  aren't listed as they duplicate others.

• It should be kept in mind that we are working at the level of complex Lie algebras; the complexification of  $\mathfrak{so}(p, q)$  is equivalent to the complex Lie algebra  $\mathfrak{so}(n)_{\mathbb{C}}$ , so our results don't depend on the signature. However, the signature does affect the Lie groups, e.g. the orthogonal groups of indefinite signature are noncompact. The spin groups of indefinite signature are

$\text{Spin}(1, 1) \cong GL(2, \mathbb{R})$ ,  $\text{Spin}(1, 2) \cong SL(2, \mathbb{R})$ ,  $\text{Spin}(1, 3) \cong SL(2, \mathbb{C})$ ,  $\text{Spin}(1, 4) \cong Sp(1, 1)$

• Another useful application is that we can 'cut' Dynkin diagrams to find subalgebras. For example, cutting off the long root of  $B_n$  shows that  $\mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{so}(2n + 1)$ . Cutting off the short root of  $\mathfrak{sp}(2n)$  gives  $\mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{sp}(2n)$  as we observed earlier.

Note. A systematic algorithm for reconstructing all roots from the simple roots.

• For a general root  $\beta = \sum_i \alpha_{(i)} k_i$ , let  $k = \sum_i k_i$ . Here the Cartan subalgebra has  $k = 0$  and the simple roots have  $k = 1$ .

• For each simple root  $\alpha_{(j)}$ , we draw a box with entries

$$c_i = A_{ji} = -(n_+ + n_-)$$

That is, we just write row  $j$  of the Cartan matrix. Hence if  $c_i < 0$  then we can add the root  $\alpha_{(i)}$ , and hence we can construct the  $k = 2$  roots.

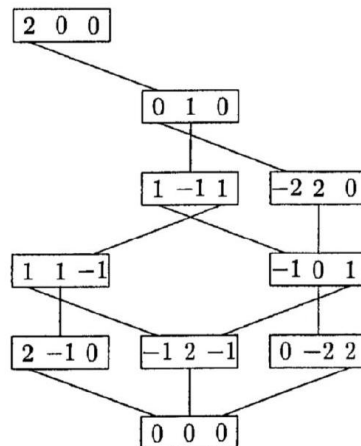
• For each  $k = 2$  root, we again draw a box; its entries  $c_i$  are the sum of the root it came from and the simple root added to it. We can then continue systematically upward in  $k$ , since at every point we know the value of  $n_-$ , until the procedure terminates. We then reflect to get all the negative roots.

• A slightly faster method is to start from the simple roots and draw all possible root strings all the way to the end. This will produce some roots with new negative  $c_i$ , which sit at the bottom of new root strings. We then repeat this process until termination.

Example. The algebra  $C_3$ . The Cartan matrix is

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

and the resulting positive roots are shown below.



Note. The only normed division algebras are  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , and  $\mathbb{O}$ . The classification of Lie algebras is related to this, because  $SO(n)$  describes linear transformations that preserve the length of a vector in  $\mathbb{R}$ ,  $SU(n)$  does the same for  $\mathbb{C}$ , and  $Sp(n)$  does the same for  $\mathbb{H}$ . There is no analogue for  $\mathbb{O}$  because its multiplication law is not associative, so we don't get a group. But all of the other Lie groups are related to  $\mathbb{O}$  in some way.

### 7.3.4 Representations and Weights

In this section we apply our results to representations of  $\mathfrak{g}$ .

- We consider an  $N$ -dimensional representation  $R$ , and assume that the  $R(H^i)$  are diagonalizable. Since the  $R(H^i)$  all commute, they can be simultaneously diagonalized, with

$$R(H^i)v = \lambda^i v, \quad v \in V_\lambda$$

where  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  is a weight of  $R$  and the set of weights is  $S_R$ .

- Roots are the weights of the adjoint representation  $R(X) = \text{ad}_X$  and also live in  $\mathfrak{h}^*$ . But unlike roots, weights can be degenerate, with multiplicity  $m_\lambda = \dim V_\lambda \geq 1$ . It also doesn't make sense to associate a weight with an element of  $\mathfrak{g}$ . This only made sense for roots because the representation space was the algebra itself.

- As with roots, step operators raise and lower the weights,

$$R(H^i)R(E^\alpha)v = R(E^\alpha)R(H^i)v + [R(H^i), R(E^\alpha)]v = (\lambda^i + \alpha^i)R(E^\alpha)v$$

Then if  $v \in V_\lambda$ , then  $R(E^\alpha)v \in V_{\lambda+\alpha}$ .

- Next, we consider the action of the  $\mathfrak{sl}(2)_\alpha$  generators  $\{R(h^\alpha), R(e^\alpha), R(e^{-\alpha})\}$  on  $V$ . This makes  $V$  into the representation space for a representation  $R_\alpha$  of  $\mathfrak{sl}(2)$ . The  $\mathfrak{sl}(2)$  weights are

$$R(h^\alpha)v = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^i R(H^j)v = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} (\kappa^{-1})_{ij} \alpha^i \lambda^j v = \frac{2(\alpha, \lambda)}{(\alpha, \alpha)} v$$

Since the  $\mathfrak{sl}(2)$  weights must be integers, we have

$$\frac{2(\alpha, \lambda)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in S_R, \quad \alpha \in \Phi$$

This is just the same condition we found for roots; the only difference is that we don't also have the same constraint with  $\alpha$  and  $\lambda$  swapped.

- To understand this constraint geometrically, note that all the roots lie in the root lattice

$$\mathcal{L}[\mathfrak{g}] = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(r)}\}$$

Now define the simple coroots and coroot lattice

$$\alpha_{(i)}^\vee = \frac{2\alpha_{(i)}}{(\alpha_{(i)}, \alpha_{(i)})}, \quad \mathcal{L}^\vee[\mathfrak{g}] = \text{span}_{\mathbb{Z}} \{\alpha_{(1)}^\vee, \dots, \alpha_{(r)}^\vee\}$$

- Then the weight lattice is the dual of the co-root lattice,

$$\mathcal{L}_W[\mathfrak{g}] = \mathcal{L}^\vee[\mathfrak{g}]^* = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z} \text{ for all } \mu \in \mathcal{L}^\vee[\mathfrak{g}]\}$$

Consider the basis  $\{\alpha_{(i)}^\vee\}$  of  $\mathcal{L}^\vee[\mathfrak{g}]$ . The weight lattice has the dual basis  $\{w_{(i)}\}$  where

$$(\alpha_{(i)}^\vee, w_{(j)}) = \delta_{ij}$$

This basis is called the Dynkin basis of the weight space, and its elements are called the fundamental weights of  $\mathfrak{g}$ .

- Now consider the expansion

$$w_{(i)} = \sum_j B_{ij} \alpha_{(j)}$$

Taking the inner product of both sides with  $\alpha_{(k)}^\vee$  and relabeling indices,

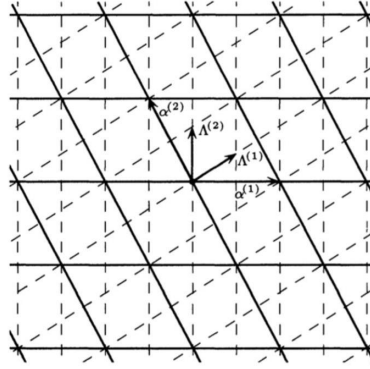
$$\sum_k \frac{2(\alpha_{(i)}, \alpha_{(k)})}{(\alpha_{(i)}, \alpha_{(i)})} B_{jk} = \delta_k^i$$

which shows that  $B = A^{-1}$  where  $A$  is the Cartan matrix, so

$$\alpha_{(i)} = \sum_j A^{ij} w_{(j)}$$

Thus starting from the Cartan matrix we can read off the fundamental weights. The matrix  $B_{ij}$  is sometimes called the metric tensor.

Example. The root and weight lattices of  $A_2$  are shown below.



The relation between the two can be read off from the Cartan matrix,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Note that the root lattice is contained in the weight lattice. This must hold in general because the simple roots are weights of the adjoint representation.

The fundamental weights allow us to extract the weight set from the highest weight alone.

- Any weight can be expanded as

$$\lambda = \lambda^i w_{(i)}$$

and the integers  $\lambda^i$  are called the Dynkin labels of  $\lambda$ . We've already seen these; in our graphical calculation above, the numbers in the boxes were the Dynkin labels of roots/weights.

- Every finite-dimensional representation has a highest weight

$$\Lambda = \Lambda^i w_{(i)}$$

so that all  $v \in V_\Lambda$  are annihilated by all raising operators,

$$R(E^\alpha) v_\Lambda = 0, \quad \alpha \in \Phi_+.$$

The Dynkin labels of the highest weight are called the Dynkin labels of the representation.

- Starting from the highest weight, we can find more weights by applying the lowering operators,  $R(E^{-\alpha})$  for  $\alpha \in \Phi^+$ . The reasoning is just like how we used simple roots to construct all

the roots, but in reverse; starting with any positive Dynkin label, we can go downward. We can get every weight this way if the representation is an irrep; note that the adjoint representation itself is an irrep when the algebra is simple.

- Note that we never have to go 'upward'. Suppose we had a state of the form

$$E_1 E_2 \dots E_n |\mu\rangle$$

where  $|\mu\rangle$  is the highest weight state and the  $E_i$  are raising and lowering operators. If any of the  $E_i$  are raising operators, we may commute it all the way to the right, picking up extra terms as we go, until it annihilates  $|\mu\rangle$ . We can repeat this procedure until all operators are lowering operators, which can be taken to be those of simple roots. As a corollary, the highest weight of an irrep is nondegenerate.

- The general principle is that if  $\lambda = \sum_i \lambda^i w_{(i)}$  is a weight, then we also have the weights

$$\lambda - m^i \alpha_{(i)}, \quad 0 \leq m_i \leq \lambda^i$$

because representations of  $\mathfrak{sl}(2)_{\alpha_{(i)}}$  must have weights symmetric about zero.

- The weight set of a tensor product is the set of sums of weights, which gives a visual method for decomposing tensor products. We get one factor for free, since one of the highest weights is the product of the individual highest weights; for example,  $(1, 2) \times (5, 2)$  contains a  $(6, 4)$ .

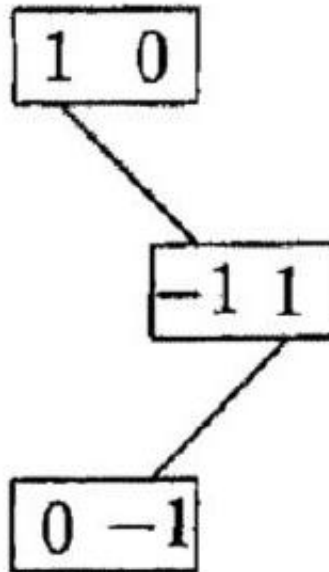
Example. The fundamental representation of  $A_2 \cong \mathfrak{su}(3)$  has Dynkin labels  $(1, 0)$ , so  $\Lambda = w_{(1)}$ , and

$$\Lambda - \alpha_{(1)} = w_{(1)} - (2w_{(1)} - w_{(2)}) = -w_{(1)} + w_{(2)}$$

is also a weight. This yields the new weight

$$(\Lambda - \alpha_{(1)}) - \alpha_{(2)} = -w_{(2)}$$

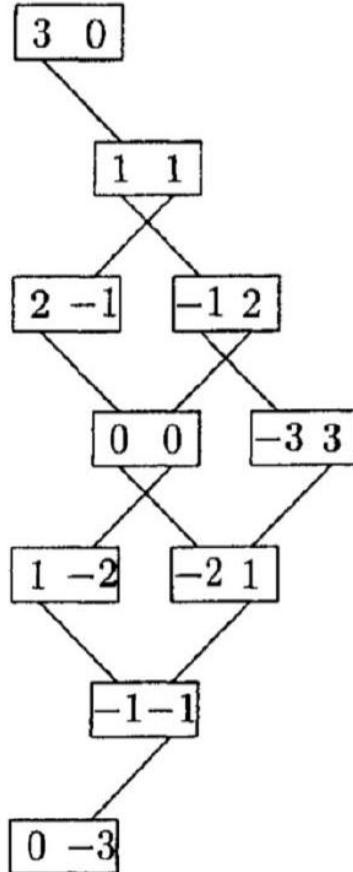
and this weight produces no further weights. Alternatively, we can use a diagram.



Thus the representation has three weights, which form a small upside-down triangle. More generally, the Dynkin labels agree with the labels we assigned earlier based on the ranks of symmetric traceless tensors. Then  $R_{(1,1)}$  is still the adjoint representation,  $R_{(3,0)}$  is still the 10, and so on.

Note. Finding the degeneracy of weights. Clearly, any weight that can be reached in only one way by lowering from the highest weight is nondegenerate. Also note that a degenerate weight can't create more degeneracy 'further down' unless it sits at the top of a new  $\mathfrak{su}(2)$  representation. Another trick is that if a possibly degenerate weight can be related to a nondegenerate weight by Weyl reflection, it is nondegenerate. In general, the degeneracy may be computed by the Freudenthal formula or the Kostant multiplicity formula, though these are rather complicated to use.

Example. The  $(3, 0)$  representation of  $\mathfrak{su}(3)$ . We get the diagram shown below.



First, note that there is a 'spine' on the right leading from the highest to the lowest weight. In general for the  $(n, m)$  irrep, we can reach it by lowering with  $\alpha^1 n$  times, lowering with  $\alpha^2 n + m$  times, then lowering with  $\alpha^1 m$  times, yielding the lowest weight  $(-m, -n)$ . There is also the possibility of degeneracy; by the remark above, we only need to check the degeneracy of the 00 state; we can't use Weyl reflection since it is at the origin.

Let  $E_1$  and  $E_2$  be the lowering operators for  $\alpha_{(1)}$  and  $\alpha_{(2)}$ . Then

$$E_2 E_1 E_1 - E_1 E_2 E_1 = [E_2, E_1] E_1 = E_1 [E_2, E_1]$$

where the second step follows because  $-2\alpha^1 - \alpha^2$  is not a root. Now act with both sides on the highest weight  $|\mu\rangle$ . On the right-hand side we have

$$E_1 [E_2, E_1] |\mu\rangle = E_1 E_2 E_1 |\mu\rangle$$

because  $E_2 |\mu\rangle = 0$ . This shows that the two possibly degenerate states are proportional.

Note. There is a fully general method for determining whether two states are degenerate. Consider two states of the form

$$|A\rangle = E_{a_1} \dots E_{a_n} |\mu\rangle, \quad |B\rangle = E_{b_1} \dots E_{b_n} |\mu\rangle$$



Then the states are linearly independent if and only if

$$\langle A|B\rangle\langle B|A\rangle \neq \langle A|A\rangle\langle B|B\rangle$$

where all of these inner products can be computed systematically using the algebra.

Note. Taking the dual/conjugate of a representation just flips the sign on every weight, because the Cartan subalgebra elements  $R(H^i)$  become  $-R(H^i)^* = -R(H^i)$ . For  $\mathfrak{su}(3)$ , the  $(n, m)$  representation has lowest weight  $(-m, -n)$ , which implies the conjugate representation is  $(n, m)$ . For example, the antifundamental representation has  $\Lambda = w_{(2)}$  and its weights form a triangle. We see that a representation is real if its weights are symmetric about the origin.

Note. In general, we call the representations with exactly one nonzero Dynkin label, which is equal to one, the fundamental representations. For example,  $\mathfrak{su}(4)$  has rank three, and hence has three 'fundamental' representations. One is its 'usual' fundamental representation in terms of matrices, one is its conjugate, and the third is something completely different; it is not even four-dimensional. All representations can be found by multiplying fundamental representations, as the representation with Dynkin labels  $\Lambda^i$  is contained in  $\otimes_i V_i^{\otimes \Lambda^i}$  where  $V_i$  is the  $i^{\text{th}}$  fundamental.

Example. Consider  $B_2 \cong C_2$ , where  $B_2 \cong \mathfrak{so}(5)$  and  $C_2 \cong \mathfrak{sp}(4)$ . Then there are two fundamental representations with dimensions 5 and 4; they correspond to the fundamental matrix representations of  $\mathfrak{so}(5)$  and  $\mathfrak{sp}(4)$ . The adjoint representation has Dynkin labels  $(0, 2)$ .

Note. If we use an explicit representation, rather than just the abstract algebra, everything simplifies. We defined the Killing form and worked to show that it gives a natural inner product on the roots. But we could also work in the adjoint representation and take the inner product on the Hilbert space. The action of  $X_a$  in the adjoint representation is

$$X_a |X_b\rangle = |[X_a, X_b]\rangle$$

so it's easy to see how the  $E^\alpha$  function as both weights and roots,

$$H^i |E^\alpha\rangle = \alpha^i |E^\alpha\rangle, \quad [H^i, E^\alpha] = \alpha^i E^\alpha$$

Moreover, we have  $H_\alpha^\dagger = H_\alpha$  since its eigenvalues are real, while taking the adjoint of the above commutation relation gives  $E^{\alpha\dagger} = E^{-\alpha}$ .

### 7.3.5 Details about root strings and reconstruction of algebra from roots

#### Reconstructing the algebra from the roots (????)

For a simple root  $\alpha$ , if the  $\alpha$ -string through  $\beta$  has length  $2s + 1$ , then the action of the  $E^{\pm\alpha}$  operators on this subspace by commutator is just like that of the angular momentum raising and lowering operators for spin  $s$ , with the same constants up to phases. This gives the action of  $E^\alpha$  on everything, and we can find the action of  $E^{\alpha+\beta}$  on everything by the Jacobi identity, and so on. The 'up to phases' is because we don't have enough freedom to take Cordan-Shortley phases everywhere.

(??? I want to have here an example, how Cordan-Shortley phases might appear in other cases and comparison with this case)

(and also, an example of it here)

### 7.3.6 Examples of Roots

#### Examples by Zhou

The roots are the nonzero weights of the adjoint, and the adjoint is often contained in the product of the fundamental and antifundamental representation. (Here, "fundamental" is used in the physicist's sense; the weights of the physicist's fundamental should not be confused with the fundamental weights.) Therefore, the roots are a subset of the differences of the weights of the fundamental representation. In this section, we'll use this as a shortcut to give examples of roots. Since we deal with only simple matrix Lie algebras, we use the Killing form  $\text{tr}(XY)$ .

Example. The roots of  $\mathfrak{su}(3)$ . An orthonormal basis for the Cartan subalgebra in the fundamental representation is

$$H^1 = \text{diag}(1, -1, 0)/\sqrt{2}, \quad H^2 = \text{diag}(1, 1, -2)/\sqrt{6}$$

These are already diagonal in the standard basis, consisting of the vectors  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ , and  $(0, 0, 1)$ . Their corresponding weights are

$$w^1 = (1, 1/\sqrt{3})/\sqrt{2}, \quad w^2 = (-1, 1/\sqrt{3})/\sqrt{2}, \quad w^3 = (0, -2/\sqrt{3})/\sqrt{2}$$

These three weights form an equilateral triangle, so the differences are the vertices of a hexagon. As we've seen before, these are precisely the roots of  $\mathfrak{su}(3)$ . Another common choice is to use a basis like  $H^1 = \text{diag}(1, -1, 0)$  and  $H^2 = \text{diag}(0, 1, -1)$ . While this simplifies the weights, it leads to a non-Euclidean metric in root space, distorting the picture.

Example. The roots of  $\mathfrak{so}(4)$ . In this case an orthonormal basis for the Cartan subalgebra is, up to an overall scaling factor,

$$H^1 = J^{12} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad H^2 = J^{34} = \begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

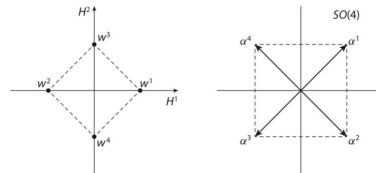
These may be simultaneously diagonalized and scaled to

$$H^1 = \text{diag}(1, -1, 0, 0), \quad H^2 = \text{diag}(0, 0, 1, -1)$$

by switching to the 'polar' basis  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow x_1 \pm ix_2, x_3 \pm ix_4$ . We can then read off the weights of the fundamental representation,

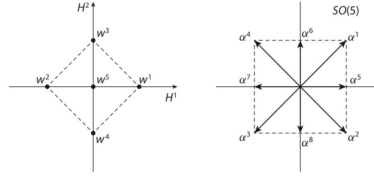
$$w^1 = (1, 0), \quad w^2 = (-1, 0), \quad w^3 = (0, 1), \quad w^4 = (0, -1)$$

which form the vertices of a square. In this case there are some extra differences of weights. As an unjustified ad hoc fix, throwing out  $w^1 - w^2$  and its rotations gives the root diagram below.



This root diagram visually shows that  $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ , i.e. the Lie algebra is not semisimple. In this degenerate case, which we only consider because of the importance of the Lorentz group, the adjoint is not an irrep, but rather decomposes as  $3 + \bar{3}$ .

Example. The roots of  $\mathfrak{so}(5)$ . There are still two Cartan generators; the only difference is that we now have a zero weight from the vector  $(0, 0, 0, 0, 1)$ .



In this case the procedure is less unambiguous. If we keep  $w^1 - w^5$ , then we must toss out  $w^1 - w^2$  because it is double  $w^1 - w^5$ , and likewise for its rotations. Ignoring repeated roots, we recover a familiar root pattern.

Example. The roots of  $\mathfrak{so}(6)$ . Letting the  $e_i$  be unit vectors in root space, and following the pattern of  $\mathfrak{so}(4)$ , the roots are

$$\{\eta e_i + \eta' e_j | \eta, \eta' \in \{-1, 1\}, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j\}$$

This generalizes directly to  $\mathfrak{so}(2n)$ . The pattern for  $\mathfrak{so}(2n+1)$  is just slightly more complicated, with the addition of the roots  $\pm e_i$ . The simple roots are

$$\mathfrak{so}(2n) : e^1 - e^2, \dots, e^{n-1} - e^n, e^{n-1} + e^n, \quad \mathfrak{so}(2n+1) : e^1 - e^2, \dots, e^{n-1} - e^n, e^n$$

from which one can read off the Dynkin diagram.

Example. The roots of  $\mathfrak{su}(n)$ . Since  $\dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1$ , there are  $n^2 - n$  roots. Similarly, there are  $n(n-1)$  nonzero differences of weights, so all of them must correspond with roots, which is what we saw for  $\mathfrak{su}(3)$  above. In the case of  $\mathfrak{su}(4)$ , we have

$$H^1 = \text{diag}(1, -1, 0, 0)/\sqrt{2}, \quad H^2 = \text{diag}(1, 1, -2, 0)/\sqrt{6}, \quad H^3 = \text{diag}(1, 1, 1, -3)/2\sqrt{3}$$

The weights are the vertices of a tetrahedron, so the roots are the sides of a tetrahedron. In particular, adjacent sides make an angle of  $60^\circ$ , while nonadjacent sides make an angle of  $90^\circ$ , in accordance with the Dynkin diagram. For  $\mathfrak{su}(n)$ , the pattern continues, with a higher-dimension analogue of the tetrahedron. Unlike for  $\mathfrak{so}(n)$ , the explicit coordinate expression of the roots is a bit nasty; instead we'll just continue to think of them as differences of fundamental weights.

Example. The roots of  $\mathfrak{sp}(2n)$ . Earlier, we showed that  $\mathfrak{sp}(2n)$  had basis

$$iA \otimes I, \quad S_i \otimes \sigma_i$$

from which we identify a Cartan subalgebra

$$H^i = u^i \otimes \sigma_3, \quad u_{jk}^i = \delta_j^i \delta_k^i$$

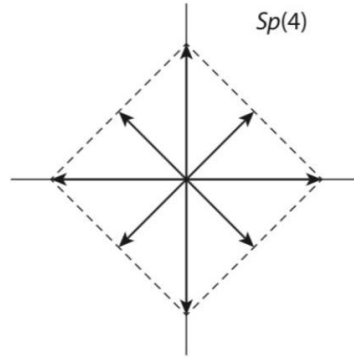
For example, for  $\mathfrak{sp}(4)$  we have

$$H^1 = \text{diag}(1, 0, -1, 0), \quad H^2 = \text{diag}(0, 1, 0, -1)$$

from which we read off the weights

$$w^1 = (1, 0), \quad w^2 = (0, 1), \quad w^3 = (-1, 0), \quad w^4 = (0, -1)$$

These are the same weights as for  $\mathfrak{so}(4)$ , but  $\mathfrak{sp}(4)$  has higher dimension. In this case, all of the differences are roots.



Since this is just the root diagram of  $\mathfrak{so}(5)$  tilted,  $\mathfrak{sp}(4) \cong \mathfrak{so}(5)$ .

### 7.3.7 Dynkin Diagrams

In this section, we give a quick outline of the Cartan classification.

- First, we can establish the existence of the infinite families  $A_n, B_n, C_n$ , and  $D_n$  and their Dynkin diagrams by our work in the previous section, reading off angles between the simple roots. We also discovered  $G_2$  earlier by classifying all rank 2 Lie algebras.

- Given simple roots  $\alpha_i$ , we define the unit vectors  $u_i = \alpha_i / |\alpha_i|$ . In this section, we work solely with roots normalized to unit length. Then

$$2u_i \cdot u_j = -\sqrt{\zeta_{ij}}, \quad \zeta_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\} = \text{number of lines connecting } i \text{ and } j.$$

Note that if  $u_i$  and  $u_j$  are connected at all, then  $u_i \cdot u_j \leq -1/2$ .

- First, there are no Dynkin diagrams with loops. Summing over the  $k$  roots in the loop,

$$\left( \sum_i u_i \right)^2 = k + \sum_{i \neq j} u_i \cdot u_j \leq 0$$

but the left-hand side must be positive.

- Next, the number of lines coming out of a root cannot be more than three. Let  $u$  be directly connected to the roots  $w_1, \dots, w_k$ . The roots cannot be directly connected to each other otherwise, since there are loops, so they must be orthogonal. Now note that

$$\sum_i (u \cdot w_i)^2 = \frac{1}{4} \sum_i \zeta_{ui} \geq 1$$

But the left-hand side is the length of  $u$  when projected down to the subspace spanned by the  $w_i$ , so it must be less than one, a contradiction.

- Next, shrinking a chain of roots each connected with a single line gives a valid Dynkin diagram. To see this, let  $u_1, \dots, u_k$  be such a chain. Then we can replace these vectors with the vector  $u = \sum_i u_i$ , which is properly normalized since

$$u^2 = \sum_{i=1}^k u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} u_i \cdot u_{i+1} = k - 2 \frac{k-1}{2} = 1$$

Any other root  $w$  can be directly connected to the chain only once, or else there will be loops. If  $w$  connects to  $u_i$ , then  $w \cdot u_i = w \cdot u$ . Hence everything about the Dynkin diagram stays the same when we collapse the  $u_i$  to  $u$ .

- Suppose a Dynkin diagram contains a 'fork', i.e. there is a root connected to three other roots. Then all of the connections must be by single lines, and moreover, each of the three roots can only continue in a linear chain made of single lines. We'll return to this case below.

• Our results above show that  $G_2$  is the only Dynkin diagram with a triple line. Next, consider a double line; we can only connect single line chains on both ends. Suppose there are  $n$  and  $m$  of them,  $u_i$  and  $v_i$ , with the last ones connected by the double line, so  $u_m \cdot v_m = -1/\sqrt{2}$ .

We define  $u = \sum_i i u_i$  and  $v = \sum_j j v_j$ . Then we have

$$u^2 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad v^2 = \frac{m(m+1)}{2}, \quad u \cdot v = -\frac{nm}{\sqrt{2}}$$

Then the Cauchy-Schwarz inequality gives  $(m-1)(n-1) \leq 2$ . The cases  $m=1$  or  $n=1$  give the infinite families  $B_n$  and  $C_n$ . The only other case is  $m=n=2$ , which gives  $F_4$ .

• Finally, we classify Dynkin diagrams with a fork, with  $n, m$ , and  $p$  roots in each chain, including the central root. Similar considerations show that

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} > 1$$

Then if  $n=m=1$ , then  $p$  is arbitrary, recovering  $A_n$ . If all of the numbers are at least 3, the inequality is violated, so otherwise one of them must be two, say  $p=2$ . Then

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

In the case  $n=2, m$  is arbitrary, recovering  $D_n$ . Finally, the only other solutions are  $(3,3)$ , giving  $E_6$ ,  $(3,4)$ , giving  $E_7$ , and  $(3,5)$ , giving  $E_8$ .

• Incidentally, the same inequality occurs when classifying the platonic solids; there  $E_6$  corresponds to the tetrahedron,  $E_7$  to the cube, and  $E_8$  to the icosahedron.

• It is possible to have higher rank exceptional algebras such as  $E_9$  if we generalize to Kac-Moody algebras, which are generically infinite-dimensional.

As an application, we consider regular subalgebras.

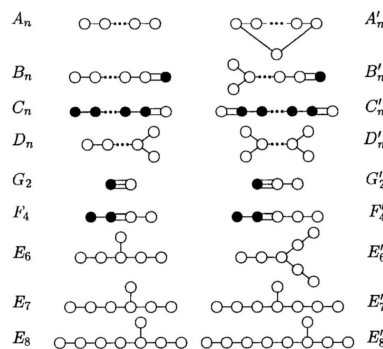
• A regular subalgebra  $\mathfrak{h}$  of  $\mathfrak{g}$  is a subalgebra whose Cartan generators are linear combinations of the Cartan generators of  $A$ . A regular maximal subalgebra is not strictly contained in any proper subalgebras of  $\mathfrak{g}$ .

• In physics, we care about regular subalgebras because if  $G$  is a symmetry group, the conserved charges are the Cartan generators. Then the conserved charges in regular subalgebras are built from the original ones, so we may reach them by spontaneous symmetry breaking.

• We can construct regular maximal subalgebras by deleting a root from a Dynkin diagram and replacing it with a  $u(1)$  factor. For example, applying this to  $SU(5)$  gives  $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$ , as used in grand unification.

• To construct semisimple regular maximal subalgebras, we use a trick. Given simple roots  $\alpha^i$ , we may add the lowest root  $\alpha^0$  to the Dynkin diagram. This root has appropriate angles with the others, because  $\alpha^0 - \alpha^i$  is not a root for any  $i$ . However, the augmented root system is linearly dependent.

• Working case by case, one can construct the extended Dynkin diagrams below.



Semisimple regular maximal subalgebras can then be constructed by removing a root from the extended Dynkin diagram. For example, we find  $\mathfrak{so}(2n) \subset \mathfrak{so}(2n+1)$ , which we observed earlier, and  $\mathfrak{so}(2k) \oplus \mathfrak{so}(2n-2k) \subset \mathfrak{so}(2n)$ .

### 7.3.8 Cartan–Weyl basis according to Kiselev

Если задана группа Ли, т.е. групповые координаты, структурные константы и, следовательно, алгебра Ли и коммутаторы генераторов группы, то можно поставить задачу о том, как классифицировать и систематизировать эти коммутаторы. Для этого надо перейти от исходного базиса генераторов к специальному набору, который носит название базиса Картана-Вейля. В этом базисе выделяются два типа генераторов. Что это за типы, нам и предстоит выяснить.

Введенные выше геометрические и алгебраические понятия, такие как метрика Киллинга и коммутаторы, приобретают более наглядный смысл, если провести рассмотрение представления генераторов преобразований в терминах пространства состояний, взятого из квантовой механики. Для этого мы в данном параграфе рассмотрим присоединенное представление, в котором генераторы - это матрицы линейных преобразований в пространстве генераторов, т.е. в пространстве размерности  $N_G$ . Сами эти матрицы, согласно определению присоединенного представления в (I.2.10), построены из структурных констант алгебры Ли. Это значит, что все характеристики, которые будут получены в данном параграфе, зависят исключительно от структурных констант группы. Мы будем это периодически подчеркивать. В частности, коммутационные соотношения в алгебре Ли, которые выводятся с использованием присоединенного представления, будут справедливы и в любом другом представлении, так как эти соотношения зависят только от структурных констант алгебры Ли и не зависят от представления. Для сокращения обозначений в этом параграфе мы специально опускаем знак присоединенного представления «ad».

#### 3.1 Ранг алгебры Ли и веса базиса собственных состояний

Пусть задана некоторая полупростая компактная алгебра Ли с эрмитовыми генераторами (см. (I.2.26) и объяснение на стр. 27), преобразующими квантовые состояния. Выделим среди генераторов набор взаимно коммутирующих  $\Gamma_l$ , который уже не может быть дополнен каким-либо другим независимым генератором, коммутирующим с каждым генератором из этого набора. Выбранные таким способом генераторы  $\Gamma_l$  входят в состав полного набора наблюдаемых. Возьмем базис, состоящий из собственных состояний этого набора коммутирующих генераторов 45. По определению, эти попарно коммутирующие генераторы образуют подалгебру Картана  $\mathfrak{H}$ ,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0, \quad l = \{\overline{1, n}\}, \quad \Gamma_l \in \mathfrak{H}$$

где размерность пространства линейной оболочки генераторов  $\Gamma_l$  из полного набора наблюдаемых, т.е.  $\dim \mathfrak{H} = n$  называют рангом алгебры Ли. Размерность подалгебры Картана меньше размерности пространства параметров группы  $n < N_G$  вследствие полупростоты: иначе все генераторы коммутировали бы, и группа представляла бы из себя произведение инвариантных абелевых подгрупп, образованных элементами с координатами вдоль каждой из осей координатной сетки.

Конечномерный ортонормированный базис пространства состояний  $|\mu\rangle$ , т.е. пространства представления <sup>46</sup>, в котором действуют матрицы генераторов алгебры, задается как набор собственных векторов с вещественными собственными значениями <sup>47</sup>,

$$\Gamma_l |\mu\rangle = \mu_l |\mu\rangle, \quad \mu_l \in \mathbb{R}$$

Набор собственных значений  $\mu$  состоит из компонент ковектора размерности  $n$ , которые преобразуются по тому же закону, что и генераторы алгебры при замене непрерывных групповых параметров. Если ввести линейное обратимое преобразование той части координат в касательном пространстве, которая отвечает генераторам подалгебры Картана,

$$(a')^{l'} = S_{\bullet l'}^{l''} a^l$$

то для генераторов подалгебры Картана такая замена переменных индуцирует линейное преобразование

$$\Gamma'_{l'} = \Gamma_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l$$

откуда можно найти действие генераторов со штрихом на базисные векторы состояний,

$$\Gamma'_{l'} |\mu\rangle = (S^{-1})_{\bullet l'}^l \Gamma_l |\mu\rangle = \left( \mu_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l \right) |\mu\rangle = \mu'_{l'} |\mu\rangle,$$

т.е. состояние остается собственным для штрихованного генератора из подалгебры Картана, и имеет место закон преобразования ковектора  $\mu$ ,

$$\mu'_{l'} = \mu_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l$$

Эти ковекторы в математике принято называть весами, или весовыми векторами. Заметим, что преобразования в касательном пространстве координат отличаются от преобразований базиса в пространстве квантовых состояний  $|\mu\rangle$ : эти два сорта преобразований никак не связаны, они могут проводиться независимо друг от друга. Для того, чтобы подчеркнуть это различие между ковекторным пространством, в котором заданы наборы собственных значений генераторов подалгебры Картана, и векторным пространством представления группы, мы систематически используем для элементов пространства весов термин «вектор» или «ковектор», а для элементов пространства представления группы термин «состояние» (или «квантовое состояние»).

Важно подчеркнуть, что преобразования с заменой базиса в касательном пространстве координат группы возле единицы I.3.3 - I.3.6 при наличии нескольких весовых ковекторов  $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}$  переводят каждый весовой вектор из этого набора  $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}$  в вектор из набора  $\mu'^{(1)}, \dots, \mu'^{(k)}$ , в котором преобразуются компоненты весовых векторов, но не меняются их номера в наборе. Поэтому более логично ввести для собственных нормируемых на единицу состояний у генераторов подалгебры Картана обозначения

$$|k\rangle \text{ вместо } |\mu^{(k)}\rangle,$$

поскольку вне зависимости от выбора базиса в касательном пространстве справедливы уравнения на собственные значения

---

<sup>45</sup> Из линейной алгебры нам известно, что, если для эрмитово самосопряженных матриц существует базис совместных собственных векторов, то эти матрицы коммутируют, а также верно обратное: для попарно коммутирующих эрмитово самосопряженных матриц можно построить совместный базис собственных векторов, существование которого неочевидно для бесконечномерных матриц и эрмитово самосопряженных операторов общего вида. Это вынуждает нас апеллировать к математическому обоснованию квантовой механики, в которой вводится постулат о полноте набора собственных векторов эрмитово самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве квантовых состояний любой рассматриваемой физической системы. Математическое рассмотрение задачи позволяет сформулировать условия, налагаемые на пространство представления, обеспечивающие полноту общей системы собственных векторов, что составляет содержание спектральной теоремы функционального

$$\Gamma_l |k\rangle = (\mu^{(k)})_l |k\rangle, \quad \Gamma_{l'} |k\rangle = (\mu'^{(k)})_{l'} |k\rangle$$

Эти соотношения важны с точки зрения физической интерпретации: два набора физических наблюдаемых из числа генераторов подалгебры Картана обладают одним и тем же базисом состояний, причем эти собственные состояния для разных наборов генераторов подалгебры Картана имеют разные наборы собственных значений, которые мы называем весовыми векторами (а точнее ковекторами), и которые как компоненты ковекторов связаны между собой стандартными преобразованиями при замене наборов генераторов из подалгебры Картана согласно (I.3.4) и (I.3.6).

В этих обозначениях также становится более наглядным утверждение о различии двух типов преобразований. Первый тип возникает при фиксированном выборе подпространства координат группы возле единицы, которому отвечают генераторы подалгебры Картана, так что переход от одних координат этого  $n$ -мерного подпространства к другим приводит к преобразованию для генераторов подалгебры Картана, которое описывается обратимой матрицей  $S$  размером  $n \times n$  в виде (I.3.4):

$$\Gamma'_{l'} = \Gamma_l (S^{-1})^l_{\bullet l'}$$

Второй тип преобразований возникает, если в алгебре Ли от одной подалгебры Картана перейти к другой подалгебре Картана, т.е. если выбрать другое подпространство координат группы возле единицы, которому отвечают генераторы подалгебры Картана, что приведет в пространстве представления к переходу от исходного  $\mathcal{D}$ -мерного базиса собственных состояний исходного набора генераторов подалгебры Картана, вообще говоря, к новому  $\mathcal{D}$ -мерному базису собственных векторов нового набора генераторов подалгебры Картана с помощью унитарной матрицы  $\Sigma$  размером  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$  в виде

$$|k'\rangle = (\Sigma)^{k'}_{\bullet k} |k\rangle$$

Матрица  $\Sigma$  будет отлична от единичной, если среди нового набора генераторов подалгебры Карата есть хотя бы один, который не коммутирует с каким-либо генератором из исходного набора генераторов подалгебры Картана, так как в этом случае у такой пары генераторов не может существовать совместный базис собственных состояний. Итак, матрицы  $S$  и  $\Sigma$  отличаются своими размерами, действуют в пространствах разной природы, имеют разный физический смысл, а значит, и сами эти два типа преобразований независимы. Для примера, в группе поворотов ранга один в трехмерном пространстве присоединенного представления со спином  $s = 1$  с исходным базисом состояний  $|s, m_s\rangle$ , собственным для проекции спина  $s_z$  с собственными значениями  $m_s$ , можно перейти к новому базису состояний, собственным для оператора проекции спина  $s_y$ , например. Компоненты спина  $s_z$  и  $s_y$  не коммутируют, так что преобразование второго типа, переход к новому базису состояний будет описываться унитарной матрицей  $3 \times 3$ , отличной от единичной, в то время как преобразование первого типа, т.е. преобразование генераторов подалгебры Картана в данном случае – это просто умножение генератора  $s_z$  на число, отличное от нуля.

анализа. Для физических приложений важно наличие такого базиса, а не математически строгое описание условий его существования, поскольку физика не рассматривает системы, в которых построение базиса собственных состояний эрмитово самосопряженных операторов невозможно.

<sup>46</sup> Практически на протяжении всего изложения в книге мы молча подразумеваем, что обозначение состояния типа  $|\mu\rangle$  относится к представлению с заданными значениями инвариантов Казимира, которые не указываются в явном виде.

<sup>47</sup> Для присоединенного представления этот набор состоит из  $N_G$  векторов. Для других представлений размерность пространства собственных векторов  $\mathcal{D}$ , вообще говоря, может быть другой.



Если зафиксировать набор генераторов подалгебры Картана и пронумеровать их индексом  $l \in \{1, n\}$ , то можно распределить конечное множество весов в представлении на две группы по знаку первой по порядку, отличной от нуля компоненты  $\mu_l$ : у положительного веса первая по счету отличная от нуля компонента больше нуля, а у отрицательного меньше нуля. Более того, можно ввести понятие старшего веса представления (highest weight): старший – это вес, который выбран из конечного множества положительных весовых векторов согласно процедуре последовательного отсева так, чтобы значение первой по счету компоненты  $\mu_1$  было максимально, затем при выбранном максимальном значении  $\mu_1$  значение второй по счету компоненты  $\mu_2$  было максимально и точно также далее для всех последующих значений компонент по порядку.

Выбор генераторов подалгебры Картана фиксирует и набор весов  $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}$ , так что бывает удобней использовать обозначение

$$|\mu^{(k)}\rangle \quad \text{вместо} \quad |k\rangle$$

для базиса состояний, но надо понимать, что двум разным  $k \neq k'$  может соответствовать один и тот же набор собственных значений  $\mu^{(k)} = \mu^{(k')}$ , а сами собственные состояния  $|\mu^{(k)}\rangle$  и  $|\mu^{(k')}\rangle$ , т.е.  $|k\rangle$  и  $|k'\rangle$  при этом должны быть линейно независимыми в векторном подпространстве состояний с фиксированным набором компонент  $\mu$ .

Ясно, что понятия положительных и отрицательных весов, а также и старшего веса зависят как от выбора генераторов в подалгебре Картана, так и от замены параметров в касательном подпространстве координат, отвечающих одному конкретному выбору подпространства подалгебры Картана. В частности, мы встретимся с ситуацией, когда по отношению к выбору положительных и отрицательных весов удобно задать один набор генераторов в касательном пространстве, а по отношению к перечислению физических характеристик базисных состояний, т.е. собственных значений  $\mu_l$ , – другой.

Размерность векторов собственных значений 48 но само число разных собственных состояний  $|\mu^{(k)}\rangle$  зависит от размерности пространства представлений 49, которое мы обозначим символом  $\mathcal{D}$ . В присоединенном представлении, которое мы рассматриваем в этом параграфе, число базисных состояний равно размерности пространства параметров группы  $N_G$ , т.е.  $\mathcal{D} = N_G$ . В общем случае эрмитовы матрицы генераторов подалгебры Картана – это матрицы  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ , а значит, у них есть  $\mathcal{D}$  общих для генераторов из подалгебры Картана собственных квантовых состояний, которые образуют базис пространства представления, причем мы знаем, что этот базис всегда можно выбрать ортонормированным.

И здесь наступает удобный момент сделать небольшое отступление, чтобы подчеркнуть и тезисно обсудить такое характерное для курсов квантовой механики понятие, как полная система коммутирующих наблюдаемых. Для систематического изложения этого вопроса мы отсылаем читателя к любому современному учебнику по квантовой механике, например, к [10, а здесь же лишь кратко резюмируем результаты этого рассмотрения. В нашем контексте это просто набор попарно коммутирующих операторов на пространстве состояний. Часть их является генераторами подалгебры Картана. В квантовой механике показано, что у набора попарно коммутирующих операторов существует общий базис из собственных векторов, причем векторы, отличающиеся хотя бы на одно собственное значение из набора, автоматически ортогональны (см. также курс 1, который мы указали в качестве пререквизита к данному учебному пособию). Но если существует собственное подпространство с одним и тем же набором собственных значений, которое более чем одномерно, то такая система коммутирующих наблюдаемых называется неполной. И нужно искать дополнительные

операторы, для которых это подпространство будет разбито на одномерные собственные подпространства с разными собственными значениями этих других операторов, тоже эрмитовых, как и генераторы подалгебры Картана. В нашем рассмотрении это будут операторы Казимира подгрупп рассматриваемой группы Ли. И собственные состояния внутри этих более чем одномерных подпространств тоже автоматически станут ортогональными друг другу и всем ранее определенным. Нормировка такого ортогонального базиса до ортонормированного уже вопросов не вызывает.

Итак, продолжая основную канву исследования пространства представления алгебры Ли, заметим, что каждый генератор из подалгебры Картана при действии на базисное состояние дает то же состояние, умноженное на действительное число - собственное значение генератора на этом состоянии. Поскольку полный набор наблюдаемых часто не исчерпывается только генераторами подалгебры Картана и групповыми инвариантами Казимира, как мы увидим на примере группы  $SU(3)$ , а система коммутирующих эрмитово самосопряженных операторов называется полной, если каждому набору собственных значений этих операторов соответствует только одно собственное состояние, то в дальнейшем изложении мы будем разбирать, какие операторы нужно добавить к генераторам подалгебры Картана и независимым групповым операторам Казимира, чтобы сделать систему коммутирующих наблюдаемых полной.

Инварианты Казимира необходимы для того, чтобы отличать одно неприводимое представление от другого. Состояния с разными собственными значениями этих инвариантов ортогональны, но, что более важно, при действии групповых операций состояния с одними значениями инвариантов не могут преобразовываться в состояния с другими значениями инвариантов, т.е. подпространства с фиксированным набором собственных значений инвариантов Казимира являются инвариантными при действии на них группы. Следовательно, определенные собственные значения операторов Казимира являются необходимым признаком неприводимости представления. В наших построениях мы исследуем именно неприводимые представления.

Еще раз повторим, что в общем случае указать вес квантового состояния может быть недостаточно для того, чтобы однозначно задать квантовое состояние. Важно подчеркнуть, что в случае вырождения веса, когда ему отвечают более одного базисного состояния представления и количество различных наборов собственных значений - весов меньше  $\mathcal{D}$ , количество ортонормированных базисных квантовых состояний по-прежнему равно размерности представления  $\mathcal{D}$ .

Итак, базисные состояния пространства представления можно пронумеровать, указывая в их аргументе в явном виде как

весовой вектор  $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ , так и собственные значения  $\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}$   
для других  $q$  операторов из полного набора наблюдаемых, в формате

$$\left| \boldsymbol{\mu}^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)} \right\rangle, \text{ где } k \in \{\overline{1, \mathcal{D}}\}$$

Индексы собственных значений операторов полной системы коммутирующих наблюдаемых называются квантовыми числами: в данном случае  $k$  - это тоже квантовое числ 50 В силу полноты системы наблюдаемых соответствие квантового числа  $k$  и

<sup>48</sup>Число компонент у весового вектора равно рангу группы. Если линейными преобразованиями в пространстве параметров группы можно добиться ситуации, при которой компоненты всех весовых векторов с номером  $l'$  обращаются в нуль, то генератор подалгебры Картана  $\Gamma_{l'}$  в точном представлении сам тогда должен быть равен нулю, что исключено по определению точного представления полупростой компактной группы Ли.

<sup>49</sup> В представлении группы поворотов, ранг которой равен 1, при  $s = 1$  базис состояний включает в себя  $\mathcal{D} = 2s + 1 = 3$  вектора  $|s, m_s\rangle : |1, +1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$ .

набора собственных значений  $\mu^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}$  взаимнооднозначно, так что

$$|k\rangle \Leftrightarrow \left| \mu^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)} \right\rangle$$

Квантовыми числами можно считать сам набор собственных значений

$$\mu^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)}$$

Подобный вариант записи допустим и удобен, поскольку безликий номер состояния расшифровывается в явном виде с указанием физических характеристик, т.е. собственных значений наблюдаемых величин в квантовом состоянии. Однако, во-первых, подобная запись зависит от выбора координат в группе Ли, а, во-вторых, использование такого наименования предполагает более аккуратное описание соответствия состояния и собственных значений генераторов из подалгебры Картана: необходимо указать операторы в полном наборе наблюдаемых, собственные значения которых различают разные состояния с одним и тем же значением весового вектора <sup>21</sup>, причем, эти операторы наряду с независимыми групповыми инвариантами Казимира не могут быть линейными комбинациями групповых инвариантов и генераторов подалгебры Картана, так как вырождение как раз относится к одинаковым собственным значениям генераторов из подалгебры Картана и групповых инвариантов в совместном базисе, т.е. отличия между базисными состояниями отвечают разным собственным значениям других операторов, построенных из генераторов алгебры Ли <sup>52</sup>

Еще один пример использования понятия квантового числа - представление группы поворотов со спином  $s$ . Стандартное обозначение базисного состояния  $|s, m_s\rangle$  использует 2 квантовых числа, но, если  $m_s$  - это собственное значение проекции спина на ось  $z$ , то  $s$  - это квантовое число, которое задает собственное значение квадрата спина, т.е.  $s$  - это индекс собственного значения квадрата спина,

$$s^2 |s, m_s\rangle = s(s+1) |s, m_s\rangle$$

Указание собственного значения оператора Казимира важно не только физически, но и математически: тензорное произведение двух неприводимых представлений приводимо и раскладывается в прямую сумму по неприводимым представлениям с разными значениями операторов Казимир <sup>253</sup> Эта сумма - одно из проявлений принципа суперпозиции состояний в квантовой механике, когда возможные квантовые состояния записываются в виде линейной суммы других состояний с коэффициентами, которые ограничены только условие конечной нормы суммы. Этот же принцип проявляется при построении состояний представления как суперпозиции базисных состояний этого представления группы.

В дальнейшем изложении мы в основном будем пользоваться сокращенным обозначением для нормированного на единицу базисного состояния

$$\left| \mu^{(k)} \right\rangle \text{ вместо полной записи в виде } \left| \mu^{(k)}, \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_q^{(k)} \right\rangle,$$

так как в фокусе нашего внимания будут именно весовые векторы. Кроме того, если вес невырожден, то его указание в качестве аргумента базисного состояния при заданных значениях инвариантов Казимира однозначно характеризует это квантовое состояние.

Введем обозначение: пусть вектор  $\mathbf{l}$  - это элемент ортонормированного базиса  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}\}$  в пространстве весов, т.е.  $\mathbf{l}$  имеет единственную отличную от нуля и равную единице координату на  $l$ -ом месте,

$$(\mathbf{l})_m = \delta_{lm}, \quad l, m \in \{\overline{1, n}\}$$

Тогда собственное значение  $\mu_l^{(k)}$  выражается в виде скалярного произведения векторов в евклидовом пространстве  $\mu_l^{(k)} = (\mathbf{l}, \mu^{(k)})$ , и

$$\Gamma_l |\mu^{(k)}\rangle = (\mathbf{l}, \mu^{(k)}) |\mu^{(k)}\rangle$$

Это выражение позволит нам вычислить часть элементов метрики Киллинга, которые были определены как след произведения генераторов. В заданном базисе состояний  $|\mu^{(k)}\rangle$  (в векторном пространстве представления размерности  $\mathcal{D}$ ) след оператора, т.е. след матрицы или произведения матриц - это сумма диагональных матричных элементов оператора по всем базисным состояниям гильбертова пространства. В частности, для произведения генераторов подалгебры Картана находим, что

$$\text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \mu^{(k)} | \Gamma_l \Gamma_{l'} | \mu^{(k)} \rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \mu^{(k)} | \mu^{(k)} \rangle (\mathbf{l}', \mu^{(k)}) (\mathbf{l}, \mu^{(k)})$$

Однако, поскольку симметричная квадратичная вещественная форма Киллинга на подпространстве подалгебры Картана 24 которая задается элементами метрики

$$g_{ll'} = \text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = \text{tr}(\Gamma_{l'} \Gamma_l)$$

является положительно определенной, так как алгебра, которую мы рассматриваем, компактная и полупростая, матрицу  $g_{ll'}$  можно привести к диагональному виду посредством обратимых линейных вещественных преобразований генераторов  $\Gamma_l$ , т.е. преобразованием генераторов из полного набора наблюдаемых, так что в новом базисе  $g_{ll'} = b_l \delta_{ll'}$ , где  $b_l > 0$ . После этого можно перемасштабировать определение генераторов подалгебры Картана, положив  $b_l = 1$ . Это и есть метрика Киллинга для генераторов, входящих в полный набор наблюдаемых, т.е. в подалгебру Картана:  $g_{ll'} = \delta_{ll'}$ ,

$$g_{ll'} = \text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = \delta_{ll'}$$

Если состояния нормированы на единицу, а мы по умолчанию на протяжении всего изложения считаем все базисные состояния нормированными на единицу,

$$\langle \mu^{(k_1)} | \mu^{(k_2)} \rangle = \delta^{k_1 k_2}$$

то в новом, диагонализированном базисе, в котором  $g_{ll'} = \delta_{ll'}$ , соотношение (I.3.10 в силу определения компонент вектора  $\mathbf{l}$  (I.3.8) дает

<sup>50</sup> В традиции теоретической физики принято ставить в соответствие каждой наблюдаемой из полного набора свое квантовое число. Например, оператор квадрата спина имеет собственное значение  $s(s+1)$ , а квантовым числом выбирают  $s$ . С точки зрения комбинаторики любой набор дискретных индексов можно свести к одному индексу, которым и является в нашем случае номер  $k$  у состояния из базиса пространства представления.

<sup>51</sup> Напомним, что вырождением по какой-либо величине в квантовой механике называется ситуация, когда одному собственному значению этой величины соответствует более чем одномерное собственное подпространство.

<sup>52</sup> В действительности в группе могут быть подгруппы со своими операторами Казимира - инвариантами подгруппы, но в случае простой группы эти подгрупповые инварианты не могут быть инвариантами всей группы, и именно различные собственные значения таких подгрупповых инвариантов отвечают за разные собственные состояния с одним и тем же весовым вектором, т.е. отвечают за вырождение веса при заданных собственных значениях независимых инвариантов Казимира самой группы, причем, количество состояний с одним и тем же весом называют кратностью вырождения весового вектора.

<sup>53</sup>С. Главу 4 о сложении моментов количества движения, раздел 1.1

$$\delta_{ll'} = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} (\mathbf{l}', \boldsymbol{\mu}^{(k)}) (\boldsymbol{\mu}^{(k)}, \mathbf{l}) = (\mathbf{l}', \mathbf{l})$$

или

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \boldsymbol{\mu}_l^{(k)} \boldsymbol{\mu}_{l'}^{(k)} = \delta_{ll'}$$

так, как если бы  $n$ -мерные евклидовы векторы  $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ , отвечающие базису квантовых состояний  $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ , образовывали бы ортонормированный базис в  $n$ -мерном евклидовом пространстве! Отличие заключается в том, что суммирование в (I.3.13) идет в пределах от 1 до  $\mathcal{D} > n$ , а не от 1 до  $n$ .

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^n e_k (\mathbf{e}_k, \mathbf{a})$$

имеет очевидный геометрический смысл: любой вектор  $\mathbf{a}$  в пространстве можно разложить по базису в виде суммы проекций на базисные векторы  $\mathbf{e}_k$ . Умножив вектор  $\mathbf{a}$  в его разложении по базису на вектор  $\mathbf{b}$  скалярно, получим формулу

$$(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{b}, \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_k, \mathbf{a})$$

которое выглядит как (I.3.12), а роль ортонормированного базиса выполняют весовые векторы.

### 3.2 Веса и система корней алгебры Ли

Мы установили, что в присоединенном представлении есть  $\mathcal{D} = N_G$  весовых векторов  $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$  в евклидовом пространстве размерности ранга группы  $n$ . Эти веса или весовые векторы являются характеристиками  $N_G$  базисных состояний  $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$  в пространстве представления, т.е. базиса гильбертова пространства состояний. Действие генератора из подалгебры Картана не меняет базисное состояние пространства представления, но его норму умножает на одно из собственных значений генератора. Остальные генераторы приводят к тому, что базисные состояния под действием этих генераторов переходят в суперпозиции базисных состояний, т.к. генераторы - это матрицы линейных преобразований в пространстве представления. Поэтому все эти линейные преобразования можно характеризовать набором, построенным из разностей весовых векторов, т.е. из разностей собственных значений - весов, которыми характеризуется базис состояний в пространстве представления,

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k_1 k_2)} = \boldsymbol{\mu}^{(k_1)} - \boldsymbol{\mu}^{(k_2)}$$

<sup>54</sup> Во всем этом разделе мы вычисляем следы матриц в присоединенном представлении, которое определяет метрику Киллинга, но, поскольку наша цель состоит в том, чтобы вычислять коммутаторы генераторов, то значение этих коммутаторов не зависят от того, в каком представлении мы их получаем, так как для точных представлений алгебры Ли имеет место изоморфизм, сохраняющий один и тот же вид коммутаторов независимо от представления. Для краткости записи мы опускаем знак  $\text{ad}$  в выражениях, где вычисляются следы матриц. Вместе с тем, напомним, что согласно задаче 12 на стр. 31 след симметризованного произведения матриц генераторов в одном представлении пропорционален следу тех же матриц в другом представлении, а коэффициент пропорциональности - это скаляр по отношению к преобразованиям координат группы.

<sup>55</sup> Соотношение полноты ортонормированного базиса  $\mathbf{e}_k$  в  $n$ -мерном векторном пространстве с евклидовой метрикой

Эти векторы  $\alpha^{(k_1 k_2)}$  так же, как и векторы  $\mu^{(k)}$  с компонентами - собственными значениями матриц подалгебры Картана, являются  $n$ -мерными векторами, которые называются корнями алгебры Ли или корневыми векторами. Напомним, что собственные векторы  $\mu^{(k)}$  матриц I.2.10, составленных из структурных констант алгебры Ли  $f_{\alpha\beta}^\gamma$ ,

$$(\text{ad } \Gamma_\alpha)_\bullet^\gamma = i f_{\alpha\beta}^\gamma,$$

определяются этими структурными константами, что и придает особую роль рассуждениям в присоединенном представлении. А именно, присоединенное представление и все групповые операции в нем взаимнооднозначно соответствуют пространству касательных векторов в единице группы Ли и преобразованиям алгебры Ли в этом касательном пространстве, т.е. это представление является не только точным в смысле групповых преобразований, но и в смысле всех свойств касательного пространства, включая его размерность. Отсюда следует, что все коммутационные соотношения, выведенные в терминах весовых и корневых векторов в присоединенном представлении, взаимнооднозначно переходят в коммутационные соотношения в терминах тех же самых весовых и корневых векторов в любом точном представлении. Как мы увидим при дальнейшем изучении присоединенного представления в коммутаторы алгебры Ли явно входят только корневые векторы этой алгебры Ли. Поэтому система корневых векторов - это характеристика алгебры Ли, введенная в присоединенном представлении неявно в терминах структурных констант алгебры через весовые векторы, а значит, корни как векторы, которые входят в коммутационные соотношения алгебры Ли, являются универсальной системой корневых векторов для любого точного представления алгебры Ли.

Подчеркнем, что, вообще говоря, не все линейные преобразования, которые отвечают связи корня с разностью весов (I.3.14), являются линейными преобразованиями за счет действия линейной комбинации генераторов алгебры Ли на базисные состояния, т.е. не все корни в (I.3.14) являются корнями алгебры Ли.

Ясно, во-первых, что линейное преобразование - переход от базисного состояния с одним весом  $\mu^{(k_2)}$  к другому базисному состоянию с другим весом  $\mu^{(k_1)}$  можно осуществить не только в результате единственного преобразования за счет действия линейной комбинации генераторов алгебры Ли, которое описывается корнем  $\alpha^{(k_1 k_2)}$ , но и построить как последовательность из нескольких преобразований в алгебре Ли, каждое из которых характеризуется своим корнем  $\alpha^{(k'_1 k'_2)}$ . Это значит, что итог такой последовательности преобразований даст тот же корень,

$$\alpha^{(k_1 k_2)} = \alpha^{(k_1 k'_2)} + \alpha^{(k'_2 k'_3)} + \dots + \alpha^{(k'_{n-1} k'_n)} + \alpha^{(k'_n k_2)}$$

и, следовательно, если мы условимся считать корневыми только отличные от нуля векторы, которые изменяют хотя бы одну компоненту веса, то корень алгебры Ли может выражаться в виде суммы других корней алгебры Ли с целыми коэффициентами. Это верно в силу того, что корни алгебры Ли - лишь некоторые из всех возможных разностей весов, коих не так много. В формуле (I.3.15) мы записали последовательность корней от одного веса к другому, соблюдая нумерацию весов по порядку, так что

<sup>56</sup> При нумерации весов мы учитываем то, что часть из них может повторяться, т.е. подпространство собственных векторов с заданным набором собственных значений генераторов подалгебры Картана - весом может иметь размерность больше единицы, и тогда один и тот же вес считается столько раз, чему равна степень его вырождения, а соответствующее базисное состояние в подпространстве с заданным весом кроме собственно веса также характеризуется дополнительным квантовым числом, которое, например, отвечает собственному значению оператора из полного набора наблюдаемых в дополнение к генераторам из подалгебры Картана.

<sup>57</sup> Веса - это просто набор собственных значений генераторов из подалгебры Картана.

корневые векторы складываются, но в этом же равенстве можно перенести все векторы с правой части в левую за исключением одного, и тогда вместо сложения получится вычитание корневых векторов. Подобная специфическая линейная зависимость корней алгебры Ли исключительно с целыми коэффициентами возникает из-за того, что веса образуют конечное дискретное множество в  $n$ -мерном векторном пространстве, построенном в виде линейной оболочки весовых векторов.

Во-вторых, у каждого корня есть противоположный, так как наряду с линейным преобразованием переходом от базисного состояния с одним весом  $\mu^{(k_2)}$  к другому базисному состоянию с другим весом  $\mu^{(k_1)}$  существует и обратное линейное преобразование - переход от базисного состояния с весом  $\mu^{(k_1)}$  к базисному состоянию с весом  $\mu^{(k_2)}$ , а значит,

$$\alpha^{(k_2 k_1)} = \mu^{(k_2)} - \mu^{(k_1)} = -\alpha^{(k_1 k_2)}.$$

Чуть ниже это элементарное равенство для корневых векторов мы используем для того, чтобы установить его связь с коммутаторами генераторов алгебры Ли и покажем, что, если  $\alpha^{(k_1 k_1)}$  - это корень алгебры Ли, связанный с определенным генератором алгебры Ли и с коммутаторами этого генератора с другими генераторами алгебры Ли, то и противоположный корень  $\alpha^{(k_2 k_1)} = -\alpha^{(k_1 k_2)}$  тоже является корнем алгебры Ли, связанный с определенным генератором алгебры Ли и с коммутаторами этого генератора с другими генераторами алгебры Ли (см. формулу (I.3.26) и ее вывод на стр. 43).

Для дальнейших построений удобно ввести понятие положительного корня так же, как и для весовых векторов: согласно зафиксированному порядку счета генераторов подалгебры Картана у положительного корневого вектора первая отличная от нуля компонента по определению положительна. Тогда пары  $k_1 k_2$ , которые задают положительные корни  $\alpha^{(k_1 k_2)}$ , можно пронумеровать в каком-либо порядке натуральным индексом  $m$ , т.е. сопоставить множеству положительных корней  $\alpha^{(k_1 k_2)}$  упорядоченное множество  $\alpha_m$  тех же положительных корней.

Более того, теперь специфическая линейная зависимость корней I.3.15 перепишется в виде

$$\alpha_m = \sum_{m'} c_{mm'} \alpha_{m'}, \quad c_{mm'} \in \mathbb{Z}$$

и с ее помощью мы можем ввести определение простого положительного корня: простой положительный корень не может быть представлен в виде суперпозиции положительных корней (I.3.17) с натуральными (положительными целыми) коэффициентами  $c_{mm'}$ . Ясно, что не являющиеся простыми положительные корни выражаются через простые положительные корневые векторы в виде (I.3.17) с натуральными коэффициентами.

### 3.3 Корневое дополнение генераторов подалгебры Картана

Поскольку число положительных корней алгебры Ли  $\alpha_m$  равно числу противоположных им отрицательных корней  $-\alpha_m$ , которые, как мы покажем, отвечают корням той же алгебры Ли, то их общее количество - это четное число. Мы утверждаем, что число всех этих корней алгебры Ли равно числу генераторов вне подалгебры Картана, которые, таким образом, образуют базис дополнения подалгебры Картана до всей алгебры Ли, и такой базис дополнения мы будем называть генераторами корневого

<sup>58</sup> Поскольку мы ведем изложение в терминах фиксированного набора генераторов подалгебры Картана, мы предпочитаем использовать сокращенное обозначение для базисных состояний  $|\mu^{(k)}\rangle$  вместо  $|k\rangle$ .

дополнения, т.е. в алгебре Ли всего  $N_G - n$  корней. Рассмотрим более детально описание корневых векторов.

Прежде всего, общее число базисных линейных преобразований, из которых в виде линейных комбинаций можно построить все линейные преобразования между базисными состояниями присоединенного представления с изменением веса в начальном и конечном состоянии, равно количеству недиагональных элементов в линейных преобразованиях  $N_G$ -мерного пространства,  $N_G \times N_G - N_G$ . Их количество не меньше числа генераторов вне подалгебры Картана  $N_G - n$ , так как в противном случае, когда число недиагональных генераторов алгебры Ли, изменяющих состояния базиса, меньше, чем  $N_G - n$ , необходимо было бы добавить несколько генераторов до полного числа генераторов, равного  $N_G$  в группе Ли размерности  $N_G$ , и эти добавочные генераторы были бы уже диагональными, никак не изменяли бы базисные состояния и входили бы в число генераторов подалгебры Картана, что противоречит самому определению этой подалгебры: она уже не может быть расширена дополнительными коммутирующими генераторами. Значит, число линейных преобразований с изменением веса базисного состояния (лестничные преобразования) превышает число или равно количеству генераторов корневого дополнения подалгебры Картана, так что в общем случае не все линейные преобразования, которые изменяют веса базисных состояний и могут быть помечены соответствующим корневым вектором, являются генераторами алгебры Ли (!). Выше мы пронумеровали корни, которые маркируют генераторы алгебры Ли, индексом  $m$ .

Далее, вообще говоря, могло бы оказаться, во-первых, что одному и тому же корню алгебры Ли соответствует несколько линейных преобразований от одного базисного состояния к другому, если разность весов для базисных состояний в начале и в конце линейного преобразования совпадает. С помощью коммутационных соотношений мы покажем, что в этом случае речь идет об одном и том же линейном преобразовании в алгебре Ли, которое реализуется на разных базисных состояниях. Во-вторых, линейные преобразования между базисными состояниями присоединенного представления включают в себя не только линейные преобразования, которые реализуют действие матрицы  $\text{ad}\Gamma_m$  на векторном пространстве генераторов, но и многократные композиции линейных преобразований  $\text{ad}\Gamma_m$  на состояния в присоединенном представлении. Это значит, что после отсева всех линейных преобразований, которые не могут быть описаны как однократное действие матрицы  $\text{ad}\Gamma_m$  с номером, отвечающим корню алгебры Ли, остаются только лестничные линейные преобразования алгебры Ли, каждое из которых соответствует своему корневому вектору алгебры Ли, и это соответствие взаимнооднозначно вследствие того, что генератор из корневого дополнения подалгебры Картана с заданным значением корня алгебры Ли, как мы указали выше, единственный (он может действовать на разные базисные состояния представления).

Итак, все линейные преобразования алгебры Ли в пространстве присоединенного представления суть либо линейные комбинации  $N_G - n$  обратимых линейных преобразований 59 одного базисного состояния в другое с изменением весов этих базисных состояний, либо  $n$  преобразований, которые оставляют неизменным вес состояния и сохраняют само базисное состояние, домножая это состояние на собственное значение соответствующего генератора.

Можно развернуть проведенные рассуждения в виде формул. Итак, матрицы линейных преобразований размерности  $N_G \times N_G$ , которые действуют на пространстве состояний присоединенного представления (к этим линейным преобразованиям относятся и генераторы алгебры Ли), можно записать в виде суммы матриц размера  $N_G \times N_G$  как лестничного типа, так и диагональных, используя обозначения квантовой механики через бра- и кет-векторы



$$\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = |\mu^{(k_1)}\rangle \langle \mu^{(k_2)}|$$

Выражение (I.3.18) можно записать в более общем виде, если ввести в него комплексную фазу

$$\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = |\mu^{(k_1)}\rangle e^{i\phi^{(k_1 k_2)}} \langle \mu^{(k_2)}|$$

что практически никак не изменит дальнейшее рассмотрение, за исключением вывода о том, что эту свободу с выбором фазы можно использовать, удобным образом устраняя другие фазы, например, когда линейное преобразование переводит одно нормированное на единицу состояние в другое нормированное на единицу состояние с некоторым коэффициентом, так, чтобы коэффициент при нормированном базисном состоянии был бы положительным. Напомним, что линейное преобразование можно умножить на произвольное число, так как умножение на число оставляет преобразование линейным. Чуть ниже мы еще раз подчеркнем этот факт при вычислении коммутаторов.

Эрмитово сопряженный вектор состояния (комплексно сопряженная строка, построенная из столбца вектора состояния) [10, 11]

$$\langle \mu^{(k_2)}| = (|\mu^{(k_2)}\rangle)^\dagger$$

также является собственным для эрмитово самосопряженного генератора подалгебры Картана с вещественным собственным значением, которое указано как маркер состояния,

$$\langle \mu^{(k_2)}| \Gamma_l = \mu_l^{(k_2)} \langle \mu^{(k_2)}|$$

Так как согласно уравнению на собственные векторы (I.3.2) столбец базисного кет-вектора и строка базисного бра-вектора являются собственными при умножении на эрмитово самосопряженную матрицу генератора подалгебры Картана  $\Gamma_l$ ,

$$\Gamma_l |\mu\rangle = \mu_l |\mu\rangle, \quad \mu_l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (\Gamma_l |\mu\rangle)^\dagger = (\mu_l |\mu\rangle)^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mu| \Gamma_l = \langle \mu| \mu_l,$$

умножение матрицы  $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = |\mu^{(k_1)}\rangle \langle \mu^{(k_2)}|$  слева и справа на матрицу генератора подалгебры Картана приводит к

$$\Gamma_l \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = \mu_l^{(k_1)} \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}, \quad \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} \Gamma_l = \mu_l^{(k_2)} \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$$

Коммутатор генератора из подалгебры Картана  $\Gamma_l$  с введенными матрицами линейных преобразований  $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$  равен

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}] = \left( \mu_l^{(k_1)} - \mu_l^{(k_2)} \right) \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} = \alpha_l^{(k_1 k_2)} \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$$

Подчеркнем важный факт: при вычислении коммутатора (I.3.20), имеющего основополагающее значение при рассмотрении линейных преобразований, генератор  $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$  можно умножить на не равное нулю число  $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} \mapsto C_{12} \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}, C_{12} \neq 0$ , после чего коммутатор не изменяется, поскольку операция вычисления коммутатора является линейной по каждому из своих операторных или матричных аргументов. Это замечание справедливо и в случае, если  $\alpha^{(k_1 k_2)}$  – это корень алгебры Ли, а значит, и линейное

<sup>59</sup> Если одно базисное состояние линейно преобразуется в другое, т.е. в отличный от нуля образ, который является базисным состоянием с точностью до неравного нулю множителя, то существует и линейное преобразование этого образа в исходное состояние: и эту пару линейных преобразований мы называем взаимно обратимыми, так как их последовательное действие на исходное базисное состояние оставляет это состояние неизменным.

преобразование  $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$  относится к тем, что возникают при вычислении коммутаторов в присоединенном представлении этой алгебры Ли.

В тех же терминах кет- и бра-векторов матрицы генераторов из подалгебры Картана диагональны в базисе своих собственных векторов, так что они коммутируют со всеми диагональными матрицами ( $k_1 = k_2$ ). Точнее,

$$\Gamma_l = \sum_{k=1}^{N_G} \mu_l^{(k)} |\mu^{(k)}\rangle \langle \mu^{(k)}|$$

что также можно записать в стандартных матричных обозначениях 60. Для этого напомним, что линейные преобразования генераторов в присоединенном представлении мы записывали как матричное умножение строки на матрицу справа,

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\mu] = \Gamma_\nu (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu \equiv \Gamma_\mu \cdot (\text{ad } \Gamma_\alpha)$$

где  $\Gamma_\nu$  выступали в качестве базисных элементов ковекторного пространства генераторов алгебры Ли, т.е. пространства, изоморфного пространству присоединенного представления. Тогда и для матричных преобразований в пространстве базисных элементов бра-векторов, соответствующих ковекторам,

$$\langle k| = \langle \mu^{(k)}|,$$

мы постулируем тот же порядок следования матричных индексов, что и у матриц присоединенного представления при вычислении коммутаторов как линейных преобразований, с очевидной подстановкой обозначений:

$$\text{для базиса } \Gamma_\mu \mapsto \langle k| = \langle \mu^{(k)}|, \text{ и аналогично } \Gamma_\nu \mapsto \langle k''| = \langle \mu^{(k'')}|,$$

а также

$$\text{для матриц } (\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\bullet\mu}^\nu \mapsto (\Gamma_l)_{\bullet k}^{k''},$$

так что

$$[\Gamma_l, \Gamma_\mu] = \Gamma_\nu (\text{ad } \Gamma_l)_{\bullet\mu}^\nu \equiv \Gamma_\mu \cdot (\text{ad } \Gamma_l) \Rightarrow \langle \mu^{(k)}| \Gamma_l \equiv \langle \mu^{(k'')}| (\Gamma_l)_{\bullet k}^{k''},$$

и с учетом ортонормированности базисных состояний

$$\langle \mu^{(k'')} | \mu^{(k')} \rangle = \delta_{k''}^{k'}$$

получаем

$$\langle \mu^{(k)} | \Gamma_l | \mu^{(k')} \rangle = \langle \mu^{(k'')} | (\Gamma_l)_{\bullet k}^{k''} | \mu^{(k')} \rangle = (\Gamma_l)_{\bullet k}^{k'}.$$

Но

$$\langle \mu^{(k)} | \Gamma_l | \mu^{(k')} \rangle = \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'}$$

В итоге, матричная запись генератора подалгебры Картана имеет вид

$$(\Gamma_l)_{\bullet k}^{k'} = \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'}$$

Это выражение показывает, что в пространстве линейных преобразований генераторов присоединенного представления можно определить  $N_G$  линейных преобразований  $\mathfrak{e}_d$  в виде

диагональных матриц  $N_G \times N_G$ , в которых на  $d$ -том месте на главной диагонали стоит 1, а остальные матричные элементы равны 0 :

$$(\mathbf{e}_d)_{\bullet k}^{k'} = \delta_k^{k'} \delta_d^{k'}, \quad d \in \{\overline{1}, \overline{\mathcal{D}}\}$$

и матрицы-генераторы подалгебры Картана разлагаются по этому базису

$$\Gamma_l = \sum_{d=1}^{\mathcal{D}} \mu_l^{(d)} \mathbf{e}_d \Rightarrow (\Gamma_l)_{\bullet k}^{k'} = \sum_{d=1}^{\mathcal{D}} \mu_l^{(d)} (\mathbf{e}_d)_{\bullet k}^{k'} = \sum_{d=1}^{\mathcal{D}} \mu_l^{(d)} \delta_k^{k'} \delta_d^{k'} = \mu_l^{(k')} \delta_k^{k'} = \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'}$$

Отсюда заключаем, что в число  $n$  генераторов подалгебры Картана входят только  $n$  вполне определенных эрмитовых суперпозиций из  $\mathcal{D} = N_G > n$  диагональных матриц  $\mathbf{e}_d$  в присоединенном представлении. Метрика Киллинга в секторе генераторов подалгебры Картана

$$g_{ll'} = \text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = \sum_{k, k'} \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'} \mu_{l'}^{(k)} \delta_{k'}^k = \sum_k \mu_l^{(k)} \mu_{l'}^{(k)}$$

Линейной заменой координат группы можно сделать картановский блок метрики Киллинга компактной полупростой группы равным  $g_{ll'} = b_l \delta_{ll'}$ ,  $b_l > 0$ , т.е. диагональным, положительно определенным, а затем за счет изменения шкалы определения параметров группы, этот блок метрики Киллинга для генераторов подалгебры Картана можно преобразовать и к виду единичной матрицы.

Матричные обозначения для линейных преобразований  $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}$  с постулированным нами порядком следования матричных индексов у матриц генераторов запишутся согласно (I.3.18) в виде

$$(\Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}})_{\bullet k}^{k'} = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}} | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle = \langle \boldsymbol{\mu}^{(k)} | \boldsymbol{\mu}^{(k_1)} \rangle \langle \boldsymbol{\mu}^{(k_2)} | \boldsymbol{\mu}^{(k')} \rangle = \delta_k^{k_1} \delta_{k_2}^{k'}.$$

Среди матриц-генераторов алгебры Ли корневого дополнения подалгебры Картана не могут быть матрицы с отличными от нуля диагональными элементами, так как все допустимые для заданной компактной полупростой алгебры Ли диагональные матрицы – это генераторы подалгебры Картана: все диагональные матрицы присоединенного представления алгебры Ли разлагаются в суперпозицию по базису матриц-генераторов подалгебры Картана, другие диагональные матрицы, которые разлагаются по базису  $\mathbf{e}_d$  (I.3.22), коммутируют с матрицами-генераторами подалгебры Картана, но не имеют отношения к алгебре Ли, так как в противном случае они пополняли бы множество генераторов из подалгебры Картана, которое уже исчерпано по построению: в корневом дополнении подалгебры Картана есть только матрицы генераторов с нулевыми диагональными элементами. При  $k_1 \neq k_2$

$$\text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{\alpha^{(k_1 k_2)}}) = \sum_{k, k'} \mu_l^{(k)} \delta_k^{k'} \delta_{k'}^{k_1} \delta_{k_2}^k = \mu_l^{(k_1)} \delta_{k_2}^{k_1} = 0$$

Таким образом, метрика Киллинга имеет блочный вид: один блок для подалгебры Картана (генераторы пронумерованы индексом типа  $l$ ), другой для генераторов, не

<sup>60</sup> Вид этих матриц записан в базисе ортонормированных состояний, которые являются собственными для генераторов подалгебры Картана, так что прямое отождествление этого вида с определением матриц генераторов присоединенного представления (I.2.10 не является очевидным. Тем не менее, после проведения более детального изложения свойств базиса Картана–Вейля и неприводимых представлений читатель сможет рассмотреть и этот вопрос сравнения двух записей генераторов в разных базисах пространства состояний в разделе 2.4 Главы 2.

входящих в подалгебру Картана (генераторы пронумерованы индексом типа  $m$ ), т.е. в матричном виде метрика Киллинга выглядит как

$$\left( \frac{g_{ll'}}{g_{ml'}} \middle| \frac{g_{lm'}}{g_{mm'}} \right) = \left( \frac{g_{ll'}}{0} \middle| \overline{g_{mm'}} \right)$$

Из явной записи линейных преобразований с изменением веса состояния в матричных обозначениях I. 3.23 получаем

$$\text{tr} \left( \Gamma_{\alpha^{(k_1 k'_1)}} \Gamma_{\alpha^{(k_2 k'_2)}} \right) = \sum_{k, k'} \delta_k^{k_1} \delta_{k'}^{k'_1} \delta_{k'}^{k_2} \delta_k^{k'_2} = \delta_{k'_2}^{k_1} \delta_{k'_1}^{k_2}$$

и, следовательно, отличны от нуля только элементы метрики для матриц с противоположными значениями корневых векторов, так как в силу (I.3.14) при  $k'_1 = k_2$  и  $k'_2 = k_1$

$$\alpha^{(k_1 k_2)} = -\alpha^{(k_2 k_1)}$$

При этом

$$\Gamma_{\alpha^{(k_1 k'_1)}}^\dagger = (|\mu^{(k_1)}\rangle \langle \mu^{(k_2)}|)^\dagger = |\mu^{(k_2)}\rangle \langle \mu^{(k_1)}| = \Gamma_{\alpha^{(k'_1 k_1)}} = \Gamma_{-\alpha^{(k_1 k'_1)}}.$$

Поскольку групповые преобразования - это обратимые преобразования, а преобразования группы Ли возле единицы в присоединенном представлении - это линейные преобразования, которые выражаются в виде суммы тождественного преобразования и генератора, умноженного на малый параметр, то и эти линейные преобразования должны быть обратимыми в присоединенном представлении. В частности, если такое линейное преобразование за счет действия генератора переводит базисное состояние в другое базисное состояние, то обратное линейное преобразование должно содержать генератор, который переводит образ линейного преобразования исходного базисного состояния обратно в это же исходное состояние. Мы только что показали, что генератор такого обратного линейного преобразования - это генератор с противоположным значением корня, т.е. эрмитово сопряженный генератор для исходного генератора с заданным значением корня. Этот факт позволяет, как мы уже указывали это чуть выше на стр. 40 для каждого положительного корневого вектора  $\alpha^{(k_1 k'_1)}$  и матрицы  $\Gamma_{\alpha^{(k_1 k'_1)}}$  алгебры Ли ввести следующие обозначения: корневой вектор  $\alpha_m$  из упорядоченного множества тех же положительных корней и соответствующая этому корню матрица  $\Gamma_{\alpha_m}$ , а также ввести эрмитово сопряженную матрицу  $\Gamma_{\alpha_m}^\dagger = \Gamma_{-\alpha_m}$ , которая определяет линейное преобразование от одного базисного состояния с определенным весом к другому, так что разность весов исходного состояния и его образа равна противоположному, отрицательному корню.

Не все линейные преобразования, построенные в виде суперпозиций лестничных матриц могут входить в состав линейных преобразований в алгебре Ли, т.е. не все корни  $\alpha^{(k_1 k'_1)}$ , построенные как разности весов в присоединенном представлении, являются корнями алгебры Ли. В итоге, среди матриц  $\Gamma_{\alpha_m}$ , которые являются линейными комбинациями генераторов корневого дополнения подалгебры Картана алгебры Ли в присоединенном представлении, корневой блок метрики Киллинга с точностью до множителя, который зависит от выбора масштаба координат в группе Ли (масштабное преобразование  $\Gamma_{\alpha_m} \mapsto \Omega_m \Gamma_{\alpha_m}$ ), задается следом, который вычислен в явном виде чуть выше в I. 3.26, и после замены двойного индекса корня  $(k_1 k_2)$  на индекс  $m$  упорядоченного множества положительных корней алгебры Ли этот блок принимает вид

$$g_{mm'} = \Omega_m^2 \operatorname{tr} (\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \Omega_m^2 \delta_{mm'}$$

Важно, что коммутатор лестничного генератора с генератором подалгебры Картана, установленный нами для матриц в присоединенном представлении, в силу гомоморфизма алгебры Ли и коммутаторов генераторов в любом точном представлении, никак не изменяют своего вида при переходе от присоединенного представления к другому точному представлению.

Покажем, что можно построить эрмитово самосопряженные матрицы

$$\Gamma_m^R = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_{\alpha_m} + \Gamma_{-\alpha_m}), \quad \Gamma_m^I = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_{\alpha_m} - \Gamma_{-\alpha_m})$$

для которых вычисление следов, например,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} (\Gamma_m^R \Gamma_{m'}^R) &= \operatorname{tr} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_{\alpha_m} + \Gamma_{-\alpha_m}) \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_{\alpha_{m'}} + \Gamma_{-\alpha_{m'}}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} \delta_{mm'} + \frac{1}{2} \delta_{mm'} + 0 = \delta_{mm'} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} (\Gamma_m^L \Gamma_{m'}^L) &= \operatorname{tr} \left( \frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_{\alpha_m} - \Gamma_{-\alpha_m}) \frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_{\alpha_{m'}} - \Gamma_{-\alpha_{m'}}) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} \delta_{mm'} + \frac{1}{2} \delta_{mm'} + 0 = \delta_{mm'} \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} (\Gamma_m^R \Gamma_{m'}^L) &= -\operatorname{tr} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_{\alpha_m} + \Gamma_{-\alpha_m}) \frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_{\alpha_{m'}} - \Gamma_{-\alpha_{m'}}) \right) = \\ &= -i \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) - i \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{\alpha_{m'}}) + i \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) + i \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \\ &= 0 - i \frac{1}{2} \delta_{mm'} + i \frac{1}{2} \delta_{mm'} + 0 = 0, \end{aligned}$$

в итоге дает

$$\operatorname{tr} (\Gamma_m^R \Gamma_{m'}^R) = \operatorname{tr} (\Gamma_m^I \Gamma_{m'}^I) = \delta_{mm'}, \quad \operatorname{tr} (\Gamma_m^R \Gamma_{m'}^I) = 0$$

Еще раз напомним, что не все недиагональные матрицы (I.3.18) соответствуют генераторам алгебры Ли, а только те из них, которые являются линейными суммами генераторов, не входящих в подалгебру Картана.

В полупростой компактной алгебре Ли можно перейти к координатам, в которых метрика Киллинга единичная. При этом, среди линейных преобразований в присоединенном представлении с базисом состояний, составленным из совместных собственных состояний генераторов подалгебры Картана, выделяют матрицы-генераторы подалгебры Картана -  $n$  диагональных матриц с вещественными диагональными элементами - весами, и  $N_G - n$  недиагональных лестничных матриц,

отвечающих положительным и противоположным им, отрицательным корням, для которых строятся эрмитовы матрицы-генераторы  $\Gamma_m^{R,I}$ , так что эти эрмитовы матрицы  $\Gamma_l$  и  $\Gamma_m^{R,I}$  составляют весь набор генераторов алгебры Ли с единичной метрикой Киллинга.

Итак, все генераторы алгебры Ли разбились на две группы: - первая группа - попарно коммутирующие эрмитовы генераторы подалгебры Картана  $\Gamma_l$ ,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0, \quad l, l' \in \{1, n\}$$

• вторая группа - лестничные генераторы корневого дополнения подалгебры Картана,  $\Gamma_{\alpha_m}$ , каждый из которых изменяет вес базисного состояния так, что получается состояние с другим весом, и каждому из этих генераторов отвечает свое значение корня алгебры Ли  $\alpha$ , в то время как коммутатор с генератором подалгебры Картана задается выражением

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_m}] = (l, \alpha_m) \Gamma_{\alpha_m}$$

Из I.3.31 следует, что каждый из лестничных генераторов, которые действуют на разные базисные состояния с одним и тем же значением корня, удовлетворяет одному и тому же коммутационному соотношению с генераторами подалгебры Картана. Но это значит, что все лестничные преобразования с одним и тем же корнем алгебры Ли - это действие одного и того же лестничного генератора на разные базисные состояния присоединенного представления! Таким образом, соответствие лестничных генераторов и корней алгебры Ли является взаимно однозначным.

Это разбиение генераторов алгебры Ли на подалгебру Картана и лестничные генераторы  $\Gamma_{\alpha_m}$ , в основе которого лежат коммутационные соотношения (I.3.30 и (I.3.31, а также взаимно однозначное соответствие корней алгебры Ли и лестничных генераторов, составляет концепцию построения базиса Картана-Вейля в алгебре Ли: вместо структурных констант, отвечающих выбору некоторого базиса в касательном пространстве группы, и соответствующих генераторов в описанной схеме построения базиса Картана-Вейля осуществляют переход к генераторам подалгебры Картана и лестничным генераторам, а коммутаторы и структурные константы переформулируются в терминах корней алгебры Ли. Полнота коммутационных соотношений в базисе Картана-Вейля будет достигнута, если рассмотреть и коммутатор двух лестничных генераторов, что мы сделаем чуть ниже.

Итак, в терминах базиса Картана-Вейля групповая структура компактной полупростой алгебры Ли размерности  $N_G$  определяется её рангом  $n$  и системой из  $(N_G - n)/2$  положительных  $n$ -мерных корней. Можно ставить прямую задачу: если заданы структурные константы группы, то следует определить набор генераторов в подалгебре Картана, совместный базис из собственных состояний этих генераторов в присоединенном представлении, набор весов - собственных значений генераторов из подалгебры Картана на базисных состояниях и затем найти среди матриц линейных преобразований на пространстве присоединенного представления те генераторы, которые переводят одно базисное состояние в другое для заданной группы Ли. Но можно исследовать и обратную задачу: определить полный допустимый для алгебр Ли набор свойств корней, которым соответствуют линейные преобразования одного базисного состояния в другое в присоединенном представлении, и, уже исходя из этих свойств, перечислить все возможные наборы структурных констант алгебр Ли, например, полупростых и компактных, включая значения весов и прочее. Именно на обратной задаче описания алгебр Ли мы фокусируем все наше изложение: перечень допустимых

<sup>61</sup> Если лестничный генератор преобразует не одно, а несколько базисных состояний с одним и тем же значением корневого вектора, то в след войдет число таких базисных состояний, и мы можем включить этот множитель в  $\Omega_m^2$ .

положительных корней полупростой компактной алгебры Ли и их свойств как раз и есть классификация этих алгебр Ли.

### 3.4 Набор генераторов Картана-Вейля

После этих замечаний перейдем к конструктивным утверждениям. В некоем базисе касательного пространства эрмитово самосопряженные генераторы  $\Gamma_{\alpha'}$ , действуя на базисные состояния  $|\mu^{(k)}\rangle$ , дают какую-то суперпозицию  $|\mu^{(k')}\rangle$  с различными весовыми векторами  $\mu^{(k')}$  собственных значений генераторов подалгебры Картана

$$\Gamma_{\alpha'} |\mu^{(k)}\rangle = \sum_{k' \neq k} c_{kk'} |\mu^{(k')}\rangle$$

Согласно нашим построениям в предыдущем разделе все такие линейные преобразования можно представить в виде суммы диагональных преобразований из подалгебры Картана и недиагональных преобразований из корневого дополнения подалгебры Картана. Причем в этой сумме коэффициенты разложения по подалгебре Картана должны быть вещественными, а коэффициенты у генераторов с отрицательными корнями комплексно сопряженными коэффициентам с такими же положительными корнями, так как только в этом случае генератор в алгебре Ли полупростой компактной группы будет эрмитово самосопряженным. Значит, любой генератор алгебры Ли задан разложением по генераторам подалгебры Картана и ее корневого дополнения. Поэтому и сама алгебра Ли определяется набором генераторов в базисе Картана-Вейля, так как, установив коммутаторы в этом базисе, мы получим все возможные выражения для линейных комбинаций коммутаторов в алгебре Ли. В таком подходе мы постулируем, что алгебра генераторов в базисе Картана-Вейля, т.е. коммутаторы генераторов этого базиса однозначно определяют алгебру полупростой компактной группы Ли: это принцип классификации этих алгебр

Ли. Итак, в целях такой классификации необходимо установить все коммутаторы генераторов в базисе Картана-Вейля.

Если коммутатор генераторов в подалгебре Картана равен нулю по построению самой этой подалгебры, то для вывода коммутационных соотношений генераторов из корневого дополнения используем то, что действие лестничного генератора  $\Gamma_{\alpha_m}$  на базисные состояния  $|\mu^{(k)}\rangle$  будет давать с точностью до масштабного множителя базисное состояние представления, отвечающее весу  $\mu^{(k)} + \alpha_m$ , т.е.

$$\Gamma_{\alpha_m} |\mu^{(k)}\rangle \sim |\mu^{(k)} + \alpha_m\rangle, \quad \alpha_m \neq 0, \quad \alpha_m \in \{ \text{множество корней алгебры Ли} \}.$$

Таким образом мы сводим действие линейных преобразований в пространстве представления к переходам между базисными состояниями, и тогда можно установить, что

$$\begin{aligned} \Gamma_l \Gamma_{\alpha_m} |\mu^{(k)}\rangle &= (l, \mu^{(k)} + \alpha_m) \Gamma_{\alpha_m} |\mu^{(k)}\rangle \\ \Gamma_{\alpha_m} \Gamma_l |\mu^{(k)}\rangle &= (l, \mu^{(k)}) \Gamma_{\alpha_m} |\mu^{(k)}\rangle \end{aligned}$$

Имея в виду, что полученные равенства справедливы для любого базисного состояния в пространстве представления  $|\mu^{(k)}\rangle$ , легко найти следующее коммутационное соотношение

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha}] = (l, \alpha) \Gamma_{\alpha}$$

где мы опустили номер корневого вектора  $m$ , так как коммутатор имеет такой вид на любом базисном состоянии. Генераторы  $\Gamma_{\alpha}$ , как мы видели, не являются в общем

случае эрмитово самосопряженными:  $\Gamma_{\alpha}^{\dagger} \neq \Gamma_{\alpha}$ . Действительно, эрмитово сопряжение коммутатора I.3.32 дает

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha}^{\dagger}] = -(\mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha}) \Gamma_{\alpha}^{\dagger}$$

т.е. генератор  $\Gamma_{\alpha}^{\dagger}$  имеет такое же коммутационное соотношение с генераторами из подалгебры Картана, что и  $\Gamma_{\alpha}$ , но с учетом смены знака корня, т.е. с подстановкой  $\boldsymbol{\alpha} \mapsto -\boldsymbol{\alpha}$ . Поэтому

$$\Gamma_{\alpha}^{\dagger} = \Gamma_{-\alpha}$$

Следовательно,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{-\alpha}] = (\mathbf{l}, -\boldsymbol{\alpha}) \Gamma_{-\alpha} = -(\mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha}) \Gamma_{-\alpha}$$

Физический смысл лестничных генераторов  $\Gamma_{\pm\alpha}$  состоит в том, что они производят сдвиг собственных значений генераторов из полного набора наблюдаемых на величину  $\pm\alpha$ . Если корень  $\alpha$  положительный, то генераторы  $\Gamma_{\alpha}$  называют повышающими, а  $\Gamma_{-\alpha}$  – понижающими. То, что такие генераторы всегда можно построить, следует из двух фактов, которые мы установили в присоединенном представлении, изоморфном касательному пространству алгебры Ли:

- генераторы алгебры Ли представляют собой линейные преобразования в векторном пространстве генераторов,
- эрмитовы генераторы подалгебры Картана как линейные операторы (матрицы) на векторном пространстве генераторов, т.е. на пространстве присоединенного представления, можно диагонализировать совместно и построить их общий для всех базис собственных состояний в пространстве присоединенного представления.

Итак, в теории представлений групп Ли мы имеем дело с тремя векторными пространствами:

- первое – касательное пространство координат группы размерности  $N_G$ ;
- второе – пространство состояний представления с базисом из собственных кетвекторов подалгебры Картана  $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$ ; размерность этого гильбертова пространства  $\mathcal{D}$ , равная числу векторов этого базиса, определяется представлением алгебры генераторов Ли, в частности, для присоединенного представления  $\mathcal{D} = N_G$ ;
- третье –  $n$ -мерное пространство, элементами которого, во-первых, являются векторы собственных значений  $\boldsymbol{\mu}$  для генераторов из подалгебры Картана; размерность  $\dim(\boldsymbol{\mu}) = n$  – ранг алгебры Ли; векторы  $\boldsymbol{\mu}$  называют весами (или весовыми векторами), и они образуют конечный дискретный набор векторов в  $n$ -мерном пространстве. Во-вторых, векторы  $\boldsymbol{\alpha}_m$ , которые при действии соответствующих им генераторов из корневого дополнения алгебры Картана  $\Gamma_{\alpha_m}$  на базисные состояния  $|\boldsymbol{\mu}^{(k)}\rangle$  переводят их в суперпозицию других базисных состояний с весовым вектором  $\boldsymbol{\mu}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_m$ , также являются элементами  $n$ -мерного векторного пространства и образуют конечный дискретный набор векторов  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ , которые называются корневыми (или просто корнями) той же размерности  $n$ , что и веса.

Выясним, какое значение принимает элемент метрики Киллинга для двух генераторов, отвечающих разным корневым векторам. Для этого запишем для генераторов с разными значениями сдвигов след, используя значение коммутатора генератора из алгебры Картана с повышающим генератором I.3.32,

$$\text{tr}([\Gamma_l, \Gamma_{\alpha}] \Gamma_{\beta}) = \text{tr}(\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta}) (\mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha})$$



Затем раскроем коммутатор по определению и воспользуемся тем, что первую матрицу в произведении матриц под знаком следа можно переместить на последнее место в произведении, так что

$$\mathrm{tr}([\Gamma_l, \Gamma_\alpha] \Gamma_\beta) = \mathrm{tr}(\Gamma_l \Gamma_\alpha \Gamma_\beta - \Gamma_\alpha \Gamma_l \Gamma_\beta) = \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta \Gamma_l - \Gamma_\alpha \Gamma_l \Gamma_\beta) = \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha [\Gamma_\beta, \Gamma_l]) = -(\mathbf{l}, \beta) \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta),$$

т.е.

$$(\mathbf{l}, \alpha) \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) = -(\mathbf{l}, \beta) \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta).$$

Поскольку  $\mathbf{l}$  - это любой вектор из ортонормированного базиса в  $n$ -мерном пространстве, либо

$$\mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) \neq 0 \Rightarrow \beta = -\alpha, \quad \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}) \neq 0$$

либо

$$\beta \neq -\alpha, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) = 0$$

В базисе нормированных на единицу собственных состояний подалгебры Картана 22 след вычисляется как сумма диагональных матричных элементов по всем элементам базиса, и подобные соотношения становятся очевидными, так как

$$\mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \mu^{(k)} | \Gamma_\alpha \Gamma_\beta | \mu^{(k)} \rangle$$

а

$$\Gamma_\alpha \Gamma_\beta | \mu^{(k)} \rangle \sim | \mu^{(k)} + \alpha + \beta \rangle$$

и

$$\langle \mu^{(k)} | \mu^{(k)} + \alpha + \beta \rangle \neq 0, \quad \text{если } \alpha + \beta = 0.$$

Поэтому нормировку генераторов  $\Gamma_{\pm\alpha}$  можно сделать такой, чт 6

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) = \delta_{\alpha, -\beta}$$

что устанавливает вид элементов метрики Киллинга как следа двух генераторов, отвечающих корневым векторам. Очевидно также, что

$$\mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_l) = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \mu^{(k)} | \Gamma_\alpha \Gamma_l | \mu^{(k)} \rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} (\mathbf{l}, \mu^{(k)}) \langle \mu^{(k)} | \Gamma_\alpha | \mu^{(k)} \rangle \sim \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} (\mathbf{l}, \mu^{(k)}) \langle \mu^{(k)} | \mu^{(k)} + \alpha \rangle = 0,$$

так как  $\langle \mu^{(k)} | \mu^{(k)} + \alpha \rangle = 0$ , т.е.

$$g_{\alpha l} = \mathrm{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_l) = 0$$

Таким образом, в обозначениях кет- и бра-векторов мы наглядно показали, что метрика Киллинга имеет блочный вид при разбиении генераторов на два блока: подалгебры Картана и корневого дополнения. Метрика Киллинга полностью определена для всех пар генераторов из базиса Картана-Вейля в соотношениях (I.3.11), (I.3.37) и (I.3.38).

**Киселев-2022-13.**

Докажите, что  $\text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_l) = 0$ , используя то, что

$$(\mathbf{l}, \alpha) \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_l) = \text{tr}([\Gamma_l, \Gamma_\alpha] \Gamma_l)$$

**Теория дальше**

Установим теперь значение коммутатора генераторов для противоположных корневых векторов  $[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]$ . Для этого запишем тождество Якоби

$$[\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] + [\Gamma_\alpha, [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_l]] + [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_l, \Gamma_\alpha]] = 0$$

и воспользуемся известными коммутаторами (I.3.32), так что

$$[\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] + (\mathbf{l}, \alpha) [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] + (\mathbf{l}, \alpha) [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_\alpha] = 0 \Rightarrow$$

$$[\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = 0$$

а значит, коммутатор  $[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]$ , значение которого принадлежит множеству линейных комбинаций из генераторов алгебры Ли, является элементом подалгебры Картана, т.е. выражается в виде линейной комбинации генераторов из полного набора наблюдаемых  $\Gamma_l$ . Поэтому  $[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]$  можно записать в виде суперпозиции генераторов подалгебры Картана

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] = B_{l'} \Gamma_{l'}$$

где в последнем равенстве мы использовали соглашение Эйнштейна о суммировании по паре повторяющихся («немых») индексов: знак суммы по таким индексам опущен. Коэффициенты  $B_{l'}$  легко найти, сначала записав

$$\text{tr}(\Gamma_l [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]) = \text{tr}(\Gamma_\alpha [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_l]) = (\mathbf{l}, \alpha) \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}) = (\mathbf{l}, \alpha) = \alpha_l,$$

так как в случае евклидовой метрики Киллинга <sup>64</sup> I.3.37  $\text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}) = 1$ . С другой стороны,

$$\text{tr}(\Gamma_l [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]) = B_{l'} \text{tr}(\Gamma_l \Gamma_{l'}) = B_{l'} \delta_{ll'} = B_l$$

В итоге,  $B_l = \alpha_l$ , т.е. коэффициенты разложены  $\sqrt{65} B_l$  - это компоненты корневого вектора, т.е. проекции корневого вектора  $\alpha$  на орты базиса единичных векторов  $\mathbf{l}$ , и

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] = \sum_l (\mathbf{l}, \alpha) \Gamma_l = \alpha_l \Gamma_l$$

где в последнем равенстве мы опять использовали соглашение Эйнштейна о суммировании по немым индексам, причем вид этого коммутатора, который мы сейчас вывели в случае евклидовой метрики Киллинга, не изменится, если метрика конформно плоская (см. изложение ниже и вывод формулы (I.3.43)).

<sup>62</sup> Мы иллюстрируем геометрические аргументы рассуждениями в терминах, которые применяются в квантовой механике.

<sup>63</sup> По построению генераторов  $\Gamma_\alpha$  и  $\Gamma_{-\alpha}$  как эрмитово сопряженных друг к другу,  $\Gamma_\alpha^\dagger = \Gamma_{-\alpha}$ , их линейные комбинации, которые можно ввести по аналогии со случаем момента количества движения в виде  $\Gamma_x = (\Gamma_\alpha + \Gamma_{-\alpha})/\sqrt{2}$  и  $\Gamma_y = -i(\Gamma_\alpha - \Gamma_{-\alpha})/\sqrt{2}$ , являются эрмитовыми, а соответствующие элементы метрики Киллинга имеют евклидов вид:  $g_{xx} = g_{yy} = 1$ ,  $g_{xy} = g_{yx} = 0$ , так как в явном виде, например,

$$\text{tr}(\Gamma_x \Gamma_x) = \frac{1}{2} \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha} + \Gamma_{-\alpha} \Gamma_\alpha) = 1, \quad \text{tr}(\Gamma_x \Gamma_y) = i \frac{1}{2} \text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha} - \Gamma_{-\alpha} \Gamma_\alpha) = 0$$

Наконец, в случае  $\alpha + \beta \neq 0$  тождества Якоби и коммутаторы (I.3.32) дают

$$\begin{aligned} [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] + [\Gamma_\alpha, [\Gamma_\beta, \Gamma_l]] + [\Gamma_\beta, [\Gamma_l, \Gamma_\alpha]] &= 0 \Rightarrow \\ [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] - (\mathbf{l}, \beta) [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] + (\mathbf{l}, \alpha) [\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha] &= 0 \Rightarrow \\ [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] &= (\mathbf{l}, \alpha + \beta) [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta], \end{aligned}$$

а значит, коммутатор  $\Gamma_{\alpha;\beta} \equiv [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]$  удовлетворяет такому же коммутационному соотношению

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha;\beta}] = [\Gamma_l, [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]] = (\mathbf{l}, \alpha + \beta) \Gamma_{\alpha;\beta}$$

что и генератор с корневым вектором  $\alpha + \beta \neq 0$ ,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha+\beta}] = (\mathbf{l}, \alpha + \beta) \Gamma_{\alpha+\beta}$$

Но в силу того, что каждому корню алгебры Ли поставлен в соответствие единственный генератор алгебры Ли, это значит, что генераторы  $\Gamma_{\alpha;\beta} \equiv [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]$  и  $\Gamma_{\alpha+\beta}$  пропорциональны. Следовательно,

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = N_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha+\beta}$$

При этом, если сумма  $\alpha + \beta = \gamma$  не является корневым вектором алгебры Ли, то  $N_{\alpha,\beta} = 0$  (предлагаем читателю поразмыслить об этом самостоятельно).

В итоге, с помощью построений в присоединенном представлении алгебры Ли мы показали, что коммутационные соотношения для исходных эрмитово самосопряженных генераторов полупростой компактной алгебры Ли можно эквивалентным образом сформулировать путем перехода к генераторам двух типов и введения подалгебры Картана  $\{\Gamma_l\}$  размерностью ранга алгебры Ли  $\dim \{\Gamma_l\} = n$  и лестничных генераторов  $\{\Gamma_\alpha\}$ , которые взаимнооднозначно связаны с корнями алгебры Ли  $\{\alpha\}$ , причем система корневых векторов алгебры Ли включает в себя положительные корни  $\{\alpha_m\}$  и противоположные им отрицательные корни, а метрика Киллинга за счет масштабных преобразований координат группы возле единицы может быть сведена к конформно евклидовой форме (см. определение в сноске 35 на стр. 26)

$$\begin{aligned} g_{ll'} &= \text{tr}(\text{ad } \Gamma_l \cdot \text{ad } \Gamma_{l'}) = \Omega^2 \delta_{ll'} \\ g_{mm'} &= \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\alpha_m} \cdot \text{ad } \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \Omega^2 \delta_{mm'} \\ g_{lm} &= \text{tr}(\text{ad } \Gamma_l \cdot \text{ad } \Gamma_{\alpha_m}) = 0 \end{aligned}$$

Независимо от вида метрики коммутатор

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_m}] = (\mathbf{l}, \alpha_m) \Gamma_{\alpha_m}$$

Ковариантное вычисление коэффициентов  $B^{ll'}$  в разложении коммутатора

$$\delta_{mm'} [\Gamma_{\alpha_m}, \Gamma_{-\alpha_{m'}}] = B^{ll'} \Gamma_{l'} \delta_{mm'} \quad (\text{нет суммирования по } m, m')$$

по генераторам подалгебры Картана в конформно евклидовой метрике дает

<sup>64</sup> Обобщение вывода в случае конформно плоской метрики Киллинга проведено чуть ниже при выводе формулы [3.43]. Здесь же мы специально упрощаем рассмотрение, чтобы рассуждения стали более наглядными.

<sup>65</sup> Подчеркнем, что этот вывод справедлив и в случае, когда  $\text{tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}) = g_{\alpha, -\alpha} = \Omega^2, g_{ll'} = \Omega^2 \delta_{ll'}$ , т.е. если метрика положительно определена и пропорциональна единичной, а не только тогда, когда она равна единичной. См. вывод формулы I.3.43.

$$\delta_{mm'} \operatorname{tr} (\operatorname{ad} \Gamma_l \cdot [\operatorname{ad} \Gamma_{\alpha_m}, \operatorname{ad} \Gamma_{-\alpha_{m'}}]) = B^{ll'} \delta_{mm'} \operatorname{tr} (\operatorname{ad} \Gamma_l \cdot \operatorname{ad} \Gamma_{l'}) = B^{ll'} g_{ll'} \delta_{mm'} = B^{ll'} \Omega^2 \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

что, с другой стороны, равно

$$\begin{aligned} \delta_{mm'} \operatorname{tr} (\operatorname{ad} \Gamma_l \cdot [\operatorname{ad} \Gamma_{\alpha_m}, \operatorname{ad} \Gamma_{-\alpha_{m'}}]) &= \delta_{mm'} \operatorname{tr} (\operatorname{ad} \Gamma_{\alpha_m} \cdot [\operatorname{ad} \Gamma_{-\alpha_{m'}}, \operatorname{ad} \Gamma_l]) = (\text{нет суммирования по } m, m') \\ &= \delta_{mm'} (\mathbf{l}, \alpha_{m'}) \operatorname{tr} (\operatorname{ad} \Gamma_{\alpha_m} \cdot \operatorname{ad} \Gamma_{-\alpha_{m'}}) = \delta_{mm'} (\mathbf{l}, \alpha_m) g_{mm'} = (\alpha_m)_l \Omega^2 \delta_{mm'} \end{aligned}$$

Поэтому  $B^{ll'} \delta_{ll'} = (\alpha_m)_l$ . В ковариантных обозначениях запись коммутатора сопряженных лестничных генераторов примет вид

$$[\Gamma_{\alpha_m}, \Gamma_{-\alpha_{m'}}] = (\alpha_m, \mathbf{l}) g^{ll'} \Gamma_{l'} g_{mm'} = (\alpha_m)_l g^{ll'} \Gamma_{l'} g_{mm'} = \alpha_m^l \Gamma_l g_{mm'}$$

Описанная нами система генераторов подалгебры Картана и их лестничного дополнения алгебры Ли и есть базис Картана-Вейля полупростой компактной алгебры Ли. Ясно, что запись коммутаторов в базисе Картана-Вейля имеет вид, инвариантный относительно конформно ортогональных преобразований координат в касательном пространстве группы возле единицы: эти преобразования сохраняют конформно евклидов вид метрики Киллинга.

Резюмируя, запишем установленный набор коммутационных соотношений в базисе Картана-Вейля с конформно евклидовой метрикой Киллинга

$$\begin{aligned} [\Gamma_l, \Gamma_{l'}] &= 0, \quad g_{ll'} = \operatorname{tr} (\operatorname{ad} \Gamma_l \cdot \operatorname{ad} \Gamma_{l'}) = \Omega^2 \delta_{ll'}, \\ [\Gamma_l, \Gamma_{\alpha}] &= \alpha_l \Gamma_{\alpha}, \quad \alpha_l = (\mathbf{l}, \alpha), \\ [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{-\alpha}] &= \alpha_l \Gamma_l, \quad g_{\alpha, -\alpha} = \operatorname{tr} (\operatorname{ad} \Gamma_{\alpha} \cdot \operatorname{ad} \Gamma_{-\alpha}) = \Omega^2, \\ [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}] &= N_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha + \beta}, \quad g_{\alpha, \beta} = \operatorname{tr} (\operatorname{ad} \Gamma_{\alpha} \cdot \operatorname{ad} \Gamma_{\beta}) = 0, \quad \alpha + \beta \neq 0 \end{aligned}$$

Теперь, когда самый общий вид коммутаторов генераторов в базисе Картана-Вейля установлен, для классификации полупростых компактных алгебр Ли необходимо определить, какими могут быть корневые векторы и их скалярные произведения в произвольной полупростой компактной алгебре Ли, а также вычислить значения коэффициентов  $N_{\alpha, \beta}$ , если корневые векторы алгебры Ли заданы.

### 7.3.9 Root vectors and Dynkin diagrams

Лестничные операторы, простые положительные корни, экспоненциальное представление элементов группы, коммутационные соотношения и скалярные произведения корневых векторов, базис в пространстве корневых векторов, повышающие последовательности простых положительных корней и число шагов повышения, дочерние корневые последовательности, диаграммы Дынкина, переход от базиса Картана-Вейля к генераторам Шевалле, классификация допустимых связных диаграмм, двойные и тройные линии, ветвления.

При построении базиса Картана-Вейля мы пронумеровали генераторы подалгебры Картана с помощью индекса  $l$ . Тогда стало возможно ввести понятие положительных и отрицательных корневых векторов  $\alpha$  (см. определение весов и корней в (I.3.36)), разделяя их по знаку первой ненулевой компоненты  $\alpha_l$ . При этом, однако, положительные корни могут выражаться в виде линейной комбинации простых положительных корней с натуральными коэффициентами в суперпозиции, как мы это описали на стр. 40 в формуле 1.3.17<sup>66</sup>

Докажем, что число простых положительных корней не может быть меньше размерности векторного пространства корней и весов, т.е. ранга группы  $n$ . В самом деле, предположим противное: пусть число простых положительных корневых векторов меньше ранга алгебры Ли, - и покажем, что в этом случае алгебра не является полупростой. Итак, если число лестничных генераторов, которые соответствуют простым положительным корням, меньше числа генераторов в подалгебре Картана, то линейная оболочка, которая образована всевозможными суперпозициями простых положительных корневых векторов с вещественными коэффициентами, образует векторное пространство, которое обозначается как  $\text{Span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \equiv \text{Span}(\alpha)$ , размерности  $\tilde{n} < n$ . В этой линейной оболочке в качестве конечного подмножества содержится набор всех положительных и отрицательных корневых векторов алгебры Ли. Пространство  $\text{Span}(\alpha)$  по смыслу лестничных генераторов и соответствующих им корневых векторов является подпространством в  $n$ -мерном пространстве  $\text{Span}(\mu)$ , образованном линейной оболочкой из весов  $\mu$  - векторов собственных значений для собственных состояний матриц генераторов из подалгебры Картана. В этом случае в  $n$ -мерном пространстве можно выделить подпространство  $\text{Span}(\mu_{\perp})$  размерности  $\tilde{n}' = n - \tilde{n} > 0$ , ортогональное подпространству  $\text{Span}(\alpha) = \text{Span}(\mu_{\parallel})$  линейной оболочки простых положительных корней. Веса в ортогональном подпространстве  $\text{Span}(\mu_{\perp})$  инвариантны относительно действия повышающих и понижающих генераторов. Значит, в пространстве весов  $\text{Span}(\mu)$  можно произвести разбиение на два ортогональных подпространства - «корневое»  $\text{Span}(\alpha) = \text{Span}(\mu_{\parallel})$  и «инвариантное»  $\text{Span}(\mu_{\perp})$ , и, следовательно, такое разбиение соответствует переходу к таким координатам группы, в которых сама подалгебра Картана составлена из генераторов  $\{\Gamma_{\perp}\}$  и  $\{\Gamma_{\parallel}\}$ , собственные векторы которых в присоединенном представлении <sup>67</sup> имеют веса в линейных оболочках  $\text{Span}(\mu_{\perp})$  и  $\text{Span}(\mu_{\parallel}) = \text{Span}(\alpha)$ , соответственно. При этом согласно такому построению

$$[\Gamma_{\perp}, \Gamma_{\alpha}] = (\alpha)_{\perp} \Gamma_{\alpha} = 0$$

т.е. генераторы  $\Gamma_{\perp}$  подалгебры Картана из подмножества  $\{\Gamma_{\perp}\}$  коммутируют со всеми генераторами вне подалгебры Картана, поскольку, напомним, по построению базиса Картана-Вейля генераторы, соответствующие корням алгебры, изменяют собственные значения генераторов подалгебры Картана, а мы установили, что для генераторов подалгебры Картана из «инвариантного» подпространства  $\{\Gamma_{\perp}\}$  собственные значения не меняются. Поэтому наличие подпространства инвариантных весов указывает на то, что действие всех генераторов алгебры оставляет его инвариантным, а значит, подгруппа  $\mathcal{G}_{\perp}$ , генераторами которой являются операторы из подалгебры  $\{\Gamma_{\perp}\}$ , - это инвариантная абелева подгруппа. Наличие такой нормальной подгруппы противоречит условию о том, что мы изучаем полупростые группы.

#### 4.1 Экспоненциальное представление и глобальная структура группы

Для более точного вывода о том, что элементы группы коммутируют, если генераторы коммутируют, необходимо перейти от приближенных равенств в окрестности единицы, которые отвечают коммутаторам генераторов, к точным равенствам для элементов

<sup>66</sup> Если  $\alpha$  и  $\beta$  - простые положительные корневые векторы, т.е. они задают действие генераторов  $\Gamma_{\alpha}$  и  $\Gamma_{\beta}$  на элементы базиса из собственных состояний генераторов подалгебры Картана  $|\mu\rangle$  и отображают один элемент базиса на другой, сдвигая вес состояния на соответствующий корень (с возможным изменением нормировки собственного состояния), то может оказаться, что существует и генератор  $\Gamma_{\alpha+\beta}$ , который отвечает сдвигу весового вектора на  $\gamma = \alpha + \beta$ , и этот собственный тоже будет положительным, но уже не будет простым, так как он равен сумме двух положительных корней.

<sup>67</sup> Для наглядности рассуждений о генераторах и пространствах линейных оболочек корней и весов мы проводим изложение в присоединенном представлении, чтобы не отвлекаться на обобщения и специфику

группы. Для этого можно использовать изоморфизм групповой структуры возле единицы групповой структуре возле любого другого элемента группы. В самом деле, определение генератора группы возле единицы в некотором представлении  $T(\mathfrak{g}) = G$

$$\Gamma_{\alpha} = i \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial G_a}{\partial a^{\alpha}}$$

можно сначала переписать в виде дифференцирования вдоль направления  $\mathbf{a}$ , сделав подстановку малого параметра в виде поля 69

$$G_{a(u+du)} - \mathbb{1} \equiv dG_{a(u)} = -i\Gamma_{\mathbf{a}} du, \quad du \rightarrow 0, \quad \Gamma_{\mathbf{a}} = \Gamma_{\alpha} a^{\alpha}$$

После умножения справа на  $G_{a(u)}$  можно воспользоваться при  $u \rightarrow 0$  равенством, справедливым в первом приближении,

$$G_{a(u+du)} \cdot G_{a(u)} = (\mathbb{1} - i\Gamma_{\mathbf{a}} du) \cdot (\mathbb{1} - i\Gamma_{\mathbf{a}} u) \approx \mathbb{1} - i\Gamma_{\mathbf{a}}(u + du) = G_{a(u+du)}.$$

С учетом элементарного равенства  $\mathbb{1} \cdot G_{a(u)} = G_{a(u)}$  найдем

$$G_{a(u+du)} - G_{a(u)} \equiv dG_{a(u)} = -i\Gamma_{\mathbf{a}} du G_{a(u)}, \quad u \rightarrow 0, \quad du \rightarrow 0, \quad \Gamma_{\mathbf{a}} = \Gamma_{\alpha} a^{\alpha}$$

что эквивалентно

$$dG_{a(u)} \cdot G_{a(u)}^{-1} = -i\Gamma_{\mathbf{a}} du, \quad u \rightarrow 0, \quad du \rightarrow 0$$

Изоморфизм групповой структуры в разных точках, т.е. при любом значении  $u$ , означает, что дифференциальное уравнение (I.4.4) можно записать и в любой другой точке при  $u \neq 0$ ,

$$dG_{a(u)} \cdot G_{a(u)}^{-1} = -i\Gamma_{\mathbf{a}} du$$

где матрица генератора  $\Gamma_{\mathbf{a}}$  не зависит от точки, которая описывается координатой  $u \neq 0$ . Это происходит за счет выбора координат, который делает касательное пространство в единице группы тождественным касательному пространству в другой точке группы, т.е. матрица генератора  $\Gamma_{\mathbf{a}}$  остается одной и той же и при  $u \neq 0$ . Таким образом уравнение на матричную экспоненту,

$$\frac{dG_{a(u)}}{du} = -i\Gamma_{\mathbf{a}} \cdot G_{a(u)}$$

имеет решение

$$G_{a(u)} = G_0 \exp \{-i\Gamma_{\mathbf{a}} u\}$$

где  $G_0 = \mathbb{1}$ , и можно положить  $u = 1$  так, чтобы

$$G_{\mathbf{a}} = \exp \{-i\Gamma_{\mathbf{a}}\} = \exp \{-i\Gamma_{\alpha} a^{\alpha}\}$$

Это - экспоненциальное представление элементов группы, которое возникает при описанном выборе координат в группе: такой выбор координат как раз и означает, что генераторы по заданному направлению возле любой точки группы одни и те же, что и возле единицы.

---

других представлений группы Ли.

<sup>68</sup> Произведение элементов  $g_{\perp} \cdot g_{\parallel} \approx g_{\parallel} \cdot g_{\perp} \cdot g_{[\perp, \parallel]}$  в силу  $[\perp, \parallel] = 0$  и  $g_{[\perp, \parallel]} = e$ , в итоге сводится к коммутативности и инвариантности:  $g_{\perp} \cdot g_{\parallel} = g_{\parallel} \cdot g_{\perp}$ .

Из экспоненциального представления следует, что, если в пространстве генераторов выделены два подпространства взаимно коммутирующих генераторов  $\{\Gamma_{\perp}\}$  и  $\{\Gamma_{\parallel}\}$ , то и элементы подгрупп

$$G_{\perp} = e^{-i\Gamma_{\perp}}, \quad G_{\parallel} = e^{-i\Gamma_{\parallel}}$$

коммутируют.

Заметим теперь, что введение глобальных координат в экспоненциальном представлении гарантирует только то, что локальная групповая структура возле любой точки в точности совпадает (изоморфна) групповой структуре возле единицы, т.е. отвечает одному и тому же представлению алгебры Ли. Но исследование глобальной структуры экспоненциального представления группы, построенного по представлению алгебры, требует дополнительного инструмента, который в математике называют гомотопией.

Введем траекторию координат  $\mathbf{a}$  на отрезке «времени»  $t \in [0; 1] : \mathbf{a}(t)$ . Гомотопией двух путей  $\mathbf{a}_0(t)$  и  $\mathbf{a}_1(t)$  назовем непрерывное преобразование, зависящее от параметра  $\xi \in [0; 1]$ ,  $\mathbf{a}(\xi, t)$  такое, что  $\mathbf{a}(0, t) = \mathbf{a}_0(t)$ , а  $\mathbf{a}(1, t) = \mathbf{a}_1(t)$ , т.е. это непрерывное перемещение одного пути в другой. Среди всех путей рассматривают множество циклов:  $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}(1)$ . Тогда среди циклов можно ввести классы эквивалентности: гомотопные циклы эквивалентны. Всё множество координат глобально можно характеризовать его гомотопическими классами: классами эквивалентности циклов. Например, один класс - это все циклы, которые могут быть стянуты в одну точку, т.е. элемент класса - это тривиальный цикл  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_{\star}$ . Если в пространстве есть выколота точка, то цикл вокруг такой точки (охватывающий ее) не стягивается в точку, и это элемент другого гомотопического класса. Множества с единственным гомотопическим классом - тривиальным - называют односвязными («без дыр»).

Можно наряду с гомотопическими классами пространства координат рассматривать отображение циклов во множество чисел, например. Название такого отображения по аналогии с отображением векторов во множество чисел (ковекторы) - коциклы. Но поскольку путь характеризуется касательным ковектором к точке на пути, циклы можно рассматривать как 1-формы  $\omega$ , а интеграл по циклу как коцикл. Для замкнутого пути по теореме Стокса можно перейти от интеграла 1-формы к интегралу от 2-формы по поверхности с границей на цикле,

$$\oint_{\partial \Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$$

и тогда говорят о 2-коцикле. Мы не станем вдаваться в эти построения в рамках данного курса, но на известном нам примере спина укажем, что экспоненциальное представление алгебры со спином  $1/2$  при полном обороте вокруг оси давало не тождественное преобразование  $\mathbb{1}$ , как это должно быть в группе поворотов, а  $-\mathbb{1}$ . В таком случае говорят, что экспоненциальное представление группы, построенное по представлению алгебры Ли, дает представление универсальной обертывающей группы Ли. В примере, группа  $SU(2)$  - универсальная накрывающая (обертывающая) группы  $SO(3)$ , а отличие в глобальной структуре этих групп описывается наличием ядра отображения  $SU(2)$  на  $SO(3)$ , состоящее из дискретной группы  $\mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ : при гомоморфизме групп прообраз тождественного преобразования называется ядром, и в

<sup>69</sup> В математической литературе подобное построение обычно используют в формате, который называют однопараметрической абелевой группой преобразований (параметр  $u$ ) по фиксированному направлению  $\mathbf{a}$ .

случае отображения группы  $SU(2)$  на группу  $SO(3)$  говорят, имеет место изоморфизм  $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$ , т.е.  $SU(2)$  дважды накрывает  $SO(3)$ .

Развернутое изложение подобных вопросов пытливый читатель может найти в книге Уорнера [7].

#### 4.2 Ранг группы и число простых положительных корней

Мы доказали, что число простых положительных  $n$ -мерных корневых векторов равно или превышает ранг алгебры Ли  $n$ , так как размерность линейной оболочки простых положительных корней не может быть меньше ранга полупростой компактной алгебры Ли. Напомним: простой положительный корневой вектор не представим в виде суммы двух других положительных корней.

Докажем теперь, что число простых положительных корней равно рангу группы  $n$ .

(1) Для этого сначала покажем, что разность простых положительных корней не может быть корнем.

(2) Затем установим, что скалярное произведение двух простых положительных корневых векторов отрицательно или равно нулю.

(3) После этого докажем, что базис  $n$ -мерного пространства, построенный из  $n$  простых положительных корневых векторов, не допускает существования дополнительного  $(n+1)$ -ого простого положительного корня.

Разность различных простых положительных корневых векторов не может быть положительным корнем, так как из  $\alpha - \beta = \gamma$  следует, что  $\alpha = \beta + \gamma$ , т.е.  $\alpha$  не есть простой положительный корень, что противоречит исходному положению. Эта разность не может быть и отрицательным корнем:  $\alpha - \beta = -\gamma \Rightarrow \beta = \alpha + \gamma$ , что недопустимо. В итоге, разность различных простых положительных корней, вообще, не может быть корневым вектором. На языке коммутационных соотношений в базисе Картана-Вейля это утверждение записывается в виде

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\beta}] = 0, \quad N_{\alpha, -\beta} = 0, \quad \text{для простых положительных корней } \alpha \neq \beta.$$

Далее, используя установленное ранее значение коммутатора для генераторов с противоположными значениями корней и коммутатора лестничного генератора с генератором подалгебры Картана, находим

$$[\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = [\Gamma_\beta, \alpha_l \Gamma_l] = \alpha_l [\Gamma_\beta, \Gamma_l] = \alpha_l (-\beta_l \Gamma_\beta) = -(\alpha, \beta) \Gamma_\beta$$

Запишем тождество Якоби

$$[\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] + [\Gamma_\alpha, [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_\beta]] + [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha]] = 0$$

Из него следует, что в базисе Картана-Вейля (I.3.44)

$$[\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = -[\Gamma_\alpha, [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_\beta]] - [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha]] = -N_{-\alpha, \beta} [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha+\beta}] - N_{\beta, \alpha} [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}]$$

где в случае простых положительных корней  $\alpha \neq \beta$  следует положить  $N_{-\alpha, \beta} \equiv 0$ , так как корень из разности двух простых положительных корней запрещен (см. (I.4.8)), в то время как коммутатор в конце формулы согласно соотношениям в базисе Картана-Вейля запишется в виде

$$[\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}] = N_{-\alpha, \beta+\alpha} \Gamma_\beta$$

Итак, для двойного коммутатора устанавливаем тождество



$$[\Gamma_\beta, [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}]] = -(\alpha, \beta)\Gamma_\beta = -N_{\beta, \alpha}N_{-\alpha, \beta+\alpha}\Gamma_\beta$$

Следовательно, мы установили связь скалярного произведения двух простых положительных корней с коэффициентами в коммутаторах для генераторов базиса Картана-Вейля,

$$-(\alpha, \beta) = -N_{\beta, \alpha}N_{-\alpha, \beta+\alpha}$$

Далее из антисимметрии коммутатора двух разных лестничных генераторов в базисе Картана-Вейля (I.3.44) установим, что

$$N_{\beta, \alpha} = -N_{\alpha, \beta}$$

так как

$$[\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha] = N_{\beta, \alpha}\Gamma_{\beta+\alpha} = -[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = -N_{\alpha, \beta}\Gamma_{\alpha+\beta}$$

Наконец, пользуясь метрикой Киллинга для  $\text{tr}(\Gamma_\beta\Gamma_{-\beta}) = g_{\beta, -\beta} = \Omega^2 > 0$  (см. I. 3.42) и стандартными коммутационными соотношениями в базисе Картана-Вейля I. 3.44, легко записать

$$\text{tr}([\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}]\Gamma_{-\beta}) = N_{-\alpha, \beta+\alpha}\text{tr}(\Gamma_\beta\Gamma_{-\beta}) = N_{-\alpha, \beta+\alpha}g_{\beta, -\beta} = N_{-\alpha, \beta+\alpha}\Omega^2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{tr}([\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}]\Gamma_{-\beta}) &= \text{tr}(\Gamma_{-\alpha}\Gamma_{\beta+\alpha}\Gamma_{-\beta} - \Gamma_{\beta+\alpha}\Gamma_{-\alpha}\Gamma_{-\beta}) = \\ &= \text{tr}(\Gamma_{\beta+\alpha}\Gamma_{-\beta}\Gamma_{-\alpha} - \Gamma_{-\beta}\Gamma_{\beta+\alpha}\Gamma_{-\alpha}) = \\ &= \text{tr}([\Gamma_{\beta+\alpha}, \Gamma_{-\beta}]\Gamma_{-\alpha}) = N_{\beta+\alpha, -\beta}g_{\alpha, -\alpha} = N_{\beta+\alpha, -\beta}\Omega^2, \\ \text{tr}([\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+\alpha}]\Gamma_{-\beta}) &= \text{tr}(\Gamma_{-\alpha}\Gamma_{\beta+\alpha}\Gamma_{-\beta} - \Gamma_{\beta+\alpha}\Gamma_{-\alpha}\Gamma_{-\beta}) = \\ &= \text{tr}(\Gamma_{-\beta}\Gamma_{-\alpha}\Gamma_{\beta+\alpha} - \Gamma_{-\alpha}\Gamma_{-\beta}\Gamma_{\beta+\alpha}) = \\ &= \text{tr}([\Gamma_{-\beta}, \Gamma_{-\alpha}]\Gamma_{\beta+\alpha}) = N_{-\beta, -\alpha}g_{-\alpha-\beta, \alpha+\beta} = N_{-\beta, -\alpha}\Omega^2, \end{aligned}$$

а значит,

$$N_{-\alpha, \beta+\alpha} = N_{\beta+\alpha, -\beta} = N_{-\beta, -\alpha}.$$

Так как комплексные фазы лестничных генераторов можно всегда выбрать так, чтобы коэффициенты  $N_{\alpha, \beta}$  в определении базиса Картана-Вейля (I.3.44) были вещественными <sup>70</sup> эрмитово сопряжение коммутатора  $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]$  с учетом тождества  $\Gamma_\alpha^\dagger = \Gamma_{-\alpha}$  дает

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]^\dagger = N_{\alpha, \beta}\Gamma_{\alpha+\beta}^\dagger \Leftrightarrow [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{-\beta}] = -N_{\alpha, \beta}\Gamma_{-\alpha-\beta} = N_{-\alpha, -\beta}\Gamma_{-\alpha-\beta}$$

Поэтому

$$N_{-\alpha, -\beta} = -N_{\alpha, \beta}$$

а из тождества I.4.11 устанавливаем

$$N_{-\alpha, \beta+\alpha} = N_{-\beta, -\alpha} = -N_{\beta, \alpha} = N_{\alpha, \beta}.$$

<sup>70</sup> В базисе Картана-Вейля I.3.44 можно сделать подстановку  $\Gamma_{\alpha_m} \mapsto e^{i\phi_m}\Gamma_{\alpha_m}$ , где  $\phi_m \in \mathbb{R}$  - фаза преобразования, и такое преобразование никак не изменит коммутатор генератора из подалгебры Картана  $\Gamma_l$  с повышающим или понижающим генераторами, т.е. не изменит корневой вектор  $\alpha_m$ ,

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_m}] = (\alpha_m)_l \Gamma_{\alpha_m}$$

но при этом фаза константы  $N_{m,m'}$  в коммутаторе лестничных операторов

$$[\Gamma_{\alpha_m}, \Gamma_{\alpha_{m'}}] = N_{m,m'} \Gamma_{\alpha_m + \alpha_{m'}}$$

изменится.

Знак скалярного произведения двух простых положительных корней. Согласно цепочке формул (I.4.9, (I.4.10 и (I.4.13 окончательно устанавливаем, что скалярное произведение двух простых положительных корней в случае, если их сумма также является корнем, отрицательно

$$-(\alpha, \beta) = N_{\alpha, \beta}^2$$

а в случае, если их сумма не является корнем, равно нулю, так как  $N_{\alpha, \beta} = 0$ .

### Киселев-2022-1

4. Покажите, что для положительного корня  $\gamma = \alpha + \beta$ , где  $\alpha, \beta$  - это простые положительные корни,

$$g_{\gamma, -\gamma} = \text{tr}(\text{ad } \Gamma_{\gamma} \cdot \text{ad } \Gamma_{-\gamma}) = g_{\alpha, -\alpha} = g_{\beta, -\beta}$$

Примечание. Используйте коммутатор  $[\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}] = N_{\alpha, \beta} \Gamma_{\gamma}$  из соотношений для базиса Картана-Вейля [I.3.44], тождества Якоби и формулу (I.4.14:  $N_{\alpha, \beta}^2 = -(\alpha, \beta)$ ).

Теперь приступим к доказательству того, что  $n$  простых положительных корней образуют базис в  $n$  мерном пространстве векторов, а значит, и любые  $k \leq n$  простых положительных корней образуют базис своей  $k$ -мерной линейной оболочки: число простых положительных корней задает размерность векторного пространства своей линейной оболочки.

Пусть число простых положительных корневых векторов больше размерности векторного пространства, построенного как линейная оболочка этих корней,  $\dim \text{Span}(\alpha) = n$ . Но тогда среди этих простых положительных корневых векторов найдутся ровно  $n$  корней  $\{\alpha_m\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , линейная оболочка которых имеет размерность, равную рангу алгебры  $\dim \text{Span}(\alpha_m) = n$ , так как в противном случае любые  $n$  простых положительных корней были бы линейно зависимы, и  $\dim \text{Span}(\alpha_m) = \tilde{n} < n$ , а значит, часть из них, а именно,  $n - \tilde{n}$  можно было бы выразить через суперпозицию оставшихся  $\tilde{n}$  векторов, образующих базис в  $\text{Span}(\alpha_m)$  и исключить из построения линейной оболочки  $\text{Span}(\alpha_m)$ . Если добавление других положительных корней, в конце концов, не позволило бы получить из  $n$  простых положительных корней базис в  $\text{Span}(\alpha)$ , то и само пространство  $\text{Span}(\alpha)$  имело бы размерность меньше, чем ранг алгебры, что, как мы уже показали, недопустимо. Резюмируя, повторим, что  $n$  простых положительных корней  $\{\alpha_m\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  образуют базис  $n$ -мерной линейной оболочки всех положительных корней, и, значит, оставшиеся вне этого базиса простые положительные корни  $\{\gamma\}$  разлагаются по базису  $\{\alpha_m\}$ ,

$$\gamma = \sum_i c_i^{(+)} \alpha_i - \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} \alpha_{i'}, \quad c_i^{(+)} > 0, -c_{i'}^{(+)} < 0, \quad i' \neq i$$

где мы выделили множества простых положительных векторов базиса  $\{\alpha_m\}$  по знаку коэффициентов, которые обозначили индексами  $i$  и  $i'$ . Сгруппируем вклады так, чтобы коэффициенты разложения были исключительно положительными,

$$\epsilon = \sum_i c_i^{(+)} \alpha_i = \gamma + \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} \alpha_{i'}$$

и вычислим квадрат этого вектора, пользуясь его записью двумя способами,

$$\epsilon^2 = \left( \left( \sum_i c_i^{(+)} \alpha_i \right), \left( \gamma + \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} \alpha_{i'} \right) \right) = \sum_i c_i^{(+)} (\alpha_i, \gamma) + \sum_{i, i'} c_i^{(+)} c_{i'}^{(+)} (\alpha_i, \alpha_{i'}) \leq 0, \quad i' \neq i$$

где неравенство возникает из-за того, что  $c_i^{(+)} > 0$ ,  $c_{i'}^{(+)} > 0$ , и из-за условия на скалярное произведение любой пары не равных друг другу простых положительных корней

$$(\alpha, \beta) = -N_{\alpha, \beta}^2 \leq 0$$

Однако квадрат вектора не может быть меньше нуля, и следовательно,  $\epsilon^2 = 0$ , а сам вектор может быть равен только нулю  $\epsilon = 0$ , откуда

$$\gamma = - \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} \alpha_{i'}, \quad c_{i'}^{(+)} > 0$$

Таким образом, любой простой положительный корневой вектор, не вошедший в базис, разлагается по базису простых положительных корней  $\{\alpha_m\}$  исключительно с отрицательными коэффициентами  $-c_{i'}^{(+)} < 0$ . Но это значит, что первая по порядку отличная от нуля компонента корневого вектора  $(\gamma)_l$  выражается в виде

$$(\gamma)_l = - \sum_{i'} c_{i'}^{(+)} (\alpha_{i'})_l$$

где среди компонент  $(\alpha_{i'})_l$  могут быть только неотрицательные первые по порядку отличные от нуля или нули, причем, хотя бы одна из этих компонент должна быть положительной, а значит,  $\gamma_l < 0$ . Стало быть,  $\gamma$  - это отрицательный корневой вектор, а значит, предположение о том, что кроме базиса из  $n$  простых положительных корней могут существовать другие простые положительные корни было неверно.

Это доказательство справедливо и для любой выборки из  $k$  простых положительных корней: размерность их линейной оболочки не может превышать числа этих корней, и, как мы только что показали, размерность их линейной оболочки не может быть и меньше числа простых положительных корней в выборке, так как в противном случае «лишние корни» оказались бы не положительными, а отрицательными.

В итоге, доказательство всех трех положений, сформулированных в начале раздела 4.2 Главы 1. 4 на стр. 52, завершено, и число простых положительных корней равно рангу группы  $n$ .

По сути проведенного построения мы имеем возможность осуществить в  $n$ -мерном пространстве, построенном как линейная оболочка ортонормированных базисных векторов  $\{l\}$ , переход к базису простых положительных корневых векторов  $\{\alpha\}_+$ .

### 4.3 Последовательности корней и дискретный спектр скалярных произведений корней

Рассмотрим теперь  $\alpha$ -последовательность<sup>7</sup> для корня  $\beta$  в виде сумм, построенных из двух различных простых положительных корней с равным нулю или натуральным коэффициентом  $\varkappa$ :

$$\beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + \kappa\alpha, \dots, \beta + \kappa_{\alpha|\beta}^{\max}$$

которая может быть только конечной, так как в базисе представления  $|\mu^{(k)}\rangle$  конечное число состояний 72 и следовательно, имеется конечное число сдвигов между ними  $\kappa_{\alpha|\beta}^{\max}$ , т.е.  $0 \leq \kappa \leq \kappa_{\alpha|\beta}^{\max}$ . В силу тождества Якоби

$$[\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{-\alpha}]] = [\Gamma_{\alpha}, [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \Gamma_{-\alpha}]] + [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta+\kappa\alpha}]]$$

Далее, пользуясь стандартными коммутационными соотношениями в базисе Картана-Вейля (I.3.44, получаем в левой части тождества

$$[\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{-\alpha}]] = [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \alpha_l \Gamma_l] = \alpha_l [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \Gamma_l] = -\alpha_l (\beta_l + \kappa\alpha_l) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} = -(\alpha, \beta + \kappa\alpha) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha}$$

в то время как справа

$$\begin{aligned} [\Gamma_{\alpha}, [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \Gamma_{-\alpha}]] &= N_{\beta+\kappa\alpha, -\alpha} [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta+(\kappa-1)\alpha}] = \\ &= N_{\beta+\kappa\alpha, -\alpha} N_{\alpha, \beta+(\kappa-1)\alpha} \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta+\kappa\alpha}]] &= -[\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \Gamma_{\alpha}]] = -N_{\beta+\kappa\alpha, \alpha} [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{\beta+(\kappa+1)\alpha}] = \\ &= -N_{\beta+\kappa\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta+(\kappa+1)\alpha} \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} \end{aligned}$$

Если для произведения коэффициентов в конце этой формулы ввести обозначение

$$\mathcal{A}_{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} N_{\beta+\kappa\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta+(\kappa+1)\alpha}$$

то с учетом антисимметрии символов  $N_{\alpha, \beta} = -N_{\beta, \alpha}$ , которая следует из антисимметричности скобки Ли, для произведения коэффициентов

$$N_{\beta+\kappa\alpha, -\alpha} N_{\alpha, \beta+(\kappa-1)\alpha} = N_{\alpha, \beta+(\kappa-1)\alpha} N_{\beta+\kappa\alpha, -\alpha} = (-N_{\beta+(\kappa-1)\alpha, \alpha}) (-N_{-\alpha, \beta+\kappa\alpha}) = \mathcal{A}_{\kappa-1}.$$

Тогда для тождества Якоби наши выкладки дают

$$\begin{aligned} [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{-\alpha}]] &= [\Gamma_{\alpha}, [\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}, \Gamma_{-\alpha}]] + [\Gamma_{-\alpha}, [\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta+\kappa\alpha}]] \Leftrightarrow \\ &= -(\alpha, \beta + \kappa\alpha) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} = (N_{\beta+(\kappa-1)\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta+\kappa\alpha} - N_{\beta+\kappa\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta+(\kappa+1)\alpha}) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} \Leftrightarrow \\ &= ((\alpha, \beta) + \kappa(\alpha, \alpha)) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} = (\mathcal{A}_{\kappa-1} - \mathcal{A}_{\kappa}) \Gamma_{\beta+\kappa\alpha} \end{aligned}$$

В итоге, при условии, что генератор  $\Gamma_{\beta+\kappa\alpha}$  существует, находим рекуррентную формулу

$$(\alpha, \beta) + \kappa(\alpha, \alpha) = \mathcal{A}_{\kappa} - \mathcal{A}_{\kappa-1}.$$

Но

$$\mathcal{A}_{-1} = N_{\beta-\alpha, \alpha} N_{-\alpha, \beta} = 0$$

<sup>71</sup> В приводимом построении последовательности мы полагаем, что простые положительные корни различны,  $\alpha \neq \beta$ . В дальнейшем мы покажем, что построение последовательности кратных корней  $\alpha, 2\alpha, \dots$  ограничена единственным, первым членом. Если же корни не являются простыми, то нужно проводить специальное исследование соответствующих последовательностей.

<sup>72</sup> Напомним, что мы рассматриваем только конечномерные представления алгебр Ли.

поскольку для простых положительных корневых векторов  $N_{-\alpha, \beta} = 0$ , так как разность двух простых положительных корней не может быть корнем (см. коммутатор в последней строке (I.3.44) при введении базиса Картана-Вейля). Значит,

$$\mathcal{A}_{\varkappa} = \sum_{q=0}^{\varkappa} (\alpha, \beta) + \sum_{q=0}^{\varkappa} q(\alpha, \alpha) = (\varkappa + 1)(\alpha, \beta) + \frac{1}{2} \varkappa(\varkappa + 1)(\alpha, \alpha).$$

Пусть  $\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max}$  - максимальное допустимое число шагов в последовательности. Тогда коэффициент  $N_{\beta + \varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} \alpha, \alpha}$ , который входит в коммутатор  $[\Gamma_{\beta + \varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} \alpha}, \Gamma_{\alpha}] = N_{\beta + \varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} \alpha, \alpha} \Gamma_{\beta + (\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} + 1)\alpha}$ , равен нулю: генератор  $\Gamma_{\beta + (\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} + 1)\alpha}$  не существует. Поскольку цепочка в последовательности генераторов по определению обрывается на шаге с номером  $\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max}$ , заключаем, что  $\mathcal{A}_{\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max}}$  рекуррентности I.4.16 обращается в нуль, и

$$\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} = -2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \geq 0$$

Совершенно аналогично в  $\beta$ -последовательности  $\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \dots, \alpha + \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} \beta$  максимально допустимое число членов

$$\varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} = -2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} \geq 0$$

Таким образом, лестничные генераторы, отвечающие простым положительным корневым векторам, это повышающие операторы, из коммутаторов которых однозначно строятся все повышающие операторы в заданной алгебре группы Ли <sup>73</sup>.

Мы рассмотрели цепочки корневых векторов в случае двух простых положительных корней. Для обобщения этих выводов на случай, когда простых положительных корней больше двух, воспользуемся упорядоченным множеством простых положительных корней  $\{\alpha_m\}$ ,  $m \in \{1, n\}$  и сопоставим  $\alpha \mapsto \alpha_i$ ,  $\beta \mapsto \alpha_j$ , так что элементарно в этих обозначениях

$$\varkappa_{ij}^{\max} = -2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \equiv -a_{ij}, \quad \varkappa_{ji}^{\max} = -2 \frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \equiv -a_{ji}$$

где  $a_{ij}$  называют матрицей Картана, причем, очевидно, что диагональный член матрицы Картана  $a_{ii} = 2$  (нет суммирования по  $i$ ).

Натуральные или нулевые значения  $\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max}$  и  $\varkappa_{\beta|\alpha}^{\max}$  в I.4.17) и I.4.18 накладывают ограничения на сами корневые векторы. Более того, поскольку скалярное произведение корневых векторов евклидово,

$$(\alpha, \beta) = \cos \phi \sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)},$$

имеет место неравенство Шварца

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta),$$

т.е.

$$l_{\alpha|\beta} \equiv \varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} = \left( -2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \right) \left( -2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} \right) = 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} \leq 4$$

а равенство возникает, только если корневые векторы параллельны. Однако, так как  $\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max}$  и  $\varkappa_{\beta|\alpha}^{\max}$  не отрицательны, указанное равенство достигается только при  $\beta \uparrow -\alpha$ , что недопустимо для двух положительных корневых векторов. Поэтому допустимая область

значений произведения числа шагов в последовательностях двух простых положительных корней задается в виде

$$l_{\alpha|\beta} = \varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} = \{0, 1, 2, 3\}.$$

При этом равенство  $l_{\alpha|\beta} = \varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} = 0$  имеет место, только если корни ортогональны, т.е. когда  $\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} = \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} = 0$ .

Так как  $\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max}$  и  $\varkappa_{\beta|\alpha}^{\max}$  неотрицательны, из равенств I.4.17 и I.4.18 следует, что скалярное произведение двух простых положительных корней отрицательно или равно нулю, а из

$$l_{\alpha|\beta} = \varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} = 4 \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}$$

сразу следует, что

$$\frac{(\alpha, \beta)}{\sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max}}, \quad \text{или} \quad \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{\sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_j, \alpha_j)}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\varkappa_{ij}^{\max} \varkappa_{ji}^{\max}}$$

Если  $l_{\alpha|\beta} = \varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} \neq 0$ , то

$$\frac{\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max}}{\varkappa_{\beta|\alpha}^{\max}} = \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)}, \quad \text{или} \quad \frac{\varkappa_{ij}^{\max}}{\varkappa_{ji}^{\max}} = \frac{(\alpha_j, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

и отношение числа шагов задает пропорцию квадратов длин двух простых положительных корневых векторов.

При выводе значения коммутатора двух генераторов, соответствующих двум простым положительным корням,

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = N_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha+\beta}$$

мы вывели

$$N_{\alpha, \beta}^2 = -(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} (\alpha, \alpha) = \frac{1}{2} \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} (\beta, \beta)$$

По аналогичной схеме рассуждений и расчетов можно вывести коммутаторы для произвольных, необязательно простых корневых векторов, и таким образом полностью восстановить все коммутационные соотношения для генераторов группы Ли<sup>74</sup>

Заметим, что корневые векторы, возникшие в ходе построения последовательностей из простых корней, можно затем также рассмотреть на предмет построения последовательностей уже и с их участием.

### Киселев-2022-1

5. Покажите, что в  $\alpha$ -последовательности  $\alpha + \alpha, 3\alpha, \dots, (\varkappa_{aa}^{\max} + 1)\alpha$  для простого положительного корня  $\alpha$  максимальное допустимое число шагов  $\varkappa_{aa}^{\max} = 0$ , т.е. не существует корневых векторов, кратных простому положительному корню.

Решение. Поскольку лестничный генератор коммутирует сам с собой

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha] = N_{\alpha, \alpha} \Gamma_{2\alpha} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad N_{\alpha, \alpha} \equiv 0$$

<sup>74</sup> Подчеркнем, что для построения всех повышающих генераторов необходимо также исследовать цепочки, не только построенные из простых положительных корней, но и цепочки, возникающие из всех положительных корней, которые появляются в последовательностях цепочек из простых положительных корней.

Поэтому цепочка в последовательности, построенной в виде сумм одного и того же корня, обрывается при первом же шаге, и лестничные генераторы с кратными простыми положительными или отрицательными корнями не существуют. Заметим, что тождество  $N_{\alpha, \alpha} \equiv 0$  верно в случае любого корневого вектора, т.е. любые кратные корневому векторы не являются корнями алгебры Ли.

### Киселев-2022-1

6. Определите допустимое число шагов в дочерней  $\alpha$ -последовательности  $q\beta + \alpha, q\beta + 2\alpha, \dots, q\beta + \varkappa'_{\alpha|\beta} \alpha$ , которая может возникнуть после построения родительской  $\beta$ -последовательности  $\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \dots, \alpha + \varkappa_{\beta|\alpha}^{\max} \beta$  на  $q$ -том шаге при  $q \geq 2$ .

Решение. Воспользуемся проведенным исследованием для последовательности  $\beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + \varkappa\alpha$ , сделав подстановку  $\beta \mapsto q\beta + \alpha$ . Тогда в согласии с построениями на стр. 56 для величин

$$\mathcal{A}_{\varkappa}^{(q)} = N_{q\beta + (\varkappa+1)\alpha, \alpha} N_{-\alpha, q\beta + (\varkappa+2)\alpha},$$

имеет место рекуррентное соотношение

$$\mathcal{A}_{\varkappa}^{(q)} = \mathcal{A}_{\varkappa-1}^{(q)} + q(\alpha, \beta) + (\varkappa + 1)(\alpha, \alpha).$$

Но

$$\mathcal{A}_{-1}^{(q)} = N_{q\beta, \alpha} N_{-\alpha, q\beta + \alpha} = 0,$$

так как  $N_{-\alpha, q\beta + \alpha} = 0$ , поскольку эта величина входит в коммутатор

$$[\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{q\beta + \alpha}] = N_{-\alpha, q\beta + \alpha} \Gamma_{q\beta}$$

а у вектора, кратного корню  $\beta$ , который не может быть корнем алгебры Ли, не существует соответствующего генератора. Значит,

$$\mathcal{A}_{\varkappa}^{(q)} = \sum_{r=0}^{\varkappa} (q(\alpha, \beta) + (r+1)(\alpha, \alpha)) = q(\alpha, \beta)(\varkappa + 1) + \frac{1}{2}(\varkappa + 2)(\varkappa + 1)(\alpha, \alpha).$$

Максимальное число шагов определяется из условия  $\mathcal{A}_{\varkappa_{(q)}^{(q)}}^{(q)} = 0$ ,

$$\varkappa_{(q)}^{\max} = q\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} - 2$$

где, как и прежде,

$$\varkappa_{\alpha|\beta}^{\max} = -2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \geq 0$$

На самом деле, построение корней алгебры Ли по системе ее простых положительных корней в случае, когда простых положительных корней более двух, можно провести с помощью группы отражений Вейля, которую мы рассмотрим в разделе 2.3 Главы 2

Элементы схем Дынкина. На схемах Дынкина изображают простые положительные корневые векторы  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  в виде пары точек, которые соединяются  $l_{ij} = \varkappa_{ij}^{\max} \varkappa_{ji}^{\max}$  числом

<sup>74</sup> Буквальное применение соотношения I.4.24 в случае замены простого положительного корня  $\beta$  на простой отрицательный корень  $-\beta$  дало бы  $N_{\alpha, -\beta}^2 = (\alpha, \beta) < 0$ , что невозможно. Но это значит, что сделанное при выводе формулы предположение о том, что коммутатор  $[\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{-\beta}]$  отличен от нуля неверно, так что мы получаем дополнительное доказательство факта  $N_{\alpha, -\beta} = 0$  для двух простых положительных корней.

прямых линий, характеризующих эти корни. Несложно перечислить типы возможных соединений:

- при  $\kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max} = 1 = l_{ij}$  единственная линия соединяет корневые векторы одинаковой длины (напоминаем, что согласно (I.4.23) отличное от нуля число линий равно отношению квадратов длин простых положительных корней);
- при  $\kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max} = 2 = l_{ij}$  две линии соединяют корни, один из которых в  $\sqrt{2}$  раз длинней;
- при  $\kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max} = 3 = l_{ij}$  три линии соединяют корни, один из которых в  $\sqrt{3}$  раз длинней;
- на двойных и тройных линиях стрелка указывает направление от большего корня к меньшему (см. диаграммы на рис. 1.3).



Рис. 1.3: Возможные типы соединений двух простых положительных корневых векторов на диаграмме Дынкина, если скалярное произведение этих корневых векторов отлично от нуля.

Если корни ортогональны, то они не соединяются линией. Для ортогональных простых положительных корней коммутатор равен нулю (см. (I.4.24)), и нет построенных по ним последовательностей, а поэтому групповые структурные константы с индексами этих корней обращаются в нуль. Здесь надо иметь в виду, что переход от эрмитовых генераторов алгебры Ли к базису Картана-Вейля означает, что и структурные константы группы записываются в этом базисе, т.е. это константы  $N_{\alpha, \beta}$  - численные коэффициенты в выражении для коммутаторов двух генераторов  $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]$ , задающих билинейный автоморфизм этих генераторов со всеми свойствами скобки Ли.

Перепишем для дальнейших построений важную формулу (I.4.22) в виде

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \sqrt{l_{\alpha|\beta}} \|\alpha\| \cdot \|\beta\|, \quad \|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha), \quad \|\beta\|^2 = (\beta, \beta) \quad \text{или}$$

$$(\alpha_i, \alpha_j) = -\frac{1}{2} \sqrt{l_{ij}} \|\alpha_i\| \cdot \|\alpha_j\|, \quad \|\alpha_i\|^2 = (\alpha_i, \alpha_i), \quad \|\alpha_j\|^2 = (\alpha_j, \alpha_j), \quad l_{ij} = \kappa_{ij}^{\max} \kappa_{ji}^{\max}.$$

#### 4.4 Соотношения Серра

Для полноты общей картины по алгебрам Ли отметим, что в математической литературе вместо базиса Картана-Вейля (Cartan, Weyl) принято вводить генераторы Шевалле (Chevalley)

$$h_i = \kappa_i (\alpha_i)_l \Gamma_l, \quad \text{суммирование по } l, \alpha_i - \text{простой положительный корень,}$$

$$e_i = \sqrt{\kappa_i} \Gamma_{\alpha_i}, \quad f_i = \sqrt{\kappa_i} \Gamma_{-\alpha_i}, \quad i \in \{1, n\}, \quad \text{нет суммирования по } i,$$

с нормировочным множителем

$$\kappa_i = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

В обозначениях (I.4.27), (I.4.28) алгебра генераторов подалгебры Картана  $h_i$  и повышающих и понижающих генераторов  $e_i$  и  $f_j$ , которые соответствуют простым положительным корням, сводится к следующим соотношениям Серра (Serre):

для подалгебры Картана

$$[h_i, h_j] = \kappa_i \kappa_j (\alpha_i)_l (\alpha_j)_{l'} [\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0$$

для простых корней



$$[e_i, f_i] = \kappa_i [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{-\alpha_i}] = \kappa_i (\alpha_i)_l \Gamma_l = h_i, \quad [e_i, f_j] = \sqrt{\kappa_i \kappa_j} [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{-\alpha_j}] = 0, \quad \text{при } i \neq j$$

для коммутатора генератора из подалгебры Картана с повышающими генераторами

$$[h_i, e_j] = \kappa_i \sqrt{\kappa_j} (\alpha_i)_l [\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_j}] = \kappa_i \sqrt{\kappa_j} (\alpha_i)_l (\alpha_j)_l \Gamma_{\alpha_j} = \kappa_i \sqrt{\kappa_j} (\alpha_i, \alpha_j) \Gamma_{\alpha_j} = a_{ij} e_j$$

где нет суммирования по индексу  $j$ , а с принятой нормировкой  $\kappa_i$  (I.4.28) матрица Картана  $a_{ij}$  согласно определению I. I.19 на стр. 56 выражается через максимальное число шагов  $\varkappa_{ij}^{\max}$ , которое ограничивает серию положительных корней  $\alpha_j + \varkappa \alpha_i$ , см. [4.17] на стр. 56

$$a_{ij} = \kappa_i (\alpha_i, \alpha_j) = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = -\varkappa_{ij}^{\max}$$

Согласно этому определению  $a_{ii} = 2$ , и, следовательно, матрица Картана представляет из себя алгебраический код для диаграмм Дынкина: недиагональный элемент  $-a_{ij}$ , отличный от нуля, указывает на то, что простые положительные корни  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  не ортогональны, и задает число шагов при построении положительных корней в  $\alpha_i$ -цепочке, произведение  $a_{ij} a_{ji}$  - это число линий, которые соединяют эти два простых положительных корня на диаграмме Дынкина, и если  $a_{ij} > a_{ji}$ , то на соединительной линии указывается направление от  $\alpha_i$  к  $\alpha_j$ .

Коммутатор генератора из подалгебры Картана с понижающим генератором

$$[h_i, f_j] = \kappa_i \sqrt{\kappa_j} (\alpha_i)_l [\Gamma_l, \Gamma_{-\alpha_j}] = -\kappa_i \sqrt{\kappa_j} (\alpha_i)_l (\alpha_j)_l \Gamma_{-\alpha_j} = -\kappa_i \sqrt{\kappa_j} (\alpha_i, \alpha_j) \Gamma_{-\alpha_j} = -a_{ij} f_j.$$

Условие максимального числа шагов в серии из простых положительных и отрицательных корней 75 записывают в виде действия матрицы генератора присоединенного представления на вектор присоединенного представления

$$\text{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = \text{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0$$

так как по построению присоединенного представления (см. сноску к формуле (I.2.10))

$$\text{ad}(e_i)^1(e_j) \equiv [e_i, e_j] = n_{ij} e_{i+j} \Leftrightarrow [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}] = N_{ij} \Gamma_{\alpha_i + \alpha_j}, \quad \alpha_j \xrightarrow{[\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}]} \alpha_j + \alpha_i,$$

где согласно I.4.14  $N_{ij}^2 = -(\alpha_i, \alpha_j)$ , откуда  $n_{ij} = N_{ij} \sqrt{\kappa_i \kappa_j / \kappa_{i,j}}$  при  $\kappa_{i,j} = 2(\alpha_i + \alpha_j, \alpha_i + \alpha_j)^{-1}$ . Поэтому

$$\text{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) \Leftrightarrow \alpha_j \xrightarrow{[\Gamma_{\alpha_i}, [\Gamma_{\alpha_i}, \dots [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}] \dots]]} \alpha_j + (1 - a_{ij}) \alpha_i \Leftrightarrow \alpha_j \xrightarrow{[\Gamma_{\alpha_i}, [\Gamma_{\alpha_i}, \dots [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}] \dots]]} \alpha_j + (1 + \varkappa_{ij}^{\max}) \alpha_i$$

По определению максимального числа шагов в этой цепочке  $\varkappa_{ij}^{\max}$  корневого вектора  $\alpha_j + (1 + \varkappa_{ij}^{\max}) \alpha_i$  не существует, так что

$$\text{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0$$

Точно так же для цепочки из простых отрицательных корней  $-(\alpha_j + \varkappa \alpha_i)$  получается, что

$$\text{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0$$

#### 4.5 Связные диаграммы

Диаграмма Дынкина - это изображение всех простых положительных корней алгебры Ли в виде точек с линиями, которые могут соединять эти корни по правилам, которые мы описали в 4, раздел 4.3 Главы 1. На такой диаграмме можно ввести классы эквивалентности, которые называются компонентами связности: класс эквивалентности простого положительного корневого вектора, который изображается точкой на диаграмме Дынкина, образован всеми корнями, с которыми исходный корень последовательно соединен линиями. Попросту говоря, компонента связности - это все корни, которые принадлежат непрерывной цепочке из точек и звеньев-линий. Число компонент связности полупростой компактной алгебры Ли не обязательно равно единице. Диаграмма называется связной, если у нее одна компонента связности.

В связной диаграмме Дынкина заданы не равные нулю скалярные произведения простых положительных корней и определенные по этим скалярным произведениям согласно (I.4.14) коэффициенты  $N_{ij} = \sqrt{-(\alpha_i, \alpha_j)}$ , которые входят в коммутационные соотношения для генераторов, соответствующих простым положительным корням диаграммы, так что  $[\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_j}] = N_{ij} \Gamma_{\alpha_i + \alpha_j}$ , а также косвенно определены и коммутаторы генераторов для построенных по простым корням цепочек последовательностей корней (см. задачу 16 и построение дочерних последовательностей корней на стр. 57).

Если в диаграмме Дынкина есть, например, две компоненты связности, т.е. простые положительные корни образуют базис двух ортогональных пространств  $\{\alpha\}$  и  $\{\alpha'\}$  размерности  $\tilde{n}$  и  $\tilde{n}'$ , где ранг алгебры равен  $n = \tilde{n} + \tilde{n}'$ ,

$$[\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\alpha'}] = N_{\alpha, \alpha'} \Gamma_{\alpha + \alpha'} = \sqrt{-(\alpha, \alpha')} \Gamma_{\alpha + \alpha'} \equiv 0$$

то подалгебра Картана также состоит из двух подпространств генераторов с размерностями  $\tilde{n}$  и  $\tilde{n}'$ , так что генераторы из этих подалгебр Картана имеют коммутаторы

$$[\Gamma_l, \Gamma_{\alpha}] = (l, \alpha) \Gamma_{\alpha}, \quad [\Gamma_{l'}, \Gamma_{\alpha'}] = (l', \alpha') \Gamma_{\alpha'}, \quad [\Gamma_l, \Gamma_{\alpha'}] = (l, \alpha') \Gamma_{\alpha'} = 0, \quad [\Gamma_{l'}, \Gamma_{\alpha}] = (l', \alpha) \Gamma_{\alpha} = 0$$

и, стало быть, генераторы, относящиеся к двум различным связным диаграммам, имеют перекрестные коммутаторы, которые обращаются в нуль. Поэтому говорят, что алгебра генераторов для несвязных диаграмм Дынкина является прямой суммой алгебр, отвечающих связным диаграммам:  $\Gamma \oplus \Gamma'$ . Подобные коммутационные соотношения означают, что вблизи единицы элементы группы Ли, координаты которых задаются векторами касательного пространства, соответствующими этим алгебрам, с точностью до преобразований в касательном пространстве возле групповой единицы коммутируют

$$g_a \cdot g'_b \stackrel{\text{tangent}}{=} g'_b \cdot g_a \cdot g_{[a,b]} = g'_b \cdot g_a, \quad \text{так как } g_{[a,b]} = e$$

В таком случае <sup>76</sup> говорят, что группа Ли является прямым произведением подгрупп:  $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}'$ . При этом каждая из подгрупп является инвариантной, т.е. сама группа не является простой. С другой стороны, это значит, что простым компактным группам Ли отвечают связные диаграммы Дынкина.

Типы диаграмм Дынкина существенно ограничены следующими правилами, которые следуют из линейной независимости простых положительных корневых векторов,

<sup>75</sup> На стр. 56 мы описали повышающие последовательности для простых положительных корней  $\alpha_j + \varkappa \alpha_i$ , что в обозначениях Шевалле соответствует действию генераторов  $e_i$  на генераторы  $e_j$  в присоединенном представлении. В отношении простых отрицательных корневых векторов и генераторов  $f_i$  строятся понижающие последовательности корней -  $\alpha_j - \varkappa \alpha_i$  с такими же свойствами: максимальное число понижений задается все тем же числом  $\varkappa_{ij}^{\max}$ .

составляющих базис  $n$ -мерного корневого пространства (см. стр. 52 в 4 раздел 4.2 Главы 1), а также из евклидовой сигнатуры метрики скалярного произведения.

Запрещены замкнутые петли. В самом деле, допустим противное: пусть  $k$  простых корней  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  образуют цикл, в котором последовательно соединены корни  $\alpha_{p-1}$  с  $\alpha_p$  и первый с  $k$  ым, и естественно  $k \geq 3$ . Для простого положительного корня алгебры Ли ведем вектор единичной длины, направленный по корню,

$$\tilde{\alpha}_p = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_p, \alpha_p)}} \alpha_p$$

и назовем его вектором корневого «луча» (или корневым направлением). Тогда на диаграмме Дынкина в петле из корней, где линиями последовательно соединены корни по порядку их нумерации индексом  $p$ , согласно I.4.22 отличны от нуля только скалярные произведения векторов корневых «лучей» с последовательными номерами,

$$(\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\varkappa_{p,p+1}^{\max} \varkappa_{p+1,p}^{\max}},$$

где стандартно  $\varkappa_{p,p+1}^{\max} \varkappa_{p+1,p}^{\max} \equiv \ell_p \geq 1$  - число линий, соединяющих  $p$ -й корень с  $p+1$ -м. Тогда сумма векторов корневых направлений в замкнутой петле имеет норму

$$\left( \sum_{p=1}^k \tilde{\alpha}_p \right) \left( \sum_{p'=1}^k \tilde{\alpha}_{p'} \right) = k + 2 \sum_{p < p'} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p'})$$

Но в петле из корней соединены линиями только следующие друг за другом корни, так что

$$(\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p'}) = \begin{cases} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}), & \text{при } p' = p+1 \\ 0 & \text{при } p' \neq p+1 \end{cases}$$

и в этой формуле мы полагаем, что  $\tilde{\alpha}_{k+1} \equiv \tilde{\alpha}_1$ : петля замкнулась. Поэтому

$$\left( \sum_{p=1}^k \tilde{\alpha}_p \right) \left( \sum_{p'=1}^k \tilde{\alpha}_{p'} \right) = k + 2 \sum_p (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = k - \sum_{p=1}^k \sqrt{\ell_p} \leq k - \sum_{p=1}^k 1 = 0$$

так что при равенстве нулю, когда все корни последовательно соединены одной линией, получаем систему линейно зависимых векторов корневых «лучей», что противоречит исходному положению о простоте корней, а при отрицательном значении, когда имеется хотя бы одна кратная линия, - противоречие с определением нормы вектора в евклидовом пространстве.

Из корня исходят не более трех линий. Пусть  $k \geq 2$  простых корней  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  соединены линиями с корнем  $\alpha_0$ . Тогда все корни  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  попарно ортогональны, так как иначе какая-либо пара из них соединялась бы линией, и возникала бы замкнутая петля из трех корней, что противоречит предыдущему правилу запрета циклов. Итак,  $(\alpha_p, \alpha_{p'}) = 0$  при  $p \neq 0$  и  $p' \neq 0$ . Обозначим тильдой в полной аналогии с предыдущим параграфом нормированные на единицу корневые направления, так что

$$(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) = -\frac{1}{2} \sqrt{\ell_p}, \quad \ell_p = \{1, 2, 3\}$$

<sup>76</sup> На стр. 51 мы показали, что не приближенные, а точные утверждения о коммутативности элементов подгрупп можно сделать, используя экспоненциальное по координатам и генераторам представление для элементов группы [4.7].

Тогда проекция вектора в центре «звездочки» на подпространство, образованное векторами «лучей»

$$\sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) \tilde{\alpha}_p = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^k \tilde{\alpha}_p \sqrt{l_p}$$

а ортогональная к подпространству компонента имеет норму

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\alpha}_0 - \sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) \tilde{\alpha}_p \right)^2 &= \tilde{\alpha}_0^2 + \left( \sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) \tilde{\alpha}_p \right)^2 - 2 \left( \tilde{\alpha}_0, \left( \sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p) \tilde{\alpha}_p \right) \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^k l_p - 2 \sum_{p=1}^k (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_p)^2 = 1 + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^k l_p - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^k l_p = 1 - \frac{1}{4} \sum_{p=1}^k l_p \leq 1 - \frac{k}{4} \end{aligned}$$

Эта норма может быть только положительной: при равенстве нулю получаем линейную зависимость простых положительных корневых векторов, что неверно. Отсюда  $k \leq 3$ . Следовательно, разрешены только:

- $k = 3, l_1 = l_2 = l_3 = 1$  - тройные звездочки с одинарными линиями, •  $k = 2, l_1 = 2, l_2 = 1$  - двойное соединение и одинарное, •  $k = 2, l_1 = 1, l_2 = 1$  - два одинарных соединения, но запрещены любые четыре линии, включая следующие варианты (см. рис. 1.4):
- $k = 2, l_1 = l_2 = 2$  или •  $k = 2, l_1 = 3, l_2 = 1$ , •  $k = 3, l_1 = 2, l_2 = l_3 = 1$ .

В случае  $k = 1$  из точного выражения для вычисленной нами выше нормы следует, что возможна единственная связная диаграмма Дынкина с тройным соединением: на ней есть только два корня, которые и соединены тройной линией.



Рис. 1.4: Запрещенные соединения центрального корневого вектора на диаграмме Дынкина.

Итак, диаграмма с множественными соединениями при наличии трех корней может включать в себя только звездочки или двойные соединения. Поэтому встает вопрос о том, сколько таких множественных соединений может быть на одной диаграмме. Следовательно, необходимо рассмотреть варианты наличия на диаграмме двух звездочек, двух двойных соединений и варианта со звездочкой и двойным соединением на одной связной диаграмме Дынкина.

На диаграмме может быть только одно двойное соединение. Пусть пара ближайших корней с двойными соединениями имеет несколько вставок одинарных линий (тройные запрещены), где также могут быть и ветвления на корнях внутри цепочки. Фрагмент подобной схемы без изображения ветвлений показан на рис. 1.5.

Тогда на концах линии  $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = (\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_k) = -\sqrt{2}/2$ , в то время как в середине  $(\tilde{\alpha}_{p-1}, \tilde{\alpha}_p) = -1/2$ , а вектор

$$v = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_k + \sqrt{2} \sum_{p=2}^{k-1} \tilde{\alpha}_p$$

очевидно, имеет норму

<sup>77</sup> Случай  $k = 1$  отвечает соединениям между двумя корнями, который нами уже изучен.

$$\begin{aligned}
 v^2 &= \tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_k^2 + 2 \sum_{p=2}^{k-1} \tilde{\alpha}_p^2 + 2\sqrt{2}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) + 2\sqrt{2}(\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_k) + 2(\sqrt{2})^2 \sum_{p=2}^{k-2} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = \\
 &= 1 + 1 + 2(k-2) - 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} 2 - 2(\sqrt{2})^2 \frac{1}{2} (k-3) = 2 + 2k - 4 - 4 - 2k + 6 = 0,
 \end{aligned}$$

т.е. простые положительные корневые векторы линейно зависимы, чего не может быть по построению.

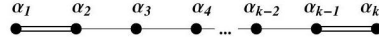


Рис. 1.5: Линия с двумя парными соединениями.

На диаграмме не могут быть одновременно звездочка и двойное соединение. Пусть ближайшие тройное ветвление и двойное соединение имеют несколько вставок одинарных линий, как показано на рис. 1.6, где мы опять опускаем изображения возможных ветвлений на внутренних корнях с номерами от 4-го до  $k-2$ -го.

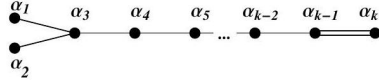


Рис. 1.6: Линия с парным соединением и тройной «звездочной» ветвления.

Тогда вектор

$$w = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + 2 \sum_{p=3}^{k-1} \tilde{\alpha}_p + \sqrt{2} \tilde{\alpha}_k$$

где для корней звездочки в случае однократных соединений, включая внутренние корни при  $3 \leq p \leq k-2$ ,

$$(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3) = (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) = (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = -\frac{1}{2},$$

а для двойной линии на конце

$$(\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_k) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

очевидно, имеет норму

$$\begin{aligned}
 w^2 &= \tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + 4 \sum_{p=3}^{k-1} \tilde{\alpha}_p^2 + 2\tilde{\alpha}_k^2 + 4(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3) + 4(\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) + 2 \cdot 4 \sum_{p=3}^{k-2} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) + 4\sqrt{2}(\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_k) = \\
 &= 1 + 1 + 4(k-3) + 2 - 2 - 2 - 4(k-4) - 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0
 \end{aligned}$$

т.е. простые положительные корневые векторы линейно зависимы, чего не может быть по построению.

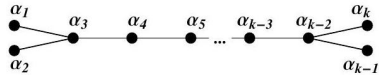


Рис. 1.7: Линия с двумя ветвлениями.

На диаграмме может быть только одна звездочка. Пусть пара близлежащих ветвлений соединена одинарной линией, как на рис. 1.7. где уже не может быть ветвлений на внутренних корнях. Для единичных векторов корневых «лучей» (символ тильда), соединенных единственной линией согласно диаграмме

$$(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3) = (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) = (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_{k-2}) = (\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_{k-2}) = -\frac{1}{2},$$

а для  $3 \leq p \leq k-3$  также

$$(\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = -\frac{1}{2}$$

Тогда вектор

$$\mathbf{u} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + 2 \sum_{p=3}^{k-2} \tilde{\alpha}_p + \tilde{\alpha}_{k-1} + \tilde{\alpha}_k$$

очевидно, имеет норму

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^2 &= \tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_{k-1}^2 + \tilde{\alpha}_k^2 + 4 \sum_{p=3}^{k-2} \tilde{\alpha}_p^2 + \\ &+ 4(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3) + 4(\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) + 4(\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_{k-2}) + 4(\tilde{\alpha}_{k-1}, \tilde{\alpha}_{k-2}) + 2 \cdot 4 \sum_{p=3}^{k-3} (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_{p+1}) = \\ &= 4 + 4(k-4) - 2 \cdot 4 - 4(k-4) = -4 < 0, \end{aligned}$$

чего не может быть по определению нормы вектора в евклидовом пространстве.

Ограничение на диаграмму с двойной линией. Мы установили, что если на диаграмме есть пара корней с двойным соединением, то на ней все остальные корни могут соединяться только одинарными линиями (см. рис. 1.8). Установим ограничения на число точек в ветках одинарных линий.

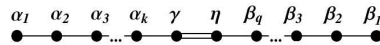


Рис. 1.8: Схема Дынкина с двойной линией.

Выделим проекцию корневого вектора  $\gamma$  в подпространство, натянутое на векторы  $\{\alpha_m\}$ , и компоненту  $\nu_a$ , ортогональную этому подпространству,

$$\tilde{\gamma} = \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m + \nu_a$$

где в силу линейной независимости простых положительных корневых векторов  $\gamma$  и  $\alpha_m$  ортогональный к подпространству вектор  $\nu_a : (\nu_a, \alpha_m) = 0$ , - не равен нулю 78. При  $m < k$  корень  $\gamma$  не соединен с  $\alpha_m$ , откуда

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}_m) = 0 \Rightarrow a_m - \frac{1}{2}(a_{m+1} + a_{m-1}) = 0,$$

так как

$$(\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_{m\pm 1}) = -\frac{1}{2}$$

Значит, последовательно

$$a_2 = 2a_1, \quad a_3 = 2a_2 - a_1 = 3a_1, \dots$$

и рекуррентное соотношение удовлетворяется при

$$a_m = ma_1$$

Кроме того можно считать, что вектор  $\tilde{\gamma}$  отвечает  $k+1$  члену этой последовательности,  $\tilde{\gamma} \mapsto \tilde{\alpha}_{k+1}$ , и после переноса этого вектора из правой части разложения в подпространстве в левую

$$\mathbf{0} = \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m - \tilde{\gamma} + \nu_a = \sum_{m=1}^{k+1} a_m \tilde{\alpha}_m + \nu_a \Rightarrow -\nu_a = \sum_{m=1}^{k+1} a_m \tilde{\alpha}_m$$

учесть, что  $(\nu_a, \alpha_k) = 0$ , так что

$$-\frac{1}{2}a_{k-1} + a_k - \frac{1}{2}a_{k+1} = 0$$

и по построению положить  $a_{k+1} = -1$ , откуда сразу

$$a_1 = -\frac{1}{k+1}, \quad a_m = -\frac{m}{k+1}$$

Совершенно аналогично используя проекцию корневого вектора  $\eta$  в подпространство, натянутое на векторы  $\{\beta_n\}$ , запишем

$$\tilde{\eta} = \sum_{n=1}^q b_n \tilde{\beta}_n + \nu_b$$

где уже

$$b_1 = -\frac{1}{q+1}, \quad b_n = -\frac{n}{q+1}$$

В силу попарной ортогональности  $\gamma$  с  $\{\beta_n\}$  и  $\eta$  с  $\{\alpha_m\}$  теперь легко построить разложение

$$\tilde{\gamma} = \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m + c \sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\beta}_n + \epsilon$$

где  $\tilde{\beta}_{q+1} \equiv \tilde{\eta}$ , и согласно условию построения диаграммы Дынкина

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\eta}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow c \left( b_{q+1} - \frac{1}{2}b_q \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Отсюда с учетом  $b_{q+1} = -1$

$$c \left( 1 - \frac{q}{2(q+1)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = \sqrt{2} \frac{q+1}{q+2}$$

Ортогональный к подпространству, натянутому на векторы корневых «лучей»  $\{\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_n\}$ , вектор  $\epsilon$  не может быть равен нулю, так как вектор  $\tilde{\gamma}$  линейно независим от других простых положительных корней в разложении. Следовательно, строго

<sup>78</sup> Если  $\nu_a = 0$ , то простой положительный корень  $\gamma$  выражался бы через суперпозицию  $\alpha_m$ .

$$(\epsilon, \epsilon) = (\tilde{\gamma}, \epsilon) > 0$$

а значит,

$$(\tilde{\gamma}, \epsilon) = \left( \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma} - \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m - c \sum_{n=1}^{q+1} b_n \tilde{\beta}_n \right) = 1 + \frac{1}{2} a_k + c b_{q+1} \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

Подставляя выражения для коэффициентов, элементарное сложение дробей дает

$$1 - \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} - \frac{q+1}{q+2} = \frac{1}{2(k+1)(q+2)} (2 - kq) > 0 \quad \Rightarrow \quad kq < 2$$

Это условие удовлетворяется либо при  $k = q = 1$ , либо при произвольном  $k$  и  $q = 0$ , либо при произвольном  $q$  и  $k = 0$  (визуально эти два случая не отличаются, так как один сводится к другому просто сменой обозначений  $\tilde{\gamma} \leftrightarrow \tilde{\eta}$ ).

Таким образом, при наличии двойного соединения допустимы диаграммы Дынкина, показанные на рис. 1.9

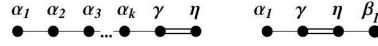


Рис. 1.9: Допустимые схемы Дынкина с двойной линией.

Ограничение на диаграмму с ветвлением. Разложим центр ветвления  $\eta$  (см. рис. 1.10 по проекциям в подпространство остальных корней в виде

$$\tilde{\eta} = \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m + \sum_{n=1}^q b_n \tilde{\beta}_n + \sum_{j=1}^r c_j \tilde{\gamma}_j + \epsilon$$

где коэффициенты разложения фактически уже были установлены нами чуть выше

$$a_m = -\frac{m}{k+1}, \quad b_n = -\frac{n}{q+1}, \quad c_j = -\frac{j}{r+1}$$

Линейная независимость простых корневых векторов означает, что ортогональный вектор  $\epsilon$  имеет положительную норму, откуда в силу ортогональности вектора  $\epsilon$  подпространству линейной оболочки корней  $\alpha_m, \beta_n$  и  $\gamma_j$

$$(\epsilon, \epsilon) = (\tilde{\eta}, \epsilon) = \left( \tilde{\eta}, \tilde{\eta} - \sum_{m=1}^k a_m \tilde{\alpha}_m - \sum_{n=1}^q b_n \tilde{\beta}_n - \sum_{j=1}^r c_j \tilde{\gamma}_j \right) = 1 + \frac{1}{2} (a_k + b_q + c_r) > 0.$$

В итоге,

$$\frac{k}{k+1} + \frac{q}{q+1} + \frac{r}{r+1} < 2$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$k \geq q \geq r \geq 1$$

Легко перечислить все допустимые комбинации  $\{k, q, r\}$ , удовлетворяющие неравенству (I.4.30):

- при  $r = q = 1$  находим  $k < k+1$ , что справедливо при любых натуральных  $k$ ; • при  $r = 1, q = 2, k \geq 2$  получаем  $k/(k+1) < 5/6$ , что имеет место при  $k = \{2, 3, 4\}$ ; • при



$r = 1, q \geq 3$  и  $k \geq 3$  находим  $k/(k+1) < 3/4$ , так что решений нет; • при  $q \geq r \geq 2$  и  $k \geq 2$  имеем  $k/(k+1) < 2/3$ , и решений нет.

В итоге, мы провели рассмотрение всех возможных диаграмм Дынкина для простых положительных корневых векторов, задающих алгебру простой компактной группы Ли.

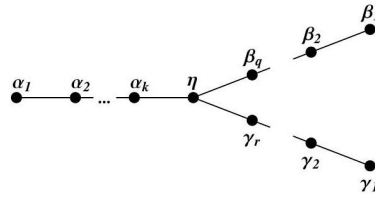


Рис. 1.10: Диаграмма Дынкина с ветвлением.

### 7.3.10 Classification of simple compact Lie algebras

Группы бесконечных последовательностей простых компактных групп Ли и их матричная интерпретация, исключительные группы и особые группы, соотношения эквивалентности алгебр Ли.

Допустимые связанные диаграммы Дынкина для простых компактных групп с учетом вариации направления на двойной и тройной линиях от большего корня к меньшему сводятся к следующим семи типам.

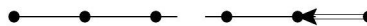
- Последовательность  $A_n$ .



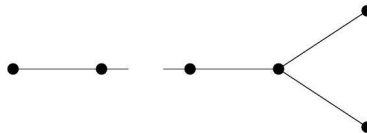
- Последовательность  $B_n$ .



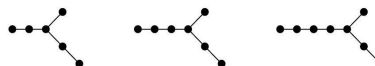
- Последовательность  $C_n$ .



- Последовательность  $D_n$ .



- Три исключительные алгебры групп  $E_6, E_7, E_8$ .



- Особая алгебра группы  $F_4$ .



- Особая алгебра группы  $G_2$ .



Индекс обозначает ранг группы - число наблюдаемых, характеризующих базис квантовых состояний, которое равно размерности подалгебры Картана и размерности векторного пространства корней.

Для последовательностей  $A_n, B_n, C_n, D_n$  ранг  $n$  ничем не ограничен, т.е. эти последовательности являются бесконечными: они отвечают классическим алгебрам Ли. Эти алгебры соответствуют группам Ли, которые возникают при рассмотрении линейных преобразований векторных пространств, т.е. они реализуются в некотором матричном виде, определяющем тип группы. Другими словами, у каждой классической алгебры Ли есть свое имя.

- Унитарные (U) квадратные матрицы  $k \times k$  с единичным детерминантом (специальные (S)):  $A^\dagger A = \mathbb{1}, \det A = 1$ , - определяют группу преобразований векторов в комплексном евклидовом пространстве, сохраняющих норму. Группа таких преобразований обозначается  $SU(k)$ , а соответствующая алгебра  $\mathfrak{su}(k)$ . Эта алгебра совпадает с алгеброй типа  $A_n$  при  $k = n + 1$ .
- Специальные ортогональные преобразования квадратными матрицами  $k \times k$ :  $A^T A = 1, \det A = 1$ , определяют группу поворотов вещественных векторов в евклидовом пространстве, сохраняющих их норму,  $SO(k)$  и ее алгебру генераторов  $\mathfrak{so}(k)$ , которая изоморфна алгебре  $B_n$  при нечетном числе размерности пространства  $k = 2n + 1$  или алгебре  $D_n$  при четном числе измерений евклидова пространства  $k = 2n$ .
- В фазовом пространстве классической механики с  $n$  обобщенными координатами и отвечающим им канонически сопряженными импульсами  $\{q_\alpha, p_\beta\}$  размерности  $n + n = 2n$  скобка Пуассона

$$\{q_\alpha; p_\beta\}_{\mathbb{P}} = -\{p_\beta; q_\alpha\}_{\mathbb{P}} = \delta_{\alpha\beta}$$

не изменяется при канонических линейных преобразованиях векторов  $\mathbf{x} = \{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ :

$$\mathbf{x} = C \cdot \mathbf{x}' \Leftrightarrow x_\mu = C_\mu^\nu x'_\nu$$

В терминах компонент  $\mathbf{x}$  скобка Пуассона принимает вид

$$\{x_\mu; x_\lambda\}_{\mathbb{P}} = \Omega_{\mu\lambda}$$

где матрица  $\Omega$  размером  $(2n) \times (2n)$  имеет блочный вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

и в штрихованных координатах фазового пространства по-прежнему

$$\{x'_\nu; x'_\rho\}_{\mathbb{P}} = \Omega_{\nu\rho}$$

так что

$$\{x_\mu; x_\lambda\}_{\mathbb{P}} = C_\mu^{\bullet\nu} C_\lambda^{\bullet\rho} \{x'_\nu; x'_\rho\}_{\mathbb{P}} = \Omega_{\nu\rho} C_\mu^{\bullet\nu} C_\lambda^{\bullet\rho} = \Omega_{\nu\rho} C_\mu^{\bullet\nu} (C^T)^\rho \cdot \lambda = \Omega_{\mu\lambda},$$

и значит, в матричном виде имеется тождество

$$C \cdot \Omega \cdot C^T = \Omega$$

которое определяет симплектическую группу преобразований  $Sp(n)$  и ее алгебру  $\mathfrak{sp}(n)$ , которая совпадает с алгеброй типа  $C_n$ .

Таким образом, каждая классическая простая компактная алгебра соответствует вполне определенной матричной группе Ли.

В проведенной классификации алгебр Ли имеется ряд вырождений. Именно, тождественные диаграммы Дынкина возникают для алгебр  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , когда они сводятся к единственной точке. Следовательно, возникающие для этих алгебр коммутационные соотношения для генераторов совпадают, что устанавливает изоморфизм соответствующих алгебр Ли

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(1)$$

Первый из этих изоморфизмов хорошо знаком: коммутационные соотношения для орбитального момента группы поворотов  $SO(3)$ , принимающего целые значения, совпадают с коммутационными соотношениями для группы поворотов спина  $SU(2)$ , который может принимать и полуцелые значения. Второй изоморфизм отвечает инвариантности спинорной метрики

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

относительно группы поворотов спина. Эта метрика совпадает с симплектической матрицей в фазовом пространстве классической механики частицы с одной степенью свободы.

Тождественны и диаграммы для алгебр  $B_2$  и  $C_2$ : они сводятся к двум точкам, соединенным двойной линией, и следовательно, имеет место изоморфизм

$$\mathfrak{so}(5) \cong \mathfrak{sp}(2)$$

При  $n = 3$  ветвление на схеме  $D_3$  вырождается: из точки ветвления не исходит третья линия, - и диаграмма сводится к типу  $A_3$ , что ведет к одинаковым коммутационным соотношениям в алгебрах

$$\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{su}(4)$$

Обычно особо указывают на случай  $D_2$ , когда на диаграмме Дынкина остаются только две крайних точки разветвления, а собственно точка ветвления просто отсутствует, что приводит не к связной диаграмме, а к двум отдельным точкам, каждая из которых отвечает алгебре группы поворотов трехмерного пространства, а значит,

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$$

т.е. алгебра группы поворотов четырехмерного евклидова пространства не является простой, а представляется в виде прямой суммы алгебры генераторов группы поворотов в трехмерном пространстве.

Указанные нами выше изоморфизмы позволяют уточнить классификацию простых компактных алгебр групп Ли путем перечисления только независимых классических алгебр:

$$A_n \text{ при } n \geq 1; \quad B_n \text{ при } n \geq 2; \quad C_n \text{ при } n \geq 3; \quad D_n \text{ при } n \geq 4.$$

Схема Дынкина позволяет путем последовательных построений от простых положительных корней ко всем корням простой компактной группы Ли записать весь набор коммутаторов для генераторов алгебры Ли.

## 7.4 1. Algebras $\mathfrak{su}(2)$ and $\mathfrak{su}(3)$

От общего формализма к генераторам и операторам Казимира алгебр  $\mathfrak{su}(2)$  и  $\mathfrak{su}(3)$ , повышающие и понижающие операторы, масштаб и конформный множитель в евклидовой метрике и метрика Киллинга, выбор осей подалгебры Картана в алгебре  $\mathfrak{su}(3)$ , структурные константы.

### 7.4.1 1.1 $\mathfrak{su}(2)$

Алгебре группы поворотов спиноров  $\mathfrak{su}(2)$  отвечает элементарная схема Дынкина - точка. Следовательно, ранг группы равен единице, и это число генераторов в подалгебре Картана и число простых положительных корней. Обозначим генератор, составляющий подалгебру Картана в  $\mathfrak{su}(2)$ , который в физической терминологии можно назвать наблюдаемой величиной, символом  $\Gamma_z$ , а повышающий из корневого дополнения - символом  $\Gamma_+$ . Эрмитово сопряженный ему понижающий оператор - символом  $\Gamma_-$ . Это единственный простой положительный корень, и ему соответствуют два лестничных оператора: повышающий, соответствующий собственно положительному корню  $\alpha_z > 0$ , и понижающий, соответствующий этому же корню со знаком минус  $-(\alpha_z)$ . Весовые векторы и два корневых вектора одномерные, поэтому для  $\mathfrak{su}(2)$ , будем называть их весами и корнями.

В базисе Картана-Вейля коммутационные соотношения имеют вид

$$[\Gamma_z, \Gamma_{\pm}] = \pm \alpha_z \Gamma_{\pm}, \quad [\Gamma_+, \Gamma_-] = \alpha_z \Gamma_z, \quad \alpha_z > 0$$

Введем эрмитовы операторы

$$\Gamma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_+ + \Gamma_-), \quad \Gamma_y = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_+ - \Gamma_-)$$

для которых коммутационные соотношения примут вид

$$[\Gamma_x, \Gamma_y] = i\alpha_z \Gamma_z, \quad [\Gamma_y, \Gamma_z] = i\alpha_z \Gamma_x, \quad [\Gamma_z, \Gamma_x] = i\alpha_z \Gamma_y$$

которые с помощью полностью антисимметричного тензора Леви-Чивиты можно переписать в виде

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = i\alpha_z \epsilon_{abc} c'^c \Gamma_c, \quad a, b, c \in \{x, y, z\}$$

Если положить<sup>1</sup>

$$\alpha_z = 1$$

то мы придем к стандартному выбору нормировки повышающего оператора в теории момента количества движения  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , когда  $\mathbf{L} = \hbar \mathbf{l}$ , а алгебра  $\mathbf{l}$  отождествляется с алгеброй  $\hat{\mathbf{j}}$ <sup>2</sup>

$$\Gamma_z \equiv \hat{j}_z, \quad \Gamma_x \equiv \hat{j}_x, \quad \Gamma_y \equiv \hat{j}_y, \quad \Gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_x \pm i\Gamma_y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j}_{\pm}.$$

<sup>1</sup> Можно ввести и размерную величину  $\alpha_z = \hbar$ , которая возникает при введении коммутаторов компонент момента количества движения из скобок Пуассона в процедуре канонического квантования путем введения операторов наблюдаемых величин так, что  $\hat{\mathbf{J}} = \hbar \hat{\mathbf{j}}$ . Тогда  $\hat{\mathbf{j}} \equiv \mathbf{L}/\alpha_z$ , что верно не только при  $\alpha_z = \hbar$ , но и при любых ненулевых  $\alpha_z \neq 0$ .

<sup>2</sup> Мы следуем терминологии, принятой в англоязычной литературе, согласно которой импульс отождествляется с количеством движения. Отметим ее отличие от русской научной традиционной

Определение метрики Киллинга в общем случае (I.2.17) для алгебры  $\mathfrak{su}(2)$  дает

$$g_{ab} = -\alpha_z^2 \epsilon_{aa_2a_3} \epsilon_{ba_3a_2} = 2\alpha_z^2 \delta_{ab}$$

Нам достаточно, чтобы эта метрика была пропорциональна единичной матрице: тогда структурные константы полностью антисимметричны по перестановкам любой пары из трех индексов.

Квадратичный оператор Казимира - единственный независимый инвариант группы поворотов в том смысле, что все иные инварианты этой группы являются функциями этого инварианта, - задается выражением  $C_2 = g^{ab} \Gamma_a \Gamma_b$ . Заметим, что это выражение для инварианта написано для случая, когда все генераторы алгебры эрмитовы, т.е. не в базисе Картана-Вейля. Обратная метрика  $g^{ab} = \delta^{ab} / (2\alpha_z^2)$  вычисляется как матрица обратная (II.1.3), так что для повышающих и понижающих операторов в базисе Картана-Вейля (I.3.44) элементы метрики имеют те же значения, что и для генератора подалгебры Картана,  $g_{+-} = g_{-+} = g_{zz} = 2\alpha_z^2$ , откуда

$$\begin{aligned} C_2 = g^{ab} \Gamma_a \Gamma_b &= \frac{1}{2\alpha_z^2} (\Gamma_z^2 + \Gamma_+ \Gamma_- + \Gamma_- \Gamma_+) = \\ &= \frac{1}{2\alpha_z^2} \hat{j}^2 = \frac{1}{2\alpha_z^2} \left\{ \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2} (\hat{j}_+ \hat{j}_- + \hat{j}_- \hat{j}_+) \right\} \end{aligned}$$

Обычно множитель  $1/2\alpha_z^2$  исключают из определения квадратичного оператора Казимир  $2^3$ , так как сам смысл введения этого инварианта заключается не в том, что он задает собственное значение на состояниях неприводимого представления алгебры поворотов, а в том, что это собственное значение имеет вполне определенный физический смысл - квадрат момента количества движения в случае алгебры  $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$  для группы поворотов в трехмерном пространстве, и это собственное значение не зависит от преобразований базиса представления матрицами групповых преобразований. Выберем  $\tilde{C}_2 \equiv j^2$  (см. сноску 3 внизу этой страницы),

$$\hat{j}^2 = \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2} (\hat{j}_+ \hat{j}_- + \hat{j}_- \hat{j}_+) = \Gamma_z^2 + \Gamma_+ \Gamma_- + \Gamma_- \Gamma_+$$

Выражения (II.1.4) и (II.1.5) специально были записаны через повышающие и понижающие операторы для того, чтобы, во-первых, еще раз подчеркнуть, что в базисе Картана-Вейля диагональность и положительная определенность метрики Картана для простой компактной группы поворотов означает, что берется сумма квадратов генераторов из подалгебры Картана, а повышающий оператор умножается на эрмитово сопряженный к нему понижающий в прямом и обратном порядке, так как  $g_{+-} = g_{-+} = g_{\mathcal{W}}$  (конформный фактор  $\Omega^2 : g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab}$ , - здесь не важен). Во-вторых, для квадратичного оператора Казимира все состояния неприводимого представления являются собственными с одним и тем же собственным значением (другим словами, размерность пространства неприводимого представления  $\mathcal{D}$  равна кратности вырождения собственного значения этого оператора в данном неприводимом представлении). Это значит, что в неприводимом представлении оператор Казимира сводится к единичной матрице  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$  с численным коэффициентом, равным собственному значению оператора Казимира на любом из векторов состояния

---

терминологии, принятой в теоретической механике: строго говоря, количество движения определяется в лагранжевой механике как производная лагранжиана  $L$  по скорости  $\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}$ , а импульс как определенный интеграл от силы  $\mathbf{F} = -\partial L / \partial \mathbf{r}$  на некотором интервале времени. Согласно уравнениям Эйлера-Лагранжа  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ , так что количество движения, которое приобретает материальная точка за счет действия силы равно импульсу  $\mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt$ . Поэтому момент количества движения  $\mathbf{L}$  мы будем также называть моментом импульса, а также моментом вращения.

неприводимого представления. Мы же по опыту рассмотрения группы поворотов знаем, что в конечномерном неприводимом представлении всегда можно выделить старший вектор состояния  $|\mu_S\rangle$ , действие повышающего оператора на который равно нулю по определению старшего вектора состояния,  $\hat{j}_+|\mu_S\rangle = 0$ . Поэтому удобно вычислять собственное значение оператора Казимира действием на старший вектор состояния, а для этого можно привести  $C_2$  к виду, где повышающий оператор расположен правее понижающего, с помощью коммутационных соотношений (II.1.1), которые при  $\alpha_z = 1$  дают

$$[\hat{j}_+, \hat{j}_-] = 2\hat{j}_z \Rightarrow \hat{j}_+\hat{j}_- = \hat{j}_-\hat{j}_+ + 2\hat{j}_z$$

так что

$$\begin{aligned}\tilde{C}_2 \equiv \hat{j}^2 &= \hat{j}_z^2 + \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 = \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2}(\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+) = \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2}(2\hat{j}_-\hat{j}_+ + 2\hat{j}_z) = \hat{j}_z^2 + \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_z = \\ &= \Gamma_z^2 + \Gamma_+\Gamma_- + \Gamma_-\Gamma_+ = \Gamma_z^2 + 2\Gamma_+\Gamma_- + \Gamma_z\end{aligned}$$

Отсюда

$$\tilde{C}_2|\mu_S\rangle = (\hat{j}_z^2 + \hat{j}_z)|\mu_S\rangle$$

где  $|\mu_S\rangle$  является собственным вектором для генератора подалгебры Картана  $\hat{j}_z = \Gamma_z$ .

В итоге, схема Дынкина алгебры  $\mathfrak{su}(2)$  привела нас к стандартным коммутационным соотношениям для операторов момента импульса, которые являются генераторами группы поворотов для частиц, обладающих спином.

## 7.4.2 1.2 Scale and conformal factor (?????)

На примере алгебры  $\mathfrak{su}(2)$  мы увидели, что вид коммутаторов генераторов алгебры Ли в базисе Картана-Вейля зависит от выбора масштаба единиц, в которых выражаются корни, а их единицы измерения совпадают с единицами измерения весов - собственных значений генераторов подалгебры Картана, поскольку по построению сдвиги этих собственных значений и являются корнями  $\alpha$  в тех же единицах, что и единицы измерения весов. В алгебре  $\mathfrak{su}(2)$  это выбор величины  $\alpha_z$ , нормировки одномерного корневого вектора. Фиксация определенного выбора нормировки корней и весов также приводит к тому, что в метрику Киллинга входит конформный фактор, связывающий ее с единичной матрицей (см. (II.1.3)).

С другой стороны, мы можем по-разному выбирать масштаб координат в группе

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}/\tilde{\Omega}$$

что приведет к метрике Киллинга с дополнительным конформным фактором

$$g'_{\alpha\beta} = \tilde{\Omega}^2 g_{\alpha\beta}$$

Ясно, что эти две процедуры: выбор масштаба собственных значений и масштаба параметров координат групповых элементов, - связаны. Поэтому важно подчеркнуть, что выбор масштаба приводит к определенной связи генераторов и координат с физическими величинами. Например, в алгебре  $\mathfrak{su}(2)$  фиксация  $\alpha_z = 1$  и  $g_{ab} = 2\delta_{ab}$  означает, что координаты группы совпадают с углами поворотов в присоединенном

<sup>3</sup> По сути речь идет о введении инварианта  $\tilde{C}_2$ , который был определен в I.2.45 на стр. 33 когда в случае  $g_{ab} = \Omega^2\delta_{ab}$  вместо обратной метрики используется символ Кронекера.

представлении, а  $\hbar j$  - это момент импульса. Только в этом случае поворот на угол  $2\pi$  приводит к тождественному преобразованию для любого отличного от нуля вектора и, в частности, для декартовых координат евклидова пространства. Из этого примера ясно, что выявление физического смысла выбранной нормировки зависит от глобальных свойств групповых преобразований (поворот на конечный угол  $2\pi$  является глобальной характеристикой, в отличие от локального поворота на бесконечно малый угол, что рассматривается при изучении алгебры Ли вблизи единицы группы).

В других случаях, когда группа преобразований не связана со свойствами пространства-времени, выбор нормировки может задавать, например, единицу заряда - одного из генераторов подалгебры Картана, а групповые преобразования с изменением собственных значений заряда будут тогда отвечать изменениям дискретных значений заряда в относительных единицах для разных собственных состояний оператора заряда в пространстве представления, что называют термином «квантование заряда».

Отметим также, что все полученные нами коммутационные соотношения генераторов в базисе Картана-Вейля зависят от выбора нормировки корней и весов, но не зависят от конформного фактора в конформно евклидовой метрике Киллинга: коммутаторы получены при условии, что метрика положительно определена и пропорциональна единичной матрице.

### 7.4.3 1.3su(3)

Согласно классификации простых компактных алгебр Ли (см. 5 Главы 1), алгебра второго ранга  $\mathfrak{su}(3)$  обозначается как  $A_2$ . Схема Дынкина для простых положительных корней алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  - две точки, соединенные одинарной линией. Значит, имеются два генератора подалгебры Картана, а их собственные числа можно изображать в виде точек на плоскости 5, и два простых положительных корневых вектора  $\alpha_1 \equiv \alpha$  и  $\alpha_2 \equiv \beta$ . Из диаграммы Дынкина для  $\mathfrak{su}(3)$  следует, что простые положительные корни имеют одинаковую длину, и эти корневые векторы образуют угол  $\frac{2}{3}\pi$ , так как их скалярное произведение согласно I.4.26 равно

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \sqrt{\kappa_{\alpha|\beta}^{\max} \kappa_{\beta|\alpha}^{\max}} \sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}$$

где  $l_{\alpha|\beta} = \kappa_{\alpha|\beta}^{\max} \kappa_{\beta|\alpha}^{\max} = 1$  - число линий между корнями на схеме Дынкина для  $SU(3)$ . В соответствии с диаграммой алгебры (две точки, соединенные одной линией) простые положительные корни имеют одинаковую длину, которую мы полагаем равной единице, т.е.  $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 1$ , так что

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}$$

Простые положительные корневые векторы образуют базис в пространстве размерности, равной рангу алгебры, в данном случае в двумерном пространстве.

Соединенные одинарной линией корни определяют число шагов в последовательности простых положительных корней: это число равно единице, так что существует только еще один положительный коренц  $\gamma \equiv \alpha + \beta$  и соответствующий ему повышающий оператор. В итоге мы имеем три повышающих генератора алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ , связанные с

<sup>4</sup> Напомним, что при выводе соотношения [I. 2.44 для связи метрики Киллинга с единичным символом Кронекера при рассмотрении задачи о следе генераторов алгебры в произвольном представлении на стр. 33 мы ввели постоянную  $C_A$ :  $g_{ab} = C_A \delta_{ab}$ , и для группы  $SU(2)$  мы нашли, что  $C_A = 2$ . В дальнейшем мы установим, что  $C_A = N$  в случае группы  $SU(N)$ .

<sup>5</sup> Точки собственных чисел генераторов подалгебры Картана в пространстве размерности, равной рангу группы, называют весовой диаграммой представления.

положительными корнями  $\alpha, \beta, \gamma$ , плюс три эрмитово сопряженных к ним понижающих генератора, которые соответствуют отрицательным корням  $-\alpha, -\beta, -\gamma$ , и два генератора подалгебры Картана. Других корневых векторов, кроме перечисленных шести, больше нет, так как все возможные для  $SU(3)$  последовательности положительных корней уже построены. (В этом можно будет убедиться, если провести всевозможные отражения Вейля (описание группы Вейля будет в разделе 2.3 Главы 2 2 шести корней относительно самих этих корней и в явном виде показать, что новые корневые векторы при действии отражений не возникают.) Диаграмма Дынкина для двух простых положительных корней, соединенных одинарной линией, означает, что есть только один шаг в каждой из последовательностей простых корневых векторов алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ , т.е. положительных корней только 3. Значит, алгебра имеет восемь перечисленных нами генераторов преобразований. Этот вывод согласуется с общим утверждением о размерности группы  $SU(N)$ ,

$$N_G = \dim SU(N) = N^2 - 1$$

который мы получили в задаче 9 на стр. 22.

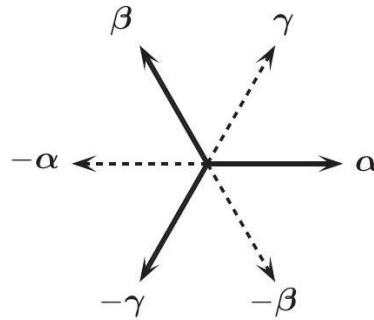


Рис. 2.1: Корни алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ .

Итак, корневая система алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  определена в том смысле, что это - двумерные векторы, относительное расположение которых на плоскости такое, как это показано на рис. 2.1

Из рис. 2.1 ясно, что до выбора ортогональных осей, вдоль которых откладываются веса в той же плоскости, что и корни алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ , неважно, какая тройка из шести корней станет считаться положительными корнями. Между простыми корнями должен быть угол в 120 градусов. Поэтому два простых положительных корня можно выбрать либо из тройки  $\{\alpha, \beta, -\gamma\}$ , либо из тройки  $\{-\alpha, -\beta, \gamma\}$ . Из них надо выбрать два, сложив которые мы получим третий положительный корень. Этим выбором мы фиксируем также, какие три генератора корневого дополнения станут повышающими, а какие понижающими. Примеры пар простых положительных корней:

$$\{\alpha, \beta\}, \{-\gamma, \alpha\}, \{-\beta, \gamma\}, \dots$$

В этом смысле разумно решить задачу определения всех коммутационных соотношений алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  сначала математически, в общем виде без фиксации генераторов подалгебры Картана, а потом физически, зафиксировав выбор генераторов подалгебры Картана, т.е. ортогональных осей собственных значений наблюдаемых (генераторов подалгебры Картана) на плоскости корней, с которым координаты векторов приобретают вполне определенный физический смысл в схеме, традиционно применяющейся в задачах физики кварков.

Корневое дополнение алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  и коммутаторы. Обозначим пару простых положительных корней  $\{\alpha, \beta\}$ . Тогда третий положительный корень - это  $\gamma$ . Этим



корням соответствуют лестничные генераторы: три повышающих  $\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta, \Gamma_\gamma\}$  и три понижающих  $\{\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{-\beta}, \Gamma_{-\gamma}\}$ , которые обладают заданными в базисе Картана-Вейля (I.3.44) коммутационными соотношениями. Установим сначала коммутаторы для генераторов из этого корневого дополнения алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ .

Структурные константы  $N_{\alpha,\beta}$  в базисе Картана-Вейля (I.3.44 в коммутационном соотношении для простых положительных корней

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = N_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha+\beta}$$

принимают значения (см. (I.4.14)

$$N_{\alpha,\beta}^2 = -(\alpha, \beta)$$

Для  $\mathfrak{su}(3)$ , как мы положили в (II.1.9)

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}$$

Значит, с учетом эрмитова сопряжения повышающих генераторов, когда они переходят в понижающие,

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_\gamma, \quad [\Gamma_{-\beta}, \Gamma_{-\alpha}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{-\gamma}$$

Мы установили ранее (см. стр. 53) соотношения для структурных констант в базисе Картана-Вейля

$$N_{-\alpha,\beta+\alpha} = N_{\beta+\alpha,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha} = N_{\alpha,\beta},$$

что можно в случае  $\mathfrak{su}(3)$  переписать как

$$N_{-\alpha,\gamma} = N_{\gamma,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha} = N_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Следовательно, с учетом элементарного сложения корневых векторов согласно рис. 2.1

$$\begin{aligned} [\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_\gamma] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_\beta, & [\Gamma_{-\gamma}, \Gamma_\alpha] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{-\beta} \\ [\Gamma_\gamma, \Gamma_{-\beta}] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_\alpha, & [\Gamma_\beta, \Gamma_{-\gamma}] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{-\alpha} \end{aligned}$$

Поскольку векторы  $\alpha + \gamma$  и  $\beta + \gamma$  не являются корнями алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ , то

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_\gamma] = [\Gamma_\beta, \Gamma_\gamma] = 0$$

а эрмитово сопряжение этих соотношений дает

$$[\Gamma_{-\alpha}, \Gamma_{-\gamma}] = [\Gamma_{-\beta}, \Gamma_{-\gamma}] = 0$$

Коммутаторы лестничных генераторов с генераторами из подалгебры Картана, для которых  $[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0$ ,

$$\begin{aligned} [\Gamma_l, \Gamma_\alpha] &= \alpha_l \Gamma_\alpha, & [\Gamma_l, \Gamma_\beta] &= \beta_l \Gamma_\beta, & [\Gamma_l, \Gamma_\gamma] &= \gamma_l \Gamma_\gamma \\ [\Gamma_l, \Gamma_{-\alpha}] &= -\alpha_l \Gamma_{-\alpha}, & [\Gamma_l, \Gamma_{-\beta}] &= -\beta_l \Gamma_{-\beta}, & [\Gamma_l, \Gamma_{-\gamma}] &= -\gamma_l \Gamma_{-\gamma}, \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup> Напомним, что число линий, соединяющих 2 простых положительных корня,  $l = \kappa_{\alpha|\beta}^{\max} \kappa_{\beta|\alpha}^{\max}$ , где  $\kappa_{\alpha|\beta}^{\max}$  и  $\kappa_{\beta|\alpha}^{\max}$  задают число шагов при построении положительных корней для  $\alpha$ - и  $\beta$ -последовательностей, и в данном случае  $\kappa_{\alpha|\beta}^{\max} = \kappa_{\beta|\alpha}^{\max} = 1$ , так что в этих последовательностях только 2 положительных корня: исходный простой и полученный при первом и последнем шаге суммированием исходного простого положительного корневого вектора со вторым простым положительным корневым вектором.

и

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] = \alpha_l \Gamma_l, \quad [\Gamma_\beta, \Gamma_{-\beta}] = \beta_l \Gamma_l, \quad [\Gamma_\gamma, \Gamma_{-\gamma}] = \gamma_l \Gamma_l$$

вместе с соотношениями (II.1.11) - II.1.14 полностью задают алгебру  $\mathfrak{su}(3)$ . Однако ясно, что в (II.1.15) и (II.1.16) необходимо указать конкретный выбор генераторов подалгебры Картана, чтобы все компоненты корневых векторов приняли определенные значения. Это достигается выбором ортогональных осей на плоскости рис. 2.1.

Пример выбора осей показан на рис. 2.2. В ортонормированном базисе  $\mathbf{l}$  (обратите внимание на жирный шрифт, который мы используем для обозначения векторов!):  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \equiv \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ , - обозначим генераторы подалгебры Картана как  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ , соответственно (штрих введен для того, чтобы избежать путаницы с похожими символами в этом и в следующем разделах). В таких координатах, простые положительные корни  $\alpha_1 \equiv \alpha$  и  $\alpha_2 \equiv \beta$  имеют координаты

$$\alpha = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad \beta = (0, 1)$$

а их сумма

$$\gamma = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

что полностью определяет численные коэффициенты в (II.1.15 и (II.1.16). При таком выборе расположения осей, вдоль которых откладываются собственные значения генераторов подалгебры Картана, ясно, что  $\Gamma'_2$  описывает величину, которая является полным аналогом проекции момента количества движения в алгебре  $\mathfrak{su}(2)$ , так как простой положительный корень  $\alpha_2$  ориентирован вдоль оси  $\mathbf{e}'_2$  точно так же, как это было при рассмотрении момента количества движения. В случае алгебры  $\mathfrak{su}(3)$

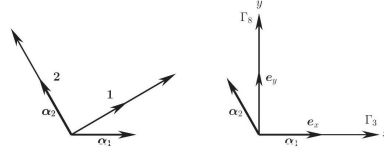


Рис. 2.2: Простые положительные корни алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  в ортонормированном базисе  $\mathbf{l}$  :  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \equiv \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$  (слева) и в координатном базисе плоскости  $(x, y)$  (справа) после поворота исходного базиса  $\mathbf{l}$  так, чтобы совместить ось  $x$  с первым простым положительным корнем, т.е. на  $\frac{\pi}{6}$  по часовой стрелке.

обозначения наблюдаемой величины, подобной  $\Gamma'_2$ , используют термин «изоспин». Рассмотренный нами ортонормированный базис  $\mathbf{l}$  задает наблюдаемые величины  $\{\Gamma'_1, \Gamma'_2\}$ , которые в физической традиции называются электрическим зарядом и U-изоспином. Мы изучим эти традиционные обозначения более детально в следующем разделе.

Сейчас же введем базис эрмитово самосопряженных генераторов  $\Gamma_a$ , для которых метрика Киллинга принимает, как говорят, конформно плоский вид

$$g_{ab} = C_A \delta_{ab}, \quad a, b \in \{\overline{1}, \overline{8}\}, \quad C_A = 3.$$

Эти генераторы

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_\alpha + \Gamma_{-\alpha}), & \Gamma_2 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_\alpha - \Gamma_{-\alpha}), \\ \Gamma_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_\gamma + \Gamma_{-\gamma}), & \Gamma_5 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_\gamma - \Gamma_{-\gamma}), \\ \Gamma_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_\beta + \Gamma_{-\beta}), & \Gamma_7 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\Gamma_\beta - \Gamma_{-\beta}), \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{2} (\sqrt{3}\Gamma'_1 - \Gamma'_2), & \Gamma_8 &= \frac{1}{2} (\Gamma'_1 + \sqrt{3}\Gamma'_2), \end{aligned}$$

где поворот осей на плоскости генераторов подалгебры Картана  $\{\Gamma'_1, \Gamma'_2\}$  введен, исходя из принятой в физической литературе традиции. При этом генераторы  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_8$  - это генераторы подалгебры Картана, а собственные значения  $\Gamma_3$  на рис. 2.2 откладываются вдоль оси  $x$ , а  $\Gamma_8$  - вдоль оси  $y$ . Запишем коммутационные соотношения группы  $SU(3)$  для этих генераторов

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = i f_{ab}^c \Gamma_c, \quad a, b, c \in \{\overline{1, 8}\}$$

Для данного фиксированного набора генераторов вводят полностью антисимметричные структурные константы  ${}^7 f_{abc} \equiv f_{ab}^{c'} \delta_{c'c}$  так, как это следует из выведенных нами выше из схемы Дынкина алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  коммутаторов. В итоге, для ненулевых постоянных мы получаем таблицу значений <sup>8</sup>

$$f_{123} = 1, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2},$$

а другие константы получаются при перестановке их индексов с учетом четности такой перестановки. Структурные константы по определению задают метрику Киллинга (I.2.17)

$$g_{ab} = -f_{ac'}^{c'} f_{bc'}^{c'} = -f_{ac'c} f_{bcc'} = f_{acc'} f_{bcc'} = 3\delta_{ab}$$

где  $C_A = 3$  получается усердным суммированием по немим индексам <sup>9</sup>

#### 7.4.4 1.4 Physical tradition for generators of $\mathfrak{su}(3)$

На рис. 2.2 мы изобразили пару простых положительных корней с разным выбором ортонормированных осей на плоскости. Выбор осей, вдоль которых откладываются значения компонент корневых векторов, имеет произвол, обусловленный ортогональными преобразованиями в подпространстве генераторов подалгебры Картана, как мы это описали при введении базиса Картана-Вейля и весовых векторов в формулах (I.3.3)-(I.3.6) на стр. 34, поскольку ортогональные преобразования сохраняют как конформно плоский вид метрики (II.1.17), так и конформный фактор  $C_A$ , что важно для однозначного выбора генераторов алгебры Ли.

Элементы ортонормированного базиса двумерного пространства корней и весов, для которых мы ввели обозначения на стр. 37 в виде номеров  $\mathbf{l}$ , допускают преобразования за счет следующей степени свободы в своем определении: проекции простых положительных корней должны удовлетворять условиям (обратите внимание на номера простых положительных корней в скалярных произведениях!)

$$(\alpha_1, \mathbf{1}) > 0, \quad (\alpha_2, \mathbf{1}) \geq 0 \cup \{(\alpha_2, \mathbf{2}) > 0, \text{ если } (\alpha_2, \mathbf{1}) = 0\}.$$

Простейший выбор осей на плоскости  $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$  получается, если первая орта  $\mathbf{1}$  ортогональна второму простому положительному корню  $(\mathbf{1}, \alpha_2) = 0$ , а вторая орта  $\mathbf{2}$

<sup>7</sup> Согласно решению задачи 12 в разделе 2.3 Главы 1 2 на стр. 33 для опускания и поднимания тензорных индексов в касательном пространстве группы используют символ Кронекера вместо метрики и обратной метрики Киллинга. Эта договоренность в сообществе физиков не меняет тензорных свойств объектов, так как  $g_{ab} = C_A \delta_{ab}$ , где  $C_A$  - скаляр, и этот факт затем учитывается во всех определениях и формулах, что делает формулы компактней.

<sup>8</sup> Эти структурные константы записаны в осях, где явно выделена подалгебра  $\mathfrak{su}(2)$ , образованная изоспином, проекцию которого задает  $\Gamma_3$ .

<sup>9</sup> Суммирование можно провести в уме, положив в II.1.21  $a = b = 1$  и глядя в таблицу II.1.20.

совпадает с  $\alpha_2$ , в то время как проекция первого положительного корня на первую орту положительна, что в случае  $\mathfrak{su}(3)$  (см. рис. 2.2) означает

$$(\alpha_1, \mathbf{1}) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \quad (\alpha_2, \mathbf{1}) = 0, \quad (\alpha_1, \mathbf{2}) = -\frac{1}{2}, \quad (\alpha_2, \mathbf{2}) = 1$$

После того, как система простых положительных корней задана в исходном базисе  $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ , имеет смысл провести замену групповых координат, которая преобразует базис  $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$  в базис осей  $(x, y)$  так, как это обычно принято в физических приложениях. Напомним, что такое преобразование просто означает переход от одного набора генераторов подалгебры Картана к другому, в котором формулируются свойства базисных состояний неприводимых представлений, т.е. описываются собственные значения физических величин, соответствующих выбору набора генераторов подалгебры Картана. Так как выбор системы простых положительных корней алгебры уже полностью определен, становится неважно, в каком базисе на двумерной плоскости проводится описание компонент корневой системы алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ . Преимуществом проведенных построений является тот простой факт, что веса и, как следствие, корни — это векторы, компоненты которых преобразуются по закону векторного анализа вместе с преобразованием набора генераторов подалгебры Картана, связанного с преобразованием групповых координат (см. описание на стр. 34 после формулы (I.3.2)). Поэтому перейдем к базису, который получается из  $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$  поворотом на  $30^\circ$  по часовой стрелке, как это показано на рис. 2.2. чтобы направить ось  $x$  вдоль  $\alpha_1 \equiv \alpha$ , первого из простых положительных корней в базисе  $\mathbf{l}$ . Тогда координаты простых положительных корней в базисе  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$

$$\alpha_1 = \alpha = (1, 0), \quad \alpha_2 = \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Из этого явного вида следует, что после проведенной нами замены базиса в пространстве генераторов подалгебры Картана старшинство простых положительных корней определяется не в прямом, а в обратном порядке следования компонент: сначала по оси  $y$ , а потом по оси  $x$ , так что  $\alpha_2$  старше, чем  $\alpha_1$ , поскольку  $x$ -компонента у  $\alpha_2$  отрицательная, и при прямом порядке следования старшинства компонент это корень следовало бы считать отрицательным, а не положительным. При обратном порядке следования компонент при определении старшинства корней ситуация становится стандартной, и тогда старший вес мультиплета неприводимого представления несет самое большое значение координаты  $y$  среди весов мультиплета и затем еще и самое большое значение координаты  $x$  среди весов мультиплета с максимальным значением координаты  $y$ , как и у старшего веса. Таким образом старшинство корней и весов задается правилом перемещения при поиске старшего веса или корня «вверх-направо».

Коммутирующие генераторы подалгебры Картана в физической традиции обозначают парой

$$\hat{\Gamma}_3 = \hat{T}_3, \quad \hat{\Gamma}_8 = \hat{Y} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

которые известны по исторически сложившимся в кварковой теории адронов именами «проекция изоспина» и «гиперзаряд  $Y$ », соответственно.

Так как группа  $SU(2)$ , очевидно, является подгруппой  $SU(3)$ , мы согласуем наш выбор нормировки простых положительных весов и метрики Киллинга с проведенным ранее на стр. 69 рассмотрением алгебры  $\mathfrak{su}(2)$ .

Отличные от нуля компоненты метрики Киллинга в базисе Картана-Вейля (I.3.44 для генераторов подалгебры Картана равны  $g_{ll'} = \Omega^2 \delta_{ll'}$ , а для простых положительных корней  $-g_{\alpha\beta} = \Omega^2 \delta_{\alpha,-\beta}$ . В

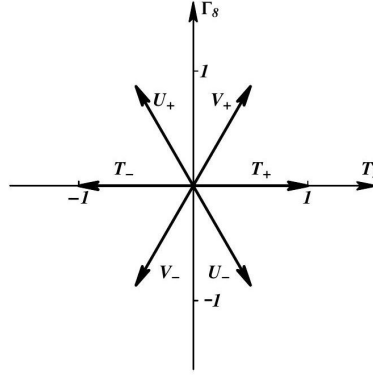


Рис. 2.3: Корневые векторы алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  на плоскости  $\{T_3, T_8\}$ .

терминах эрмитово самосопряженных генераторов мы полагаем равной

$$g_{ab} = C_A \delta_{ab}, \quad a, b \in \{\overline{1, 8}\}, \quad C_A = \Omega^2 > 0$$

(II.1.17)

Для того, чтобы освежить в изложении вопросы с введением конформно плоской метрики Киллинга, отошлем читателя к задаче 12 в разделе 2.3 Главы 1, 2 на стр. 31, где дано также определение индекса Дынкина (I.2.43) и обсуждается введение формулы (I.2.44), идентичной (II.1.17). Вычисление  $C_A$  мы отложим до момента, когда будут описаны неприводимые представления (см. 2 Главы 2), к которым относится и присоединенное представление группы  $SU(N)$  (см. раздел 2.4 Главы 2). Авансом заметим, что конформный фактор  $\Omega^2$  для конформно плоской метрики зависит от группы и для  $SU(N)$  равен  $C_A = N$ .

Для повышающих генераторов введем обозначения, аналогичные введенному для  $\mathfrak{su}(2)$  символу повышающего оператора момента  $j_+$  (см. соотношения (II.1.2),

$$\frac{\hat{T}_+}{\sqrt{2}} = \Gamma_\alpha, \quad \frac{\hat{U}_+}{\sqrt{2}} = \Gamma_\beta$$

Корни лестничных операторов - двумерные векторы - принято обозначать на диаграммах так же, как и отвечающие им генераторы, символами жирного шрифта без шляпки, которая относится к операторам,  $\alpha \mapsto \mathbf{T}_+$  и  $\beta \mapsto \mathbf{U}_+$  (см. рис. 2.2 и 2.3).

В принятых координатах на плоскости  $\{\hat{T}_3, \hat{T}_8\}$  (см. рис. 2.3 простые положительные корневые векторы

$$\mathbf{T}_+ = (1, 0), \quad \mathbf{U}_+ = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

а их сумма задает положительный корень  $\alpha + \beta = \gamma \equiv \mathbf{V}_+$

$$\mathbf{V}_+ = \mathbf{T}_+ + \mathbf{U}_+ = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

и отвечающий этому корню генератор, который обозначается тем же символом со шляпкой,

$$\hat{V}_+ = \sqrt{2}\Gamma_{\alpha+\beta} = \sqrt{2}\Gamma_\gamma$$

Заметим, что умножение генераторов из корневого дополнения алгебры на любой множитель не меняет их основного свойства - преобразования базисного состояния, которое является собственным для генераторов подалгебры Картана, с одним весовым вектором в другое состояние, тоже собственное и отличающееся весовым вектором от начального на величину корневого вектора, который в рамках физической традиции обозначен так же, как и генератор. Поэтому лестничные генераторы в физической традиции умножены на  $\sqrt{2}$ , и это изменит коэффициенты в коммутационных соотношениях, а вот длины корней как разностей весов, т.е. собственных значений, останутся единичными по длине (в уже заданной системе единиц измерения).

Понижающие генераторы с корнями противоположного знака, также как и повышающие генераторы, определяют коммутационные соотношения с генераторами наблюдаемых величин согласно построению базиса Картана-Вейля (I.3.44),

$$[\Gamma_l, \Gamma_\alpha] = \alpha_l \Gamma_\alpha, \quad [\Gamma_l, \Gamma_{-\alpha}] = -\alpha_l \Gamma_{-\alpha}$$

Эти коммутаторы не зависят от нормировки повышающих операторов, в то время как компоненты корневых векторов  $\alpha_l$  просто определяются выбранным ортонормированным базисом в векторном пространстве весов, так что, подставляя численные значения координат из (II.1.24) и (II.1.25), найдем

$$\begin{aligned} [\hat{T}_3, \hat{T}_\pm] &= (\mathbf{T}_\pm)_x \hat{T}_\pm = \pm \hat{T}_\pm, & [\hat{T}_3, \hat{U}_\pm] &= (\mathbf{U}_\pm)_y \hat{U}_\pm = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{U}_\pm, & [\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] &= (\mathbf{V}_\pm)_y \hat{V}_\pm = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{V}_\pm \\ [\hat{\Gamma}_8, \hat{T}_\pm] &= (\mathbf{T}_\pm)_y \hat{T}_\pm = 0, & [\hat{\Gamma}_8, \hat{U}_\pm] &= (\mathbf{U}_\pm)_y \hat{U}_\pm = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{U}_\pm, & [\hat{\Gamma}_8, \hat{V}_\pm] &= (\mathbf{V}_\pm)_y \hat{V}_\pm = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{V}_\pm \end{aligned} \quad [\hat{T}_3, \hat{U}_\pm]$$

Коммутаторы повышающих операторов с соответствующими им понижающими

$$[\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] = \alpha_l \Gamma_l$$

с учетом перемасштабирования (II.1.23) примут вид

$$\begin{aligned} [\hat{T}_+, \hat{T}_-] &= [\sqrt{2}\Gamma_\alpha, \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha}] = 2\alpha_l \Gamma_l \\ [\hat{U}_+, \hat{U}_-] &= [\sqrt{2}\Gamma_\beta, \sqrt{2}\Gamma_{-\beta}] = 2\beta_l \Gamma_l \\ [\hat{V}_+, \hat{V}_-] &= [\sqrt{2}\Gamma_\gamma, \sqrt{2}\Gamma_{-\gamma}] = 2\gamma_l \Gamma_l \end{aligned}$$

т.е. при подстановке в правую часть коммутатора численных значений координат из (II.1.24) и (II.1.25), примут вид

$$\begin{aligned} [\hat{T}_+, \hat{T}_-] &= 2(\mathbf{T}_+)_x \hat{T}_3 + 2(\mathbf{T}_+)_y \hat{\Gamma}_8 = 2\hat{T}_3 \\ [\hat{U}_+, \hat{U}_-] &= 2(\mathbf{U}_+)_x \hat{T}_3 + 2(\mathbf{U}_+)_y \hat{\Gamma}_8 = -\hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{\Gamma}_8 \\ [\hat{V}_+, \hat{V}_-] &= 2(\mathbf{V}_+)_x \hat{T}_3 + 2(\mathbf{V}_+)_y \hat{\Gamma}_8 = \hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{\Gamma}_8 \end{aligned}$$

Здесь стоит подчеркнуть, что генераторы «изоспина»  $\hat{T}_3$  и  $\hat{T}_\pm$  в точности воспроизводят коммутационные соотношения для момента импульса, что вполне оправдывает принятое для них название.

По виду коммутаторов (II.1.27) вводят наблюдаемые величины

$$\hat{U}_3 = \frac{1}{2} \left( -\hat{T}_3 + \frac{3}{2} \hat{Y} \right), \quad \hat{V}_3 = \frac{1}{2} \left( \hat{T}_3 + \frac{3}{2} \hat{Y} \right)$$

в терминах которых коммутаторы повышающих генераторов с понижающими сводятся к стандартным соотношениям в алгебре изоспина (s  $\mathfrak{su}(2)$  в математической терминологии)

$$\left[ \hat{T}_+, \hat{T}_- \right] = 2\hat{T}_3, \quad \left[ \hat{U}_+, \hat{U}_- \right] = 2\hat{U}_3, \quad \left[ \hat{V}_+, \hat{V}_- \right] = 2\hat{V}_3$$

что позволяет говорить не только о  $T$ -изоспине, но и о  $U$  - и  $V$ -изоспине в алгебре  $\mathfrak{su}(3)$ . Каждый такой изоспин связан с одной из трех осей трех пар корневых векторов на рис. 2.1

Для замкнутости изложения повторим некоторые выводы «математизированного» изложения предыдущего раздела в физических терминах, которые мы используем в этом разделе: структурные константы  $N_{\alpha, \beta}$  в базисе Картана-Вейля в коммутационном соотношении для простых положительных корней типа

$$[\Gamma_{\alpha}, \Gamma_{\beta}] = N_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha + \beta}$$

как мы установили в (I.4.24, принимают значения

$$N_{\alpha, \beta}^2 = -(\alpha, \beta)$$

что в случае  $\mathfrak{su}(3)$

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}$$

Тогда с учетом перемасштабирования повышающих генераторов (II.1.23) и определения

$$\Gamma_{\gamma} \equiv \Gamma_{\alpha + \beta} = \frac{\hat{V}_+}{\sqrt{2}}$$

из

$$\left[ \sqrt{2} \Gamma_{\alpha}, \sqrt{2} \Gamma_{\beta} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 \Gamma_{\alpha + \beta}$$

находим

$$\left[ \hat{T}_+, \hat{U}_+ \right] = \hat{V}_+$$

что после эрмитова сопряжения 10 дает также

$$\left[ \hat{T}_-, \hat{U}_- \right] = -\hat{V}_-$$

Наконец, мы установили ранее (см. стр. 53

$$N_{-\alpha, \beta + \alpha} = N_{\beta + \alpha, -\beta} = N_{-\beta, -\alpha} = N_{\alpha, \beta},$$

откуда согласно (II.1.30 и (II.1.31) сразу получаем

$$\left[ \hat{T}_-, \hat{V}_+ \right] = \hat{U}_+, \quad \left[ \hat{V}_+, \hat{U}_- \right] = \hat{T}_+$$

и для эрмитово сопряженных к ним коммутаторов

$$\left[ \hat{T}_+, \hat{V}_- \right] = -\hat{U}_-, \quad \left[ \hat{V}_-, \hat{U}_+ \right] = -\hat{T}_-$$

Отсутствие корней вида  $\alpha + \gamma = 2\alpha + \beta$  и  $\beta + \gamma = 2\beta + \alpha$  приводит согласно (II.1.10) к коммутаторам

$$[\hat{T}_+, \hat{V}_+] = [\hat{U}_+, \hat{V}_+] = 0$$

а их эрмитово сопряжение дает

$$[\hat{T}_-, \hat{V}_-] = [\hat{V}_-, \hat{U}_-] = 0$$

Формулы [II.1.26- (II.1.35 перечисляют все варианты коммутаторов генераторов алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ , и из них можно восстановить структурные константы группы  $SU(3)$  в базисе эрмитово самосопряженных генераторов, если перейти к операторам  $\Gamma_a$ , для которых метрика Киллинга принимает конформно плоский вид (II.1.17), так что в полном соответствии с определениями предыдущего раздела

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \frac{1}{2}(\hat{T}_+ + \hat{T}_-), & \Gamma_2 &= -\frac{i}{2}(\hat{T}_+ - \hat{T}_-) \\ \Gamma_4 &= \frac{1}{2}(\hat{V}_+ + \hat{V}_-), & \Gamma_5 &= -\frac{i}{2}(\hat{V}_+ - \hat{V}_-) \\ \Gamma_6 &= \frac{1}{2}(\hat{U}_+ + \hat{U}_-), & \Gamma_7 &= -\frac{i}{2}(\hat{U}_+ - \hat{U}_-), \\ \Gamma_3 &= \hat{T}_3, & \Gamma_8 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{Y}.\end{aligned}$$

и

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = if_{ab}^c \Gamma_c, \quad a, b, c \in \{\overline{1}, 8\}$$

причем антисимметричные структурные константы  $f_{abc}$  уже приведены нами 11 в [II.1.20.

Квадратичный оператор Казимира согласно формуле (I.2.45) на стр. 33 в случае метрики Киллинга, пропорциональной символу Кронекера, -

$$C_2 = \sum_{a=1}^8 \Gamma_a \Gamma_a$$

в силу (II.1.18) можно выразить через повышающие и понижающие операторы

$$C_2 = \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \frac{1}{2}(\hat{T}_+ \hat{T}_- + \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{V}_+ \hat{V}_- + \hat{V}_- \hat{V}_+ + \hat{U}_+ \hat{U}_- + \hat{U}_- \hat{U}_+)$$

С помощью коммутационных соотношений (II.1.27) легко преобразовать к виду, где все повышающие операторы стоят справа,

$$\begin{aligned}C_2 &= \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{T}_3 + \hat{V}_- \hat{V}_+ - \frac{1}{2}\hat{T}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\Gamma}_8 + \hat{U}_- \hat{U}_+ + \frac{1}{2}\hat{T}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\Gamma}_8 = \\ &= \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{V}_- \hat{V}_+ + \hat{U}_- \hat{U}_+ + \hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{\Gamma}_8\end{aligned}$$

Подчеркнем, что, во-первых, в теории неприводимых представлений вводится состояние со старшим весом  $|\mu_S\rangle$ , так что действие всех повышающих операторов на состояние старшего веса дает нуль,

<sup>10</sup> Вместо эрмитова сопряжения коммутаторов можно напрямую использовать то, что  $N_{\alpha, \beta} = N_{-\beta, -\alpha} = -N_{-\alpha, -\beta}$ .

<sup>11</sup> Эти структурные константы записаны в осях, где явно выделена подалгебра  $\mathfrak{su}(2)$ , образованная  $T$ -изоспином. Ясно, что повороты осей отсчета собственных значений генераторов подалгебры Картана - проекций весов позволяют также выделять подалгебры  $\mathfrak{su}(2)$ , образованные  $U$  - и  $V$ -изоспинами.



$$\hat{T}_+ |\mu_S\rangle = \hat{U}_+ |\mu_S\rangle = \hat{V}_+ |\mu_S\rangle = 0.$$

Во-вторых, собственное значение оператора Казимира для всех состояний неприводимого представления является одним и тем же, так что вычисление значения квадратичного инварианта может быть сведено к суммированию вкладов от действия на состояние старшего веса тех членов в (II.1.39), которые выражены через генераторы подалгебры Картана,

$$C_2 |\mu_S\rangle = \left( \hat{T}_3^2 + \hat{\Gamma}_8^2 + \hat{T}_3 + \sqrt{3}\hat{\Gamma}_8 \right) |\mu_S\rangle$$

и, следовательно, собственное значение  $C_2$  дается в виде алгебраического полинома второй степени от собственных чисел генераторов подалгебры Картана.

Примеры вычисления квадратичного оператора Казимира для разных неприводимых представлений приводятся при рассмотрении задач для группы  $SU(N)$  в конце раздела 4.6 Главы 2, 4. Общее же выражение в терминах индекса Дынкина  $T_R$  (I.2.43) для неприводимого представления  $R$  размерности  $\mathcal{D}_R$  (см. задачу 12 и формулы на стр. 33) имеет вид

$$C_2^R = T_R \frac{\mathcal{D}_{\text{ad}}}{\mathcal{D}_R}$$

## 7.5 2. Irreducible representations

Базисное состояние старшего веса неприводимого представления и квантовые числа базисных состояний, единственность состояния старшего веса неприводимого представления, ранг простой компактной группы и число независимых инвариантов Казимира, рекуррентное соотношение нормировки состояний при действии понижающего оператора, фундаментальные векторы алгебры Ли и формула для старшего веса произвольного неприводимого представления, фундаментальные представления, действие генераторов алгебры в пространстве тензорного произведения состояний неприводимых представлений, зеркальная симметрия состояний неприводимого представления, корневые векторы как веса состояний присоединенного представления и группа Вейля.

Пусть генераторы группы Ли действуют в некотором пространстве состояний. При этом может оказаться, что всякое действие группы преобразований в некотором подпространстве переводит его состояния в суперпозиции этого же подпространства квантовых состояний. Такое подпространство называется инвариантным относительно действия группы. Очевидно, что для описания действия группы в пространстве состояний достаточно рассмотреть преобразования в инвариантных подпространствах, которые уже не содержат в себе инвариантных подпространств, кроме его самого или нуля. В таком случае говорят, что имеет место неприводимое представление группы преобразований состояний.

Опишем, как строится неприводимое представление простой компактной группы Ли, которой отвечает связная диаграмма Дынкина. Для этого необходимо взять какое-либо допустимое ненулевое базисное собственное состояние с квантовыми числами, под которыми мы понимаем маркер собственных значений полного набора наблюдаемых. Этот набор квантовых чисел включает в себя независимые инварианты - собственные значения независимых операторов Казимира - и собственные значения генераторов из подалгебры Картана, а, в случае неполноты уже перечисленных наблюдаемых, еще и эрмитовы операторы, которые делают набор наблюдаемых полным, т.е. описывают вырождение, или число базисных состояний, соответствующих одному и тому же набору

части квантовых чисел, заданных собственными значениями операторов Казимира и генераторов подалгебры Картана. Нетривиальный термин «вырождение» введен физиками, которые при исследовании физических состояний материи обнаружили, что в ряде систем введенному набору квантовых чисел соответствует более одного состояния. На языке набора наблюдаемых это означает, что набор наблюдаемых и квантовых чисел оказывается неполным, и нужно искать дополнительные физические характеристики, чтобы отличать эти состояния <sup>12</sup>. Затем необходимо подействовать на это базисное состояние произвольными элементами группы, получая таким образом другие квантовые состояния, так как повышающие и понижающие, т.е. лестничные операторы просто изменяют собственные значения тех наблюдаемых, которые не являются инвариантами группы, а затем взять линейную оболочку найденных таким способом состояний, т.е. всех образов многократного действия элементов группы на исходный базисный вектор состояния. Можно сказать, что такая линейная оболочка образов многократного действия на исходное квантовое состояние генераторами алгебры Ли образует класс эквивалентности исходного базисного элемента. Для введения класса эквивалентности необходимо установить справедливость двух постулатов: взаимности и транзитивности. Постулат взаимности утверждает, что любой элемент из класса эквивалентности исходного элемента определяет свое множество эквивалентных элементов, которому принадлежит и исходный элемент: если  $a \cong b$ , то  $b \cong a$ . Постулат транзитивности утверждает, что, если первый и второй элементы множества принадлежат одному классу эквивалентности, а второй и третий элементы также принадлежат одному классу эквивалентности, то первый и третий элементы принадлежат одному классу эквивалентности: если  $a \cong b$ ,  $b \cong c$ , то  $a \cong c$ . Класс эквивалентности по построению образует инвариантное подпространство состояний: всякий отличный от нулевого элемент класса эквивалентности может быть преобразован при действии группы с точностью до множителя в любой другой элемент класса. В таком инвариантном подпространстве нет других инвариантных подпространств, т.е. других классов эквивалентности исходных состояний <sup>13</sup>. Для решения задачи о построении неприводимого представления необходимо установить ограничения на выбор исходного состояния и результаты действия на него элементов группы.

Прежде всего, исходное состояние характеризуется некоторыми собственными значениями инвариантов группы - операторов Казимира, которые не изменяются при действии группы, следовательно, исходное состояние неприводимого представления не может быть суперпозицией состояний с разными значениями одного и того же оператора Казимира, так как тогда действие преобразований группы привело бы к нескольким инвариантным подпространствам взаимно ортогональных состояний с разными значениями одного и того же оператора Казимира. В этой ситуации нарушалось бы условие взаимности элементов одного класса эквивалентности: элемент с одним собственным значением оператора Казимира не может быть преобразован в элемент с другим собственным значением этого же оператора Казимира, хотя в линейной оболочке образов действия группы на суперпозицию элементов с двумя разными собственными значениями оператора Казимира содержится элемент с определенным собственным значением этого оператора Казимира. Итак, мы устанавливаем признак неприводимости: исходный элемент класса эквивалентности неприводимого представления с необходимостью должен быть собственным состоянием всех

<sup>12</sup> Мы увидим, что вырождение весового вектора неприводимого представления возникает тогда, когда, например, в компактной простой группе есть компактные простые подгруппы меньшей размерности, которые не могут быть инвариантными подгруппами по условию простоты группы, но определяют свои внутренние инварианты относительно преобразований подгруппы, так что один и тот же весовой вектор может отвечать состояниям с разными значениями этих подгрупповых инвариантов, а это и означает описание вырождения с помощью этих инвариантов подгрупп.

независимых инвариантов Казимира.

Мы рассматриваем только пространства состояний с конечномерным базисом: для этого необходимо, чтобы ранг группы был конечен, а значит, конечно число независимых инвариантов. Тогда среди базиса неприводимого представления группы удобно выбрать такое состояние, действие на которое всех повышающих операторов алгебры группы дает нуль. Подобное состояние  $|\mu_S\rangle$ , как мы знаем по опыту квантования момента вращения, называется старшим (в физической литературе - «старший вектор состояния», в нашем изложении мы предпочтительно используем термин «состояние старшего веса» в целях более ясного разграничения понятий элементов в различных векторных пространствах: весовые и корневые векторы, базисные векторы неприводимого представления, - в согласии с замечанием после формулы [I.3.6 на стр. 34): значения собственных чисел  $\mu$  из полного набора наблюдаемых у такого состояния не могут быть повышены,

$$\Gamma_\alpha |\mu_S\rangle = 0$$

Существование старшего вектора состояния в неприводимом представлении конечной размерности можно установить, пользуясь определением старшего веса, которое мы дали на стр. 35. это положительный вес, у которого значение первой ненулевой компоненты  $\mu_l$  максимально среди всего множества весов неприводимого представления, и после такого выбора множества весов с максимальной первой компонентой такая же процедура отбора повторяется затем в этом множестве по второй компоненте веса, затем аналогично по третьей и так далее, так что максимальны и все последующие значения компонент веса по порядку при условии фиксированных согласно процедуре отбора значений предыдущих компонент. Отсюда сразу следует, что действие генератора любого положительного корня на состояние со старшим весом  $|\mu_S\rangle$  в данном неприводимом представлении приводило бы к состоянию с весом, старше, чем  $\mu_S$ , что противоречит самому определению старшего веса.

Вследствие положительной определенности квадратичного оператора Казимира  $C_2$  для компактной простой алгебры Ли групповой инвариант  $C_2$  можно представить как сумму квадратичных эрмитовых выражений, которая берется по генераторам в подалгебре Картана  $\Gamma_l$  и по генераторам  $\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}$  корневого дополнения подалгебры Картана. Здесь  $\gamma_{\tilde{m}}$  - это все положительные корни, а

$$\tilde{m} \in \left\{ 1, \frac{1}{2} (N_g - n) \right\}.$$

В базисе Картана-Вейля (I.3.44, в котором метрика Киллинга диагональна и пропорциональна символу Кронекера  $g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab}$  с конформным фактором  $\Omega^2 > 0$ , в обратной метрике  $g^{ab} = \delta^{ab}/\Omega^2$  обычно опускают конформный фактор и определяют квадратичный оператор Казимира (с тильдой)  $\tilde{C}_2 = \delta^{ab} \Gamma_a \Gamma_b = \Gamma_a \Gamma_a$  (см. стр. 33 и формулу (I.2.45),

$$\tilde{C}_2 = \Gamma_a \Gamma_a = \Gamma_l \Gamma_l + \sum_{\tilde{m}} (\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} + \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}})$$

Отсюда находим, что каждый вклад в среднее значение  $C_2$  неотрицателен, так как для эрмитово самосопряженных генераторов подалгебры Картана

$$\langle \mu | \Gamma_l \Gamma_l | \mu \rangle = \langle \mu | \Gamma_l \mu_l | \mu \rangle = \mu_l \mu_l \langle \mu | \mu \rangle = (\mu, \mu) \langle \mu | \mu \rangle > 0$$

а для лестничных генераторов имеет место связь генераторов

---

13 Этого не может произойти, если выполнены постулаты взаимности и транзитивности в определении соотношения эквивалентности.

$$\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} = \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}^\dagger$$

откуда среднее произведения генераторов выражается через норму состояния

$$|\psi\rangle = \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle$$

поскольку

$$\langle\psi|\psi\rangle = (\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle)^\dagger \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle = \langle\mu| \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}^\dagger \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle = \langle\mu| \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} |\mu\rangle \geq 0$$

Значит, среднее значение квадратичного оператора Казимира по состоянию представления

$$\langle\tilde{C}_2\rangle \equiv \langle\mu|C_2|\mu\rangle = (\mu, \mu) + \left\langle\mu \left| \sum_{\tilde{m}} (\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} + \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}) \right| \mu \right\rangle \geq (\mu, \mu)$$

Если в этом среднем использовать старший вектор состояния, то, во-первых, действие любого повышающего генератора на вектор старшего веса равно нулю, и вклад вида

$$\left\langle \mu_S \left| \sum_{\tilde{m}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} \right| \mu_S \right\rangle = 0$$

а во-вторых, с помощью выражения для коммутатора двух генераторов с противоположными значениями корней

$$[\Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}}, \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}}] = (\gamma_{\tilde{m}})_l \Gamma_l \Rightarrow \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} = \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} + (\gamma_{\tilde{m}})_l \Gamma_l$$

можно вычислить вклад

$$\begin{aligned} \left\langle \mu_S \left| \sum_{\tilde{m}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \right| \mu_S \right\rangle &= \left\langle \mu_S \left| \sum_{\tilde{m}} (\Gamma_{-\gamma_{\tilde{m}}} \Gamma_{\gamma_{\tilde{m}}} + (\gamma_{\tilde{m}})_l \Gamma_l) \right| \mu_S \right\rangle = 0 + \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}})_l \langle \mu_S | \Gamma_l | \mu_S \rangle = \\ &= \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}})_l (\mu_S)_l \langle \mu_S | \mu_S \rangle = \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}}, \mu_S) \langle \mu_S | \mu_S \rangle = \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}}, \mu_S) \end{aligned}$$

где мы приняли, что вектор состояния нормирован на единицу,

$$\langle \mu_S | \mu_S \rangle = 1$$

В дальнейшем изложении мы всегда полагаем, что все базисные состояния пространства представления с определенным весом являются нормированными на единицу.

В итоге, среднее значение квадратичного оператора Казимира в состоянии старшего веса совпадает с его собственным значением в неприводимом представлении и выражается через положительные корни и старший вес 14

$$\langle\tilde{C}_2\rangle = (\mu_S, \mu_S) + \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}}, \mu_S)$$

В определении состояния старшего веса  $|\mu_S\rangle$  (в англоязычной литературе - highest weight, мы же используем индекс  $S$  от слова senior) участвуют не только простые положительные корни, но и восстановленные по ним согласно схеме Дынкина все другие положительные корни, представимые как целочисленные суперпозиции простых 15. Следовательно, все остальные состояния неприводимого представления получаются

действием на состояние старшего веса только понижающих операторов, так как иначе при наличии хотя бы одного повышающего оператора можно было бы его переставлять с понижающими, пользуясь коммутационными соотношениями, до тех пор, пока повышающий оператор не подействует на состояние старшего веса и даст тем самым нулевой результат.

В самом деле, так как базис состояний неприводимого представления конечен, всякое базисное состояние этого представления, отличное от состояния старшего веса, можно представить как результат действия суперпозиции произведений лестничных генераторов  $\Gamma_{\gamma_n}$  конечной степени однородности на состояние старшего веса, что и определяет класс эквивалентности для состояния старшего веса, которому принадлежит всякое базисное состояние в неприводимом представлении,

$$|\nu\rangle = \sum_{k < k_{\max}} c'_{n_k, \dots, n_1} \Gamma_{\gamma_{n_k}} \cdots \Gamma_{\gamma_{n_1}} |\mu_S\rangle, \quad \nu \neq \mu_S$$

В рамках метода математической индукции предположим, что при действии на базисное состояние старшего веса при получении нового базисного состояния с весом  $\nu \neq \mu_S$  произведение  $k$  генераторов из алгебры Ли сводится к линейной комбинации только понижающих генераторов степени не выше  $k$

$$\Gamma_{\gamma_{n_k}} \cdots \Gamma_{\gamma_{n_1}} |\mu_S\rangle \Big|_{|\nu\rangle \neq |\mu_S\rangle} = \sum_{p \leq k} c_{i_p, \dots, i_1} \Gamma_{-\alpha_{i_p}} \cdots \Gamma_{-\alpha_{i_1}} |\mu_S\rangle$$

что, очевидно, справедливо при  $k = 1$ , поскольку любой повышающий оператор по определению старшего вектора дает нулевой результат, а генератор из подалгебры Картана не меняет ни состояние, ни его вес<sup>16</sup>. Тогда по индукции для произведения генераторов  $k + 1$  степени однородности новые базисные состояния получаются при действии лестничного генератора на произведение понижающих генераторов, т.е.

$$\Gamma_{\gamma_{n_{k+1}}} \Gamma_{\gamma_{n_k}} \cdots \Gamma_{\gamma_{n_1}} |\mu_S\rangle \Big|_{|\nu\rangle \neq |\mu_S\rangle} = \Gamma_{\gamma_{n_{k+1}}} \sum_{p \leq k} c_{i_p, \dots, i_1} \Gamma_{-\alpha_{i_p}} \cdots \Gamma_{-\alpha_{i_1}} |\mu_S\rangle$$

Но при коммутации генераторов получим

$$\Gamma_{\gamma_{n_{k+1}}} \Gamma_{-\alpha_{i_p}} = \Gamma_{-\alpha_{i_p}} \Gamma_{\gamma_{n_{k+1}}} + N_{\gamma_{n_{k+1}}, -\alpha_{i_p}} \Gamma_{(\gamma_{n_{k+1}} - \alpha_{i_p})},$$

где второе слагаемое сводит рассмотрение к произведению генераторов степени  $k$ , т.е. приводит к суперпозиции произведений понижающих генераторов степени не выше  $k$ , а для первого имеется вклад вида

$$\begin{aligned} \Gamma_{-\alpha_{i_p}} \sum_{p \leq k} c_{i_p, \dots, i_1} \Gamma_{\gamma_{n_{k+1}}} \Gamma_{-\alpha_{i_{p-1}}} \cdots \Gamma_{-\alpha_{i_1}} |\mu_S\rangle \Big|_{|\nu\rangle \neq |\mu_S\rangle} &= \\ &= \Gamma_{-\alpha_{i_p}} \sum_{p \leq k} \tilde{c}_{i_{p+1}, i_p, \dots, i_1} \Gamma_{-\alpha_{i_{p+1}}} \Gamma_{-\alpha_{i_{p-1}}} \cdots \Gamma_{-\alpha_{i_1}} |\mu_S\rangle, \end{aligned}$$

где мы опять воспользовались условием индукции. В итоге, случай степени  $k + 1$  сводится к суперпозиции лишь понижающих операторов степени не выше  $k + 1$ , т.е.

<sup>14</sup> математической литературе принято указывать имя автора формулы П.2.3 - Г. Рака.

<sup>15</sup> Достаточно, чтобы действие генераторов для простых положительных корней на состояние старшего веса давало нуль, так как отсюда следует, что и все другие генераторы положительных корней обращают состояние старшего веса в нуль. Доказательство этого утверждения мы предлагаем читателю провести самостоятельно.

действительно все состояния базиса суть результаты действия понижающих генераторов на состояние старшего веса. Отсюда вытекает, что все другие базисные состояния неприводимого представления имеют координаты (веса)

$$\nu = \mu_S - \sum_m k_m \alpha_m$$

где  $k_m \in \{0, \mathbb{N}\}$ , т.е. неотрицательные целые числа, а  $\alpha_m$  - простые положительные корневые векторы алгебры Ли. Это позволяет заключить также, что состояние старшего веса - единственное для данного неприводимого представления. Во-первых, старший вес определен однозначно, и другого старшего веса в неприводимом представлении нет. Во-вторых, состояние со старшим весом невырождено. В самом деле, если есть два разных состояния с одним старшим весом  $|\mu_S\rangle_1$  и  $|\mu_S\rangle_2$ , то среди состояний неприводимого представления, построенного по  $|\mu_S\rangle_1$  есть только состояния, которые получаются действием понижающих операторов, с весами, отличными от  $\mu_S$ . Поэтому среди них нет  $|\mu_S\rangle_2$ . Значит,  $|\mu_S\rangle_2$  не принадлежит неприводимому представлению состояния  $|\mu_S\rangle_1$ . Другими словами, каждое состояние старшего веса порождает свое отдельное пространство неприводимого представления (один класс эквивалентности, который инвариантен относительно действия генераторов алгебры Ли и не содержит в себе инвариантных подпространств).

Этот вывод единственности состояния старшего веса неприводимого представления чрезвычайно важен, так как из него следуют следующие положения:

- поскольку состояние старшего веса однозначно характеризуется набором  $n$  собственных значений наблюдаемых из подалгебры Картана, т.е. компонентами старшего веса, число которых равно рангу группы  $n$ , неприводимое представление однозначно задается набором из  $n$  собственных значений наблюдаемых из подалгебры Картана,
- количество независимых инвариантов - операторов Казимира, т.е. количество образующих в центре алгебры Ли (см. обсуждение при введении операторов Казимира степени  $k$  сразу после определений (I.2.35 и (I.2.36) равно рангу группы  $n$ , так как всякое неприводимое представление однозначно задается набором из  $n$  независимых чисел: либо значениями независимых инвариантов, либо значениями координат старшего веса, а значит, это соответствие между  $n$  компонентами старшего веса неприводимого представления и значениями независимых инвариантов для того же неприводимого представления может быть только взаимно однозначным.

## 7.5.1 2.1 Highest weight and fundamental representations

Установим допустимые значения старшего веса в неприводимом представлении просто компактной группы Ли. Для этого вычислим норму состояния, полученного многократным действием понижающего оператора на состояние старшего веса

$$\Gamma_{-\alpha}^p |\mu_S\rangle \mapsto \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^p \Gamma_{-\alpha}^p | \mu_S \rangle = \mathcal{K}_p$$

где  $\mathcal{K}_p$  - положительная величина, равная квадрату нормы состояния. Стандартный коммутатор повышающего оператора с понижающим выражается через генераторы подалгебры Картана

<sup>16</sup> Из этого замечания почти очевидно, что результат действия однородного полинома генераторов алгебры, сохраняющего состояние старшего веса, совпадает с действием полинома, составленного из генераторов подалгебры Картана. Коэффициенты этого полинома могут зависеть от структурных констант алгебры Ли, которые возникают при коммутации генераторов, но результат действия зависит от неприводимого представления исключительно в виде полинома от компонент старшего веса этого представления.

$$\Gamma_{\alpha}\Gamma_{-\alpha} = \Gamma_{-\alpha}\Gamma_{\alpha} + \alpha_l\Gamma_l$$

так что

$$\mathcal{K}_p = \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-1} | \mu_S \rangle + \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \alpha_l \Gamma_l \Gamma_{-\alpha}^{p-1} | \mu_S \rangle.$$

Но

$$\Gamma_{-\alpha}^{p-1} | \mu_S \rangle \sim | \mu_S - (p-1)\alpha \rangle$$

а

$$\Gamma_l | \mu_S - (p-1)\alpha \rangle = \{(\mu_S)_l - (p-1)\alpha_l\} | \mu_S - (p-1)\alpha \rangle$$

и, следовательно,

$$\alpha_l \Gamma_l \Gamma_{-\alpha}^{p-1} | \mu_S \rangle = \{(\alpha, \mu_S) - (p-1)(\alpha, \alpha)\} \Gamma_{-\alpha}^{p-1} | \mu_S \rangle$$

Значит,

$$\mathcal{K}_p = \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-1} | \mu_S \rangle + \{(\alpha, \mu_S) - (p-1)(\alpha, \alpha)\} \mathcal{K}_{p-1}.$$

Переставляя повышающий оператор дальше вправо по той же схеме, найдем

$$\begin{aligned} \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-1} | \mu_S \rangle &= \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha}^2 \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-2} | \mu_S \rangle + \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \alpha_l \Gamma_l \Gamma_{-\alpha}^{p-2} | \mu_S \rangle = \\ &= \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha}^2 \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-2} | \mu_S \rangle + \{(\alpha, \mu_S) - (p-2)(\alpha, \alpha)\} \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-2} | \mu_S \rangle = \\ &= \langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha}^2 \Gamma_{\alpha} \Gamma_{-\alpha}^{p-2} | \mu_S \rangle + \{(\alpha, \mu_S) - (p-2)(\alpha, \alpha)\} \mathcal{K}_{p-1}. \end{aligned}$$

Повторяя эти шаги ровно  $p$  раз до тех пор, пока повышающий оператор не окажется первым справа и, действуя на состояние старшего веса, не преобразует его в вектор с нулевой нормой,

$$\langle \mu_S | \Gamma_{\alpha}^{p-1} \Gamma_{-\alpha}^p \Gamma_{\alpha} | \mu_S \rangle = 0$$

получим, что

$$\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{p-1} \sum_{k=1}^p \{(\alpha, \mu_S) - (p-k)(\alpha, \alpha)\}$$

Тогда из сумм для арифметических прогрессий

$$\sum_{k=1}^p (p-k) = \frac{1}{2}p(p-1), \quad \sum_{k=1}^p 1 = p$$

установим рекуррентное соотношение

$$\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{p-1} \left\{ p(\alpha, \mu_S) - \frac{1}{2}p(p-1)(\alpha, \alpha) \right\}$$

при очевидном условии нормировки в определении (II.2.5)

$$\mathcal{K}_0 = \langle \mu_S | \mu_S \rangle = 1$$

Однако, так как базис пространства состояний представления конечен, рекуррентия (II.2.6) должна оборваться на некотором  $p_m + 1$  шаге, т.е. норма состояния, полученная

действием  $p_m + 1$  понижающих генераторов  $\Gamma_{-\alpha_m}$ , по необходимости обращается в нуль, что согласно (II.2.6) возможно, только если для всех простых положительных корней простой компактной алгебры Ли, у которой диаграмма Дынкина является связной, числа

$$p_m = 2 \frac{(\mu_S, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \in \{0, \mathbb{N}\}$$

являются неотрицательными целыми и имеют смысл числа шагов понижения старшего веса в каждом из заданных простыми корнями направлений, после которых следующее понижение дает нулевое состояние. В этой связи удобно ввести фундаментальные векторы  $\lambda_j$ , каждый из которых ортогонален всем простым положительным корневым векторам кроме одного и имеет на него фиксированную проекцию, а именно

$$2 \frac{(\lambda_j, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \delta_{jm}$$

Простые положительные корни образуют базис в  $n$ -мерном пространстве корневых и весовых векторов. Определение фундаментальных векторов задает альтернативный базис в том же пространстве. На рис. 2.4 мы показали плоскость двух простых положительных корней и сопряженных им фундаментальных векторов, каждый из которых ортогонален простому положительному корневому вектору с «чужим» номером.

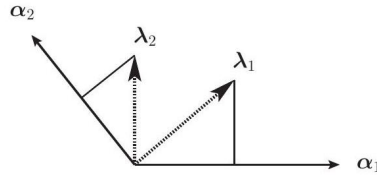


Рис. 2.4: Два простых положительных корня и сопряженные им фундаментальные векторы.

Для примера, если старший вес равен  $\lambda_m$  (мы покажем чуть ниже, что это возможно), то из сравнения (II.2.8 с (II.2.9) получим, что отличный от нуля результат при действии понижающими операторами, отвечающими простым отрицательным корням, на состояние такого старшего веса получится только для  $\Gamma_{-\alpha_m}$ , причем только однократно. Остальные понижающие генераторы дадут нуль пространства состояний при действии на такое состояние старшего веса в силу ортогональности других корней выбранному фундаментальному вектору.

Перепишем формулу [II.2.8 в случае, когда  $j = m$ ,  $\mu_S = \lambda_m$ , а корень  $\alpha_m$  имеет единичную длину,

$$(\lambda_m, \alpha_m) = \frac{1}{2}$$

Ортогональным преобразованием генераторов подалгебры Картана всегда можно сделать корневой вектор  $\alpha_m$  равным  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ . При таком выборе подалгебры Картана мы получаем, что  $m$ -ый фундаментальный вектор, который в нашем примере совпадает со старшим весом представления, равен  $(\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \dots)$ . Тогда

$$p_m = 2 (\lambda_m, \alpha_m) = 1$$

и, следовательно, следующее, второе по счёту действие понижающего генератора  $\Gamma_{-\alpha_m}$  превратит состояние в нулевое. Однократное действие даст

$$\Gamma_{-\alpha_m} |\mu_S\rangle = \Gamma_{-\alpha_m} |\lambda_m\rangle \sim |\lambda_m - \alpha_m\rangle = \left| -\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \dots \right\rangle$$



Таким образом при этом выборе базиса на диаграмме весов мы получаем, что набор собственных значений первого оператора подалгебры Картана  $\Gamma'_1$  сводится к множеству  $\mu_1 = \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$ . Это означает, что  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma_{\pm\alpha_m}$  образуют на первой компоненте пространства весов двумерное представление алгебры  $\mathfrak{su}(2)$ , так как  $\Gamma_{\alpha_m} |(-\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \dots)\rangle \sim |(\frac{1}{2}, (\lambda_m)_2, \dots)\rangle$ .

Продолжая совместное рассмотрение свойств старшего веса и фундаментальных векторов, разложим старший вес по базису фундаментальных векторов

$$\mu_S = \sum_{j=1}^n f_j \lambda_j$$

и найдем коэффициенты  $f_j$ , вычисляя скалярное произведение

$$(\alpha_m, \mu_S) = \sum_{j=1}^n f_j (\alpha_m, \lambda_j) = \sum_{j=1}^n f_j \delta_{jm} \frac{1}{2} (\alpha_m, \alpha_m) = f_m \frac{1}{2} (\alpha_m, \alpha_m)$$

Отсюда

$$\mu_S = \sum_{m=1}^n \lambda_m 2 \frac{(\mu_S, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}$$

После подстановки выражения для  $p_m$  (II.2.8) имеет место следующее разложение по базису фундаментальных векторов

$$\mu_S = \sum_{m=1}^n p_m \lambda_m$$

где неотрицательные целые коэффициенты  $p_m$  равны максимальному числу последовательных шагов понижения старшего веса заданного неприводимого представления в направлениях, которые соответственно заданы простыми положительными корнями  $\alpha_m$  простой компактной алгебры Ли ранга  $n$ . Мы получили интересный результат: компоненты весового вектора состояния старшего веса таковы, что состояние старшего веса имеет вес, который является линейной комбинацией фундаментальных векторов с целочисленными неотрицательными коэффициентами.

Выражение (II.2.10) по сути определяет классификацию всех неприводимых представлений алгебры Ли: неприводимое представление полностью задается своим старшим весом  $\mu_S$ , а старший вес полностью определяется набором чисел  $p_m$ , которые, таким образом, однозначно характеризуют неприводимое представление, и никаких других старших весов быть не может.

Другими словами, какое бы неприводимое представление мы не исследовали, мы получим набор неотрицательных целых чисел  $p_m$ . Но для нас более важным утверждением является условно обратное. Любому набору из  $n$  неотрицательных целых чисел  $p_m$  соответствует неприводимое представление рассматриваемой алгебры Ли.

С этим утверждением связано важное определение. Наборы  $\{p_k\}$ , состоящие из единственной единицы на  $k$ -той позиции и  $n - 1$  нулей, назовем фундаментальными. Каждому такому набору соответствует представление, которое называется фундаментальным. Соответственно, у каждой алгебры Ли ранга  $n$  есть  $n$  фундаментальных представлений. В рамках каждого  $m$ -того фундаментального представления введем обозначение

$$|\mu_S\rangle \equiv |\lambda_m\rangle, \quad \text{при } p_k = \delta_{km}$$

Число фундаментальных векторов по построению равно рангу группы Ли  $n$ . Набор фундаментальных векторов образует альтернативный базис<sup>17</sup> в векторном пространстве корневых векторов наряду с базисом простых положительных корневых векторов. Каждому фундаментальному вектору отвечает фундаментальное представление со старшим вектором представления во множестве

$$|\mu_S\rangle \in \{|\lambda_1\rangle, \dots, |\lambda_n\rangle\}$$

Значит, число различных фундаментальных представлений также равно рангу группы Ли.

## 7.5.2 2.2 Tensor product of fundamental representations

Важно подчеркнуть роль фундаментальных представлений, поскольку старший вес какого-либо неприводимого представления равен сумме фундаментальных векторов с неотрицательными целочисленными коэффициентами. Это значит, само представление можно построить, взяв состояние старшего веса в виде произведения состояний старших весов фундаментальных представлений<sup>18</sup>

$$\mu_S = \sum_m p_m \lambda_m \mapsto |\mu_S\rangle = \prod_m^{\otimes} |\lambda_m\rangle^{p_m}$$

или

$$|\mu_S\rangle = |\lambda_1\rangle^{p_1} \otimes \dots \otimes |\lambda_n\rangle^{p_n}, \quad |\lambda_k\rangle^{p_k} = \underbrace{|\lambda_k\rangle \otimes \dots \otimes |\lambda_k\rangle}_{p_k}$$

и действуя на такое состояние понижающими операторами, которые необходимо доопределить на тензорном произведении пространств фундаментальных представлений как действие прямой суммы изоморфных образов этих генераторов в соответствующих подпространствах тензорного произведения. Например, действие повышающего генератора в тензорном произведении  $\Gamma_{\alpha_k}^{\otimes}$  в случае двух множителей в этой схеме задается в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_k}^{\otimes} (|\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle) &\equiv \{(\Gamma_{\alpha_k} \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \Gamma_{\alpha_k})\} |\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle = \\ &= \Gamma_{\alpha_k} |\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle + |\lambda_m\rangle \otimes \Gamma_{\alpha_k} |\lambda_{m'}\rangle = \mathbf{0} \otimes |\lambda_{m'}\rangle + |\lambda_m\rangle \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Мы видим, что состояние (II.2.12) действительно является состоянием старшего веса. Убедимся, что это состояние имеет вес старшего вектора представления с выбранными ранее неотрицательными целыми коэффициентами  $p_m$ ,

<sup>17</sup> Напомним, что в векторном анализе, если задан базис векторного пространства  $e_a$ , по которому разлагаются все элементы  $\mathbf{v}$  этого пространства  $\mathcal{V} : \mathbf{v} = v^a e_a$ , то базис линейных функций  $f(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ , которые переводят элементы  $\mathcal{V}$  в вещественные числа, - это набор  $h^b(e_a) = \delta_a^b$ . Тогда говорят, что векторы  $\mathbf{h}^b$  - это базис ковариантного векторного пространства, так как введенные связи можно записать в виде скалярных произведений

$$(\mathbf{h}^b, e_a) = \delta_a^b, \quad \mathbf{f} = f_b \mathbf{h}^b, \quad f(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = (f_b \mathbf{h}^b, v^a e_a) = f_b v^a \delta_a^b = f_a v^a$$

где  $f(e_a) = f_a$ . Поэтому можно говорить, что введенное определение фундаментальных векторов [II.2.9] с точностью до коэффициента повторяет определение базиса в ковариантном пространстве, сопряженном контравариантному пространству с базисом, заданным простыми положительными корнями.

$$\Gamma_l^\otimes |\mu_S\rangle = \Gamma_l^\otimes \prod_m^\otimes |\lambda_m\rangle^{p_m} = \left\{ \sum_m p_m (\lambda_m)_l \right\} \prod_m^\otimes |\lambda_m\rangle^{p_m} = (\mu_S)_l |\mu_S\rangle$$

где действие генератора из подалгебры Картана на тензорное произведение векторов определяется опять же как действие прямой суммы изоморфных образов этого генератора в соответствующих подпространствах тензорного произведения. Например,

$$\Gamma_l^\otimes (|\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle) \equiv \{(\Gamma_l \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \Gamma_l)\} |\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle = \{(\lambda_m)_l + (\lambda_{m'})_l\} |\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle$$

С точки зрения физики построение неприводимого представления с помощью состояния старшего веса, которое выражается через состояния старших весов фундаментальных представлений, называется составной моделью: состояния такого неприводимого представления выражаются через произведение состояний фундаментальных представлений, так что можно говорить о том, что квантовые числа состояний неприводимого представления составлены из квантовых чисел состояний фундаментальных представлений: в этом смысле формулы типа (II.2.14 или (II.2.15) играют важную роль, так как собственное значение генератора подалгебры Картана для базисного состояния в тензорном произведении равно сумме собственных значений этого же генератора для базисных состояний в подпространствах тензорного произведения, что и составляет суть утверждения о квантовых числах в составной модели. Например, мы увидим, что из кварков и антикварков, образующих два фундаментальных представления группы ароматов, можно составить состояния барионов (3 кварка) и мезонов (кварк-антикварк). Вместе с тем, состояния неприводимого представления могут трактоваться и не как составные, а самостоятельные, отдельные исходные блоки построения квантовых состояний физической системы. Нет никакого различия между такими толкованиями в рамках чисто математической конструкции, но в физике оно может быть описано с помощью характеристик, которые возникают в процессах преобразования одних физических систем в другие.

Здесь важно подчеркнуть, что описанное нами тензорное произведение состояний со старшими весами фундаментальных представлений относится только к состоянию старшего веса неприводимого представления, а при рассмотрении всего неприводимого представления нужно быть внимательным, так как тензорное произведение пространств даже двух неприводимых представлений может оказаться приводимым: линейная оболочка, построенная из образов состояния старшего веса при действии на него матриц групповых преобразований, вообще говоря, уже, чем пространство тензорного произведения неприводимых представлений. Этот вопрос мы рассмотрим более детально при изучении тензорных произведений неприводимых представлений в группе  $SU(3)$  с помощью схем Юнга.

### 7.5.3 2.3 Reflection operation

Запишем вес  $\nu_{S,m}$  для последнего, отличного от нуля состояния  $|\nu_{S,m}\rangle$ , которое получается в цепочке понижения состояния старшего веса  $|\mu_S\rangle$ , с помощью выражения для максимального числа шагов  $p_m$  в направлении  $-\alpha_m$  согласно (II.2.8),

<sup>18</sup> В этом тензорном произведении обычно подразумевается симметризованная по перестановкам любых фундаментальных векторов сумма. В нашем случае действие генератора алгебры Ли задается как действие симметризованной прямой суммы изоморфных образов генератора в соответствующих подпространствах, так что симметризация тензорного произведения по перестановке его сомножителей неважна. Но в случае, когда на состояния тензорного произведения могут действовать операторы иной, отличной от генераторов алгебры Ли природы, симметризация тензорного произведения может оказаться физически значимой.

$$\boldsymbol{\nu}_{S,m} \equiv \boldsymbol{\mu}_S - p_m \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\mu}_S - 2 \frac{(\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} \boldsymbol{\alpha}_m$$

Геометрический смысл этой формулы достаточно ясен: вес состояния  $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$ , последнего в цепочке состояний с понижением веса, является отражением старшего веса неприводимого представления относительно гиперплоскости с нормалью, заданной повышающим вектором  $\boldsymbol{\alpha}_m$ , поскольку вычисляется проекция на этот повышающий вектор, а затем эта проекция вычитается дважды с учетом нормировки нормали на единицу (см. рис. 2.5). Таким образом, проекция весового вектора  $\boldsymbol{\nu}_{S,m}$  на эту нормаль у состояния  $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$  в цепочке понижения от состояния старшего веса  $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle$  равна проекции старшего весового вектора со знаком минус.

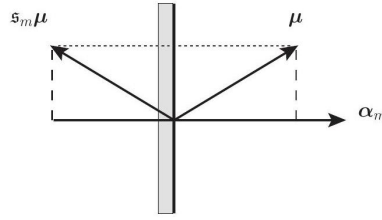


Рис. 2.5: Вейлевское отражение веса  $\boldsymbol{\mu}$  относительно плоскости с нормалью, которая задана корневым вектором  $\boldsymbol{\alpha}_m$ .

Напомним, что базисное состояние старшего веса является единственным для данного веса в неприводимом представлении группы, т.е. кратность вырождения старшего веса равна единице, а значит, мы можем ввести операцию отражения состояния старшего веса как преобразования в другое базисное состояние этого же представления

$$\mathfrak{s}_m |\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$$

где, как мы показали, состояние  $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$  является базисным состоянием того же неприводимого представления и однозначно задается  $p_m$ -кратным действием понижающего генератора  $\Gamma_{-\alpha_m}$  на состояние старшего веса, а действие этой операции отражения на состояние  $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$  совпадает с обратным преобразованием:

$$\mathfrak{s}_m |\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle = |\boldsymbol{\mu}_S\rangle$$

В самом деле, обозначим тем же символом и операцию отражения во множестве весовых векторов неприводимого представления:

$$\mathfrak{s}_m \boldsymbol{\mu}_S = \boldsymbol{\nu}_{S,m}$$

и тогда в полной аналогии с (II.2.16)

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_m \boldsymbol{\nu}_{S,m} &= \boldsymbol{\nu}_{S,m} - 2 \frac{(\boldsymbol{\nu}_{S,m}, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} \boldsymbol{\alpha}_m = \\ &= \boldsymbol{\mu}_S - 2 \frac{(\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} \boldsymbol{\alpha}_m - 2 \frac{1}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} \boldsymbol{\alpha}_m \left( \boldsymbol{\mu}_S - 2 \frac{(\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} \boldsymbol{\alpha}_m \right) = \\ &= \boldsymbol{\mu}_S - 4 \frac{(\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} \boldsymbol{\alpha}_m + 4 \frac{(\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_m)}{(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m)} \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\mu}_S \end{aligned}$$

Но это значит, что, если существует другое состояние  $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}'\rangle$  с тем же весом  $\boldsymbol{\nu}_{S,m}$ , то в этом дополнительном состоянии можно исключить вклад, пропорциональный ортонормированному состоянию  $|\boldsymbol{\nu}_{S,m}\rangle$ ,

$$|\nu_{S,m}\rangle' \mapsto |\nu_{S,m}\rangle' - |\nu_{S,m}\rangle \langle \nu_{S,m} | \nu_{S,m}\rangle'$$

так что после этой замены получим, что дополнительное состояние  $|\nu_{S,m}\rangle'$  ортогонально состоянию  $|\nu_{S,m}\rangle$ , которое получается последовательным  $p_m$ -кратным действием понижающих операторов на состояние старшего веса. В самом деле, операция отражения дополнительного состояния  $|\nu_{S,m}\rangle'$  приведет к состоянию  $|\mu_S\rangle'$  со старшим весом  $\mu_S$ , и это состояние ортогонально исходному состоянию старшего веса, так как для отражений базисных состояний мы постулируем, что операция отражения является эрмитово самосопряженной  $\mathfrak{s}_m^\dagger = \mathfrak{s}_m$ , и с учетом того, что квадрат операции отражений состояний является тождественной операцией, находим, что

$$\begin{aligned} (\mathfrak{s}_m |\nu_{S,m}\rangle)^\dagger (\mathfrak{s}_m |\nu_{S,m}\rangle') &= \langle \nu_{S,m} | \mathfrak{s}_m \mathfrak{s}_m | \nu_{S,m}\rangle' = \langle \nu_{S,m} | \nu_{S,m}\rangle' = 0 \Rightarrow \\ (\mathfrak{s}_m |\nu_{S,m}\rangle)^\dagger (\mathfrak{s}_m |\nu_{S,m}\rangle') &= \langle \mu_S | \mu_S\rangle' = 0. \end{aligned}$$

Но состояние старшего веса неприводимого представления является уникальным в этом представлении, а значит, состояние  $|\mu_S\rangle'$  и его прообраз  $|\nu_{S,m}\rangle'$  не могут принадлежать неприводимому представлению с состоянием старшего веса  $|\mu_S\rangle$ , т.е. эти состояния со штрихом принадлежат другому неприводимому представлению. Поэтому образ состояния старшего веса неприводимого представления  $|\nu_{S,m}\rangle$  - это единственное состояние с весом  $\nu_{S,m}$  в том же неприводимом представлении с состоянием старшего веса  $|\mu_S\rangle$ . При отражениях состояния невырожденного старшего веса неприводимого представления получаются состояния с невырожденными весами, полученными при действии операций отражения во множестве весов.

• В проведенных построениях с состоянием старшего веса мы использовали действие понижающего оператора на это состояние, так что каждый шаг понижения состояния приводил к однозначно определенному состоянию с пониженным значения веса, но при этом не ставили вопрос о том, сколько может быть состояний, отвечающих каждому из пониженных весов: вообще говоря, состояние с пониженным весом может получаться не только многократным действием одного и того же понижающего оператора на состояние старшего веса, а комбинацией действия разных понижающих операторов, так что в каждой из таких комбинаций может возникнуть свое, отличное от состояний в других комбинациях состояние с некоторым пониженным значением веса, и пониженный вес может быть, вообще говоря, вырожденным. Покажем, что в линии состояний, образованных многократным действием одного и того же понижающего оператора  $\Gamma_{-\alpha_m}$ , отвечающего простому положительному корню  $\alpha_m$ , на состояние старшего веса, все пониженные веса невырожденные. После первого шага понижения получится состояние с весом  $\mu_S - \alpha_m$ ,

$$\Gamma_{-\alpha_m} |\mu_S\rangle \sim |\mu_S - \alpha_m\rangle$$

В этом соотношении коэффициент пропорциональности отличен от нуля, если коэффициент  $p_m$  в разложении старшего веса по фундаментальным больше нуля. Согласно (II.2.8) это значит, что скалярное произведение  $(\alpha_m, \mu_S)$  отлично от нуля, а значит, и сама цепочка состояний с понижением содержит состояния, отличные от состояния со старшим весом. Допустим, что существует другое состояние с тем же пониженным значением веса  $|\mu_S - \alpha_m\rangle'$ , в котором мы исключим вклад пропорциональный состоянию  $|\mu_S - \alpha_m\rangle$ , так что

$$\langle \mu_S - \alpha_m | \mu_S - \alpha_m\rangle' = 0.$$

Действие повышающего оператора с тем же значением корня на эти два состояния с пониженным весом должно быть разным, так как для состояния, полученного понижением имеет место восстановление состояния старшего веса:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha_m} |\mu_S - \alpha_m\rangle &\sim \Gamma_{\alpha_m} (\Gamma_{-\alpha_m} |\mu_S\rangle) = (\Gamma_{-\alpha_m} \Gamma_{\alpha_m} + (\alpha_m)_l \Gamma_l) |\mu_S\rangle = \\ &= \Gamma_{-\alpha_m} (\Gamma_{\alpha_m} |\mu_S\rangle) + (\alpha_m)_l (\mu_S)_l |\mu_S\rangle = (\alpha_m, \mu_S) |\mu_S\rangle\end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что состояние отвечает старшему весу и повышающий оператор, действуя на это состояние, дает нуль, а скалярное произведение в конце формулы также отлично от нуля в случае нетривиальной цепочки понижения состояния старшего веса. Действие же повышающего оператора на другое состояние с пониженным весом  $|\mu_S - \alpha_m\rangle'$  может дать только состояние, пропорциональное состоянию старшего веса, так как состояние старшего веса в неприводимом представлении единственное. Вычислим скалярное произведение

$$\langle \mu_S | (\Gamma_{\alpha_m} |\mu_S - \alpha_m\rangle') = (\Gamma_{-\alpha_m} |\mu_S\rangle)^\dagger |\mu_S - \alpha_m\rangle' \sim (|\mu_S - \alpha_m\rangle)^\dagger |\mu_S - \alpha_m\rangle' = \langle \mu_S - \alpha_m | \mu_S - \alpha_m \rangle' = 0$$

Но это значит, что

$$\Gamma_{\alpha_m} |\mu_S - \alpha_m\rangle' = 0$$

т.е., если это состояние отлично от нуля, то оно не может быть повышено оператором  $\Gamma_{\alpha_m}$ . Но состояние с таким весом не может быть повышено и любым другим оператором с простым положительным корнем  $\alpha_{m'}$ , так как

$$\Gamma_{\alpha_{m'}} |\mu_S - \alpha_m\rangle = N' |\mu_S - \alpha_m + \alpha_{m'}\rangle$$

а значит, вес состояния при таком действии изменяется на величину  $\alpha_{m'} - \alpha_m$ . Но вес состояния представления группы может измениться только на корень, независимо, положительный или отрицательный, простой или нет, а разность простых положительных корней, как мы подчеркивали, не может быть корнем, вообще. Значит, нет и состояния, которое указано в формуле выше, т.е. необходимо положить в этой формуле постоянную  $N' = 0$ .

Резюмируя, укажем, что действие всех повышающих генераторов с простыми положительными корнями на дополнительное состояние  $|\mu_S - \alpha_m\rangle'$  дает нуль, т.е. это состояние старшего веса для другого неприводимого представления той же простой компактной группы Ли, и оно не принадлежит неприводимому представлению со старшим весом  $\mu_S$ . Итак, при первом шаге понижения состояния старшего веса получается состояние  $|\mu_S - \alpha_m\rangle$  с невырожденным весом. Однако, подобное рассмотрение не обобщается на случай, когда повышающий генератор изменяет вес на положительный корень, который не является простым. Поэтому вырожденность веса, который не является старшим, требует специального рассмотрения. Особый случай - присоединенное представление, и оно будет рассмотрено нами ниже в отдельном разделе.

Сейчас же вернемся к общему изложению и исследуем вопрос о том, как действует операция отражения  $\mathfrak{s}_m$  на другие базисные состояния неприводимого представления  $|\nu, a\rangle$ , где  $\nu$  - весовой вектор, а индекс  $a$  нумерует базисные состояния с данным весом, так что  $a \in \{1, K\}$ , и  $K$  - это кратность вырождения веса  $\nu$  в заданном неприводимом представлении.

Итак, для весового вектора  $\nu$  как набора собственных значений генераторов подалгебры Картана на базисных состояниях неприводимого представления формально определим операцию отражения  $\mathfrak{s}_m$  относительно повышающего вектора  $\alpha_m$  как

$$s_m \nu \stackrel{\text{def}}{=} \nu - 2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m \equiv \nu_m$$

Все такие отражения  $\nu_{S,m}$  старшего веса  $\mu_S$  базисного состояния неприводимого представления группы Ли относительно различных корней алгебры Ли этой группы, как мы видели, по построению принадлежат множеству невырожденных весов базисных состояний этого же неприводимого представления, которое задается базисным состоянием с этим старшим весом. Покажем теперь, что и все отражения любого веса базисного состояния неприводимого представления тоже принадлежат множеству весов базисных состояний этого же неприводимого представления. Более того, с учетом возможного вырождения веса в неприводимом представлении получим, что

$$s_m |\nu, a\rangle = |s_m \nu, a\rangle \equiv |\nu_m, a\rangle$$

а значит, отражение весов индуцировано соответствующим отражением базисных состояний неприводимого представления.

Пусть базисное состояние  $|\nu, a\rangle$ , имеющее вес  $\nu$ , принадлежит неприводимому представлению. Поскольку представление имеет конечный базис из собственных векторов подалгебры Картана, для заданного повышающего оператора  $\Gamma_{\alpha_m}$  всегда существует такое отличное от нулевого вектора состояние  $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$ , которое получено  $q_a$ -кратным повышением исходного состояния  $|\nu, a\rangle$ ,

$$N_{q_a} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = \Gamma_{\alpha_m}^{q_a} |\nu, a\rangle, \quad N_{q_a} \neq 0, \quad \langle \tilde{\nu}_{m,a} | \tilde{\nu}_{m,a} \rangle = 1$$

действие на которое тем же повышающим оператором даст нуль,

$$\Gamma_{\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = 0$$

Для этого состояния  $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$  можно повторить проведенные выше на стр. 83 после формулы (II.2.5) рассуждения для аналога состояния со старшим весом, когда состояние  $\Gamma_{\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$  обращается в нуль при действии на  $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$  не какого-либо произвольного повышающего оператора, а только вполне определенного) повышающего оператора  $\Gamma_{\alpha_m}$ , заданного в (II.2.19) и отвечающего корню  $\alpha_m$ . Тогда нормировка состояния с пониженным на  $\alpha_m$  весом изменяется на множитель  $\sqrt{K_1} = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu}_{m,a})}$  согласно II.2.6 и (II.2.7), так что

$$\Gamma_{-\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu}_{m,a})} |\tilde{\nu}_{m,a} - \alpha_m, a\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = 0, \quad 2 \frac{(\tilde{\nu}_{m,a}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_{m,a} \in \{0, \mathbb{N}\}$$

Неотрицательное целое число  $\tilde{p}_{m,a}$  опять имеет смысл числа понижающих шагов, после которых действие генератора понижения  $\Gamma_{-\alpha_m}$  на вектор состояния  $\Gamma_{-\alpha_m}^{\tilde{p}_{m,a}} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$  даст нуль.

Итак, для базисного состояния неприводимого представления  $|\nu, a\rangle$  с весом  $\nu$  мы сначала построили аналог старшего вектора  $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$  с весом  $\tilde{\nu}_{m,a}$ , повышая состояние  $|\nu, a\rangle$  в направлении  $\alpha_m$  максимально допустимое число раз  $q_a$ , как это записано в (II.2.19). Затем мы вычислили допустимое число шагов  $\tilde{p}_{m,a}$  при понижении состояния  $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$  по направлению  $-\alpha_m$ . По построению число понижающих шагов от  $\tilde{\nu}_{m,a}$  в обратную сторону в направлении  $-\alpha_m$ , т.е. от  $\tilde{\nu}_{m,a}$  до  $\nu$  или дальше, не меньше, чем число шагов от  $\nu$  к  $\tilde{\nu}_{m,a}$ , т.е.  $\tilde{p}_{m,a} \geq q_a$ . Согласно [II.2.19] и

$$\tilde{\nu}_{m,a} = \nu + q_a \alpha_m \Rightarrow \nu = \tilde{\nu}_{m,a} - q_a \alpha_m$$

получаем

$$2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_{m,a} - 2q_a \in \{\mathbb{Z}\}$$

где по построению целое неотрицательное число шагов  $q_a$  лежит в интервале  $0 \leq q_a \leq \tilde{p}_{m,a}$ . Значит, отражение весового вектора  $\nu$  приводит к

$$\nu_m \equiv \mathfrak{s}_m \nu = \nu - 2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m = \nu - (\tilde{p}_{m,a} - 2q_a) \alpha_m$$

Из этой формулы следует, что, так как весовой вектор  $\nu_m$  определяется только весом  $\nu$  и корнями  $\alpha_m$  (см. второе равенство в (II.2.22)), а также их скалярными произведениями, и не зависит от индекса  $a$ , который нумерует базисные состояния неприводимого представления с заданным весом, комбинация неотрицательных целых чисел  $\tilde{p}_{m,a} - 2q_a$  (см. третье равенство в (II.2.22)) не зависит от индекса  $a$  несмотря на то, что каждое из этих чисел, вообще говоря, зависит от  $a$ .

Ввиду того, что

$$\nu = \tilde{\nu}_{m,a} - q_a \alpha_m$$

выразим  $\nu_m$  через  $\tilde{\nu}_{m,a}$

$$\nu_m \equiv \mathfrak{s}_m \nu = \tilde{\nu}_{m,a} - (\tilde{p}_{m,a} - q_a) \alpha_m, \quad 0 \leq (\tilde{p}_{m,a} - q_a) \leq \tilde{p}_{m,a}$$

Отсюда следует, что базисное состояние с весом  $\nu_m \equiv \mathfrak{s}_m \nu$  принадлежит «линии» базисных состояний неприводимого представления и находится между  $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$  и  $|\tilde{\nu}_{m,a} - \tilde{p}_{m,a} \alpha_m, a\rangle$ , которая получается многократным действием понижающего генератора  $\Gamma_{-\alpha_m}$  на состояние  $|\tilde{\nu}_{m,a}\rangle$ . При этом каждое базисное состояние  $|\nu, a\rangle$  переходит в базисное состояние  $|\nu_m, a\rangle$  с одним и тем же весом  $\nu_m$ , но сами состояния по построению нумеруются тем же индексом  $a$ , что и исходное базисное состояние  $|\nu, a\rangle$ .

В итоге заключаем, что отражение всякого базисного состояния неприводимого представления с заданным весом принадлежит тому же неприводимому представлению и является базисным состоянием с весом, равным образу исходного веса при отражении:

$$\mathfrak{s}_m |\nu, a\rangle = |\mathfrak{s}_m \nu, a\rangle$$

Ясно, что если операцию отражения на состояниях базиса неприводимого представления задать как линейную, то и суперпозиция базисных состояний неприводимого представления при отражении переходит в суперпозицию образов отражения этих базисных состояний, а значит, отражение любого состояния неприводимого представления - это состояние, которое принадлежит этому же неприводимому представлению. Этот факт, как мы увидим ниже на примерах, существенно упрощает процедуру построения неприводимых представлений.

Подчеркнем, что в проведенном нами выше построении операции отражения базисных состояний неприводимого представления с простыми положительными корнями условие простоты положительного корня никак не использовалось. Это значит, все выводы сохраняют свою силу для всех положительных корней алгебры Ли, т.е. операция отражения базисных состояний неприводимого представления и индуцированное этой операцией отражение весов базисных состояний определены для каждого положительного корня алгебры Ли.

Очевидно, что в случае, когда вес ортогонален корню, отражение веса относительно этого корня сводится к тождественному преобразованию. Отметим также, что отражение состояния с нулевым весом относительно любого из корней алгебры - это тождественное преобразование. Поэтому множество базисных состояний неприводимого



представления алгебры Ли, которые характеризуются своими весами, включая нулевой весовой вектор, при отражении переходит во множество базисных состояний этого же неприводимого представления алгебры Ли, которые характеризуются образами исходных весов при отражении. Подчеркнем, что отражение Вейля не равно кратному действию понижающего генератора на базисное состояние, так как генератор может менять норму получающегося состояния, а отражение сохраняет норму результирующего состояния равной единице.

Композиция двух одинаковых отражений весов, т.е. двукратное действие операции отражения относительно одного и того же корня алгебры Ли, - это тождественное преобразование для любого веса состояния неприводимого представления, так как

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_m(\mathfrak{s}_m\nu) &= \mathfrak{s}_m\left(\nu - 2\frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}\alpha_m\right) = \\ &= \nu - 2\frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}\alpha_m - 2\frac{\alpha_m}{(\alpha_m, \alpha_m)}\left(\nu - 2\frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}\alpha_m\right) = \\ &= \nu - 4\frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}\alpha_m + 4\frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}\alpha_m = \nu \end{aligned}$$

Это значит, что у каждой операции отражения есть обратная операция отражения - само это отражение. Операция отражения весов базисных состояний неприводимого представления индуцирована операцией отражения самого базисного состояния как линейного преобразования в базисное состояние того же неприводимого представления с сохранением единичной нормировки, а значит, отражение базисного состояния можно представить как комбинацию дискретных групповых преобразований в представлении и умножения на отличное от нуля число, для того чтобы получить единичную нормировку базисного состояния-образа операции отражения. Но все эти операции: групповая и умножение на отличное от нуля число, - сами образуют группу в пространстве неприводимого представления со всеми свойствами, которым с необходимостью должна удовлетворять группа: композиция с ассоциативностью, единица и обратный элемент. Таким образом, отражения весов неприводимого представления относительно корней группы индуцированы отражениями базисных состояний неприводимого представления и образуют дискретную группу.

В математике говорят, что преобразования отражений относительно всех корней алгебры Ли на пространстве состояний неприводимого представления образуют группу Вейля, а пространство неприводимого представления инвариантно относительно группы Вейля, т.е. суперпозиция базисных состояний неприводимого представления переходит при действии отражений Вейля в суперпозицию базисных состояний того же неприводимого представления, а образ всех состояний неприводимого представления простой компактной группы Ли по отношению к действию группы Вейля совпадает с самим пространством этого неприводимого представления. Предположим обратное. Если  $T$  - это пространство неприводимого представления, а  $\mathcal{W}(T)$  - это образ пространства  $T$  относительно действия группы Вейля 19, то  $\mathcal{W}(T) \subset T$ . Тогда, если дополнение  $\mathcal{W}(T)$  до  $T$  непусто, т.е.  ${}^{20}T \setminus \mathcal{W}(T) \neq \emptyset$ , то это возможно, только если базис ортонормированных состояний в подпространстве  $\mathcal{W}(T)$ , который задается как базис собственных состояний генераторов подалгебры Картана (каждое базисное состояние имеет вполне определенный весовой вектор), ортогонален базису состояний, линейная оболочка которых  $L$  позволяет построить пространство представления как прямое декартово произведение  $T = \mathcal{W}(T) \times L$ . В подпространстве  $T \setminus \mathcal{W}(T)$  содержится линейная оболочка  $L$ . Только в случае ортогональности весов базиса в  $\mathcal{W}(T)$  и весов базиса  $L$  любой отличный от нуля вес из множества весов состояний  $\mathcal{W}(T)$  при отражениях Вейля не попадет во множество весов состояний  $L$ . Но тогда из этой

ортогональности двух множеств весовых векторов следует, что и любой весовой вектор состояний  $L$  при отражениях Вейля не попадет в пространство весов состояний  $\mathcal{W}(T)$ , что противоречит определению  $\mathcal{W}(T)$ , а значит, предположение о том, что дополнение  $T \setminus \mathcal{W}(T)$  непусто было неверно, и группа Вейля действительно переводит пространство неприводимого представления в себя.

Важно подчеркнуть, что операция отражения переводит все подпространство состояний с ортонормированным базисом <sup>21</sup> $|\nu, a\rangle$ , размерность которого равна кратности вырождения весового вектора  $\nu$ , в подпространство той же размерности с базисом, который образован ортонормированными состояниями  $|\mathfrak{s}_m \nu, a\rangle$  с весом  $\mathfrak{s}_m \nu$ , так как, несмотря на то, что число шагов  $\tilde{p}_{m,a}$  и  $q_a$  зависят от индекса  $a$ , нумерующего собственные состояния с одним и тем же весом, скалярное произведение  $(\nu, \alpha_m)$ , которое определяет вес образа вектора  $\nu$  при отражении (см. формулу (II.2.22)), не зависит от  $a$ , т.е. комбинация  $\tilde{p}_{m,a} - 2q_a$  есть инвариант этого подпространства.

Отметим в этой связи еще раз, что старшему весовому вектору неприводимого представления соответствует только одно нормированное на единицу базисное состояние. Договоримся, что если какой-либо весовой вектор соответствует единственному собственному состоянию генераторов подалгебры Картана, то мы будем говорить, что вес этого состояния невырожден или кратность вырождения весового вектора равна единице,  $K = 1$ . Тогда проведенное рассмотрение операции отражения базисных состояний позволяет утверждать, что состояние невырожденного веса переходит при отражениях в состояние невырожденного образа веса.

## 7.5.4 2.4 Weights of the adjoint representation

Покажем, что присоединенное представление компактной простой алгебры Ли определяется старшим весом  $\mu_S$ , который задается старшим положительным корнем  $\alpha_S$ . Старший положительный корень имеет в порядке следования номеров своих компонент максимальные неотрицательные компоненты среди всех корней алгебры Ли: сначала максимальное значение первой компоненты, потом при условии максимального значения первой компоненты максимальное для второй и т.д. Это, в частности, значит, что старший корень не обязательно является простым, он может выражаться через простые положительные корни алгебры Ли.

Для доказательства утверждения о старшем весе в присоединенном представлении запишем сначала один из коммутаторов в базисе Картана-Вейля (I.3.44

$$[\Gamma_l, \Gamma_\alpha] = \alpha_l \Gamma_\alpha$$

<sup>19</sup> При действии отражений из группы Вейля на элемент пространства представления в образ включаются не только результаты однократных отражений этого элемента, но и результаты всевозможных многократных отражений: на образ однократного отражения также можно подействовать операциями отражения и т.д. Кроме того, состояния с весом, компоненты которого тождественно равны нулю, переходят при отражениях сами в себя, так что образ  $\mathcal{W}(T)$  включает в себя такие состояния с нулевым весом.

<sup>20</sup> Если  $A$  - это подмножество  $B$ ,  $A \subset B$ , то множество  $C$  всех элементов  $c$  таких, что  $c \in B, c \notin A$  называется дополнением  $A$  до  $B$  и символично обозначается как  $C = B \setminus A$ .

<sup>21</sup> Это происходит, когда в полный набор наблюдаемых кроме независимых инвариантов - операторов Казимира и генераторов из подалгебры Картана входят еще и операторы Казимира подалгебр Ли в простой компактной алгебре Ли. Эти операторы Казимира подалгебры не являются инвариантами группы Ли, и поэтому они могут принимать разные значения на базисных состояниях неприводимого представления при одних и тех же собственных значениях инвариантов Казимира алгебры Ли и компонент весов вырожденных состояний. Например, в алгебре  $\mathfrak{su}(3)$ , компактной простой алгебре Ли, очевидно, есть подалгебра  $\mathfrak{su}(2)$ , что ясно уже из самого вида диаграммы Дынкина для  $\mathfrak{su}(3)$ : две точки, соединенные линией, содержат одну точку, которая отвечает алгебре  $\mathfrak{su}(2)$ .

В присоединенном представлении лестничные генераторы из корневого дополнения алгебры Ли, наряду с генераторами подалгебры Картана, образуют базис в пространстве представления по построению. Покажем, что это базис из собственных состояний генераторов подалгебры Картана. Корневые генераторы  $\Gamma_\alpha$  как базисные элементы пространства состояний присоединенного представления в рамках дираковских обозначений можно обозначить как  $\Gamma_\alpha \mapsto |\alpha\rangle$ , причем, напомним, что коммутатор генератора из подалгебры Картана с лестничным генератором имеет один и тот же вид (II.2.25) вне зависимости от нормировки лестничного генератора, так что в качестве базисного состояния можно выбрать нормированное на единицу  $|\alpha\rangle$ . Тогда запись коммутатора как действия линейного преобразования в присоединенном представлении в дираковских обозначениях примет вид <sup>22</sup>

$$[\Gamma_l, \Gamma_\alpha] \equiv (\text{ad } \Gamma_l) \Gamma_\alpha = \alpha_l \Gamma_\alpha \Rightarrow \widehat{(\text{ad } \Gamma_l)} |\alpha\rangle = \alpha_l |\alpha\rangle$$

а значит, корни алгебры Ли - это весовые векторы базисных состояний присоединенного представления. Вследствие вида коммутатора для генераторов подалгебры Картана

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0$$

введем аналогичные дираковские обозначения для элементов базиса присоединенного представления  $\Gamma_l \mapsto |\mathbf{0}, l\rangle$  и запишем

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] \equiv (\text{ad } \Gamma_l) \Gamma_{l'} = \hat{0} \cdot \Gamma_{l'} = \mathbf{0} \Rightarrow \widehat{(\text{ad } \Gamma_l)} |\mathbf{0}, l'\rangle = \hat{0} \cdot |\mathbf{0}, l'\rangle = \mathbf{0}$$

Значит, генераторы подалгебры Картана, записанные как базисные состояния присоединенного представления, образуют базис подпространства размерности, равной рангу группы  $n$  по числу состояний  $|\mathbf{0}, l'\rangle$  с нулевыми собственными значениями для всех генераторов подалгебры Картана как операторов присоединенного представления с единственным весовым вектором, все компоненты которого тождественно равны нулю.

Далее, если  $\alpha_S$  - старший из всех положительных корней алгебры Ли, то он является старшим весом для присоединенного представления, поскольку для всех лестничных генераторов, соответствующих простым положительным корням,

$$(\text{ad } \Gamma_{\alpha_m}) \Gamma_{\alpha_S} \equiv [\Gamma_{\alpha_m}, \Gamma_{\alpha_S}] = N_{\alpha_m, \alpha_S} \Gamma_{\alpha_m + \alpha_S} = 0$$

так как по определению старшего положительного корня он не может быть повышен, и  $\Gamma_{\alpha_m + \alpha_S}$  не существует, т.е.  $N_{\alpha_m, \alpha_S} = 0$ , и поэтому в дираковской записи

$$\widehat{(\text{ad } \Gamma_{\alpha_m})} |\alpha_S\rangle = 0$$

Итак, пространство присоединенного представления - это линейная оболочка  $\mathcal{D} = N_G$  ортонормированных базисных состояний:  $n$  собственных состояний генераторов подалгебры Картана с весовым вектором, все компоненты которого равны нулю,

$$|\mathbf{0}, l\rangle, \quad l \in \{\overline{0, n}\}$$

$N_G - n$  состояний, которые имеют веса, равные всем, положительным и отрицательным, корням алгебры Ли,

<sup>22</sup> Сравните эту запись с формулой 1.2.12 на стр. 21. где мы описывали общие свойства присоединенного представления и линейные преобразования в этом представлении, возникающие при действии генераторов на векторы пространства.

$$|\alpha_k\rangle$$

Покажем, что набору собственных значений, т.е. весу, который равен корню, соответствует единственное состояние, которое мы обозначаем как  $|\alpha_k\rangle$ . Для этого обратимся к преобразованиям группы Вейля.

Действие операции отражения из группы Вейля переводит базисное состояние старшего веса в базисное состояние с весом того же неприводимого представления. В случае присоединенного представления это означает, что состояние с весом, равным старшему корню алгебры Ли, при отражении переводится в базисное состояние с весом, равным корню этой же алгебры Ли. А так как старший вес для базисных состояний в пространстве неприводимого представления невырожден, т.е. существует единственное базисное состояние, которое является собственным для генераторов подалгебры Картана с собственными значениями, равными компонентам старшего веса, то в согласии с установленными свойствами отражений Вейля все многократные отражения состояния старшего веса образуют состояния с невырожденными весами. Значит, образы базисного состояния со старшим весом при действии группы Вейля образуют подпространство неприводимого представления с весами, которые получаются при всевозможной многократном действии отражений Вейля на старший вес <sup>23</sup>

Теперь докажем, что особенность присоединенного представления простой компактной алгебры Ли заключается в том, что множество образов старшего корня при действии группы Вейля - это все корни этой алгебры Ли. Построим множество всех образов действия группы Вейля на старший корень  $\mathcal{W}(\alpha_S)$  и предположим противное: пусть существует положительный корневой вектор <sup>24</sup> рассматриваемой простой компактной алгебры Ли  $\alpha'$ , который не принадлежит  $\mathcal{W}(\alpha_S)$ , а значит, и все множество его образов при действии группы отражений Вейля не пересекается с множеством образов старшего корня,

$$\mathcal{W}(\alpha_S) \cap \mathcal{W}(\alpha') = \emptyset$$

Это возможно, только если любые элементы из этих двух множеств ортогональны,

$$\mathcal{W}(\alpha_S) \perp \mathcal{W}(\alpha')$$

так как для любого корня  $\alpha_m \in \mathcal{W}(\alpha_S)$  отражение корня  $\alpha'$  - это корень этой же подалгебры Ли, который выражается через корни из множеств  $\mathcal{W}(\alpha')$  и  $\mathcal{W}(\alpha_S)$ ,

$$\mathfrak{s}_m \alpha' = \alpha' - \alpha_m 2 \frac{(\alpha', \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}$$

Следовательно

$$\mathcal{W}(\mathfrak{s}_m \alpha') = \mathcal{W}(\alpha') + \mathcal{W}(\alpha_S)$$

что противоречит предположению об изолированности  $\mathcal{W}(\alpha')$  от  $\mathcal{W}(\alpha_S)$ , если корни в этих множествах не ортогональны друг другу. Однако ортогональность означает, что для любого положительного корня  $\alpha'_{m'}$  из  $\mathcal{W}(\alpha')$  и любого положительного корня  $\alpha_m$  из  $\mathcal{W}(\alpha_S)$

$$(\alpha'_{m'}, \alpha_m) = 0$$

Если во множестве  $\mathcal{W}(\alpha')$  нет простого положительного корня, то все простые положительные корни тогда содержатся во множестве  $\mathcal{W}(\alpha_S)$ , корни в  $\mathcal{W}(\alpha')$  выражаются через простые положительные корни и ортогональны простым

положительным корням алгебры Ли, которые образуют базис в пространстве корней. Это возможно, только если все корни в  $\mathcal{W}(\alpha')$  равны нулю, т.е.  $\mathcal{W}(\alpha')$  - пустое пространство. Итак, нетривиальное множество  $\mathcal{W}(\alpha')$  содержит простые положительные корни.

Но тогда из ортогональности двух множеств следует, что простые положительные корни в  $\mathcal{W}(\alpha')$  и простые положительные корни в  $\mathcal{W}(\alpha_S)$  по правилам построения диаграмм Дынкина для простых положительных корней не соединены линиями между простыми положительными корнями этих двух подсистем корней. Поэтому заключаем, что простые положительные корни двух рассматриваемых подсистем простых положительных корней образуют диаграмму Дынкина, как минимум, с двумя компонентами связности, по одной или более в каждой из подсистем, если каждую из подсистем не считать пустой. Это вступает в противоречие с критерием простой компактной алгебры Ли<sup>25</sup>. Значит, сделанное предположение о неполноте образов старшего корня при отражениях Вейля было неверно, и во множество образов старшего корня присоединенного представления при действии отражений Вейля входят все корневые векторы простой компактной алгебры Ли. Все эти образы имеют ту же кратность вырождения, что и старший вес присоединенного представления, т.е. кратность вырождения равна единице. Каждому корню алгебры Ли  $\alpha_k$  в присоединенном представлении отвечает единственное базисное состояние  $|\alpha_k\rangle$ , которое является собственным для всех генераторов подалгебры Картана  $\Gamma_l$  с собственными значениями, равными компонентам  $(\alpha_k)_l$ .

Мы показали, что в присоединенном представлении ненулевые веса собственных состояний подалгебры Картана являются корнями алгебры Ли. Поэтому для простых компактных алгебр Ли задача построения всей системы корневых векторов алгебры Ли при заданной системе простых положительных корней этой алгебры наиболее эффективно решается при помощи вейлевских отражений в присоединенном представлении. Сначала, исходя из диаграммы Дынкина строится система простых положительных корней и сопряженных им отрицательных корней. Затем строятся последовательности из простых положительных корней так, как это следует из диаграммы Дынкина, и отрицательные корни, сопряженные к положительным корням последовательностей. После этого строятся образы всех найденных корней при действии отражений Вейля до тех пор, пока действие всех отражений не станет переводить множество найденных корней в себя, так что вся система корней становится замкнутой относительно группы Вейля. Способ отражений по своей наглядности и эффективности превосходит алгебраический метод поиска дочерних последовательностей корневых векторов, которые описаны в задаче 16 на стр. 57. Пример такой процедуры применения группы Вейля приведен в задаче 17.

<sup>23</sup> Подчеркнем, что под отражениями Вейля мы понимаем, во-первых, операции, которые вполне определенно преобразуют один вес базисного состояния в пространстве неприводимого представления в вес того же базиса состояний, включая тождественное преобразование. Таким образом, речь идет о вполне определенном базисе состояний, когда каждое базисное состояние  $|\nu, a\rangle$  является собственным для генераторов подалгебры Картана  $\Gamma_l$  с собственными значениями  $(\nu)_l$ . Во-вторых, под группой отражений Вейля мы понимаем и дискретную группу преобразований указанных базисных состояний в пространстве неприводимого представления, а именно, преобразования базисного состояния индуцируют отражения веса  $\nu$ , в то время как индекс базисного состояния  $a$  задает кратность вырождения веса и он не изменяется при действии отражения Вейля на базисное состояние.

<sup>24</sup> Образ отражения положительного корня относительно самого себя, как следует из определения операции отражения весов, - это противоположный этому корню, отрицательный корень. Поэтому во множество образов отражения корня всегда входит как сам корень, так и противоположный ему корень.

**Киселев-2022-1**

7. Постройте на плоскости все корневые векторы в алгебре особой группы  $G_2$ .

Примечание. Построив последовательности из двух простых положительных корней, используйте группу отражений Вейля, чтобы найти корневые векторы, которые существуют вне этих последовательностей, т.е. возникают в «дочерних» последовательностях.

После описания матриц присоединенного представления для простой компактной группы Ли уместно сделать отступление и сформулировать концепцию разложения Фиттинга в алгебре Ли произвольного вида. Дело в том, что в теории матриц доказано, что совместным базисом собственных векторов могут обладать не только попарно коммутирующие эрмитово самосопряженные матрицы, с которыми мы имели дело в случае простых компактных групп Ли, но и верхнетреугольные матрицы над полем комплексных чисел: такие матрицы образуют нильпотентную подалгебру относительно коммутатора, который задается с помощью матричного умножения. При этом базис собственных состояний генераторов нильпотентной подалгебры является и базисом пространства присоединенного представления, если число элементов нильпотентной подалгебры является максимально достижимым по своему количеству для заданной алгебры Ли. Таким образом нильпотентная подалгебра является полным аналогом подалгебры Картана с точки зрения базиса собственных состояний. Но собственные значения элементов максимальной нильпотентной подалгебры  $\Gamma^{(0)}$ , которые по прежнему называются весами, уже не являются вещественными, как для генераторов подалгебры Картана. Вместе с тем, схема построения лестничных генераторов алгебры Ли и их коммутаторов, приведенная нами в случае компактной простой алгебры Ли, остается в силе и для алгебры Ли общего вида, так что генераторы алгебры Ли разбиваются на два класса: на максимальную нильпотентную подалгебру  $\Gamma^{(0)}$  и на корневое дополнение  $\Gamma_a$ . В итоге, вместо базиса Картана-Вейля в алгебре Ли произвольного вида имеет место разложение Фиттинга,

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} \oplus \sum_{a \neq 0} \Gamma_a$$

причем каждому корню  $\mathbf{a}$  соответствует, во-первых, единственный генератор  $\mathbf{i}$ , во-вторых, противоположный корень  $-\mathbf{a}$  со своим генератором. Поскольку в нильпотентной алгебре всегда есть абелева подалгебра, которая

25 Заметим, что для других представлений, отличных от присоединенного, ни старший вес представления, ни множество его образов при действии отражений Вейля, вообще говоря, не являются корневыми векторами алгебры. Поэтому вывод о том, что образы старшего веса покрывают все отличные от нулевого весовые векторы представления, как мы это показали для присоединенного представления, может быть неверен для произвольного неприводимого представления. Наиболее очевидный пример - представление группы поворотов со спином  $s$ : в одномерном пространстве весов, т.е. во множестве проекций спина на ось  $z$ , которую обозначают символом  $m_s$ , старший вес равен  $m_s = s$ , а его отражение в группе Вейля, включающей в себя только два элемента, тождественное преобразование веса и инверсию знака веса, дает сам вес  $m_s = s$  и противоположный вес  $m_s = -s$ , а все промежуточные отличные от нуля значения проекции спина на ось  $z$  не могут быть получены отражениями старшего веса, если  $s > 1$ . В дальнейшем изложении на примере группы  $SU(3)$  мы построим несколько вполне определенных неприводимых представлений, для которых задача об образах старшего веса также решается в явном виде. возникает на последнем шаге вложенных друг в друга подалгебр коммутаторов, как мы это описали на стр. 25 в разделе 2.2

Главы 1, 2 для разрешимых алгебр Ли, то эта абелева подалгебра является прямым аналогом подалгебры Картана.

Тогда в присоединенном представлении, как было показано в этом разделе, на весовой диаграмме веса базисных состояний равны корням, причем базисные векторы с нулевыми корнями являются вырожденными, и кратность вырождения равна размерности подалгебры  $\Gamma^{(0)}$ .

В полной аналогии с обозначениями данного раздела перепишем в присоединенном представлении коммутаторы генераторов нильпотентной подалгебры в виде действия на состояния с весами, равными корням алгебры  $\alpha$ , с учетом линейности коммутатора по своим аргументам в виде уравнений на собственные состояния:

$$[\Gamma_l^{(0)}, \Gamma_\alpha] = \alpha_l \Gamma_\alpha, \quad \text{или} \quad [\Gamma^{(0)}, \Gamma_\alpha] = \text{ad } \Gamma^{(0)} \cdot \Gamma_\alpha = \alpha(\Gamma^{(0)}) \Gamma_\alpha \Rightarrow \Gamma^{(0)} |\alpha\rangle = \alpha(\Gamma^{(0)}) |\alpha\rangle,$$

где  $\Gamma^{(0)}$  - это любая суперпозиция генераторов нильпотентной подалгебры. Для коммутаторов в нильпотентной подалгебре точно также

$$[\Gamma_l^{(0)}, \Gamma^{(0)}] = \lambda_l^{(0)} \Gamma^{(0)}, \quad \text{или} \quad [\Gamma_x^{(0)}, \Gamma^{(0)}] = \text{ad } \Gamma_x^{(0)} \cdot \Gamma^{(0)} = \lambda^{(0)}(x) \Gamma^{(0)} \Rightarrow \Gamma_x^{(0)} |\lambda^{(0)}\rangle = \lambda^{(0)}(x) |\lambda^{(0)}\rangle$$

где состояния  $\lambda^{(0)}$  могут быть вырождены. Например, для абелевой подалгебры в нильпотентной подалгебре всегда имеется корень  $\lambda^{(0)} = 0$ , а кратность его вырождения равна размерности абелевой подалгебры. Верхний индекс у корней  $\lambda^{(0)}$  введен, чтобы не путать эти векторы с фундаментальными векторами простой компактной алгебры Ли.

Теперь мы можем завершить доказательство критерия Картана, начатое на стр. 25 а именно его достаточное условие: если метрика Киллинга вырождена, то алгебра Ли содержит абелев идеал, а значит, в группе есть инвариантная абелева подгруппа, и группа не является полупростой. Итак, нами было установлено, что в алгебре Ли с вырожденной метрикой Киллинга есть подалгебра инвариантной подгруппы Ли с нулевой метрикой Киллинга в этом идеале. Рассмотрим более детально подалгебру этого идеала, а именно воспользуемся разложением Фиттинга и построим специальные элементы нильпотентной части этой подалгебры Ли

$$\Gamma_z^{(0)} = [\Gamma_\alpha, \Gamma_{-\alpha}] \subset \Gamma^{(0)}$$

для которого определены корни

$$\Gamma_z^{(0)} |\lambda^{(0)}\rangle = \lambda^{(0)}(z) |\lambda^{(0)}\rangle$$

Установим, что корни  $\lambda^{(0)}$  связаны с корнями корневого дополнения  $\alpha$ . Многократными коммутаторами построим генераторы

$$\Gamma_{\lambda(z)+\alpha(z)} \sim [\Gamma_z^{(0)}, \Gamma_\alpha] \mapsto \Gamma_{\lambda(z)+2\alpha(z)} \sim [\Gamma_{\lambda(z)+\alpha(z)}, \Gamma_\alpha] \mapsto \dots \mapsto \Gamma_{\lambda(z)+k\alpha(z)}$$

и генератор

$$\Gamma_Y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{\lambda(z)+k\alpha(z)}$$

которому отвечают состояния в присоединенном представлении с весами, равными корням, указанным в сумме. Поскольку след генератора  $\Gamma_z^{(0)}$  равен нулю, как и след

всякого коммутатора, вычисление следа по указанным нами состояниям в генераторе  $\Gamma_Y$  тоже равен нулю,

$$\mathrm{tr}_Y (\Gamma_z^{(0)}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\langle \lambda^{(0)} + k\alpha \left| \Gamma_z^{(0)} \right| \lambda^{(0)} + k\alpha \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (n_k (\lambda^{(0)}(z) + k\alpha(z))) = 0$$

где  $n_k$  - это кратность вырождения корня  $\lambda^{(0)} + k\alpha$ , так что записанное выражение учитывает и случай, когда кратность вырождения равна нулю, т.е. корню не отвечает какое-либо состояние в присоединенном представлении, а значит, и в алгебре Ли нет соответствующего генератора. Поэтому мы полагаем, что суммы оказываются конечными. В итоге,

с рациональным коэффициентом

$$\lambda^{(0)}(z) = -r_\lambda \alpha(z)$$

$$r_\lambda = \left( \sum n_k k \right) \left( \sum n_k \right)^{-1}$$

Найдем теперь след квадрата генератора  $\Gamma_z^{(0)}$ , суммируя по всем корням  $\lambda(z)$ ,

$$\mathrm{tr} (\Gamma_z^{(0)} \Gamma_z^{(0)}) = \sum_\lambda \left\langle \lambda^{(0)} \left| \Gamma_z^{(0)} \Gamma_z^{(0)} \right| \lambda^{(0)} \right\rangle = \sum_\lambda (\lambda^{(0)}(z))^2 = \left( \sum_\lambda r_\lambda^2 \right) \cdot (\alpha(z))^2$$

Если в алгебре есть хотя бы один корень из корневого дополнения, отличный от нуля, то

$$\mathrm{tr} (\Gamma_z^{(0)} \Gamma_z^{(0)}) \neq 0$$

так как, во-первых, среди корней  $\lambda(z)$  есть корень, равный нулю, который отвечает абелевой подалгебре в нильпотентной подалгебре. Во-вторых, серия с нулевого корня обрывается на первом шаге в обе стороны, поскольку кратные корни не существуют в алгебре (коммутатор генератора с собой равен нулю), т.е.

$$r_{\lambda=0} = \frac{n_1 - n_{-1}}{n_0 + n_1 + n_{-1}}$$

Но в алгебре есть и корень  $\lambda = \mathbf{0} + \alpha$ , для которого допустимы лишь 2 шага в отрицательную сторону,

$$r_\lambda = \frac{-n_0 - 2n_{-1}}{n_1 + n_0 + n_{-1}}$$

Значит, с учетом  $n_{-1} = n_1$  найдем, что

$$r_\lambda - r_{\lambda=0} = -\frac{n_0 + 2n_1}{n_0 + 2n_1} = -1$$

это означает, что оба эти рациональные множители не могут обратиться в нуль совместно, а

$$\sum_\lambda r_\lambda^2 > 0$$

Итак, если в идеале есть корневое дополнение, то элемент метрики Киллинга, отвечающий следу квадрата генератора  $\Gamma_z^{(0)}$ , отличен от нуля. Если теперь метрика



Киллинга в идеале тождественно равна нулю, то это значит, что предположение о наличии в идеале корневого дополнения неверно, и весь идеал - это нильпотентная подалгебра, что и требовалось для того, чтобы в идеале существовала абелева подалгебра, задающая инвариантную абелеву подгруппу Ли. Поэтому алгебра с вырожденной метрикой Киллинга не является полупростой.

Подчеркнем, что компактные простые группы и их представления в физике описывают квантовые состояния, которые являются собственными для наблюдаемых физических величин, и сами эти физические величины задаются эрмитово самосопряженными генераторами подалгебры Картана, а групповые преобразования квантовых состояний происходят в результате воздействия на эти состояния операторов физических величин - воздействия эрмитово самосопряженных генераторов группы Ли. Ясно, что для физики состояния представления интересны только в том случае, если это квантовые состояния физической системы, которые характеризуются собственными значениями наблюдаемых.

Вместе с тем, возможны ситуации, когда преобразования квантовых состояний возникают не только под воздействием операторов физических величин, но и в рамках групповых преобразований, которые могут отвечать некомпактным группам Ли. Пример - группа Лоренца, в которой лоренцевы бусты - это элементы симметрии физической системы, но они не вызваны воздействием на систему операторов физических величин, как это имеет место в группе поворотов, где генераторы поворотов - это операторы момента количества движения. Что же касается случая, когда базис состояний представления связан не с подалгеброй Картана, а с максимальной нильпотентной подалгеброй общего вида, то его вряд ли можно отнести к ситуации, применимой в физике квантовых состояний. Тем не менее, в квантовой физике кроме состояний и наблюдаемых величин рассматриваются матричные элементы произведений нескольких операторов наблюдаемых по начальному и конечному состояниям - так называемые корреляторы, например, двухточечные корреляторы координат или петлевые интегралы от полей, упорядоченные по направлению перемещения по петле. Эти матричные элементы сами по себе могут обладать свойствами симметрии, т.е. среди характеристик таких корреляторов могут быть построены такие, которые имеют вполне определенные трансформационные свойства относительно некоторых групповых преобразований. В таких случаях уже нет ограничений, связанных с необходимостью компактности и простоты группы преобразований квантовых состояний и наблюдаемых величин, а также нет необходимости ограничивать число генераторов конечным набором, так что становится актуальным и рассмотрение бесконечномерных алгебр вне критерия полупростоты группы по Картану.

Итак, мы описали общую процедуру построения конечномерных неприводимых представлений простых компактных алгебр Ли, которую проиллюстрируем далее на примерах алгебр  $\mathfrak{su}(2)$  и  $\mathfrak{su}(3)$ .

### 7.6 3. Representations of $\mathfrak{su}(2)$

Спинор как фундаментальное представление, матрицы Паули, матрицы операторов момента импульса  $j$ , приближенная симметрия ядерных сил - изотопический спин и кварки, слабое взаимодействие и дублеты кварков и лептонов, тензор поворотов Эли Картана, разложение алгебры  $\mathfrak{so}(4)$  в прямую сумму  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ .

При описании конкретных примеров мы следуем общим результатам о неприводимых представлениях в Главе 2, 2, где на стр. 84 были определены фундаментальные представления. Каждому фундаментальному вектору (II.2.9) соответствует фундаментальное представление, в котором этот вектор является весовым вектором

состояния старшего веса. Напомним, что количество фундаментальных векторов равно рангу группы. Ранг алгебры  $\mathfrak{su}(2)$  равен единице (одна точка на диаграмме Дынкина один простой положительный корень).

### 7.6.1 3.1 the Fundamental Representation

Единственный фундаментальный одномерный вектор  $\lambda_z$  алгебры  $\mathfrak{su}(2)$  по определению

$$2 \frac{(\lambda_j, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \delta_{jm}$$

удовлетворяет равенству

$$2 \frac{\lambda_z \cdot \alpha_z}{\alpha_z^2} = 1$$

При  $\alpha_z = 1$  находим <sup>26</sup>

$$\lambda_z = \frac{1}{2}$$

В фундаментальном представлении, где вес старшего вектора имеет координату  $\mu_S = \lambda_z = \frac{1}{2}$ , допустимое однократное понижение этого веса дает вес младшего вектора

$$\mathfrak{s}_m \lambda_j = \lambda_j - 2 \frac{(\lambda_j, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m \quad \mapsto \quad \mathfrak{s}_z \lambda_z = \lambda_z - \alpha_z = -\frac{1}{2}$$

Состояние с таким весом - результат действия понижающего оператора  $\Gamma_-$  на старший вектор фундаментального представления,  $|\mu_S\rangle = |\lambda_z\rangle$ . В физических приложениях принято определять оператор

$$\hat{j}_- \equiv \sqrt{2} \Gamma_- \text{ и } j_z \equiv \Gamma_z$$

где  $\Gamma_z$  - генератор подалгебры Картана в  $\mathfrak{su}(2)$ .

По определению фундаментального представления число шагов понижения равно единице 27, так что других состояний, кроме двух, что имеют веса  $\mu \mapsto \mu_S = \lambda_z = \frac{1}{2}$  и  $\mu \mapsto \mu_S - \alpha_z = \lambda_z - \alpha_z = -\mu_S = -\frac{1}{2}$ , в фундаментальном представлении нет. Итак, запишем действие оператора проекции момента импульса на ось  $z$  на пару базисных состояний фундаментального представления

$$\Gamma_z |\mu\rangle = \mu_z |\mu\rangle \quad \Rightarrow \quad \Gamma_z \left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \pm \frac{1}{2} \left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle, \quad |\pm\rangle \equiv \left| \pm \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \text{т.е. } j_z |\pm\rangle = \pm \frac{1}{2} |\pm\rangle$$

В базисе  $|\pm\rangle$  двумерного пространства фундаментального представления алгебры  $\mathfrak{su}(2)$  все операторы линейных преобразований  $\Gamma$  - это матрицы размера  $2 \times 2$ ,

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{++} & \Gamma_{+-} \\ \Gamma_{-+} & \Gamma_{--} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \Gamma_{++} &= \langle +|\Gamma|+ \rangle, & \Gamma_{+-} &= \langle +|\Gamma|- \rangle, \\ \Gamma_{-+} &= \langle -|\Gamma|+ \rangle, & \Gamma_{--} &= \langle -|\Gamma|- \rangle. \end{aligned}$$

Согласно общей формуле для квадратичного оператора Казимира (II.2.2, который мы обозначим с использованием определения II.3.1 в группе  $SU(2)$  как  $C_2 = \Gamma_a \Gamma_a \equiv \hat{j}^2$ , запишем действие  $\hat{j}^2$  на состояние старшего веса фундаментального представления, что даст значение этого инварианта для всех векторов состояния рассматриваемого неприводимого представления,

$$\hat{j}^2|+\rangle = \left\{ \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2} (\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+) \right\} |+\rangle$$

Согласно важному общему соотношению (II.2.20)

$$\Gamma_{\alpha_m}|\tilde{\nu}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{-\alpha_m}|\tilde{\nu}\rangle = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu})} |\tilde{\nu} - \alpha_m\rangle, \quad 2\frac{(\tilde{\nu}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_m \in \{0, \mathbb{N}\}$$

при подстановках

$$|\tilde{\nu}\rangle \mapsto \left| +\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \tilde{\nu} \mapsto \lambda_z = \frac{1}{2}, \quad \alpha_m \mapsto \alpha_z, \quad \tilde{\nu} - \alpha_m \mapsto -\lambda_z = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_{-\alpha_m} \mapsto \Gamma_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}_-$$

и при  $\alpha_z = 1$  находим результат действия понижающего генератора на состояние старшего веса и норму получающегося состояния

$$\Gamma_- \left| +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left( \Gamma_- \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \right)^\dagger \Gamma_- \left| +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \right)^\dagger \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle +\frac{1}{2} \right| \Gamma_+ \Gamma_- \left| +\frac{1}{2} \right\rangle = 1$$

или

$$\hat{j}_-|+\rangle = |-\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle + \left| \hat{j}_+ \hat{j}_- \right| + \right\rangle = 1$$

Поскольку действие понижающим генератором на состояние с самым младшим значением веса дает нуль,

$$\Gamma_- \left| -\frac{1}{2} \right\rangle = 0$$

матричные элементы понижающего оператора равны

$$(\Gamma_-)_{-+} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\Gamma_-)_{+-} = (\Gamma_-)_{--} = (\Gamma_-)_{++} = 0$$

его матричная запись в базисе состояний  $|\pm\rangle$  имеет вид

$$\hat{\Gamma}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Повышающий оператор  $\Gamma_+$  эрмитово сопряжен  $\Gamma_-$ , так что

$$\hat{\Gamma}_+ = \hat{\Gamma}_-^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

откуда сразу получаем, что действие повышающего генератора на состояние младшего веса равно

$$\Gamma_+ \left| -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| +\frac{1}{2} \right\rangle, \quad \hat{j}_+|-\rangle = |+\rangle$$

<sup>26</sup> Выбор  $\alpha_z = 1$  соответствует, например, тому, что генераторы преобразований - это компоненты оператора момента вращения  $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{J}}/\hbar$ .

<sup>27</sup> Напомним, что коэффициенты разложения старшего веса неприводимого представления  $p_m$  по фундаментальным векторам  $\lambda_m$  - это максимальное число понижения веса генератором  $\Gamma_{-\alpha_m}$ . В фундаментальном представлении только один коэффициент равен единице,  $p_m = \delta_{mk}$ , и старший вес  $\lambda_k$  можно понизить только один раз до веса  $\lambda_k - \alpha_k$ .

Полезно вывести этот результат чисто алгебраически. Численный коэффициент  $(\Gamma_+)_{+-}$ , который получается при действии повышающего генератора на состояние с младшим весом,

$$\Gamma_+ \left| -\frac{1}{2} \right\rangle = (\Gamma_+)_{+-} \left| +\frac{1}{2} \right\rangle$$

легко найти, используя (II.3.3,

$$\Gamma_+ \left| -\frac{1}{2} \right\rangle = \Gamma_+ \left( \sqrt{2} \Gamma_- \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

а так как в базисе Картана-Вейля для группы  $SU(2)$

$$[\Gamma_+, \Gamma_-] = \alpha_z \Gamma_z, \quad \alpha_z = 1, \quad \Rightarrow \quad \Gamma_+ \Gamma_- = \Gamma_- \Gamma_+ + \Gamma_z$$

находим, что

$$\begin{aligned} \Gamma_+ \left| -\frac{1}{2} \right\rangle &= \Gamma_+ \left( \sqrt{2} \Gamma_- \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \right) = \sqrt{2} (\Gamma_- \Gamma_+ + \Gamma_z) \left| +\frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \sqrt{2} \left( \Gamma_- \Gamma_+ \left| +\frac{1}{2} \right\rangle + \Gamma_z \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \right) = \sqrt{2} \Gamma_- \mathbf{0} + \sqrt{2} \Gamma_z \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

где мы учли, что повышение состояния старшего веса неприводимого представления дает нулевое состояние  $\Gamma_+ \left| +\frac{1}{2} \right\rangle = \mathbf{0}$ .

С учетом определения старшего вектора состояния  $\hat{j}_+ |+\rangle = 0$  и согласно II. 3.2 вычисляем квадратичный оператор Казимира для фундаментального спинорного представления частицы со спином  $j = 1/2$ ,

$$\hat{j}^2 |+\rangle = \frac{3}{4} |+\rangle, \quad j(j+1) = \frac{3}{4}$$

## 7.6.2 3.2 Pauli Matrices

В фундаментальном представлении алгебры  $\mathfrak{su}(2)$  генераторы - это матрицы  $2 \times 2$ , отличные от нуля матричные элементы которых принимают следующие значения:

$$\langle + | \Gamma_z | + \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle - | \Gamma_z | - \rangle = -\frac{1}{2}$$

так как  $\Gamma_z$  - это диагональный оператор из подалгебры Картана в базисе состояний  $|\pm\rangle$ , а согласно (II.3.3) и (II.3.7)

$$\langle + | \Gamma_+ | - \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle - | \Gamma_- | + \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

При действии на базисные векторы представления любая матрица может быть представлена через матричные элементы  $\Gamma_{mn} = \langle m | \Gamma | n \rangle$  как

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{++} & \Gamma_{+-} \\ \Gamma_{-+} & \Gamma_{--} \end{pmatrix}$$

Значит,

$$\Gamma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Введенная нами при рассмотрении фундаментального представления стандартная связь генератора алгебры  $\Gamma_-$  и компоненты момента  $\hat{j}_-$  согласно II.3.1 задает и связь корневых генераторов с  $\hat{j}_\pm = \sqrt{2}\Gamma_\pm$ , а это приводит к явному виду матриц

$$\hat{j}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{j}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Генераторы

$$\hat{j}_z = \Gamma_z, \quad \hat{j}_x = \frac{1}{2}(\hat{j}_+ + \hat{j}_-), \quad \hat{j}_y = -\frac{i}{2}(\hat{j}_+ - \hat{j}_-),$$

задают  $\hat{\mathbf{j}}^2 = \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + \hat{j}_z^2$  и определяют матрицы Паули  $\boldsymbol{\sigma}$ ,

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \equiv \hat{\mathbf{j}}$$

откуда

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства этих матриц подробно изучаются в квантовой механике. Отметим лишь, что

$$\text{tr}(\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab}, \quad \text{tr}(\hat{j}_a \hat{j}_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}, \quad a, b \in \{x, y, z\}$$

### 7.6.3 3.3 Representation with a Moment $j$

Согласно общей схеме построения неприводимого представления (II.2.11)-(II.2.15) с записью старшего веса в виде разложения по фундаментальным векторам с неотрицательными целыми коэффициентами, старший вектор состояния  $|\boldsymbol{\mu}_S\rangle = |\sum p_m \boldsymbol{\lambda}_m\rangle$ , который в случае одномерного пространства фундаментальных векторов алгебры  $\mathfrak{su}(2)$  имеет вес

$$p_1 \boldsymbol{\lambda}_1 \mapsto p_1 \lambda_z = \mu_S, \quad \text{т.е. } \mu_S = \frac{p_1}{2} = j$$

часто принято обозначать в математической литературе символом  $|j\rangle$ . Подчеркнем, что все базисные состояния неприводимого представления мы полагаем нормированными на единицу. При этом напомним, что базисные состояния с разными собственными значениями операторов из полного набора наблюдаемых величин являются еще и ортогональными друг другу.

Минимальное значение проекции момента на ось  $z$  - младший вес - получается отражением старшего веса относительно единственного корня алгебры  $\mathfrak{su}(2)$ ,

$$\mathfrak{s}_j(p_j \boldsymbol{\lambda}_j) = p_j \boldsymbol{\lambda}_j - p_j \cdot 2 \frac{(\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\alpha}_j)}{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_j)} \boldsymbol{\alpha}_j \mapsto \mathfrak{s}_z(p_1 \lambda_z) = p_1 (\lambda_z - \alpha_z)$$

откуда

$$\mathfrak{s}_z j = j - p_1 \cdot \alpha_z = \frac{p_1}{2} - p_1 = -j$$

Значение  $\alpha_z = 1$  задает длину шага в изменении веса состояния при действии понижающего оператора. Число базисных состояний равно числу шагов от старшего веса к младшему  $p_1 = 2j$  плюс одно исходное состояние со старшим весом, т.е. всего имеется  $2j + 1$  состояний с проекциями момента на ось  $z$ , значение которой равно  $m$ :

$$m \in \{j, j-1, \dots, -j+1, -j\}$$

Инвариант представления - квадрат момента импульса  $\hat{\mathbf{j}}^2$  - легко вычислить, действуя на состояние старшего веса, если учесть, что, согласно (II.2.20)

$$\langle \mu_S | \Gamma_+ \Gamma_- | \mu_S \rangle = \langle \mu_S | (\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_z) | \mu_S \rangle = \langle \mu_S | \mu_S \cdot \alpha_z | \mu_S \rangle \Rightarrow \langle j | \Gamma_+ \Gamma_- | j \rangle = j,$$

можно переписать для операторов  $\hat{j}_{\pm} = \sqrt{2} \Gamma_{\pm}$

$$\langle \mu_S | j_+ j_- | \mu_S \rangle = \langle \mu_S | 2 (\boldsymbol{\mu}_S, \boldsymbol{\alpha}_z) | \mu_S \rangle = \langle \mu_S | 2 \mu_S \cdot \alpha_z | \mu_S \rangle \Rightarrow \langle j | \hat{j}_+ \hat{j}_- | j \rangle = 2j$$

откуда из

$$\hat{\mathbf{j}}^2 = \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2} (\hat{j}_+ \hat{j}_- + \hat{j}_- \hat{j}_+)$$

легко находим стандартный результат

$$\begin{aligned} \langle j | \hat{\mathbf{j}}^2 | j \rangle &= \left\langle j \left| \left( \hat{j}_z^2 + \frac{1}{2} (\hat{j}_+ \hat{j}_- + \hat{j}_- \hat{j}_+) \right) \right| j \right\rangle = \langle j | \hat{j}_z^2 | j \rangle + \frac{1}{2} \langle j | \hat{j}_+ \hat{j}_- | j \rangle + \frac{1}{2} \langle j | \hat{j}_- \hat{j}_+ | j \rangle = \\ &= \langle j | j^2 | j \rangle + \frac{1}{2} 2j + \frac{1}{2} \langle j | \hat{j}_- (\hat{j}_+ | j \rangle) = j^2 + j + 0 = j(j+1) \end{aligned}$$

В общем формализме квадратичный оператор Казимира (II.1.7)

$$\hat{\mathbf{j}}^2 = \hat{j}_z^2 + \hat{j}_- \hat{j}_+ + \hat{j}_z$$

при действии на старший вектор состояния воспроизводит этот результат, поскольку

$$\hat{j}_+ |j\rangle = 0, \quad \text{а } \hat{j}_z |j\rangle = j |j\rangle$$

Рекуррентное соотношение (II.2.6 для нормировочного коэффициента (II.2.5 позволяет определить нормированное на единицу базисное состояние  $|j-m\rangle$  с собственным значением  $\hat{j}_z |j-m\rangle = (j-m) |j-m\rangle$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}_m}} \Gamma_-^m |j\rangle \equiv |j-m\rangle = \frac{\hat{j}_-^m}{\sqrt{2^m \mathcal{K}_m}} |j\rangle$$

где

$$\mathcal{K}_{m+1} = \mathcal{K}_m \left\{ (m+1) (\boldsymbol{\alpha}_z, \boldsymbol{\mu}_S) - \frac{1}{2} m(m+1) (\boldsymbol{\alpha}_z, \boldsymbol{\alpha}_z) \right\} = \mathcal{K}_m (m+1) \left( \frac{1}{2} p_1 - \frac{1}{2} m \right).$$

Значит, действие понижающего оператора на базисное состояние, имеющее единичную норму, дает

$$\hat{j}_- |j-m\rangle = \sqrt{2} \Gamma_- |j-m\rangle = \sqrt{2} \Gamma_- \frac{\Gamma_-^m}{\sqrt{\mathcal{K}_m}} |j\rangle = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{K}_m}} \cdot \Gamma_-^{m+1} |j\rangle = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{K}_m}} \cdot \sqrt{\mathcal{K}_{m+1}} |j-m-1\rangle.$$

С учетом того, что  $p_1 = 2j$ , значение ненулевого матричного элемента понижающего оператора

$$\langle j - m - 1 | (\hat{j}_- | j - m \rangle) = \sqrt{\frac{2\mathcal{K}_{m+1}}{\mathcal{K}_m}} = \sqrt{(m+1)(2j-m)}$$

Введение стандартных квантовомеханических обозначений для базисных состояний момента импульса  $j$  с его проекцией на ось  $z$ , равной  $m_j$ :

$$|j - m\rangle \mapsto |j, m_j\rangle, \quad \text{где} \quad m_j = j - m$$

приводит к общеизвестному результату

$$\langle j, m_j - 1 | (\hat{j}_- | j, m_j \rangle) = \sqrt{(j - m_j + 1)(j + m_j)} = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j - 1)}.$$

Эту формулу записывают в матричной форме: квадратная матрица  $j_-$  размером  $(2j+1) \times (2j+1)$  имеет два индекса  $(\hat{j}_-)^{mm'}$ , и в данном выражении  $m = m_j - 1$ , а  $m' = m_j$ , т.е. отличные от нуля элементы матрицы -

$$(\hat{j}_-)^{(m_j-1)m_j} = \sqrt{(j - m_j + 1)(j + m_j)} = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j - 1)}.$$

Эрмитово сопряжение матрицы - это композиция комплексного сопряжения матричных элементов и транспонирования, т.е. смены порядка следования матричных индексов,

$$(\hat{j}_-^\dagger)^{m'm} = \left\{ (\hat{j}_-)^{mm'} \right\}^*$$

Так как  $\hat{j}_-^\dagger = \hat{j}_+$ , мы устанавливаем, что эрмитово сопряжение дает отличные от нуля матричные элементы повышающего оператора

$$(\hat{j}_+)^{m_j, (m_j-1)} = \langle j, m_j | (\hat{j}_+ | j, m_j - 1 \rangle) = \sqrt{(j - m_j + 1)(j + m_j)} = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j - 1)}$$

или после элементарного сдвига отсчета индексов на единицу,  $m_j \mapsto m_j + 1$ ,

$$\langle j, m_j + 1 | (\hat{j}_+ | j, m_j \rangle) = \sqrt{(j - m_j)(j + m_j + 1)} = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j + 1)}.$$

Для читателя, знакомого с квантовой механикой, заметим, что в силе остаются известные выражения для коэффициентов Клебша-Гордана и теорема Вигнера-Экарта для неприводимых тензорных операторов.

Применение общих формул II.3.16 и II.3.17 в частном случае, когда  $j = \frac{1}{2}$ , позволяет воспроизвести генераторы групповых преобразований  $\hat{j}_\pm$ , которые приведены в (II.3.11) и получены нами чуть выше другим способом при описании фундаментального представления  $\mathfrak{su}(2)$ . Диагональный вид матрицы  $\hat{j}_z$  также легко устанавливается, так как он является следствием выбора базиса собственных состояний этой матрицы в пространстве представления. В итоге,

$$\hat{j} = \frac{1}{2}\sigma$$

где  $\sigma$  - матрицы Паули.

Подчеркнем, что и для неприводимого представления с моментом  $j$ , указанные формулы позволяют однозначно найти генераторы поворотов в виде матриц размером  $(2j+1) \times (2j+1)$ . Эти матрицы называют стандартным представлением генераторов

поворота момента  $j$ . Таким образом, стандартное представление определяется в ортонормированном базисе квантовых состояний  $|j, m_j\rangle$ .

Для сравнения, наряду со стандартным представлением в виде матриц размером  $(2j + 1) \times (2j + 1)$ , которые определяют линейные преобразования в пространстве состояний размерности  $2j + 1$ , широко известно тензорное представление генераторов группы поворотов в случае, когда  $j$  - это целое положительное число, а значит, представление  $SO(3)$  совпадает с представлением  $SU(2)$ . Тогда можно показать, что в декартовых координатах трехмерного пространства симметричный бесследовый по любой паре индексов тензор ранга  $j$  также описывает неприводимое представление момента  $j$  (см. [1]).

#### Киселев-2022-1

8. Найдите стандартное представление для генераторов поворотов в случае  $j = 1$ .

### 7.6.4 3.4 Isotopic Invariance (Spectroscopy)

Мы исходим из того, что ядра атомов состоят из связанных ядерными силами нуклонов: положительно заряженных протонов и нейтральных нейтронов, массы которых весьма близки друг к другу. В ведущем приближении при описании спектра масс ядер, составленных из нуклонов, отличием масс протона и нейтрона можно пренебречь, что дает возможность ввести симметрию в спектроскопии ядер, обусловленную инвариантностью массы в ядрах, которые содержат одно и то же количество нуклонов, но могут иметь разный заряд в зависимости от числа протонов в ядре. Говорят, что базис квантовых состояний ядер с одной и той же массой - это мультиплет состояний, в котором одно базисное состояние отличается от другого только за счет преобразований состояний составляющих ядро нуклонов: одно базисное состояние нуклона может быть преобразовано в другое. С математической точки зрения речь идет о том, что мультиплет - это базис в пространстве состояний неприводимого представления группы симметрии в спектроскопии ядер, а массы составных ядер являются инвариантами этой группы, т.е. зависят от операторов Казимира в группе. Рассмотрим эти вопросы более детально.

Гипотезу о существовании нейтрона высказал Дм.Дм.Иваненко и независимо от него - В.Гейзенберг. При этом Гейзенберг сделал еще один важный шаг: ввел понятие зарядовой симметрии ядерных сил или, выражаясь современным языком, изотопической инвариантности сильных взаимодействий. Гейзенберг предположил, что, если пренебречь различием электромагнитного взаимодействия протонов и нейтронов, а также малой разностью их масс  $m_n - m_p \approx 2$  МэВ при  $m_n \approx 940$  МэВ, то протоны и нейтроны в отношении действия ядерных сил становятся неразличимыми, т.е. эквивалентными, и поэтому имеет смысл говорить о нуклоне как о квантовом состоянии, представляющем собой суперпозицию двух базисных состояний, состояний протона и нейтрона. Это состояние нуклона называют изоспинором или дублетом,

$$| \text{nucleon} \rangle = C_p | \text{proton} \rangle + C_n | \text{neutron} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad N = \begin{pmatrix} C_p \\ C_n \end{pmatrix}$$

Физический смысл коэффициентов  $C_p$  и  $C_n$  - это амплитуды вероятности того, что нуклон находится в состоянии протона и нейтрона, соответственно,

$$w_p = |C_p|^2, \quad w_n = |C_n|^2, \quad w_p + w_n = 1$$

Суперпозиция двух базисных состояний является двумерным пространством представления, определяющего группу преобразований одной суперпозиции в другую.



Эти преобразования определяют группу симметрии двухкомпонентной волновой функции нуклона. В этой группе допускаются преобразования, сохраняющие нормировку изоспинора. Нормировка в общем случае - это число нуклонов в ядре. Преобразования, сохраняющие нормировку двухкомпонентного спинора, - это группа унитарных матричных преобразований двухкомпонентных столбцов,

$$N^u = \begin{pmatrix} C_p^u \\ C_n^u \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} C_p \\ C_n \end{pmatrix} = U \cdot N, \quad U^\dagger U = \mathbb{1}$$

Из унитарности сразу следует, что  $|\det U| = 1$ . Если исключить из рассмотрения не наблюдаемую общую комплексную фазу такого изоспинора, то можно считать, что детерминант матриц преобразования равен единице,  $\det U = 1$ , и мы приходим к группе  $SU(2)$ .

В современной трактовке теории сильных взаимодействий в основе изотопической симметрии лежат следующие три факта:

- короткодействие ядерных сил на расстояниях порядка размера ядра  $r_0 \sim 10^{-13}$  см, что позволяет оценить характерный импульс из соотношения неопределенности координата-импульс как  $p \sim \hbar/r_0$  и масштаб энергий как  $E \sim pc$ , если имеет место движение с максимально допустимой скоростью распространения частиц и полей  $c$  и эта скорость может реализовываться в сильных взаимодействиях, так что характерная энергия сильных взаимодействий

$$E_0 \sim \frac{\hbar c}{r_0} \sim 200 \text{ МэВ}$$

- электромагнитное взаимодействие на расстояниях порядка  $r_0$  дает оценку импульса как  $p \sim \hbar/r_0$  и масштаб энергии взаимодействий как  $E \sim pv$ , где скорость  $v$  принимает характерное значение в рамках теории возмущений  $v \sim c\alpha_{\text{em}}$  с постоянной тонкой структуры  $\alpha_{\text{em}} = e^2/(\hbar c) \sim 1/137$ , так что масштаб электромагнитных взаимодействий составляет величину

$$E_{\text{em}} \sim \frac{e^2}{r_0} \sim \alpha_{\text{em}} E_0 \sim 2 \text{ МэВ}$$

т.е. на два порядка меньше характерного масштаба энергий сильного взаимодействия,

- массы кварков  $u$  и  $d$ , составляющих протон и нейтрон  $p = (uud), n = (udd)$ , с электрическими зарядами  $Q_u = +2/3$  и  $Q_d = -1/3$  в единицах измерения, где заряд электрона равен -1, имеют величину в несколько МэВ, что пренебрежимо мало по сравнению с масштабом сильных взаимодействий (около 200 МэВ), удерживающих кварки в нуклоне или в любом другом адроне, составленном из кварков и антикварков, причем поскольку комптоновская длина кварка  $\lambda_q = \hbar/(m_q c)$  существенно превосходит радиус действия сильных взаимодействий, энергия кваркового состояния в адроне существенно превышает энергию покоя кварка, т.е. кварковое состояние внутри связанного состояния возникает за счет излучения квантов сильного взаимодействия при релятивистском движении кварков, так что итоговое кварковое состояние имеет энергию связи порядка 200 МэВ.

Поэтому при изучении сильных взаимодействий в ведущем приближении можно пренебречь как электромагнитными взаимодействиями кварков, так и различиями в их динамике, вызванными массами этих кварков, потому что динамика кварков является ультрарелятивистской: энергия движения много больше массы покоя.

В подобном подходе базисные квантовые состояния изоспиноров характеризуются единственным квантовым числом - проекцией изоспина  $T_3$ , которая связана с электрическим зарядом компонент спинора соотношением

$$Q = \frac{1}{6} + T_3$$

т.е.  $T_3 = \frac{1}{2}$  отвечает  $u$ -кварку, а  $T_3 = -\frac{1}{2}$  —  $d$ -кварку. Обычно эту связь заряда с изоспином записывают с использованием еще одного квантового числа — гиперзаряда  $Y$ : для  $u$ - и  $d$ -кварков его полагают равным

$$Y_u = Y_d = \frac{1}{3}$$

и связывают с барионным числом  $B$ : барионное число нуклона  $B = 1$ , так что кварки несут по трети от барионного числа нуклонов. Формула

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3$$

справедлива и для антикварков, которые как античастицы кварков имеют противоположное барионное число  $Y_{\bar{u}} = Y_{\bar{d}} = -1/3$ , а также противоположные значения проекции изоспина  $T_3 \mapsto -T_3$  по отношению к изоспину кварков.

Важно подчеркнуть, что каждое базисное состояние представления является собственным для величин гиперзаряда, барионного числа (барионное число есть гиперзаряд с возможным сдвигом начала отсчета, как это станет ясно при рассмотрении группы симметрии более высокого ранга, а именно, группы  $SU(3)$ ) и проекции изоспина как операторов, а формула (II.3.18) отражает операторный характер этих понятий.

Формула (II.3.18) верна и для нуклонов, которые составлены из кварков так, что и нуклоны являются собственными состояниями для операторов гиперзаряда и изоспина: у протона проекция изоспинг<sup>29</sup> равна

$$T_3[p] = T_3[uud] = 2T_3[u] + T_3[d] = \frac{1}{2},$$

а гиперзаряд  $Y_p = 2Y_u + Y_d = 1$ , а у нейтрона

$$T_3[n] = -\frac{1}{2}, \quad Y_n = 1$$

и мы получаем верные значения для электрических зарядов.

Интересно, что и для мезонов, составленных из кварка и антикварка,  $Y = Y_q + Y_{\bar{q}} = 0$ , заряд совпадает со значением проекции изоспина. Например, триплет пи-мезонов ( $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ) имеет изоспин  $T = 1$ , а массы частиц в триплете отличаются не более, чем на 4 МэВ, что также мало по сравнению с  $m_{\pi^+} \approx 140$  МэВ. При этом сразу предполагаем, что  $\pi^+(u\bar{d}), \pi^- = (\bar{u}d)$ , а  $\pi^0$  — это суперпозиция  $^{30}(\bar{u}u)$  и  $(\bar{d}d)$ . В итоге, мы видим, что составная кварковая модель описывает мультиплеты адронных состояний, в которых массы приблизительно равны друг другу с высокой точностью, как базисные состояния неприводимых представлений группы изоспина. При этом мультиплет — это неприводимое представление группы, которое характеризуется инвариантом: в группе это квадратичный оператор Казимира, а в физике это масса состояний мультиплета. Другими словами, масса базисных состояний мультиплета, как мы и говорили в начале раздела, является инвариантом, который определяется единственным независимым инвариантом группы  $SU(2)$  — собственными значениями квадратичного оператора Казимира, так что неприводимое представление группы, для которого инвариант Казимира зафиксирован, задает массу частиц мультиплета, что и указывает на группу

<sup>28</sup> Из формулы для оценки энергии взаимодействий следует, что константа сильного взаимодействия  $\alpha_s$  сравнима с единицей, так что имеет место непертурбативный режим, т.е. оценки с использованием теории возмущений неприменимы, а скорость движения частиц (кварков) в ядре за счет сильного взаимодействия может достигать релятивистского предела  $c$ .

симметрии в спектроскопии адронов, составленных из сильно взаимодействующих кварков.

Формула (II.3.18) применяется и для состояний, синглетных по изоспину:  $T = T_3 \equiv 0$ . Обобщение (II.3.18) включает в себя странные кварки, изоспин которых равен нулю, но они, кроме барионного числа, несут еще и специальный заряд, который называют странностью  $S = -1$ , так что гиперзаряд складывается из барионного числа и странности,

$$Y = B + S$$

Тогда электрический заряд  $s$ -кварка согласно (II.3.18) равен

$$Q_s = -\frac{1}{3}$$

что и наблюдается экспериментально.

Итак, кварки - это квантовые состояния, которые принадлежат пространствам неприводимых представлений группы изотопических преобразований  $SU(2)$ :  $u$ - и  $d$ -кварки образуют изодублет, а  $s$ -кварк изосинглет. Аромат кварка - это состояние физической системы с определенным набором собственных значений наблюдаемых величин: заряд, изоспин, масса и спин. Конкретный набор этих значений указывает на  $u$ -кварк,  $d$ -кварк,  $s$ -кварк и т.д., т.е. на имя кварка. Поэтому говорят, что имя кварка определяет его «аромат» (flavour (UK), flavor (US)). Адроны - составные состояния, построенные из кварковых состояний. Адроны делятся на барионы, которые имеют отличное от нуля целое барионное число, и мезоны с барионным числом  $B = 0$ . Состояния с нецелым барионным числом не наблюдаются как асимптотически свободные состояния, которые могут распространяться в пространстве-времени вне зависимости от других состояний. Состояния с дробным барионным числом наблюдаются только как часть систем с целым барионным числом, т.е. только во взаимодействии с другими подсистемами, а значит, не в асимптотически свободной области. Говорят, что такое правило - это следствие динамики взаимодействий кварков, которое называют конфайнментом. Пример подсистемы - дикварки: ии-дикварк - это часть бариона (uud). Вместе с тем, природа конфайнмента кварков включает в себя не только рассуждение о барионном числе: силы, удерживающие кварки в адронах, описываются симметрией  $SU(3)$  в отношении новой характеристики кварков, которую назвали цветом. Физические предпосылки для введения цветовой симметрии мы опишем в специальном параграфе этой главы, посвященном представлениям  $SU(3)$ , т.е. в 4.

Отметим, что изотопическая симметрия в спектроскопии подтверждена экспериментально, так как обнаружено множество мультиплетов с определенным значением изоспина, причем члены изотопического мультиплета в рамках точности изотопической инвариантности около 2 МэВ - это состояния, которые имеют совпадающие массы:

барионы - аналоги нуклонов,

---

<sup>29</sup> Мы указываем собственное значение проекции изоспина для базисного состояния, символ которого записан в квадратных скобках.

<sup>30</sup> Для определения коэффициентов суперпозиции необходимо знать, что такое сопряженный спинор и как происходит сложение изоспина двух подсистем, образующих одну систему, а в данном случае, кварк и антикварк образуют мезон. Этот сюжет мы рассмотрим детально в разделе 4.5 Главы 2. Более того, мы изучим вопрос о спине или моменте количества движения составной системы как вопрос о сложении двух спинов или моментов количества движения в Главе 4 раздел 1.1. 1

частицы изоспин масса размерность наименование мультиплета

$$\begin{aligned}
 (p; n), \quad T = \frac{1}{2}, \quad m \approx 940 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 2, \quad \text{дублет нуклонов со спином } \frac{1}{2}, \\
 (\Sigma^+; \Sigma^0; \Sigma^-), \quad T = 1, \quad m \approx 1190 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 3, \quad \text{триплет гиперонов со спином } \frac{1}{2} \\
 (\Xi^0; \Xi^-), \quad T = \frac{1}{2}, \quad m \approx 1315 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 2, \quad \text{дублет гиперонов со спином } \frac{1}{2} \\
 (\Delta^{++}; \Delta^+; \Delta^0; \Delta^-), \quad T = \frac{3}{2}, \quad m \approx 1232 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 4, \quad \text{квартет } \Delta\text{-изобарионов со спином } \frac{3}{2}, \\
 (\Sigma^{*+}; \Sigma^{*0}; \Sigma^{*-}), \quad T = 1, \quad m \approx 1385 \text{ МэВ}, \quad 2T + 1 = 3, \quad \text{триплет гиперонов со спином } \frac{3}{2} \\
 (\Xi^{*0}; \Xi^{*-}), \quad T = \frac{1}{2}, \quad m \approx 1530 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 2, \quad \text{дублет гиперонов со спином } \frac{3}{2} \\
 \text{и странностью } S = -2,
 \end{aligned}$$

и мезоны,

частицы изоспин масса размерность наименование мультиплета

$$\begin{aligned}
 (K^+; K^0), \quad T = \frac{1}{2}, \quad m \approx 495 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 2, \quad \text{дублет } K\text{-мезонов (каонов)} \\
 (\pi^+; \pi^0; \pi^-), \quad T = 1, \quad m \approx 140 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 3, \quad \text{триплет } \pi\text{-мезонов (пионов)} \\
 (\bar{K}^0; \bar{K}^-), \quad T = \frac{1}{2}, \quad m \approx 495 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 2, \quad \text{дублет антикаонов со спином } 0 \\
 (K^{*+}; K^{*0}), \quad T = \frac{1}{2}, \quad m \approx 892 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 2, \quad \text{дублет векторных } K\text{-мезонов} \\
 (\rho^+; \rho^0; \rho^-), \quad T = 1, \quad m \approx 770 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 3, \quad \text{триплет векторных } \rho\text{-мезонов} \\
 (\bar{K}^{*0}; \bar{K}^{*-}), \quad T = \frac{1}{2}, \quad m \approx 892 \text{ МВ}, \quad 2T + 1 = 2, \quad \text{дублет векторных антикаонов} \\
 \text{со спином } 1 \text{ и странностью } S = +1.
 \end{aligned}$$

Отметим, что у мезонов в состав мультиплета могут входить и частицы, и их античастицы, как в случае триплетов  $\pi$  - и  $\rho$ -мезонов. У барионов античастицы образуют только отдельные изо-мультиплеты, которые мы не стали выписывать, так как свойства античастиц получаются заменой всех знаков зарядов в мультиплете частиц. У мезонов это также наблюдается для частиц со странностью, как в случае мультиплетов каонов, для которых мы выписали эти мультиплеты в явном виде. Такое различие по составу мультиплетов, когда у мезонов возможно вхождение в мультиплет и частиц, и античастиц, указывает на то, что мезоны составлены из кварков и антикварков, а барионы - исключительно из кварков.

Перечисленные нами свойства мультиплетов барионов и мезонов согласуются с формулами для электрического заряда (II.3.18) и гиперзаряда (II.3.19)

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3, \quad Y = B + S$$

так что у мезонов барионное число равно нулю  $B_M = 0$ , а у барионов  $B = +1$ , а у их античастиц, у антибарионов  $B = -1$

Определение кваркового состава, т.е. запись этих мультиплетов в виде неприводимых представлений, которые можно выделить в тензорных произведениях фундаментальных представлений группы  $SU(2)$ , потребует специальной техники схем Юнга, что и будет

описано нами позже при изучении представлений группы SU(3). На данном этапе подчеркнем, что составная модель сильно взаимодействующих частиц - адронов - позволяет не только классифицировать состояния барионов и мезонов, но и выяснить физическую причину существования реплик одних и тех же мультиплетов с большей массой: в связанных состояниях кварков наряду с ароматами, которые описываются группой симметрии ароматов SU(2), есть пространственно-временные характеристики: спин, орбитальный момент, номер возбуждения радиальной волновой функции, что и приводит к появлению возбужденных состояний, которые также образуют мультиплеты по группе симметрии ароматов!

### 7.6.5 3.5 Weak Isospin

Группа SU(2) описывает и свойства слабых взаимодействий. Дело в том, что при слабых взаимодействиях в том же бета-распаде нейтрона и во множестве других процессах наблюдаются так называемые заряженные токи: например,  $d$ -кварк переходит в  $u$ -кварк, электрон в электронное нейтрино  $e \rightarrow \nu_e$  так, что испускается  $W^-$ -бозон с зарядом -1, который и обеспечивает сохранение заряда в слабом процессе. Значит, одно базисное кварковое состояние при слабых заряженных токах преобразуется в другое базисное кварковое состояния,  $|u\rangle \leftrightarrow |d\rangle$ , так что и суперпозиция таких базисных кварковых состояний преобразуется в суперпозицию этих же базисных кварковых состояний, т.е. имеют место преобразования в двумерном пространстве представления, которое называют слабым кварковым изодублетом. То же можно сказать и о преобразованиях базисных лептонных состояний,  $|e\rangle \leftrightarrow |\nu_e\rangle$ , суперпозиция которых образует двумерное пространство слабого лептонного изодублета. Число кварков и лептонов в подобных процессах слабого взаимодействия остается неизменным, что, как мы видели в предыдущем разделе при рассмотрении группы симметрии для состояний спектроскопии, где также имеет место условие нормировки числа нуклонов, означает введение группы SU(2).

В описанном базисе кварковых и лептонных состояний реализация представления в смысле квантовой механики приводит к функции дискретного аргумента принимающего всего два значения. Отсюда две компоненты - это запись функции двумерного пространства состояний путем перечисления всех ее значений: и их всего два.

Поэтому, если ввести базис в пространстве квантовых состояний кварков с порядком компонент, который определяется в сторону уменьшения электрического заряда на единицу от верхней компоненты к нижней,

и лептонов

$$|u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{Q}}, \quad |d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{Q}}$$

то можно ввести дублеты

$$|\nu_e\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{L}}, \quad |e\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{L}}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$$

где компоненты - это комплексные числа, которые описывают суперпозицию состояний и называются амплитудами вероятности этих состояний. Например, общепринятым является запись квантового состояния 31

$$u|u\rangle + d|d\rangle \equiv \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

Тогда квадраты модулей амплитуд в суперпозиции состояний в логике квантовой механики определяют вероятности наблюдать в системе соответствующие квантовые состояния:

$$w(u) = u^*u \equiv \bar{u}u, \quad w(d) = \bar{d}d, \quad w(\nu_e) = \bar{\nu}_e\nu_e, \quad w(e) = \bar{e}e$$

Сохранение числа лептонов и числа кварков означает, что в слабых взаимодействиях дублеты сохраняют свою нормировку  $\mathcal{Q}^\dagger \mathcal{Q}$  и  $\mathcal{L}^\dagger \mathcal{L}$ , а это имеет место при унитарных преобразованиях дублетов  $2 \times 2$  матрицами  $U$ . При этом, общая фаза дублетов, во-первых, не меняет относительную фазу между базисными состояниями, и следовательно, эта общая фаза не является наблюдаемой величиной в квантовой механике, т.е. физический смысл имеют только преобразования группы  $U(2)$ , из которых исключили преобразования группы  $U(1)$ , - это группа  $SU(2)$ . Во-вторых, дополнительный аргумент: изменение общей фазы дублетов не имеет никакого отношения к преобразованиям за счет слабых взаимодействий, потому что наблюдаемые преобразования за счет слабых взаимодействий либо заменяют одно базисное состояние на другое:  $|u\rangle \leftrightarrow |d\rangle, |e\rangle \leftrightarrow |\nu_e\rangle$ , - либо, как мы увидим дальше, изменяют относительную фазу базисных состояний в их суперпозиции, так что группа унитарных преобразований с  $|\det U| = 1$  в случае рассмотрения свойств слабых взаимодействий ограничивается специальными преобразованиями, исключающими глобальный сдвиг фазы дублетов за счет действия группы  $U(1)$ . Это можно получить, зафиксировав комплексную фазу  $\det U$ . Если потребовать, чтобы преобразования дублетов включали бы в себя тождественное преобразование, для которого  $\det U = 1$ , то в итоге получается группа  $SU(2)$ , состояния представлений которой называются слабым изоспином  $T^W$ . Формула для связи электрического заряда базисных состояний с проекцией изоспина этих состояний имеет тот же вид, что и (II.3.18), так как разность зарядов верхних и нижних компонент дублетов отличается на единицу, что совпадает с разностью проекций слабого изоспина, откуда

$$Q = \frac{1}{2}Y^W + T_3^W$$

где для верхних и нижних компонент дублетов проекция изоспина

$$T_3^W[u] = T_3^W[\nu_e] = \frac{1}{2}, \quad T_3^W[d] = T_3^W[e] = -\frac{1}{2}$$

а значение гиперзаряда  $Y^W$  является одним и тем же для обоих компонент дублета, но отличается для разных дублетов, т.е. у кваркового и лептонного дублетов значения слабого гиперзаряда разные,

$$Y^W[\mathcal{L}] = -1, \quad Y^W[\mathcal{Q}] = +\frac{1}{3}$$

Такое отличие можно считать индикатором того, что у лептонов и кварков в дублете есть специфические заряды или квантовые числа, которые называют лептонным числом и

---

<sup>31</sup> Обращаем внимание читателя на то, что  $|u\rangle$  или  $|d\rangle$  внутри символа кет-вектора - не более чем обозначения для базиса в двумерном пространстве состояний, т.е. для двухкомпонентного объекта гильбертова пространства, который можно называть дублетом (или спинором, если подчеркивать закон его преобразования). А вот тот же значок перед символом кет-вектора - это комплексное число, на которое кет-вектор с той же буквой внутри умножается.

барионным числом. Принято считать, что у лептонов лептонное число  $L[\mathcal{L}]$  равно единице,  $L[\mathcal{L}] = 1$ , а у кварков - нулю,  $L[\mathcal{Q}] = 0$ , в то время как барионное число лептонов равно нулю  $B[\mathcal{L}] = 0$ , а у кварков оно отлично от нуля, и определяют его так, чтобы у протона и нейтрона как у самых известных представителей барионов это число было равно единице  $B = 1$ . Но, так как барионы состоят из трех кварков, связанных сильным взаимодействием<sup>32</sup> то отсюда вполне естественно предположить, что барионные числа кварков, как заряды, складываются в составленных из них состояниях, так что  $B[\mathcal{Q}] = \frac{1}{3}$ . Тогда элементарно можно найти подходящую формулу для слабого гиперзаряда в терминах барионного и лептонного чисел,

$$Y^W = B - L$$

Важнейшим свойством слабых взаимодействий, которое было установлено экспериментальным путем, заключается в том, что в этих взаимодействиях участвуют только левые фермионы (проекция спина на ось импульса в безмассовом пределе равна  $-\frac{1}{2}$ , состояния с левой проекцией спина помечены нижним индексом  $L$  в смысле left) и их правые античастицы (проекция спина на ось импульса в безмассовом пределе равна  $+\frac{1}{2}$ , состояния с правой проекцией спина помечены нижним индексом  $R$  в смысле right)<sup>33</sup> замена частиц на античастицы вместе с заменой левого на правое и обратно называется комбинированной СР-четностью, где С указывает на смену знаков зарядов частиц, а Р - на зеркальную инверсию пространства. С учетом этого факта фермионы первого поколения - это дублеты левых лептонов и кварков (по слабому взаимодействию) и их правых античастиц<sup>34</sup>

$$\mathcal{Q}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_R = \begin{pmatrix} \bar{d}_R \\ -\bar{u}_R \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_L = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{L}}_R = \begin{pmatrix} e_R^+ \\ -\bar{\nu}_R^e \end{pmatrix}$$

квантовые числа которых мы уже обсудили выше, а также правые частицы - синглеты по слабому взаимодействию и их СР-сопряженные партнеры,

$$u_R, \quad d_R, \quad \bar{u}_L, \quad \bar{d}_L, \quad e_R, \quad e_L^+$$

Термин «синглет по слабому изоспину» означает, что слабый изоспин равен нулю, так что гиперзаряд и заряд связаны редуцированной формулой

<sup>32</sup> В отношении сильных взаимодействий лептоны нейтральны, а кварки несут цвет и являются триплетом 3 по группе  $SU_c(3)$ , которую мы обсудим чуть ниже [индекс «с» - это аббревиатура colour (UK), color (US)]. Антикварки же цветовые антитриплеты  $\bar{3}$  по группе  $SU_c(3)$ .

<sup>33</sup> Как следует из самого определения левых и правых фермионов спина  $s = 1/2$  как состояний в ультрарелятивистском (безмассовом) пределе, эти понятия являются сугубо релятивистскими по своей сути. В релятивистской теории эти фермионы описываются биспинорами Дирака (элементами четырехкомпонентного пространства представлений группы Пуанкаре), а левые и правые компоненты строятся как специфические суперпозиции компонент биспинора Дирака так, что их физическая интерпретация носит явный характер в терминах проекции спина на вектор импульса частицы только в ультрарелятивистском пределе для так называемых киральных полей.

<sup>34</sup> Знак минус в сопряженном дублете введен, чтобы сопряженный дублет преобразовывался той же матрицей, что и дублет, а не комплексно сопряженной матрицей: это свойство выводится при рассмотрении спиноров при квантовании спина:

$$\psi_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d}_R \\ -\bar{u}_R \end{pmatrix}, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} \bar{u}_R \\ \bar{d}_R \end{pmatrix}$$

Заметим, что по построению согласно свойствам преобразований верхние компоненты сопряженного дублета  $\psi_c$  имеют проекцию изоспина  $T_3 = +\frac{1}{2}$ , па нижние  $-T_3 = -\frac{1}{2}$ . Напротив, верхние компоненты дублета  $\psi^*$  имеют проекцию изоспина  $T_3 = -\frac{1}{2}$ , а нижние  $-T_3 = +\frac{1}{2}$ , что легко установить из явного вида этих компонент, приведенного выше.

$$Q = \frac{1}{2}Y_R^W$$

где известный электрический заряд этих состояний определяет величину гиперзаряда, которая, конечно, получается разной для левых дублетов и правых синглетов,  $Y^W \neq Y_R^W$ . Объяснение такого неравенства может возникнуть только в модели, в которой и левые, и правые частицы оказываются базисными состояниями одного и того же неприводимого представления некоторой, более широкой компактной простой группы, отличной от  $SU(2)$  и имеющей большее значение ранга так, чтобы гиперзаряд или электрический заряд стали бы генераторами в подалгебре Картана в группе Ли большего ранга. В данном же разделе мы принимаем тот факт, что гиперзаряды левых и правых компонент как состояния одной и той же частицы принимают разные значения как экспериментальную данность.

Таким образом, левые частицы со спином  $s = \frac{1}{2}$  участвуют в слабых взаимодействиях, а в силу свойств группы Пуанкаре, которая здесь не рассматривается, отсюда следует, что точно также в слабых взаимодействиях участвуют и СР-сопряженные к частицам античастицы, т.е. правые античастицы. Однако и кварки, и электроны являются частицами, которые обладают как левой проекцией спина на ось импульса, так и правой. Правые частицы, как установил эксперимент, не участвуют в слабых взаимодействиях, т.е. не обладают слабым изоспином, что и называется «синглет по слабому изоспину». Все эти правые частицы перечислены в (II.3.28), но к ним добавлены и СР-сопряженные левые античастицы, которые в силу той же группы Пуанкаре обладают тем же изоспином, т.е. также являются синглетами и не участвуют в слабых взаимодействиях.

Остается еще правое нейтрино  $\nu_R^e$ , у которого заряд, гиперзаряд и слабый изоспин тождественно равны нулю, так что его еще называют стерильным нейтрино, имея в виду, что по отношению в электромагнитным, слабым и сильным взаимодействиям  $\nu_R^e$  абсолютно стерильно.

В отличие от изоспина, который связан со спектроскопией адронов за счет введения дублета легких кварков  $u, d$  и их антикварков, участвующих в сильных взаимодействиях, слабый изоспин - это инструмент описания динамики слабых взаимодействий. Поэтому и понятие гиперзаряда в этих случаях является совершенно разным. Линейная связь электрического заряда с гиперзарядом и слабым изоспином послужила основой для формулирования Вайнбергом, Глешоу и Саламом электрослабой калибровочной теории на основе группы  $U_Y(1) \otimes SU_L(2)$ .

### Киселев-2022-1

9. В группе поворотов  $SO(3)$  перейдите от генераторов поворотов в декартовых координатах вокруг оси  $s_\alpha$  на угол  $\phi^\alpha$  к генераторам поворотов в плоскости  $\mathfrak{s}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha}s_\alpha$  на угол  $\omega^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha}\phi^\alpha$ , так что

$$\frac{1}{2}\mathfrak{s}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = s_\alpha\phi^\alpha$$

Например, в плоскости  $(x, y)$  поворот по направлению от  $x$  к  $y$  - это поворот вокруг оси  $z$  на угол  $\phi^z = \omega^{xy}$ , и он описывается введением генератора  $\mathfrak{s}_{xy}$ . Тензор  $\omega^{\mu\nu}$ , введенный Эли Картаном, учитывает направление поворота, так что  $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ . Другими словами, угол поворота от  $y$  к  $x$  - это взятый с минусом угол поворота от  $x$  к  $y$ . Тензор генераторов поворота в плоскости также является антисимметричным  $\mathfrak{s}_{\mu\nu} = -\mathfrak{s}_{\nu\mu}$ , а суммирование по двум немным индексам приводит к возникновению множителя  $\frac{1}{2}$  для произведения  $\mathfrak{s}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$ , чтобы свести поворот к углу поворота вокруг оси. Докажите, что коммутатор

$$[\mathfrak{s}_{\mu\nu}, \mathfrak{s}_{\lambda\rho}] = i(\delta_{\mu\lambda}\mathfrak{s}_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\mathfrak{s}_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda}\mathfrak{s}_{\mu\rho} + \delta_{\nu\rho}\mathfrak{s}_{\mu\lambda})$$



где  $\delta_{\mu\lambda}$  - метрика евклидова пространства в декартовых координатах.

### Киселев-2022-2

0. Для алгебры группы поворотов в 4-мерном пространстве  $SO(4)$  введите генераторы

$$\tilde{s}_\alpha = \mathfrak{s}_{4\alpha}, \quad \alpha = \{\overline{1, 3}\}, \quad s_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{s}_{\beta\gamma}$$

Найдите их коммутационные соотношения и перейдите к генераторам, которые отвечают алгебре  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ .

## 7.7 Representations of $\mathfrak{su}(3)$

Триплет и анитриплет, гиперзаряд и изоспин как генераторы подалгебры Картана, система повышающих и понижающих генераторов и их корней, переход от генераторов к матрицам Гелл-Манна, квадратичный оператор Казимира, антикоммутатор матриц Гелл-Манна и кубический оператор Казимира, тождество Фирца, шестиугольная весовая диаграмма неприводимого представления, физический смысл длин сторон, операторы Казимира подалгебр и вырожденность состояний, размерность мультиплетта, классификация адронов по симметрии ароматов кварков, октеты и декуплеты, нейтральные компоненты и их кварковый состав, изоспин как оператор из полного набора наблюдаемых, необходимость введения цвета кварков, симметрия и антисимметрия тензоров неприводимых представлений и схемы Юнга, разложение тензорного произведения неприводимых представлений в прямую сумму неприводимых представлений, фундаментальные представления группы  $SU(5)$  и квантовые числа базисных состояний, квадратичный оператор Казимира и индекс Дынкина для определяющего фундаментального представления группы  $SU(N)$ .

### 7.7.1 Fundamental Representation

Алгебра второго ранга с простыми положительными корнями единичной длины имеет пару фундаментальных векторов, каждый из которых, согласно определению

$$2 \frac{(\lambda_j, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \delta_{jm}$$

имеет проекцию  $\frac{1}{2}$  на соответствующий простой положительный корень и ортогонален другому простому положительному корню. Не смотря на то, что простые положительные корни нормированы на единицу, фундаментальные векторы не являются единичными: их не равные нулю проекции на «свои» простые положительные корни фиксированы, но фиксированы и углы между фундаментальными векторами и простым положительными корнями, что задает и направления, и длины фундаментальных векторов. Для  $\mathfrak{su}(3)$  такие фундаментальные корни изображены на рис. 2.6. Их координаты в декартовой

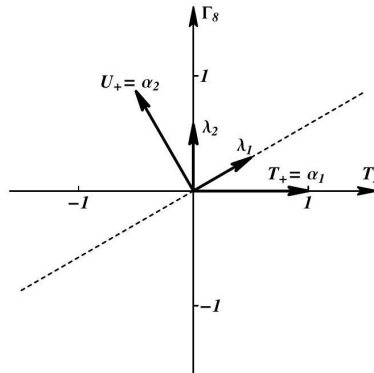


Рис. 2.6: Фундаментальные векторы алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  на плоскости  $\{T_3, \Gamma_8\}$ -системе

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \lambda_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \frac{1}{3}$$

поскольку соответствующие корневые векторы (см. рис. 2.1 на стр. 72 в Главе 2 -

$$\alpha_1 = (1, 0), \quad \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- Воспользуемся явными значениями координат векторов и заметим, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_1 + \lambda_2$$

В правой части этой формулы стоит сумма фундаментальных векторов с положительными коэффициентами так, что эта сумма, записанная в виде  $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2$ , задает состояние старшего веса неприводимого представления  $T^{(p_1, p_2)}$ , а в рассматриваемом варианте это представление  $T^{(1,1)}$ , которое является присоединенным представлением группы  $SU(3)$ . И в (II.4.3 мы установили, что старший вес присоединенного представления равен сумме простых положительных корней группы  $SU(3)$ , которая задает третий положительный корень этой группы. Тот факт, что этот третий положительный корень существует для  $SU(3)$  следует из диаграммы Дынкина для этой группы.

Операции вейлевских отражений  $\mathfrak{s}_{1,2}$  на весовой диаграмме неприводимого представления задаются зеркальными отражениями относительно осей фундаментальных векторов. Это следует из того, что фундаментальный вектор по определению перпендикулярен всем простым положительным корням, кроме одного, которому он ко-дуален. Для случая алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  — перпендикулярен одному из двух корней, которые мы выбрали в качестве простых положительных из 6 имеющихся корней в алгебре  $SU(3)$ . Гиперплоскость отражения с номером два, а в случае  $SU(3)$  линия отражения показана на рис. 2.6 как штриховая. Она перпендикулярна второму простому положительному корню, а первая — первому, и совпадает с осью ординат.

Напомним общие положения о неприводимом представлении и состоянии старшего веса. Старший вес неприводимого представления равен сумме фундаментальных векторов  $\lambda_m$  с неотрицательными целыми коэффициентами  $p_m$ . Эти коэффициенты равны числу шагов понижения состояния старшего веса генераторами  $\Gamma_{-\alpha_m}$  для простых положительных корней  $\alpha_m$  с номером  $m$  соответствующего фундаментального вектора  $\lambda_m$ . Из этого вытекает структура базиса собственных состояний подалгебры Картана первого фундаментального представления со старшим весом

$$\mu_S = \lambda_1$$

Допускается только один шаг понижения в направлении  $\alpha_1$ , т.е. под действием  $\Gamma_{-\alpha_1}$  или  $T_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_1}$ , что эквивалентно также действию на вес старшего вектора операции отражения относительно линии нормали к вектору  $\alpha_1$ , т.е.  $\mathfrak{s}_1$ . В самом деле, по общей формуле

$$\mathfrak{s}_m \lambda_j = \lambda_j - 2 \frac{(\lambda_j, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \alpha_m = \lambda_j - \delta_{jm} \alpha_m$$

найдем, что

$$\mathfrak{s}_1 \lambda_1 = \lambda_1 - \alpha_1, \quad \mathfrak{s}_1 \lambda_1 = \nu_2 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$$

как показано на рис. 2.7

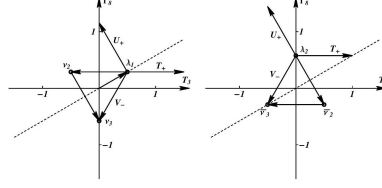


Рис. 2.7: Базис фундаментальных представлений алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  в виде точек на плоскости  $\{T_3, T_8\}$ .

Подчеркнем, что операция отражения весов индуцирована операцией отражения базисных состояний с этими же весами, и в данном случае

$$\mathfrak{s}_1 |\lambda_1\rangle = |\nu_2\rangle$$

так что рассуждения с отражением невырожденных весов эквивалентны рассуждениям с отражениями Вейля для базисных состояний неприводимого представления. Мы будем следовать этой логике и далее при построении фундаментальных представлений.

Понижающий оператор второго простого положительного корня  $\Gamma_{-\alpha_2}$  или  $U_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_2}$ , действуя на старший вектор, дает нуль, так как коэффициент перед вторым фундаментальным вектором в выражении для старшего вектора (II.4.4) равен нулю, а это значит, что и число шагов по направлению против простого положительного корня  $\alpha_2$  равно нулю. Это также можно получить из общей формулы (II.2.20) в случае, когда вес невырожден

$$\Gamma_{-\alpha_m} |\tilde{\nu}\rangle = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu})} |\tilde{\nu} - \alpha_m\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_m} |\tilde{\nu}\rangle = 0, \quad 2 \frac{(\tilde{\nu}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_m \in \{0, \mathbb{N}\}$$

откуда после подстановок  $\tilde{\nu} \mapsto \mu_S$  и  $\alpha_m \mapsto \alpha_2$  получаем

$$\Gamma_{-\alpha_2} |\mu_S\rangle = \sqrt{(\alpha_2, \mu_S)} |\mu_S - \alpha_2\rangle = 0 \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_2} |\mu_S\rangle = 0, \quad \text{так как} \quad 2 \frac{(\mu_S, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = 2(\lambda_1, \alpha_2) = 0$$

Наконец, вес третьего состояния может быть получен отражением  $\nu_2$  относительно второй оси (оператор  $\mathfrak{s}_2$ ) для неприводимого представления с помощью (II.4.5) и (II.4.6

$$\mathfrak{s}_2 \nu_2 = \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_1 \lambda_1 = \mathfrak{s}_2 (\lambda_1 - \alpha_1) = \lambda_1 - \alpha_1 - 2 \frac{(\lambda_1 - \alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} \alpha_2 = \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 = \nu_3 = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

что также можно найти, действуя понижающим оператором  $\Gamma_{-\alpha_1-\alpha_2}$  или  $\hat{V}_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_1-\alpha_2}$  на состояние старшего веса. Согласно II.2.20

$$\begin{aligned} \hat{V}_- |\mu_S\rangle &= \sqrt{2(\alpha_1 + \alpha_2, \mu_S)} |\mu_S - \alpha_1 - \alpha_2\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_1+\alpha_2} |\mu_S\rangle = 0, \\ 2(\alpha_1 + \alpha_2, \mu_S) &= 2(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_- |\mu_S\rangle = |\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle = |\nu_3\rangle. \end{aligned}$$

Третий положительный корень, который равен сумме двух простых положительных корней  $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$ , отвечает повышающему оператору  $\Gamma_\gamma$  или  $\hat{V}_+ = \sqrt{2}\Gamma_\gamma$  и задает третье

вейлевское отражение, которое является зеркальным относительно линии, ортогональной вектору  $V_-$  на рис. 2.7 эту линию отражения задает как раз вектор  $\nu_2$ . Это значит, что и для базисных состояний, и для их весов

$$\mathfrak{s}_3 \nu_2 = \nu_2, \quad \mathfrak{s}_3 |\nu_2\rangle = |\nu_2\rangle$$

а

$$\mathfrak{s}_3 \lambda_1 = \nu_3, \quad \mathfrak{s}_3 |\lambda_1\rangle = |\nu_3\rangle$$

Напомним, что действие группы Вейля переводит неприводимое представление в себя. Выше мы показали для первого фундаментального представления, что все отражения группы Вейля связывают невырожденные веса, изображенные на рис. 2.7. Из этого следует, что других состояний в этом фундаментальном представлении нет, и все базисные состояния, которые получаются при действии на состояние старшего веса многократным действием всех понижающих операторов алгебры, уже исчерпаны полученными базисными состояниями с тремя весами  $\mu_S = \lambda_1, \nu_2$  и  $\nu_3$ . Эти три состояния принято называть триплетом и обозначать 3.

Рассуждения от противного подтверждают сделанное утверждение о том, что триплет исчерпывает все состояния первого фундаментального представления: если действие понижающих операторов приводило бы к состояниям с весами вне рамок треугольника, образованного триплетом, то применение к этим состояниям операций вейлевских отражений привело бы к состояниям с весами, старше, чем вес первого фундаментального представления, так как эти веса располагались бы и выше и правее, чем вес  $\lambda_1$ , а это противоречило бы однозначному определению неприводимого представления. Внутри треугольника состояний  $|\lambda_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle$  также не может быть состояний этого представления, так как все веса неприводимого представления получаются действием понижающих операторов на старший вес, и эти веса мы уже перечислили.

Аналогично строится и второе фундаментальное представление со старшим весом  $\mu_S = \lambda_2$  (см. рис. 2.7). Этот старший вес можно однократно понизить лишь в обратном направлении простого положительного корня  $\alpha_2$  или вейлевским отражением относительно этого корня, так как простой положительный корень  $\alpha_1$  ортогонален фундаментальному вектору  $\lambda_2$ . Таким образом находим состояние с весом  $\bar{\nu}_2$ , на которое можно в свою очередь подействовать оператором отражения  $\mathfrak{s}_1$ , отразив весовой вектор  $\bar{\nu}_2$  относительно линии ординат, и заполнить тем самым базис фундаментального представления состоянием с весом  $\bar{\nu}_3$ .

При рассмотрении операций вейлевских отражений мы установили, что группа Вейля не меняет кратность вырождения веса в неприводимом представлении, а так как старший вес является невырожденным, каждой точке на плоскости весов, полученной при отражении старшего веса, соответствует только одно состояние. В случае фундаментального представления все веса базисных состояний были получены вейлевскими отражениями, а значит, все базисные состояния фундаментального представления невырождены.

На данный момент мы получили все необходимые математические результаты, чтобы полноценно обсуждать физические аспекты в групповых терминах: структуру, свойства и классификацию сильновзаимодействующих частиц.

## 7.7.2 Flavors of Quarks and Strong Interactions

Приведем пример из теории кварковой структуры сильновзаимодействующих частиц - адронов. К адронам относятся барионы, которые составлены из трех кварков ( $qqq$ ), и

мезоны, состоящие из кварка и антикварка ( $q\bar{q}$ ), а также экзотические состояния, которые получаются добавлением в эти связанные состояния кварков дополнительных кварк-антикварковых пар ( $q'\bar{q}''$ ): пентакварки - это состояния ( $qqqq'\bar{q}''$ ), тетракварки  $-qq\bar{q}'\bar{q}''$  и т.п. Группа преобразований кварка одного аромата на кварк другого аромата в таких адронах возникает аналогично группе SU(2) изотопических преобразований двухкомпонентной нуклонной волновой функции, как это было рассмотрено нами выше при описании масс барионов и мезонов, когда базисные состояния неприводимого представления с заданным изоспином с высокой степенью точности обладают одной и той же массой, которую мы считаем пропорциональной собственному значению квадратичного инварианта Казимира в данном неприводимом представлении.

Если теперь к обычным кваркам  $u$  и  $d$ , из которых состоят нуклоны, добавить нестабильный странный кварк  $s$  с зарядом  $-\frac{1}{3}$  и массой около сотни  $M \ni B$ , то можно говорить о приближенной симметрии сильных взаимодействий относительно матричных преобразований трехкомпонентной кварковой волновой функции, когда вместо базисного состояния с определенным ароматом кварка можно взять линейную комбинацию базисных состояний любых ароматов кварков, так что при этом масса состояния не изменится, если не изменится число кварков. Число кварков в заданном состоянии определяется как сумма квадратов амплитуд вероятности найти каждое из базисных состояний с определенным ароматом кварка в заданном состоянии. Это значит, что матричные преобразования трехкомпонентной волновой функции сохраняют норму этой волновой функции, что, как мы установили на примере изотопических преобразований в Главе 2, раздел 3.4.3, задает вероятность найти в адроне кварк того или иного аромата (см. также 1 в Приложении, где описаны основные понятия и обозначения квантовой механики). Значит,  $3 \times 3$ -матрицы являются унитарными. Так же, как и при рассмотрении группы изотопической инвариантности ароматов кварков, исключение не наблюдаемой общей комплексной фазы трехкомпонентной волновой функции приводит к группе SU(3). Эта инвариантность носит название симметрии кварковых ароматов [flavor (US), flavour (UK)] и поэтому обозначается  $SU_f(3)$ .

Поскольку масса странного кварка  $m_s \sim 150\text{MB}$ — действий  $\Lambda_{QCD} \sim 300\text{MB}$ , который определяет радиус действия ядерных сил и энергию связи кварков в адронах, вклад массы странного кварка в энергию связанного состояния, образованного кварками, становится заметным по сравнению с пренебрежимо малым вкладом масс легких  $u$ - и  $d$ -кварков, массы которых существенно меньше масштаба энергий сильных взаимодействий  $m_{u,d} \sim 5\text{MB} \ll 300\text{MB}$ . Например, для мезонов, образованных легкими кварком и антикварком и имеющих массу  $M \sim 2\Lambda_{QCD}$ , поправка за счет массы легких кварков находится на уровне  $m_{u,d}/M \sim 5/600$ , а различие в массах  $u$ - и  $d$ -кварков, которое составляет  $m_d - m_u \sim 2\text{MB}$ , приводит к еще меньшим поправкам к массе мезона при замене одного легкого кварка другим. Для барионов, составленных из трех легких кварков с массой связанного состояния  $M \sim 3\Lambda_{QCD} \sim 900\text{MB} \ni B$ , различие масс легких кварков становится еще менее значимым. Поэтому полагают, что адроны в рамках симметрии ароматов кварков группируются по своим массам согласно неприводимым представлениям группы симметрии ароматов кварков так, что базисные состояния одного и того же неприводимого представления это и есть адроны, которые обладают одной и той же массой, В таком случае говорят, что эти базисные состояния неприводимого представления образуют мультиплет адронов, например, триплет мезонов или дублет барионов по изоспину в случае симметрии  $SU_f(2)$ . Мультиплеты адронов могут иметь разные массы, что отвечает разным значениям групповых инвариантов Казимира, которые, как полагают, и определяют инвариантное относительно группы симметрии ароматов кварков значение масс базисных состояний мультиплета. Важно, что группа симметрии указывает состав мультиплетов.

Расширение кваркового дублета легких кварков до триплета за счет добавления странного кварка означает, что массы адронов со странным кварком даже в рамках одного неприводимого представления будут отличаться от масс адронов с легкими кварками в том же мультиплете на величину порядка 150 МВ, т.е. эффекты нарушения  $SU_f(3)$  существенно заметнее в различии масс адронов одного неприводимого представления, чем в случае изотопической симметрии. Тем не менее, обычно полагают, что базовые состояния мультиплета с точностью до 150 МэВ обладают практически одинаковыми массами, т.е. масса базисных состояний одного неприводимого представления - это инвариант, а значит, масса состояний мультиплета - это функция собственных значений операторов Казимира для данного представления.

Такая инвариантность масс состояний мультиплета неприводимого представления группы относительно преобразований  $SU_f(3)$  трактуется как группа симметрии в спектроскопии многокварковых состояний, а именно, симметрия задает состав мультиплета, что явилось в свое время существенным достижением при классификации растущего числа вновь открытых мезонов, барионов и гиперонов со странными кварками и позволило систематизировать «зоологию» адронов с помощью введения симметрии кварковых ароматов, а также понять, что отличие масс мультиплетов основано на принципе возбуждения связанных мультикварковых состояний. Равенство масс состояний в мультиплете является приближенным. Поэтому и сама симметрия кварковых ароматов считается приближенной. Говорят, что она нарушена, но степень нарушения определяется поправками, которые считаются малыми, а именно, полагают, что поправки возникают при рассмотрении масс состояний мультиплета в выражениях, которые разлагаются в ряд по малому параметру  $\kappa \sim \Delta M/M$ , где  $M$  - масса состояний мультиплета, инвариантная относительно действия группы преобразования ароматов кварков, причем численно  $M \gtrsim 1 \text{ ГВ}$ , а  $\Delta M \lesssim 100 \text{ МВ}$ , т.е.  $\kappa \lesssim 0.1$ .

Пара традиционно используемых квантовых чисел, характеризующих базис фундаментального представления  $SU_f(3)$ , как мы уже упоминали выше, - это проекция изоспина  $T_3$  (горизонтальная ось на весовой диаграмме представления) и гиперзаряд  $Y$ , который связан с генератором подалгебры Картана  $\Gamma_8 = Y\sqrt{3}/2$  (вертикальная ось на весовой диаграмме представления). При этом, если изоспин позволяет различать друг от друга  $u$  - и  $d$ -кварки, гиперзаряд вводит в рассмотрение новое квантовое число странность  $S$ :

$$Y = B + S$$

где  $B$  - «барионный» заряд, который для кварков полагают равным  $B = \frac{1}{3}$  так, чтобы барион, составленный из трех кварков имел барионный заряд, равный единице, а странность отлична от нуля только для странного кварка

$$\{u, d\} \mapsto S = 0, \quad s \mapsto S = -1$$

Поскольку в рамках группы  $SU_f(3)$  гиперзаряд  $Y$  с точностью до множителя представляет собой один из выбранных в рамках традиции генераторов подалгебры Картана  $Y = 2\Gamma_8/\sqrt{3}$ , странность с точностью до сдвига на барионное число также указывает на собственные значения этого же генератора подалгебры Картана, а ее значения за счет выбора множителя подобраны так, чтобы у странного кварка странность принимала целое значение -1.

Более подробно, перепишем связь II.4.8 в виде

$$S = \Gamma_8 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - B$$

а значит, странность - это с точностью до указанного в формуле (II.4.9) масштабного множителя оператор подалгебры Картана  $\Gamma_8$  со смещением  $-B$ , которое одинаково для всех базисных состояний представления. Это значит, что изменение странности базисного состояния неприводимого представления определяет смещение расположения точки, которая соответствует весу базисного состояния на весовой диаграмме, по вертикальной оси, которая отвечает шкале собственных значений  $\Gamma_8$ , с инкрементом, который пропорционален инкременту значения странности. Тогда для странного кварка

$$S = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = -1, \quad s\text{-кварк}$$

в то время как для  $u$  - и  $d$ -кварков

$$S = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} = 0, \quad u \text{ - и } d\text{-кварки.}$$

Барионное число в мультиплете неприводимого представления - это просто сумма барионных чисел кварков и антикварков, из которых построено многокварковое состояние. Заметим, что неприводимые представления  $\mathfrak{su}(3)$  можно построить в виде тензорных произведений, где множителями являются фундаментальные представления этой алгебры, т.е. в виде произведения волновых функций кварков и антикварков, которые соответствуют двум фундаментальным представлениям группы ароматов легких кварков. Число кварков и антикварков определенного аромата, которое определяет, как говорят, валентный состав многокваркового состояния, фиксировано для заданного неприводимого представления, а значит, фиксировано и барионное число  $B$  для этого неприводимого представления группы симметрии.

Поэтому изменение гиперзаряда у состояний мультиплета отвечает изменению числа странных кварков в валентном составе многокваркового мультиплета. В итоге, сам валентный состав базисных состояний определяется валентным составом фундаментальных представлений группы симметрии, тензорные произведения которых образуют неприводимое представление. Это значит, что у базисных состояний, расположенных по горизонтальной оси на весовой диаграмме 35, вдоль которой откладываются собственные значения проекции изоспина, т.е. у состояний с одним гиперзарядом меняется только проекция изоспина, а переход от состояний на одной горизонтальной линии к состояниям на другой горизонтальной линии, т.е. переход от состояний с одним гиперзарядом к состояниям с другим гиперзарядом должен сопровождаться изменением числа странных кварков. Это следует из того, что по этим осям откладываются собственные значения генераторов подалгебры Картана: изоспина и гиперзаряда.

Электрический заряд так же, как и в случае группы  $SU(2)$ , выражается через гиперзаряд и изоспин

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3$$

С точки зрения и логики изложения, и физики нам важно, что оператор, стоящий за этим соотношением, фиксирует некую линейную комбинацию генераторов подалгебры Картана, которая соответствует повороту в плоскости весов от ортогональных осей, отвечающих проекции изоспина и гиперзаряда, к другим ортогональным осям, одной из которых является ось отсчета электрического заряда, что определяет один из возможных вариантов выделения подгруппы  $SU(2)$  в  $SU(3)$ . В самом деле, перепишем связь [II.4.10] в виде

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}\Gamma_8 + T_3$$

что можно представить в виде ортогонального преобразования, т.е. поворота, если ввести тангенс угла подобного поворота  $\theta$  так, что

$$Q = \operatorname{tg} \theta \cdot \Gamma_8 + T_3 = \frac{1}{\cos \theta} (\sin \theta \cdot \Gamma_8 + \cos \theta \cdot T_3)$$

а значит,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

В таком походе поворот осей  $(T_3, \Gamma_8)$  на плоскости весовой диаграммы на угол  $\theta = 30^\circ$  против часовой стрелки (см рис. 2.2 на стр. 74 и рис. 2.6 на стр. 108 отвечает переходу к осям  $(\tilde{\Gamma}, U_3)$ , где генератор подалгебры Картана  $\tilde{\Gamma} = \cos \theta \cdot Q$  задает ось собственных значений электрического заряда с точностью до указанного множителя  $\cos \theta$ , а вторая ось просто совпадает с осью, вдоль которой откладываются собственные значения проекции  $U_3$  для  $U$ -изоспина:

$$U_3 = \cos \theta \cdot \Gamma_8 - \sin \theta \cdot T_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \Gamma_8 - \frac{1}{2} \cdot T_3$$

что находится в полном согласии с определением проекции  $U$ -изоспина, данным в (II.1.28. Суммируя, переход от квантовых чисел, которые задаются генераторами подалгебры Картана  $\{\hat{T}_3, \hat{\Gamma}_8\}$ , к квантовым числам, которые задаются операторами  $\{\tilde{\Gamma}, \hat{U}_3\}$ , осуществляется поворотом осей на весовой диаграмме так, что

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma} = +\cos \theta \cdot \hat{T}_3 + \sin \theta \cdot \hat{\Gamma}_8 = \cos \theta \cdot \hat{Q}, \\ \hat{U}_3 = -\sin \theta \cdot \hat{T}_3 + \cos \theta \cdot \hat{\Gamma}_8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \hat{Q} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left( \hat{T}_3 + \frac{1}{2} \hat{Y} \right) \\ \hat{U}_3 = -\frac{1}{2} \cdot \hat{T}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \hat{\Gamma}_8 \end{cases}$$

В отличие от группы  $SU(2)$ , в которой подалгебра Картана включала в себя единственный генератор - наблюдаемую величину проекции изоспина  $\hat{T}_3$ , а гиперзаряд и электрический заряд вводились как эвристические величины, которые согласуются с экспериментом, в группе  $SU(3)$  гиперзаряд - это второй из генераторов подалгебры Картана в паре с изоспином  $\hat{T}_3$ , а электрический заряд также входит в пару генераторов подалгебры Картана вместе с проекцией  $U$ -изоспина при другом выборе генераторов подалгебры Картана. При этом связь электрического заряда с гиперзарядом и проекцией изоспина является прямым следствием перехода от одной пары генераторов подалгебры Картана к другой паре при повороте в плоскости собственных значений наблюдаемых для подалгебры Картана.

Итак, в первом фундаментальном представлении веса базисных состояний на двумерной весовой диаграмме с координатами  $\left(T_3, \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) \equiv (T_3, \Gamma_8)$  в точности соответствуют квантовым числам кварков:

<sup>35</sup> Напомним, что весовой называется диаграмма, на которой в пространстве, размерность которого равна рангу группы, в виде точек с координатами, равными весам базисных состояний неприводимого представления, обозначено расположение этих базисных состояний. Для группы  $SU(3)$  с рангом, равным двум, речь идет о плоскости, на которой точками отмечены состояния мультиплетта.



$$\begin{aligned}
|\lambda_1\rangle &= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\} \mapsto T_3 = +\frac{1}{2}, \quad Y = +\frac{1}{3}, \quad Q = +\frac{2}{3}, \quad U_3 = 0, \quad \mapsto u, \\
|\nu_2\rangle &= \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\} \mapsto T_3 = -\frac{1}{2}, \quad Y = +\frac{1}{3}, \quad Q = -\frac{1}{3}, \quad U_3 = +\frac{1}{2}, \quad \mapsto d, \\
|\nu_3\rangle &= \left\{ 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \mapsto T_3 = 0, \quad Y = -\frac{2}{3}, \quad Q = -\frac{1}{3}, \quad U_3 = -\frac{1}{2}, \quad \mapsto s.
\end{aligned}$$

У античастиц меняет знак каждый из зарядов: барионное число  $B \rightarrow -B$ , странность  $S \rightarrow -S$  и электрический заряд  $Q \rightarrow -Q$ , в согласии с (II.4.10) и проекция изоспина  $T_3 \rightarrow -T_3$ . Значит, переход от кварков к антикваркам отвечает отражению весов квантовых состояний относительно как оси абсцисс, так и оси ординат. Но при таком полном зеркальном отражении весов на весовой диаграмме, как видно из рисунка 2.7, первое фундаментальное представление переходит во второе. Следовательно, базис второго фундаментального представления в точности отвечает антикваркам, в чем можно убедиться прямым сравнением квантовых чисел базисных векторов с их значениями для антикварков.

$$|\bar{\nu}_3\rangle \mapsto \bar{u}, \quad |\bar{\nu}_2\rangle \mapsto \bar{d}, \quad |\lambda_2\rangle \mapsto \bar{s}$$

Квантовые состояния в гильбертовом пространстве фундаментального представления записываются в виде суперпозиции базисных

$$|\psi\rangle = v^{(1)}|u\rangle + v^{(2)}|d\rangle + v^{(3)}|s\rangle$$

так что естественно ввести соответствующий контравариантный столбец  $v$  с верхним индексом  $F$  для обозначения ароматов кварков

$$|\psi\rangle \mapsto \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{pmatrix} = v^F, \quad F \in \{\overline{1}, \overline{3}\}$$

Говорят, что первое фундаментальное представление - это триплет  $3$  (по размерности базиса пространства неприводимого представления, эту размерность называют также мультиплетностью).

Квантовые состояния в гильбертовом пространстве второго фундаментального представления записываются в виде суперпозиции базисных

$$|\bar{\psi}\rangle = \bar{v}_{(1)}|\bar{u}\rangle + \bar{v}_{(2)}|\bar{d}\rangle + \bar{v}_{(3)}|\bar{s}\rangle,$$

так что можно ввести соответствующий контравариантный столбец  $\bar{v}$  для этого антитриплета  $\bar{3}$  с нижним индексом с чертой  $\bar{F}$  для антикварков

$$|\bar{\psi}\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \bar{v}_{(1)} \\ \bar{v}_{(2)} \\ \bar{v}_{(3)} \end{pmatrix} = \bar{v}_{\bar{F}}, \quad \bar{F} \in \{\overline{1}, \overline{3}\}$$

Введение индексов позволяет говорить о тензорных обозначениях.

Для того чтобы показать, как преобразуются при действии элементов группы  $SU(3)$  введенные векторы фундаментальных представлений  $v^F$  и  $\bar{v}_{\bar{F}}$ , необходимо построить матрицы генераторов преобразований в этих представлениях.

### 7.7.3 Gell-Mann Matrices

Воспользуемся общей формулой <sup>36</sup> II.2.20 в случае состояния с невырожденным весом

$$\Gamma_{-\alpha_m}|\tilde{\nu}\rangle = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu})}|\tilde{\nu} - \alpha_m\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_m}|\tilde{\nu}\rangle = 0, \quad 2\frac{(\tilde{\nu}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_m \in \{0, \mathbb{N}\}, \quad \text{II.2.20}$$

для того, чтобы установить значения матричных элементов повышающих и понижающих операторов в фундаментальном представлении.

Для начала согласно (II.2.20) для базисного состояния первого фундаментального представления

$$|\tilde{\nu}\rangle \mapsto |\lambda_1\rangle = |u\rangle, \quad \Gamma_{\alpha_1}|\lambda_1\rangle = 0, \quad \text{так что} \quad \Gamma_{-\alpha_1}|u\rangle = \sqrt{(\alpha_1, \lambda_1)}|d\rangle, \quad 2\frac{(\lambda_1, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = 1,$$

устанавливаем, что для  $\hat{T}_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_1}$

$$\langle d|\hat{T}_-|u\rangle = 1$$

а его действие на другие состояния триплета дает нуль пространства состояний (см. рис. 2.7):

$$\hat{T}_-|d\rangle = \hat{T}_-|s\rangle = 0$$

Это значит, что  $3 \times 3$ -матрица  $\hat{T}_-$

$$\hat{T}_- = \begin{pmatrix} T_{uu} & T_{ud} & T_{us} \\ T_{du} & T_{dd} & T_{ds} \\ T_{su} & T_{sd} & T_{ss} \end{pmatrix}$$

имеет только один отличный от нуля элемент  $\langle d|\hat{T}_-|u\rangle$ ,

$$\hat{T}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично согласно (II.2.20) для

$$|\tilde{\nu}\rangle \mapsto |\nu_2\rangle = |d\rangle, \quad \Gamma_{\alpha_2}|\nu_2\rangle = 0, \quad \text{так что} \quad \Gamma_{-\alpha_2}|d\rangle = \sqrt{(\alpha_2, \nu_2)}|s\rangle, \quad 2\frac{(\nu_2, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = 1,$$

устанавливаем, что для  $\hat{U}_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_2}$

$$\langle s|\hat{U}_-|d\rangle = 1$$

а его действие на другие состояния триплета дает нуль пространства состояний (см. рис. 2.7):

$$\hat{U}_-|u\rangle = \hat{U}_-|s\rangle = 0.$$

Следовательно,  $3 \times 3$ -матрица  $\hat{U}_-$  имеет только один отличный от нуля элемент  $\langle s|\hat{U}_-|d\rangle$ ,

$$\hat{U}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

И наконец, согласно (II.2.20) для

$$|\tilde{\nu}\rangle \mapsto |\lambda_1\rangle = |u\rangle, \quad \Gamma_{\alpha_1+\alpha_2}|\lambda_1\rangle = 0, \quad \text{так что} \quad \Gamma_{-\alpha_1-\alpha_2}|u\rangle = \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda_1)}|s\rangle$$

учтем, что

$$2 \frac{(\lambda_1, \alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)} = 1$$

и найдем, что для  $\hat{V}_- = \sqrt{2}\Gamma_{-\alpha_1-\alpha_2}$

$$\langle s | \hat{V}_- | u \rangle = 1$$

а его действие на другие состояния триплета дает нуль пространства состояний (см. рис. 2.7):

$$\hat{V}_-|d\rangle = \hat{V}_-|s\rangle = 0$$

В итоге,  $3 \times 3$ -матрица  $\hat{V}_-$  имеет только один отличный от нуля элемент  $\langle s | \hat{V}_- | u \rangle$ ,

$$\hat{V}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы диагональных матриц  $T_3$  и  $\Gamma_8$  задаются соответствующими координатами весов как собственных значений собственных состояний базиса, в котором мы записываем элементы матриц подалгебры Картана, т.е., соответственно,  $x$  - и  $y$ -компонентами весов для состояний базиса представления.

Здесь уместно напомнить о том, как устроен стандартный набор генераторов в базисе Картана-Вейля (I.3.44), а именно, что элемент метрики Киллинга  $g_{ab}$ , который является частным случаем элемента следовой матрицы двух генераторов в рассматриваемом представлении  $R$  - элементом тензора второго ранга

$$g_{ab}^R \equiv \text{tr} (\Gamma_a \Gamma_b)_R$$

Когда берется присоединенное представление (I.2.17),

$$g_{ab} = g_{ab}^{\text{ad}} \equiv \text{tr} (\Gamma_a \Gamma_b)_{\text{ad}}$$

имеет конформно евклидов вид

$$g_{ab} = \Omega^2 \delta_{ab} \quad \text{при} \quad \Omega^2 = C_A,$$

---

36 Для пытливого читателя еще раз подчеркнем, что комплексные фазы коэффициентов в результате действия понижающих генераторов в соотношения (II.2.20) были подобраны равными нулю, что возможно, так как эти фазы определяются, во-первых, свободой выбора комплексной фазы каждого базисного состояния представления, нормированного на единицу, а во-вторых, свободой выбора общей комплексной фазы каждой повышающей или понижающей матрицы-генератора в представлении: эти переопределения фаз состояний и матриц являются независимыми (см. (I.3.18) и обсуждение в сноске к этой формуле). Поэтому в последующих формулах нормировочные множители при действии понижающих генераторов положительны.

где  $C_A = N$  в случае группы  $SU(N)$ , когда мы положили длину простых положительных корней группы равной единице (см. описание алгебр  $\mathfrak{su}(2)$  и  $\mathfrak{su}(3)$  в разделах 1.1 и 1.3 Главы 2, 1. соответственно). В то же время, для генераторов подалгебры Картана фундаментального представления

$$g_{ab}^F = T_F \delta_{ab}$$

где индекс Дынкина (I.2.46) в случае группы  $SU(N)$  по общим формулам, которые получены в задаче 25 на стр. 153, оказывается равным

$$T_F = \frac{1}{2}$$

Для первого фундаментального представления определяют эрмитовы матрицы Гелл-Манн  $27\lambda_a$

$$\frac{1}{2}\lambda_a \equiv \Gamma_a$$

где, согласно (II.1.18) в матричных обозначениях,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= T_+ + T_-, & \lambda_2 &= -i(T_+ - T_-), \\ \lambda_4 &= V_+ + V_-, & \lambda_5 &= -i(V_+ - V_-), \\ \lambda_6 &= U_+ + U_-, & \lambda_7 &= -i(U_+ - U_-), \\ \lambda_3 &= 2T_3, & \lambda_8 &= 2\Gamma_8. \end{aligned}$$

Таким образом, из (II.4.19), (II.4.21) и (II.4.23), с учетом того, что понижающие и повышающие операторы связаны эрмитовым сопряжением, и

$$\hat{T}_+ = \hat{T}_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_+ = \hat{U}_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_+ = \hat{V}_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получаем<sup>38</sup>

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Матрицы Гелл-Манна эрмитовы и имеют след, равный нулю, так что любая из эрмитово самосопряженных матриц  $3 \times 3$  может быть представлена в виде суперпозиции единичной матрицы и восьми матриц Гелл-Манна с вещественными коэффициентами. Именно этот базис генераторов широко известен в физических приложениях группы

<sup>38</sup> Подчеркнем, что буквенное обозначение матриц Гелл-Манна является общепринятым, и читателя не должно смущать то, что та же буква  $\lambda$  используется для обозначения фундаментального вектора.

$SU_f(3)$ . Коммутационные соотношения для матриц Гелл-Манна суть следствие их связи с генераторами  $\Gamma_a$ :

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c$$

где  $f_{abc}$  - антисимметричные по перестановке любой пары индексов структурные константы алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ , введенные в (II.1.20) (см. также обсуждение перед (II.1.20) и сноски на стр. 74, где указано, что опускание верхнего индекса структурных констант проводится символом Кронекера  $f_{abc} = f_{ab}^{c'}\delta_{c'c}$ ).

Поскольку групповые координаты вблизи произвольного элемента группы можно ввести переносом координатной сетки в окрестности единицы, дифференциал оператора преобразований  $g(\mathbf{a})$  выражается через генераторы

$$dg(\mathbf{a}) = -i\Gamma d\mathbf{a} \cdot g(\mathbf{a})$$

При интегрировании это дает вид конечного элемента группы как матрицы для первого фундаментального представления

$$g(\mathbf{a}) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a} \right\}$$

В базисе собственных состояний подалгебры Картана так записывается групповое преобразование в экспоненциальной форме (см. обоснование формул (I.4.2 - [4.7] на стр. 51).

Свойства матриц  $g$  являются общими для любого представления  $SU(3)$ : унитарность и унимодулярность,

$$g \cdot g^\dagger = \mathbb{1}, \quad \det g = 1$$

что следует из эрмитовости матриц Гелл-Манна и их бесследовости, соответственно.

Искомый закон преобразования кварковых состояний триплета  $\mathbf{3}$  записывается в следующем виде:

$$v^F(\mathbf{a}) = \{g(\mathbf{a})\}_{\bullet, F'}^F v^{F'} = \left\{ e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}} \right\}_{\bullet, F'}^F v^{F'}$$

где матрицы Гелл-Манна по построению имеют индексы  $\{\lambda_a\}_{\bullet, F'}^F$ .

Как мы полагали при построении первого фундаментального представления группы  $SU(3)$ , элементы  $v^F$  принадлежат контравекторному пространству, которое преобразуется матрицами  $g(\mathbf{a})$  (II.4.32), а это значит, что согласно общему принципу линейной алгебры ковекторы  $v_F$  как элементы сопряженного ковекторного пространства преобразуются обратными матрицами. Поскольку  $g^{-1} = g^\dagger$ , эрмитово сопряженные элементы  $v^\dagger$  принадлежат ковекторному пространству,

$$v^F \mapsto (v^\dagger)_F, \quad (v^\dagger)_F(\mathbf{a}) = (v^\dagger)_{F'} \{g^{-1}(\mathbf{a})\}_{\bullet, F}^{F'}$$

### Киселев-2022-2

1. Повторите схему, которая была построена для вывода матриц Гелл-Манна  $\lambda_a$ , теперь в случае второго фундаментального представления и выведите аналогичные матрицы  $\bar{\lambda}_a$  для антитриплета  $\bar{\mathbf{3}}$ :

$$\bar{\lambda}_a = -\lambda_a^*$$

Тем же способом устанавливаем матричные элементы для повышающих операторов по базису состояний второго фундаментального представления - антитриплета  $\bar{\mathbf{3}}$  (см. обозначения в (II.4.14)-(II.4.17))

$$\langle \bar{d} | \hat{T}_+ | \bar{u} \rangle = 1, \quad \langle \bar{s} | \hat{V}_+ | \bar{u} \rangle = 1, \quad \langle \bar{s} | \hat{U}_+ | \bar{d} \rangle = 1$$

Поэтому с учетом координат базиса на плоскости  $\{T_3, T_8\}$  легко находим вид генераторов преобразований для антикварков

$$\bar{\Gamma}_a \mapsto -\frac{1}{2} \lambda_a^*$$

т.е. антикварки фундаментального представления  $\bar{v}_{\bar{F}}$  преобразуются комплексно сопряженными матрицами

$$g^*(a) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \lambda^* \cdot a \right\}, \quad \bar{v}_{\bar{F}}(a) = \{g^*(a)\}_{\bar{F}}^{\bullet \bar{F}'} \bar{v}_{\bar{F}'}$$

Последнюю формулу можно переписать, используя транспонированную матрицу,

$$\{g^*(a)\}_{\bar{F}}^{\bullet \bar{F}'} = \left\{ \{g^*(a)\}^T \right\}_{\bullet \bar{F}}^{\bar{F}'} \equiv \{g^\dagger(a)\}_{\bullet \bar{F}}^{\bar{F}'}$$

так что

$$\bar{v}_{\bar{F}}(a) = \bar{v}_{\bar{F}'} \{g^\dagger(a)\}_{\bullet \bar{F}}^{\bar{F}'} = \bar{v}_{\bar{F}'} \{g^{-1}(a)\}_{\bullet \bar{F}}^{\bar{F}'},$$

что совпадает с законом преобразования ковекторного триплета (II.4.33). Следовательно, во-первых,

$$\bar{v}_{\bar{F}} \delta_{\bar{F}}^{\bar{F}'} v^{\bar{F}} \equiv \bar{v} \cdot v = \text{inv.} = \left( v^{\bar{F}'} \right)^* \delta_{\bar{F}' \bar{F}} v^{\bar{F}} \equiv v^\dagger \cdot v$$

так что в подобных выражениях контравариантные индексы с чертой в пространстве антитриплетного представления группы  $SU(3)$  эквивалентны ковариантным индексам без черты в пространстве триплетного представления группы  $SU(3)$ . Во-вторых, это значит, что в терминах с использованием матричного умножения комплексно сопряженное представление для кварков  $v^*$  эквивалентно представлению для антикварков:  $(v^*)_{\bar{F}} \cong \bar{v}_{\bar{F}}$  или, что то же,  $\mathbf{3}^* \cong \bar{\mathbf{3}}$ . В силу унитарности

$$g^\dagger(a) \cdot g(a) = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad (g^*(a))^T \cdot g(a) = \mathbb{1}$$

где эрмитово сопряжение матриц - это композиция комплексного сопряжения и транспонирования. Поэтому инвариантные билинейные выражения в терминах кварк-антикварковых состояний с учетом группового преобразования

$$v \xrightarrow{g(a)} v(a)$$

имеют вид

$$v^\dagger \cdot v = v^\dagger(a) \cdot v(a) = \text{inv.} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v} \cdot v = \bar{v}(a) \cdot v(a) \equiv \bar{v}_{\bar{F}} v^{\bar{F}} = \text{inv}$$

Это еще раз показывает, что  $\bar{v}_{\bar{F}} \delta_{\bar{F}}^{\bar{F}'}$  - это уже ковариантный объект в пространстве триплетного представления, который преобразуется обратной матрицей с точки зрения этого пространства состояний первого фундаментального представления.

---

<sup>38</sup> Методом пристального взгляда читатель может увидеть в явном виде матриц  $\lambda_1, \dots, \lambda_7$  обобщение матриц Паули на пространство матриц  $3 \times 3$ , что не так элементарно в случае  $\lambda_8$ .

Итак, мы установили законы групповых преобразований для двух фундаментальных представлений  $SU(3)$ , триплета  $\mathbf{3}$  и антитриплета  $\bar{\mathbf{3}}$ , а также то, как из состояний этих представлений построить билинейный инвариант.

Свойства матриц Гелл-Манна. Поскольку метрика Киллинга пропорциональна евклидовой, в любом представлении

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\Gamma_a \Gamma_b)_R &= T_R \delta_{ab}, \\ \mathrm{tr}(\Gamma_a \Gamma_b)_F &= T_F \delta_{ab}.\end{aligned}$$

В наших построениях, например,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\hat{T}_+ \hat{T}_-)_F &= \langle u | \hat{T}_+ \hat{T}_- | u \rangle = \langle u | \hat{T}_+ | d \rangle \langle d | \hat{T}_- | u \rangle = 1 \Rightarrow \\ \mathrm{tr}(\Gamma_1 \Gamma_1)_F &= \frac{1}{2^2} \mathrm{tr} \left\{ (\hat{T}_+ + \hat{T}_-)(\hat{T}_+ + \hat{T}_-) \right\}_F = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Значит,

$$T_F = \frac{1}{2}$$

откуда согласно определению индекса Дынкина в фундаментальном представлении через след произведения генераторов  $\Gamma_a$  в (II.4.38) и связи генераторов  $\Gamma_a$  с матрицами Гелл-Манна  $\lambda_a$  в (II.4.24) получим

$$\mathrm{tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$$

Квадратичный оператор Казимира - инвариант

$$\Gamma_a \Gamma_a = \frac{1}{4} \lambda_a \lambda_a = C_F \cdot \mathbb{1}$$

где подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу групповых параметров  $a \in \{1, 8\}$ . По построению

$$\frac{1}{4} \lambda_a \lambda_a = T_3^2 + \Gamma_8^2 + \frac{1}{2} (\hat{T}_+ \hat{T}_- + \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{U}_+ \hat{U}_- + \hat{U}_- \hat{U}_+ + \hat{V}_+ \hat{V}_- + \hat{V}_- \hat{V}_+)$$

Можно взять матричный элемент последнего выражения по любому состоянию представления, например, по  $|u\rangle$ . Тогда легко найти

$$C_F = \frac{4}{3}.$$

Произведение матриц Гелл-Манна раскрывается через коммутатор и антикоммутатор,

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b - \lambda_b \lambda_a) + \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a) = i f_{abc} \lambda_c + \frac{1}{2} \left( \lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - \frac{1}{4} \delta_{ab} \lambda_c \lambda_c \right) + \frac{1}{8} \delta_{ab} \lambda_c \lambda_c$$

В этом выражении мы выделили бесследовый по свертке индексов  $a$  и  $b$  вклад. С учетом значения квадратичного оператора Казимира (II.4.41) запишем

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{1}{2} C_F \delta_{ab} \mathbb{1} + i f_{abc} \lambda_c + \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - C_F \delta_{ab} \mathbb{1}).$$

Последний вклад

$$u_{ab} = \frac{1}{2} (\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - C_F \delta_{ab} \mathbb{1}), \quad \text{где } \delta^{ab} u_{ab} = 0$$

является эрмитовой  $3 \times 3$ -матрицей, у которой след равен нулю,

$$\text{tr}(\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - C_F \delta_{ab} \mathbb{1}) = 2\delta_{ab} + 2\delta_{ab} - C_F 3\delta_{ab} = 0,$$

а значит, эрмитову бесследовую  $3 \times 3$ -матрицу  $u_{ab}$  можно разложить по базису матриц Гелл-Манна с вещественными коэффициентами

$$u_{ab} = d_{abc} \lambda_c, \quad \delta^{ab} u_{ab} = \delta^{ab} d_{abc} \lambda_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta^{ab} d_{abc} = 0$$

так что

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{1}{2} C_F \delta_{ab} + i f_{abc} \lambda_c + d_{abc} \lambda_c$$

где коэффициенты  $d_{abc}$  можно записать, исходя из тождества

$$\begin{aligned} \text{tr}(u_{ab} \lambda_{c'}) &= d_{abc} \text{tr}(\lambda_c \lambda_{c'}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \text{tr}((\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a - C_F \delta_{ab} \mathbb{1}) \lambda_{c'}) = d_{abc} \text{tr}(\lambda_c \lambda_{c'}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \text{tr}((\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a) \lambda_{c'}) - C_F \delta_{ab} \text{tr}(\lambda_{c'}) = d_{abc} 2\delta_{cc'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \text{tr}((\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a) \lambda_{c'}) = d_{abc} 2\delta_{cc'}, \quad \text{так как } \text{tr}(\lambda_{c'}) = 0, \end{aligned}$$

т.е. мы учли, что след матриц Гелл-Манна равен нулю. В итоге,

$$d_{abc} = \frac{1}{4} \text{tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c), \quad \text{где } \{\lambda_a, \lambda_b\} \equiv \lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a$$

Проверим, что верно равенство  $\delta_{ab} d_{abc} = 0$ , как это должно следовать из данного нами определения для бесследового тензора  $u_{ab}$ , связанного с  $d$ -символами  $u_{ab} = d_{abc} \lambda_c$ :

$$\delta_{ab} d_{abc} = \delta_{ab} \frac{1}{4} \text{tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c) = \frac{1}{4} \text{tr}(2\lambda_a \lambda_a \lambda_c) = 2C_F \text{tr}(\lambda_c) = 0$$

При этом символы  $d_{abc}$  являются симметричными по всем индексам, так как перестановка индексов  $b$  и  $c$  также приводит к симметричному выражению, если воспользоваться свойством следа и переставить последнюю матрицу в произведении на первое место или первую на последнее:

$$\text{tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c) = \text{tr}((\lambda_a \lambda_b + \lambda_b \lambda_a) \lambda_c) = \text{tr}(\lambda_c \lambda_a \lambda_b + \lambda_a \lambda_c \lambda_b) = \text{tr}(\{\lambda_a, \lambda_c\} \lambda_b),$$

а значит, симметричность имеет место и при перестановке индексов  $a$  и  $c$ .

После вычисления всех возможных вариантов следа трех матриц неравные нулю значения  $d$ -символа оказываются равными величинам

$$\begin{aligned} d_{118} &= d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ d_{146} &= d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{337} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Из определения этих величин в виде следа, симметризованного по индексам групповых параметров, ясно, что они задают вид кубического оператора Казимира, который был определен нами ранее на стр. 30 в общем виде как раз через симметричный тензор ранга  $k$  в виде следа симметризованного произведения генераторов в присоединенном



представлении (переход к фундаментальному представлению для генераторов сказывается только на числовом множителе пропорциональности следов в разных представлениях и не является существенным, см. задачу 12 на стр. 31):

$$C_3 = d_{abc} \Gamma_a \Gamma_b \Gamma_c$$

Напомним, что для произвольного представления нет необходимости каждый раз вычислять квадратичный и кубический операторы Казимира, которые однозначно характеризуют неприводимое представление  $\mathfrak{su}(3)$ , достаточно указать координаты старшего вектора состояния в базисе фундаментальных векторов, т.е. задать старший вес представления.

### Киселев-2022-2

2. Докажите тождество Фирца, которое используется в вычислительных задачах с матрицами Гелл-Манна,

$$(\lambda_a)^{F_1} F_2 (\lambda_a)^{F_3}_{\bullet F_4} = 2\delta_{F_4}^{F_1} \delta_{F_2}^{F_3} - \frac{2}{3} \delta_{F_2}^{F_1} \delta_{F_4}^{F_3}.$$

Решение. Любую эрмитово самосопряженную матрицу  $\Lambda$  размером  $3 \times 3$  можно представить в виде суммы единичной матрицы и матриц Гелл-Манна с вещественными коэффициентами,

$$\Lambda = F_0 \mathbb{1} + F_a \lambda_a, \quad F_0, F_a \in \mathbb{R}$$

Коэффициенты разложения находятся при взятии следа произведения матриц,

$$\text{tr } \Lambda = 3F_0, \quad \text{tr } (\lambda_b \Lambda) = F_a 2\delta_{ab}$$

а значит,

$$\Lambda = \sum_{B=0}^8 \Delta_B \lambda_B \text{tr } (\lambda_B \Lambda), \quad \text{где } \lambda_0 = \mathbb{1}, \quad \Delta_0 = \frac{1}{3}, \quad \Delta_a = \frac{1}{2}, a \in \{\overline{1, 8}\}$$

Это разложение в матричных индексах имеет вид

$$\Lambda_{\bullet F_2}^{F_1} = \sum_{B=0}^8 \Delta_B (\lambda_B)_{\bullet F_2}^{F_1} (\lambda_B)_{\bullet F_4}^{F_3} \Lambda_{\bullet}^{F_4}$$

и верно, если

$$\sum_{B=0}^8 \Delta_B (\lambda_B)_{\bullet F_2}^{F_1} (\lambda_B)_{\bullet F_4}^{F_3} = \delta_{\bullet F_4}^{F_1} \delta_{\bullet F_2}^{F_3}$$

Раскрывая сумму через единичные матрицы и матрицы Гелл-Манна, получим

$$\frac{1}{3} \delta_{\bullet F_2}^{F_1} \delta_{\bullet}^{F_3} + \frac{1}{2} (\lambda_a)_{\bullet F_2}^{F_1} (\lambda_a)_{\bullet F_4}^{F_3} = \delta_{\bullet F_4}^{F_1} \delta_{\bullet F_2}^{F_3}$$

и тождество Фирца доказано.

**Киселев-2022-2**

3. Покажите, что в группе  $SU(n+1)$  веса базисных состояний первого фундаментального представления задаются векторами  $\nu_1 = \lambda_1 = \mu_S, \nu_{k+1} = \nu_k - \alpha_k$ , где  $k = \{\overline{1, n}\}$ , а старшие веса фундаментальных представлений равны

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \nu_1 = \lambda_1 \\ \lambda_2 &= \nu_1 + \nu_2 = 2\lambda_1 - \alpha_1 \\ \lambda_{k+1} &= \sum_{m=1}^{k+1} \nu_m = (k+1)\lambda_1 - k\alpha_1 - (k-1)\alpha_2 - \dots - \alpha_k, \quad k = \{\overline{1, n}\}\end{aligned}$$

Используйте значения скалярный произведений корневых векторов группы и определение фундаментальных векторов. Убедитесь, что «гипотетический» фундаментальный вектор  $\lambda_{n+1}$  тождественно равен нулю.

**Киселев-2022-2**

4. Докажите, что в группе  $SU(n+1)$  состояния

$$|f_k\rangle = |\nu_1\rangle \wedge |\nu_2\rangle \wedge \dots \wedge |\nu_k\rangle, \quad k = \{\overline{2, n}\}$$

введенные в предыдущей задаче, являются состояниями старшего веса, т.е. для всех повышающих генераторов  $\Gamma_+ = \Gamma_{\alpha_m}$

$$\Gamma_+ |f_k\rangle = 0$$

Таким образом, построенные состояния старшего веса  $|f_k\rangle$  совпадают с состояниями старшего веса фундаментальных представлений  $|\lambda_k\rangle$ .

**7.7.4 Representations of  $T^{(p_1, p_2)}$** 

Неприводимое представление алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  однозначно задается парой целых неотрицательных чисел - координатами веса старшего вектора состояния в базисе фундаментальных векторов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

$$\mu_S = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2$$

так что в декартовых координатах на плоскости  $\{T_3, \Gamma_8\}$  фундаментальные векторы (II.4.1) дают

$$\mu_S = \left( \frac{p_1}{2}, \frac{p_1 + 2p_2}{2\sqrt{3}} \right).$$

Числа  $p_1$  и  $p_2$  указывают максимальное число шагов понижения старшего вектора состояния генераторами, отвечающими простым отрицательным корням  $-\alpha_1$  и  $-\alpha_2$ . Крайние точки такого понижения могут быть получены операциями отражения Вейля относительно всех положительных корней алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  и, в частности, при зеркальном отражении относительно линий фундаментальных векторов алгебры, которые задают нормали к простым положительным корням алгебры (а в общем многомерном случае лежат в гиперплоскости, перпендикулярной корню).

Последовательное отражение как старшего веса, так и его зеркальных образов относительно линий фундаментальных векторов приводит к диаграмме для базисных состояний неприводимого представления, изображенных в виде точек, координаты которых равны координатам полученных при таких отражениях весовых векторов,

отложенных из начала координат. В данном случае эти точки расположены в вершинах шестиугольника. Мы не будем здесь приводить таблицы явных выражений для координат этих точек, а ограничимся рассмотрением примеров на рис. 2.8, где показаны весовые диаграммы базисных состояний представлений  $T^{(4,2)}$ ,  $T^{(3,1)}$  и  $T^{(4,1)}$  на плоскости изоспина и гиперзаряда. Длины сторон шестиугольника равны  $p_1$  и  $p_2$ , и если одно из этих чисел равно нулю, шестиугольник вырождается в треугольник.

Вне границ шестиугольника нет точек, отвечающих весам базисных состояний этого же неприводимого представления. Действительно, в противном случае, если существует базисное состояние с весом вне шестиугольника, то мы можем воспользоваться теми же операциями отражений Вейля. Одним из образов будет состояние с весом, которое может быть получено из состояния старшего веса, когда на него действуют не только понижающие, но и повышающие генераторы, что невозможно для состояний неприводимого представления с заданным состоянием старшего веса.

Все точки в вершинах внешнего шестиугольника отвечают невырожденным весам базисных состояний, поскольку они получены вейлевскими отражениями состояния невырожденного старшего веса. Точки на сторонах между вершинами описанного шестиугольника, когда координаты одной из вершин заданы координатами старшего веса неприводимого представления, также соответствуют невырожденным весам базисных состояний, поскольку, например, на верхней горизонтальной стороне не может быть весов дополнительных состояний, так как в противном случае такие дополнительные состояния можно было бы либо повысить до старшего вектора, что в противоречии с неприводимостью представления привело бы к вырождению старшего веса, либо одно из них после конечного числа шагов повышения не допускало бы дальнейшего повышения в сторону состояния старшего веса и само бы таким образом было старшим вектором состояния, определяющим другое неприводимое представление<sup>39</sup>, что также противоречит неприводимости исходного представления. Такое же рассуждение справедливо и для второй стороны с вершиной, заданной старшим весом неприводимого представления. Остальные точки на сторонах рассматриваемого шестиугольника получаются отражением уже описанных точек на сторонах с вершиной в старшем весе. Значит, все точки весов на сторонах внешнего шестиугольника невырождены, что мы обозначаем на диаграмме, соединяя эти точки тонкой сплошной линией на рис. 2.8.

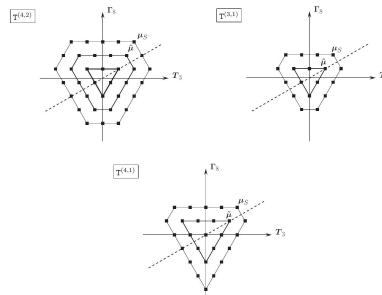


Рис. 2.8: Весовые диаграммы представлений  $T^{(4,2)}$ ,  $T^{(3,1)}$  и  $T^{(4,1)}$  группы  $SU(3)$ .

Физический смысл рассмотрения внешних сторон шестиугольника неприводимого представления можно описать следующим образом:

старший вектор состояния неприводимого представления алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  является и старшим вектором для подалгебр  $\mathfrak{su}(2)$ , которые задаются  $T$ -,  $U$  - и  $V$ -изоспинами, так как

$$\hat{T}_+ |\mu_S\rangle = 0, \quad \hat{U}_+ |\mu_S\rangle = 0, \quad \hat{V}_+ |\mu_S\rangle = 0$$

<sup>39</sup> Напомним, что вне сторон внешнего шестиугольника нет весов рассматриваемого неприводимого представления, и, следовательно, два повышающих генератора, которые смещают вес на стороне как раз вовне внешнего шестиугольника, дают состояние, равное нулю.

Координаты старшего веса определяют проекции старшего веса на соответствующие оси, задаваемые выбором генераторов подалгебры Картана. В  $SU(3)$  операторов Картана два, первый из которых мы называли  $T$ -изоспином. Всего в  $SU(3)$  удобно выделять три разных генератора типа изоспина с коммутационными соотношениями генераторов группы  $SU(2)$ , которые мы обозначили буквами  $T, U$  и  $V$ . Проекция на ось соответствующего изоспина старшего веса равна (в квадратных скобках мы указываем весовой вектор, собственное значение проекции которого вычисляется 40

$$T_3 [\mu_S] = \frac{1}{2}p_1, \quad U_3 [\mu_S] = \frac{1}{2}p_2, \quad V_3 [\mu_S] = T_3 [\mu_S] + U_3 [\mu_S]$$

Проекция старшего вектора состояния на ось каждого изоспина является максимальной, так что, например, собственное значение квадрата  $T$ -изоспина 4, как и в группе  $SU(2)$ ,

$$\hat{T}^2 = \frac{1}{2} (\hat{T}_+ \hat{T}_- + \hat{T}_- \hat{T}_+) + \hat{T}_3^2 = \hat{T}_x^2 + \hat{T}_y^2 + \hat{T}_z^2 \mapsto T(T+1)$$

задается этой максимальной проекцией

$$T = T_3^{\max}$$

и согласно (II.4.50) мы заключаем, что

$$T = T_3^{\max} = T_3 [\mu_S] = \frac{1}{2}p_1, \quad U = U_3^{\max} = U_3 [\mu_S] = \frac{1}{2}p_2, \quad V = V_3^{\max} = V_3 [\mu_S] = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

Понижение состояния старшего веса неприводимого представления многократным действием понижающего оператора  $T_-$  дает состояния с весами, которые расположены на горизонтальной стороне внешнего шестиугольника с вершиной в точке старшего веса. При этом, понижающий оператор  $T_-$  не изменяет собственное значение квадратичного инварианта Казимира для  $T$ -изоспина, а значит, вся эта сторона это  $2T + 1$  состояний с  $T$ -изоспином, равным значению, которое указано в (II.4.51). На первой диаграмме рис. 2.8  $T$ -изоспин на верхней стороне внешнего шестиугольника равен  $T = 2(2T + 1 = 5$  состояний - это состояние старшего веса и базисные состояния, которые получаются за 4 шага действием понижающим оператором  $T_-$ , так как  $p_1 = 4$  - это и есть число таких шагов в случае представления  $T^{(4,2)}$ .

Аналогичное рассуждение справедливо и для другой стороны внешнего шестиугольника, которая имеет вершину с координатами старшего веса, с той лишь разницей, что понижение идет оператором  $U_-$ , так что  $p_2 + 1$  состояние на этой стороне - это  $2U + 1$  состояний с  $U$ -изоспином, равным значению, которое указано в II.4.51): на рис. 2.8 значение  $U$ -изоспина на этой стороне равно 1 в случае представления  $T^{(4,2)}$ .

Ясно, что стороны внешнего шестиугольника с описанными нами направлениями вдоль простых положительных корней, также имеют определенные значения  $T$  - и  $U$ -изоспина, а стороны вдоль положительного корня  $V_+$  отвечают вполне определенному значению  $V$ -изоспина.

В этих рассуждениях видна роль операторов Казимира подгрупп  $SU(2)$ , которые есть в группе  $SU(3)$ . С одной стороны, оператор Казимира, определенный в алгебре подгруппы  $SU(2)$  и являющийся инвариантом подалгебры  $SU(2)$ , можно использовать

<sup>40</sup> Напомним, что операторы  $\hat{U}_3, \hat{V}_3$  являются комбинациями выбранных нами генераторов подалгебры Картана, как это было указано в II.1.28 при рассмотрении алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ .

<sup>41</sup> Как и прежде, значение изоспина, равное  $T$ , означает, что собственное значение квадратичного оператора Казимира равно  $T(T+1)$ .

как оператор, который входит в полный набор наблюдаемых, так как оператор Казимира в алгебре подгруппы  $SU(2)$  коммутирует и с генераторами подалгебры Картанг <sup>42</sup> группы  $SU(3)$ , и с инвариантами группы  $SU(3)$ . С другой стороны, собственное значение оператора Казимира подгруппы может быть разным для разных базисных векторов состояния неприводимого представления группы Ли, что мы уже установили для весов на сторонах внешнего шестиугольника неприводимого представления на весовой диаграмме.

Мы видим, что в набор квантовых чисел базисных квантовых состояний неприводимого представления  $SU(3)$  для достижения полноты необходимо включить и инвариант подгруппы  $SU(2)$  - значение соответствующего квадратичного оператора Казимира этой подгруппы. Именно это позволит нам описать случаи, когда одному и тому же весу отвечают несколько квантовых состояний, так как они отличаются друг от друга собственным значением инварианта Казимира подгруппы  $SU(2)$ . Несколько состояний с одним весом на весовой диаграмме различаются операторами Казимира подгруппы  $SU(2)$ , так что мы получаем полную систему коммутирующих наблюдаемых, составленную из генераторов подалгебры Картана группы  $SU(3)$  и квадрата изоспина подгруппы  $SU(2)$ .

Внутри внешнего шестиугольника находятся внутренние шестиугольники. Число всех шестиугольников равно  $k \equiv \min p_{1,2}$ . В самом деле, как и в случае внешнего шестиугольника, каждый из этих внутренних шестиугольников образован вершинами в результате отражений одного из состояний на вершине с весом, который мы назовем весом старшей вершины шестиугольника,

$$\tilde{\mu}_l = (p_1 - l) \lambda_1 + (p_2 - l) \lambda_2, \quad l \in \{\overline{1, k}\},$$

который получается при  $l$ -кратном вычитании корневого вектора

$$\mathbf{V}_- = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2\sqrt{3}} \right)$$

из исходного старшего веса представления (II.4.48). При  $l = k \equiv \min p_{1,2}$  шестиугольник вырождается в треугольник.

Вес II.4.52 совпадает со старшим весом для неприводимого представления  $T^{(p_1-l, p_2-l)}$ , так что его зеркальные образы действительно образуют внутренний шестиугольник. Однако действие повышающих операторов на состояния с весом (II.4.52) не равно нулю хотя бы для одного из операторов, так как иначе мы имели бы дело со страшным вектором другого неприводимого представления. По построению неприводимого представления все базисные состояния представления получаются действием понижающих операторов на состояние старшего веса. Это значит, что веса этих базисных состояний располагаются точно по вершинам и сторонам описанных шестиугольников, а также внутри  $k$ -го внутреннего шестиугольника, который, как мы

---

<sup>42</sup> Для  $T$ -изоспина нулевое значение коммутаторов  $\hat{T}^2$  с  $\hat{T}_3$  и с  $\Gamma_8$  можно установить, вычислив их в фундаментальном представлении в терминах матриц Гелл-Манна, как это следует из самой схемы построения генераторов подалгебры Картана в этом представлении (см. раздел 4.3 Главы 2. Дело в том, что квадраты матриц  $\hat{T}_x = \frac{1}{2}\lambda_1$ ,  $\hat{T}_y = \frac{1}{2}\lambda_2$  и  $\hat{T}_z = \frac{1}{2}\lambda_3$  - это диагональные матрицы, которые коммутируют с диагональными матрицами подалгебры Картана  $\hat{T}_3 = \hat{T}_z$  и  $\Gamma_8 = \frac{1}{2}\lambda_8$ . Важно, что значения коммутаторов генераторов не зависят от представления, так как коммутаторы в различных представлениях изоморфно отображаются друг на друга. Для  $U$ - и  $V$ -изоспина в том же фундаментальном представлении компоненты  $\hat{V}_x = \frac{1}{2}\lambda_4$ ,  $\hat{V}_y = \frac{1}{2}\lambda_5$ , а  $\hat{U}_x = \frac{1}{2}\lambda_6$ ,  $\hat{U}_y = \frac{1}{2}\lambda_7$ , и их квадраты опять же являются диагональными матрицами, в то время как  $z$ -компоненты  $U$ - и  $V$ -изоспина составлены из диагональных матриц подалгебры Картана группы  $SU(3)$ , так что и квадраты  $\hat{U}^2$  и  $\hat{V}^2$  тоже коммутируют с диагональными матрицами подалгебры Картана группы  $SU(3)$ .

уже отмечали вырождается в треугольник, если  $p_1 \neq p_2$ , или в точку, если  $p_1 = p_2$ , так как длина стороны треугольника в этом случае равна нулю (для примера предлагаем читателю посмотреть на весовую диаграмму представления  $T^{(1,1)}$ ).

Покажем, что кратность вырождения весов базисных состояний на  $l$ -том внутреннем шестиугольнике равна  $l + 1$ .

При  $l = 1$  весовой вектор с координатами II. 4.52 для представления  $T^{(4,2)}$  на рис. 2.8 обозначен символом  $\tilde{\mu}$ . Для того, чтобы показать, что этому весу отвечают два базисных состояния представления, построим состояния с весом  $\tilde{\mu}$ , действуя на старший вектор представления  $|\mu_S\rangle$  понижающими операторами  $T_- U_-$  и  $U_- T_-$ . Воспользуемся понятием инварианта подгруппы изоспина и докажем, что из двух разных состояний можно построить пару базисных состояний, которые являются собственными для проекции  $T_3$  изоспина и квадрата  $T$ -изоспина, причём оба обладают одной и той же проекцией изоспина, но разными собственными значениями квадрата изоспина. Итак, применим общую формулу (II.2.20) для нормированных на единицу состояний

$$\Gamma_{-\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = \sqrt{(\alpha_m, \tilde{\nu}_{m,a})} |\tilde{\nu}_{m,a} - \alpha_m, a\rangle \quad \text{при} \quad \Gamma_{\alpha_m} |\tilde{\nu}_{m,a}\rangle = 0, \quad 2 \frac{(\tilde{\nu}_{m,a}, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} = \tilde{p}_{m,a} \in \{0, \mathbb{N}\},$$

для состояния старшего веса  $|\mu_S\rangle$ , используя следующие подстановки: корневой вектор  $\alpha_m \mapsto \alpha_2 = U_+$ , генератор  $\Gamma_{\alpha_m} \mapsto \Gamma_{\alpha_2} = \hat{U}_+/\sqrt{2}$  и

$$(\alpha_2, \mu_S) = (\alpha_2, p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2) = \frac{1}{2} p_2$$

Это значит, что состояние

$$\hat{U}_- |\mu_S\rangle \equiv |U_- \mu_S\rangle$$

имеет вес  $\mu_S - \alpha_2$  и норму

$$\langle U_- \mu_S | U_- \mu_S \rangle = p_2$$

так как для нормированного на единицу состояния, которое мы обозначим кет-вектором с индексом  $\mathbb{E}$ ,

$$|U_- \mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$$

имеет место связь

$$\hat{U}_- |\mu_S\rangle = \sqrt{2} \sqrt{(\alpha_2, \mu_S)} |U_- \mu_S\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{p_2} |U_- \mu_S\rangle_{\mathbb{E}} = |U_- \mu_S\rangle$$

Вес состояния  $\hat{U}_- |\mu_S\rangle$  лежит на стороне внешнего шестиугольника на весовой диаграмме, и это состояние не может быть повышено оператором  $\hat{T}_+$ . Это значит, что проекция  $T$ -изоспина равна своему максимальному значению  $T_3^{\max}$ . В этом случае собственное значение квадрата  $T$ -изоспина равно  $\hat{T}^2 \mapsto T(T+1)$ , а  $T = T_3^{\max}$ . В итоге,

$$T = T_3^{\max} = T_3 [\mu_S - \alpha_2] = \frac{1}{2} (p_1 + 1)$$

где мы указали собственное значение проекции изоспина  $T_3$ , которое определяется весовым вектором, указанным жирным шрифтом в квадратных скобках, т.е. мы записали проекцию указанного в квадратных скобках весового вектора на ось собственных значений  $T_3$ .

Мы установили, что состояние  $|U_- \mu_S\rangle$  обладает определенным значением  $T$ -изоспина<sup>2 43</sup> так что действие на это состояние понижающего оператора  $\hat{T}_-$  изменит проекцию изоспина,

а именно, уменьшит эту проекцию на единицу, и сохранит неизменным его квадрат  $\hat{T}^2 \mapsto T(T+1)$ , где  $T = T_3^{\max}$ . Согласно общим соотношениям для понижающего оператора в группе  $SU(2)$

$$\hat{T}_- |U-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{T(T+1) - T(T-1)} |T-U-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{2T} |T-U-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{(p_1+1)} |T-U-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$$

где мы воспользовались введенным чуть выше способом обозначения состояний при действии на них операторов: индекс  $\mathbb{E}$  означает, что состояние нормировано на единицу, а символы операторов внутри кет-вектора - результат действия этих операторов на состояние с определенным весом. Это значит, что для состояния  $|T-U-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$  с весом  $\tilde{\mu} = \mu_S - \alpha_2 - \alpha_1$

$$T = \frac{1}{2} (p_1 + 1), \quad T_3[\tilde{\mu}] = \frac{1}{2} (p_1 - 1)$$

В итоге

$$\hat{T}_- \hat{U}_- |\mu_S\rangle = \sqrt{p_2} T_- |U-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{(p_1+1)p_2} |T-U-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$$

где, подчеркнем еще раз, состояние  $|T-U-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$  нормировано на единицу. По той же схеме установим, что состояние  $|T-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$  имеет вес  $\mu_S - \alpha_1$  и

$$\hat{T}_- |\mu_S\rangle = \sqrt{2} \sqrt{(\alpha_1, \mu_S)} |T-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}} = \sqrt{p_1} |T-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$$

Это состояние обладает собственным значением  $U$ -изоспина,  $U^2 = U(U+1)$ ,

$$U = U_3^{\max} = U_3 [\mu_S - \alpha_1] = \frac{1}{2} (p_2 + 1),$$

так как  $\hat{U}_+ |T-\mu_S\rangle = 0$ . Понижение оператором  $\hat{U}_-$  приводит к

$$\hat{U}_- \hat{T}_- |\mu_S\rangle = \sqrt{(p_2+1)p_1} |U-T-\mu_S\rangle_{\mathbb{E}},$$

причем для этого состояния с весом  $\tilde{\mu} = \mu_S - \alpha_2 - \alpha_1$

$$U = \frac{1}{2} (p_2 + 1), \quad U_3[\tilde{\mu}] = \frac{1}{2} (p_2 - 1)$$

Вычислим скалярное произведение состояний, полученных при разном порядке действия понижающих операторов на состояние старшего веса,  $\mathbb{E} \langle U-T-\mu_S | T-U-\mu_S \rangle_{\mathbb{E}}$  и убедимся, что эти нормированные на единицу состояния не совпадают. Действительно, в последующих выкладках учтем, что коммутатор повышающего и понижающего генераторов для двух простых корней равен нулю (см. [3.43]), и это значит, что  $[\hat{U}_+, \hat{T}_-] = 0$ . В подалгебре  $\mathfrak{su}(2)$  имеет место связь вида (II.1.6, которая для компонент  $U$  и  $T$ -изоспина приводит к  $\hat{U}_+ \hat{U}_- = \hat{U}_- \hat{U}_+ + 2\hat{U}_3, \hat{T}_+ \hat{T}_- = \hat{T}_- \hat{T}_+ + 2\hat{T}_3$ , а действие повышающего оператора на старший вектор состояния дает нуль. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \langle U-T-\mu_S | T-U-\mu_S \rangle_{\mathbb{E}} &= \frac{\langle \mu_S | \hat{T}_+ \hat{U}_+ \hat{T}_- \hat{U}_- | \mu_S \rangle}{\sqrt{p_1 p_2 (p_1 + 1) (p_2 + 1)}} = \frac{\langle \mu_S | \hat{T}_+ \hat{T}_- \hat{U}_+ \hat{U}_- | \mu_S \rangle}{\sqrt{p_1 p_2 (p_1 + 1) (p_2 + 1)}} = \\ &= \frac{2T_3 [\mu_S] 2U_3 [\mu_S]}{\sqrt{p_1 p_2 (p_1 + 1) (p_2 + 1)}} = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{(p_1 + 1) (p_2 + 1)}} < 1 \end{aligned}$$

<sup>43</sup> Состояние обладает определенным изоспином - это значит, что оно собственное как для квадрата изоспина, так и для одной из его проекций, в данном случае для  $T_3$ .

Раз модуль скалярного произведения двух нормированных на единицу векторов состояния меньше единицы, значит, эти векторы не могут быть коллинеарны: векторы  $|T_- U_- \mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$  и  $|U_- T_- \mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$  линейно независимы и образуют базис своей двумерной линейной оболочки.

Вычислим действие повышающего проекцию  $T$ -изоспина оператора на оба состояния

$$\hat{T}_+ \left( \hat{T}_- \hat{U}_- |\mu_S\rangle \right) = \left( \hat{T}_- \hat{T}_+ + 2\hat{T}_3 \right) |U_- \mu_S\rangle = (p_1 + 1) |U_- \mu_S\rangle$$

и

$$\hat{T}_+ \left( \hat{U}_- \hat{T}_- |\mu_S\rangle \right) = \hat{U}_- \hat{T}_+ \hat{T}_- |\mu_S\rangle = p_1 |U_- \mu_S\rangle$$

где мы воспользовались свойствами старшего вектора состояния  $|\mu_S\rangle$ . Тогда для суперпозиции состояний

$$|\tilde{\mu}, T'\rangle \equiv p_1 |T_- U_- \mu_S\rangle - (p_1 + 1) |U_- T_- \mu_S\rangle$$

которая обладает весом  $\tilde{\mu}$  и меткой  $T'$ , действие повышающего оператора изоспина даст нуль

$$\hat{T}_+ |\tilde{\mu}, T'\rangle = 0$$

а это значит, что значение проекции  $T_3$  для  $T$ -изоспина не может быть повышено, и это значение проекции является максимальным. Максимальное значение проекции изоспина равно значению изоспина, и, следовательно, состояние  $|\tilde{\mu}, T'\rangle$  имеет  $T$ -изоспин равный

$$T' = T_3^{\max} = T_3[\tilde{\mu}] = \frac{1}{2} (p_1 - 1)$$

в отличие от состояния  $|T_- U_- \mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$  с тем же весом и, следовательно, с той же проекцией  $T_3$ , но с изоспином

$$T = \frac{1}{2} (p_1 + 1)$$

Поэтому можно ввести обозначение

$$|\tilde{\mu}, T\rangle_{\mathbb{E}} \equiv |T_- U_- \mu_S\rangle_{\mathbb{E}}$$

Читатель может самостоятельно убедиться в том, что норма состояния  $|\tilde{\mu}, T'\rangle$  отлична от нуля 44

$$\langle \tilde{\mu}, T' | \tilde{\mu}, T' \rangle = p_1 (p_1 + 1) (p_1 + p_2 + 1)$$

т.е. можно ввести нормированное на единицу базисное состояние:

$$|\tilde{\mu}, T'\rangle = \sqrt{p_1 (p_1 + 1) (p_1 + p_2 + 1)} |\tilde{\mu}, T'\rangle_{\mathbb{E}}$$

Итак, мы установили, что старший вес внешнего шестиугольника  $\mu_S$  отвечает единственному базисному состоянию неприводимого представления с  $T$ -изоспином

$$T[\mu_S] = \frac{1}{2} p_1$$

а вес  $\tilde{\mu}$  старшей вершины внутри этого внешнего шестиугольника отвечает двум базисным состояниям неприводимого представления  $|\tilde{\mu}, T\rangle_{\mathbb{E}}$  и  $|\tilde{\mu}, T'\rangle_{\mathbb{E}}$  с  $T$ -изоспином

$$T = \frac{1}{2} (p_1 + 1) \quad \text{и} \quad T' = \frac{1}{2} (p_1 - 1)$$



**Киселев-2022-2**

5. Убедитесь, что состояния  $|\tilde{\mu}, T\rangle_{\mathbb{E}}$  и  $|\tilde{\mu}, T'\rangle_{\mathbb{E}}$  с одним весом, но с разными значениями  $T$ -изоспина ортогональны.

Поэтому в общем случае можно утверждать, что степень вырождения увеличивается на единицу при каждом шаге от старшего веса внешнего шестиугольника к весу старшей вершины внутреннего шестиугольника, если  $p_1 \neq 0$  или  $p_2 \neq 0$ , за счет появления состояния,  $T$  - или  $U$ -изоспин которого уменьшается на  $-\frac{1}{2}$  по сравнению с минимальным значением изоспина состояния со старшим весом внешнего шестиугольника. Если же внешний шестиугольник вырожден в треугольник, а значит,  $p_1 = 0$  или  $p_2 = 0$ , то состояний с дополнительным изоспином больше не возникает: нулевой изоспин не может быть уменьшен на  $-\frac{1}{2}$ . Это значит, что увеличение вырождения останавливается, когда шестиугольник вырождается в треугольник.

При этом, на всех сторонах шестиугольника или треугольника степень вырождения веса совпадает со степенью вырождения веса старшей вершины шестиугольника по тем же причинам, что и для внешнего шестиугольника. Большая степень вырождения запрещена тем, что она приводит к появлению старшего веса другого неприводимого представления, а меньшая степень не может возникнуть, так как все состояния на сторонах получаются действием понижающих операторов на состояния старшего вектора для  $SU(2)$  подгрупп соответствующего изоспина. Состояния на стороне характеризуются проекцией изоспина и разными значениями квадрата изоспина. Число разных значений квадрата изоспина совпадает с вырождением веса старшей вершины шестиугольника. В этой же логике внутри внешнего или внутреннего треугольника степень вырождения совпадает со степенью вырождения веса в старшей вершине треугольника.

Итак, вырождение возрастает на единицу при переходе к внутреннему шестиугольнику до тех пор, пока он не становится треугольником. Такая ситуация схематически показана на рис. 2.8 на примере неприводимого представления  $T^{(4,2)}$ : первый внутренний шестиугольник с двукратно вырожденными весами показан полужирной линией, а треугольник внутри него с трехкратно вырожденными весами жирной линией.

Таким образом, вырождение весов базисных состояний определяется их положением на весовой диаграмме:

- i) все веса на сторонах внешнего шестиугольника невырождены,
- ii) веса, расположенные на сторонах  $l$ -того по счету внутреннего шестиугольника со старшей вершиной, которая получается при  $l$ -кратном смещении старшего веса на вектор  $V_-$  (см. формулы (II.4.52) и (II.4.52)), имеют кратность вырождения, равную  $l + 1$ ,
- iii) веса состояний на сторонах треугольника, являющегося  $k$ -ым внутренним «вырожденным шестиугольником», и внутри этого треугольника имеют кратность вырождения, равную  $k + 1$ .

После сказанного легко подсчитать количество базисных квантовых состояний для системы, находящейся в неприводимом представлении группы  $SU(3)$ :

- каждый  $l$ -ый шестиугольник на весовой диаграмме имеет по три стороны с «длинами» (числом точек на весовой диаграмме)  $p_1 - l$  и  $p_2 - l$ , и каждый весовой вектор вырожден  $l + 1$  раз, так что на сторонах этих шестиугольников размещено  $n_1$  базисных состояний,

<sup>44</sup> В построениях мы полагали, что  $p_1 \neq 0$ . Если это не так, т.е. если внешний шестиугольник вырожден и является треугольником с вершиной вверху и основанием внизу, то в приведенных рассуждениях следует поменять местами  $T$  - и  $U$  изоспины. Если же  $p_1 = p_2 = 0$ , то представление является синглетным и содержит только одно состояние, инвариантное относительно действия группы  $SU(3)$ .

$$n_1 = 3 \sum_{l=0}^k (p_1 + p_2 - 2l) (l + 1)$$

а при  $l = k$  шестиугольник вырождается в треугольник,

• внутри треугольника из предыдущего пункта кратность вырождения весов базисных состояний на весовой диаграмме остается равной  $k + 1$ , а число точек внутри такого треугольника легко сосчитать. А именно, на самой длинной его стороне по вертикали расположено  $p_1 + p_2 - 2(k + 1)$  точек. При переходе на один шаг с самой длинной стороны внутрь треугольника по вертикали число точек на вертикальной линии внутри треугольника каждый раз уменьшается на единицу. Поэтому общее количество базисных состояний внутри треугольника равно сумме по числу описанных шагов  $\tilde{l}$  вплоть до момента, когда число точек внутри треугольника становится равным нулю,

$$n_2 = (k + 1) \sum_{\tilde{l}=1}^{p_1+p_2-2k-1} (p_1 + p_2 - 2k - 1 - \tilde{l})$$

Пользуясь стандартными выражениями <sup>45</sup> для суммы натуральных чисел и их квадратов через комбинаторные факторы  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ,

$$\sum_{l=1}^k l = C_{k+1}^2 = \frac{1}{2}k(k+1), \quad \sum_{l=1}^k l^2 = C_{k+1}^2 + 2C_{k+1}^3 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

находим

$$n_1 = \frac{3}{2} (p_1 + p_2) (k + 1)(k + 2) - k(k + 1)(2k + 1) - 3k(k + 1)$$

и

$$n_2 = \frac{1}{2} (k + 1) (p_1 + p_2 - 2k - 1) (p_1 + p_2 - 2k - 2).$$

Для того, чтобы упростить выкладки по расчету числа базисных состояний в неприводимом представлении, можно, во-первых, положить для определенности  $p_1 \geq p_2$  и  $k = p_2$ , и, во-вторых, заметить, что размерность представления не зависит от перестановки  $p_1 \leftrightarrow p_2$ , так как это приводит просто к отражению исходного шестиугольника относительно оси абсцисс. Это значит, что все построения для расчета размерности представлений  $T^{(p_1, p_2)}$  и  $T^{(p_2, p_1)}$  идентичны. Тогда

$$n_1 \mapsto \frac{1}{2} (p_2 + 1) \{3 (p_1 + p_2) (p_2 + 2) - 4p_2 (p_2 + 2)\}$$

дает

и

$$S_k(0) = \sum_{l=0}^k 1 = C_{k+1}^1 = k + 1$$

а также

---

<sup>45</sup> Для вывода заметим, что сумма геометрической прогрессии при  $a \rightarrow -0$

$$S_k(a) = \sum_{l=0}^k (1+a)^l = \frac{1 - (1+a)^{k+1}}{1 - (1+a)} = C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 a + C_{k+1}^3 a^2 + \dots$$

$$\left. \frac{d}{da} S_k(a) \right|_{a \rightarrow -0} = \sum_{l=0}^k l = C_{k+1}^2$$

$$\left. \frac{d}{da} (1+a) \frac{d}{da} S_k(a) \right|_{a \rightarrow -0} = \sum_{l=0}^k l^2 = C_{k+1}^2 + 2C_{k+1}^3$$

и

$$n_2 \mapsto \frac{1}{2} (p_2 + 1) (p_1 - p_2 - 1) (p_1 - p_2 - 2)$$

и после простого приведения подобных членов число базисных состояний неприводимого представления  $T^{(p_1, p_2)}$  группы  $SU(3)$ ,  $\dim T^{(p_1, p_2)} = n_1 + n_2$ , оказывается равным

$$\dim T^{(p_1, p_2)} = \frac{1}{2} (p_1 + 1) (p_2 + 1) (p_1 + p_2 + 2)$$

Примеры неприводимых представлений показаны на рис. 2.9

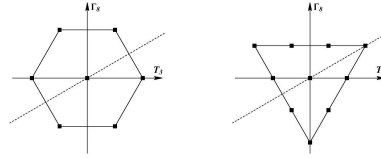


Рис. 2.9: Октетное (присоединенное)  $T^{(1,1)}$  и декуплетное  $T^{(3,0)}$  представления группы  $SU(3)$ .

Присоединенное представление  $T^{(1,1)}$  является симметричным при зеркальном отражении относительно оси абсцисс, как и любое представление  $T^{(p,p)}$ , что ясно из геометрических соображений. Оно включает в себя 8 состояний. При этом старший вес

$$\mu_S = \lambda_1 + \lambda_2 = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

совпадает с повышающим вектором  $V_+$ , так что расположение шести точек на весовой диаграмме представления  $T^{(1,1)}$  совпадает с шестью корнями алгебры  $\mathfrak{su}(3)$  (. 2, 1, 1.3, . 2.1 2.3, двукратно вырожденный вес с координатами  $(0,0)$  отвечает двум базисным состояниям с разными собственными значениями оператора Казимира для подалгебры изоспина  $SU(2)$ . Заметим, что диаграмма весов находится в полном соответствии с общим описанием весов присоединенного представления в разделе 2.4 Главы 2 2.

- два собственных вектора с нулевым весом, и их число равно рангу и числу генераторов подалгебры Картана,
- все остальные веса равны корням, а число таких состояний равно числу корней алгебры.

В декуплетном представлении все десять точек на весовой диаграмме являются невырожденными, поскольку исходный внешний многоугольник уже является треугольником, а значит, кратность вырождения всех точек на такой весовой диаграмме совпадает с кратностью вырождения на периметре треугольника, где она в данном случае равна единице.

Значение квадратичного оператора Казимира в заданном неприводимом представлении  $T^{(p_1, p_2)}$  легко вычислить действием выражения

$$C_2 = \hat{T}_3^2 + \Gamma_8^2 + \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{V}_- \hat{V}_+ + \hat{U}_- \hat{U}_+ + \hat{T}_3 + \sqrt{3} \Gamma_8$$

на состояние старшего веса

$$\mu_S = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 = \left( \frac{p_1}{2}, \frac{p_1 + 2p_2}{2\sqrt{3}} \right)$$

Учтем, что действие повышающих операторов на состояние старшего веса дает нуль. Тогда в выражении (II.1.39) необходимо учесть только собственные значения генераторов подалгебры Картана для старшего вектора состояний:

$$\hat{T}_3 |\mu_S\rangle = \frac{p_1}{2} |\mu_S\rangle, \quad \hat{\Gamma}_8 |\mu_S\rangle = \frac{p_1 + 2p_2}{2\sqrt{3}} |\mu_S\rangle$$

Поэтому элементарное приведение подобных членов дает собственное значение квадратичного оператора Казимира неприводимого представления  $T^{(p_1, p_2)}$ :

$$C_2 = \frac{1}{3} (p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) + p_1 + p_2$$

### 7.7.5 Symmetry of Hadron Spectra and Flavors of Quarks

Согласно общей интерпретации симметрии в физике соответствие между теоретико-групповыми понятиями и физической терминологией опирается на отождествление базиса неприводимого представления группы с квантовыми состояниями. А физические величины, характеризующие эти квантовые состояния равны собственным значениям генераторов подалгебры Картана группы и инвариантов Казимира из подгрупп, которые составляют полный набор наблюдаемых.

В частности, в кварковой модели адронов  $SU_f(3)$  октет представлен, например, в виде наблюдаемых состояний псевдоскалярных мезонов <sup>46</sup> составленных из кварк-антикварковых пар  $(q\bar{q})$ , или барионов  $(qqq)$  со спином  $\frac{1}{2}$  (см. рис. 2.10), а декуплет отвечает барионам со спином  $\frac{3}{2}$  (см. рис. 2.11).

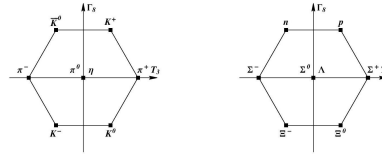


Рис. 2.10: Адронные состояния псевдоскалярных мезонов и барионов со спином  $\frac{1}{2}$  в модели  $SU_f(3)$  - симметрии сильных взаимодействий ароматов кварков: представление  $T^{(1,1)}$ .

По построению мультиплета неприводимого представления с координатами проекции изоспина по горизонтальной оси и гиперзаряда по вертикальной оси веса на одной горизонтальной линии отвечают состояниям с неизменным числом странных кварков и гиперзаряда и могут быть сгруппированы по семействам с фиксированным значением изоспина <sup>47</sup>, причем при сдвиге на весовой диаграмме вправо один из  $d$ -кварков в адроне заменяется на  $u$ -кварк (действие оператора повышения проекции изоспина). Каждый же шаг вниз по вертикали на весовой диаграмме увеличивает на единицу число странных кварков в адроне. Из этих соображений сразу можно однозначно определить кварковый состав большинства из рассматриваемых адронов, как указано в табл. 1

Исключение из этого простого правила составляют нейтральные частицы в октетах, весовой вектор которых имеет двукратное вырождение (см. раздел 4.4 Главы 2 4), т.е. весу внутри внешнего шестиугольника на рис. 2.10 отвечают два различных квантовых состояния. В этом случае следует принять во внимание тот факт, что для двух состояний с координатами  $(0, 0)$ , т.е. с нулевой проекцией изоспина  $T_3 = 0$  и с нулевым гиперзарядом  $\Gamma_8 = 0$  одно из состояний может быть ассоциировано с нейтральной компонентой изоспинового триплета ( $T = 1, T_3 = 0$ ), а другое - с состоянием изосинглета ( $T = 0$ ).

Например, пи-мезоны  $\pi^\pm$  с изоспином  $T = 1$  и проекциями  $T_3 = \pm 1$  составляют изотриплет вместе с нейтральным пионом  $\pi^0$  с  $T_3 = 0$ , а  $\eta$ -мезон - изосинглет с нулевыми собственными значениями наблюдаемых  $\hat{T}^2$  и  $\hat{T}_3$ .

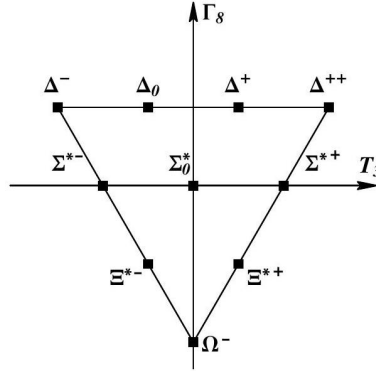


Рис. 2.11: Адронные состояния барионов со спином  $\frac{3}{2}$  в модели  $SU_f(3)$ -симметрии сильных взаимодействий ароматов кварков: представление  $T^{(3,0)}$ .

Таблица 1: Кварковый состав октета псевдоскалярных мезонов и барионов (спин  $\frac{1}{2}$ ) и декуплета барионов (спин  $\frac{3}{2}$ ).

|           |              |              |              |              |              |              |
|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| состояние | $K^0$        | $K^+$        | $\pi^-$      | $\pi^+$      | $K^-$        | $K^0$        |
| состав    | $(d\bar{s})$ | $(u\bar{s})$ | $(d\bar{u})$ | $(u\bar{d})$ | $(s\bar{u})$ | $(s\bar{d})$ |

|           |         |         |            |            |         |         |
|-----------|---------|---------|------------|------------|---------|---------|
| состояние | $n$     | $p$     | $\Sigma^-$ | $\Sigma^+$ | $\Xi^-$ | $\Xi^0$ |
| состав    | $(ddu)$ | $(uud)$ | $(dds)$    | $(uus)$    | $(ssd)$ | $(ssu)$ |

|           |            |            |            |               |              |          |
|-----------|------------|------------|------------|---------------|--------------|----------|
| состояние | $\Delta^-$ | $\Delta^0$ | $\Delta^+$ | $\Delta^{++}$ | $\Sigma_0^*$ | $\Omega$ |
| состав    | $(ddd)$    | $(ddu)$    | $(duu)$    | $(uuu)$       | $(sdu)$      | $(sss)$  |

Составная модель мезонных состояний присоединенного представления с нулевыми весами. Для точного описания кваркового состава нейтральных мезонных состояний присоединенного представления рассмотрим свойства билинейной формы, составленной из фундаментального представления группы  $SU(3)v^F$  с контравариантным индексом  $F$  и сопряженного представления  $v^\dagger$ , которое преобразуется как ковариантный объект  $(v^\dagger)_F$  и описывает антикварки (см. (II.4.14) и (II.4.15), а также (II.4.33 и описание преобразований фундаментальных представлений на стр. 117),

$$v = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad v^\dagger = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$$

<sup>46</sup> Основные состояния мезонов образованы кварком и антикварком с суммарным спином, равным нулю, и с орбитальным моментом относительного движения кварка и антикварка, также равным нулю, так что полный момент количества движения кварк-антикварковой пары равен нулю, что отвечает мезонному скалярному полю этой составной системы. В релятивистской теории кварки и антикварки являются квантами спинорного поля, а в теории группы Пуанкаре доказывается, что действие зеркальной инверсии на спинорные поля кварка и антикварка отличается знаком, так что в основном состоянии кварк-антикварковой пары зеркальная инверсия пространства приводит к смене знака мезонного поля, что и соответствует понятию псевдоскаляра.

<sup>47</sup> Напомним, что изоспином мы называем максимальное значение проекции  $(T_3)_{\max} = T$  в неприводимом представлении группы изоспина, а собственное значение квадратичного оператора Казимира группы изоспина в этом представлении равно  $T^2 = T(T+1)$ .

В этой записи мы отождествляем названия кварков с обозначениями базисных состояний в триплете ( $u \equiv |u\rangle$  и т.п.), а антикварков - с обозначениями базисных состояний в антриплете. Из триплета  $\mathbf{3}$  и антриплета  $\bar{\mathbf{3}}$  можно построить билинейную форму, т. е. рассмотреть тензорное произведение  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ . В этом тензорном произведении можно выделить неприводимые представления, а значит, разложить это тензорное произведение в прямую сумму пространств неприводимых представлений.

Один член такой суммы нам уже известен - это инвариант  $v^\dagger v = v^\dagger \cdot \mathbb{1} \cdot v$ , где в последнем равенстве мы специально выделили единичную матрицу. Это значит, что одна суперпозиция из исходных девяти элементов базиса в пространстве состояний тензорного произведения триплета и антриплета группы  $SU(3)$  отвечает синглету группы  $SU(3)$ , т.е. скаляру или инварианту, который не зависит от значения групповых параметров.. Покажем теперь, что остальные восемь базисных состояний в тензорном произведении отвечают октету группы  $SU(3)$ , используя вместо единичной матрицы в билинейной форме матрицы Гелл-Манна  $\lambda_a$ , несущие индекс групповых параметров.

Триплет  $v$  преобразуется матрицей  $g$  (II.4.30), а антриплет  $v^\dagger$  - матрицей  $g^\dagger = g^{-1}$ . Тогда преобразование билинейной формы

$$V_a = v^\dagger \lambda_a v \quad \mapsto \quad V'_a = v^\dagger g^\dagger \lambda_a g v$$

при бесконечно малых параметрах  $u^b \rightarrow 0$ , когда

$$g \approx \mathbb{1} - \frac{i}{2} \lambda_b u^b, \quad g^\dagger \approx \mathbb{1} + \frac{i}{2} \lambda_b u^b$$

сводятся к

$$\begin{aligned} V'_a &\approx v^\dagger \left( \mathbb{1} + \frac{i}{2} \lambda_b u^b \right) \lambda_a \left( \mathbb{1} - \frac{i}{2} \lambda_{b'} u^{b'} \right) v \\ &\approx v^\dagger \lambda_a v + \frac{i}{2} u^b v^\dagger [\lambda_b, \lambda_a] v = V_a + \frac{i}{2} u^b 2i f_{ba}^c v^\dagger \lambda_c v = V_a + f_{ab}^c V_c u^b, \end{aligned}$$

где мы использовали известное выражение для коммутатора матриц Гелл-Манна (II.4.28) и антисимметрию структурных констант  $f_{ba}^c = -f_{ab}^c$ . С помощью процедуры опускания и поднимания тензорных индексов посредством метрики Киллинга и обратной метрики Киллинга запишем изменение ковектора  $V_a$

$$\delta V_a \equiv V'_a - V_a = f_{ab}^c V_c u^b = f_{abc'} g^{c'c} V_c u^b = f_{abc'} V^{c'} u^b = f_{bca} u^b V^c,$$

где мы воспользовались полной антисимметричностью структурных констант  $f_{abc}$  относительно перестановки любой пары индексов и переместили индекс  $a$  на 2 позиции вправо. Тогда для изменения контрвектора

$$\delta V^a = g^{aa'} \delta V_{a'} = f_{bc}^a u^b V^c = [u, V]^a = (\mathcal{L}_u V)^a = (\text{ad}(u) V)^a,$$

т.е. мы получили закон группового преобразования векторов присоединенного представления в касательном пространстве согласно (I.1.20) и разделу 2.1 Главы 1, 2. Это значит, что восемь компонент ковектора  $V_a = v^\dagger \lambda_a v$  реализуют состояния присоединенного представления.

Суть составной модели - это рассмотрение тензорных произведений фундаментальных представлений группы. В данном случае это произведение кваркового триплета на антикварковый антриплет. Поскольку октетные компоненты построены из фундаментального представления кварков и антикварков, легко найти собственные значения наблюдаемых величин для этих компонент при действии генераторов из

подалгебры Картана, обобщенных на тензорное произведение представлений (см. обсуждение формул (II.2.14) и (II.2.15)).

Для иллюстрации этих положений и прозрачности формул рассмотрим сначала точно такую же конструкцию в группе  $SU(2)$ ,

$$\frac{1}{2}\mathbf{V} \equiv \mathcal{Q}^\dagger \hat{\mathbf{T}} \mathcal{Q}$$

где вместо триплета фундаментального представления  $v$  группы  $SU(3)$  мы подставили изодублет кварков  $\mathcal{Q}$ , а вместо  $v^\dagger$  - сопряженный изодублет антикварков  $\mathcal{Q}^\dagger$ ,

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{Q}^* = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{Q}^\dagger = (\bar{u}, \bar{d})$$

а генераторы  $\lambda_a = 2\Gamma_a$  мы заменили на генераторы изоспина  $2\mathbf{T}$  группы  $SU_f(2)$ .

Теперь рассмотрим состав триплета  $\mathbf{V}$ . Составим

$$\frac{1}{2}V_\pm = \mathcal{Q}^\dagger (\hat{T}_x \pm i\hat{T}_y) \mathcal{Q}$$

и с учетом явного вида матриц  $\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$  в терминах матриц Паули  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\hat{T}_+ = \hat{T}_x + i\hat{T}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_- = \hat{T}_x - i\hat{T}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

найдем

$$\frac{1}{2}V_+ = d\bar{u}, \quad \frac{1}{2}V_- = u\bar{d}.$$

Значит, эти комбинации соответствуют заряженным  $\pi$ -мезонам:

$$\pi^+ \mapsto \frac{1}{2}V_-, \quad \pi^- \mapsto \frac{1}{2}V_+$$

Для нейтральной компоненты с изоспином  $T_3$  по группе  $SU(2)$  введем

$$\pi^0 \mapsto \sqrt{2}\frac{1}{2}V_z = \sqrt{2}\mathcal{Q}^\dagger T_3 \mathcal{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}, \bar{d}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

где в суперпозицию кварковых состояний нами был введен нормировочный множитель, который обеспечивает то, что в мезоне находится одна кварк-антикварковая пара: с вероятностью  $48 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$  пара  $u\bar{u}$  и с той же вероятностью пара  $d\bar{d}$ . (Порядок записи кварк-антикваркового состава обычно приводится в упрощенном виде, а именно, в записи указывается только наименование частиц в адроне, так что мы следуем сложившейся традиции чтения, например,  $(u\bar{d}) = \pi^+$  читается как «мезон  $\pi^+$ - кварк  $u$ , антикварк  $\bar{d}$ ».

Согласно (II.2.14) и (II.2.15) значение заряда базисного состояния в тензорном произведении задается суммой зарядов кварков и антикварков, т.е. суммой зарядов состояний в тензорных множителях этого произведения:

$$\hat{Q}\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (Q_u + Q_{\bar{u}}) u\bar{u} - (Q_d + Q_{\bar{d}}) d\bar{d} \right\} = 0 \cdot \pi^0$$

и аналогично для проекции изоспина

$$\hat{T}_3\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (T_3[u] + T_3[\bar{u}]) u\bar{u} - (T_3[d] + T_3[\bar{d}]) d\bar{d} \right\} = 0 \cdot \pi^0$$

так как

$$T_3[u] = \frac{1}{2}, \quad T_3[\bar{u}] = -\frac{1}{2}, \quad T_3[d] = -\frac{1}{2}, \quad T_3[\bar{d}] = \frac{1}{2}.$$

Значит, прямым вычислением мы убедились, что состояние  $\pi^0$  действительно имеет нулевой заряд и нулевую проекцию изоспина. Вместе с тем, по построению  $\pi^0$  дополняет базис состояний  $\pi^\pm$  до триплета группы  $SU(2)$ .

Для вычисления квадрата изоспина  $\hat{\mathbf{T}}^2$ , который является квадратичным оператором Казимира группы  $SU(2)$  необходимо, во-первых, использовать его выражение через повышающие и понижающие генераторы (II.3.15)

$$\hat{\mathbf{T}}^2 = \hat{T}_3^2 + \hat{T}_3 + \hat{T}_- \hat{T}_+$$

и, во-вторых, учесть, что для фундаментального представления

$$\hat{T}_+ u = 0, \quad \hat{T}_+ d = u, \quad \hat{T}_- u = d, \quad \hat{T}_- d = 0$$

так как повышающие и понижающие изоспин матрицы алгебры  $\mathfrak{su}(2)$  имеют явный вид (II.3.11):

$$\hat{T}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично для представления сопряженного спинора  $\bar{Q}$  в алгебре  $\mathfrak{su}(2)$ ,

$$\bar{Q} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Q^* = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$$

сразу видно, что имеют место выражения

$$\hat{T}_+ \bar{u} = -\bar{d}, \quad \hat{T}_+ \bar{d} = 0, \quad \hat{T}_- \bar{u} = 0, \quad \hat{T}_- \bar{d} = -\bar{u}$$

Тогда, используя II.4.61-(II.4.63, найдем, что  $\hat{T}_3(u\bar{u}) = (\hat{T}_3 u) \bar{u} + u (\hat{T}_3 \bar{u}) = +\frac{1}{2}(u\bar{u}) - \frac{1}{2}(u\bar{u}) = 0$  и

$$\hat{\mathbf{T}}^2(u\bar{u}) = (\hat{T}_3^2 + \hat{T}_3 + \hat{T}_- \hat{T}_+)(u\bar{u}) = (\hat{T}_3 \cdot 0 + 0 + \hat{T}_- \hat{T}_+)(u\bar{u}) = -\hat{T}_-(u\bar{d}) = -d\bar{d} + u\bar{u}$$

и

$$\hat{\mathbf{T}}^2(d\bar{d}) = (\hat{T}_3^2 + \hat{T}_3 + \hat{T}_- \hat{T}_+)(d\bar{d}) = (\hat{T}_3 \cdot 0 + 0 + \hat{T}_- \hat{T}_+)(d\bar{d}) = \hat{T}_-(u\bar{d}) = d\bar{d} - u\bar{u}$$

Отсюда сразу получаем, что

$$\hat{\mathbf{T}}^2 \pi^0 = 2\pi^0 = T(T+1)\pi^0$$

и  $\pi^0$  - это состояние с изоспином  $T = 1$  и  $T_3 = 0$ .

Итак, нейтральные компоненты присоединенного представления отвечают матричному умножению фундаментального и сопряженного ему представлений с диагональными матрицами генераторов из подалгебры Картана соответствующей группы.

---

<sup>48</sup> Вероятность - квадрат модуля амплитуды, т.е. коэффициента в суперпозиции, если состояние имеет единичную норму (сумма вероятностей равна единице).



В группе  $SU(3)$  такое состояние  $\pi^0$  легко получить с помощью матриц Гелл-Манна и спиноров фундаментального представления  $v^F$  и сопряженного к нему  $\bar{v}_F$ , а также диагональной матрицы  $\lambda_3$  из подалгебры Картана:

$$\pi^0 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}_F (\lambda_3)_{\bullet_F} v^F = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v} \lambda_3 v = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d})$$

Другое нейтральное состояние - изоскаляр - получается при использовании в матричном произведении другой диагональной матрицы из подалгебры Картана, а именно,  $\lambda_8$ :

$$\eta \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}_F (\lambda_8)_{\bullet_F} v^F = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v} \lambda_8 v = \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

Предлагаем читателю самостоятельно в уме вычислить проекцию и квадрат изоспина для состояния  $\eta$ :  $T_3 = 0, \hat{T}^2 = 0$ , - тем более, что все выкладки уже проделаны при выводе значения квадрата изоспина для  $\pi^0$ .

Подчеркнем: номера матриц Гелл-Манна для нейтральных состояний  $\pi^0$  и  $\eta$  в точности соответствуют генераторам подалгебры Картана и расположению их собственных значений на весовой диаграмме присоединенного представления. Эту связь мы рассмотрим подробнее ниже при формулировке тензорного способа обозначений для представлений.

Составная модель барионов. Ситуация с барионами требует отдельного обсуждения. Это связано с тем, что барионы построены из кварков, среди которых могут встречаться и кварки одного аромата, так что необходимо внимательно отнестись к задаче с тождественными частицами. Кварки несут полуцелый спин  $\frac{1}{2}$ , т.е. являются фермионами. В этой связи обращает на себя внимание декуплет барионов со спином  $\frac{3}{2}$ , в котором гипероны  $\Delta^{++}, \Delta^-$  и  $\Omega^-$  составлены из идентичных кварков  $(uuu), (ddd)$  и  $(sss)$ , спины которых сонаправлены, и, следовательно, спиновая волновая функция тождественных кварков в этих гиперонах является симметричной относительно перестановок любых пар тождественных частиц 49

Далее, эти гипероны являются связанными состояниями с минимальной энергией системы трех кварков, так что орбитальные моменты относительного движения кварков тождественно равны нулю. В этом случае координатные волновые функции кварков симметричны относительно перестановок координат кварков. В итоге, пространственные и спиновые волновые функции тождественных кварков в этих гиперонах являются симметричными по перестановкам как спиновых квантовых чисел кварков, так и координат кварков. Это значит, что и само квантовое состояние, построенное как произведение спиновой волновой функции на координатную волновую функцию при заданной спиновой, при перестановке тождественных кварков переходит само в себя. А это вступает в противоречие с принципом запрета Паули для фермионов, которыми являются кварки, обладающие полуцелым спином. Согласно принципу запрета Паули вероятность обнаружить два тождественных фермиона в состоянии с тождественными квантовыми числами равна нулю. Это достигается за счет статистики Ферми-Дирака для амплитуды вероятности: перестановка квантовых чисел тождественных фермионов меняет знак амплитуды вероятности квантового состояния, а это значит, что, если квантовые числа двух тождественных фермионов совпадают, то амплитуда до перестановки квантовых чисел буквально совпадает с амплитудой после перестановки. Но по статистике Ферми-Дирака одна амплитуда равна другой со знаком минус, что возможно, только если сама амплитуда равна нулю.

Вместе с тем, согласно статистике Ферми-Дирака волновые функции квантовых состояний фермионов меняют знак при перестановке двух тождественных фермионов,

если учитывать все квантовые числа из полного набора наблюдаемых. Из этого следует, что полный набор наблюдаемых у кварков не может быть ограничен их координатами и проекциями спина на выделенную ось, так как существование декуплета барионов со спином  $\frac{3}{2}$  в основном состоянии - это экспериментальный факт.

Более того, именно открытие  $\Omega$ -гиперона как раз и послужило убедительным доказательством в пользу гипотезы о  $SU_f(3)$ -симметрии кварковых ароматов в сильных взаимодействиях, предложенной

Гелл-Манном. Противоречие же с принципом запрета Паули может быть устранено, если расширить полный набор наблюдаемых для кварков таким образом, чтобы волновая функция с учетом дополнительного квантового числа кварков в состояниях декуплета оказывалась бы антисимметричной по перестановкам тождественных кварков.

Это дополнительное квантовое число было введено Боголюбовым, Струминским и Тавхелидзе, а также независимо от них Намбу, Ханом и Гринбергом и впоследствии названо «цветом».

Поскольку экспериментально установлено, что состояние  $\Omega$ -гиперона невырождено, т.е. существует только один, единственный сорт таких гиперонов, то необходимо ввести три состояния  $s$ -кварка, по перестановкам которого цветовая волновая функция ( $sss$ ) должна быть полностью антисимметрична:

$$|\Omega\rangle_{\text{color}} \mapsto |\text{color}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{c_1 c_2 c_3} s_{[1]}^{c_1} s_{[2]}^{c_2} s_{[3]}^{c_3}$$

где  $\epsilon_{c_1 c_2 c_3}$  - полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты, а  $c_1, c_2, c_3$  - цветовые индексы, пробегающие от 1 до 3, которые принято также называть буквально: синий, красный, желтый (в формуле (II.4.66) индексы в квадратных скобках обозначают другие переменные, от которых зависит волновая функция кварка: проекция спина и координаты). Увеличение числа цветов привело бы к вырождению, т.е. к появлению дополнительных состояний с тем же составом ароматов кварков, к появлению состояний, которые не наблюдаются экспериментально. Другими словами, адронные состояния: и мезоны, и барионы, как и указанная нами цветовая волновая функция  $\Omega$ -гиперона, должны быть синглетами как составные объекты, несущие цветовые индексы, т.е. не иметь отличных от немых индексов, заданных цветами кварков. Это свойство можно сформулировать более точно, если ввести групповые преобразования цветовых состояний кварков. Синглетность адронов станет эквивалентна мультиплетности неприводимых представлений соответствующей группы, а именно, эквивалентна мультиплетности, равной единице. Для этого запишем обратимое преобразование цветовой волновой функции кварка в виде

$$s^{c'_1} = U_c^{c'_1} s^{c_1}$$

и выразим цветное состояние бариона как

<sup>49</sup> При максимальном значении проекции спина на выделенную ось спиновое квантовое состояние гиперонов записывается в виде тензорного произведения спиновых состояний кварков, составляющих адрон, например

$$|\Omega^-\rangle_{\text{spin}} = \sum_{\text{sym}(k_1, k_2, k_3)} |\uparrow, s(k_1)\rangle \otimes |\uparrow, s(k_2)\rangle \otimes |\uparrow, s(k_3)\rangle$$

где стрелка  $\uparrow$  - это символ спинового квантового состояния кварка с проекцией спина, равной  $+\frac{1}{2}$ ,  $s(k)$  указывает на квантовое состояние странного кварка с номером  $k$ , причем берется симметричная сумма по перестановкам номеров кварков  $(k_1, k_2, k_3) = (1, 2, 3)$ , которая делится на число слагаемых (см. определение в сноске на стр. 30 В этой записи явно видно, что перестановки номеров странных кварков никак не меняют квантовое состояние гиперона.

$$| \text{color} \rangle' = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{c'_1 c'_2 c'_3} s^{c'_1} s^{c'_2} s^{c'_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{c'_1 c'_2 c'_3} U_{\bullet c'_1}^{c'_1} U_{c'_2}^{c'_2} U_{c'_3}^{c'_3} s^{c_1} s^{c_2} s^{c_3}.$$

Учтем, что

$$\epsilon_{c'_1 c'_2 c'_3} U_{\bullet c'_1}^{c'_1} U_{c'_2}^{c'_2} U_{c'_3}^{c'_3} = \det U \cdot \epsilon_{c_1 c_2 c_3}.$$

Эту связь легко доказать, замечая, что тензор в левой части равенства является антисимметричным по перестановке каждой пары индексов  $c_{1,2,3}$ , так как перестановка пары этих индексов у матриц  $U$  в рассматриваемом выражении сводится к перестановке немых штрихованных индексов у этих же матриц и перестановке этих же штрихованных индексов у тензора Леви-Чивиты, что приводит к смене знака всего выражения. Значит, рассматриваемый тензор полностью антисимметричен по перестановке каждой пары индексов  $c_{1,2,3}$  и, следовательно, он пропорционален тензору Леви-Чивиты, поскольку индексы пробегают только три значения. Коэффициент пропорциональности однозначно устанавливается, если положить  $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3$ , так что слева мы получим определение детерминанта матрицы  $U$ , а справа единицу  $\epsilon_{123} = 1$ , умноженную на искомый коэффициент. Тогда

$$| \text{color} \rangle' = \det U | \text{color} \rangle,$$

а значит, нормировка и не наблюдаемая глобальная фаза остаются неизменными при

$$\det U = 1.$$

Итак, обратимые преобразования цветовых состояний кварков (I.4.67) должны быть унимодулярными (II.4.69). Потребуем также, чтобы при преобразовании (II.4.67) сохранялась нормировка кварковых состояний, что означает унитарность матрицы  $U$  в (II.4.67).

Для антикварков преобразование удобнее записать в виде (см. законы групповых преобразований для фундаментальных представлений группы  $SU(3)$ , которые мы описали при выводе (II.4.32) - II.4.37)

$$\bar{s}_{c'_1} = \bar{s}_{c_1} (U^\dagger)_{\bullet c'_1}^{c_1}$$

так что мезонное цветовое состояние типа  $\bar{s}_{c_1} s^{c_1}$  будет инвариантно относительно преобразований, если

$$U^\dagger U = \mathbb{1}$$

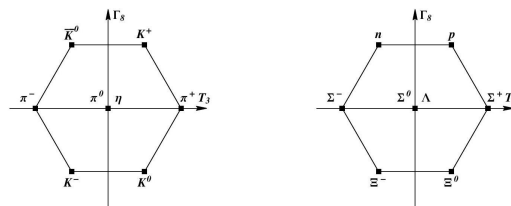
В итоге, обратимые преобразования цвета кварков образуют группу  $SU_c(3)$ , а адронные состояния реализуют синглетны 51 представления этой группы. Этот вывод находится в согласии с экспериментальными фактами.

Обратим теперь внимание на волновую функции дикварка, составленного из кварков одного аромата, например, (иц) в барионе, который находится в основном состоянии. Волновая функция такого дикварка - это амплитуда вероятности обнаружить два тождественных кварка с определенными значениями проекций спинов на выбранную ось, цвета кварков и координат. То есть волновая функция кварков в дикварке - это произведение спиновой волновой функции на цветовую и на координатную. Такое произведение должно быть антисимметрично относительно перестановки тождественных

<sup>50</sup> Например,  $\pi^+ \mapsto | \text{color} \rangle = u^{c_1} \bar{d}_{c_1}$ .

кварков, которые подчиняются статистике Ферми-Дирака. В барионе, где относительный момент количества движения двух тождественных кварков равен нулю, координатная волновая функция тождественных кварков-фермионов симметрична относительно перестановки кварков. В то же время, так как барион это синглет по цвету, цветовая волновая функция которого строится с помощью полностью антисимметричного тензора Леви-Чивиты, умноженного на цветовые состояния трех кварков, входящих в барион, мы приходим к выводу о том, что цветовая волновая функция дикварка (и $\bar{u}$ ) в барионе всегда антисимметрична по перестановке тождественных кварков. В итоге, произведение координатной и цветовой волновой функций дикварка в барионе в основном состоянии обладает антисимметрией по перестановке кварков, поскольку перестановка тождественных кварков в произведении волновых функций приводит к произведению множителей  $+1$  и  $-1$ , соответствующих симметрии координатной и цветовой волновых функций. Остается включить в рассмотрение симметрию спиновой волновой функции: согласно статистике Ферми-Дирака спиновая волновая функция такого дикварка может быть только симметричной по перестановке кварков. Это возможно, когда сумма проекций спина принимает максимально возможное значение, равное единице, а это значит, что квадрат суммарного спина равен двум, т.е. суммарный спин равен 1. В курсах квантовой механики при суммировании спинов двух частиц спина  $\frac{1}{2}$  показывают, что спиновая волновая функция при всех допустимых значениях суммы проекций спинов для двух кварков действительно симметрична относительно перестановки двух частиц только в случае суммарного спина, равного единице, независимо от того, чему равна проекция суммарного спина на выделенную ось. (При суммарном спине, равном нулю, спиновая волновая функция антисимметрична по перестановке двух тождественных частиц спина  $\frac{1}{2}$ .<sup>52</sup> Это значит, что дикварк (и $\bar{u}$ ) в барионе, который находится в основном состоянии, может иметь только суммарный спин, равный единице, а значение суммарного спина, равное нулю, запрещено из-за принципа запрета Паули для тождественных фермионов. Изоспин такого дикварка (и $\bar{u}$ ), естественно, равен единице: у каждого  $u$ -кварка в паре проекция изоспина  $T_3 = +\frac{1}{2}$ , так что сумма проекций  $T_3 = 1$ .

После этих замечаний можно более внимательно рассмотреть октет барионов со спином  $\frac{1}{2}$ .



На верхней линии расположены состояния ( $uud$ ) и ( $ddu$ ) с проекцией суммарного изоспина  $T_3 = +\frac{1}{2}$  и  $T_3 = -\frac{1}{2}$ , соответственно, и со странностью, равной нулю (в составе нет странных кварков), и это изодублет: протон и нейтрон. На нижней линии расположены гипероны со странностью  $S = -2$  (два странных кварка в составе)  $-\Xi^0 = (uss)$  и  $\Xi^- = (dss)$  с проекцией изоспина  $T_3 = +\frac{1}{2}$  и  $T_3 = -\frac{1}{2}$ , соответственно, и это - изодублет со странностью - 2. На центральной линии расположен изотриплет со странностью 53  $T_3 = -1$  определяется однозначно:  $\Sigma^+ = (uus)$  и  $\Sigma^- = (dds)$ . В нейтральных состояниях октета барионов со спином  $\frac{1}{2}$  с кварковым составом ( $uds$ ) выделяют два состояния:  $\Sigma^0$  с изоспином  $T = 1, T_3 = 0$  и изоскаляр  $\Lambda$  с  $T = 0$  (см. рис. 2.10): выделение состояний с заданным изоспином на весовой диаграмме в представлении  $T^{(1,1)}$  для барионов со спином  $\frac{1}{2}$  отличается от случая мезонов со спином, равным нулю, несмотря на то, что эти представления изоморфны. Для мезонов с нулевым спином достаточно было указать на то, что кварк и антикварк имеют противоположно

направленные спины (сумма проекций равна нулю, а смена проекций спина кварков на противоположные должна сопровождаться и сменой знака амплитуды вероятности для такого состояния кварка и антикварка, как это устанавливается при рассмотрении разложения тензорных произведений фундаментальных представлений группы  $SU(2)$  в сумму на неприводимые, или в рамках квантовой механики при рассмотрении сложения моментов количества движения двух подсистем). С цветовой волновой функцией кварка и антикварка в таких мезонах рассмотрение тоже было элементарным: в синглетном по цвету состоянии цвет кварка компенсировался антицветом антикварка. Для барионов в основном состоянии приходится учитывать как тождественность кварков, так и наличие цвета у кварков, что мы видели на примере дикварка (ии). Подобные вопросы удобнее обсуждать после рассмотрения тензорных произведений неприводимых представлений как в группе симметрии ароматов, так и в группе поворотов, а также в цветовой группе. Инструментом для построения разложения тензорных произведений на неприводимые представления являются схемы Юнга.

### 7.7.6 Tensor Method and Young's Schemes for $su(3)$

(мб в другое место перенесу всё это, в послдней части про это много)

#### Теория

Рассмотрим частный случай старшего веса неприводимого представления  $T^{(p,0)}$

$$\mu_S = p\lambda_1$$

Состояние  $|\mu_S\rangle$  можно построить, кратно умножая состояния первого фундаментального представления, которые мы пометим соответствующим номером  $k$  как

$$|\lambda_1\rangle_k, \quad k \in \{\overline{1}, p\}$$

так как этот номер указывает на разные состояния, отличающиеся координатами и проекциями спина (в кварковой модели это соответствует описанию тождественных  $u$ -кварков фундаментального представления с разными координатами и спинами),

$$|\mu_S\rangle = \underbrace{|\lambda_1\rangle_1 \otimes |\lambda_1\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\lambda_1\rangle_p}_p$$

где мы молча подразумеваем симметризацию тензорного произведения по перестановкам состояний, как мы это описали в (II.2.12 на стр. 86 в Главе 2, 2. При этом действие генераторов на тензорном произведении также определялось симметрично относительно действия на каждый фундаментальный множитель (см. [II.2.13]. Например,

$$\Gamma_l^\otimes |\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle \equiv \{(\Gamma_l \otimes 1) + (1 \otimes \Gamma_l)\} |\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle = \{(\lambda_m)_l + (\lambda_{m'})_l\} |\lambda_m\rangle \otimes |\lambda_{m'}\rangle$$

<sup>51</sup> В синглетном представлении есть только один базисный вектор состояния, который при групповых преобразованиях переходит сам в себя, а значит, реализуется только тождественное преобразование, и все элементы абстрактной группы отображаются в оператор, равный единице. Такое представление не является точным: у точного представления соответствие элементов группы и матриц преобразований в векторном пространстве представления является взаимно однозначным.

<sup>52</sup> Суммирование спинов двух частиц мы проводим в Главе 4 1 в разделе 1.1

<sup>53</sup> Напомним, что с точки зрения алгебраических структур странность есть не что иное, как гиперзаряд со смещением.

Собственные значения генераторов подалгебры Картана состояния (II.4.73), т.е. собственные значения для части наблюдаемых в полном наборе, определяющем квантовые числа базисных состояний, согласно (II.2.15, где было определено действие генератора на тензорное произведение в виде суммы действия генератора на каждый из множителей в тензорном произведении, равны компонентам весового вектора (II.4.72 у заданного состояния старшего веса  $|\mu_S\rangle$  II.4.73) в согласии с компонентами фундаментального вектора  $\lambda_1$  в (II.4.1):

$$\hat{T}_3 |\mu_S\rangle = \frac{p}{2} |\mu_S\rangle, \quad \hat{G}_8 |\mu_S\rangle = \frac{p}{2\sqrt{3}} |\mu_S\rangle$$

Если перейти от дираковских обозначений для базисных состояний первого фундаментального представления (см. рис. 2.7 в 4 Главы 2)

$$|\lambda_1\rangle \cong u, \quad |\nu_2\rangle \cong d, \quad |\nu_3\rangle \cong s, \quad \text{на примере кварковой модели,}$$

к базисным векторам триплета 3

$$|\lambda_1\rangle \mapsto \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\nu_2\rangle \mapsto \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\nu_3\rangle \mapsto \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

которые описывают контравариантные векторы

$$\mathbf{v} = v^F \mathbf{e}_F$$

то в этих тензорных обозначениях  $v^1 |\lambda_1\rangle_k \mapsto v_{[k]}^F$  при  $F = 1$  - это компонента вектора  $v_{[k]}$ , который описывает состояние триплета первого фундаментального представления. В таких компонентных обозначениях связь (II.4.73 между тензорным произведением состояний старшего веса триплетного фундаментального представления и состоянием старшего веса представления  $T^{(p,0)}$  можно записать в тензорном виде

$$|\mu_S\rangle \mapsto \mathcal{T}^{F_1 \dots F_p} = v_{[1]}^{F_1} \dots v_{[p]}^{F_p} \quad \text{при } F_1 = \dots = F_p = 1$$

В этой записи компонента тензора  $\mathcal{T}^{1 \dots 1}$  не равна единице, как это имеет место для базисного состояния  $|\mu_S\rangle$ , а сам тензор описывает уже целый класс тензорных произведений векторов триплетного фундаментального представления: все тензоры одного класса пропорциональны друг другу и по построению обладают одними и теми же свойствами при групповых преобразованиях, которые переводят векторы триплетного базиса  $\mathbf{e}_F$  в векторы триплетного базиса, оставляя при замене базиса каждый вектор  $\mathbf{v}$  неизменным, а компоненты этого вектора в старом базисе переходят в компоненты вектора в новом базисе. Читатель может освежить свои знания по той теме, обратившись к описанию формул (II.4.14)-(II.4.16) при рассмотрении кварковой модели.

Итак, состояние старшего веса неприводимого представления задает класс эквивалентности этого состояния. Для старшего веса первого фундаментального представления любой элемент этого класса эквивалентности - вектор  $v^F$ , который является элементом триплетного представления. Для других неприводимых представлений типа  $T^{(p,0)}$  необходимо описать произвольный элемент класса эквивалентности для состояния старшего веса, построенного из состояний старшего веса первого фундаментального представления.

Подчеркнем, что связь II.4.76 показывает, что старший вектор неприводимого представления  $T^{(p,0)}$  по построению в покомпонентной тензорной записи симметричен относительно перестановок порядка индексов, которые нумеруют компоненты векторов фундаментальных представлений, входящих в тензорное произведение (эти индексы

указаны в квадратных скобках). Важно также отметить, что веса всех базисных состояний представления  $T^{(p,0)}$  расположены на сторонах треугольника весовой диаграммы и внутри треугольника, а значит, все веса невырождены: каждому весу отвечает единственное состояние неприводимого представления.

Все базисные состояния неприводимого представления группы и их суперпозиции в общем случае получаются многократным действием понижающих генераторов на старший вектор состояния. В случае первого, т.е. триплетного фундаментального представления это значит, что все состояния этого неприводимого представления отвечают суперпозициям базисных состояний, т.е. различным компонентам вектора  $v^F$ , для которых уже индекс, нумерующий компоненты, может принимать любые значения от единицы до трех, в то время как сам вектор  $v$  символизирует собой все возможные суперпозиции базисных состояний триплетного фундаментального представления, а не только состояние со старшим весом  $\lambda_1$ .

Действие тензорного понижающего оператора, определенного на пространстве тензорного произведения фундаментальных представлений, как мы уже указали выше при его введении на стр. 86. в формуле (II.2.13), определяется как сумма действия соответствующего оператора фундаментального представления на каждый из фундаментальных сомножителей в тензорном произведении, т. е. это действие определяется как операция, симметричная по отношению к порядку записи компонент в тензорном произведении состояний фундаментальных представлений. Следовательно, действие тензорных понижающих операторов не изменяет симметричности тензорного произведения относительно перестановок множителей в этом тензорном произведении. Отсюда следует, что, если старший вектор состояния задан в виде симметричного тензорного произведения элементов фундаментального представления, то и все базисные состояния неприводимого представления с этим старшим вектором состояния симметричны относительно перестановок порядка индексов, нумерующих компоненты векторов состояний фундаментальных представлений, из которых набрано тензорное произведение, на котором мы строим неприводимое представление рассматриваемой алгебры  $su(3)$ .

Это значит, что все суперпозиции состояний неприводимого представления  $T^{(p,0)}$  в тензорной записи эквивалентны симметричным контравариантным тензорам ранга  $p$ , т. е. класс симметричных контравариантных отличных от нуля тензоров  $\mathcal{T}^{F_1 \dots F_p}$  - это класс эквивалентности относительно действия группы для состояния старшего веса, построенного как произведение  $p$  состояний старшего веса первого фундаментального представления, так что компоненты такого симметричного тензора - это элементы неприводимого представления  $T^{(p,0)}$ .

Подчеркнем, что симметричное произведение состояний старшего веса триплетного фундаментального представления в тензорной записи отвечает компоненте симметричного контравариантного тензора, а симметризованное тензорное произведение триплетных фундаментальных представлений, т.е. произведение уже не специально выбранных состояний старшего веса, а тензорное произведение пространств, содержащих состояние старшего веса, отвечает симметричному по перестановкам всех контравариантных индексов тензору ранга  $p$ , тензору, который описывает неприводимое представление типа  $T^{(p,0)}$ .

В явном виде, при  $p = 2$ , например, понижающие операторы в представлении со старшим вектором состояния (II.4.73) выражаются через понижающие операторы фундаментального представления - матрицы Гелл-Манна на каждой из фундаментальных компонент тензорного произведения, которые мы пометили номером в квадратных скобках так же, как контрвекторы фундаментальных представлений в этих подпространствах (см. связь генераторов и матриц Гелл-Манна в [I.4.25,

$$\begin{aligned}\hat{T}_- &\mapsto \sqrt{2}\Gamma_{\alpha_1} = \frac{1}{2} \left( \left\{ \lambda_1^{[1]} - i\lambda_2^{[1]} \right\} \otimes \mathbb{1}^{[2]} + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \left\{ \lambda_1^{[2]} - i\lambda_2^{[2]} \right\} \right), \\ \hat{V}_- &\mapsto \sqrt{2}\Gamma_{\gamma} = \frac{1}{2} \left( \left\{ \lambda_4^{[1]} - i\lambda_5^{[1]} \right\} \otimes \mathbb{1}^{[2]} + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \left\{ \lambda_4^{[2]} - i\lambda_5^{[2]} \right\} \right), \quad \gamma = \alpha_1 + \alpha_2, \\ \hat{U}_- &\mapsto \sqrt{2}\Gamma_{\alpha_2} = \frac{1}{2} \left( \left\{ \lambda_6^{[1]} - i\lambda_7^{[1]} \right\} \otimes \mathbb{1}^{[2]} + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \left\{ \lambda_6^{[2]} - i\lambda_7^{[2]} \right\} \right).\end{aligned}$$

На самом деле в этой записи номера в квадратных скобках можно считать избыточными, так как порядок действия единичных матриц и матриц Гелл-Манна указан в явном виде тензорного произведения этих матриц. Они становятся необходимыми только при переходе к традиционной «неявной» записи тензорных произведений типа формулы (II.4.76, в которой формальный порядок записи компонент векторов состояний фундаментальных представлений может быть произвольным.

Корневые тензорные операторы симметричны относительно перестановок фундаментальных представлений, пронумерованных и упорядоченных цифрами в квадратных скобках. Поэтому и состояния, полученные операциями понижения из состояния старшего веса, будут симметричны относительно перестановок индексов компонент векторов состояний фундаментальных представлений. Следовательно, все состояния исследуемого неприводимого представления  $T^{(p,0)}$  соответствуют симметричному по перестановкам индексов тензору

$$\mathcal{T}^{F_1 \dots F_p} = v^{\{F_1} [1] \dots v^{F_p\}} [p],$$

где фигурные скобки означают симметризацию по перестановкам индексов, например, при  $p = 2$

$$\mathcal{T}^{\{F_1 F_2\}} = \frac{1}{2!} (\mathcal{T}^{F_1 F_2} + \mathcal{T}^{F_2 F_1})$$

Итак, неприводимое представление  $T^{(p,0)}$  с заданным состоянием старшего веса специального вида (II.4.72 по построению описывается симметричным контравариантным тензором ранга  $p$ .

Совершенно аналогично неприводимое представление  $T^{(0,p)}$  с заданным состоянием старшего веса вида

$$\mu_S = p\lambda_2$$

описывается симметричным ковариантным тензором ранга  $p$

$$\mathcal{T}_{F'_1 \dots F'_p} = \bar{v}^{[1]}_{\{F'_1} \dots \bar{v}^{[p]}_{F'_p\}}$$

построенным из ковекторов второго фундаментального представления  $\bar{\mathbf{3}}$  со старшим весом  $\lambda_2$ , причем и для нижних индексов в (II.4.80) фигурные скобки означают симметризацию по перестановкам индексов. По каждому из верхних индексов тензоры (II.4.78) преобразуются так же, как входящие в тензорное произведение контрвекторы фундаментального представления, т.е.  $3 \times 3$ -матрицами представления группы  $g$  (умножение слева), а тензоры (II.4.80) по каждому из нижних  $-3 \times 3$ -матрицами представления группы  $g^\dagger$  (умножение справа).

Приведенное нами тензорное описание неприводимых представлений можно изображать в виде графических схем, однозначно соответствующих типу неприводимого представления. Эти схемы в силу своей наглядности и строгих правил соответствия определенным тензорам традиционно используют для описания неприводимых представлений и рассмотрения тензорных произведений неприводимых представлений



при их разложении в сумму по инвариантным подпространствам, т.е. в прямую сумму неприводимых представлений.

Для этих целей необходимо определить элементы, из которых составляют схемы, и обосновать соответствие этих элементов простейшим неприводимым представлениям, которых в группе  $SU(3)$  три: синглет, триплет и антитриплет.

Итак, поскольку матрицы преобразований унимодулярны ( $\det g = 1$ ), особую роль при рассмотрении представлений группы играет тензор Леви-Чивиты. А именно, величина

$$\bar{e} = \epsilon_{F_1 F_2 F_3} v_{[1]}^{F_1} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3},$$

как мы уже видели, является инвариантом, так как при групповых преобразованиях тензор Леви-Чивиты остается инвариантным

$$\epsilon'_{F_1 F_2 F_3} = \det g \cdot \epsilon_{F_1 F_2 F_3} = \epsilon_{F_1 F_2 F_3}.$$

Это значит, что синглет  $\bar{e}$  отвечает антисимметризованному произведению трех триплетов.

Величина же

$$\bar{w}_{F_3} = \epsilon_{F_1 F_2 F_3} v_{[1]}^{F_1} v_{[2]}^{F_2}$$

представляет из себя векторное произведение двух векторов в триплетном представлении и при действии группы преобразуется по сопряженному фундаментальному представлению антитриплета  $\bar{\mathbf{3}}$ . Покажем это в явном виде. Действительно, так как групповые преобразования дают

$$\bar{w}'_{F_3} = \epsilon_{F_1 F_2 F_3} g_{\bullet F'_1}^{F_1} g_{\bullet F'_2}^{F_2} v_{[1]}^{F'_1} v_{[2]}^{F'_2} = \epsilon_{F_1 F_2 F'_3} g_{\bullet F'_1}^{F_1} g_{\bullet F'_2}^{F_2} g_{\bullet F'_3}^{F'_3} (g^\dagger)_{\bullet F_3}^{F'_3} v_{[1]}^{F'_1} v_{[2]}^{F'_2},$$

где мы использовали унитарность  $g_{\bullet F'_3}^{F'_3} (g^\dagger)_{\bullet F_3}^{F'_3} = \delta_{F_3}^{F'_3}$ , то с учетом

$$\epsilon_{F_1 F_2 F'_3} g_{\bullet F'_1}^{F_1} g_{\bullet F'_2}^{F_2} g_{\bullet F'_3}^{F'_3} = \det g \cdot \epsilon_{F'_1 F'_2 F'_3}$$

находим закон преобразования антитриплета  $\bar{\mathbf{3}}$

$$\bar{w}'_{F_3} = \bar{w}_{F'_3} (g^\dagger)_{\bullet F_3}^{F'_3},$$

что и требовалось показать: ковектор антитриплета по своим трансформационным свойствам относительно действия группы эквивалентным образом может быть представлен как векторное произведение двух контвекторов. Это значит, что антитриплет описывается антисимметризованным произведением двух триплетов.

В итоге, мы можем говорить о трех элементах, на которых можно строить схемы неприводимых представлений: триплет, антисимметризованное произведение двух триплетов и антисимметризованное произведение трех триплетов. Эти элементы однозначно соответствуют триплету, антитриплету и синглету группы  $SU(3)$ .

Для читателя, знакомого с дифференциальными формами и операцией дуальности по Ходжу 55, скажем, что можно определить 1-форму

$$\bar{v} \equiv \bar{v}_F \mathfrak{h}^F$$

где базис антитриплетного фундаментального представления задается в полной аналогии с базисом в триплетном фундаментальном представлении (см. рис. 2.7 в 4 Главы 2 с помощью эрмитова сопряжения

$$\mathfrak{h}^F = (\mathfrak{e}_F)^\dagger \Rightarrow \mathfrak{h}^{(1)} = (1, 0, 0), \quad \mathfrak{h}^{(2)} = (0, 1, 0), \quad \mathfrak{h}^{(3)} = (0, 0, 1)$$

а на примере кварковой модели

$$|\bar{\nu}_3\rangle \cong \bar{u}, \quad |\bar{\nu}_2\rangle \cong \bar{d}, \quad |\lambda_2\rangle \cong \bar{s}$$

В такой конструкции компоненты ковектора задаются через компоненты триплета  $\mathbf{3}$  контрвектора  $v$  с помощью комплексного сопряжения так, что  $\bar{v}_F = (v^F)^*$ . Далее можно построить внешнее произведение двух антитриплетов - 2-форму

$$w \equiv \bar{v}_{[2]} \wedge \bar{v}_{[3]} \mapsto w_{F_2 F_3} = \frac{1}{2} \left( \{\bar{v}_{[2]}\}_{F_2} \{\bar{v}_{[3]}\}_{F_3} - \{\bar{v}_{[2]}\}_{F_3} \{\bar{v}_{[3]}\}_{F_2} \right)$$

или дуальную по Ходжу к этой 2-форме 1-форму

$$\bar{w} \equiv *w \mapsto \bar{w}_{F_1} = \epsilon_{F_1 F_2 F_3} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3}$$

которая по своим групповым свойствам эквивалентна ковектору антитриплета  $\bar{\mathbf{3}}$ , и наконец 3 -форму

$$\bar{\sigma} \equiv \bar{v}_{[1]} \wedge \bar{v}_{[2]} \wedge \bar{v}_{[3]}$$

которая по Ходжу эквивалентна синглету

$$\sigma \equiv *\bar{\sigma} \mapsto \epsilon_{F_1 F_2 F_3} v_{[1]}^{F_1} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3}$$

и получить таким образом описание триплета, антитриплета и синглета в терминах 1 -формы, 2 -формы и 3-формы, соответственно.

## Киселев-2022-2

6. Сравните квантовые числа (собственные значения проекции изоспина и странность) у базисных состояний антитриплетов, которые отвечают компонентам ковектора  $\bar{v}_F$  и ковектора  $\bar{w}_F$ .

После сказанного введем первичные обозначения элементов схем Юнга:

- фундаментальное представление, триплет, обозначают квадратом, символизирующим контравариантный вектор  $\boldsymbol{v}$  (один индекс),

$$\square \leftrightarrow T^{(1,0)} = \mathbf{3},$$

• антитриплетное фундаментальное представление изображают в виде пары квадратов, расположенных в виде столбца, что символизирует антисимметричность по перестановкам квадратов в столбце, так как контравариантный антисимметричный тензор, построенный в виде тензорного произведения из двух триплетов фундаментального представления эквивалентен, как мы только что выяснили, ковариантному вектору-антитриплету  $\bar{\boldsymbol{w}}$ ,

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \leftrightarrow T^{(0,1)} = \bar{\mathbf{3}},$$

<sup>54</sup> Если вместо контрвекторов  $v^F$  использовать два ковектора  $\bar{v}_F$  и их свертку с  $\epsilon^{FF'F''}$ , то мы, естественно, придем к контрвектору фундаментального представления 3.

<sup>55</sup> Если в метрическом  $N$ -мерном пространстве задана  $k$ -форма с компонентами  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k}$ , то дуальная по Ходжу  $(N - k)$ -форма  $*\omega$  имеет компоненты  $*\omega_{\mu_{k+1} \dots \mu_N} = \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_N} \omega^{\mu_1 \dots \mu_k}$ , где верхние контравариантные компоненты получены из нижних ковариантных операций поднимания индекса обратной метрикой:  $\omega^{\mu_1 \dots \mu_k} = g^{\mu_1 \mu'_1} \dots g^{\mu_k \mu'_k} \omega_{\mu'_1 \dots \mu'_k}$ .

• инвариант, построенный операцией антисимметризации из трех фундаментальных представлений, синглет - столбец из трех квадратов, символизирующий контравариантный тензор третьего ранга, который инвариантен относительно действия группы,

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \leftrightarrow T^{(0,0)} = \mathbf{1}.$$

В рамках такого подхода естественно изобразить симметричный контравариантный тензор неприводимого представления  $T^{(p,0)}$  в виде строки длиной в  $p$  квадратов и при этом постулировать, что в этой схеме симметризация индексов в строке

$$\underbrace{\square \cdots \square}_p \leftrightarrow T^{(p,0)}$$

Ковариантный тензор неприводимого представления  $T^{(0,p)}$  изображается в виде пары строк длиной в  $p$  квадратов, и при этом имеет место симметризация индексов в каждой строке (ковариантный тензор ранга  $p$  симметричен относительно перестановки любой пары своих индексов) и антисимметризация в каждом столбце (антитриплетный столбец записан как антисимметричное произведение двух триплетов)

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}_p \leftrightarrow T^{(0,p)}.$$

Особо отметим, что на схеме Юнга для представления  $T^{(p,0)}$  симметризация по клеткам в строке, которую мы трактовали как симметрию контравариантного тензора по перестановке любой пары индексов этого тензора, совпадает с симметризацией по номерам триплетов, которые составляют тензор, т.е. симметризацию по номерам, указанным в квадратных скобках. Для представления  $T^{(0,p)}$  симметризация по строкам и антисимметризация по столбцам также соответственно совпадают с симметризацией и антисимметризацией по номерам триплетов, составляющих тензор.

Подчеркнем, что в тензорном методе рассмотрения со схемами Юнга представления  $T^{(0,p)}$  и  $T^{(p,0)}$ , очевидно, являются сопряженными друг другу в следующем смысле: если взять схему Юнга, изображающую инвариант, равный произведению  $p$  синглетов, в виде трех строк с одной и той же длиной  $p$ , и разбить этот инвариант горизонтальной линией на одиночную строку длиной  $p$  и двойную строку длиной  $p$ , то выше горизонтальной линии получится схема Юнга представления  $T^{(p,0)}$  - симметричный контравариантный тензор ранга  $p$ , а ниже горизонтальной линии - схема Юнга для  $T^{(0,p)}$ , т.е. симметричный ковариантный тензор ранга  $p$ , соответственно. Это согласуется с тем, что объединение этих двух схем в одну означает свертку симметричного контравариантного тензора ранга  $p$  с ковариантным симметричным тензором ранга  $p$  по каждому из индексов, в результате чего получается скаляр. В дальнейшем станет ясно, что, если провести рассечение такой  $p$ -кратной синглетной схемы Юнга линией, которая разбивает эту схему инварианта на две схемы Юнга, то эти схемы также будут ковариантно сопряжены друг другу, т.е. свертка тензоров смешанного контравариантного и ковариантного типа друг с другом даст скаляр.

Перейдем теперь к вопросу об описании неприводимого представления  $T^{(p_1,p_2)}$  со старшим весом состояния

$$\mu_S = p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2.$$

Построим симметризованное произведение  $p_1$  фундаментальных представлений триплетов и симметризованное произведение  $p_2$  сопряженных фундаментальных представлений антитриплетов

$$\underbrace{\square \cdots \square}_{p_2} \otimes \underbrace{\square \cdots \square}_{p_1} \mapsto \mathcal{T}_{F'_1 \dots F'_{p_2}}^{F_1 \dots F_{p_1}} = \prod_{k=1}^{p_1} v_{[k]}^{\{F_k\}} \prod_{m=1}^{p_2} \bar{v}_{\{F'_m\}}^{[m]}$$

Этот тензор содержит компоненту  $\mathcal{T}_3^{1 \dots 1}$ , которая описывает состояние старшего веса представления  $T^{(p_1, p_2)}$ . Однако сам тензор описывает уже тензорное произведение триплетного и антитриплетного пространств, так что, наряду с компонентами старшего веса неприводимого представления  $T^{(p_1, p_2)}$ , тензорное произведение может содержать и неприводимые представления с меньшими значениями  $p_1$  и  $p_2$  у их старших весов. Для того, чтобы тензор содержал только одно неприводимое представление  $T^{(p_1, p_2)}$ , в этом произведении не должны содержаться неприводимые представления, старшие веса которых отвечают старшим вершинам внутренних шестиугольников, как мы это выяснили в предыдущем разделе. Для этого на тензор необходимо наложить дополнительные условия.

Подобные ограничения легко сформулировать. В самом деле, отметим сначала, что, стартовав со старшего вектора в каждом из фундаментальных триплетов и антитриплетов, действием понижающих генераторов и их суперпозиций можно получить все множество состояний у этих триплетов и антитриплетов, произведение которых и даст записанный выше тензор, симметризованный по контравариантным и ковариантным индексам, так как действие тензорных понижающих операторов по построению симметризовано по перестановкам компонентных множителей тензорного произведения. Однако симметризованный по верхним и нижним индексам тензор того же ранга можно построить и из произведения символа Кронекера на компоненты векторов триплетов и ковекторов антитриплетов, например,

$$(\mathcal{T}')_{F'_1 \dots F'_{p_2}}^{F_1 \dots F_{p_1}} = \delta_{\{F'_1\}}^{\{F_1\}} \prod_{k=2}^{p_1} v_{[k]}^{\{F_k\}} \prod_{m=2}^{p_2} \bar{v}_{\{F'_m\}}^{[m]}$$

Если векторы и ковекторы отвечают в этой записи состояниям старшего веса в первом и втором фундаментальных представлениях, то действие понижающих генераторов и их суперпозиций на этот тензор будут отвечать построению симметричного тензора для представления  $T^{(p_1-1, p_2-1)}$ , а дельта-символ Кронекера - это инвариантный тензор второго ранга смешанного типа, т.е. инвариантный тензор с одним верхним и одним нижним индексом: инвариантность означает, что символ Кронекера реализует синглетное представление группы. Следовательно, не всякий симметризованный тензор  $\mathcal{T}_{F'_1 \dots F'_{p_2}}^{F_1 \dots F_{p_1}}$  ранга  $p_1 + p_2$  символизирует неприводимое представление  $T^{(p_1, p_2)}$ , а только тот, что при свертке любой пары из верхнего и нижнего индексов дает тензор ранга  $p_1 + p_2 - 2$ , тождественно равный нулю. Если подобная свертка отлична от нуля, то симметризованный тензор ранга  $p_1 + p_2 - 2$  содержит в себе как минимум неприводимое представление  $T^{(p_1-1, p_2-1)}$ , а также, возможно, и представления более низших рангов, если и повторные свертки отличны от нуля.

Для иллюстрации положения о том, что симметризация смешанного тензора по верхним и нижним индексам не означает, что тензор, полученный как тензорное произведение, описывает пространство неприводимого представления, рассмотрим два примера. Первый пример - тензорное произведение триплета на антитриплет:

$$(\mathcal{T}')_{F'_1}^{F_1} = v_{[1]}^{F_1} \bar{v}_{F'_1}^{[2]}$$

где у тензора есть по одному верхнему и одному нижнему индексу, так что симметризовать просто нечего. След этого тензора - инвариант, т.е. синглет

$$(\mathcal{T}')_{F_1}^{F_1} = v_{[1]}^{F_1} \bar{v}_{F_1}^{[2]} = \text{inv}$$

Рассматриваемый тензор содержит состояние старшего веса  $(\mathcal{T}')_3^1$  для неприводимого представления  $T^{(1,1)}$ , но след тензора- это неприводимое представление меньшего ранга, а именно,  $T^{(0,0)}$ .

Запишем этот же смешанный тензор второго ранга в терминах триплета  $v_{[1]}^{F_1}$  и антитриплета  $\bar{w}_{F'_1}$ , составленного в виде антисимметризованного произведения двух триплетов

$$\bar{w}_{F'_1} = \epsilon_{F'_1 F_2 F_3} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3}$$

Такой тензор

$$v_{[1]}^{F_1} \bar{w}_{F'_1} = v_{[1]}^{F_1} \epsilon_{F'_1 F_2 F_3} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3}$$

в терминах элементарных схем Юнга отвечает тензорному произведению антитриплета на триплет,

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} \mapsto \square \otimes \square$$

Очевидно, что след этого тензора (суммирование по индексам  $F_1 = F'_1$ ) дает синглет

$$\mathcal{T}'_0 \equiv v_{[1]}^{F_1} \bar{w}_{F'_1} = v_{[1]}^{F_1} \epsilon_{F'_1 F_2 F_3} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3}$$

Построим теперь тензор, симметричный по номерам триплетов  $[1]$  и  $[2]$ , что автоматически будет по аналогии описывать и симметризацию по номерам  $[1]$  и  $[3]$ ,

$$(\mathcal{T}'_8)_{F'_1}^{F_1} \equiv v_{[1]}^{F_1} \epsilon_{F'_1 F_2 F_3} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3} + v_{[2]}^{F_1} \epsilon_{F'_1 F_2 F_3} v_{[1]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3}$$

След (суммирование по индексам  $F_1 = F'_1$ ) равен нулю:

$$(\mathcal{T}'_8)_{F'_1}^{F_1} \equiv v_{[1]}^{F_1} \epsilon_{F'_1 F_2 F_3} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3} + v_{[2]}^{F_1} \epsilon_{F'_1 F_2 F_3} v_{[1]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3} = \epsilon_{F_1 F_2 F_3} v_{[1]}^{F_1} v_{[2]}^{F_2} v_{[3]}^{F_3} + \epsilon_{F_1 F_2 F_3} v_{[1]}^{F_2} v_{[2]}^{F_1} v_{[3]}^{F_3} = 0.$$

Следовательно, ковариантный тензор  $(\mathcal{T}'_8)_{F'_1}^{F_1}$  с нулевым следом как бесследовая матрица размером  $3 \times 3$  содержит в себе максимум 8 независимых комплексных компонент. Но, кроме того, компонента этого тензора  $(\mathcal{T}'_8)_3^1$  соответствует состоянию старшего веса в представлении  $T^{(1,1)}$ , которое является восьмимерным. Все это означает, что групповые преобразования тензора  $(\mathcal{T}'_8)_{F'_1}^{F_1}$  - это преобразования в восьмимерном пространстве представления  $T^{(1,1)}$ , и тензор не содержит никаких дополнительных компонент, которые могли бы отвечать независимым компонентам инвариантных подпространств.

Итак, мы видим, что, во-первых, смешанный тензор, описывающий компоненты неприводимого представления, должен иметь равный нулю след по любой паре ковариантного и контравариантного индексов. Во-вторых, описанная процедура построения тензора  $(\mathcal{T}'_8)_{F'_1}^{F_1}$  повторяет уже известные нам правила симметрии схемы Юнга в строках и антисимметрии в столбцах относительно номеров триплетов в тензорном произведении, что позволяет нам записать схему Юнга представления  $T^{(1,1)}$  в виде

Второй пример - симметризованный тензор с двумя контравариантными и двумя ковариантными индексами, построенный из триплета, антитриплета и символа Кронекера в виде

$$(\mathcal{T}')_{F'_1 F'_2}^{F_1 F_2} = \frac{1}{4} \left\{ \delta_{F'_1}^{F_1} v_{[1]}^{F_2} \bar{v}_{F'_2}^{[2]} + \delta_{F'_1}^{F_2} v_{[1]}^{F_1} \bar{v}_{F'_2}^{[2]} + \delta_{F'_2}^{F_1} v_{[1]}^{F_2} \bar{v}_{F'_1}^{[2]} + \delta_{F'_2}^{F_2} v_{[1]}^{F_1} \bar{v}_{F'_1}^{[2]} \right\}.$$

Свертка по первой паре верхних и нижних индексов дает

$$\begin{aligned} \delta_{F_1}^{F'_1} (\mathcal{T}')_{F'_1 F'_2}^{F_1 F_2} &= \frac{1}{4} \left\{ 3v_{[1]}^{F_2} \bar{v}_{F'_2}^{[2]} + v_{[1]}^{F_2} \bar{v}_{F'_2}^{[2]} + \delta_{F'_2}^{F_2} v_{[1]}^{F_1} \bar{v}_{F_1}^{[2]} + v_{[1]}^{F_2} \bar{v}_{F'_2}^{[2]} \right\} = \\ &= \frac{5}{4} \left\{ v_{[1]}^{F_2} \bar{v}_{F'_2}^{[2]} - \frac{1}{3} \delta_{F'_2}^{F_2} v_{[1]}^{F_1} \bar{v}_{F_1}^{[2]} \right\} + \frac{2}{3} \delta_{F'_2}^{F_2} v_{[1]}^{F_1} \bar{v}_{F_1}^{[2]}, \end{aligned}$$

где первое слагаемое - это бесследовый тензор второго ранга, который отвечает октетному представлению  $T^{(1,1)}$ , а второй составлен из инвариантного тензора Кронекера с инвариантным множителем скаляром  $(\bar{v} \cdot v)$ . В этом примере мы видим, что след симметризованного тензора может включать в себя вклады не одного неприводимого представления, а нескольких неприводимых представлений меньшего ранга.

Значит, для неприводимости симметризованного тензора необходимо положить, что свертка симметризованного тензора, отвечающего неприводимому представлению группы  $SU(3)$ , по любой паре индексов обращается в нуль:

$$\delta_{F_k}^{F'_m} \mathcal{T}_{F'_1 \dots F_{p_2}}^{F_1 \dots F_1} = 0, \quad \forall k, m$$

Это правило легко понять на первом из приведенных нами примеров тензора представления  $T^{(1,1)} : \mathcal{T}_{F'}^F$ . Свертка его индексов приводит к инварианту  $\mathcal{T}_F^F$ , если бы этот инвариант не был положен равным нулю, и тогда этот инвариант - синглет - составляет одну из приводимых компонент тензора: при групповых преобразованиях синглет выражался бы только через себя самого, т.е. он описывает инвариантное подпространство, отличное от нуля-состояния и от рассматриваемого 9-мерного пространства состояний. Если же след тензора равен нулю, то с помощью матриц Гелл-Манна этот тензор можно представить в виде

$$\mathcal{T}_{F'}^F = B (\lambda_a)_{\bullet_{F'}}^F \left\{ \mathcal{T}_{F_2}^{F_1} (\lambda_a)_{\bullet_{F_1}}^{F_2} \right\}, \quad (\text{обратите внимание на суммирование по немому индексу } a),$$

где константу  $B$  легко определить, умножая равенство на  $(\lambda_b)_{F'}$ . Тогда, поскольку

$$(\lambda_b)_{\bullet_{F'}}^{F'} (\lambda_a)_{\bullet_{F'}}^F = \text{tr} (\lambda_b \lambda_a) = 2\delta_{ab},$$

находим

$$B = \frac{1}{2}.$$

В итоге, изучаемый тензор преобразуется как матрицы Гелл-Манна, которые как раз и реализуют представление генераторов группы, т.е. присоединенное представление  $T^{(1,1)}$ .

Вычислим количество независимых компонент у симметризованного тензора (II.4.85) с нулевым следом по каждой из пар индексов (II.4.87 и убедимся, что размерность этого тензора совпадает с размерностью неприводимого представления  $T^{(p_1, p_2)}$ , которая приведена в формуле (II.4.56).

У симметричного тензора ранга  $p$ , значения индексов которого меняются в пределах от 1 до 3, может быть только три группы индексов, таких, что индексы в группе принимают равные значения, отличные от значений в других группах индексов: либо 1, либо 2, либо 3. Пусть первая группа включает в себя  $k$  индексов, а значит,  $k$  лежит в пределах  $0 \leq k \leq p$ . Пусть вторая группа включает в себя  $j$  индексов, откуда  $0 \leq j \leq p-k$ . Остальные индексы принадлежат третьей группе. При заданном  $k$  имеется  $p+1-k$  возможностей для числа индексов во второй группе. В симметричном тензоре порядок индексов неважен. Будем считать, что первая группа из  $k$  индексов принимает значение 1, вторая группа, состоящая из  $p-k+1$  индексов, - значение 2, а оставшиеся индексы - значение 3. Тогда для подсчёта

вариантов надо просуммировать по числу  $k$  в диапазоне его изменения, т.е. от нуля до  $p$ . Значит, число возможных различных комбинаций индексов симметричного тензора ранга  $p$ , при которых он принимает независимые значения, равно

$$\sum_{k=0}^p (p+1-k) = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)$$

Смешанный тензор, отвечающий представлению  $T^{(p_1, p_2)}$ , имеет  $p_1$  симметризованных верхних индексов и  $p_2$  симметризованных нижних индексов. Поэтому число его независимых компонент - произведение возможных комбинаций в (II.4.88):

$$\frac{1}{4} (p_1 + 1) (p_1 + 2) (p_2 + 1) (p_2 + 2),$$

но при этом необходимо учесть условие бесследовости тензора при его свертке по каждой паре противоположащих индексов [см. (II.4.87)]. Результат свертки (II.4.87) можно рассматривать как равенство нулю тензора, симметризованного отдельно по  $p_1 - 1$  верхним и по  $p_2 - 1$  нижним индексам. Значит, у симметризованного тензора (II.4.87) все компоненты должны быть равны нулю. Количество таких условий дается той же формулой (II.4.89), при подстановке  $p_{1,2} \mapsto p_{1,2} - 1$ :

$$\frac{1}{4} p_1 (p_1 + 1) p_2 (p_2 + 1).$$

Так как тензор неприводимого представления изначально симметризован, то достаточно рассмотреть его свертку по единственной произвольной паре индексов: все другие свертки по условию симметрии тензора сводятся к выбранной. В итоге, вычитание числа условий нулевой свертки (II.4.90) из количества компонент в симметризованном тензоре (II.4.89) дает число базисных состояний неприводимого представления  $T^{(p_1, p_2)}$

$$\dim T^{(p_1, p_2)} = \frac{1}{2} (p_1 + 1) (p_2 + 1) (p_1 + p_2 + 2)$$

т.е. воспроизводит прежний результат (II.4.56, полученный прямым подсчетом состояний на весовой диаграмме с учетом степени вырождения весов.

Неприводимое представление  $T^{(p_1, p_2)}$  изображается на схеме Юнга в виде

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}_{p_2} \dots \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \dots \\ \hline \end{array}}_{p_1} \leftrightarrow T^{(p_1, p_2)}.$$

Подчеркнем, что первая строка по определению схемы Юнга должна быть не короче второй. Ясно также, что слева к этой схеме можно пририсовать произвольное число трехъярусных столбцов, символизирующих синглеты-инварианты, которые в виде множителей в тензорном произведении несколько не изменяют характеристики неприводимости представления по отношению к групповым преобразованиям.

Формулу для размерности неприводимого представления (II.4.91) можно записать в виде

$$\dim T^{(p_1, p_2)} = \frac{(p_1 + p_2 + 2)!}{2! p_1! (p_1 + p_2 + 1) \cdots (p_1 + 2)} \cdot \frac{(p_2 + 1)!}{p_2!}$$

Это произведение трактуют по следующей схеме:

• припишем каждой клетке  $i$  число шагов  $D_i$  от ее положения к «первой», расположенной в левом верхнем углу, считая шаг вверх отрицательным; • сопоставим этой клетке длину «крюка»  $k_i$  - число клеток, расположенных по двум линиям строго ниже ее и правей ее, включая ее саму.

Тогда для верхней строки получаем набор значений (слева направо)

$$\begin{aligned}\{D_i\} &= \{0, 1, \dots, p_2 - 1 | p_2, p_2 + 1, \dots, p_1 + p_2 - 1\} \\ \{k_i\} &= \{p_1 + p_2 + 1, p_1 + p_2, \dots, p_1 + 2 | p_1, p_1 - 1, \dots, 1\}\end{aligned}$$

где вертикальная линия отмечает конец нижней строки. Тогда находим, что первый сомножитель из двух в произведении для размерности неприводимого представления выражается через произведение

$$\frac{(p_1 + p_2 + 2)!}{2!p_1! (p_1 + p_2 + 1) \cdots (p_1 + 2)} = 3 \cdot 4 \cdots (p_1 + p_2 + 2) \cdot \frac{p_1 + 1}{(p_1 + p_2 + 1)!} = \prod_i \frac{3 + D_i}{k_i}.$$

Аналогично для второй строки получаем набор

$$\begin{aligned}\{D_i\} &= \{-1, 0, \dots, p_2 - 2\} \\ \{k_i\} &= \{p_2, p_2 - 1, \dots, 1\}\end{aligned}$$

так что

$$\prod_i \frac{3 + D_i}{k_i} = \frac{2 \cdot 3 \cdots (p_2 + 1)}{p_2!} = \frac{(p_2 + 1)!}{p_2!}$$

В итоге, приходим к выражению для размерности неприводимого представления группы  $SU(3)$  в терминах шагов  $D_i$  и крюков  $k_i$

$$\dim T^{(p_1, p_2)} = \prod_i \frac{3 + D_i}{k_i}$$

В случае группы  $SU(2)$  аналогичную формулу для размерности неприводимого представления  $T^{(j)}$  с моментом  $j$  можно получить, если учесть, что для этой группы схема Юнга - это одна строка из  $2j$  клеток, так что для этой единственной строки набор шагов и крюков задается в виде

$$\begin{aligned}\{D_i\} &= \{0, 1, \dots, 2j - 1\} \\ \{k_i\} &= \{2j, 2j - 1, \dots, 1\}\end{aligned}$$

Тогда

$$\dim T^{(j)} = \prod_i \frac{2 + D_i}{k_i} = \frac{2 \cdot 3 \cdots (2j + 1)}{(2j)!} = \frac{(2j + 1)!}{(2j)!} = 2j + 1$$

что совпадает со стандартным результатом.

Без вывода приведем обобщение для группы  $SU(N)$ , для которой можно ввести аналогичные схемы Юнга с указанными свойствами симметрии в строках и антисимметрии в столбцах:

$$\dim T^{(p_1, p_2, \dots, p_{N-1})} = \prod_i \frac{N + D_i}{k_i}$$

Эта формула справедлива и для  $N = 2$ .



Мы построили неприводимое представление и его схему Юнга, исходя из рассмотрения многократного тензорного произведения состояний фундаментального представления триплета и сопряженного к нему антитриплета: это есть частный случай произведения волновых функций двух неприводимых представлений:  $T^{(p_1,0)} \otimes T^{(0,p_2)}$ , и выделения в нем неприводимой части  $T^{(p_1,p_2)}$ , одного из членов в прямой сумм в терминах схем Юнга

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}_{p_2} \cdots \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}_{p_1} \otimes \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}_{p_1} \cdots \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}_{p_2} = \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}_{p_2} \cdots \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{p_1} \cdots \oplus \dots$$

Напомним, что прямую сумму образуют векторные подпространства, элементы которых являются инвариантными подпространствами при групповых преобразованиях, т.е. линейная оболочка образов подпространства совпадает с самим подпространством. Мы использовали эти понятия при определении неприводимых представлений: приводимое представление - это прямая сумма неприводимых (инвариантных) подпространств.

Несложно догадаться, как выглядят другие члены прямой суммы в этом тензорном произведении: клетки-компоненты тензорного произведения из второй схемы Юнга (контравариантный тензор) можно последовательно присоединять (тензорно умножать) к первой схеме так, чтобы получалась опять же схема Юнга (неприводимое представление), и при этом вычеркивать получающиеся трехъярусные столбцы, отвечающие инвариантным множителям в тензорном произведении. В итоге, можно вложить в третью строку  $l$  клеток из второй схемы Юнга, причем  $l \leq \min p_{1,2}$ , или добавить  $k$  клеток во вторую строку, так чтобы  $p_1 - l - k \geq k$ , и сумма представлений имеет вид

$$\bigoplus_{l=0}^{\min p_{1,2}} \bigoplus_{k=0}^{(p_1-l)/2} \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}_{p_2-l+k} \cdots \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{p_1-l-k}.$$

Описанное вычисление есть простейшее применение метода схем Юнга для разложения в прямую сумму произведения неприводимых представлений для группы  $SU(3)$ .

### Правила вычисления произведения неприводимых представлений

В общем случае (представления с двумя строками разной длины) сформулируем правила вычисления произведения неприводимых представлений. Пусть первая схема Юнга в произведении будет фиксированной. К ней мы будем присоединять всеми возможными способами клетки второй схемы, ограничивая себя следующими требованиями:

- клетки второй схемы присоединяются к первой последовательно строка за строкой, начиная с верхней («длинной»);
- присоединение клеток должно давать схему Юнга (длины первой и второй строк упорядочены);
- максимальное число строк равно трем (столбец из трех клеток вычеркивается из схемы как инвариант);
- клеткам в строках второй схемы присваивают символьные имена: верхняя строка - «a», нижняя - «b», так что после присоединения к фиксированной схеме клетки с одним именем не могут оказаться в одном столбце: действительно, клетки с одним именем изначально симметризованы по перестановкам, а их запись в столбец означала бы антисимметризацию, которая для симметричного тензора дает тождественный нуль;

• после всевозможных присоединений клеток второй схемы к первой среди результирующих схем Юнга допустимы только те, в которых последовательная запись имен клеток справа налево и сверху вниз упорядочена так, что в любой точке записи число имен «а» не меньше числа имен «b».

Последнее правило означает, что выше заданной присоединенной клетки число клеток из первой строки второй схемы не меньше числа клеток из второй строки. Этот отражает тот факт, что отдельной клетке с именем «a» отвечает триплет фундаментального представления типа  $v^a$ , а клетке с именем «b» сопутствует и клетка с именем «а», так как они образуют двухъярусный столбец - антисимметризованное произведение двух триплетов фундаментального представления  $v^a \tilde{v}^b - v^b \tilde{v}^a$ . Фундаментальные триплеты из первой строки второй схемы могут быть либо симметризованы с триплетами из первой строки фиксированной схемы: операция присоединения клетки «а» к первой строке; либо антисимметризованы: операция присоединения клетки «а» ко второй строке; либо свернуты с сопряженными антитриплетами исходной схемы: операция присоединения клетки «а» в третью строку с образованием инварианта. Рассмотрение тех же операций с клеткой по имени «b» показывает, во-первых, что она не может быть присоединена к первой строке, так как либо в первой строке уже есть антисимметрично сопряженная ей клетка по имени «а», симметризация с которой приводит к нулю, либо в этой строке отсутствуют клетки по имени «а», так что в результате добавления в первую строку клетки «b» возникло бы повторное выделение одного и того же слагаемого: сопряженная клетка «а» уже составила подобную же схему (двойной счет). Запись клетки «b» во вторую строку означает антисимметризацию фундаментального триплета со спинорами исходной схемы, и следовательно, симметризацию с сопряженным антитриплетом «а». То же самое касается и свертки с клеткой «b». В итоге, выше клетки «b» должна быть хотя бы одна клетка «а», что и записано в последнем правиле.

### Примеры схем Юнга

Проиллюстрируем действие метода схем Юнга на простейших примерах. Произведение представлений  $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = T^{(0,1)} \otimes T^{(1,0)}$ :

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = T^{(1,1)} \oplus T^{(0,0)} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}.$$

Умножение тех же волновых функций в обратном порядке иллюстрирует пятое правило:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \overline{a} \\ \hline \overline{b} \\ \hline \end{array} = \left( \begin{array}{|c|} \hline \overline{a} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \overline{a} \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline \overline{b} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \overline{a} & \overline{b} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \overline{a} \\ \hline \overline{b} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \overline{a} \overline{b} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \overline{a} \\ \hline \overline{b} \\ \hline \end{array}.$$

Первое и третье слагаемые в этой сумме недопустимы: первое повторяет четвертое слагаемое, но в строке имя «b» встречается раньше имени «а», а третье противоречит изначальной антисимметрии по перестановкам «а» и «b» в исходном антитриплете и опять же в строке имя «b» встречается раньше имени «а»; и поэтому мы приходим к прежнему результату

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$$

Заметим, что в кварковой модели адронов симметрия ароматов в кварк-антикварковом секторе, т.е. для мезонов, приводит, согласно последнему примеру, к существованию не

только описанного нами псевдоскалярного мезонного октета, но и синглета,  $\eta'$  - мезона, который наблюдается экспериментально.

Произведение  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$  вычисляется последовательно:

$$\begin{aligned}\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} &= \square \otimes \square = \square \oplus \square = T^{(0,1)} \oplus T^{(2,0)} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}, \\ \mathbf{6} \otimes \mathbf{3} &= \square \otimes \square = \square \oplus \square = T^{(3,0)} + T^{(1,1)} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8},\end{aligned}$$

а произведение  $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$  мы вычислили выше, так что

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$$

Декуплету отвечают волновые функции симметричные по перестановкам ароматов кварков. С учетом антисимметрии цветовой волновой функции и статистики Ферми в основном состоянии с симметричной пространственной волновой функцией допустимы только симметричные спиновые функции и мы приходим к декуплету барионов со спином  $\frac{3}{2}$ . Синглетное состояние антисимметрично по ароматам кварков и по их цвету, а значит, спиновая функция в основном состоянии могла бы быть только антисимметричной, что невозможно: хотя бы две из трех стрелок спина смотрят в одну сторону, - так что синглет в основном состоянии запрещен. Октетные состояния имеют смешанную симметрию по перестановкам кварковых ароматов и антисимметричны по цвету, так что из них формируется октет барионов со спином  $\frac{1}{2}$ , в котором произведение волновой функции ароматов на спиновую волновую функцию симметричны по перестановкам.

Итак, метод схем Юнга позволяет вычислять разложение тензорного произведения в прямую сумму, определяя тем самым типы неприводимых представлений. Его обобщение с  $SU(3)$  на случай группы  $SU(N)$  довольно очевидно, но мы не излагаем его, а отсылаем пытливого читателя к соответствующей физико-математической литературе, где обычно он описан кратко в виде инструкций по применению.

Другой вопрос - вычисление матричных элементов перехода от базиса произведения квантовых состояний неприводимых представлений к базису состояний неприводимого представления в прямой сумме, отвечающей этому произведению. Это - задача расчета коэффициентов Клебша-Гордана, а также ее обобщение на случай матричных элементов неприводимых тензорных операторов, теорема Вигнера-Эккарта. В простейших задачах их решение легко находится, а общие же методы излагаются в справочной литературе.

## Киселев-2022-2

7. Пользуясь схемами Юнга для группы  $SU(2)$  и формулой для размерности представления, запишите схемы для синглета  $s = 0$ , дублета  $s = \frac{1}{2}$ , триплета  $s = 1$  и квартета  $S = \frac{3}{2}$  и разложите в прямую сумму тензорные произведения  $2 \otimes 2$ ,  $3 \otimes 2$  и  $3 \otimes 3$ .

## Киселев-2022-2

8. Используя выражение для размерности неприводимого представления группы  $SU(2)$  через шаги  $D_i$  и крюки  $k_i$ :

$$\dim T^{(p_1)} = \prod_i \frac{N + D_i}{k_i}$$

докажите, что размерность представления с моментом  $j = p_1/2$  равна  $2j + 1$ .

**Киселев-2022-2**

9. С помощью группы отражений Вейля покажите, что фундаментальные представления с весами старших векторов  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  алгебры  $\mathfrak{su}(N)$ , где  $N = n + 1$ , а  $n$  – это ранг алгебры, и фундаментальные векторы  $\lambda_k$  отвечают нумерации простых положительных корней на диаграмме Дынкина от крайнего первого до крайнего последнего, имеют размерность

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Решение. Каждый элемент группы отражений Вейля переводит неприводимое представление в себя. Для того чтобы определить число состояний представления, необходимо сосчитать число композиций отражений, которые переводят одно состояние представления во все другие.

Начнем рассмотрение с фундаментального представления с весом  $\lambda_1$  у старшего вектора состояния, причем простой положительный корень  $\alpha_1$  расположен первым в цепочке корней алгебры  $\mathfrak{su}(N)$  на диаграмме Дынкина. Единственное отражение, которое изменяет старший вес этого фундаментального представления, согласно определению

$$s_m \nu = \nu - 2 \frac{(\nu, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)}$$

где все простые корни в алгебре  $\mathfrak{su}(N)$  имеют одну и ту же длину,  $(\alpha_m, \alpha_m) = 1$ ,

$$s_1 \lambda_1 = \lambda_1 - \alpha_1, \quad s_1 (\lambda_1 - \alpha_1) = \lambda_1$$

а так как в алгебре  $\mathfrak{su}(N)$  все простые положительные корни соединены последовательно от  $\alpha_1$  к  $\alpha_2$  и так далее, естественно возникает цепочка однократных отражений от старшего веса к младшему,

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \xleftarrow{s_1} \lambda_1 - \alpha_1 \xleftarrow{s_2} \lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 \xleftarrow{s_3} \dots \xleftarrow{s_n} \lambda_1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_n \\ \uparrow \\ v^{(1)} \xleftarrow{s_1} v^{(2)} \xleftarrow{s_2} v^{(3)} \xleftarrow{s_3} \dots \xleftarrow{s_n} v^{(n+1)}. \end{array}$$

Тем самым мы перечислили все компоненты фундаментального представления  $v^c$  со старшим весом  $\lambda_1$ . Это представление называют определяющим, так как коэффициенты разложения по базису состояний в этом представлении,  $v^c$ , отвечают столбцу с  $n + 1 = N$  компонентами, и именно на этот столбец действуют унитарные унимодулярные  $s_n$  матрицы группы  $SU(N)$ .

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: если рассмотреть цепочку элементов группы отражений Вейля

$$(\mathbb{1}, s_1, \dots, s_n)$$

то выборка независимых однократных отражений из этих  $n + 1$  элементов дает число композиций, равное числу состояний представления со старшим вектором  $\lambda_1$ , а количество элементов в выборке равно  $C_{n+1}^1 = C_N^1 = n + 1$ .

Ясно, что представление со старшим весом  $\lambda_n$ , который расположен в конце цепочки на диаграмме Дынкина для простых положительней корней группы  $SU(N)$ , строится из старшего вектора состояния ровно таким же манером, так что возникает сопряженное к  $v^c$  представление  $\bar{v}^c$  той же размерности  $n + 1 = N$ , как мы это уже описали при построении фундаментальных представлений алгебры  $\mathfrak{su}(3)$ , для которой есть только эти два фундаментальных представления.

Описанная картина может теперь применяться и для других фундаментальных представлений. Для примера, в фундаментальном представлении со старшим весом  $\lambda_2$  для построения из старшего вектора состояния  $|\lambda_2\rangle$  других векторов состояния необходимо сначала задействовать вейлевское отражение  $s_2$ ,

$$s_2\lambda_2 = \lambda_2 - \alpha_2$$

Затем можно уже действовать отражениями  $s_k$ , где  $2 < k \leq n$ , так же, как мы поступали при рассмотрении определяющего представления. Но, поскольку простой положительный корень  $\alpha_2$  расположен на диаграмме Дынкина вторым после корня  $\alpha_1$ , с которым есть одинарное соединение, и

$$s_1(-\alpha_2) = -\alpha_2 - \alpha_1$$

на каждом шаге отражения  $s_k$ , где  $2 < k \leq n$ , допустимо разветвление за счет действия  $s_1$ . Это значит, что общее число композиций, которые порождают все элементы этого представления равно выборке двукратных отражений из группы Вейля (II.4.100), т.е.

$$C_N^2 = \frac{1}{2} N(N-1)$$

На примере алгебры  $su(4)$  неупорядоченная выборка двукратных отражений из группы Вейля содержит 6 элементов,

$$(\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_{s_3}, s_1s_2, s_1s_3, s_2s_3)$$

последовательное действие которых на старший вес порождает все состояния представления, в чем читатель может убедиться самостоятельно, изображая ту же последовательность операций, что была описана нами выше для старшего веса  $\lambda_1$ , но с поправкой на ветвления. Отметим лишь, что замечание о неупорядоченной выборке говорит о следующем: если, например, указано двойное отражение  $s_2s_3$ , то на практике нужно рассмотреть отражение  $As_2s_3 + Bs_3s_2$  с  $A \neq 0, B \neq 0$  так как нас интересуют число независимых состояний в суперпозиции, а не построение состояний, отвечающих определенным весам. К примеру,

$$s_2s_3\lambda_2 = s_2\lambda_2 = \lambda_2 - \alpha_2, \quad s_3s_2\lambda_2 = s_3(\lambda_2 - \alpha_2) = \lambda_2 - \alpha_2 - \alpha_3$$

Первый из этих весов уже получался при действии  $\mathbb{1}_2\lambda_2$ , так что указанная суперпозиция двойного отражения  $As_2s_3 + Bs_3s_2$  дает только один новый независимый вектор состояний, как это и должно быть в принятой нами методике построения элементов фундаментального представления со старшим весом  $\lambda_2$ .

Таким образом, логика проведенного рассмотрения приводит к тому, что размерность фундаментального представления с весом  $\lambda_k$  равна числу выборок  $k$ -кратных отражений из элементов группы Вейля (II.4.100)

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

После этого вывода становится обоснованным изображение фундаментальных представлений алгебры  $su(N)$  в виде столбца из  $k$  клеточек: число независимых выборок в полностью антисимметричном тензоре ранга  $N - k$  равно

<sup>58</sup> Условие равенства единице детерминанта матрицы называют унимодулярностью.

$$C_N^{N-k} = C_N^k$$

Поэтому можно утверждать, что, с одной стороны, фундаментальное представление из  $k$  клеточек в столбце отвечает неприводимому тензору

$$\epsilon_{C_1 \dots C_k C_{k+1} \dots C_N} v_{[1]}^{C_1} \dots v_{[k]}^{C_k}$$

или, с другой стороны, в евклидовом пространстве это внешнее произведение 1-форм

$$\omega_{[1]} \wedge \dots \wedge \omega_{[k]}, \quad \omega_{[j]} = (v_{[j]})_C da^C, \quad C \in \{\overline{1, N}\}$$

Для примера, в алгебре  $su(3)$  (см. раздел [1.1](#) Главы [2](#) § [4](#) на стр. [108](#) элемент

$$\epsilon_{312} v_{[1]}^1 v_{[2]}^{(2)}$$

отвечает вектору собственных значений

$$\lambda_1 + (\lambda_1 - \alpha_1) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \lambda_2$$

так как собственные значения генераторов подалгебры Картана каждого вектора состояния - это компоненты весового вектора, а для произведения состояний собственные значения складываются, и

$$v_{[1]}^1 \mapsto \lambda_1, \quad v_{[2]}^{(2)} \mapsto \nu_2 = \lambda_1 - \alpha_1$$

Это значит, что нумерация состояний в сопряженном представлении в этой схеме с антисимметричными тензорами отвечает тому, что на третьей позиции значится фундаментальный вектор представлени 59 Кроме того, мы убеждаемся, что старший вектор фундаментального представления может быть построен в виде суперпозиции фундаментального вектора и весов определяющего представления.

### Киселев-2022-3

0. Рассмотрите фундаментальные представления группы  $SU(5)$  и диаграммы Юнга для них, используя выражение для размерности неприводимого представления группы  $SU(N)$  через шаги  $D_i$  и крюки  $k_i$ :

$$\dim T^{(p_1, p_2, \dots, p_{N-1})} = \prod_i \frac{N + D_i}{k_i}$$

Используйте схему теории великого объединения ( $GUT = \text{Great Unified Theory}$ ) для фермионов первого поколения: лептонов  $\nu_e, e$  и кварков  $u, d$ , - с квантовыми числами: электрический заряд  $Q$ , слабый изоспин  $T_3^W$ , цвет по группе  $SU_c(3)$ . Учтите, что в слабых взаимодействиях участвуют только левые фермионы (проекция спина на ось импульса равна  $-\frac{1}{2}$ ) и их CP-сопряженные партнеры - правые античастицы (проекция на ось импульса равна  $+\frac{1}{2}$ ). Распишите состав фундаментальных представлений по фермионам первого поколения. Чему равна сумма зарядов и проекций изоспина компонент фундаментального представления?

Решение. Ранг группы  $SU(5)$  равен четырем, а значит, имеется 4 фундаментальных представления и 4 наблюдаемых величины - 4 генератора подалгебры Картана, которые представляют собой диагональные матрицы. На диагоналях расположены вещественные

собственные значения наблюдаемой величины, сумма которых равна нулю, так как в простой компактной алгебре Ли след эрмитовой матрицы генератора равен нулю.

Фундаментальные представления отвечают следующим схемам Юнга:

□ представление  $T^{(1,0,0,0)}$ , квинтет **5**, так как согласно задаче 29 его размерность равна  $C_5^1 = 5$ , а по общей формуле

$$\dim T^{(1,0,0,0)} = \frac{5}{1} = 5$$

□ - представление  $T^{(0,1,0,0)}$ , декуплет **10**, так как согласно задаче 29 его размерность равна  $C_5^2 = 10$ , а по общей формуле

$$\dim T^{(0,1,0,0)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1} = 10,$$

□ - представление  $T^{(0,0,1,0)}$ , декуплет  $\overline{10}$ , так как согласно задаче 29 его размерность равна  $C_5^3 = 10$ , а по общей формуле

$$\dim T^{(0,0,1,0)} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} = 10$$

□ - представление  $T^{(0,0,0,1)}$ , сопряженный квинтет  $\overline{5}$ , так как согласно задаче 29 его размерность равна

$C_5^4 = 5$ , а по общей формуле

$$\dim T^{(0,0,0,1)} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 5$$

Сопряженность представлений **5** и  $\overline{5}$  является следствием того, что они по своим индексам преобразуются матрицами  $U$  и  $U^\dagger$ , соответственно, как мы это показали при рассмотрении фундаментальных представлений  $SU(3)$ . При этом, если считать, что квинтет составлен из частиц с зарядами, которые задаются собственными значениями генераторов подалгебры Картана на базисных состояниях квинтета, то сопряженный квинтет содержит античастицы, т.е. состояния с зарядами противоположного знака по сравнению с зарядами состояний в квинтете.

Что касается декуплетов **10** и  $\overline{10}$ , то их наименование является условным, хотя они также составлены из частиц и античастиц по отношению к друг другу. Вместе с тем, поскольку группа  $SU(5)$  содержит в себе подгруппы  $SU(2)$  [две верхних компонента квинтета, синглетные по подгруппе  $SU(3)$ ] и  $SU(3)$  [три нижних компоненты квинтета, синглетные по подгруппе  $SU(2)$ ], то в квинтете можно выделить в качестве генераторов подалгебры Картана блочные матрицы проекции изоспина  $T_3$  подгруппы  $SU(2)$  и диагональные генераторы  $\frac{1}{2}\lambda_3$  и  $\frac{1}{2}\lambda_8$  подгруппы  $SU(3)$ , а в качестве четвертого элемента подалгебры Картана задать диагональную матрицу, пропорциональную гиперзаряду  $Y$ , который в примере с группой  $SU(2)$  для слабых взаимодействий складывается из электрического заряда и проекции изоспина  $\frac{1}{2}Y = Q - T_3$  так, чтобы коэффициент пропорциональности обеспечивал одно и тоже значение следа квадрата для любого генератора подалгебры Картана, а также взаимную ортогональность генераторов подалгебры Картана, т.е.

$$\Gamma_Y = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{2} Y = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(\Gamma_Y^2) = \text{tr}(T_3^2) = \text{tr}\left(\frac{1}{2}\lambda_3^2\right) = \text{tr}\left(\frac{1}{2}\lambda_8^2\right) = \frac{1}{2}$$

при  $\text{tr}(\Gamma_Y T_3) = \text{tr}(\Gamma_Y \lambda_3) = \text{tr}(\Gamma_Y \lambda_8) = 0$

Тогда в декуплете, построенном как внешнее произведение двух квинтетов, компонента  $v_{[1]}^{(1)} \wedge v_{[2]}^{(2)}$ , где  $v_{[1]}^{(1)}$  и  $v_{[2]}^{(2)}$  являются обладающими квантовыми числами, которые получаются сложением квантовых чисел у базисных состояний квинтета, так что по группе  $SU(3)$  эта компонента декуплета является синглетом, ее изоспин равен  $T_3 = 0$ , а гиперзаряд  $Y = -2$ , т.е. гиперзаряд сохраняет знак. Поэтому резонно считать, что  $10$  состоит из частиц с тем же знаком гиперзаряда. В то же время в сопряженном декуплете, построенном как внешнее произведение трех квинтетов, компонента, которая является синглетом по подгруппе  $SU(3)$ ,  $v_{[1]}^{(3)} \wedge v_{[2]}^{(4)} \wedge v_{[3]}^{(5)}$  обладает нулевым изоспином и гиперзарядом,

равным  $Y = +2$ , что указывает на то, что  $\overline{10}$  построен из античастиц по отношению к квинтету.

Далее, по условию задачи задан комплект состояний первого поколения фермионов (см. 3.5 Главы 2 стр.

106: по слабому взаимодействию выделяют дублеты левых лептонов и кварков и их античастиц 60

$$\mathcal{Q}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathcal{Q}}_R = \begin{pmatrix} \bar{d}_R \\ -\bar{u}_R \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_L = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathcal{L}}_R = \begin{pmatrix} e_R^+ \\ -\bar{\nu}_R^e \end{pmatrix}$$

квантовые числа которых задаются электрическими зарядами и слабым изоспином, а также синглеты по слабому взаимодействию (правые частицы и CP-сопряженные им левые античастицы)

$$u_R, \quad d_R, \quad \bar{u}_L, \quad \bar{d}_L, \quad e_R, \quad e_L^+$$

у которых слабый изоспин равен нулю. Кроме того, кварки являются триплетом  $\mathbf{3}_c$  по цветовой группе  $SU_c(3)$ , а антикварки - антитриплетом  $\overline{\mathbf{3}}_c$ . Всего с учетом цвета в первом поколении 30 квантовых состояний, что в точности совпадает с числом состояний в 4-х фундаментальных представлениях группы  $SU(5)$ .

В группе  $SU(5)$  содержится подгруппа  $SU_L(2) \times SU_c(3)$ , так как в определяющем 5-мерном представлении всегда можно выделить 2 компоненты сверху, которые преобразуются по группе слабого изоспина, и 3 компоненты снизу, которые преобразуются по цвету, причем 2 компоненты сверху не должны нести цвет, а 3 компоненты снизу не должны иметь слабый изоспин. Значит, в определяющем представлении - в квинтете по  $SU(5)$  - имеет смысл выбрать в качестве 2 верхних компонент дублет левых лептонов.

Теперь учтем, что ранг группы  $SU(5)$  равен 4, и кроме проекции слабого изоспина (1 наблюдаемая) и цвета (2 генератора в подалгебре Картана) компоненты представления обладают еще одним квантовым числом - электрическим зарядом. Значит, электрический заряд описывается генератором подалгебры Картана, а поскольку сумма собственных значений эрмитова самосопряженного генератора алгебры Ли равна нулю, то и в частном случае сумма зарядов состояний в определяющем представлении должна обращаться в нуль: заряд 3-х цветных компонент в квинтете должен равняться  $+1$ , так как сумма зарядов нейтрино и электрона равна  $-1$ . Итак, в квинтет в качестве 3-х нижних компонент входят кварки в зарядом  $+\frac{1}{3}$ , изосинглетные по слабому взаимодействию, а таким электрическим зарядом обладает антикварк, который мы обозначаем символом  $\bar{d}$  с цветовым индексом  $c = \{c_1, c_2, c_3\}$ , а изосинглетный по слабому взаимодействию антикварк является левым спинором, так как правый антикварк принадлежит слабому изодублету, сопряженному фундаментальному изодублету левых кварков, т.е. квинтет составлен из левых спиноров: лептонного дублета по слабому взаимодействию и антикваркового триплета, синглетного по слабому взаимодействию:



$$\mathbf{5} \cong v \equiv \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^{c1} \\ \bar{d}_L^{c2} \\ \bar{d}_L^{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^c \end{pmatrix}$$

Сопряженный по группе  $SU(5)$  квинтет обозначается как  $\bar{\mathbf{5}}$ . Его можно построить как антисимметричное тензорное произведение четырех фундаментальных представлений (каждое со своим номером):

$$u_{a_1} \equiv \epsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} v_{[2]}^{a_2} v_{[3]}^{a_3} v_{[4]}^{a_4} v_{[5]}^{a_5}$$

так что, например, квантовые числа компоненты  $a_1 = 1$  совпадают с суммой квантовых чисел компонент  $a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5$ , как это следует из антисимметричности символа Леви-Чивиты в 5-мерном пространстве, т.е. заряд компоненты  $u_1$  равен

$$Q = Q[e] + 3Q[\bar{d}] = -1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

а проекция слабого изоспина равна

$$T_3 = T_3[e_L] + 3T_3[\bar{d}_L] = -\frac{1}{2} + 3 \cdot 0 = -\frac{1}{2}$$

что в точности совпадает с квантовыми числами правого антинейтрино. При этом необходимо учесть, что антисимметричное произведение трех компонент сопряженного фундаментального представления группы  $SU_c(3)$ , которому принадлежат цветные антикварки, является синглетом по цвету. Аналогично находим, что

$$Q[u_2] = +1, \quad T_3[u_2] = +\frac{1}{2}, \quad Q[u_{3,4,5}] = -\frac{1}{3}, \quad T_3[u_{3,4,5}] = 0$$

а значит, вторая компонента имеет квантовые числа правого позитрона, а три оставшиеся компоненты - это правый  $d$ -кварк (вопрос о цвете этих компонент по группе  $SU_c(3)$  рассмотрите самостоятельно). Сопряженный квинтет обозначают символом  $u_a \mapsto \bar{v}^a$ , а его состав был только что рассчитан нами с учетом комбинированной СР-четности, которая не только меняет знаки у зарядов состояний, но и спиральность -

---

<sup>60</sup> Напомним, что сопряженный двухкомпонентный спинор  $\bar{\psi}$  отличается от комплексно сопряженного спинора  $\psi^*$  и определяется как

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \psi^*, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_2 \\ -\bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$$

где  $\psi^*$  - это спинор комплексно сопряженного представления: отличия между  $\bar{\psi}$  и  $\psi^*$  сводятся не только к разным выражениям для генераторов преобразований, но и к разным квантовым числам компонент мультиплета, как видим. При этом в математике обычно оперируют комплексно сопряженным представлением  $\psi^*$ , а в физике часто используют сопряженный спинор  $\bar{\psi}$ : компоненты сопряженного спинора получаются после умножения комплексно сопряженного столбца  $\psi^*$  на спинорную метрику

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Компоненты комплексно сопряженного спинора описывают античастицы, которые мы специально обозначили вместо звездочки чертой  $\psi_{1,2}^* \mapsto \bar{\psi}_{1,2}$ , чтобы подчеркнуть, что при переходе к античастицам спинор меняет киральность: левый спинор частицы становится правым спинором античастицы, а правый спинор частицы - левым спинором античастицы, поскольку для киральных спиноров определена только операция комбинированной СР-четности, когда меняется и знак заряда и киральность (свойство базиса состояний по группе Лоренца).

проекцию спина на ось импульса в безмассовом пределе (это экспериментальный факт исследования слабых взаимодействий). Подчеркнем, что рассчитанные нами квантовые числа: электрический заряд, изоспин и цвет совпадают с квантовыми числами правых спиноров, но из наших построений никак не следует, что сопряженный квинтет составлен из спиноров. Мы постулируем, что совпадение квантовых чисел означает, что компоненты сопряженного квинтета - это спиноры. Значит,

$$\bar{5} \cong \bar{v} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\nu}_R^e \\ e_R^+ \\ d_R^{c1} \\ d_R^{c2} \\ d_R^{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_R^e \\ e_R^+ \\ d_R^c \end{pmatrix}$$

Фундаментальное определяющее представление 5 позволяет вычислить все характеристики компонент декуплетов 10 и  $\bar{10}$ , так как собственные значения состояний складываются. Поэтому, например, у сопряженного декуплета

$$u_{a_1 a_2} \equiv \epsilon_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} v_{[1]}^{a_3} v_{[2]}^{a_4} v_{[3]}^{a_5}$$

компонента  $u_{12} \sim \epsilon_{12345} v_{[1]}^{(3)} v_{[2]}^{(4)} v_{[3]}^{(5)}$  обладает

$$Q = Q[v^{(3)}] + Q[v^{(4)}] + Q[v^{(5)}] = 3Q[\bar{d}] = +1, \quad T_3 = 3T_3[\bar{d}_R] = 0$$

и является синглетом по цвету, так как это свертка трех антитриплетов по цвету с тензором Леви-Чивиты. Замечаем, что это характеристики левого позитрона  $e_L^+ \equiv u_{12}$ : электрический заряд +1, синглет по цвету и синглет по слабому изоспину (правый позитрон  $e_R^+ CP - e_L^-$ , так что  $e_R^+$  несет отличный от нуля слабый изоспин, а именно,  $T_3[e_R^+] = \frac{1}{2}$ ).

Аналогично, компоненты  $u_{13}, u_{14}$  и  $u_{15}$  несут

$$Q = Q[e] + 2Q[\bar{d}] = -\frac{1}{3}, \quad T_3 = T_3[e_L] + 2T_3[\bar{d}_L] = -\frac{1}{2}$$

и это частица, которая обладает слабым изоспином нижней компоненты дублета, является цветовым триплетом, так как цветных состояний три и они построены из тензорного произведения  $\bar{\mathbf{3}}_c \times \bar{\mathbf{3}}_c$ , и несет заряд  $d$ -кварка, т.е. соответствует состоянию  $d_L \equiv u_{1c}$ . Поэтому мы постулируем, что эта компонента декуплета и есть спинор левого  $d$ -кварка.

Точно так же  $u_{2c} \equiv u_L$ ,

$$Q = Q[\nu] + 2Q[\bar{d}] = \frac{2}{3}, \quad T_3 = T_3[\nu_L^e] + 2T_3[\bar{d}_R] = \frac{1}{2}$$

и для  $u_{34}, u_{35}$  и  $u_{45}$

$$Q = Q[e] + Q[\nu] + Q[\bar{d}] = -\frac{2}{3}, \quad T_3 = T_3[e_L] + T_3[\nu_L^e] + T_3[\bar{d}_R] = 0$$

так что это антитриплет по цвету (один цветовой индекс свободен и совпадает с цветовым зарядом антикварка в определяющем представлении), т.е.  $\bar{u}_L$ .

С учетом антисимметричных свойств тензора Леви-Чивиты все эти компоненты сопряженного декуплета приводят в виде антисимметричной матрицы  $5 \times 5$ ,

$$\overline{10} \cong \begin{pmatrix} 0 & e_L^+ & -d_L^{c1} & d_L^{c2} & -d_L^{c3} \\ -e_L^+ & 0 & u_L^{c1} & -u_L^{c2} & u_L^{c3} \\ d_L^{c1} & -u_L^{c1} & 0 & \bar{u}_L^{c3} & -\bar{u}_L^{c2} \\ -d_L^{c2} & u_L^{c2} & \bar{u}_L^{c3} & 0 & \bar{u}_L^{c1} \\ d_L^{c3} & -u_L^{c3} & \bar{u}_L^{c2} & -\bar{u}_L^{c1} & 0 \end{pmatrix}$$

Декуплетное представление 10 записывается в виде аналогичной матрицы, в которой левые частицы заменяются на правые античастицы <sup>61</sup>.

Обратим внимание на тот факт, что стерильное нейтрино, которое по определению несет равные нулю заряды как электрического, так и слабого взаимодействий, а также не имеет цвета, является синглетом по группе  $SU(5)$  и поэтому стерильное нейтрино не вошло в состав ни фундаментальных, ни каких-либо иных точных представлений группы  $SU(5)$ . Предполагается, что стерильное нейтрино могло бы участвовать во взаимодействиях, которые приводят к появлению отличной от нуля массы нейтрино, которые входят в состав мультиплетов по  $SU(5)$ . Это говорит о том, что нейтрино с массой, существование которой доказано в экспериментах с осцилляциями нейтрино разных поколений, либо возникает без участия стерильного, либо для объяснения массы нейтрино необходимо использовать мультиплеты других групп, имея в виду, что в целом ряде физических явлений достаточно использовать фундаментальные представления группы  $SU(5)$ . Такое разделение групп, описывающих квантовые состояния по типу физических явлений, называют иерархией групп симметрии. А именно, под иерархией понимают зависимость спектра масс состояний, которые входят в мультиплеты групп, от порогов энергии, выше которых расположены состояния в мультиплете: более широкая группа симметрии имеет более высокий порог для состояний ее мультиплетов. Пороги называют масштабами соответствующих симметрий.

### Киселев-2022-3

1. Какому набору  $(p_1, \dots, p_n)$  в разложении старшего веса по фундаментальным векторам отвечает присоединенное представление группы  $SU(N)$ , где ранг группы  $n = N - 1$ , а фундаментальные векторы пронумерованы в соответствии с расположением простых положительных корней  $\alpha_m$  на диаграмме Дынкина от края  $m = 1$  до края  $m = n$ ?

Ответ: представление  $T^{(1,0,\dots,0,1)}$ .

### Киселев-2022-3

2. Найдите все положительные корни  $\gamma_{\bar{m}}$  группы  $SU(N)$ .

Решение. Каждый простой положительный корень  $\alpha_m$  алгебры  $\mathfrak{su}(N)$  согласно диаграмме Дынкина соединен одной линией с последующим простым корнем, т.е. при построении положительных корней как последовательностей из простых корней допускается только один шаг сложения двух последовательных простых корней, и этот шаг ограничен только для последнего простого корня  $\alpha_n$ . Поэтому перечисление все положительных корней сводится к следующему:

все простые корни

$$\alpha_m, \quad m \in \{\overline{1, n}\}, \quad n = N - 1,$$

все последовательные пары простых корней

<sup>61</sup> Вообще говоря, для декуплета 10 от стандартного антисимметричного тензора 3-его ранга нужно перейти к дуальному тензору второго ранга.

$$\alpha_p + \alpha_{p+1}, \quad p \in \{\overline{1, n-1}\},$$

все последовательные тройки простых корней

$$\alpha_p + \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2}, \quad p \in \{\overline{1, n-2}\}$$

и так до последнего шага - последовательной суммы всех простых корней

$$\sum_m \alpha_m$$

Итого: всех положительных корней

$$K = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}N(N-1)$$

Общее число генераторов  $N_G$  получится, если сложить число генераторов из подалгебры Картана  $n$  с числом всех положительных корней  $K$  и таким же числом всех отрицательных корней,

$$N_G = n + 2K = N - 1 + N(N-1) = N^2 - 1.$$

### Киселев-2022-3

3. Покажите, что старший вес присоединенного представления группы  $SU(N)$

$$\mu_S = \sum_{m=1}^n \alpha_m$$

где  $\alpha_m$  - простые положительные корни, а длина этого веса  $\mu_S^2 = 1$ .

Докажите, что сумма скалярных произведений старшего веса с последовательностями всех положительных корней, которые мы нашли в предыдущей задаче, также равна единице,

$$\sum_{p=1}^n (\alpha_p, \mu_S) = 1, \quad \sum_{p=1}^{n-1} ((\alpha_p + \alpha_{p+1}), \mu_S) = 1, \quad \sum_{p=1}^{n-2} ((\alpha_p + \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2}), \mu_S) = 1, \dots$$

Пользуясь общей формулой для квадратичного оператора Казимира,

$$\langle C_2 \rangle = (\mu_S, \mu_S) + \sum_{\tilde{m}} (\gamma_{\tilde{m}}, \mu_S)$$

найдите

$$C_A = C_2^{\text{ad}} = 1 + \sum_{j=1}^n 1 = 1 + n = N$$

**Киселев-2022-3**

4.

Для определяющего фундаментального представления с весом  $\mu_S = \lambda_1$  докажите, что сумма скалярных произведений старшего веса с последовательностями всех положительных корней равна

$$\sum_{p=1}^n (\alpha_p, \mu_S) = \frac{1}{2}, \quad \sum_{p=1}^{n-1} ((\alpha_p + \alpha_{p+1}), \mu_S) = \frac{1}{2}, \quad \sum_{p=1}^{n-2} ((\alpha_p + \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2}), \mu_S) = \frac{1}{2}, \dots$$

Пользуясь общей формулой для квадратичного оператора Казимира (II.2.3, найдите

$$C_F = C_2^F = \lambda_1^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} = \lambda_1^2 + \frac{1}{2}(N-1)$$

Установите, что координаты фундаментального вектора равны

$$\lambda_1 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}}, \dots, -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$$

в базисе, где

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \alpha_2 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dots, 0 \right), \quad \alpha_3 = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, \dots, 0 \right), \dots$$

Найдите

$$\lambda_1^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot \dots \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{n}{n+1}$$

Выведите значение

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}$$

Используя общее выражение для индекса Дынкина

$$T_R = \tilde{C}_2^R \frac{\mathcal{D}_R}{\mathcal{D}_{\text{ad}}}$$

докажите, что  $T_F = \frac{1}{2}$ .

## 8 Representations of Lie algebras

### 8.1 Representations by Zhou

#### 8.1.1 4.1 Representations of $\mathfrak{su}(2)$

Now we find the representations of  $\mathfrak{su}(2)$ . We begin with some remarks about complexification.

- The standard basis of the Lie algebra is

$$T^a = -\frac{1}{2}i\sigma_a, \quad [T^a, T^b] = f_c^{ab}T^c, \quad f_c^{ab} = \epsilon_{abc}$$

It can also be regarded as the fundamental representation. Note that the representation is complex, because it contains complex matrices like  $T^z$ , but the Lie algebra  $\mathfrak{su}(2)$  is real. Finally, the representation is real in the physical sense since it is similar to its conjugate.

- In general, we will care about complex representations of real Lie algebras  $\mathfrak{g}$  since Hilbert spaces are complex vector spaces. However, it is much simpler to find and classify complex representations of their complexifications  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ .

- Every complex representation  $d$  of  $\mathfrak{g}$  extends to a complex representation  $d_{\mathbb{C}}$  of  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  by

$$d_{\mathbb{C}}(X + iY) = d(X) + id(Y)$$

Conversely, given a representation  $d_{\mathbb{C}}$  of  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  we may define a representation  $d$  of  $\mathfrak{g}$  by restriction.

- Given  $d$  and  $d_{\mathbb{C}}$  as defined above, it can be shown that  $d_{\mathbb{C}}$  is an irrep of  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  if and only if  $d$  is an irrep of  $\mathfrak{g}$ . Thus to classify irreps of  $\mathfrak{g}$  it is completely equivalent to classify irreps of  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ .

- Given a complex Lie algebra, there are multiple ways to restrict to a real Lie algebra, i.e. to take a 'real form'. For example, the complexification of  $\mathfrak{su}(n)$  is the set of  $n \times n$  traceless complex matrices, which is  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . But this has  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  as a real form, so the representation theory of  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  is the same as that of  $\mathfrak{su}(n)$ .

- Complexification behaves nicely for Lie algebras, but it is much subtler for Lie groups. A complex Lie group  $G$  is a complex-analytic manifold with a holomorphic group operation, and we say  $H \subseteq G$  is a real form of  $G$  if  $\mathfrak{h}$  is a real form of  $\mathfrak{g}$ . However,  $SL(2, \mathbb{R})$  is not a real form of any complex Lie group.

We now turn to finding the irreps of  $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ . From this point on we'll suppress the  $\mathbb{C}$  subscript, always implicitly working with a complexified Lie algebra.

- It is convenient to work in the Cartan-Weyl basis

$$H = 2iT^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad E_+ = iT^1 + T^2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}, \quad E_- = iT^1 - T^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}.$$

The matrices  $E_{\pm}$  are called the raising and lowering operators.

- The commutation relations are

$$[H, E_{\pm}] = \pm 2E_{\pm}, \quad [E_+, E_-] = H$$

which imply that

$$\text{ad}_H(E_{\pm}) = \pm 2E_{\pm}, \quad \text{ad}_H(H) = 0$$

Therefore, the generators  $\{H, E_{\pm}\}$  are the eigenvectors of  $\text{ad}_H : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ . The eigenvalues  $\{0, \pm 2\}$  are known as the roots of  $\mathfrak{su}(2)$ .

- Now consider a finite-dimensional representation  $R$  with representation space  $V$  and suppose that  $R(H)$  is diagonalizable, with

$$R(H)v_{\lambda} = \lambda v_{\lambda}$$

This will always be the case in quantum mechanics, where  $R(H)$  is Hermitian. The eigenvalues  $v_{\lambda}$  are the weights of the representation  $R$ , and they are raised and lowered by 2 by  $E_{\pm}$ .

- There exists a highest weight  $\Lambda$  with

$$R(H)v_{\Lambda} = \Lambda v_{\Lambda}, \quad R(E_+)v_{\Lambda} = 0$$

If the representation is irreducible, then  $v_\Lambda$  must be unique, and we must be able to reach all of  $V$  by applying  $E_-$  repeatedly. Therefore the other eigenvectors are

$$v_{\Lambda-2n} = (R(E_-))^n v_n$$

- To see when this chain must terminate, note that

$$R(E_+) v_{\Lambda-2n} = R(E_+) R(E_-) v_{\Lambda-2n+2} = (R(E_-) R(E_+) + (\Lambda - 2n + 2)) v_{\Lambda-2n+2}$$

Therefore we have

$$R(E_+) v_{\Lambda-2n} = r_n v_{\Lambda-2n+2}, \quad r_n = r_{n-1} + \Lambda - 2n + 2, \quad r_0 = 0$$

which, by induction, gives the solution

$$r_n = (\Lambda + 1 - n)n$$

Now, let  $\Lambda - 2n$  be the lowest weight, so  $R(E_-) v_{\Lambda-2N} = 0$ . Then we must have  $r_{N+1} = 0$ , which implies  $\Lambda = N$ .

- We have thus shown that finite dimensional irreps  $R_\Lambda$  of  $\mathfrak{su}(2)$  are labeled by their highest weight  $\Lambda \in \mathbb{Z}$ , with weights  $S_\Lambda = \{-\Lambda, -\Lambda + 2, \dots, \Lambda - 2, \Lambda\}$  and  $\dim R_\Lambda = \Lambda + 1$ .

- Decomplexifying back down to  $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{R}$ ,  $R_0$  is the trivial representation,  $R_1$  is the fundamental representation, and  $R_2$  is the adjoint representation.

- We can also decomplexify to  $\mathfrak{sl}(2)_\mathbb{R}$ . This is easier, as  $H, E_+$ , and  $E_-$  are all traceless and real and hence already form a basis for  $\mathfrak{sl}(2)_\mathbb{R}$ .

We now relate our results to the familiar theory of angular momentum in quantum mechanics.

- To establish notation, in quantum mechanics we have

$$J^2 |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle, \quad J_3 |jm\rangle = m |jm\rangle, \quad J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_3^2 + \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+).$$

Then  $J_3 = R(H)/2$ , since its eigenvalues are half-integer rather than integer, and  $J_\pm = R(E_\pm)$ . The spin value  $j$  is  $\Lambda/2$ . We call  $J^2$  a 'quadratic Casimir'. It is not part of the Lie algebra, but useful for classifying the irreps.

- Our irreps  $R_\Lambda(X)$  exponentiate to representations of  $SU(2)$  by

$$D_\Lambda(A) = \exp R_\Lambda(X), \quad A = \exp X$$

All of the irreps give representations of  $SU(2)$ , which in turn yield irreps of  $SO(3)$  if  $D_\Lambda(I) = D_\Lambda(-I)$ . Now note that  $-I = \exp(i\pi H)$  and

$$D_\Lambda(-I) = \exp(i\pi R_\Lambda(H))$$

Plugging in the eigenvalues of  $R_\Lambda(H)$ , the right-hand side is  $I$  for  $\Lambda \in 2\mathbb{Z}$  and  $-I$  otherwise. Then the former give representations of  $SO(3)$ , and the latter yield projective representations.

Note. The Casimir operator is not an element of the Lie algebra. Formally, define the universal enveloping algebra (UEA) of a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  to be the algebra generated by elements of  $\mathfrak{g}$  subject to the relation  $T^a T^b - T^b T^a = f_c^{ab} T^c$ .

Casimir operators are elements of the UEA which commute with all other elements. Representations may be extended from  $\mathfrak{g}$  to the UEA, and by Schur's lemma, Casimir operators are represented in irreps by multiples of the identity. The quadratic Casimir is only one of many examples, and we use it to index irreps.

New representations can be built from our irreps.

- Given a representation  $R$  of a real Lie algebra  $\mathfrak{g}$ , the conjugate representation  $\bar{X}$  satisfies

$$\bar{R}(X) = R(X)^*$$

In this case, there is only one irrep for each dimension, so each irrep is its own conjugate.

- The contragradient representation, or dual representation  $R^*$  is

$$R^*(X) = -R(X)^T$$

This is simply the infinitesimal version of  $D^*(g) = D(g^{-1})^T$  for Lie groups.

- The direct sum of two Lie algebra representations  $R_1$  and  $R_2$  is defined as

$$(R_1 \oplus R_2)(X) = R_1(X) \oplus R_2(X)$$

and their tensor product is defined as

$$(R_1 \otimes R_2)(X) = R_1(X) \otimes I_2 + I_1 \otimes R_2(X)$$

The latter is simply the infinitesimal version of the definition for Lie groups, because taking the logarithm of a product yields a sum. That is,

$$\exp(tX_1) \otimes \exp(tX_2) = (1 + tX_1) \otimes (1 + tX_2) + O(t^2) = 1 + t(X_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes X_2) + O(t^2)$$

For example, when we consider two particles with spin, the Hilbert space is the tensor product space, but the angular momentum observable is  $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$  (with implicit identities), not  $\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2$ .

- It can be shown that the tensor product of finite-dimensional irreps of a simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is always fully reducible. As an example, we explicitly decompose  $R_\Lambda \otimes R_{\Lambda'}$ . It is useful to again work in the Cartan-Weyl basis, where, for example,

$$(R_\Lambda \otimes R_{\Lambda'})(H) = R_\Lambda(H) \otimes I_2 + I_1 \otimes R_{\Lambda'}(H)$$

Then we know the weight set is

$$S_{\Lambda, \Lambda'} = \{\lambda + \lambda' | \lambda \in S_\Lambda, \lambda' \in S_{\Lambda'}\}$$

from which we conclude

$$R_\Lambda \otimes R_{\Lambda'} = R_{\Lambda+\Lambda'} \oplus R_{\Lambda+\Lambda'-2} \oplus \cdots \oplus R_{|\Lambda-\Lambda'|}$$

- Note that the Cartan-Weyl basis is not unique; as we've seen, it corresponds to picking out  $J_z$ , and we can just as well pick  $J_x$ . But the decomposition of a representation into irreps is unique; changing the basis just changes the preferred basis within each irrep.

## 8.1.2 4.2 The Heisenberg Algebra

As a second example, we consider the infinite-dimensional algebra of creation and annihilation operators for a bosonic field.

- The Lagrangian density is

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$$

and the equal-time canonical commutators are



$$[\phi(\mathbf{x}), \dot{\phi}(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

• For simplicity, suppose the fields live on the unit circle. Then the modes are the Fourier components,

$$\phi(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} a_n e^{2\pi i n x}$$

and applying the equal-time commutators gives

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n,-m}$$

This is known as the Heisenberg algebra. It splits into three subalgebras:  $a_0$ , the creation operators  $\{a_n, n \geq 1\}$ , and the annihilation operators  $\{a_n, n \leq -1\}$  where  $a_n^\dagger = a_{-n}$ .

• It is convenient to rescale the operators as

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} a_{-n}$$

Then for every  $n > 0$ , the operators  $b_n$  and  $b_n^\dagger$  form a copy of the algebra of creation and annihilation operators for a single harmonic oscillator. Using this observation, we can construct the Fock space starting from a vacuum, assumed to be unique.

This example has a number of common features with the previous example.

• In both cases, we construct a maximal set of commuting operators,  $\{H\}$  and  $\{a_0\}$ , called the Cartan subalgebra. This is an analogue of a complete set of commuting operators in quantum mechanics, but we do not allow operators that are not in the algebra, such as  $L^2$  or  $a_n^\dagger a_n$ .

• The rest of the algebra splits into two subalgebras, consisting of raising and lowering operators, which are related by conjugation. They are also called creation and annihilation operators, or step operators.

• The representations can be understood by starting from a 'highest weight' or 'vacuum' vector, which is annihilated by the annihilation operators, and applying creation operators. Acting with these operators modify the quantum numbers of the state, i.e. the eigenvalues of the operators in the Cartan subalgebra, also called the weights.

• The dimension of the Cartan subalgebra is called the rank of the Lie algebra; it is the number of quantum numbers we have to work with. So far we have only seen rank one, but in the next section we consider an example with rank two.

### 8.1.3 4.3 Representations of $SO(3)$

Now we explore some of the representations of  $SO(3)$ , with some results generalizing to  $SO(n)$ .

• The group  $SO(n)$  has the vector representation  $V^i \rightarrow R^{ij} V^j$ . Tensors transform in tensor powers of the vector representation, and we may break them into irreps.

• Note that antisymmetric rank 2 tensors transform to antisymmetric tensors. The same goes for symmetric tensors, so the rank 2 tensor representation decomposes as  $3 + 3 = 3 + 6$ . However, the trace is also invariant under rotations (using  $R^T = R^{-1}$ ), so we have the further decomposition  $6 = 5 + 1$ , where the 5 contains symmetric traceless tensors.

• This decomposition can be expressed in index notation. For the rank 2 tensor  $T^{ij}$ , we have

$$A^{ij} = T^{ij} - T^{ji}, \quad S^{ij} = T^{ij} + T^{ji}, \quad \tilde{S}^{ij} = S^{ij} - \delta^{ij} S^{kk}/N.$$

Then the  $A^{ij}$  are the antisymmetric representation, in the sense that the vector space spanned by the  $A^{ij}$  (for all 9 values of  $(i, j)$ ) is the antisymmetric irrep.

- The exact same reasoning holds for the rank 2 tensor in  $SO(n)$ .
- The fact that the elements of  $SO(n)$  are rotations means that  $\delta$  is an 'invariant symbol', i.e.

$$\delta^{ij} R^{ik} R^{jl} = \delta^{kl}$$

Similarly, we generally have

$$\epsilon^{ij\dots n} R^{ip} R^{jq} \dots R^{ns} = \epsilon^{pq\dots s} \det R$$

so that  $\epsilon$  is an invariant symbol. We call these objects symbols instead of tensors because they are defined by their components.

- In general, contracting tensors with invariant symbols yields other tensors. For example, the 'dual tensor' of  $A^{ij}$  is  $B^k = \epsilon^{ijk} A^{ij}$ . It is a vector, since

$$B^k \rightarrow \epsilon^{ijk} R^{ip} R^{jq} A^{pq} = \epsilon^{ijk'} R^{ip} R^{jq} R^{k'r} A^{pq} = \epsilon^{pqr} R^{kr} A^{pq} = R^{kr} B^r.$$

Moreover, contraction with invariant tensors projects representations to subrepresentations. For example, for  $T^{ij}$ , contraction with  $\delta^{ij}$  gives the 1 and contraction with  $\epsilon^{ijk}$  gives the 3. Also note that contraction with  $\epsilon$  always removes symmetric parts.

- Contraction with  $\epsilon$  yields strong constraints on the irreps of  $SO(3)$  that appear in the tensor product representations, because we can always trade two antisymmetric indices for a single index. We claim the only new irrep for rank  $n$  is the traceless totally symmetric rank  $n$  tensor.

We have already shown this for  $n \leq 2$ . Now consider  $T^{ijk}$ . It splits into the representations  $T^{[ij]k}$  and  $T^{\{ij\}k}$ , and the former is just the rank 2 antisymmetric tensor. Now note that

$$3T^{\{ij\}k} = (T^{\{ij\}k} + T^{\{jk\}i} + T^{\{ki\}j}) + (T^{\{ij\}k} - T^{\{jk\}i}) + (T^{\{ij\}k} - T^{\{ki\}j})$$

where the first term is totally symmetric, and the other terms are antisymmetric in  $ki$  and  $kj$  respectively. Thus the only new representation is totally symmetric. Finally, given a totally symmetric tensor  $S^{ijk}$  we can always remove all of its traces,

$$\tilde{S}^{ijk} = S^{ijk} - \frac{1}{N+2} (\delta^{ij} S^{hkh} + \delta^{ik} S^{hhj} + \delta^{jk} S^{hhi})$$

leaving only the new irrep, as claimed. A similar proof holds for general  $n$ .

- We now count the dimension of these representations. A totally symmetric rank  $n$  tensor has

$$\binom{n+2}{2}$$

degrees of freedom. By symmetry, there is only one independent trace to remove, which is a totally symmetric rank  $n-2$  tensor, so the dimension is

$$\binom{n+2}{2} - \binom{n}{2} = 2n+1$$

These are, in fact, all of the irreps of  $SO(3)$ .

- A similar argument holds for  $SO(2)$ . In this case, the dimensions are all  $(n+1) - (n-1) = 2$ . This is not in contradiction with the fact that the irreps of  $U(1) \cong SO(2)$  are all one-dimensional, because we are considering real representations.

• For  $SO(4)$ , contraction with  $\epsilon$  does not decrease the rank, while for  $SO(5)$  and higher contraction increases the rank. Hence the tricks above fail, and the irreps can have a more complex symmetry structure. They can be enumerated using Young tableaux, as we'll see below.

We now make some extra remarks.

• Consider the representation of totally antisymmetric rank  $n$  tensors of  $SO(2n)$ . This representation is mapped to itself by duality; hence it breaks into two irreps, containing 'self-dual' and 'anti self-dual' tensors.

• Consider an irrep of a group  $G$ . If we restrict to a subgroup  $H \subset G$ , then the irrep will generally not be an irrep in  $H$ . For example, the vector representation of  $O(4)$  splits into  $4 = 3 + 1$  when restricting to  $SO(3)$ , corresponding to the splitting of space and time. The antisymmetric rank 2 tensor splits into  $6 = 3 + 3$ , corresponding to the splitting of  $F^{\mu\nu}$  into  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ . The symmetric rank 2 tensor splits into  $9 = 5 + 3 + 1$ .

• The adjoint representation of a Lie group  $G$  has representation space  $\mathfrak{g}$ , where  $g \in G$  acts by conjugation. For  $SO(n)$ , the adjoint representation is simply the antisymmetric tensor representation, as

$$A^{ij} \rightarrow R^{ip} R^{jq} A^{pq} = (RAR^{-1})^{ij}.$$

For  $SO(3)$  only, the adjoint representation coincides with the vector representation. That is, angular momentum (as a physical quantity) is a vector only in three dimensions.

• Since we are working with  $SO(n)$  rather than  $O(n)$ , we have neglected the difference between vectors and axial vectors, and so on. Since the metric is Euclidean, we haven't bother with raising or lowering indices.

Example. Decomposing  $P^{ijk} = S^{ij}T^k$  where  $S$  is symmetric and traceless, in  $SO(3)$ . First, construct the symmetric tensor

$$U^{ijk} = S^{ij}T^k + S^{jk}T^i + S^{ki}T^j$$

This is a totally symmetric rank 3 tensor, so it decomposes into a traceless part and a trace; the trace yields the vector representation. The other degrees of freedom are in the antisymmetric part

$$V^{i\ell} = S^{ij}T^k \epsilon^{j k \ell}$$

The tensor  $V$  is neither symmetric nor antisymmetric, but it is traceless. Then it decomposes into a symmetric traceless and antisymmetric part; the latter is just the vector we have already found. Hence we have shown  $5 \times 3 = 7 + 5 + 3$ .

More generally, suppose we multiply two symmetric traceless tensors, with  $j$  and  $j'$  indices. Then we can construct a symmetric traceless tensor with  $j + j'$  indices, as shown above. The remainder of the degrees of freedom are given by contracting with  $\epsilon^{ijk}$ , which leaves  $j + j' - 1$  indices. We can then take out the symmetric traceless part again and repeat the procedure, so

$$j \times j' = (j + j') + (j + j' - 1) + \dots + |j - j'|.$$

This is simply the usual Clebsch-Gordan decomposition. Note that we have switched notation so that  $j$  is really an irrep of dimension  $2j + 1$ . However, we'll usually stick to the convention where the name indicates the dimension.

## 8.1.4 4.4 Representations of $SU(3)$

Next, we extend our tensor methods to  $SU(3)$ . We warm up with  $SU(2)$ .

- The fundamental representation transforms as

$$\psi^i \rightarrow \psi'^i = U^{ij} \psi^j$$

By analogy with our earlier work, we consider tensors  $\varphi^{i_1 \dots i_n}$ .

- For example, the totally symmetric tensor  $\varphi^{ijk}$  of  $SU(3)$  has 10 degrees of freedom (corresponding to the baryon decuplet). At this point one might take out the trace, but the trace does not transform correctly,

$$\delta^{ij} \varphi^{ijk} \rightarrow (\delta^{ij} U^{if} U^{jg}) U^{kh} \varphi^{fgh}$$

The quantity in parentheses is  $U^T U$ , which was the identity for  $SO(n)$ , but nothing here; we need an extra complex conjugation.

- To address this, we introduce the conjugate/antifundamental representation  $\psi_i = \psi^{i*}$ . Introducing upper and lower indices, we have

$$\psi^i \rightarrow U_j^i \psi^j, \quad \psi_i \rightarrow \psi_j (U^\dagger)^j_i$$

We are allowed to contract upper and lower indices together; for instance,  $\psi^i \psi_i$  is a scalar.

- Formally, for  $SO(n)$ , the fundamental representation tensored with itself contains the trivial representation, but in  $SU(n)$ , we must tensor the fundamental and antifundamental representation. Physically, a color singlet meson is made of a quark and an antiquark.

- We can think of a conjugate representation as living in the dual space of the original representation; our transformation rule for  $\psi_i$  is simply the transformation rule for a bra.

- As a result, we can consider tensors with arbitrary mixed rank  $(r, s)$ . When both  $r$  and  $s$  are nonzero, we can subtract out traces with  $\delta$ . Finally, since the elements of  $SU(n)$  have determinant one,

$$\epsilon_{i_1 \dots i_N} U_1^{i_1} \dots U_N^{i_N} = \epsilon^{i_1 \dots i_N} U_{i_1}^1 \dots U_{i_N}^N = 1$$

yielding two more invariant symbols, which allow raising and lowering of indices.

- As an example, the totally symmetric tensor  $\varphi^{ijk}$  considered earlier is irreducible. However, a tensor  $T_k^{ij}$  breaks into four irreps. As usual, the symmetric and antisymmetric parts  $S_k^{ij}$  and  $A_k^{ij}$  (in the upper two indices) form subrepresentations. However, both of these have traces, which form copies of the fundamental representation. The dimensions are

$$N^3 = \left( \frac{1}{2} N^2 (N+1) - N \right) + \left( \frac{1}{2} N^2 (N-1) - N \right) + N + N$$

The naming conventions are somewhat more complex. We will usually stick with naming by dimension, adding a star for representations with mostly lower indices.

- When we work with the Lie algebra, we will have several types of indices. The generators are named  $T^a$ , where  $a$  has  $\dim G$  possible values. If we work in an irrep of dimension  $d$ , then each of the generators is a  $d \times d$  matrix, so we let  $p$  and  $q$  index over the irrep, e.g.

$$\delta \varphi^p = i \theta^a (T^a)^p_q \varphi^q$$

The  $\varphi^p$  can also be written as traceless tensors with definite symmetry properties, as we did above; in that case the indices on the ranges  $i$  and  $j$  range from 1 to  $N$ . Note that there is no meaning to the upstairs or downstairs placement of the other types of indices.

- The adjoint representation turns out to be the antisymmetric  $(1, 1)$  tensor representation  $\varphi_j^i$ , which indeed has dimension  $N^2 - 1$ .

Example. All irreps of  $SU(2)$ . We can use  $\epsilon^{ij}$  to raise any downstairs indices, so all the irreps have solely upstairs indices. Furthermore, the irreps must be totally symmetric, because

any antisymmetric part can be projected out by contraction with  $\epsilon_{ij}$ , reducing it to a lower rank tensor. Hence the irreps are totally symmetric tensors with  $n$  upper indices, which have dimension  $n + 1$ .

We can go further and use this to find the representation matrices  $D^s(R)$ . The fundamental representation is a two-element spinor, which is multiplied by  $D^{1/2}$ . Higher irreps are symmetrized tensor powers of that spinor, and a rank  $n$  tensor transforms with a factor of  $D^{1/2}$  on each index. Hence it is not surprising that the  $d$ -functions  $d^j(\beta)_{mm'}$  are polynomials in  $\cos(\beta/2)$  and  $\sin(\beta/2)$ .

Note that the antifundamental representation does not appear here; it is similar to the fundamental representation, which turns out to be pseudoreal. Explicitly, we have

$$\sigma_2 \sigma_a^* \sigma_2 = -\sigma_a$$

so the change of basis matrix is  $\sigma_2$  itself. Since  $\sigma_2$  is antisymmetric, the representation is pseudoreal.

Note. Consider a tensor product  $j \otimes j'$ . The resulting  $j + j'$  irrep is symmetric, because its highest  $J_z$  state is symmetric and symmetry is preserved by lowering. Then the  $j + j' - 1$  irrep is antisymmetric, since its highest  $J_z$  is determined by orthogonality. This pattern continues, with symmetry alternating between irreps.

Note. Naively, one might say that  $U(N) = SU(N) \times U(1)$ . However, this is incorrect because in general,  $N$  elements of the form  $e^{i\theta}I$  are in  $SU(N)$ . The actual relationship is

$$U(N) = (SU(N)/\mathbb{Z}_N) \times U(1)$$

When one says the Standard Model gauge group is  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , one is really talking about the Lie algebra; there are several possibilities for the Lie group and the correct one is unknown.

Next, we turn to the representations of  $SU(3)$ .

- In this case, we have the invariant symbols  $\epsilon^{ijk}$  and  $\epsilon_{ijk}$ , and the fundamental and antifundamental representations are not equivalent.

- We claim that all irreps are traceless  $(m, n)$  tensors that are totally symmetric in both the upper and lower indices. The claim is obvious for rank  $r = m + n = 1$ . For  $r = 2$ , the antisymmetric tensors  $\varphi^{ij}$  and  $\varphi_{ij}$  are equivalent to vectors, so they give nothing new, and we may subtract out the trace of  $\varphi_j^i$ .

- For the case  $r = 3$ , consider the tensor  $\varphi^{ijk}$ . The antisymmetric part  $\varphi^{[ij]k}$  can be reduced to rank  $r = 2$ . The symmetric part  $\varphi^{(ij)k}$  can be split into a totally symmetric part and antisymmetric tensors in  $ki$  and  $kj$ , as shown for  $SO(3)$ , so the new irrep is totally symmetric.

- Now consider the  $(m, n)$  irrep. Without accounting for the traceless condition, the dimension is

$$\binom{n+2}{2} \binom{m+2}{2}$$

The trace of a totally symmetric  $(m, n)$  tensor is a totally symmetric  $(m-1, n-1)$  tensor, so

$$\binom{n+2}{2} \binom{m+2}{2} - \binom{n+1}{2} \binom{m+1}{2} = \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2).$$

- A few of the low-dimensional irreps are

$$(1, 0) = 3, \quad (0, 1) = 3^*, \quad (1, 1) = 8, \quad (2, 0) = 6, \quad (3, 0) = 10, \quad (2, 1) = 15, \quad (2, 2) = 27$$

Many of these numbers play a role in the Eightfold Way.

Next, we derive some multiplication rules for irreps of  $SU(3)$ .

- Note that  $(1, 0) \times (0, 1)$  is a general  $(1, 1)$  tensor. Subtracting its trace gives

$$(1, 0) \times (0, 1) = (1, 1) + (0, 0), \quad 3 \times 3^* = 8 + 1$$

- Next,  $(1, 0) \times (1, 0)$  is a general  $(2, 0)$  tensor, so

$$(1, 0) \times (1, 0) = (2, 0) + (0, 1), \quad 3 \times 3 = 6 + 3^*$$

where the two terms on the right are simply the symmetric and antisymmetric parts.

- Next, consider  $(1, 0) \times (2, 0)$ , i.e. the tensor  $\psi^i \varphi^{jk}$ . Consider the antisymmetric and symmetric parts in  $ij$ . The antisymmetric part gives a  $(1, 1)$  tensor which is automatically traceless. The symmetric part is symmetric in all three indices, so

$$(1, 0) \times (2, 0) = (3, 0) + (1, 1), \quad 3 \times 6 = 10 + 8$$

Therefore  $3 \times 3 \times 3 = 10 + 8 + 8 + 1$ , which we will see applied in the Eightfold Way.

- Finally, consider  $(1, 1) \times (1, 1)$ . The tensor  $\psi_j^i \chi_\ell^k$  has two distinct traces,

$$\psi_j^i \chi_\ell^j, \quad \psi_j^i \chi_i^k$$

These yield two copies of  $(1, 1)$  plus a copy of  $(0, 0)$ , since their traces are equal. Now consider the traceless part  $T_{j\ell}^{ik}$ . It can be shown that  $T_{j\ell}^{[ik]}$  is automatically symmetric in  $j$  and  $\ell$ , providing a  $(0, 3)$ . Similarly antisymmetrizing  $j\ell$  gives a  $(3, 0)$  and the symmetric remainder is  $(2, 2)$ , for

$$(1, 1) \times (1, 1) = (2, 2) + (3, 0) + (0, 3) + (1, 1) + (1, 1) + (0, 0)$$

This computation contains all the ideas necessary for the general case.

Example. Consider the three-dimensional harmonic oscillator. Such a system has an  $SU(3)$  symmetry; the generators take the form

$$Q_\alpha = a_k^\dagger [T_\alpha]_{k\ell} a_\ell, \quad T_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2}$$

The creation operators transform in the fundamental representation while the lowering operators transform in the antifundamental. Note that the  $SU(2)$  rotational symmetry is a subset; it is generated by

$$L_3 = 2Q_2, \quad L_1 = 2Q_7, \quad L_2 = -2Q_5$$

The  $SU(3)$  symmetry explains additional degeneracy that the  $SU(2)$  symmetry does not. For example, all six  $n = 2$  states are degenerate, even though they split up as  $5 + 1$  under  $SU(2)$ .

Example. Consider two three-dimensional harmonic oscillators. If they are uncoupled, we have an  $SU(3) \times SU(3)$  symmetry. Now let

$$H^{\text{int}} = \lambda a_k^\dagger b_k^\dagger a_\ell b_\ell$$

This interaction is designed so it commutes with

$$Q_\alpha = a_k^\dagger [T_\alpha]_{k\ell} a_\ell - b_k^\dagger [T_\alpha^*]_{k\ell} b_\ell$$

so an  $SU(3)$  symmetry remains. Here, the  $a^\dagger$ 's transform in the  $3$  and the  $b^\dagger$ 's transform in the  $\bar{3}$ . Then we have  $[Q_\alpha, a_\ell b_\ell] = 0$  because removing a red quark and red antiquark conserves

color. The Hamiltonian commutes with the number operators, so the energy eigenstates have definite number. In particular, the highest weight state of an  $(n, m)$  irrep is

$$\left(a_1^\dagger\right)^n \left(b_3^\dagger\right)^m \left(\mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{b}^\dagger\right)^k |0\rangle$$

for any  $k$ , and lowering generates degenerate states.

### 8.1.5 4.5 The Symplectic Groups

The symplectic groups are the least familiar of the matrix Lie groups.

- The real symplectic group  $Sp(2n, \mathbb{R})$  contains real  $2n \times 2n$  matrices which satisfy

$$R^T J R = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

That is, they are matrices that preserve the quadratic form  $J$ , like how the elements of  $O(p, q)$  preserve  $\text{diag}(I_p, -I_q)$ .

- To count parameters, note that the left-hand side is automatically antisymmetric, so the number of constraints is  $(2n)(2n - 1)/2$ . Then

$$\dim Sp(2n, \mathbb{R}) = 4n^2 - n(2n - 1) = n(2n + 1)$$

- Directly from the definition, we see  $\det R = \pm 1$ . However, it turns out that we automatically have  $\det R = 1$ . For example, for  $n = 1$ , the symplectic condition is simply  $\det R = 1$ , so  $Sp(2, \mathbb{R}) \cong SL(2, \mathbb{R})$ .

- The symplectic groups appear in Hamiltonian mechanics. Combining the canonical positions and momenta into a single vector  $Z$ , Hamilton's equations are

$$\frac{dZ_a}{dt} = J_{ab} \frac{\partial H}{\partial Z_b}$$

and the form of the equations are preserved under any symplectic transformation  $Z \rightarrow RZ$ .

- Similarly, one may define the complex symplectic groups  $Sp(2n, \mathbb{C})$ , where the definition still contains a transpose rather than a conjugate transpose,  $R^T U R = U$ .

- Finally, we define the compact symplectic group

$$USp(2n) = Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$$

This group is sometimes also called  $Sp(2n)$  or  $Sp(n)$ . To count parameters, we write  $U = I + iH$  where  $H$  is Hermitian, which gives  $H^T J + JH = 0$ . Then the general form of  $H$  is

$$H = \begin{pmatrix} P & W^* \\ W & -P^T \end{pmatrix}, \quad P^\dagger = P, \quad W^T = W, \quad \dim USp(2n) = n(2n + 1)$$

Note that  $H$  is generally traceless, so  $USp(2n) \subset SU(2n)$ . In particular,  $USp(2) \cong SU(2)$ .

- The compact symplectic groups will appear in the Cartan classification; they also are involved when writing down Lagrangians for Majorana spinors.

It is also useful to write an explicit basis for the algebra  $\mathfrak{usp}(2n)$ .

- Using tensor product notation, e.g.  $J = I \otimes i\sigma_2$ , we claim that a basis for  $\mathfrak{usp}(2n)$  is given by

$$iA \otimes I, \quad S_1 \otimes \sigma_1, \quad S_2 \otimes \sigma_2, \quad S_3 \otimes \sigma_3$$

where  $A$  is real antisymmetric and the  $S_i$  are real symmetric. This can be seen by directly comparing with our general form above.

- Using this basis, it is easy to check that the algebra closes. For example,

$$[iA \otimes I, S_a \otimes \sigma_a] = i[A, S_a] \otimes \sigma_a = iS'_a \otimes \sigma_a$$

since the commutator of an antisymmetric and symmetric matrix is symmetric. We also have

$$[S_1 \otimes \sigma_1, S'_1 \otimes \sigma_1] = [S_1, S'_1] \otimes I = i(-iA) \otimes I$$

as well as

$$[S_1 \otimes \sigma_1, S_2 \otimes \sigma_2] = iS_1 S_2 \otimes \sigma_3 + iS_2 S_1 \otimes \sigma_3 = iS_3 \otimes \sigma_3$$

Similarly, it is straightforward to check that the symplectic condition  $JHJ = H^T$  is satisfied.

- As an example, note that linear combinations of the generators  $I \otimes iA$  and  $\sigma_3 \otimes S$  yield  $H = \text{diag}(P, -P^T)$  for Hermitian  $p$ . This is the  $U(n)$  subgroup of  $USp(2n)$ .

### 8.1.6 4.6 Projective Representations

We now consider how projective representations arise in quantum mechanics.

- Naively, symmetries in quantum mechanics are represented by unitary operators  $U(T_i)$ . However, since symmetries need only preserve probabilities, the most general possibility allows extra phases. The most general possibility, by Wigner's theorem, is

$$U(T_2)U(T_1)|n\rangle = e^{i\phi_n(T_2, T_1)}U(T_2T_1)|n\rangle$$

where the extra phase  $\phi_n(T_2, T_1)$  is allowed to depend on the state  $|n\rangle$ , and the  $U(T_i)$  may be unitary or antiunitary. From here on we only consider the unitary case.

- Now consider a superposition of two states. Then we have

$$e^{i\phi_{nm}}U(T_2T_1)(|n\rangle + |m\rangle) = e^{i\phi_n}U(T_2T_1)|n\rangle + e^{i\phi_m}U(T_2T_1)|m\rangle$$

where we used linearity. Multiplying by  $U(T_2T_1)^{-1}$ , we conclude  $\phi_{nm} = \phi_n = \phi_m$ . Hence

$$U(T_2)U(T_1) = e^{i\phi(T_2, T_1)}U(T_2T_1)$$

Hence the  $U(T_i)$  form a unitary projective representation.

- If  $\phi_n$  and  $\phi_m$  were not equal, we could not even have a projective representation, which would be an annoying mathematical obstacle. The exception is if the states  $|n\rangle$  and  $|m\rangle$  cannot be superposed. For example, it is believed that it is impossible to superpose boson and fermion states; it is forbidden by a "superselection rule".

• This need not be viewed as a fundamental restriction, because as we will see, a symmetry group can always be formally enlarged to remove superselection rules. For example, in the Galilean group, we find that the projective phases picked up by multiplying boosts and translations is proportional to the mass  $M$ , giving a superselection rule for mass. But if we formally add  $M$  to the Galilean algebra, then there is no problem; all the phases  $\phi_n$  become identically zero. Hence the set of superselection rules is a matter of convention.

- Now we consider projective representations in detail. Associativity requires

$$\phi(T_2, T_1) + \phi(T_3, T_2T_1) = \phi(T_3, T_2) + \phi(T_3T_2, T_1)$$

If the phases have the form

$$\phi(T, \bar{T}) = \alpha(T\bar{T}) - \alpha(T) - \alpha(\bar{T})$$



then these conditions are clearly satisfied; in this case all phases can be removed by taking  $\bar{U}(T) = U(T)e^{i\alpha(T)}$ . We call the set of equivalence classes of  $\phi(T_2, T_1)$  up to such phase definitions two-cocycles.

- Hence we would like to ask when a representation is intrinsically projective, i.e. when it lies in a nontrivial two-cocycle. Obstructions can come either from the Lie algebra itself, or from the global topology of the Lie group.

We now focus on the Lie algebra.

- Redefining  $U(1)$  to be the identity, we must have

$$\phi(T, 1) = \phi(1, \bar{T}) = 0$$

Hence when both  $T$  and  $\bar{T}$  are near the identity,  $\phi(T, \bar{T})$  is small. At lowest order,

$$\phi(T(\theta), T(\bar{\theta})) = f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b + \dots$$

where the  $\theta^a$  parametrize the Lie algebra.

- This leads to the modified commutation relations

$$[t_b, t_c] = if_{bc}^a t_a + iC_{bc}1, \quad C_{bc} = f_{cb} - f_{bc}$$

The extra terms proportional to the identity are called central charges, and are the signature of a projective representation at the level of the Lie algebra.

- The Jacobi identity still holds, and leads to the constraint

$$f_{bc}^a C_{ad} + f_{cd}^a C_{ab} + f_{db}^a C_{ac} = 0$$

This is automatically satisfied if  $C_{ab} = f_{ab}^c \phi_c$  for real constants  $\phi_c$ . If this is true, we may eliminate the central charges by switching to the generators  $\tilde{t}_a = t_a + \phi_a$ .

- It turns out that for finite-dimensional representations, it is always possible to remove the central charges. More generally, Bargmann's theorem states that the central charges can always be eliminated if the Lie algebra cohomology group  $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  is trivial. This group is trivial for all semisimple Lie algebras, which include the Lorentz algebra but not the Galilean algebra. It is also trivial for the Poincare algebra; to show this explicitly we can eliminate the central charges by hand.

- The existence of central charges is tied to the existence of central extensions. A central extension of  $\mathfrak{g}$  is an exact sequence

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

so that  $\mathfrak{a}$  is in the center of  $\mathfrak{e}$ . It is nontrivial if the sequence does not split.

Next, we turn to the topology.

- It can be shown that a representation of  $\mathfrak{g}$  with no central charges must lift to a proper representation of  $G$  if  $G$  is simply connected. More generally, any projective representation of  $G$  corresponds to a proper representation of the universal cover of  $G$ .

- Intuitively, this can be done by simply exponentiating our representation of  $\mathfrak{g}$  naively. We know the phases should work out near the origin, and the exponential map defines a "standard path" from the origin to other points in  $G$ . We can only run into an inconsistency if there are paths that cannot be deformed into each other, which correspond to nontrivial loops. We can get all projective representations by combining a proper representation of  $G$  and a one-dimensional proper representation of  $\pi_1(G)$ , giving the phases for each nontrivial loop.

- Hence, we can always avoid projective representations by passing to a central extension of the algebra, exponentiating, then passing to the universal cover of the group. (This is really the same thing; a universal cover is a central group extension by  $\mathbb{Z}_n$ .) This also removes all

superselection rules. The of symmetry group and superselection rules is really just a matter of convenience, which depends on which superpositions we know how to prepare, and which groups we think are easy to work with.

• Topologically, the Lorentz group is  $\mathbb{R}^3 \times S^3/\mathbb{Z}_2$ , and its universal/double cover is  $SL(2, \mathbb{C}) = \mathbb{R}^3 \times S^3$ . Hence the Lorentz group has projective representations. Since we are working with a double cover, the phases can only be signs,  $U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda})$ . These simply correspond to integer and half-integer spin.

### 8.1.7 присоединенное представление по Кострикину

Определение. Пусть  $\mathfrak{g}$  - алгебра Ли. Каждому элементу алгебры Ли  $X \in \mathfrak{g}$  поставим в соответствие отображение по следующему правилу

$$\mathfrak{g} \ni Y \mapsto \text{ad } X(Y) := [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

Следовательно, определено отображение

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \ni X \mapsto \text{ad } X \in \text{end } \mathfrak{g}$$

Это отображение называется присоединенным представлением алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . — Проверим, что данное отображение действительно является представлением. Из тождеств Якоби следует равенство

$$\text{ad}[X, Y](Z) = \text{ad } X(\text{ad } Y(Z)) - \text{ad } Y(\text{ad } X(Z))$$

Это означает, что

$$\text{ad}[X, Y] = \text{ad } X(\text{ad } Y) - \text{ad } Y(\text{ad } X)$$

и отображение  $X \mapsto \text{ad } X$  - действительно представление. Если в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  выбран некоторый базис  $e_A, A = 1, \dots, N$ , то каждое отображение  $\text{ad } X$  будет задаваться некоторой  $N \times N$  матрицей. С другой стороны, тождества Якоби можно переписать в виде равенства

$$\text{ad } X([Y, Z]) = [\text{ad } X(Y), Z] + [Y, \text{ad } X(Z)]$$

Это означает, что присоединенное представление алгебры Ли является дифференцированием в  $\mathfrak{g}$ . Таким образом, множество элементов присоединенного представления образует некоторую подалгебру в алгебре всех дифференцирований  $\mathfrak{g}_A$ . Определение. Множество элементов присоединенного представления

$$\mathfrak{g}_{\text{ad}} := \{\text{ad } X, \quad X \in \mathfrak{g}\}$$

называется присоединенной алгеброй Ли. Отображение

$$\psi : \mathfrak{g} \ni X \mapsto \text{ad } X \in \mathfrak{g}_{\text{ad}}$$

представляет собой гомоморфизм алгебр Ли. Ядро этого гомоморфизма является центром алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ .

Если  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  - произвольный автоморфизм алгебры Ли, то справедлива следующая цепочка равенств:

$$\text{ad } \varphi(X)(Y) = [\varphi(X), Y] = \varphi[X, \varphi^{-1}(Y)] = \varphi(\text{ad } X(\varphi^{-1}(Y)))$$

Это означает, что

$$\text{ad } \varphi(X) = \varphi \text{ad } X \varphi^{-1}$$

как и положено присоединенному представлению. Если у алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  нулевой центр (т.е. единственный элемент, коммутирующий со всеми элементами алгебры - это нуль), то гомоморфизм (8.90) инъективен, и присоединенное представление является точным представлением алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в  $\text{end } \mathfrak{g}$ .

## 8.2 More Representations by Zhou

### 8.2.1 7.1 Group Theory Constants

In this section, we'll develop powerful calculation tools for representations. First we'll consider the "group theory constants" that often appear in computations. We refer to abstract generators as  $T^a$  and generators in a specific representation  $R$  as  $t_R^a$  with the  $R$  subscript suppressed.

- We assume we are working with a simple compact Lie group  $G$ , so that  $\mathfrak{g}$  is of compact type. We can thus choose a basis  $T^a$  where the Killing form is  $\kappa_{ij} = -\delta_{ij}$ .
- Given this basis, we automatically have

$$\text{tr } t^a t^b = T(R) \delta^{ab}, \quad T(R) > 0$$

for any representation  $R$ . To see this, define  $M^{ab} = \text{tr } t^a t^b$ . Then

$$[t_{\text{Ad}}^a, M]^{bc} = \text{tr} \left( (t_{\text{Ad}}^a)^{bd} t^d t^c - t^b t^d (t_{\text{Ad}}^a)^{dc} \right) = \text{tr} (f^{abd} t^d t^c - f^{adc} t^b t^d).$$

Using the definition of the structure constants, we have

$$[t_{\text{Ad}}^a, M]^{bc} = \text{tr} ([t^a, t^b] t^c + [t^a, t^c] t^b) = 0$$

which means  $M$  must be proportional to the identity by Schur's lemma, since the adjoint representation is irreducible.

- In physics, we usually pick the normalization,

$$T(\text{fund}) = 1/2$$

matching the existing convention for the spinor representation of  $SU(2)$ ,  $t^a = \sigma^a/2$ . However, in mathematics it is more common to pick  $T(\text{fund}) = 1$ .

- The quadratic Casimir  $T^a T^a$  commutes with everything else, so by Schur's lemma,

$$t^a t^a = C_2(R)$$

in any irrep  $R$ . By contracting indices in the definition of  $T(R)$ ,

$$(\dim R) C_2(R) = (\dim G) T(R)$$

Alternatively, one may also take this equation to be the definition of  $T(R)$ .

- For  $SU(N)$ , in the physicist's normalization, we have

$$C_2(\text{fund}) \equiv C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C_2(\text{adjoint}) \equiv C_A = T(\text{adj}) = N.$$

The latter result can be found by a trick. For the adjoint representation,  $(t^b)_{ac} = i f^{abc}$  and the structure constants are real, giving

$$\text{tr } t^c t^c = - \sum_{ab} f_{abc} f_{bac} = \sum_{ab} |f_{abc}|^2 = \sum_{ab} |t_{ab}^c|^2 = N$$

since  $t^c$  is unitary.

- The Dynkin index obeys the rules

$$T(R) = T(\bar{R}), \quad T(R_1 \oplus R_2) = T(R_1) + T(R_2), \quad T(R_1 \otimes R_2) = d(R_1) T(R_2) + d(R_2) T(R_1)$$

To prove the last identity using matrices, we note that

$$\text{tr } t_R^a = 0$$

for any representation of a semi-simple Lie algebra. This is because every generator can be written in terms of commutators of generators, and commutators have zero trace.

- The anomaly coefficient obeys the rules

$$A(R) = -A(\bar{R}), \quad A(R_1 \oplus R_2) = A(R_1) + A(R_2), \quad A(R_1 \otimes R_2) = A(R_1)d(R_2) + d(R_1)A(R_2)$$

The first implies anomaly coefficients vanish unless the representation is complex.

Now we'll state some general facts about representations without proof.

- First, we summarize Lie algebra dimensions and the dimensions of the fundamental, or minimal representation  $F$ .

| $\mathfrak{g}$     | $\dim \mathfrak{g}$ | $\dim F$ |
|--------------------|---------------------|----------|
| $\mathfrak{su}(N)$ | $N^2 - 1$           | $N$      |
| $\mathfrak{so}(N)$ | $N(N - 1)/2$        | $N$      |
| $\mathfrak{sp}(N)$ | $N(2N + 1)$         | $2N$     |
| $E_6$              | 78                  | 27       |
| $E_7$              | 133                 | 56       |
| $E_8$              | 248                 | 248      |
| $F_4$              | 52                  | 6        |
| $G_2$              | 14                  | 7        |

- For Lie algebra representations, characters are the analogue of the character (trace) for Lie group representations. Specifically, for a representation  $R$  and Cartan subalgebra element  $t$ ,  $\text{ch}(R)(t) = \text{tr}_R(\exp(t))$ . They place similarly powerful constraints on representation theory, via the Weyl character formula.

- A useful special case of the Weyl character formula is the Weyl dimension formula: for a representation  $R$  of  $\mathfrak{g}$  with highest weight  $\Lambda$ ,

$$d(R) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(\Lambda + g, \alpha)}{(g, \alpha)}, \quad g = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$$

where  $\Delta_+$  is the set of positive roots. In fact, one can show that  $g$  is equal to the sum of the fundamental weights, i.e. its Dynkin labels are  $(1, 1, \dots, 1)$ . Explicit special cases of this formula are given here.

- In this notation, the quadratic Casimir is  $C_2(r) = (\Lambda, \Lambda + 2g)$  in the mathematician's normalization; in the physicist's normalization there is a factor of  $1/2$ , as for the Dynkin index.

- The only Lie groups with complex representations are

$$SU(n) \text{ for } n \geq 3, \quad SO(4n + 2) \text{ for } n \geq 2, \quad E_6.$$

where we don't include  $SO(6)$  because  $\mathfrak{so}(6) \cong \mathfrak{su}(4)$ . For the latter two, all anomaly coefficients vanish. Hence anomalies may only come from  $U(1)$  factors and  $SU(n)$  for  $n \geq 3$ .

- One way to see the SM is anomaly free is to note that its matter fields form a representation of  $SO(10)$ , whose representations are all anomaly free. The existence of right-handed neutrinos doesn't matter for this argument, since they don't contribute to any anomalies in the SM.

- Since left-handed and right-handed fermions transform in conjugate representations, a real GUT representation would yield them in pairs. This cannot match experiment because the SM is chiral, unless one chirality is much lighter, which is unnatural. Hence only the gauge groups

$SU(n)$ ,  $SO(4n+2)$ , and  $E_6$  are usable for GUTs. The appearance of  $E_6$  isn't too surprising, because the most common GUT candidates are  $SU(5) = E_4$  and  $SO(10) = E_5$ .

• For the representation  $R$  of  $\mathfrak{su}(n)$  with Dynkin labels  $(a_1, \dots, a_{n-1})$ , the anomaly coefficient is

$$A(R) = d(R) \sum_{i,j,k=0}^{n-1} a_{ijk} (a_i + 1) (a_j + 1) (a_k + 1)$$

where the tensor  $a_{ijk}$  is completely symmetric with

$$a_{ijk} = N_n i(n-2j)(n-k), \quad i \leq j \leq k$$

where  $N_n$  is a conventional normalization factor, which we usually set by  $A(\text{fund}) = 1$ .

• We've encountered Casimir operators above and used them to classify irreps. In fact, in general Casimir operators give a complete classification; any rank  $n$  simple Lie algebra has  $n$  fundamental Casimir invariants. For  $SU(n)$ , their degrees are  $2, 3, \dots, n$ .

• Similarly, one can treat the anomaly coefficient and Dynkin index above as the cubic and quadratic special cases of a higher-order Dynkin index. Higher orders are relevant for anomaly cancellation in higher-dimensional theories.

• Dynkin's theorem for the second highest representation is occasionally useful. We know that the product of irreps with highest weights  $\Lambda$  and  $\Lambda'$  contains an irrep with highest weight  $\Lambda + \Lambda'$ . We may get from  $\Lambda$  to  $\Lambda'$  or vice versa by adding simple roots; suppose  $\Lambda' = \Lambda + \alpha_1 + \dots + \alpha_k$  where the path is chosen so  $k$  is minimal. Then the product contains an irrep with highest weight  $\Lambda + \Lambda' - \alpha_1 - \dots - \alpha_k$ .

Note. A proof of the formula for the Casimir invariant,  $C = \kappa^{ab} T_a T_b = (\kappa^{-1})_{ab} T^a T^b$ . We use the basis consisting of  $E^\alpha$  and  $H^{\alpha(i)}$  for roots  $\alpha$  and simple roots  $\alpha_{(i)}$ . Then

$$C = \sum_{ij} (\kappa^{-1})_{ij} H^{\alpha(i)} H^{\alpha(j)} + \sum_{\alpha} \frac{E^\alpha E^{-\alpha}}{\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha})}$$

Now act with both sides on a vector  $v$  with weight  $\lambda$ . If we restrict the sum in the second term to positive roots, we get anticommutators  $\{E^\alpha, E^{-\alpha}\}$  for positive  $\alpha$ . This is inconvenient, but if we choose  $v$  to have the highest weight  $\Lambda$  the anticommutators may be replaced with commutators. Hence the second term is

$$\sum_{\alpha} \frac{E^\alpha E^{-\alpha}}{\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha})} v = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \frac{[E^\alpha, E^{-\alpha}]}{\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha})} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} H^\alpha v = (2g, \Lambda) v$$

The first term is

$$\sum_{ij} (\kappa^{-1})_{ij} H^{\alpha(i)} H^{\alpha(j)} v = \sum_{ij} (\kappa^{-1})_{ij} (\alpha_{(i)}, \Lambda) (\alpha_{(j)}, \Lambda) v$$

For a general  $v$ , this is quite complicated, but it simplifies if  $v$  has the highest weight  $\Lambda$ . At this point it is convenient to introduce the "inverse Cartan matrix" or "metric"

$$G_{ij} = (A^{-1})_{ij} \frac{(\alpha_{(j)}, \alpha_{(j)})}{2}$$

which confusingly isn't actually the inverse of the Cartan matrix. If we define

$$\tilde{A}_{ij} = (\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)}), \quad D = \text{diag}((\alpha_{(i)}, \alpha_{(i)})/2)$$

then we have the relations

$$A = \tilde{A}D^{-1}, \quad G = D\tilde{A}^{-1}D$$

so we see  $G$  is symmetric. It is convenient because

$$(w_{(i)}, w_{(j)}) = G_{ij}$$

Expanding the highest weight as  $\Lambda = a^i w_{(i)}$  and plugging these results in, the first term becomes

$$\sum_{ij} a^i G_{ij} a^j v = (\Lambda, \Lambda)v$$

where we used  $\kappa_{ij} = \tilde{A}_{ij}$ . Hence we have the desired result.

Example. Calculating the Casimir invariant for  $\mathfrak{su}(3)$ . It is convenient to expand everything in terms of fundamental weights, so the positive roots are

$$\alpha_{(1)} = (2, -1), \quad \alpha_{(2)} = (-1, 2), \quad \beta = \alpha_{(1)} + \alpha_{(2)} = (1, 1), \quad g = (1, 1).$$

This simple result for  $g$  matches the expected general result. The inverse Cartan matrix is

$$G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Therefore, the Casimir invariant is

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 + 2 \\ a^2 + 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} (a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 + 3a_1 + 3a_2)$$

In this normalization the Casimir invariant of the fundamental (10) is  $8/3$ , so we must divide by 2 to get the physical normalization. While we're at it, it's not too much more work to get the Weyl dimension formula,

$$d(a_1 a_2) = (1 + a_1)(1 + a_2) \left( 1 + \frac{a_1 + a_2}{2} \right)$$

## 8.2.2 7.2 The Lorentz and Galilean Groups

Inonu-Wigner contraction can be used to generate new Lie algebras from old, and take physically relevant limits. Our main application of this technique will be the nonrelativistic limit, where it explains some puzzling features of Galilean invariance.

- Consider the rotation algebra  $\mathfrak{so}(3)$  and let  $z = L\zeta$ , so  $\partial_z = L^{-1}\partial_\zeta$ . Then if we take  $L$  to infinity while keeping  $\zeta$  of order one, to lowest order in  $L$  we have

$$J_z = -i(x\partial_y - y\partial_x), \quad J_x = -i(y\partial_z - z\partial_y) \rightarrow i(L\zeta)\partial_y, \quad J_y \rightarrow -i(L\zeta)\partial_x$$

Thus, after some rescaling  $J_x$  and  $J_y$  yield translations  $P_y$  and  $P_x$ , where  $P_i = i\partial_i$ .

- Intuitively, imagine the original vector fields as describing symmetries of the sphere. Then taking  $z$  to be large corresponds to "reverting to the flat Earth", by zooming in on the flat patch near the North pole. The resulting symmetry group is  $ISO(2)$  or  $E(2)$ , containing symmetries of two-dimensional Euclidean space.

- Similar reasoning works for  $\mathfrak{so}(n)$ . Letting a Latin index denote a value from 1 to  $n-1$ , the  $J_{ij}$  are unaffected while  $J_{in}$  contracts to yield  $P_i$ , giving  $E(n-1)$ .

- The same logic applies for the Lorentz algebra  $\mathfrak{so}(3, 1)$ . We start with the generators

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - (\rho \leftrightarrow \sigma))$$

We contract by setting  $x_0 = ct$  with  $c \rightarrow \infty, t = O(1)$ . Then  $J_{ij}$  is unmodified and we have

$$J_{0i} \rightarrow ctP_i$$

By treating  $t$  as a constant, just as we treated  $\zeta$ , the boosts reduce to translations  $P_i$ . We hence recover  $E(3)$ , up to some possible signs which may have to be scaled away.

- Similarly, one can see how the de Sitter symmetry group  $SO(4,1)$  would contract to the Poincare group; the  $SO(3,1)$  subgroup gives the Lorentz group, while the remaining four operators give spacetime translations. Here it is important that we contract away a spatial dimension, since contracting away the temporal dimension would instead yield  $E(4)$ .

Note that we didn't get the full Galilean group above, because we treated  $t$  as a constant. By maintaining time-dependence, we can contract the Poincare group to the full Galilean group.

- We begin with the Poincare commutation relations in the  $3+1$  split. By defining

$$J_{ij} = \epsilon^{ijk} J_k, \quad J_{i0} = K_i$$

the Lorentz algebra is

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k$$

We see that  $\mathbf{J}$  and  $\mathbf{K}$  are both vectors. The minus sign in the last commutation relation indicates the Lorentz group is noncompact. One way to see that  $\mathbf{J}$  must appear there is to note that  $\mathbf{J}$  is a pseudovector and  $\mathbf{K}$  is a vector, so  $\mathbf{J}$  is the only result that obeys parity.

- We split the translations by defining  $H = P_0 = i\partial_0$ , to give

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k, \quad [K_i, P_j] = -iH\delta_{ij}, \quad [J_i, H] = [P_i, H] = 0, \quad [K_i, H] = -iP_i$$

These new results are intuitive: we see that translations are vectors, and the difference between boosting now and later is a translation.

- As before, we define  $x_0 = ct$  and switch variables to  $t$ . To remove factors of  $c$  from the generators, we rescale  $K_i \rightarrow K_i/c$  and  $H \rightarrow cH$ . The commutation relations that change are

$$[K_i, K_j] = -\frac{1}{c} i\epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, P_j] = -i\frac{H}{c^2} \delta_{ij}$$

The first equation indicates that Galilean boosts commute. However, the second is more subtle, because the energy takes the form  $H = Mc^2 + T$ . The huge relativistic contribution to the energy allows the right-hand side to survive, giving

$$[K_i, K_j] = 0, \quad [K_i, P_j] = -iM\delta_{ij}, \quad [K_i, T] = -iP_i$$

All other commutation relations remain the same.

- Thus, if we don't count the  $c$ -number  $M$  as a member of the Galilean algebra, then  $M$  is a central charge, indicating that we must use projective representations of the Galilean group in nonrelativistic quantum mechanics. There is a superselection rule forbidden superposition of states with different masses, though this may be removed by enlarging the Galilean algebra with the generator  $M$ , yielding the Bargmann algebra.

- In terms of differential operators, we could also have computed this explicitly as

$$K_i \rightarrow -it\partial_i - Mx_i$$

which immediately yields  $[K_i, P_j] = -iM\delta_{ij}$ . Another check is that

$$[K_i, P^2/2M] = -\frac{1}{2M} (2iM\delta_{ij}) P_j = -iP_i = [K_i, T]$$

which confirms  $T = P^2/2M$  up to a  $c$ -number.

- Also note that there's a pesky sign here: the physical momentum is  $P^i = -P_i = -i\partial_i$ . The easiest way to see this is in quantum mechanics, where a plane wave  $e^{ipx/\hbar}$  has momentum  $p$ .

These results provide some insight into nonrelativistic classical and quantum mechanics.

- In Lagrangian mechanics, the Galilean algebra can be represented by differential operators on the configuration space. As usual, lifting this action to quantum mechanics produces central extensions because we allow projective representations. The same result occurs if we go to Hamiltonian mechanics: the results are identical but with Poisson brackets instead of commutators.

- Under an active Galilean boost of velocity  $u$ ,

$$p' = p + Mu, \quad E' = E + up + \frac{1}{2}Mu^2$$

On the other hand, the wavenumber and frequency of a plane wave transform as

$$k' = k, \quad \omega' = \omega + uk$$

where the  $uk$  term is from the Doppler shift, assuming the phase is Galilean invariant. Naively, these results are not compatible with the de Broglie relations  $p = \hbar k$  and  $E = \hbar\omega$ .

- The resolution is that Galilean invariance only requires that  $|\psi'(x', t')|^2 = |\psi(x, t)|^2$ , and allows the addition of an arbitrary phase. To find this phase, let the original wavefunction be a plane wave  $\psi(x, t) = e^{i(px - Et)/\hbar}$ . Then the transformed wavefunction must be

$$\psi'(x, t) = e^{i(p'x - E't)/\hbar} = e^{i(Mux - upt - Mu^2t/2)/\hbar} \psi(x, t) = e^{i(Mux - Mu^2t/2)/\hbar} \psi(x - ut, t)$$

For an infinitesimal boost, we neglect the  $u^2$  term and find

$$\psi'(x, t) = (1 - iuK)\psi(x, t), \quad K = -it\partial_x - Mx$$

The first term in  $K$  is the obvious one. Before relativity, the extra  $Mx$  term was mysterious, but in hindsight we understand it as the vestige of the  $E = Mc^2$  rest energy after group contraction.

- We may also see this through the Lagrangian. The standard action

$$S = \int \frac{1}{2}mv^2 dt$$

is not Galilean invariant, but rather changes by a total derivative,

$$L \rightarrow L + \frac{d}{dt} \left( mux + \frac{1}{2}mu^2t \right)$$

This is acceptable classically, because it leaves the equations of motion invariant, but seems a little strange because the same caveat does not apply to the relativistic action. And as we've seen above, it becomes an issue in the quantum theory: phase is Lorentz invariant but not Galilean invariant.

- We can understand the issue by considering the nonrelativistic limit. Relativistically,

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \int \left( -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \right) dt$$



We then drop the first term, corresponding to rest energy, to get to the nonrelativistic Lagrangian. But this term has a nontrivial effect even in the limit  $c \rightarrow \infty$ , because the tininess of the time dilation effect is canceled by the size of the rest energy. Specifically, the change in this term is

$$mc^2(t - t') = mc^2\gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) - mc^2t' = mux' + \frac{1}{2}mu^2t' + \dots$$

which is precisely the extra phase picked up.

- Yet another way to see this is to consider the process by which we move from the Klein-Gordon equation to the Schrodinger equation. In the standard account, we factor out a rapidly oscillating phase  $e^{-imc^2t}$  in the wavefunction. This phase is precisely what is missing.

For completeness, we'll briefly overview the representations of the Lorentz group.

- As expected from Dynkin diagrams, we have two independent copies of  $\mathfrak{su}(2)$  by defining

$$M_i = \frac{J_i + iK_i}{2}, \quad N_i = \frac{J_i - iK_i}{2}$$

The two are swapped by parity. This allows us to easily find the finite-dimensional representations of the Lorentz group from those of  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ , though they won't be unitary.

- Such nonunitary representations are extremely important, since many physical observables transform in them, including positions, momenta, and field values. Nonunitarity is acceptable because these objects do not correspond directly to quantum states. Later, we will show in detail how quantum states in an infinite-dimensional, unitary Poincare irrep correspond to quantum fields in a finite-dimensional, nonunitary Lorentz irrep.

- Restricting to  $SO(3)$ , each Lorentz irrep breaks into  $SO(3)$  irreps attained by adding spins  $u$  and  $v$ . Hence we can parametrize irreps by the minimum/maximum spin

$$j_0 = |u - v|, \quad j_1 = u + v$$

and vectors within them by the usual spin and  $z$ -component,  $j$  and  $m$ .

- There are also infinite-dimensional unitary representations. Acting with the  $J_i$  does not change the value of  $j$ , but acting with the  $K_i$  does. Since the  $K_i$  form a vector, we have a set of irreducible tensor operators  $\{K_-/\sqrt{2}, K_3, -K_+/\sqrt{2}\}$ , so by the Wigner-Eckart theorem

$$\langle j'm' | K_3 | jm \rangle = A_j^{j'} \langle j'm' | 10jm \rangle, \quad \langle j'm' | K_{\pm} | jm \rangle = \mp\sqrt{2}A_j^{j'} \langle j'm' | 1\pm 1jm \rangle.$$

The Clebsch-Gordan coefficient is only nonzero when  $|j' - j| \leq 1$ , so only a few of the  $A_j^{j'}$  coefficients matter. This gives a constraint on the matrix elements of  $K_i$  in any representation.

- One can then show the general solution is parametrized by a complex number  $\nu$ , and imposing unitarity gives two classes of irreps,

$$\text{principal series: } \nu = -iw, j_0 = 0, 1/2, 1, \dots, \quad \text{complementary series: } -1 \leq \nu \leq 1, j_0 = 0$$

where  $w$  is real and  $j_1$  is infinite.

- The finite-dimensional irreps can be labeled by the quantum numbers  $u$  and  $v$ , where the Casimir operators  $M^2$  and  $N^2$  have values  $u(u+1)$  and  $v(v+1)$ . For example, we have

scalar:  $(0, 0)$ , four-vector:  $(1/2, 1/2)$ , Weyl spinors:  $(1/2, 0)$ ,  $(0, 1/2)$ .

- A rank two tensor transforms in  $(1/2, 1/2) \otimes (1/2, 1/2)$  which decomposes as symmetric:  $(1, 1)$ , trace:  $(0, 0)$ , antisymmetric:  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

Note that the antisymmetric electromagnetic field  $F_{\mu\nu}$  decomposes under spatial  $SO(3)$  into two vectors, which can be arbitrary linear combinations of  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ . Under the full Lorentz group, the two irreps must be the self-dual and anti self-dual fields  $\mathbf{E} \pm i\mathbf{B}$  corresponding to

clockwise/counterclockwise circularly polarized waves. In fact, this is precisely the decomposition we applied to  $J_{\mu\nu}$  to get the two  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebras in the first place.

- We can also phrase this by using  $\mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Temporarily switching to mathematics conventions, so that the commutators have no factors of  $i$ , the fundamental representation is

$$d(J_i) = -\frac{i}{2}\sigma_i, \quad d(K_i) = -\frac{1}{2}\sigma_i$$

which corresponds to

$$d(M_i) = -\frac{i}{2}\sigma_i, \quad d(N_i) = 0$$

This is the left-handed Weyl spinor representation  $(1/2, 0)$ .

- Similarly, the conjugate of the fundamental representation has

$$d(M_i) = 0, \quad d(N_i) = -\frac{i}{2}\sigma_i$$

and is the right-handed Weyl spinor.

- Finally, consider the four-vector representation  $(1/2, 1/2)$ . Recalling that  $(1/2, 1/2)$  stands for a tensor product, we have

$$d(M_i) = -\frac{i}{2}\sigma_i \otimes I_2, \quad d(N_i) = I_2 \otimes \left(-\frac{i}{2}\sigma_i\right)$$

This is the correct result, though not in the familiar four-vector basis.

### 8.2.3 7.3 Tensor Methods

We'll now introduce tensor methods for finding finite-dimensional irreps of the classical groups, starting with the simplest example of  $GL(n, \mathbb{C})$ .

- For brevity, let  $g \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$  denote the representation of a group element  $g \in GL(n, \mathbb{C})$  in the fundamental representation. Then there are four closely related irreps of  $GL(n, \mathbb{C})$ ,

$$\{g\}, \quad \{g^*\}, \quad \{g^{-1T}\}, \quad \{g^{-1\dagger}\}$$

These are called the fundamental representations of  $GL(n, \mathbb{C})$ . They are inequivalent, as

$$g^* = SgS^{-1}$$

cannot hold for  $g = \alpha I$  for complex  $\alpha$ , with similar logic for the others.

- For simplicity, we focus on  $\{g\}$  and the dual/contragradient representation  $\{g^{-1T}\}$ , which act on vector spaces  $V$  and  $\tilde{V}$  respectively. Vectors in these spaces transform as

$$x^a \rightarrow x'^a = g_b^a x^b, \quad y_a \rightarrow y'_a = y_b (g^{-1})_a^b$$

Here, the transpose swaps the order of the indices on  $g$  but maintains their vertical positions; we will always denote the fundamental representation with an upper index and the dual representation with a lower index; note that the contraction  $x^a y_a$  is invariant.

- For the other representations, we would need more types of indices to keep our notation explicit. For example, we may use dotted indices,

$$z_{\dot{a}} \rightarrow z'_{\dot{a}} = (g^*)_{\dot{a}}^{\dot{b}} z_{\dot{b}} = z_{\dot{b}} (g^\dagger)^{\dot{b}}_{\dot{a}}, \quad w^{\dot{a}} \rightarrow w'^{\dot{a}} = (g^{-1\dagger})^{\dot{a}}_{\dot{b}} w^{\dot{b}}$$

for  $\{g^*\}$  and  $\{g^{-1\dagger}\}$  respectively. The contraction  $w^{\dot{a}}z_{\dot{a}}$  is invariant. For simplicity, we'll ignore these representations and return to them later.

- We define the tensor product space of tensors of type  $(i, j)$  by

$$T_j^i = V^{\otimes i} \otimes \tilde{V}^{\otimes j}$$

We can define a map  $T_j^i \rightarrow T_{j-1}^{i-1}$  by contracting any pair of upper and lower indices.

• Specializing to  $T_1^1$ , the tensor  $\delta^a_b$  is invariant; its components stay the same under any  $GL(n, \mathbb{C})$  transformation. One can show this the only elementary invariant tensor; all other invariant tensors can be built out of it, e.g. by tensor product.

- Using the invariant tensor  $\delta^a_b$ , we can decompose  $T_1^1$  into irreps as

$$t_b^a = \hat{t}_b^a + \delta_b^a \frac{t_c^c}{n}$$

where  $\hat{t}_b^a$  is the traceless part of  $t_b^a$ . We can think of the second term as the image of  $t_b^a$  under the projection  $\delta^b_a \delta^{a'}_{b'}/n$ .

• Generally, let  $I$  be an arbitrary invariant tensor that is also a projection operator; that is,  $I$  is a tensor of type  $(i, i)$  which acts by contracting half of its indices, and  $I^2 = I$ . Then for any tensor  $t$  we can write

$$t = I(t) + (1 - I)(t)$$

and we claim that if we repeat this process on each term until it terminates, we will have the maximal decomposition, i.e.  $t$  will be decomposed into irreps.

- To see this, let  $P$  be a projection operator onto an irrep, so

$$gPt = Pgt.$$

Since  $t$  is general, this is equivalent to  $P = gPg^{-1}$ , so  $P$  is an invariant tensor. So all projection operators will be accounted for in our decomposition.

• Next, we consider  $T_0^2$ . Neither of the naive candidates  $\delta_a^{a'} \delta_b^{b'}$  and  $\delta_a^{b'} \delta_b^{a'}$  are projection operators. We could find projection operators by brute force, but a better way is to recall that the projection operators in the symmetric group  $S_2$  are the symmetrizer and antisymmetrizer, and  $S_2$  acts on  $T_0^2$ , commuting with the action of  $GL(n, \mathbb{C})$ . Thus these projection operators indeed produce  $GL(n, \mathbb{C})$  irreps, explicitly

$$t^{ab} = t^{(ab)} + t^{[ab]}.$$

This is a full decomposition, as there is no trace to remove.

• Now consider the general case  $T_j^i$ . We take a Young tableau  $\lambda$  from  $S_i$  for the upper indices and a Young tableau  $\sigma$  from  $S_j$  for the lower indices. Performing the resulting projection maps  $t_{\{b\}}^{\{a\}}$  to  $t_{\sigma\{b\}}^{\lambda\{a\}}$ , where we use multi-index notation. Now we haven't taken care of the traces yet, because they deal with contractions between upper and lower indices, while we've only treated these sets separately.

- To remove the traces in practice, we work recursively. For  $T_2^2$ , we may write

$$t_{bd}^{ac} = r_{bd}^{ac} + \delta_b^a (s_1)_d^c + \delta_d^a (s_2)_b^c + \delta_b^c (s_3)_d^a + \delta_d^c (s_4)_b^a + \delta_b^a \delta_d^c u_1 + \delta_d^a \delta_b^c u_2$$

where  $r$ , the  $s_i$ , and the  $u_i$  are all traceless. We determine the  $u_i$  by contracting both sides with two delta functions, giving

$$n(nu_1 + u_2) = t_{ac}^{ac}, \quad n(u_1 + nu_2) = t_{ca}^{ac}$$

Next, we contract both sides of the original equation with one delta function, determining the  $s_i$ . This procedure ensures we don't 'double count' any traces. It works independently of the Young tableaux, which simply set some of the  $s_i$  and  $u_i$  equal to each other.

- There are no more available invariant tensors, so we've arrived at an irrep. One can show that the irrep associated with Young tableaux  $(\lambda, \sigma)$  is equivalent to that of  $(\lambda', \sigma')$  if and only if  $\lambda$  and  $\lambda'$  have the same Young diagram, and  $\sigma$  and  $\sigma'$  have the same Young diagram.

- Finally, restoring the  $\{g^*\}$  and  $\{g^{-1\dagger}\}$  representations, the inequivalent irreps of  $GL(n, \mathbb{C})$  generated by the four fundamental representations are indexed by four Young diagrams; they are fully traceless amongst the dotted indices and amongst the undotted indices.

Note. In physics, every Lie group is regarded as a subgroup of  $GL(n, \mathbb{C})$  for some  $n$ , and we have a fundamental,  $n$ -dimensional representation by taking matrices, called the defining representation. We focus on this representation and its relatives here, and generally there are 4, 2, or 1. They are a subset of the mathematician's fundamental representations. In most but not all cases we'll consider, the "physicist's fundamentals" are sufficient to build all representations.

The analysis for other classical linear groups is similar, but with more invariant tensors.

Example. The unitary group  $U(n)$ . In this case, the four fundamental representations collapse to just two,  $\{g\}$  and  $\{g^*\}$ , which are usually called the fundamental and antifundamental. Another way of seeing this is that we have a new invariant tensor  $\delta_b^a$ , since

$$g^a_b \delta_d^b (g^\dagger)_c^d = \delta_c^a$$

along with  $\delta_b^{\dot{a}}$ . These invariant tensors relate dotted and undotted indices; hence we can remove all dots before performing the usual procedure. In practical terms, this is like how we can raise indices using the metric tensor in relativity, so we call these new invariant tensors metrics. The results for  $GL(n, \mathbb{C})$  go through unchanged, except that we eliminate the dotted indices.

Example. We may also consider indefinite metrics. Suppose that the matrix of  $\delta_b^{\dot{a}}$  has  $n_+$  positive eigenvalues and  $n_-$  negative eigenvalues. Then demanding it is an invariant tensor yields the unitary group  $U(n_+, n_-)$ , and the finite-dimensional irreps are just the same as that of  $U(n_+ + n_-)$ .

However, making the metric indefinite does have important effects. The resulting group is not compact, so there are no finite-dimensional unitary representations. On the other hand, for definite metric, the group is compact, so there are no infinite-dimensional representations.

Example. The special linear group  $SL(n, \mathbb{C})$ . In this case we pick up another invariant tensor, the Levi-Civita tensor. Specifically, we have four Levi-Civitas with  $n$  indices, which are all upper/lower and dotted/undotted. By itself, the Levi-Civita doesn't further decompose the irreps, but it does set irreps equal; for example, the fully antisymmetric  $T_0^n$  irrep is now equivalent to the trivial irrep.

In general we can replace  $m$  antisymmetric upper/lower indices with  $n - m$  antisymmetric lower/upper indices. For a Young diagram  $\lambda$  with column lengths  $m_i$ , define  $\tilde{\lambda}$  to have column lengths  $n - m_i$ . Then  $(\lambda, \mu; \tau, \kappa)$  is equivalent to  $(\lambda', \mu'; \tau', \kappa')$  if the Young diagrams obtained by combining the columns of  $\lambda$  and  $\tilde{\mu}$ , and of  $\tau$  and  $\tilde{\kappa}$ , are the same as their primed counterparts.

Example. In the special case  $SU(m_+, m_-)$ , the same final statement is true, except that we only have undotted indices.

Example. In the more special case  $SL(2, \mathbb{C})$ , the Levi-Civita  $\epsilon^{ab}$  is more useful. Since it relates one upper index to one lower index, the fundamental representations collapse to just two,  $\{g\}$  and  $\{g^*\}$ , and all indices can be taken to be upper indices. Moreover, by the logic above, we can replace any two antisymmetric indices with nothing. Then the irreps are indexed by two integers  $(i, k)$  and consist of tensors with  $i$  symmetric undotted indices and  $k$  symmetric

dotted indices. This is as one would expect, since  $SL(2, \mathbb{C})$  is the double cover of  $SO(3, 1)$ .

Example. Next, we consider some even more special cases.

- In the case  $SU(2)$ , two of the above simplifications combine, and we only have a single type of index. The irreps are indexed by a single integer.

- In the case  $SU(3)$ , we only have undotted indices, and we can replace any two antisymmetric upper/lower indices with a single lower/upper index. The irreps are indexed by two integers  $(i, j)$  and are traceless tensors with  $i$  symmetric upper indices and  $j$  symmetric lower indices.

- In the case  $SU(4)$ , there are three fundamental representations:  $4, \bar{4}$ , and  $6$ . However, the physicists' fundamentals are sufficient because the  $6$  is the antisymmetric part of  $4 \times 4$ . However,  $\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$ , and in that context the  $4$  and  $\bar{4}$  are spinors that can't be built out of the fundamental  $6$ . In that case, the physicists' fundamentals are not sufficient.

Example. When we restrict to  $GL(n, \mathbb{R})$ , we lose all dotted indices, retaining only  $\{g\}$  and  $\{g^{-1^T}\}$ . Now in  $O(n_+, n_-)$ , the new invariant tensor relates upper and lower indices; it is a metric tensor  $\xi^{ab}$  in the usual sense, and we can raise all indices, so there is only one fundamental representation. We can also use the metric tensor to remove traces between two upper indices. Thus the irreps are traceless tensors with upper indices and definite symmetry. The invariant tensor  $\delta_b^a$  is rendered obsolete since there are no lower indices; alternatively, it can be built out of the metric,  $\xi^{ab}\xi_{bc} = \delta_c^a$ .

The addition of the metric splits up  $GL(n, \mathbb{R})$  irreps. For example,  $t_b^a$  is a  $GL(n, \mathbb{R})$  irrep, but we can raise the index with the metric, then split  $t^{ab}$  into symmetric and antisymmetric parts.

Example. The case of  $O(2)$ . Consider the first two indices in  $t^{ab\dots}$ . We can take out the antisymmetric part, and the trace using the metric. But these two irreps are not equivalent, as they differ by how they transform under reflection; they are the scalar and pseudoscalar.

By repeating this procedure, we find rank  $n$  symmetric traceless tensors, for all  $n > 1$ . Imagine starting with a symmetric rank  $n$  tensor. Then the trace is a symmetric rank  $n - 2$  tensor, so the symmetric traceless rank  $n$  tensor has

$$(n + 1) - (n - 1) = 2$$

degrees of freedom. All of these two-dimensional irreps are inequivalent, corresponding to 'angular momentum' eigenvalue  $n$ .

Example. The case of  $SO(n)$ . Since there's only one kind of index, the Levi-Civita can be used to break apart irreps, specifically those from tensors of rank  $n/2$ , into self-dual and anti self-dual components. We'll consider a few low-dimensional cases.

- For  $SO(2)$ , the one-dimensional irreps of  $O(2)$  become equivalent, since one can multiply by  $\epsilon_b^a$  where an index is lowered using the metric. The two-dimensional irreps decompose, by 'taking out the trace' using  $\epsilon_b^a$ .

- For  $SO(3)$ , we can symmetrize all the indices by the same logic as for  $SU(3)$ . By similar counting as for  $O(2)$ , we confirm that the symmetric traceless tensors indeed have the expected integer dimensions. Irreps of  $O(3)$  do not break apart, but do become equivalent, identifying the pseudovector and vector, and pseudoscalar and scalar.

- For  $SO(3, 1)$ , the situation is similar to  $SO(2)$ , in that irreps of  $O(3, 1)$  do break apart; for example,  $F^{\mu\nu}$  decomposes into  $\mathbf{E} \pm i\mathbf{B}$ . These are self-dual and anti self-dual components. This happens in general for rank  $n$  tensors in  $SO(p, q)$  with  $p + q = 2n$ .

- For  $SO(8)$ , the Lie algebra  $\mathfrak{so}(8)$  has threefold symmetry, called triality, so there are three fundamental representations of dimension 8. Only one is a physicist's fundamental; the other two are spinors and cannot be built from the first.

### 8.2.4 7.4 Representations of $SU(n)$

In this section, we give some practical applications of tensor methods, focusing on  $SU(n)$ .

Note. We can think of tensors by themselves, but in the context of quantum mechanics, they can be interpreted as wavefunctions. For example, consider the state

$$|\psi\rangle = \psi^i |i\rangle$$

where the  $|i\rangle$  transform in the fundamental representation of  $SU(3)$ , say

$$|i\rangle \rightarrow U_i^j |j\rangle$$

Then we have

$$|\psi\rangle \rightarrow U_i^j \psi^i |j\rangle = U_j^i \psi^j |i\rangle$$

so we may alternatively transform the wavefunction as

$$\psi^i \rightarrow U_j^i \psi^j$$

while keeping the basis vectors  $|i\rangle$  fixed. We use upper and lower indices to distinguish the fundamental and antifundamental. Note that the transformations for the states and wavefunction differ by the usual active/passive flip. Now for two particles,

$$|\psi\rangle = \psi^{ij} |ij\rangle$$

the wavefunction  $\psi^{ij}$  transforms in a tensor product representation, and we can decompose it using the methods above. The bra transforms in the contragradient representation, which is just the conjugate representation here; thus upstairs and downstairs indices are switched. A inner product  $\langle\phi|\psi\rangle$  can be computed by contracting all the indices of the respective tensors; it is zero when the indices don't match up, reflecting the fact that different irreps are orthogonal. Similarly, tensor operators can be expanded in terms of wavefunctions, e.g.  $\hat{A} = A^i \hat{O}_i$ .

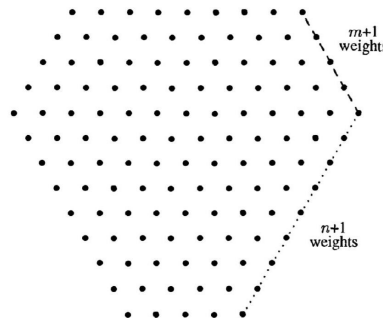
Note. Note that the  $(1, 0)$  irrep of  $SU(3)$  corresponds to a  $(1, 0)$  tensor, while the  $(0, 1)$  irrep corresponds to a  $(0, 1)$  tensor. We also know that the only new irrep that appears in  $(1, 0)^{\otimes n} \otimes (0, 1)^{\otimes m}$  is the  $(n, m)$  irrep. But in the tensor picture, the only new irrep is the symmetric traceless tensor with  $m$  upper indices and  $n$  lower indices. Hence the two labeling schemes of Dynkin labels and tensor ranks coincide, and this reasoning generalizes.

Note. Tensors explain the 'triality' symmetry of the  $SU(3)$  representations. For example, in

$$3 \times 8 = 15 + \bar{6} + 3, \quad (1, 0) \times (1, 1) = (2, 1) + (0, 2) + (1, 0)$$

all of the  $(n, m)$  irreps on the right-hand side have the same value of  $(n - m) \bmod 3$ . This holds because all of the invariant tensors in the problem have type  $(n, m)$  where  $n - m$  is divisible by 3.

Example. The weights of the  $(n, m)$  irrep of  $SU(3)$  are shown below.



We start at the top-right and initially can move leftward or down-right. Then the states on the upper and upper-right edges are nondegenerate, so all the outer states are nondegenerate by Weyl reflection. In general, the degeneracy increases by one every time we move in a layer, until we reach a triangular layer, at which point it remains constant.

Each of the states shown here can be associated with a tensor, i.e. viewing the tensor as the state's wavefunction. For example, when we move along the path shown, the tensors change as

$$v_{3333}^{11111111} \rightarrow v_{2222}^{11111111} \rightarrow v_{2222}^{33333333}$$

Now consider the states one layer inward. These contain tensors with one index in common between the top and bottom. To count the number of states in this layer, we find the number of symmetric tensors of this form (where the symmetry allows us to neglect index order) and subtract the number of traces, arriving at a degeneracy of 2. The same logic holds for all layers. The casework changes when we hit a triangular layer, because from that point on one of  $m$  or  $n$  is zero.

Note. Suppose we consider the matrix elements  $\langle u|W|v\rangle$ , where  $W$ ,  $\langle u|$ , and  $|v\rangle$  transform in irreps  $R_W$ ,  $R_u$ , and  $R_v$ . By the Wigner-Eckart theorem, all such matrix elements are specified by only a few numbers, specifically the number of factors of 1 in  $R_W \otimes R_u \otimes R_v$ . We've seen examples of this in  $SU(2)$ , where we found the other matrix elements by raising and lowering, but with tensors we can easily find a general expression by contracting indices.

Example. Suppose everything transforms in the 8 of  $SU(3)$ . There are two ways to contract the tensors  $W_j^i$ ,  $\bar{u}_j^i$ , and  $v_j^i$  to yield a 1, either 'clockwise' or 'anticlockwise'. (Note that by convention  $u$  stands for the wavefunction of  $|u\rangle$ , so  $\bar{u}$  is the bra wavefunction.) In this case all of these tensors can be written as matrices, giving

$$\langle u|W|v\rangle = \lambda_1 \text{tr } u^\dagger W v + \lambda_2 \text{tr } u^\dagger v W$$

Here, we replaced  $\bar{u}$  with the matrix  $u^\dagger$  because taking the bra conjugates and exchanges upper and lower indices, and the latter is just a transposition in matrix notation.

Example. Suppose  $u$  and  $v$  are 10's and the  $W$  is an 8. Then there is only one contraction,

$$\langle u|W|v\rangle = \lambda \bar{u}_{ijk} W_\ell^k v^{j\ell}$$

This is more economical in  $SU(3)$  than  $SU(2)$ , because the tensors tend to have lower ranks; the dimension of the irrep grows quadratically in the rank rather than linearly. However, such methods also work for  $SU(2)$ , where they can supply explicit formulas for the Clebsch-Gordan coefficients.

Next, we apply Young tableaux to tensor products in  $SU(n)$ . We use the physics conventions detailed in section 2.6 and warm up with  $SU(3)$ .

- As we've seen, the  $(n, m)$  irrep has  $n$  upper indices and  $m$  lower indices, where everything is traceless and symmetric. To describe the irrep with a single Young tableau, we convert every lower index into two antisymmetric upper indices by raising with  $\epsilon^{ijk}$ .

- Given a tensor  $T^{ijk\dots}$ , we apply a Young tableau to it by labeling the boxes with the indices, symmetrizing over indices in rows, then antisymmetrizing over indices in columns.

- For example, we project out the  $(1, 1)$  irrep of  $T^{ik\ell}$  corresponding to  $S_j^i \epsilon^{jkl}$  by applying

$$\begin{array}{|c|c|} \hline k & i \\ \hline \ell & \\ \hline (. & \\ \hline \end{array}$$

To see this, note there are two constraints: the  $k$  and  $\ell$  indices must be antisymmetric, enforced by the columns, and the original tensor must have been traceless, which is equivalent to

$$\epsilon_{ik\ell} u^{ik\ell} = 0$$

and enforced by the rows. Similarly, the  $(n, m)$  irrep has  $m$  columns with two boxes each followed by  $n$  columns with 1 box each.

- In general, given a tensor with  $n$  upper indices, we can project out an irrep by applying a Young tableau with  $n$  boxes. Columns with more than 3 boxes automatically give zero. Columns with 3 boxes mean an  $\epsilon^{ijk}$  factors out of the tensor, so they yield an isomorphic irrep to a Young tableau without them.

- There is a simple algorithm to compute the product of the irreps  $\alpha$  and  $\beta$  corresponding to tableaux  $A$  and  $B$ .

- Write  $a$  's in the first row of  $B$  and  $b$  's in the second row.

- Add the  $a$  boxes to  $A$  anywhere, as long as a valid tableau is formed and no two  $a$  's are in the same column.

- Then add the  $b$  boxes to  $A$  similarly. Reading the boxes in Hebrew order and ignore the tableau if there are more total  $b$  's than  $a$  's at any point. (We could use a different order, but this is more convenient because we're attaching boxes on the right anyway.)

We won't prove this, though intuitively it just takes all ways to combine the indices, maintaining the symmetry properties found above. In this system, triality is the number of boxes mod 3. The result can also be computed more directly using the Littlewood-Richardson rule.

- In general, the computation is much faster if we choose  $B$  to have as few boxes as possible. In particular, conjugating everything and then conjugating the final result can save time.

Example. Below we show that  $8 \times 8 = 27 + 10 + \overline{10} + 8 + 8 + 1$ .

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & b \\ \hline \end{array} = \\ \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline b & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & b \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline a & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline a & b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & b \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline a & \\ \hline a & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline a & b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & b \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline a & \\ \hline a & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline a & b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & b \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Here we're ignored combinations that yield columns with more than three boxes, as these are simply zero. After ignoring columns with three boxes, we arrive at the result, recalling that 27 is  $(2, 2)$  and 10 is  $(3, 0)$ .

Next, we move on to  $SU(n)$ .

- To do representation theory, we only need to relate between the simple roots and fundamental weights. Unfortunately, this is a bit complicated, because inverting the Cartan matrix isn't trivial. Instead, it's easier to instead express both of these quantities in terms of the weights of the defining representation. (Note they are sometimes called the "weights of the fundamental", but one should not confuse them with the fundamental weights!)

- Let the weights of the defining representation be  $\{\nu^1, \dots, \nu^n\}$ . As shown earlier, these form the vertices of a tetrahedron in  $n - 1$  -dimensional space.

- The roots are simply the differences of these weights. For convenience, we define positive roots to have the form  $\nu^i - \nu^j$  for  $i < j$ . Then the simple roots are

$$\alpha^i = \nu^i - \nu^{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

We can easily check the angles are in accordance with the Dynkin diagram.

- Taking the dual basis, the fundamental weights are

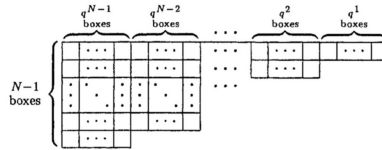


$$\mu^i = \sum_{j=1}^i \nu^j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

In particular, the highest weight of the defining representation is  $\mu^1 = \nu^1$ , as we can then lower with each simple root to get the other  $\nu^i$ . Then the second-highest weight is  $\nu^2$ , followed by  $\nu^3$ .

- Now consider the antisymmetric tensor product of  $m$  copies of the defining representation. Then the highest weight is  $\nu^1 + \dots + \nu^m$  because the indices must be distinct, so we have the  $m^{\text{th}}$  fundamental representation! So just like in  $SU(3)$ , we can build everything out of tensor products of only the defining representation.

- General irreps of  $SU(n)$  can thus be identified by a Young tableau. The tableau



represents the irrep with Dynkin indices  $q^k$ . We specify a Young tableau with the notation  $[\ell_1, \ell_2, \dots]$  where  $\ell_i$  is the length of column  $i$ , so the  $i^{\text{th}}$  fundamental is specified by  $[i]$ . The adjoint representation has one defining index and one lowered defining index, so it is  $[n-1, 1]$ .

- Consider the conjugate of the defining representation  $[1]$ . Its lowest weight is  $\nu^n$ , but since all the  $\nu^i$  sum to zero, this is equal to  $-\mu^{n-1}$ . Then the conjugate representation is  $[n-1]$ . Similarly, the conjugate of  $[j]$  is  $[n-j]$ , and hence the conjugate of any Young tableau can be found by rotating it by  $180^\circ$  and interpreting the top edge as a new bottom edge.

- The algorithm for products above also works, with more letters. To avoid overcounting, there should be at least as many  $a$ 's as  $b$ 's, at least as many  $b$ 's as  $c$ 's, and so on, at every point. Triality generalizes to  $N$ -ality, the number of boxes mod  $N$ . This in turn generalizes to the "conjugacy class" of a representation of any Lie algebra, which can be useful for constraining tensor products.

- There is a useful formula for the dimension of an  $SU(n)$  irrep, which can be derived from the Weyl character formula. We place an  $n$  in the top-left box, then place factors in the other boxes, adding one when we move right and subtracting one when we move down. The product of these factors divided by the product of the hook lengths is the dimension.

## 8.2.5 7.5 o Branching Rules

Finally, Young tableaux can be used to decompose representations when restricting to subgroups.

- First, we consider the subgroup

$$SU(n) \times SU(m) \times U(1) \subset SU(n+m)$$

In terms of indices, we imagine the indices can go from 1 to  $n+m$ , the  $SU(n)$  part acts on the indices from 1 to  $n$  only, and the  $U(1)$  generator is  $\text{diag}(m, \dots, m, -n, \dots, -n)$  to ensure tracelessness.

- The fundamental decomposes as

$$\square = (\square, \cdot)_M + (\cdot, \square)_N$$

where the first element in each pair is the  $SU(n)$  representation, and the subscript indicates the  $U(1)$  charge.

• More generally, to decompose a general irrep  $C$  we consider the Young tableau. If it has  $k$  boxes, then we can only split into a pair of irreps  $A$  and  $B$  with  $n$  and  $m$  boxes so that  $n + m = k$ , and the  $U(1)$  charge is  $nM - mN$ .

• Now, we need to account for the symmetry of  $C$ . Let  $A'$  and  $B'$  be  $SU(n+m)$  irreps with the same tableau as  $A$  and  $B$ . Then if  $C$  doesn't appear in  $A' \otimes B'$ , then  $A \otimes B$  surely can't appear in the decomposition of  $C$ . In fact, in general the number of times  $A \otimes B$  appears in  $C$  is the number of times  $C$  appears in  $A' \otimes B'$ .

• Another important situation is the embedding

$$SU(n) \times SU(m) \subset SU(nm)$$

which occurs when we work with tensor product spaces. The best notation here is to have two types of indices: an index  $i$  for  $SU(n)$  and an index  $\alpha$  for  $SU(m)$ , so that indices in  $SU(nm)$  are composites  $i\alpha$ . Then each factor acts on its index, leaving the other alone.

• Consider an irrep  $D$  of  $SU(nm)$  with  $K$  boxes. Then its tensor has  $K$  indices of the  $SU(n)$  type and  $K$  indices of the  $SU(m)$  type, so it decomposes into  $(D_1, D_2)$  where  $D_1$  and  $D_2$  both have  $K$  boxes, up to eliminating full columns.

• The difference from the previous part is that the Young tableau for  $D$  describes the  $S_K$  symmetry associated with permuting the composite indices  $i\alpha$ . Thus, to see if we can recover this symmetry, we regard  $D_1$  and  $D_2$  as Young tableaux for  $S_K$  irreps, multiply them as  $S_K$  irreps, and look for a factor of  $D$ . We don't have an algorithm for this, because we only know how to multiply  $SU(n)$  irreps diagrammatically.

Example. The case of  $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$ . The adjoint decomposes as

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \rightarrow \\
 \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \cdot \right) \quad 2_1 \\
 \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \quad 1_0 \\
 \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \quad 3_0 \\
 \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \quad 2_{-1}
 \end{array}$$

Example. The case of  $SU(2) \times U(1) \subset SU(3)$ , where the '  $SU(1)$  ' factor is trivial. If we're working with flavor  $SU(3)$ , these components are isospin and hypercharge. The adjoint decomposes as

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \\
 &= \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right)_5 \quad (3, 2)_5 \\
 &\oplus \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)_0 \quad (1, 3)_0 \\
 &\oplus \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)_0 \quad (1, 1)_0 \\
 &\oplus \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)_0 \quad (8, 1)_0 \\
 &\oplus \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right)_{-5} \quad (\bar{3}, 2)_{-5}
 \end{aligned}$$

Here the trivial '  $SU(1)$  ' irreps are all one-dimensional, so we don't mark them. However, the fact that  $SU(1)$  has only one index value constrains the Young tableau to have a single row.

Example. The case of  $SU(3) \times SU(2) \subset SU(6)$ , where we interpret the factors as quark flavor and quark spin. For the lowest energy baryons, we need total symmetry between the quarks, so we must decompose

$$56 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

There are three irreps of  $SU(3)$  with three boxes, and two of  $SU(2)$ ,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Then it turns out the two possibilities are

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) = (10, 4) + (8, 2)$$

These are the baryon decuplet, which is totally symmetric in both flavor and spin space, and the baryon octet, which has mixed symmetry in both.

Note. Note that the adjoint  $A$  obeys the property

$$R \subset A \otimes R$$

for any nontrivial representation  $R$ . This is clear from the Young tableaux method for  $SU(n)$ . More generally, consider the map

$$A \otimes R \rightarrow R, \quad x \otimes v \rightarrow x(v)$$

It can be checked this is a map of representations. Since the image is  $R$ ,  $R$  is a quotient of  $A \otimes R$ .

We can compute branching rules in general using projection matrices.

- Suppose  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ . We can specify weights in  $\mathfrak{g}$  by the coefficients  $w_{(i)}$  of the fundamental weights, and similarly in  $\mathfrak{h}$  by coefficients  $v_{(i)}$ . If  $\mathfrak{h}$  is not simple, we simply find the coefficients within each component and concatenate the vectors.

- As a simple example, consider the branching associated with  $\mathfrak{su}(3) \supset \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$ . We have

$$3 \rightarrow 2_1 + 1_{-2}$$

because the weight vectors  $(10)$ ,  $(\bar{1}1)$ , and  $(0\bar{1})$  in  $\mathfrak{su}(3)$  map to  $(1)(+1)$ ,  $(\bar{1})(+1)$ , and  $(0)(-2)$  respectively, where a bar stands for a negative sign.

- Hence the weights  $v_{(i)}$  and  $w_{(i)}$  are related by the projection matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Once we have the projection matrix, we can compute branching rules in general by projecting all of the weights of a given representation.

- If the subalgebra  $\mathfrak{h}$  is found by a Dynkin diagram, it is simple to write down the projection matrix. For example, consider the subalgebra of  $\mathfrak{su}(5)$  below.

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & & & & \mathfrak{su}_5 & & \\ & & & & \implies & & \\ & & & & \text{Removing } 1 & & \\ & & & & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & & & & & & \mathfrak{su}_{13} \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{u}_1 & & \end{array}$$

It is clear the projection matrix is

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

The final row, corresponding to the  $\mathfrak{u}(1)$  factor, depends on how the  $\mathfrak{u}(1)$  generator is normalized; it may be found by considering an explicit simple representation.

- The projection matrix is not unique. For instance, the usual embedding of  $\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$  in  $\mathfrak{su}(5)$  used in grand unification instead has

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

However, the branching rules computed will be the same, up to  $\mathfrak{u}(1)$  normalization.

- For multiple layers of subalgebras,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ , we may simply multiply the projection matrices.

## 8.2.6 7.6 Representations of $SO(n)$

Next, we turn to  $SO(n)$  and spinor representations. We begin with  $SO(2n+1)$ .

- We label the generators as  $M_{ab} = -M_{ba}$ , where in the defining representation

$$[M_{ab}]_{xy} = -i(\delta_{ax}\delta_{by} - \delta_{bx}\delta_{ay})$$

Then a basis for the Cartan subalgebra is  $H_j = M_{2j-1,2j}$ , for  $j = 1, \dots, n$ .

- We've already heuristically found that the roots are

$$e^j \pm e^k, \quad -e^j \pm e^k, \quad \pm e^j$$

In terms of the defining representation, they are

$$E_{\eta e^j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (M_{2j-1,2n+1} + i\eta M_{2j,2n+1})$$

and

$$E_{\eta e^j + \eta' e^k} = \frac{1}{2} (M_{2j-1,2k-1} + i\eta M_{2j,2k-1} + i\eta' M_{2j-1,2k} - \eta\eta' M_{2j,2k})$$

as can be checked by direct commutation, where  $\eta, \eta' = \pm 1$ .

- Under a suitable definition of positivity, the simple roots are

$$\alpha^j = e^j - e^{j+1} \text{ for } j = 1, \dots, n-1, \quad \alpha^n = e^n.$$

Then the fundamental weights are

$$\mu^j = \sum_{k=1}^j e^k \text{ for } j = 1, \dots, n-1, \quad \mu^n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n e^k$$

The representation corresponding to  $\mu^n$  is qualitatively different since it is associated with the short root; it is the spinor representation.

- Starting with highest weight  $\mu^n$ , by Weyl reflection in the roots  $e_j$ , we get the  $2^n$  weights  $(\pm e^1 \pm \dots \pm e^n)/2$ , all of which are nondegenerate since the highest weight was. By some choice of positivity, each of these weights could be the highest weight, and lowering any of them just gives another one, so these are all the weights.

- It is convenient to write the spinor as the tensor product of  $n$  two-dimensional spaces,

$$|\pm e^1/2 \pm \dots \pm e^n/2\rangle = |\pm e^1/2\rangle \otimes \dots \otimes |\pm e^n/2\rangle$$

and we define  $\sigma_a^j$  to be the Pauli matrix  $\sigma_a$  acting on slot  $j$ , so

$$H_j = \frac{1}{2} \sigma_3^j, \quad H_j^2 = \frac{1}{4}$$

For any  $a \neq b$ ,  $M_{ab}$  could have been a Cartan generator since the ordering of axes is arbitrary, so in the spinor representation  $M_{ab}^2 = 1/4$  for all  $a \neq b$ .

- Since any state can only be raised once,  $(E_{e^j})^2 = 0$ , which implies

$$\{M_{2j-1,2n+1}, M_{2j,2n+1}\} = 0$$

and again since the ordering of axes is arbitrary, we have

$$\{M_{j\ell}, M_{k\ell}\} = 0, \quad j \neq k \neq \ell \neq j.$$

We now construct the generators in the spinor representation.

- First we construct some of the roots. For simplicity we'll set  $n = 2$ , though the reasoning will be easy to generalize to arbitrary  $n$ . First off, we know that

$$E_{e^1} | -e^1/2 \pm e^2/2 \rangle \propto | e^1/2 \pm e^2/2 \rangle, \quad E_{-e^1} | -e^1/2 \pm e^2/2 \rangle = 0$$

To compute the proportionality constant, take the norm of both sides for

$$\left\langle -e^1/2 \pm e^2/2 \left| E_{e^1}^\dagger E_{e^1} \right| -e^1/2 \pm e^2/2 \right\rangle = \left\langle -e^1/2 \pm e^2/2 \left| \{E_{e^1}^\dagger, E_{e^1}\} \right| -e^1/2 \pm e^2/2 \right\rangle = \frac{1}{2}$$

using the above results. Hence we have  $E_{\pm e^1} = \sigma_{\pm}^1/2$ , where we have implicitly fixed a phase convention. Similarly, we can choose a phase convention so that

$$E_{e^2} |e^1/2 - e^2/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e^1/2 + e^2/2\rangle$$

- At this point we have exhausted the phase freedom. Now we compute

$$E_{e^2} |-e^1/2 - e^2/2\rangle = \sqrt{2} E_{e^2} E_{-e^1} |e^1/2 - e^2/2\rangle = -\sqrt{2} E_{-e^1} E_{e^2} |e^1/2 - e^2/2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |-e^1/2 + e^2/2\rangle$$

where we used  $\{E_{\pm e^1}, E_{\pm e^2}\} = 0$ . This extra sign means we need a factor of  $\sigma_3^1$ ,

$$E_{\pm e^2} = \frac{1}{2} \sigma_3^1 \sigma_{\pm}^2$$

- By continuing this reasoning for general  $n$ , we have

$$E_{\pm e^j} = \frac{1}{2} \sigma_3^1 \dots \sigma_3^{j-1} \sigma_{\pm}^j$$

Thus, for the generators we have

$$M_{2j-1, 2n+1} = \frac{1}{2} \sigma_3^1 \dots \sigma_3^{j-1} \sigma_1^j, \quad M_{2j, 2n+1} = \frac{1}{2} \sigma_3^1 \dots \sigma_3^{j-1} \sigma_2^j$$

From these generators we can construct all other generators by anticommutation, as

$$M_{ab} = -i [M_{a, 2n+1}, M_{b, 2n+1}].$$

Using  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ , each generator is  $\pm 1/2$  times a product of Pauli matrices.

- The spinor representation is not complex, since its weights are symmetric. For  $n = 1$ , we have seen it is equivalent to its conjugate representation by  $S = \sigma_2$ ,

$$\sigma_a = -\sigma_2 \sigma_a^* \sigma_2$$

Demanding the same for the generators  $M_{2j-1, 2n+1}$  and  $M_{2j, 2n+1}$  yields

$$S = \prod_{j \text{ odd}} \sigma_2^j \prod_{k \text{ even}} \sigma_1^k$$

This implies the spinor representations are real for  $SO(8n+1)$  and  $SO(8n+7)$ , and pseudoreal for  $SO(8n+3)$  and  $SO(8n+5)$ .

Next, we apply similar reasoning for  $SO(2n+2)$ .

- In this case the simple roots are

$$\alpha^j = e^j - e^{j+1} \text{ for } j = 1, \dots, n, \quad \alpha^{n+1} = e^n + e^{n+1}$$

where  $\alpha^n$  and  $\alpha^{n+1}$  are the distinguished roots. The last two fundamental weights are

$$\mu^n = \frac{1}{2} (e^1 + \dots + e^n - e^{n+1}), \quad \mu^{n+1} = \frac{1}{2} (e^1 + \dots + e^n + e^{n+1})$$

and correspond to the two spinor representations  $D^n$  and  $D^{n+1}$ .

- In  $SO(2n+2)$ , all of the roots have the form  $\pm e^j \pm e^k$ . Then by similar logic to the case of  $SO(2n+1)$ , the spinor representations have weights

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \eta_j e^j, \quad \eta_j = \pm 1$$

but with the additional restriction that the  $\eta_j$  multiply to -1 for  $D^n$  and 1 for  $D^{n+1}$ . Note that both of these representations have dimension  $2^n$ . We see that the spinor representations are complex exactly when  $n$  is even, in which case they are each others' conjugates.

- To construct the representations more explicitly, restrict to  $SO(2n+1)$  generated by  $M_{jk}$ , with  $j, k \leq 2n+1$ . Then we lose the last Cartan generator  $H_{n+1} = M_{2n+1, 2n+1}$ , and both of the spinor representations reduce to the one found above.

- Thus, using the same notation, all we have to do is construct  $H_{n+1}$ . It is

$$H_{n+1} = \frac{1}{2} \sigma_3^1 \dots \sigma_3^n \times \begin{cases} -1 & D^n \\ +1 & D^{n+1} \end{cases}$$

All the other missing generators can be found by commutation.

- Finally, we determine reality and pseudoreality. We can define  $R$  exactly as we did for  $SO(2n+1)$ , and by the same logic find that the spinors are real for  $SO(8n)$  and pseudoreal for  $SO(8n+4)$ . In summary, the Weyl spinors are:

|            |            |
|------------|------------|
| $SO(8n)$   | real       |
| $SO(8n+1)$ | real       |
| $SO(8n+2)$ | complex    |
| $SO(8n+3)$ | pseudoreal |
| $SO(8n+4)$ | pseudoreal |
| $SO(8n+5)$ | pseudoreal |
| $SO(8n+6)$ | complex    |
| $SO(8n+7)$ | real       |

Example. In the case of  $\mathfrak{so}(4)$  the algebra is not simple, as it breaks into  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Nonetheless the arguments above apply, because at each step we simply ignored one of the two special simple roots. When we do this, we restrict to  $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$ , and the arguments go through as before. Note that the resulting spinors are pseudoreal, but the Weyl spinors of  $\mathfrak{so}(3, 1)$  are complex; the results depend on the metric signature. We cover the case of Lorentzian signature in the notes on Supersymmetry.

We can also arrive at these results by the alternate route of Clifford algebras.

- A Clifford algebra is a set of  $N$  operators satisfying the anticommutation relations

$$\{\Gamma_j, \Gamma_k\} = 2\delta_{jk}$$

Given a Clifford algebra, we may define

$$M_{jk} = \frac{1}{4i} [\Gamma_j, \Gamma_k]$$

which generate a representation of  $SO(N)$ . We won't show this here, but it is done in detail in the notes on Quantum Field Theory.

- The index on  $\Gamma_j$  may be viewed as a vector index, in the sense that the  $\Gamma$ 's transform in the  $N$ -dimensional fundamental representation of  $SO(N)$ ,

$$[M_{jk}, \Gamma_\ell] = i(\delta_{j\ell}\Gamma_k - \delta_{k\ell}\Gamma_j) = \Gamma_m \left( M_{jk}^{D^1} \right)_{m\ell}$$

where  $M^{D^1}$  is in the fundamental representation,

$$\left[ M_{jk}^{D^1} \right]_{\ell m} = -i(\delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell})$$

That is, the  $\Gamma$ 's form a irreducible set of tensor operators.

- For  $SO(2n+1)$ , the Clifford algebra

$$\Gamma_1 = \sigma_2^1 \sigma_3^2 \dots \sigma_3^n, \quad \Gamma_2 = -\sigma_1^1 \sigma_3^2 \dots \sigma_3^n, \quad \Gamma_3 = \sigma_2^2 \dots \sigma_3^n, \quad \Gamma_4 = -\sigma_1^2 \dots \sigma_3^n$$

and so on, up to

$$\Gamma_{2n-1} = \sigma_2^n, \quad \Gamma_{2n} = -\sigma_1^n, \quad \Gamma_{2n+1} = \sigma_3^1 \dots \sigma_3^n$$

yields a  $2^n$  dimensional representation, precisely the spinor representation we found earlier.

- Using this Clifford algebra, we can simply forget about  $\Gamma_{2n+1}$  to get a Clifford algebra with  $2n$  elements, yielding a  $2^n$  dimensional representation of  $SO(2n)$ . This representation is reducible since  $\Gamma_{2n+1}$  commutes with all the generators, because

$$\Gamma_{2n+1} = (-i)^n \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{2n}$$

Indeed, we saw above that  $\Gamma_{2n+1}$  is equal to -1 on  $D^{n-1}$  and 1 on  $D^n$ , so

$$\frac{1}{2}(1 - \Gamma_{2n+1}) \text{ projects onto } D^{n-1}, \quad \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{2n+1}) \text{ projects onto } D^n$$

This is familiar from the study of Lorentz spinors, where  $\Gamma_{2n+1}$  is called  $\gamma^5$ .

Clifford algebras arise naturally when considering Majorana spinors.

- Suppose we have a set of  $n$  independent fermionic creation and annihilation operators. Then their anticommutation relations are

$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0$$

Given these, we may always construct the self-conjugate operators

$$\gamma_i = c_i + c_i^\dagger, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \gamma_i = \gamma_i^\dagger$$

These are called Majorana operators and satisfy the Clifford algebra. However, typically these operators don't create physical excitations, because if the  $c_i$  are charged then  $\gamma_i$  does not have definite charge.

- If we do have a set of  $2n$  Majorana operators  $\gamma_i$ , we may recover  $n$  independent fermionic harmonic oscillators by defining

$$\Psi_k = \frac{1}{2}(\gamma_{2k-1} + i\gamma_{2k})$$

Starting from the vacuum, these generate a  $2^n$  dimensional Hilbert space, which is the same reducible representation we saw above. The two pieces correspond to having an even or odd number of particles.

- A set of  $n$  harmonic oscillators has an  $SU(n)$  symmetry associated with rotating between them. These rotations are generated by

$$T_a = \sum_{jk} \Psi_j^\dagger [T_a]_{jk} \Psi_k$$

where  $[T_a]_{jk}$  is the defining representation of  $SU(n)$ . This yields a convenient embedding of  $SU(n)$  in  $SO(2n)$ .

- Because the  $SU(n)$  rotations preserve particle number, the  $2^n$  dimensional Hilbert space breaks into  $n+1$  representations under  $SU(n)$ , with the  $m$ -particle subspace containing  $\binom{n}{m}$  states. Since the fermionic oscillators anticommute, these correspond to antisymmetric powers of the fundamental, which we write as  $[m]$ . For example, for  $SU(5) \subseteq SO(10)$  we have



$$D^5 = 16 \rightarrow [1] + [3] + [5] = 5 + \overline{10} + 1, \quad D^4 = \overline{16} \rightarrow [0] + [2] + [4] = 1 + 10 + \overline{5}$$

The latter makes  $SO(10)$  suitable for grand unification.

## 8.3 Algebra from Foster

### 8.3.1 Lie groups as manifolds. $SU(2)$ and the three-sphere

#### 2.2 The group manifold for $SU(2) : S_3$

#### 2.3 Left- and right- group translations on $SU(2)$ : Isometries of $S_3$

This is the only module in which I will discuss Lie groups and their geometry; subsequent modules will not make use of the results derived here. We will employ some basic notions from differential geometry; an excellent reference is [1]. Introductions to the Haar measure can be found in Refs. [2] and [3].

#### 2.1 The Haar measure

For a Lie group  $G$ , each element  $g(x)$  is associated to a point on the group manifold, labeled by some coordinates  $x = \{x^a\}$ ,  $a \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Here  $d$  denotes the group dimension. In this module, we follow differential geometry conventions for upper ("contravariant") and lower ("covariant" or dual) indices on tensors. The coordinate  $x^a$  is a scalar field defined over the manifold, but its differential variation  $dx^a$  is a contravariant vector (or equivalently, a dual basis vector) [1].

A compact Lie group has a group manifold that is closed (has no boundary). The closure of the group under group multiplication implies the existence of a group map  $\phi : G \times G \rightarrow G$ , which takes an arbitrary ordered pair of points  $(y, x)$  to a third point  $z$ . I.e., if

$$g(z) = g(y) \times g(x) \neq g(x) \times g(y) \quad (2.1.1)$$

then

$$z^a \equiv \phi^a(y; x) \neq \phi^a(x; y), \quad \text{group map.} \quad (2.1.2)$$

The group map  $z^a = \phi^a(y; x)$  is an additional global structure defined over the entire manifold. We will see that it implies the existence of a unique integration measure and associated Riemannian metric for the group, tying the abstract structure of the group to a specific manifold geometry.

First, it is helpful to partially "gauge fix" (constrain) the choice of manifold coordinates.

• Let  $g(x = 0) = 1$ , where "1" denotes the group identity element. • Let  $g(\tilde{x}) \times g(x) = g(x) \times g(\tilde{x}) = 1 \Rightarrow g(\tilde{x}) = g^{-1}(x)$ . Thus  $\tilde{x}$  locates the inverse of  $g(x)$ .

Then

$$x^a = \phi^a(x^a; 0) = \phi^a(0; x^a) \quad (2.1.3a)$$

$$(\alpha + \beta)x^a = \phi^a(\alpha x; \beta x) = \phi^a(\beta x; \alpha x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.1.3b)$$

$$0 = \phi^a(x, \tilde{x}) = \phi^a(\tilde{x}, x) \quad (2.1.3c)$$

$$\phi^a(\delta y; \delta x) \simeq \phi^a(\delta x; \delta y) \simeq \delta x^a + \delta y^a + \mathcal{O}(\delta^2)$$

multiplication by the group identity.  
 $U(1)$  composition.  
 group inverse.  
 composition of infinitesimal elements.

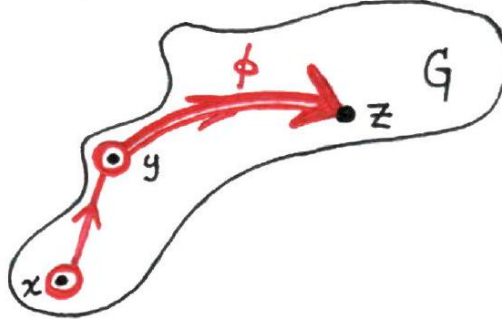


Figure 2.1: Lie group  $G$  as a manifold; group map.

In the last equation, we assume that  $\delta x$  and  $\delta y$  are "close" to the group identity 1.

In physical applications like random matrix theory or matrix field theories, one must define an appropriate measure for performing integration over matrix components. In the special case that the matrix represents a group transformation, one may wish to integrate over all possible group transformations. Taking the circle group as an example, we anticipate that a "natural" integration measure is invariant under group transformations. For non-abelian groups, this is called the Haar measure. Let us denote it via

$$d_{\mathbf{H}}[g(x)] \equiv \sqrt{\gamma(x)} d^d x, \quad \gamma(x) = \det [\gamma_{ab}(x)] \quad (2.1.4)$$

where  $\gamma_{ab}(x)$  is the associated group metric. We insist that the Haar measure is invariant under left- and right- group translations:

$$I(y) \equiv \int_G d_{\mathbf{H}}[g(x)] f[g(y) \times g(x)] = \int_G d_{\mathbf{H}}[g(x)] f[g(x) \times g(y)] = \int_G d_{\mathbf{H}}[g(x)] f[g(x)] \quad (2.1.5)$$

where  $f(g)$  denotes some arbitrary function of the group element  $g$ . Therefore we require that

$$\begin{aligned}
 I(y) &= \int_G d_{\mathbf{H}}[g(x)] f[g(y) \times g(x)] = \int_G d_{\mathbf{H}}[g(\tilde{y}) \times g(z)] f[g(z)] = \int_G d_{\mathbf{H}}[g(z)] f[g(z)] \quad (2.1.6) \\
 g(z) &= g(y) \times g(x), \quad z^a = \phi^a(y; x) \\
 g(x) &= g(\tilde{y}) \times g(z), \quad x^a = \phi^a(\tilde{y}, z)
 \end{aligned}$$

Now changing variables from  $x$  to  $z$  gives

$$\sqrt{\gamma(x)} d^d x = \sqrt{\gamma(x)} \left| \frac{\partial x^a}{\partial z^b} \right| d^d z \quad (2.1.7)$$

where the  $|\cdots|$  is the Jacobian. Comparing this to Eq. (2.1.6), we conclude that <sup>1</sup>

$$\sqrt{\gamma(z)} = \sqrt{\gamma(x)} \left| \frac{\partial \phi^a(\tilde{y}, z)}{\partial z^b} \right| \quad (2.1.8)$$

We can compute the metric determinant  $\gamma(z)$  by setting  $x = 0$ , so that  $g(z) = g(y)$ . Furthermore, we know that at the group identity  $x = 0$ ,

$$d_H[g(x \rightarrow 0)] = d^d x$$

(up to an arbitrary scale factor), because infinitesimal group transformations commute [c.f. Eq. (2.1.3d)]. We conclude that

$$\sqrt{\gamma(z)} = \left| \frac{\partial \phi^a(\tilde{y}, z)}{\partial z^b} \right|_{y=z} \quad (2.1.9)$$

## 2.2 The group manifold for $SU(2) : S_3$

We can use the spin 1/2 representation to derive an explicit formula for the group map. Recall the explicit form an  $SU(2)$  transformation [Eq. (1.3.4)],

$$\hat{g}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{1}_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.2.1)$$

We introduce  $\mathbb{R}^4$  (embedding) coordinates

$$x^0 \equiv \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad x^i \equiv \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\theta}^i \quad \Rightarrow \quad (x^0)^2 = 1 - x^i x^i \quad (2.2.2)$$

(Einstein summation implied on  $i \in \{1, 2, 3\}$ ). If we assign a Euclidean metric to the 4D  $\{x^0, x^i\}$  space, then the group of  $SU(2)$  transformations clearly resides on the unit 3-sphere, denoted  $S_3$ . We will see that the Haar measure confirms this.

The group element now reads

$$\hat{g}(x) = \hat{1}_2 x^0 - i x^i \hat{\sigma}_i \quad (2.2.3)$$

The group map obtains from

$$\hat{g}(y)\hat{g}(x) = \hat{1}_2 (x^0 y^0 - x^i y^i) - i\hat{\sigma}_i (y^0 x^i + x^0 y^i + \epsilon^{ijk} y^j x^k) \equiv g(z) \quad (2.2.4)$$

so that

$$z^0 = (x^0 y^0 - x^i y^i), \quad z^i = (y^0 x^i + x^0 y^i + \epsilon^{ijk} y^j x^k) \quad (2.2.5)$$

### Exercise

Check that  $(z^0)^2 = 1 - z^i z^i$ .

Therefore

- The group map is

---

<sup>1</sup> Note that Eq. (2.1.8) is not merely the transformation law for tensor densities under coordinate diffeomorphisms. The invariant integration measure in that case is

$$\sqrt{\gamma(x)} d^d x = \sqrt{h(z)} d^d z$$

where  $h = |\det h_{ab}|$  and  $h_{ab} = \gamma_{cd} (\partial x^c / \partial z^a) (\partial x^d / \partial z^b)$ . The equivalent statement is

$$\sqrt{h(z)} = \sqrt{\gamma(x)} \left| \frac{\partial x^a}{\partial z^b} \right|$$

For a generic coordinate diffeomorphism, the density  $h(z)$  is a different function of its arguments from  $\gamma(x)$ . Invariance of the group integration measure instead constrains  $h(z) = \gamma(z)$  on the left-hand side of Eq. (2.1.8).

$$\phi^i(y; x) = y^0 x^i + x^0 y^i + \epsilon^{ijk} y^j x^k \quad (2.2.6)$$

• In the chosen coordinate system, a group element  $g(x)$  is related to its inverse  $g(\tilde{x})$  via  $\tilde{x}^i = -x^i$ .

Therefore

$$\begin{aligned} \phi^i(-y; z) &= \sqrt{1 - y^k y^k} z^i - \sqrt{1 - z^k z^k} y^i - \epsilon^{ijk} y^j z^k, \quad (\text{for } z^0 > 0) \\ \frac{\partial \phi^i(-y; z)}{\partial z^j} &= \sqrt{1 - y^k y^k} \delta_j^i + \frac{y^i z_j}{\sqrt{1 - z^k z^k}} - \epsilon^{ikj} y^k \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial \phi^i(-y; z)}{\partial z^j} \right|_{y=z} &= \sqrt{1 - z^k z^k} \delta_j^i + \frac{z^i z_j}{\sqrt{1 - z^k z^k}} + \epsilon^{ijk} z^k \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

The determinant of this finally gives [via Eq. (2.1.9)]

$$\sqrt{\gamma(z)} = \frac{1}{z^0} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^i z^i}} \quad (2.2.8)$$

This is the integration measure for a 3-sphere in terms of constrained Euclidean coordinates, as can be seen from the manifestly invariant integral

$$\int d^4 z \delta(z^0 z^0 + z^i z^i - 1) = \int \frac{d^3 z}{\sqrt{1 - z^i z^i}}$$

The group metric can be obtained via the pullback,

$$\gamma_{ij} dz^i dz^j = \left[ \frac{\partial z^0}{\partial z^i} \frac{\partial z^0}{\partial z^j} + \delta_{i,j} \right] dz^i dz^j = \left[ \delta_{i,j} + \frac{z^i z^j}{1 - z^k z^k} \right] dz^i dz^j \quad (2.2.9)$$

### Exercise

Use Eq. (2.2.9) to verify Eq. (2.2.8). Evaluate the determinant using the formula

$$\det \hat{\gamma} = e^{\text{Tr} \log \hat{\gamma}}$$

writing  $\hat{\gamma} = \hat{1}_3 + \delta \hat{\gamma}$ , and expanding the log in powers of  $\delta \hat{\gamma}$ .

### 2.3 Left- and right- group translations on $SU(2)$ : Isometries of $S_3$

We have shown that the group manifold for  $SU(2)$  is  $S_3$ . In this section, we demonstrate that continuously generated coordinate transformations that are symmetries of the group manifold ("isometries") encode invariance of the geometry under left- and rightgroup transformations. To see this, we consider the generators of symmetry transformations on  $S_3$ .

Just as  $S_2$  is invariant under  $SO(3)$  transformations,  $S_3$  is invariant under  $SO(4)$ . The generators of  $SO(4)$  can be chosen so as to implement  $SO(2)$  rotations in each of the orthogonal planes formed by any two coordinate axes in 4D. There are  $4 \times 3/2 = 6$  independent planes, and thus 6 generators.<sup>2</sup> We can work out the commutation relations between the generators by thinking about the Hilbert space operators that implement  $SO(4)$  rotations in 4D. Recall that in 3D, the z-component angular momentum operator  $L^z$  implements rotations in the  $xy$  plane and is defined as

$$L^z = -ix\partial_y + iy\partial_x \quad (2.3.1)$$

Similarly, we can define the following generators for  $SO(2)$  rotations in the 6 orthogonal planes in 4D:

$$\begin{aligned} K^a &= -ix^0\partial_a + ix^a\partial_0, & (x^0 - x^a \text{ plane}) \\ J^a &= -i\epsilon^{abc}x^b\partial_c, & (x^b - x^c \text{ plane}) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

$a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ . The commutation relations are

$$\begin{aligned} &\text{so}(4) \text{ Lie algebra} \\ &\frac{[J^a, J^b] = i\epsilon^{abc}J^c}{[J^a, K^b] = i\epsilon^{abc}K^c} \\ &\frac{[K^a, K^b] = i\epsilon^{abc}J^c}{[K^a, K^b] = i\epsilon^{abc}J^c} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Like  $\text{so}(3) = \text{su}(2)$ , the  $\text{so}(4)$  algebra is special, in that it is equivalent to two mutually commuting copies of  $\text{su}(2)$ :  $\text{so}(4) = \text{su}(2) \otimes \text{su}(2)$ . We will show later that  $\text{so}(2n+1)[\text{so}(2n)]$  always has one  $2^n$  dimensional [two  $2^{n-1}$  dimensional] spinor representation(s), in addition to representations formed by tensoring together vector indices. The  $\text{so}(3)$  and  $\text{so}(4)$  algebras are sufficiently small that there is essentially nothing else: all representations are formed by tensoring together spinor  $\text{su}(2)$  indices for these special algebras. In the case of  $\text{so}(4)$ , the two independent  $\text{su}(2)$ s can be thought of as "left" and "right" representations, distinguished by chirality. The same decomposition holds for the non-compact version  $SO(3, 1)$ , which governs the Lorentz group of boosts and rotations in 4 spacetime dimensions. The left and right representations realize left- and right-handed Weyl fermions in 3+1-D relativistic quantum field theory.

We define the linear combinations

$$S_{\pm}^a \equiv \frac{1}{2}(J^a \pm K^a) \quad (2.3.4)$$

Then  $\text{so}(4) = \text{su}(2) \otimes \text{su}(2)$  follows from

$$[S_{\sigma}^a, S_{\sigma'}^b] = i\delta_{\sigma, \sigma'}\epsilon^{abc}S_{\sigma}^c \quad (2.3.5)$$

where  $\sigma, \sigma' \in \{+, -\}$ .

### Exercise

Derive Eqs. (2.3.3) and (2.3.5).

We have obtained Eqs. (2.3.3) and (2.3.5) using the representation in Eq. (2.3.2) as differential operators acting in a (flat) four-dimensional Hilbert space. Just as the angular momentum operators in 3D depend only on angular coordinates, these  $\text{so}(4)$  generators can also be expressed in terms of differential operators acting on the unit 3-sphere, the  $\text{su}(2)$  group manifold. Technically the generators on  $S_3$  are Killing vector fields, and can be derived by either (1) pulling back and raising the 4D dual vectors to the unit sphere, or (2) solving Killing's equation. In a homework problem, you will derive the explicit form of these in some coordinate system on  $S_3$ .

Claim: The isometries generated by these commuting  $\text{su}(2)$  s on the group manifold  $S_3$  correspond to the diffeomorphisms induced by left- and right-multiplying  $SU(2)$  group transformations.

Proof: Consider the diffeomorphisms induced by left- and right-su(2) group transformations. Let  $y^a = \sin(\theta)\hat{y}^a$ ,  $y^0 = \cos(\theta)$ .

- Left group translation:  $g(x) \rightarrow g(y) \times g(x)$ . Then

$$x^a \rightarrow \phi^a(y; x) = \cos(\theta)x^a + \sin(\theta)\hat{y}^a x^0 + \sin(\theta)\epsilon^{abc}\hat{y}^b x^c \quad (2.3.6a)$$

- Right group translation:  $g(x) \rightarrow g(x) \times g(y)$ . Then

$$x^a \rightarrow \phi^a(x; y) = \cos(\theta)x^a + \sin(\theta)\hat{y}^a x^0 - \sin(\theta)\epsilon^{abc}\hat{y}^b x^c \quad (2.3.6 b)$$

Thus for (e.g.)  $\hat{y} = \hat{1}$ ,

$$\begin{aligned} x^1 &\rightarrow \cos(\theta)x^1 + \sin(\theta)x^0 \\ x^2 &\rightarrow \cos(\theta)x^2 \mp \sin(\theta)x^3 \\ x^3 &\rightarrow \cos(\theta)x^3 \pm \sin(\theta)x^2 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

where the "plus" ("minus") denotes left- (right-)translation.

We compare these to the diffeomorphism induced by the SO(4) rotation

$$x \rightarrow \exp(\mp i2\theta S_{\pm}^1) x = \exp(\mp i\theta J^1) \exp(-i\theta K^1) x \quad (2.3.8)$$

The first transformation  $[\exp(-i\theta K^1) x]$  rotates  $x$  in the  $x^0 - x^1$  plane, so that

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow \cos(\theta)x^0 - \sin(\theta)x^1 \\ x^1 &\rightarrow \sin(\theta)x^0 + \cos(\theta)x^1 \end{aligned}$$

The second transformation rotates in the  $x^2 - x^3$  plane,

$$\begin{aligned} x^2 &\rightarrow \cos(\theta)x^2 \mp \sin(\theta)x^3 \\ x^3 &\rightarrow \pm \sin(\theta)x^2 + \cos(\theta)x^3 \end{aligned}$$

so that the combination gives exactly Eq. (2.3.7). Q.E.D.

Therefore, we have shown that the so(4) generators that implement symmetry transformations on the three-sphere also implement left and right SU(2)  $\otimes$  SU(2) group translations. The generators (Killing vector fields)  $S_{\pm}^a$  thus form two mutually commuting sets of differential operators that can be used to implement group map transformations across the group manifold. These conclusions generalize to any Lie group  $G$ : there must exist two sets of Killing vector fields that satisfy the associated Lie algebra, but mutually intercommute. Group map transformations are implemented by "exponentiating" linear combinations of these Killing fields.

Finally, we note that the above manipulations have swept some technicalities under the rug. The coordinates that we are using on the group manifold are  $x^{1,2,3}$ ;  $x^0 = \pm\sqrt{1 - x^j x^j}$  is constrained. Therefore the transformations in Eq. (2.3.7) are actually nonlinear transformations on these coordinates. A more useful view is to think of  $x^{1,2,3}$  as scalar fields defined over the manifold. The explicit form of the differential operators  $\{K^a, J^b\}$  ( $a, b \in \{1, 2, 3\}$ ) expressed solely in terms of  $x^{1,2,3}$  will be derived in homework. Using these, one can check that Eq. (2.3.8) does indeed reproduce Eq. (2.3.7).

---

<sup>2</sup> As we will show in modules 2 A and 6, the generators of SO( $n$ ) in the defining  $n$ -vector representation are in one-to-one correspondence with the set of independent, Hermitian antisymmetric  $n \times n$  matrices. There are  $n(n-1)/2$  of these.

### 8.3.2 SU( $n$ ), SO( $n$ ), and Sp( $2n$ ) Lie groups

Here we introduce unitary, orthogonal, and symplectic Lie groups via their defining representations. This is a brief "first pass" to acquaint the reader, not a systematic description of these classical Lie groups or their representations. We will return to this subject after developing roots and weights.

#### 2A.1 Unitary U( $n$ ) and SU( $n$ )

Consider an  $n$ -component complex vector  $|\psi\rangle \rightarrow [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n]^\top$ . Here  $\{\alpha_i\} \in \mathbb{C}$  are the complex components expressed in some basis, and T denotes the matrix transpose. A generic unitary U( $n$ ) transformation is encoded in the  $n \times n$  matrix  $\hat{U}$  via

$$|\psi\rangle \rightarrow \hat{U}|\psi\rangle$$

where

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}_n \quad (2A.1.1)$$

$\hat{U}$  can be expressed in terms of Hermitian generators  $\{\hat{T}_a\}$  via

$$\hat{U} = \exp\left(-i\theta^a \hat{T}_a\right), \quad \hat{T}_a^\dagger = \hat{T}_a \quad (2A.1.2)$$

where  $\{\theta^a\} \in \mathbb{R}^n$  are the group coordinates. A special unitary SU( $n$ ) transformation has determinant one,<sup>1</sup>

$$\det \hat{U} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Tr} \left[ \hat{T}_a \right] = 0 \quad (2A.1.3)$$

In other words, SU( $n$ ) has group dimension  $d = n^2 - 1$ , since it excludes the  $n \times n$  identity matrix as a generator. A U( $n$ ) transformation can always be written as the product of an abelian U(1) transformation (equivalent to an overall phase) and a non-abelian SU( $n$ ) transformation.

$$\det \hat{A} = \exp(\text{Tr} \log \hat{A})$$

#### 2A.1.1 SU( $n$ ) tensors

We will show later that completely antisymmetric and completely symmetric tensors form different classes of irreducible representations:

$$\begin{aligned} T^{[i_1 i_2 \cdots i_k]} : & \quad \text{completely antisymmetric rank- } k \text{ tensor } (k \leq n); \text{ irreducible rep. of SU}(n) \\ T^{(i_1 i_2 \cdots i_k)} : & \quad \text{completely symmetric rank- } k \text{ tensor; irreducible rep. of SU}(n) \end{aligned} \quad (2A.1.4)$$

Mixed symmetry tensors can be classified and decomposed via Young tableaux, as we will eventually see.

---

<sup>1</sup> Here we have used the formula

## 2A. 2 Orthogonal $O(n)$ and $SO(n)$

Orthogonal  $O(n)$  transformations can be defined as a subgroup of the  $U(n)$  transformations in Eq. (2A.1.1). In addition to being unitary, we restrict

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\top, \quad (\text{real elements}) \quad (2A.2.1)$$

A special orthogonal transformation  $SO(n)$  has determinant one, and excludes reflections, inversion (for  $n = \text{odd}$ ), and products of these with rotations ("improper rotations").

Eq. (2A.2.1) is obviously basis-dependent. We can define orthogonal transformations more generally via

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}_n \quad (2A.2.2a)$$

$$\hat{U}^\top \hat{M} \hat{U} = \hat{M} \quad (2A.2.2b)$$

$$-\hat{M} \hat{T}_a^\top \hat{M} = \hat{T}_a, \quad SO(n) \text{ generators} \quad (2A.2.2c)$$

where the  $n \times n$  matrix  $\hat{M}$  satisfies

$$\hat{M} = \hat{M}^\top = \hat{M}^\dagger; \quad \hat{M}^2 = \hat{1}_n \quad (2A.2.3)$$

Thus, in addition to being unitary, an  $O(n)$  transformation preserves the form of a symmetric "matrix metric"  $\hat{M}$ . The  $SO(n)$  generators  $\{\hat{T}_a\}$  satisfy the generalized antisymmetry requirement, Eq. (2A.2.2c). The group dimension  $d = n(n-1)/2$  for  $SO(n)$ , since this is the number of independent matrices that can be chosen to satisfy this constraint.

In Eq. (2A.2.1),  $\hat{M} = \hat{1}_n$ . The "metric contraction" with two  $n$ -component vectors  $A_i$  and  $B_j$  is in this case the conventional dot product,

$$A^\top \hat{M} B = A^i M_{ij} B^j = A^i \delta_{ij} B^j$$

In analogy with differential geometry, we can think of  $M_{ij}$  (here the Kronecker delta) as a covariant metric used to "lower the index" on  $B^j$ , so that we can form the inner product  $A^i B_i$ . If we make an orthogonal group basis transformation using  $\hat{U}$  that satisfies Eq. (2A.2.1), then obviously the form of  $\hat{M} = \hat{1}_n$  is left invariant. This is not the case if we allow a more general unitary basis transformation, i.e. that generated by a non-orthogonal  $\hat{U}$ :

$$\hat{M} \rightarrow \hat{U}^\top \hat{M} \hat{U} \equiv \hat{M}' \neq \hat{M}$$

- Regardless, the symmetry constraint  $\hat{M}'^\top = \hat{M}'$  is basis independent.

### 2.2.1 $SO(n)$ tensors

Consider a tensor formed from a direct product of defining representation (vector) indices. A necessary but not sufficient condition for a rank-  $k$  tensor  $T$  to transform irreducibly under  $SO(n)$  is that it is traceless under contraction of any pair of indices with  $M_{ij}$ :

$$M_{i_p i_q} T^{i_1 i_2 \dots i_k} = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \dots, k\} (p \neq q) \quad (2A.2.4)$$

Completely antisymmetric tensors  $T^{[i_1 i_2 \dots i_k]} (k \leq n)$  satisfy this condition and indeed correspond to irreducible representations. Traceless completely symmetric tensors  $\tilde{T}^{(i_1 i_2 \dots i_k)} [M_{i_1 i_2} \tilde{T}^{(i_1 i_2 \dots i_k)} = 0]$  form a separate class of irreducible representations.



### 2A. 3 Symplectic Sp( $2n$ )

The set of symplectic Sp( $2n$ ) transformations form a subgroup of the unitary Lie group U( $2n$ ); symplectic transformations and algebras are only defined for even-dimensional spaces. Similar to Eq. (2A.2.2), Sp( $2n$ ) transformations can be defined via

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}_{2n} \quad (2\text{ A.3.1a})$$

$$\hat{U}^\top \hat{\epsilon} \hat{U} = \hat{\epsilon} \quad (2\text{ A.3.1 b})$$

$$\hat{\epsilon} \hat{T}_a^\top \hat{\epsilon} = \hat{T}_a, \quad \text{Sp}(2n) \text{ generators} \quad (2\text{A.3.1c})$$

where the  $2n \times 2n$  matrix  $\hat{\epsilon}$  satisfies

$$\hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon}^\top = -\hat{\epsilon}^\dagger; \quad \hat{\epsilon}^2 = -\hat{1}_n \quad (2\text{ A.3.2})$$

• The symmetry constraint  $\hat{\epsilon}^\top = -\hat{\epsilon}$  is basis independent. Nevertheless, we can always find a basis in which we can view  $\hat{\epsilon}$  as the block  $2n \times 2n$  two-dimensional Levi-Civita tensor [c.f. Eq. (1.5.4)],

$$\hat{\epsilon} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \hat{1}_n \\ -\hat{1}_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2\text{ A.3.3})$$

An alternative notation is to define  $\hat{\sigma}_2 \equiv -i\hat{\epsilon}$ , where we view  $\hat{\sigma}_2$  as the block antisymmetric Pauli matrix

$$\hat{\sigma}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -i\hat{1}_n \\ i\hat{1}_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \hat{U}^\top \hat{\sigma}_2 \hat{U} &= \hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 \hat{T}_a^\top \hat{\sigma}_2 &= \hat{T}_a \end{aligned} \quad (2\text{ A.3.4})$$

The group dimension  $d = n(2n + 1)$  for Sp( $2n$ ), since this is the number of independent matrices that can be chosen to satisfy the constraint. This follows because the symplectic condition is a generalized symmetry constraint on the generators,

$$\hat{\sigma}_2 \hat{T}_a = \left( \hat{\sigma}_2 \hat{T}_a \right)^\top \quad (2\text{ A.3.5})$$

The "antisymmetric metric"  $\hat{\epsilon}$  can be used to "tie up" indices transforming in the defining representation of Sp( $2n$ ). If  $\psi^i$  and  $\phi^j$  are two such representations ( $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ ), then

$$\psi^\top \hat{\epsilon} \phi = \psi^i \epsilon_{ij} \phi^j \quad (2\text{ A.3.6})$$

is invariant. The simplest example applies to spin- 1/2 spinors in su(2) = sp(2), where this contraction gives the usual singlet state [Eq. (1.5.1a)]. Sp( $2n$ ) is different from SU( $n$ ) or SU( $2n$ ), in that one can always form a group invariant by tensoring together two defining rep. indices. Since the defining representation of Sp( $2n$ ) is in some sense a generalization of spin-1/2, we sometimes refer to it as a "spinor" representation.

#### 2A.3.1 Sp( $2n$ ) tensors

Consider a tensor formed from a direct product of defining representation indices. A necessary but not sufficient condition for a rank-  $k$  tensor  $T$  to transform irreducibly under Sp( $2n$ ) is that it is "traceless" under contraction of any pair of indices with  $\epsilon_{ij}$ :

$$\epsilon_{i_p i_q} T^{i_1 i_2 \dots i_k} = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \dots, k\} (p \neq q) \quad (2\text{A.3.7})$$

Completely symmetric tensors  $T^{(i_1 i_2 \dots i_k)}$  satisfy this condition and indeed correspond to irreducible representations. Traceless completely antisymmetric tensors  $\tilde{T}^{[i_1 i_2 \dots i_k]}(k \leq 2n) \left[ \epsilon_{i_1 i_2} \tilde{T}^{[i_1 i_2 \dots i_k]} = 0 \right]$  correspond to a different set of irreducible representations.

### 8.3.3 First example of a higher rank Lie algebra: $\mathfrak{su}(3)$

#### 3.1 Gell-Mann, Cartan-Weyl bases

The Lie group  $SU(3)$  is defined as the group of determinant one unitary transformations that can be applied to a 3-component, complex vector  $V$  (or ket  $|V\rangle$  if you prefer). The standard basis for the  $\mathfrak{su}(3)$  generators in the defining (or "3") representation in the old physics literature is due to Gell-Mann,

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\lambda}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\lambda}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\lambda}_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\lambda}_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, & & \\ \hat{\lambda}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\lambda}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, & & \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

We have displayed these in an unconventional way in order to highlight the following points:

- The first row forms an  $SU(2)$  subalgebra,

$$[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\hat{\lambda}_k, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

In this basis, these generators block embed the  $2 \times 2$  Pauli matrices  $\hat{\sigma}_{1,2,3}$  so as to act only on the first 2 components of  $|V\rangle$ , which transforms as a spin 1/2 under this subalgebra.

- Similarly,  $\hat{\lambda}_6$  and  $\hat{\lambda}_7$  are embeddings of  $\hat{\sigma}_1$  and  $\hat{\sigma}_2$  acting on the bottom two components of  $|V\rangle$ .
- $\hat{\lambda}_4$  and  $\hat{\lambda}_5$  are embeddings of  $\hat{\sigma}_1$  and  $\hat{\sigma}_2$  in the outer off-diagonal elements (3, 1) and (1, 3).

Now, a complete basis for  $3 \times 3$  matrices has 9 elements, but in  $\mathfrak{su}(3)$  we exclude the identity matrix. This is because the latter merely determines the phase of the determinant for any group transformation. Thus although we have 3 different embeddings of  $\hat{\sigma}_1$  and  $\hat{\sigma}_2$  amongst  $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_6, \hat{\lambda}_7, \hat{\lambda}_4, \hat{\lambda}_5\}$ , we have only two diagonal generators  $\hat{\lambda}_3$  and  $\hat{\lambda}_8$ . Note however that we can form the linear combinations

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\lambda}_8 - \frac{1}{2}\hat{\lambda}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\lambda}_8 + \frac{1}{2}\hat{\lambda}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

i.e. embeddings of  $\hat{\sigma}_3$  that give  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebras when combined with  $\{\hat{\lambda}_6, \hat{\lambda}_7\}$  and  $\{\hat{\lambda}_4, \hat{\lambda}_5\}$ , respectively.

We can therefore view the  $\mathfrak{su}(3)$  algebra as a combination of three different  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebras. The key point is that these are not independent, and not only because the needed " $\hat{\sigma}_3$ s" are shared between only two diagonal generators  $\{\hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_8\}$ . The non-trivial structure of  $\mathfrak{su}(3)$  arises because of non-trivial commutation relations between the off-diagonal elements. All representations of  $\mathfrak{su}(2)$  are one-dimensional: there is a highest weight state, and then you use

the lowering operator to move down a chain of descendants until you reach the lowest weight state. In  $\mathfrak{su}(3)$  we will see that we can still always define a highest weight state in any irreducible representation, but that

- Acting with only one  $\mathfrak{su}(2)$  lowering operator accesses only a subset (1D chain) of the states (also called weights) in the representation, and that
- Acting with different  $\mathfrak{su}(2)$ s allows access to all weights. Representations divide into different classes (conjugacy classes), and each conjugacy class forms an infinite regular lattice of weights. Different representations in the same class correspond to different finite subsets of the lattice.

All irreducible representations of a given Lie algebra reside on lattices with a common spatial dimensionality  $r$ ;  $r$  is the rank of the algebra.  $\mathfrak{su}(n)$  has rank  $n - 1$ , so all representations of  $\mathfrak{su}(3)$  can be described by weights residing on lattices in the plane. A major goal of this course is to identify all possible representations of a given algebra, to develop a geometrical picture of any such representation as a section of a weight lattice, and to acquire tools to obtain the explicit weights and weight multiplicities (degeneracies).

As we will discuss in more detail below, the rank  $r$  is equal to the maximum number of independent commuting generators. The set of such generators is the Cartan subalgebra, and the weights of a given representation can be labeled by the mutual eigenvalues of these. In the Gell-Mann basis for  $\mathfrak{su}(3)$  it is spanned by  $\hat{\lambda}_3$  and  $\hat{\lambda}_8$ ,

$$[\hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_8] = 0 \quad (3.1.3)$$

It is useful to switch from the Gell-Mann to the Cartan-Weyl basis.<sup>1</sup> In the latter, we express all off-diagonal generators in terms of raising and lowering operators. We define

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\pm} &\equiv \frac{1}{2} (\hat{\lambda}_1 \pm i\hat{\lambda}_2), & \hat{T}_z &\equiv \frac{1}{2} \hat{\lambda}_3 \\ \hat{U}_{\pm} &\equiv \frac{1}{2} (\hat{\lambda}_6 \pm i\hat{\lambda}_7) \\ \hat{V}_{\pm} &\equiv \frac{1}{2} (\hat{\lambda}_4 \pm i\hat{\lambda}_5) \\ Y &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{\lambda}_8 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

We associate these  $3 \times 3$  matrices to abstract Lie algebra generators  $\{t_+, t_-, u_+, u_-, v_+, v_-, t_z, y\}$ . We can determine the structure constants (non-trivial Lie brackets) for the latter by computing all possible matrix commutators between the elements in Eq. (3.1.4). Via Eq. (3.1.2), the brackets between raising and lowering operators in the three  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebras are given by

$$\begin{aligned} [t_+, t_-] &= 2t_z \\ [u_+, u_-] &= 2 \left( \frac{3}{4} y - \frac{1}{2} t_z \right) \\ [v_+, v_-] &= 2 \left( \frac{3}{4} y + \frac{1}{2} t_z \right) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

The only non-trivial Lie bracket between raising operators is

$$[t_+, u_+] = v_+ \quad (3.1.6)$$

There are several non-trivial brackets between different types of raising and lowering operators,

$$\begin{aligned} [t_+, v_-] &= -u_- \\ [u_+, v_-] &= t_- \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

as well as the "Hermitian conjugate" relations (defined with respect to the matrices of the defining representation)

$$\begin{aligned} [v_+, t_-] &= -u_+ \\ [v_+, u_-] &= t_+ \end{aligned}$$

Finally, the Lie brackets between the Cartan subalgebra elements  $\{t_z, y\}$  and the raising and lowering operators  $\{t_\pm, u_\pm, v_\pm\}$  are given by

$$\begin{aligned} [t_z, t_\pm] &= \pm t_\pm, & [y, t_\pm] &= 0 \\ [t_z, u_\pm] &= \mp \frac{1}{2} u_\pm, & [y, u_\pm] &= \pm u_\pm \\ [t_z, v_\pm] &= \pm \frac{1}{2} v_\pm, & [y, v_\pm] &= \pm v_\pm \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

### Exercise

Verify Eqs. (3.1.6)-(3.1.8).

## 3.2 The adjoint representation

The generators of a Lie algebra transform in the adjoint representation. This should already be familiar from the notion of a basis or symmetry ("similarity") transformation in quantum mechanics, where an  $n \times n$  matrix  $\hat{M}$  transforms according to

$$\hat{M} \rightarrow \hat{M}' \equiv \hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{U}, \quad \hat{U} \equiv \exp(i\alpha^a \hat{T}_a) \quad (3.2.1)$$

Here  $\hat{T}_a$  is an  $n \times n$  Hermitian matrix [i.e., a generator of  $\mathfrak{su}(n)$ ], and the coordinates  $\{\alpha^a \in \mathbb{R}\}$  specify the transformation  $\hat{U}$ . Since the matrices  $\{\hat{T}_a\}$  plus the identity form a basis for  $n \times n$  matrices, Eq. (3.2.1) can equivalently be interpreted as a transformation law for the generators themselves,

$$\begin{aligned} \hat{T}_a \rightarrow \hat{T}'_a &\equiv \exp(-i\alpha^b \hat{T}_b) \hat{T}_a \exp(i\alpha^c \hat{T}_c) \\ &= \hat{T}_a + i\alpha^b [\hat{T}_a, \hat{T}_b] + \frac{1}{2!} (i\alpha^b)(i\alpha^c) [[\hat{T}_a, \hat{T}_b], \hat{T}_c] + \frac{1}{3!} (i\alpha^b)(i\alpha^c)(i\alpha^d) [[[\hat{T}_a, \hat{T}_b], \hat{T}_c], \hat{T}_d] + \dots \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

where we have used the Baker-Campbell-Hausdorff formula on the second line. The latter implies that the similarity transformation can be assumed for the abstract Lie algebra  $L$ , since the corresponding  $t'_a$  is expressed solely in terms of linear combinations of nested Lie brackets.

---

<sup>1</sup> We are following Cahn [1] in terms of our naming scheme for raising and lower operators. Later we will switch to the conventional root vector notation, e.g.  $t_\pm \rightarrow e_{\pm\alpha_1}$ , etc.

Consider the transformation on a basis element  $x_j \in L$ :

$$a_{d_i}(x_j) \equiv [x_i, x_j] = if_{ijk}x_k \quad (3.2.3)$$

where the  $f_{ijk}$  are the structure constants (and the big  $i$  is the square root of minus one). For a Lie algebra with dimension  $d$ , the operator  $a_{d_i}$  can be represented by a  $d \times d$  matrix  $\hat{a}_d$ . The argument  $(x_j)$  on the left-hand side of Eq. (3.2.3) specifies the  $j^{\text{th}}$  column of  $\hat{a}_d$ , while the row entries are the structure constants  $if_{ijk}$  for each  $x_k$ :

$$[\hat{a}_d]_{k,j} = if_{ijk} \quad (3.2.4)$$

We can show that  $a_{d_x}$  satisfies the Lie algebra  $L$ . Assume that  $[x, y] = z$  for some  $x, y, z \in L$ . Then we want to see that  $[a_{d_x}, a_{d_y}] = a_{d_z}$ . Examine the action of these operators on some other element  $w \in L$ :

$$\begin{aligned} [a_{d_x}, a_{d_y}]w &= a_{d_x}[a_{d_y}(w)] - a_{d_y}[a_{d_x}(w)] = [x, [y, w]] - [y, [x, w]] = [x, [y, w]] + [y, [w, x]] \\ &= -[w, [x, y]] = [z, w] = a_{d_z}(w) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

On the second line, we have used the Jacobi identity [Eq. (1.2.1d)].

In the case of  $\mathfrak{su}(3)$ , the adjoint representation is 8-dimensional. We associate each of  $\{t_+, t_-, u_+, u_-, v_+, v_-, t_z, y\}$  to the basis vectors  $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |8\rangle\}$

$$at_+ + bt_- + cu_+ + du_- + ev_+ + fv_- + gt_z + hy \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

Then (e.g.)

$$\hat{a}_{d_{t_+}} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & t_+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & u_- \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_- \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ t_+ & t_- & u_+ & u_- & v_+ & v_- & t_z & y & \end{bmatrix}.$$

### Exercise

Find the matrix representation for  $\hat{a}_{d_-}$ .

#### 3.2.1 Cartan subalgebra $H$ and root $H^*$ spaces

In  $\mathfrak{su}(3)$ , the abelian subalgebra  $t_z$  and  $y$  form a basis for the Cartan subalgebra  $\mathbf{H}$ . Any linear combination of these is an element of  $H$  (a linear vector space). Consider the adjoint representation of a generic Cartan subalgebra element  $at_z + by$ . Eq. (3.1.8) implies that the adjoint representation is purely diagonal,

$$\hat{a}_{dat_z+by} \rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_+ \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_- \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} + b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_+ \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} - b & 0 & 0 & 0 & 0 & u_- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} + b & 0 & 0 & 0 & v_+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} - b & 0 & 0 & v_- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ t_+ & t_- & u_+ & u_- & v_+ & v_- & t_z & y & \end{bmatrix}.$$

This is a defining attribute of the Cartan-Weyl basis for  $L$ : raising and lowering operators are eigenvectors of a generic Cartan subalgebra element  $h \in H$  in the adjoint representation. In  $\mathfrak{su}(3)$ , this forces us to choose  $\{t_\pm, u_\pm, v_\pm\}$  for the basis elements in  $L$  outside of  $H$ . By contrast, there is no unique basis for  $H$ , since while there are three pairs of raising and lowering operators, at most two " $\hat{\sigma}_3$ s" can be chosen independently [see the discussion following Eq. (3.1.2), above].

For any Cartan-Weyl basis element  $x_b \in L$  and a generic element of the Cartan subalgebra  $h \in H$ , we have

$$a_{d_h}(x_b) = \alpha_b(h)x_b \quad (3.2.8)$$

If  $x_b \in H$ , then  $\alpha_b(h) = 0$ . Otherwise  $x_b$  is a raising or lowering operator. In this case,

- The eigenvalue  $\alpha_b$  is called a root, and it is a linear functional on the elements of the Cartan subalgebra.
- The associated element  $x_b \in L$  is called a root vector.

It is helpful to think of the space of roots as being dual to the Cartan subalgebra. More precisely, we define  $H^*$ : The space of linear functionals on  $H$ . This is a dual vector space, elements of which are linear combinations of the roots  $\{\alpha_b\}$ . Eq. (3.2.7) implies that the roots of  $\mathfrak{su}(3)$  can be represented via

$$\begin{aligned} a_{dat_z+by}(t_\pm) &= \alpha_{t_\pm}(at_z + by)t_\pm = \pm at_\pm \\ a_{dat_z+by}(u_\pm) &= \alpha_{u_\pm}(at_z + by)u_\pm = \mp \left(\frac{a}{2} - b\right)u_\pm \\ a_{dat_z+by}(v_\pm) &= \alpha_{v_\pm}(at_z + by)v_\pm = \pm \left(\frac{a}{2} + b\right)v_\pm \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

The number of basis elements in  $L$  is  $d$ , the dimension of the group. The Cartan subalgebra and dual root spaces have dimension  $r$ , where  $r < d$  is the rank. Although  $d = 8$  for  $\mathfrak{su}(3)$ , the rank  $r = 2$  is much smaller. All irreducible representations can be represented by intersecting weight chains drawn in a 2D plane. The presence of three roots suggests that weights arrange into strings oriented along three different directions in the plane, and this naturally suggests weight lattices of triangular symmetry, as we will soon confirm. It is remarkable that the geometry of the root system translates into precise rules that map out all states in a given irreducible representation. In order to see this connection, we must introduce an inner product on the root space  $H^*$ .

### 8.3.4 Killing form, root space inner product, and commutation relations

#### 4.1 Weights in the Cartan-Weyl basis; rank- $r$ bases for $H$ and $H^*$

As introduced in module 3 with the example of  $\mathfrak{su}(3)$ , a Lie algebra  $L$  of dimension  $d$  expressed in the Cartan-Weyl basis consists of raising and lowering operators (root vectors), coupled with a rank  $r < d$  abelian Cartan subalgebra  $H \in L$ . Recall that a root is the

eigenvalue associated to the action of a generic element  $h \in H$  on a root vector in the adjoint representation:

$$a_{d_h}(x_b) = [h, x_b] = \alpha_b(h)x_b \quad (4.1.1)$$

Here  $x_b$  is the root vector and  $\alpha_b$  is the root, a linear functional on  $H$ . The roots belong to the dual vector space  $H^*$ . Both  $H$  and  $H^*$  are linear vector spaces with dimension  $r$ .

A generic element  $\rho$  of  $H^*$  is a linear combination of roots with complex coefficients, referred to as a weight;  $H^*$  is also referred to as the space of weights. The action of  $\rho$  on a generic element  $k \in H$  is determined by its expansion in terms of roots:

$$\rho \equiv \sum_b c_b \alpha_b, \quad \{c_b \in \mathbb{C}\} \quad (4.1.2)$$

$$\rho(h) = \sum_b c_b \alpha_b(h) \quad (4.1.3)$$

Roots refer to specific elements of  $H^*$  that correspond to the root vectors in the Cartan-Weyl basis. The total number of root vectors is  $d - r$ , and the number of these that correspond to "raising operators" (called positive root vectors) is half this value. It will turn out the number of positive root vectors is always greater than the rank  $r$ , except for the case of  $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3) = \mathfrak{sp}(2)$  (for which they are equal).

For example, in  $\mathfrak{su}(3)$  we have three positive root vectors  $\{t_+, u_+, v_+\}$ ;  $r = 2$  and so  $d = 3 + 3 + 2 = 8$ . A generic Lie group transformation requires the specification of  $d$  parameters; in this sense all elements of  $L$  (including all positive root vectors) are independent. However, since the number of positive roots is greater than  $r$ , it is clear that the roots form an overcomplete basis in  $H^*$  (thinking of the latter as a linear vector space). If we view the positive roots as "vectors with arrows" pointing somewhere in the  $r$ -dimensional  $H^*$ , then overcompleteness means that we cannot choose all vectors to be "orthogonal."

Our goal is to bring out the structure of  $H^*$  in terms of root geometry. A key tool is the definition of a weight inner product. To define an inner product on  $H^*$ , we must first link it with  $H$ .

## 4.2 The Killing form

The first step is to define the Killing form, which is the trace normalization for generators in the adjoint representation. Let  $L$  be a Lie algebra and  $a, b \in L$ . Then

$$(a, b) \equiv \text{Tr} [\hat{a}_d \hat{a}_{d_b}], \quad \text{Killing form } L \times L \rightarrow \mathbb{C} \quad (4.2.1)$$

The Killing form itself is not a conventional inner product, since there is no requirement that  $(a, a)$  be positive definite.<sup>1</sup> If we assume that all  $\{\hat{a}_d\}$  are Hermitian, then  $(a, a) \geq 0$ , but we are not required to make this choice.

How do we evaluate the Killing form?

- We could construct the explicit matrix representations for all adjoint operators in some chosen basis for the Lie algebra,  $\{x_i\} \in L \Rightarrow \{\hat{a}_d\}$ , and then compute the traces of all bilinear products.

- An easier way is to note that  $a_{da} a_{db}(x) = [a, [b, x]]$ . Applied to basis elements  $\{x_i\}$ ,

$$a_{d_i} a_{d_j}(x_k) = [x_i, [x_j, x_k]] = \sum_l c_{ijk}^{(l)} x_l \quad (4.2.2)$$

where  $c_{ijk}^{(k)}$  is the contribution to the trace from the  $k^{\text{th}}$  basis element. (Recall that in the adjoint representation, e.g.

$$x_1 \rightarrow |x_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1 \rightarrow \langle x_1| = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

acting in the trace on the right and left, respectively.)

#### 4.2.1 su(3)

Using the commutation algebra in Eqs. (3.1.5)-(3.1.8) and Eq. (4.2.2), we can determine all non-vanishing Killing forms in the Cartan-Weyl basis for su(3). For example,

$$\begin{aligned} [t_z, [t_z, t_\pm]] &= t_\pm \Rightarrow c_{t_z t_z t_\pm}^{(t_\pm)} = 1 \\ [t_z, [t_z, u_\pm]] &= \frac{1}{4} u_\pm \Rightarrow c_{t_z t_z u_\pm}^{(u_\pm)} = \frac{1}{4} \\ [t_z, [t_z, v_\pm]] &= \frac{1}{4} v_\pm \Rightarrow c_{t_z t_z v_\pm}^{(v_\pm)} = \frac{1}{4} \\ [t_z, [t_z, t_z]] &= 0 \Rightarrow c_{t_z t_z t_z}^{(t_z)} = 0 \\ [t_z, [t_z, y]] &= 0 \Rightarrow c_{t_z t_z y}^{(y)} = 0 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

so that  $(t_z, t_z) = 3$ . The non-vanishing Killing forms in su(3) are

$$\begin{aligned} (t_z, t_z) &= 3 \\ (y, y) &= 4 \\ (t_+, t_-) &= 6 \\ (u_+, u_-) &= 6 \\ (v_+, v_-) &= 6 \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

#### Exercise

Verify Eq. (4.2.4).

The Killing forms in Eq. (4.2.4) do not give any hint of the relationship between the different su(2)s, since products involving different "species" of root vectors vanish, e.g.  $(t_{\sigma_1}, u_{\sigma_2}) = 0$  for  $\sigma_{1,2} \in \{+, -\}$ . This result generalizes to all Lie algebras (see below).

#### 4.3 Root representation in the Cartan subalgebra

Now we establish a link between the Cartan subalgebra  $H$  and the dual root space  $H^*$ :

Lemma: For any weight  $\rho$  in  $H^*$ , there exists a unique element  $h_\rho$  in  $H$ , such that for every  $k \in H$ ,

$$\rho(k) = (h_\rho, k) \tag{4.3.1}$$

In words, we can identify an element of the Cartan subalgebra  $h_\rho \in H$ , such that the action of the weight  $\rho \in H^*$  on any element  $k \in H$  is given by the Killing form of  $h_\rho$  and  $k$ . Thus it relates the action of a dual vector  $\rho$  on a vector  $k$  to the Killing form between two vectors  $h_\rho$  and  $k$ . This Lemma is only guaranteed to work for semi-simple Lie algebras, defined precisely

---

<sup>1</sup> Note that Eq. (4.2.1) involves a product of  $\widehat{ad}_a$  and  $\widehat{ad}_b$ , not  $(\widehat{ad}_a)^\dagger$  and  $\widehat{ad}_b$ .



in Sec. 4.3.2, below. The requirement is that the "overlap matrix"  $(h_i, h_j)$  for any basis in  $H$  is invertible, and this is true for semi-simple algebras.

- $\mathfrak{su}(3)$  example: From Eq. (3.2.9), the positive roots can be taken to be

$$\begin{aligned}\alpha_1(at_z + by) &= a \\ \alpha_2(at_z + by) &= -\frac{a}{2} + b \\ \alpha_3(at_z + by) &= \frac{a}{2} + b\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

where we have relabeled  $\{t_+, u_+, v_+\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ . Define

$$h_{\alpha_i} \equiv c_i t_z + d_i y\tag{4.3.3}$$

Eq. (4.2.4) implies that

$$(h_{\alpha_i}, t_z) = 3c_i, \quad (h_{\alpha_i}, y) = 4d_i\tag{4.3.4}$$

Asserting that Eq. (4.3.1) reproduces Eq. (4.3.2) for  $\rho = \alpha_{1,2,3}$ , we arrive at

$$h_{\alpha_1} = \frac{1}{3}t_z, \quad h_{\alpha_2} = -\frac{1}{6}t_z + \frac{1}{4}y, \quad h_{\alpha_3} = \frac{1}{6}t_z + \frac{1}{4}y\tag{4.3.5}$$

#### 4.3.1 Weight inner products and root geometry

Define  $H_0^*$  to be the space of weights formed from real linear combinations of the roots. This is a subspace of  $H^*$  (root combinations with complex coefficients). Assume that  $\alpha$  and  $\beta$  are weights in  $H_0^*$ . Let  $h_{\alpha, \beta}$  be the associated elements in  $H$ . We define the weight inner product between  $\alpha$  and  $\beta$  via

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (h_\alpha, h_\beta), \quad \text{weight inner product } H_0^* \times H_0^* \rightarrow \mathbb{R}\tag{4.3.6}$$

Why do we introduce an inner product structure only for elements of  $H_0^*$ ?

- We want something that gives us geometrical information about the overcomplete basis of roots; as demonstrated in Eq. (4.2.4), the Killing form of the Cartan-Weyl basis elements does not tell us this.
- There are no "naturally distinguished" elements of the Cartan subalgebra  $H$ .

The roots are eigenvalue functionals that are independent of the basis chosen for  $H$ . Eq. (4.3.1) translates these into special elements of  $H$ , and the inner product Eq. (4.3.6) extracts the geometrical root data. Eq. (4.3.6) will enable us to map out irreducible representations by calculating the depth of weight chains generated by lowering with a given root vector (module 5).

In  $\mathfrak{su}(3)$ , Eqs. (4.2.4) and (4.3.5) give

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle &= \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle = 1/3 \\ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= -1/6 \\ \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle &= \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = 1/6\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

These results imply that we can visualize  $\alpha_{1,2,3}$  as three equal-length vectors in the plane, with  $\pi/3$  angles between  $\alpha_{1,2}$  and  $\alpha_3$ , and a  $2\pi/3$  angle between  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ . Incorporating the negative roots, we obtain the picture in Fig. 4.1.

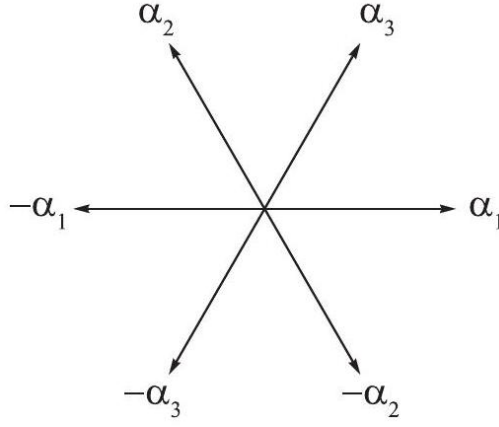


Figure 4.1: Root geometry in  $\mathfrak{su}(3)$ , as implied by the weight inner products in Eq. (4.3.7).

### 4.3.2 Some definitions

- A subalgebra is a subspace  $M$  of  $L$  that is closed under the Lie bracket.
- An ideal is a special subalgebra  $J$  of  $L$ , such that if  $x \in J$  and  $y \in L$ , then  $[x, y] \in J$ .

Example: The generators of spatial translations in a Hilbert space (momentum operators)  $[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0$  form an abelian, ideal subalgebra of the 3D Euclidean "Poincaré" algebra. The latter consists of translation and rotation generators,

$$\begin{aligned} [\hat{P}_i, \hat{P}_j] &= 0 \\ [\hat{L}_i, \hat{P}_j] &= i\epsilon_{ijk}\hat{P}_k \\ [\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= i\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Example: consider  $u(n) = u(1) \otimes \mathfrak{su}(n)$ , the generators of  $n \times n$  unitary matrices. The  $u(1)$  generator  $\hat{1}_n$  is an abelian ideal. The set of traceless Hermitian  $\mathfrak{su}(n)$  generators is a non-abelian ideal.

- A simple Lie algebra has no ideals except the full algebra and 0 (null).
- A semi-simple Lie algebra has no abelian ideals. Thus neither the Poincaré nor  $u(n)$  algebras are semi-simple, while  $\mathfrak{su}(3)$  is simple. In general, a semi-simple algebra is a sum of simple non-abelian ideals.

## 4.4 The structure of simple Lie algebras

### 4.4.1 Root facts

Our exploration of  $\mathfrak{su}(3)$  in module 3 suggested that a Lie algebra  $L$  of dimension  $d$  can be partitioned in the Cartan-Weyl basis via the Lie bracket relations with a generic Cartan subalgebra element:

- Cartan subalgebra  $H$  basis. This consists of  $r$  independent elements  $\{h_i\}, i \in \{1, \dots, r\}$ ;  $r$  is the rank. The  $\{h_i\}$  mutually commute,

$$a_{d_h}(h_j) = [h_i, h_j] = 0 \quad (4.4.1)$$

- Root vectors. A root vector  $e_\alpha$  satisfies [Eq. (4.1.1)]

$$a_{d_h}(e_\alpha) = [h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha, \quad h \in H \quad (4.4.2)$$

where  $\alpha \in H^*$  is a root (a functional on the Cartan subalgebra  $H$ ). Eq. (4.4.2) is the analog of the  $\mathfrak{su}(2)$  equation  $[s^z, s^\pm] = (\pm 1)s^\pm$ , where  $s^z$  is the sole Cartan subalgebra element, and  $s^\pm$  denote positive and negative root vectors, i.e. raising and lowering operators when acting on some representation.

In the case of  $\mathfrak{su}(2)$ , raising and lowering is by one unit. For a generic Lie algebra, Eq. (4.4.2) implies that one moves up and down weight chains via increments determined by the roots.

We assert the following facts about roots, some of which we will prove later:

- If  $\alpha (e_\alpha)$  is a root (root vector), then  $-\alpha (e_{-\alpha})$  is also a root (root vector). Because  $\alpha$  is a functional and not a number, there is no unique way to define "raising" and "lowering," but we can always make some choice to regard (e.g.)  $e_\alpha (e_{-\alpha})$  as the raising (lowering) operator in a string of weights appearing in some irreducible representation. In  $\mathfrak{su}(3)$ , we found three different root vector pairs  $\{t_\pm\}, \{u_\pm\}, \{v_\pm\}$ , c.f. Eq. (3.1.8); the associated roots were respectively relabeled  $\pm\alpha_{1,2,3}$  in Eqs. (4.3.2) and (4.3.7).

- Each root  $\alpha_i$  uniquely corresponds to a particular root vector  $e_{\alpha_i}$ . In other words, the roots are non-degenerate.

- If  $\alpha$  is a root, then  $2\alpha$  is not a root. It means that  $\alpha$  and  $-\alpha$  are highest and lowest weight states in  $L$  itself, if we act on either with  $e_{\pm\alpha}$ . Along with a middle element with weight 0 (corresponding to some particular  $h_\alpha \in H$ , defined below), the weight chain  $\{-\alpha, 0, \alpha\}$  is the adjoint representation for the  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebra associated to the roots  $\pm\alpha$ .

In pictures, this means that each pair of roots  $\pm\alpha$  are "spokes" sticking out in opposite directions from a central hub that corresponds to the Cartan subalgebra. The 2D (rank  $r = 2$ ) example of  $\mathfrak{su}(3)$  is shown in Fig. 4.1. Each  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebra  $\{e_\alpha, e_{-\alpha}, h_\alpha\}$ , allows motion through the hub along the spokes  $\pm\alpha$ . What is missing from Fig. 4.1 are the allowed moves between spokes corresponding to different roots.

#### 4.4.2 Construction of the Cartan subalgebra

The Cartan subalgebra is constructed by finding the regular element of a Lie algebra  $L$ .  $h \in L$  is regular if  $\widehat{a}_d h$  has as few zero eigenvalues as possible. In  $\mathfrak{su}(3)$ , Eq. (3.2.7) implies that  $t_z$  is the regular element, since  $\widehat{a}_{d_z}$  has only two zero eigenvalues, while  $y$  has four.

The Cartan subalgebra  $H$  is then defined as the maximal abelian (commuting) subalgebra of  $L$  containing the regular element. In  $\mathfrak{su}(3)$ , we add  $y$  [Eq. (3.2.7)] to get a rank-2 subalgebra.

#### 4.4.3 Commutation relations

The above establishes Lie bracket relations between elements of  $H$  with themselves and with root vectors. What remains to be determined are brackets between two root vectors  $e_\alpha$  and  $e_\beta$ . Assume  $h \in H$  and consider

$$\begin{aligned} a_{d_h}([e_\alpha, e_\beta]) &= [h, [e_\alpha, e_\beta]] \\ &= -[e_\alpha, [e_\beta, h]] - [e_\beta, [h, e_\alpha]] = [\alpha(h) + \beta(h)][e_\alpha, e_\beta] \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

where we have used the Jacobi identity [Eq. (1.2.1d)]. Eq. (4.4.3) applies for any  $h$  in the Cartan subalgebra. Then one of the following must be true:

$$\alpha + \beta = 0, \quad [e_\alpha, e_\beta] \neq 0, \quad \Rightarrow \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] \in H, \quad (4.4.4a)$$

$$\alpha + \beta \neq 0, [e_\alpha, e_\beta] = 0, \quad \text{or} \quad (4.4.4b)$$

$$\alpha + \beta \neq 0, \quad [e_\alpha, e_\beta] \propto e_{\alpha+\beta} \quad (4.4.4c)$$

The first case corresponds to  $[s^+, s^-] = 2s^z; [e_\alpha, e_{-\alpha}] \in H$  can be regarded as the analog of  $s^z$  for this  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebra. The second and third cases prove that a Lie bracket between two root vectors  $e_\alpha$  and  $e_\beta$  either vanishes, or gives another root vector with root  $\alpha + \beta$ . If all brackets between root vectors with  $\alpha + \beta \neq 0$  were to vanish, we would simply have a collection of independent  $\mathfrak{su}(2)$ s. In a simple Lie algebra of rank  $r > 1$ , there are nonvanishing brackets.

We can refine Eq. (4.4.4a) and make a connection to Eqs. (4.3.1) and (4.3.6), which involve root representation in  $H$ . First we prove two lemmas.

Lemma:

$$(e_\alpha, e_\beta) = 0 \text{ unless } \alpha + \beta = 0 \quad (4.4.5)$$

Proof: Evaluate the Killing form in the Cartan-Weyl basis, so that the trace is over root vectors and  $r$  Cartan subalgebra basis elements. For  $h_i \in H$ ,

$$\begin{aligned} a_{d_{e_\alpha}} a_{d_{e_\beta}} (h_i) &= [e_\alpha, [e_\beta, h_i]] = -\beta(h_i) [e_\alpha, e_\beta] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{if } [e_\alpha, e_\beta] = 0 \\ -\beta(h_i) \mathcal{C}_{\alpha, \beta} e_{\alpha+\beta}, & \text{if } [e_\alpha, e_\beta] \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

where  $\mathcal{C}_{\alpha, \beta}$  is a numerical constant. The only possible contribution to the trace (Killing form) must have  $e_{\alpha+\beta} \in H$ , i.e.  $\alpha + \beta = 0$  [ c.f. Eq. (4.2.2)]. For a root vector  $e_\gamma$ ,

$$a_{d_e} a_{d_{e_\beta}} (e_\gamma) = [e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]] = \mathcal{C}_{\beta, \gamma} [e_\alpha, e_{\beta+\gamma}] = \mathcal{C}_{\beta, \gamma} \mathcal{C}_{\alpha, \beta+\gamma} e_{\alpha+\beta+\gamma}$$

Again, the only contribution to the trace must have  $\alpha + \beta = 0$ . Q.E.D.

Lemma: Invariance of the Killing form

$$(a, [b, c]) = ([a, b], c) \quad (4.4.8)$$

Proof:

$$(a, [b, c]) = \text{Tr} [\hat{a}_{d_a} [\hat{a}_{d_b}, \hat{a}_{d_c}]] = \text{Tr} [[\hat{a}_{d_a}, \hat{a}_{d_b}] \hat{a}_{d_c}] = ([a, b], c)$$

Now consider

$$\begin{aligned} ([e_\alpha, e_{-\alpha}], h) &= (e_\alpha, [e_{-\alpha}, h]) = \alpha(h) (e_\alpha, e_{-\alpha}) \\ \Rightarrow \alpha(h) &= \left( \frac{[e_\alpha, e_{-\alpha}]}{(e_\alpha, e_{-\alpha})}, h \right) \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Eq. (4.3.1) then implies that the root  $\alpha$  is represented in the Cartan subalgebra by the element

$$h_\alpha \equiv \frac{[e_\alpha, e_{-\alpha}]}{(e_\alpha, e_{-\alpha})}, \quad \text{root } \alpha \text{ representation in the Cartan subalgebra } H \quad (4.4.10)$$

The number of positive roots is always larger than the rank  $r$  for  $r > 1$ , so that the set  $\{h_\alpha\}$  forms an overcomplete basis for the Cartan subalgebra.

We apply Eq. (4.4.10) to  $\mathfrak{su}(3)$ , relabeling  $\{t_\pm, u_\pm, v_\pm\} \rightarrow \{e_{\pm\alpha_1}, e_{\pm\alpha_2}, e_{\pm\alpha_3}\}$ . Eqs. (3.1.5) and (4.2.4) give

$$h_{\alpha_1} = \frac{t_z}{3}, \quad h_{\alpha_2} = \frac{3y - 2t_z}{12}, \quad h_{\alpha_3} = \frac{3y + 2t_z}{12}$$

identical to Eq. (4.3.5).

We can summarize the Lie brackets for all elements of a Lie algebra  $L$  in the Cartan-Weyl basis as follows. Let  $\Sigma \equiv L - H$  denote the root vector space. Then we can write

$$[h_i, h_j] = 0, \quad h_{i,j} \in H \quad (4.4.11a)$$

$$[h_i, e_\alpha] = \alpha(h_i) e_\alpha, \quad h_i \in H, \quad e_\alpha \in \Sigma \quad (4.4.11b)$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} (e_\alpha, e_{-\alpha}) h_\alpha, & \alpha + \beta = 0 \\ N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta}, & \alpha + \beta \neq 0, e_{\alpha+\beta} \in \Sigma \\ 0, & \alpha + \beta \neq 0, e_{\alpha+\beta} \notin \Sigma \end{cases} \quad (4.4.11c)$$

The structure constants  $\{N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}\}$  are the nontrivial data that connect different  $\mathfrak{su}(2)$ s in  $L$ . In module 5 we will prove that  $N_{\alpha,\beta} \neq 0$  if  $\alpha + \beta$  is a root.

### 8.3.5 Roots and weights, $\mathfrak{su}(3)$

#### 5.1 Representations I

##### 5.1.1 Matrix representations and weight vectors

In module 4, we discussed how a general Lie algebra  $L$  expressed in the Cartan-Weyl basis is a complex of interwoven  $\mathfrak{su}(2)$ s, formed from raising and lowering operators (root vectors  $\{e_\alpha, e_{-\alpha}\}$ ) and a basis  $\{h_i\} \in H$  of mutually commuting Cartan subalgebra elements,  $[h_i, h_j] = 0$ . The number of independent basis elements for  $H$  is the rank  $r$ , and the group dimension  $d = r + 2 \times (\# \text{ of positive root vectors})$ .

For each pair of raising and lowering operators, we can construct a unique element  $h_\alpha \in H$  that serves as the " $S_z$ " for that particular  $\mathfrak{su}(2)$ : [c.f. Eq. (4.4.11)]

$$[h_\alpha, e_\alpha] = \alpha(h_\alpha) e_\alpha = \langle \alpha, \alpha \rangle e_\alpha \quad (5.1.1a)$$

$$[h_\alpha, e_{-\alpha}] = -\alpha(h_\alpha) e_{-\alpha} = -\langle \alpha, \alpha \rangle e_{-\alpha} \quad (5.1.1b)$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = (e_\alpha, e_{-\alpha}) h_\alpha \quad (5.1.1c)$$

Here  $(e_\alpha, e_{-\alpha})$  is the Killing form for this pair of raising and lowering operators; the last equation defines the  $H$  element  $h_\alpha$ . The root  $\alpha = \alpha(h)$  belongs to the space of weights  $H^*$ , and is a functional on a generic Cartan subalgebra element  $h \in H$ . When we choose  $h = h_\alpha$ , the resulting eigenvalue is the weight space inner product [Eq. (4.3.6)]

$$\alpha(h_\alpha) = (h_\alpha, h_\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle, \quad H_0^* \times H_0^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Recall that while we can construct an  $h_\alpha$  for every root vector pair  $\{e_\alpha, e_{-\alpha}\}$  in  $L$ , this set is overcomplete [unless  $r = 1, \mathfrak{su}(2)$ ]. In the Cartan subalgebra, it is important not to confuse the overcomplete  $\{h_\alpha\}$  with the basis  $\{h_i\}$ ; a prescription for constructing the latter will be described later.

Now, consider an  $N$ -dimensional irreducible unitary matrix representation of  $L$ , so that

$$a \in L \rightarrow \hat{A}, \quad \text{an } N \times N \text{ matrix.}$$

The Cartan subalgebra elements map to

$$[h, h'] \rightarrow [\hat{H}, \hat{H}'] = 0 \quad (5.1.2)$$

In a unitary representation, we can without loss of generality (WLoG) assume that each basis element  $h_i \in H (1 \leq i \leq r)$  corresponds to a Hermitian matrix  $\hat{H}_i = \hat{H}_i^\dagger$ . Then there is

a basis for vectors in the representation that diagonalizes the mutually commuting  $\{\hat{H}_i\}$ . An element of this basis is a weight vector  $\phi^a$ , where  $0 \leq a \leq N - 1$  ( $N$  is the dimension of the representation). In the eigenbasis of  $\{H_i\}$ , we can take (e.g.)

$$\phi^0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi^1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad \phi^{N-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

A weight vector satisfies

$$\hat{H}_i \phi^a = \lambda_i^a \phi^a, \quad 1 \leq i \leq r \quad (5.1.4)$$

where the eigenvalue  $\lambda_i^a \in \mathbb{R}$ . Thus each weight vector is specified by the set of eigenvalues obtained by acting with any of the  $\{\hat{H}_i\}$ . This is similar to quantum mechanics, where one seeks to identify a physical state by labeling it via a complete set of commuting observables [2], e.g. mutually diagonalizable Hermitian matrices. Even in a given irreducible representation, however, a weight vector labeled by  $\{\lambda_i^a\}$  is not necessarily unique. Later we will show that there can be degeneracies; this is different from the representation theory of  $\mathfrak{su}(2)$ .

Instead of employing the explicit  $\{\lambda_i^a\}$  obtained in some particular basis, we recast Eq. (5.1.4) for a generic Cartan subalgebra element  $h \rightarrow \hat{H}$ :

$$\hat{H} \phi^a = M^a(h) \phi^a \quad (5.1.5)$$

where the functional  $M^a(h)$  is called the weight, and resides in the same space  $H^*$  as the roots.

•  $\mathfrak{su}(3)$  example: A basis for  $H$  in the defining representation is given by [Eqs. (3.1.4) and (3.1.1)]

$$\hat{T}_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (5.1.6)$$

In this basis, we denote the weight vectors as

$$\phi^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.1.7)$$

Then

$$\begin{aligned} M^A(at_z + by) &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b &= \frac{2}{3}\alpha_{t_+} + \frac{1}{3}\alpha_{u_+} \\ M^B(at_z + by) &= -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b &= -\frac{1}{3}\alpha_{t_+} + \frac{1}{3}\alpha_{u_+} \\ M^C(at_z + by) &= -\frac{2}{3}b &= -\frac{1}{3}\alpha_{t_+} - \frac{2}{3}\alpha_{u_+} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

On the right-hand-sides, we have re-expressed the weights in terms of two of the positive roots using Eq. (3.2.9).

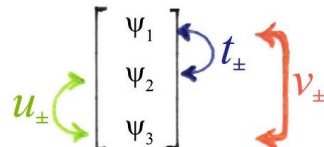


Figure 5.1: Action of weight vectors in the defining representation of  $\mathfrak{su}(3)$ .

### 5.1.2 Raising and lowering; chains of weights

Assume that  $\phi^a$  is a weight vector with weight  $M^a$ , Eq. (5.1.5). Then

$$\hat{H}\hat{E}_{\pm\alpha}\phi^a = \left[\hat{E}_{\pm\alpha}\hat{H} \pm \alpha(h)\hat{E}_{\pm\alpha}\right]\phi^a = [M^a(h) \pm \alpha(h)]\hat{E}_{\pm\alpha}\phi^a \quad (5.1.9)$$

so that  $\hat{E}_{\pm\alpha}\phi^a$ , if non-zero, is a weight vector with weight  $(M^a \pm \alpha)$ .

This suggests the following picture: all weights belong to weight strings or chains, consisting of 1 or more weights separated by root intervals. These chains can be pictured as parallel 1D sublattices embedded in an  $r$ -dimensional Euclidean space. Acting with different pairs of root vectors, we translate through an  $r$ -dimensional weight lattice. Since the number of positive root vectors is greater than  $r$  for any  $r > 1$ , different sets of parallel sublattices generated by different roots cannot all be mutually orthogonal.

We consider two examples from  $\mathfrak{su}(3)$ .

- Defining ("3") representation: The weights are given by Eq. (5.1.8), associated to the weight vectors in Eq. (5.1.7). The root vector operators have the matrix representations [Eqs. (3.1.4) and (3.1.1)]

$$\{\hat{T}_+, \hat{T}_-\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \{\hat{U}_+, \hat{U}_-\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \{\hat{V}_+, \hat{V}_-\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.1.10)$$

The action of these on a vector expressed in the weight vector basis is shown in Fig. 5.1. Consistent with this picture, Eq. (5.1.8) implies that

$$M^A = M^B + \alpha_{t_+}, \quad M^B = M^C + \alpha_{u_+} \quad (5.1.11)$$

Fig. 5.1 also suggests that

$$M^A = M^C + \alpha_{v_+} \quad (5.1.12)$$

Eqs. (5.1.11) and (5.1.12) then imply that

$$\alpha_{v_+} = \alpha_{t_+} + \alpha_{u_+} \quad (5.1.13)$$

This is indeed correct, see Eq. (3.2.9). The defining representation can therefore be depicted as the triangle shown in Fig. 5.2.

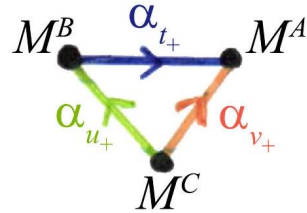


Figure 5.2: The defining representation of  $\mathfrak{su}(3)$ .

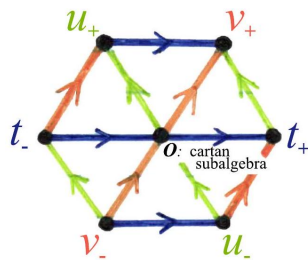


Figure 5.3: The adjoint representation of  $\mathfrak{su}(3)$ .

• Adjoint representation: This is the representation in which the roots  $\{t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}\}$  themselves are weights, along with a 2D basis for the Cartan subalgebra. Recall the commutation relations from module 3 between root vectors of different  $\mathfrak{su}(2)$ s, Eqs. (3.1.6) and (3.1.7):

$$\begin{aligned} a_{dt_+}(u_+) &= [t_+, u_+] = v_+ \\ a_{dt_+}(v_-) &= [t_+, v_-] = -u_- \\ a_{du_+}(v_-) &= [u_+, v_-] = t_- \\ a_{dv_+}(t_-) &= [v_+, t_-] = -u_+ \\ a_{dv_+}(u_-) &= [v_+, u_-] = t_+ \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Previously we found that the root scalar product applied to  $\mathfrak{su}(3)$  implied the root geometry shown in Fig. 4.1 (where  $\alpha_{\pm 1,2,3} \equiv \{\alpha_{t_{\pm}}, \alpha_{u_{\pm}}, \alpha_{v_{\pm}}\}$ ). Using the same color conventions as we used for  $t_{\pm}$  (blue),  $u_{\pm}$  (green), and  $v_{\pm}$  (orange) "moves" in the defining representation [Fig. 5.2], Fig. 4.1 and Eq. (5.1.14) imply that the adjoint representation can be depicted as in Fig. 5.3. Note the following two points:

• The coefficients  $(\pm 1)$  in Eq. (5.1.14) do not enter this geometric description of the representation. Only the "fusion rule" is important, i.e. whether the Lie bracket vanishes or not, and if not which root vector appears on the right-hand-side.

• Given the root geometry from Fig. 4.1, Eq. (5.1.14) and Fig. 5.3 suggest that if  $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$  are all roots, then  $[e_{\alpha}, e_{\beta}] =$

$N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta}$  and  $N_{\alpha,\beta} \neq 0$ . In other words, if  $\alpha + \beta$  is a root, then we can access it by acting with  $a_{de_{\alpha}}$  on  $\beta$  or with  $a_{de_{\beta}}$  on  $\alpha$ .

We might say that every possible move is allowed in the root system. You will prove this in general in a homework problem.

### 5.1.3 The Master Weight Depth Formula (MWDF)

Consider a highest weight vector  $\phi^0$  with weight  $M^*$ , in a weight string generated by acting with some particular root vectors  $e_{\pm\alpha}$ . Assume that the weight string terminates after lowering  $q$  times with  $\hat{E}_{-\alpha}$ , i.e. the weights are  $\{M^*, M^* - \alpha, M^* - 2\alpha, \dots, M^* - q\alpha\}$ . We will show that the depth  $q$  can be related to the inner product of the weight  $M^*$  with the root  $\alpha$ .

Then

$$\hat{H}\phi^0 = M^*(h)\phi^0, \quad h \in H \quad (5.1.15a)$$

$$\hat{E}_{\alpha}\phi^0 = 0 \quad (5.1.15b)$$

$$\hat{H}(\hat{E}_{-\alpha})^j \phi^0 = [M^*(h) - j\alpha(h)](\hat{E}_{-\alpha})^j \phi^0, \quad 0 \leq j \leq q \quad (5.1.15c)$$

$$(\hat{E}_{-\alpha})^{q+1} \phi^0 = 0 \quad (5.1.15d)$$

Assume for simplicity that a normalization for the root vector operators is chosen such that

$$(e_{\alpha}, e_{-\alpha}) = 1 \quad \Rightarrow \quad [e_{\alpha}, e_{-\alpha}] = h_{\alpha}$$

This choice is always possible, and is obviously independent of the root normalization. Denote



$$\phi^j \equiv \left( \hat{E}_{-\alpha} \right)^j \phi^0, \quad \hat{E}_{\alpha} \phi^j \equiv r_j \phi^{j-1} \quad (5.1.16)$$

Then

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\alpha} \phi^k &= r_k \phi^{k-1} = \hat{E}_{\alpha} \hat{E}_{-\alpha} \phi^{k-1} = \left( \hat{E}_{-\alpha} \hat{E}_{\alpha} + \hat{H}_{\alpha} \right) \phi^{k-1} = \\ &= \{ r_{k-1} + [M^*(h_{\alpha}) - \alpha(h_{\alpha})(k-1)] \} \phi^{k-1} \\ &= [r_{k-1} + \langle M^*, \alpha \rangle - (k-1)\langle \alpha, \alpha \rangle] \phi^{k-1} \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{-\alpha} \phi^k &= \phi^{k+1} = \frac{1}{r_{k+1}} \hat{E}_{-\alpha} \hat{E}_{\alpha} \phi^{k+1} = \frac{1}{r_{k+1}} \left( \hat{E}_{\alpha} \hat{E}_{-\alpha} - \hat{H}_{\alpha} \right) \phi^{k+1} \\ &= \frac{1}{r_{k+1}} \{ r_{k+2} - [M^*(h_{\alpha}) - \alpha(h_{\alpha})(k+1)] \} \phi^{k+1} \\ &= \frac{1}{r_{k+1}} [r_{k+2} - \langle M^*, \alpha \rangle + (k+1)\langle \alpha, \alpha \rangle] \phi^{k+1} \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

so that

$$\begin{aligned} r_k &= r_{k-1} + \langle M^*, \alpha \rangle - (k-1)\langle \alpha, \alpha \rangle \\ &= r_{k+1} - \langle M^*, \alpha \rangle + k\langle \alpha, \alpha \rangle \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

Since  $r_0 = 0$ , we obtain

$$r_k = k \langle M^*, \alpha \rangle - \frac{k(k-1)}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle \quad (5.1.20)$$

On the other hand,

$$\hat{E}_{\alpha} \phi^{q+1} = r_{q+1} \phi^q = 0$$

implies that  $r_{q+1} = 0$ , so that

$$r_q = -\langle M^*, \alpha \rangle + q\langle \alpha, \alpha \rangle \quad (5.1.21)$$

Together Eqs. (5.1.20) and (5.1.21) lead to

$$q = \frac{2 \langle M^*, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad (5.1.22)$$

A more useful formula does not require that we start with the highest weight. Assume that weight  $M$  is somewhere in a string generated by  $\hat{E}_{\alpha}$  (raising) and  $\hat{E}_{-\alpha}$  (lowering) of length  $m+p+1$ , such that there are  $p$  weights ( $m$  weights) above (below)  $M$ . Then  $q = m+p$ , so that

For weight  $M$  in the string of length  $p+1+m$  ( $m, p \geq 0$ ),

$$\{M + p\alpha, M + (p-1)\alpha, \dots, M + \alpha, M, M - \alpha, \dots, M - (m-1)\alpha, M - m\alpha\}$$

$$\begin{aligned} m - p &= \langle M, \alpha^{\vee} \rangle, & \text{Master Weight Depth Formula (MWDF)} \\ \alpha^{\vee} &\equiv \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}, & \text{coroot associated to root } \alpha \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

Eq. (5.1.23) is one of the most important formulae we will derive in this course. We have christened it the "Master Weight Depth Formula" (MWDF); apparently it has no proper appellation. (Georgi [3] refers to it as the "master formula," while others call it the depth equation.)

Since the product of any weight  $M$  and any coroot  $\alpha^\vee$  is always an integer, one says that the coroots are dual to the weights.

### Exercise

Verify that Eq. (5.1.23) holds for  $M = M^A$  in the defining representation of  $\mathfrak{su}(3)$ , for two cases:

- $\alpha = \alpha_{t_+}$ .
- $\alpha = \alpha_{v_-}$ .

From Fig. 5.2, what are  $m$  and  $p$  in each case? The relevant data is in Eqs. (5.1.8) and (4.3.7). In the latter,  $\alpha_{1,2,3} \rightarrow \{\alpha_{t_+}, \alpha_{u_+}, \alpha_{v_+}\}$ .

-

### Exercise

Verify that Eq. (5.1.23) holds for  $M = \alpha_{u_-}$  in the adjoint representation of  $\mathfrak{su}(3)$ , for three cases:

1.  $\alpha = \alpha_{v_+}$ .
2.  $\alpha = \alpha_{t_-}$ .
3.  $\alpha = \alpha_{u_+}$ .

From Fig. 5.3, what are  $m$  and  $p$  in each case? The relevant data is in Eq. (4.3.7). In the latter,  $\alpha_{1,2,3} \rightarrow \{\alpha_{t_+}, \alpha_{u_+}, \alpha_{v_+}\}$ .

## 5.2 Root geometries

In this section, we will state and/or prove various important facts about root systems (= adjoint representations). The goal is to generalize beyond  $\mathfrak{su}(3)$  to generic semi-simple Lie algebras.

### 5.2.1 Weyl reflections

Consider a weight chain with  $q+1$  weights such that  $q$  is even. Since the number of weights is odd, there is a particular weight at the center of the chain; denote it as  $M_0$ . Obviously  $m = p = q/2$  for  $M_0$ , where  $m(p)$  denotes the number of weights below (above) it. We can denote a generic weight in the chain as

$$M = M_0 + n\alpha, \quad 0 \leq |n| \leq q/2 \quad (5.2.1)$$

where  $n = (m - p)/2$  and there are  $m$  weights below ( $p$  weights above)  $M$ . Consider a Weyl reflection about the chain center,

$$M \rightarrow M_0 - n\alpha = M - 2n\alpha = M - (m - p)\alpha \quad (5.2.2)$$

so that

$$M \rightarrow M - \langle M, \alpha^\vee \rangle \alpha, \quad \text{Weyl reflection} \equiv S_\alpha \quad (5.2.3)$$

### Exercise

Verify that Eq. (5.2.3) also holds for a reflection about the center of an  $\alpha$ -weight chain with  $q + 1$  weights, with  $q$  odd.

For each positive root  $\alpha$  we can define an associated Weyl reflection operation  $S_\alpha$ . With respect to the  $\mathfrak{su}(2)$  generated by  $\{e_{-\alpha}, h_\alpha, e_\alpha\}$  [Eq. (5.1.1)], the adjoint representation decomposes into "parallel" strings of weights of varying lengths. Applying the Weyl reflection interchanges the weights along these strings. We assert that a valid root system is isometric under all Weyl reflections, i.e. the "picture" of the root system is invariant. This is illustrated for  $\mathfrak{su}(3)$  in Fig. 5.4. Note that a weight that is "orthogonal" to  $\alpha$  is left invariant according to Eq. (5.2.3).

The product of all Weyl reflections forms the Weyl group, which is a subgroup of the isometry group for the root system.<sup>2</sup> We will examine the Weyl group in more detail when we derive Weyl's character formula in module 8.

\footnotetext{

<sup>2</sup> Note however that the Weyl group itself contains more than Weyl reflections, since the product of two reflections is equivalent to a rotation. The Weyl group for any root system can be analyzed with finite group theory.

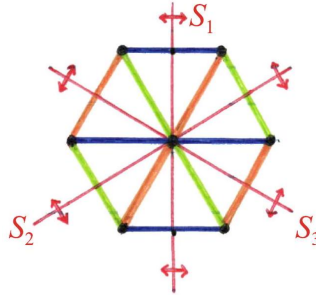


Figure 5.4: Weyl reflections  $S_{1,2,3}$  in the  $\mathfrak{su}(3)$  root system (adjoint representation). Reflection  $S_i$  is associated with positive root  $\alpha_i$  [Eq. (5.2.3)], and  $\alpha_{1,2,3} \leftrightarrow \alpha_{t+,u+,v+}$  (c.f. Figs. 4.1 and 5.3).

### 5.2.2 Root chains and inner products

We assert the following facts about roots, some of which will be proven below.

I. If  $\alpha$  is a root, then

$$\langle \alpha, \alpha \rangle \equiv |\alpha|^2 = (h_\alpha, h_\alpha) > 0 \quad (5.2.4)$$

II. If  $\alpha$  is a root, so is  $-\alpha$ . These are associated to the "raising" and "lowering" root vector operators  $e_{\pm\alpha}$ .

III. The only allowed multiples of  $\alpha$  in the root system are  $\{-\alpha, 0, \alpha\}$ , with the center weight belonging to the Cartan subalgebra  $H$ .

IV. Root systems come in two different varieties. Either (a) all roots have the same norm  $|\alpha|^2$ , or (b) each root has one of two lengths, "short" or "long." A Lie algebra in which all roots have the same length is said to be simply-laced.

V. If  $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$  are all roots, then

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta}, \quad N_{\alpha,\beta} \neq 0 \quad (5.2.5)$$

In other words, "all possible moves are allowed in the root system."

VI. There is only one linearly independent root vector associated to each root. The weight space is defined as the degeneracy of a particular weight in an irreducible representation. The

weight space of all weights in the adjoint is one-dimensional, except for the  $r$ -dimensional Cartan subalgebra with weight 0.

VII. In the adjoint representation, the maximum length of any weight chain is 4.

VIII. If  $\alpha$  and  $\beta$  are roots, then  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Q}$ , where  $\mathbb{Q}$  denotes the field of rational numbers. The set of roots forms an overcomplete basis for  $H^*$ , but we can choose a subset  $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_r\}$  to use as a complete basis. Then any weight  $\rho$  can be expanded as

$$\rho = \sum_{j=1}^r \kappa_j^{(\rho)} \bar{\alpha}_j, \quad \kappa_j^{(\rho)} \in \mathbb{Q} \quad (5.2.6)$$

We comment on or prove some of these statements (I.)-(VIII.) as follows.

(II.) Proof: Recall that

$$(e_\alpha, e_\beta) = 0$$

unless  $\alpha + \beta = 0$  [Eq. (4.4.5)]. If  $-\alpha$  is not a root, then

$$(e_\alpha, x) = 0 \quad \forall x \in L$$

However, a semi-simple Lie algebra has a non-degenerate Killing form, so that the determinant of the "overlap matrix" of all Cartan-Weyl basis elements  $(x_i, x_j)$  cannot vanish. Therefore  $-\alpha$  must be a root if  $\alpha$  is.

(III.) This establishes the generalization of the picture we had for  $\mathfrak{su}(3)$ : a generic root system is a set of  $\mathfrak{su}(2)$ s  $\{-\alpha_i, 0, \alpha_i\}$  that can be drawn as "spokes" passing through a central hub (the Cartan subalgebra  $H$ ). The root geometry can be embedded in  $r$  Euclidean dimensions. The point group symmetry is implied by the root inner products  $\{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle\}$ . Roots can have one or two different norms  $|\alpha|^2$ , allowing us to distinguish "short" and "long" roots (IV.). In simply-laced root systems like  $\mathfrak{su}(3)$ , all roots have the same length. An example with short and long roots is the  $G_2$  root system, shown in Fig. 5.5.

(V.) This will be proven in homework, using the MWDF [Eq. (5.1.23)].

(VII.) Proof: Assume that a string with 5 weights exists in the adjoint representation. WLoG we can write this as

$$\{\beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha\}$$

Now, by assertion [( III. )]

$$2\alpha = (\beta + 2\alpha) - \beta \text{ is not a root, nor is}$$

$$2(\beta + \alpha) = (\beta + 2\alpha) + \beta.$$

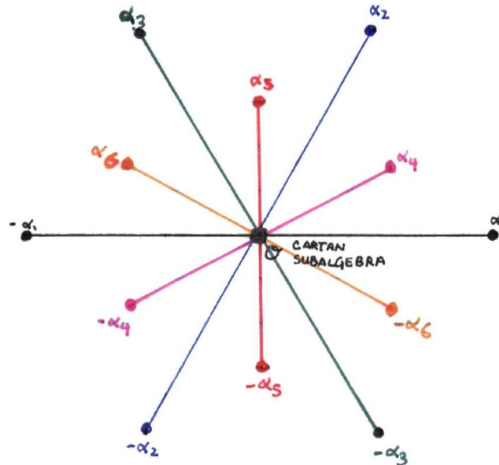


Figure 5.5: The root system for the rank-two exceptional Lie algebra  $G_2$ .

These conditions imply that  $\beta + 2\alpha$  is a string of length 1 with respect to the actions of  $\hat{E}_{\pm\beta}$ , i.e.  $a_{d_e}(e_{\beta+2\alpha}) = 0$ . Similarly

$$\begin{aligned} -2\alpha &= (\beta - 2\alpha) - \beta \text{ is not a root, nor is} \\ 2(\beta - \alpha) &= (\beta - 2\alpha) + \beta \end{aligned}$$

so that  $\beta - 2\alpha$  is a string of length 1 with respect to the actions of  $\hat{E}_{\pm\beta}$ . Eq. (5.1.23) then implies that

$$(m - p)_{\beta+2\alpha;\beta} = 0 = \langle \beta + 2\alpha, \beta^\vee \rangle, \quad (m' - p')_{\beta-2\alpha;\beta} = 0 = \langle \beta - 2\alpha, \beta^\vee \rangle \quad (5.2.7)$$

where the subscripts on the left-hand-sides mean that  $m$  and  $p$  are determined for the weights  $\beta \pm 2\alpha$  in  $\beta$ -strings. Combining these equations gives  $\frac{\langle \beta, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 0$  which is inconsistent [(I. )]. Q.E.D.

(VIII.) This will be proven in homework, using the MWDF [Eq. (5.1.23)].

Further information about root geometry can be extracted from the MWDF Eq. (5.1.23). Consider

$$(m - p)_{\alpha;\beta} = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \equiv M, \quad (m' - p')_{\beta;\alpha} = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \equiv N \quad (5.2.8)$$

where again the subscript  $\{\alpha; \beta\}$  means that  $m$  and  $p$  are determined for weight  $\alpha$  in a string generated by  $e_{\pm\beta}$ . In Eq. (5.2.8),  $M$  and  $N$  are some integers. Then we have

$$\frac{MN}{4} = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{|\alpha|^2 |\beta|^2}, \quad |\alpha|^2 \equiv \langle \alpha, \alpha \rangle \quad (5.2.9)$$

so that

$$\frac{MN}{4} \equiv \cos^2(\theta) \leq 1 \quad (5.2.10)$$

and equal to one only for  $\beta = \pm\alpha$ . Given that a weight string can have at most 4 weights in the adjoint representation, it implies that

$$|M|, |N| \in \{0, 1, 2, 3\} \Rightarrow |M||N| \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$$

where the possibilities in red are disallowed because of Eq. (5.2.10). We therefore conclude that the only allowed values for  $\cos \theta$  in Eq. (5.2.10) are

$$\cos \theta \in \left\{ 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1 \right\} \Leftrightarrow \theta \in \left\{ 0, \pi; \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\} \quad (5.2.11)$$

It turns out that this severely restricts the possibilities for root geometries. In the next subsection, we will obtain further constraints by considering a basis for  $H^*$ . For now, we claim that the full list of root systems is exhausted by four "classical" families of algebras, and 5 particular "exceptional" algebras. The classical algebra families are

$$\begin{aligned} A_n &= \mathfrak{su}(n+1), & n &\geq 1 \\ B_n &= \mathfrak{so}(2n+1), & n &\geq 1 \\ C_n &= \mathfrak{sp}(2n), & n &\geq 1 \\ D_n &= \mathfrak{so}(2n), & n &\geq 2 \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Here the subscript  $n$  indicates the rank. The exceptional algebras are

$$G_2, \quad F_4, \quad E_6, \quad E_7, \quad E_8 \quad (5.2.13)$$

The classical families  $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$  routinely crop up as symmetries in quantum mechanics and quantum field theory. The exceptional algebras are more exotic, but have found applications e.g. in string theory and in the theory of massive integrable 1 + 1 – D quantum field theories.

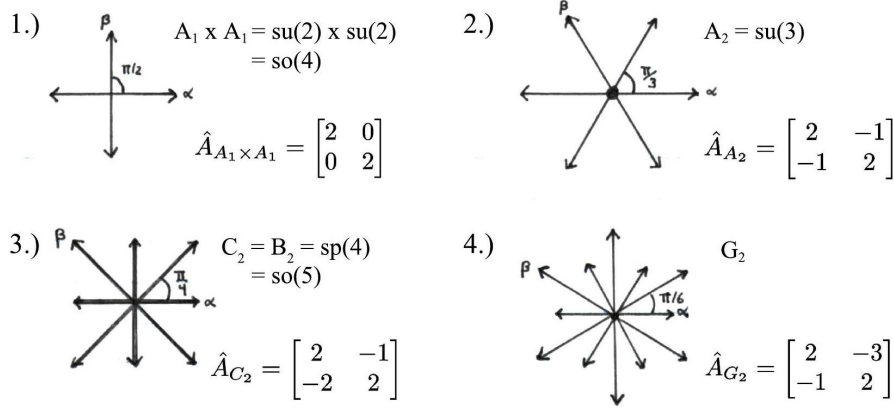


Figure 5.6: The four rank-two root systems. The Cartan matrix  $\hat{A}$  is given for each; it is defined in Sec. 5.3.1, below.

We can also organize algebras by rank  $r$ . For small  $r$ , there are numerous "accidental" equivalences between members of the classical families. For example, there is only one unique algebra at  $r = 1$ ,  $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3) = \mathfrak{sp}(2)$  ( $A_1 = B_1 = C_1$ ). The four rank-two root systems are shown in Fig. 5.6. As discussed in module 2,  $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ , so that  $D_2 = A_1 \times A_1$ .  $A_2 = \mathfrak{su}(3)$  is the second example. The third is  $B_2 = C_2$ , which corresponds to the accidental equivalence  $\mathfrak{so}(5) = \mathfrak{sp}(4)$ . As we will show later, in this case the defining representation of  $\mathfrak{sp}(4)$  is the spinor representation of  $\mathfrak{so}(5)$ , similar to the half-integer representations of  $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$ . The final rank-2 root system is that of the exceptional algebra  $G_2$ .

## 5.3 Constructing the adjoint representation using the MWDF

### 5.3.1 Simple roots and the Cartan matrix

We can construct the adjoint representation for any Lie algebra given some minimal data about the root system. The needed information concerns the simple roots, which are defined as follows.

For some Lie algebra  $L$ , choose a basis in  $H_0^*$  (the space of real combinations of the roots) as a subset of the roots  $\{\tilde{\alpha}_i\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ;  $r$  is the rank. Any Cartan-Weyl basis weight (root or  $H$ -basis element)  $\beta$  can be expanded as [Proposition (VIII.), Sec. 5.2.2]

$$\beta = \sum_{i=1}^r q_i \tilde{\alpha}_i, \quad q_i \in \mathbb{Q} \quad (5.3.1)$$

Let us denote the complete set of roots as  $\Delta$  and the total number of roots by  $|\Delta|$ ;  $|\Delta| + r = d$ , the dimension of the Lie group. We introduce "lexicographic ordering" on  $\Delta$ :

- $\beta$  is a positive root if  $q_1 > 0$ , or  $q_1 = 0$  and  $q_2 > 0$ , or  $q_1 = q_2 = 0$ , and  $q_3 > 0, \dots$ , or  $q_1 = q_2 = \dots = q_{r-1} = 0$  and  $q_r > 0$ . Denote the set of positive roots as  $\Delta_+$ ; for  $\beta \in \Delta_+$ , we write  $\beta > 0$ . By definition, all basis roots  $\{\tilde{\alpha}_i\}$  are positive.

- If  $\Delta_+ \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$  denotes the set of positive roots, then the set of negative roots  $\Delta_-$  is defined as  $\{-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_p\}$ . Let  $|\Delta_{\pm}|$  denote the number of positive or negative roots, so that  $|\Delta_+| = |\Delta_-| = |\Delta|/2$ .

- If  $\alpha$  and  $\beta$  are roots, then  $\alpha > \beta$  if  $\alpha - \beta$  is positive.

Note that a Cartan subalgebra basis element has  $q_i = 0$  for all  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

This naturally (if arbitrarily) orders the set of all roots. In particular, there will be a highest root  $\theta$  that satisfies  $\theta > \alpha$  for all roots  $\alpha \neq \theta$ . The highest root cannot be "raised" by acting with any positive root vector,

$$a_{d_e}(e_\theta) = [e_\alpha, e_\theta] = 0, \quad \alpha \in \Delta_+ \quad (5.3.2)$$

A simple root is denoted with a bar  $\bar{\rho}$ , and satisfies two conditions:

- It is positive  $\bar{\rho} \in \Delta_+$ ,
- It cannot be written as a sum of positive roots,  $\bar{\rho} \neq \alpha + \beta$  for  $\alpha, \beta \in \Delta_+$ .
- $\mathfrak{su}(3)$  example: The root system is shown in Fig. 5.7, where relative to Fig. 5.3 we have relabeled  $\{t_\pm, u_\pm, v_\pm\} \Rightarrow \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3\}$ . The black line divides the algebra into positive and negative roots. Positive roots  $\bar{\alpha}_1$  and  $\bar{\alpha}_2$  are also simple, but  $\alpha_3 = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$  is not. In fact,  $\alpha_3 = \theta$ , the highest root.

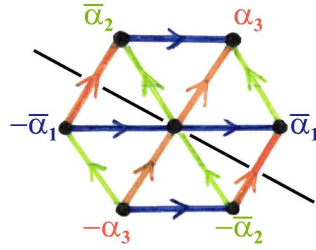


Figure 5.7: Positive and simple roots for  $\mathfrak{su}(3)$ . Relative to Fig. 5.3 we relabel  $\{t_\pm, u_\pm, v_\pm\} \Rightarrow \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3\}$ . The simple roots are  $\bar{\alpha}_{1,2}$ . The positive roots are  $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \alpha_3\}$ , where  $\alpha_3 = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \equiv \theta$ , the highest root.

Let  $\Pi$  denote the set of simple roots. Let  $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \Pi (\bar{\alpha} \neq \bar{\beta})$ . We assert the following simple root facts:

- I.  $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$  and  $\bar{\beta} - \bar{\alpha}$  are not roots, which implies that [Eq. (4.4.11c)]

$$ad_{e_{-\bar{\beta}}}(e_{\bar{\alpha}}) = [e_{-\bar{\beta}}, e_{\bar{\alpha}}] = 0, \quad ad_{-\bar{\alpha}}(e_{\bar{\beta}}) = [e_{-\bar{\alpha}}, e_{\bar{\beta}}] = 0 \quad (5.3.3)$$

In other words, simple roots are lowest weight states in mutually-generated strings.

Proof: Either  $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$  or  $\bar{\beta} - \bar{\alpha}$  is positive. Then either  $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{\beta}$  or  $\bar{\beta} = (\bar{\beta} - \bar{\alpha}) + \bar{\alpha}$  is not simple (contradiction).

- II.  $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle \leq 0$ , i.e. the angle between simple roots is obtuse (or  $90^\circ$ ).

Proof: The MWDF Eq. (5.1.23) implies that

$$(m-p)_{\bar{\alpha};\bar{\beta}} = -p_{\bar{\alpha};\bar{\beta}} = \frac{2\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle}{\langle \bar{\beta}, \bar{\beta} \rangle} \Rightarrow \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle \leq 0 \quad (5.3.4)$$

since  $\langle \bar{\beta}, \bar{\beta} \rangle > 0$  [Proposition (I.), Sec. 5.2.2].

III. The set of simple roots  $\Pi$  is linearly independent, and can be employed as a basis for the positive roots.

Proof: Assume that this is not true, and write  $\Pi = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ . Linear dependence means

$$\sum_{\bar{\alpha}_i \in \Pi_1} a_i \bar{\alpha}_i - \sum_{\bar{\beta}_j \in \Pi_2} b_j \bar{\beta}_j = 0, \quad a_i, b_j \geq 0 \forall \{i, j\} \quad (5.3.5)$$

Take the inner product with respect to the first term to get

$$\sum_{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \in \Pi_1} a_i a_j \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = \sum_{\bar{\alpha}_i \in \Pi_1, \bar{\beta}_j \in \Pi_2} a_i b_j \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j \rangle \quad (5.3.6)$$

The left-hand side is a positive squared-norm, but the right-hand side is a sum of negative terms (contradiction).

IV. Every positive root  $\rho > 0$  can be written as a sum of simple roots with non-negative, integer coefficients  $\{\kappa_i^{(\rho)}\}$ :

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{i=1}^r \kappa_i^{(\rho)} \bar{\alpha}_i, \quad \rho \in \Delta_+, \kappa_i^{(\rho)} \in \mathbb{N}_0, & \text{Decomposition of a positive root in terms of simple roots} \\ & & \text{with non-negative integer coefficients.} \\ k &\equiv \sum_{i=1}^r \kappa_i^{(\rho)} \in \{1, 2, \dots\}, & \text{Level } k \text{ of the positive root } \rho. \end{aligned}$$

Here  $\mathbb{N}_0$  denotes the set of natural numbers including zero.

Proof: Eq. (5.3.7) trivially holds if  $\rho$  itself is simple; the level  $k = 1$  in this case. If  $\rho$  is not simple ( $k \geq 2$ ), it can be expressed as a sum of two positive roots,  $\rho = \lambda + \gamma$ ,  $\{\lambda, \gamma\} \in \Delta_+$ . Either of these are simple, or can be further decomposed. Continue this bipartitioning process until all components are simple roots, and this gives the explicit decomposition of  $\rho$ .

In order to construct higher level roots from simple roots, it is extremely useful to introduce the Cartan matrix  $A_{ij}$ ,

$$A_{ij} \equiv \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle = \frac{2 \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle}{\langle \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_j \rangle}, \quad \text{Cartan matrix}$$

We emphasize that the Cartan matrix is generally not symmetric. The Cartan matrix encodes two different types of information: (1) the simple root geometry (angles between and relative lengths of simple roots), and (2) via the MWDF Eq. (5.1.23), the "height" of positive weight strings, starting from a simple root. In particular

### Attributes of the Cartan matrix

- The matrix elements of  $A_{ij}$  are integers. For  $i \neq j$  the elements are non-positive integers

$$A_{ij} = -p_{\bar{\alpha}_i; \bar{\alpha}_j} \quad (5.3.9)$$

where  $p_{\bar{\alpha}_i; \bar{\alpha}_j} + 1$  is the length of the weight string generated by "raising"  $\bar{\alpha}_i$  with the root vector  $e_{\bar{\alpha}_j}$ :

$$\{\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_j, \dots, \bar{\alpha}_i + (p_{\bar{\alpha}_i; \bar{\alpha}_j}) \bar{\alpha}_j\}.$$

From Proposition (VII.) in Sec. 5.2.2, we conclude that

$$-3 \leq A_{ij} \leq 0, \quad i \neq j$$

In particular,  $A_{ij} = 0$  for  $i \neq j$  implies that  $\bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_j$  is not a root, so that

$$A_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [e_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] = 0, \quad i \neq j \quad (5.3.11)$$

- Orthogonal simple roots correspond to a vanishing root vector commutator.

Each diagonal element  $A_{ii} = 2$  (no summation on  $i$ ), since this is the depth of the  $\mathfrak{su}(2)$  subalgebra generated by lowering with  $e_{-\bar{\alpha}_i}$ ,

$$A_{ii} = m_{\bar{\alpha}_i; \bar{\alpha}_i} = 2$$

- The angle between simple roots  $\bar{\alpha}_i$  and  $\bar{\alpha}_j$  is encoded in the product

$$\frac{A_{ij} A_{ji}}{4} = \frac{\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle^2}{|\bar{\alpha}_i|^2 |\bar{\alpha}_j|^2} = \cos^2 \theta \leq 1 \quad (5.3.12)$$



[c.f. Eq. (5.2.8)-(5.2.10)]. Combining Eq. (5.2.11) and Proposition (II.) above, we know that

$$\theta \in \{90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ\} \text{ for } i \neq j \Rightarrow A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}, \text{ for } i \neq j \quad (5.3.13)$$

consistent with Eq. (5.3.10).

- The relative squared lengths of simple roots  $\bar{\alpha}_i$  and  $\bar{\alpha}_j$  are encoded in the ratio

$$\frac{A_{ij}}{A_{ji}} = \frac{|\bar{\alpha}_i|^2}{|\bar{\alpha}_j|^2} \quad (5.3.14)$$

- $\det \hat{A} \neq 0$ , since the simple roots form a basis for  $H_0^*$ .

- $\mathfrak{su}(3)$  example: The simple roots are  $\bar{\alpha}_1$  and  $\bar{\alpha}_2$ , see Fig. 5.7. From Eq. (4.3.7),

$$\langle \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1 \rangle = \langle \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_2 \rangle = 1/3, \quad \langle \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \rangle = -1/6$$

leading to the Cartan matrix

$$\hat{A}_{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.3.15)$$

Cartan's notation  $A_n$  for  $\mathfrak{su}(n+1)$  was introduced in Eq. (5.2.12).

### 5.3.2 Higher level roots

We can iteratively construct the complete set of positive roots from the simple ones. A generic positive root  $\rho \in \Delta_+$  can be expanded as in Eq. (5.3.7). Using the MWDF Eq. (5.1.23), we rewrite this equation as

$$p_{\rho; \bar{\alpha}_i} = m_{\rho; \bar{\alpha}_i} - \sum_{j=1}^r \kappa_j^{(\rho)} A_{ji} \quad (5.3.16)$$

where  $A_{ji}$  is the Cartan matrix, and  $p_{\rho; \bar{\alpha}_i} (m_{\rho; \bar{\alpha}_i})$  denotes the number of weights above (below)  $\rho$  in the chain generated by  $e_{\pm \bar{\alpha}_i}$ . The higher root construction algorithm now proceeds as follows.

- At level  $k = 1$  we have the simple roots  $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_r\}$ . Let  $\rho = \bar{\alpha}_{j_0}$  (a particular simple root), so that

$$p_{\rho; \bar{\alpha}_i} = -A_{j_0 i}, \quad (i \neq j_0) \quad (5.3.17)$$

$\Rightarrow$  The number of weights above  $\rho$  in the chain generated by raising with  $e_{\bar{\alpha}_i}$  is given by  $-A_{j_0 i}$ . We label each simple root  $\rho = \bar{\alpha}_{j_0}$  by a row of the Cartan matrix

$$[A_{j_0 1} A_{j_0 2} \cdots A_{j_0 r}] \equiv [\Lambda_1^{(1)} \Lambda_2^{(1)} \cdots \Lambda_r^{(1)}] \quad (5.3.18)$$

The integers  $\{\Lambda_i^{(1)}\}$  are the Dynkin labels for the level-1 weight  $\rho = \bar{\alpha}_{j_0}$ .

- $\mathfrak{su}(3)$ : Using Eq. (5.3.15), the Dynkin labels of the simple roots are

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ (\bar{\alpha}_1) & (\bar{\alpha}_2) \end{array} \quad (5.3.19)$$

• To find all level  $k = 2$  roots, examine the Dynkin labels  $[\Lambda_1 \cdots \Lambda_r]$  for each simple root  $\bar{\alpha}_{j_0}$ . Whenever  $A_{j_0 j_1} < 0$ ,  $\rho = \bar{\alpha}_{j_0} + \bar{\alpha}_{j_1}$  is a valid positive root. For each valid positive root  $\rho$  at  $k = 2$ , record the sum of the corresponding rows of the Cartan matrix,

$$\sum_{j=1}^r \kappa_j^{(\rho)} A_{ji} = A_{j_0 i} + A_{j_1 i} \quad \Leftrightarrow \quad [(A_{j_0 1} + A_{j_1 1}) \cdots (A_{j_0 r} + A_{j_1 r})] \equiv [\Lambda_1^{(2)} \Lambda_2^{(2)} \cdots \Lambda_r^{(2)}] \quad (5.3.20)$$

-  $\mathfrak{su}(3)$ : There is one root  $\alpha_3$  at level 2 with Dynkin coefficients

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) \end{bmatrix} \quad (5.3.21)$$

Each  $k = 2$  root can arise in multiple ways, e.g. by raising  $\bar{\alpha}_{j_0}$  with  $e_{\bar{\alpha}_{j_1}}$  or by raising  $\bar{\alpha}_{j_1}$  with  $e_{\bar{\alpha}_{j_0}}$ . For each  $k = 2$  root  $\rho$ , record the set of non-zero  $\{m_{\rho; \bar{\alpha}_i}\}$  ( $m_{\rho; \bar{\alpha}_i} \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ ), which specify whether a level-1 simple root can be accessed by acting with each  $e_{-\bar{\alpha}_i}$  on  $\rho$ .

•  $\mathfrak{su}(3)$  :

$$\rho = \alpha_3 : \quad m_{\alpha_3; \bar{\alpha}_1} = m_{\alpha_3; \bar{\alpha}_2} = 1 \quad (5.3.22)$$

• To find all level  $k = 3$  roots, proceed as follows. Consider each  $k = 2$  root  $\rho$ . To determine if  $\rho + \bar{\alpha}_i$  is a valid root, compute

$$p_{\rho; \bar{\alpha}_i} = m_{\rho; \bar{\alpha}_i} - \Lambda_i^{(2)} \quad (5.3.23)$$

where  $m_{\rho; \bar{\alpha}_i} \in \{0, 1\}$  and the Dynkin coefficient  $\Lambda_i^{(2)}$  were computed in step (2.), above. If  $p_{\rho; \bar{\alpha}_i} > 0$ , then  $\rho + \bar{\alpha}_i$  is a valid root.

•  $\mathfrak{su}(3)$ : The only  $k = 2$  root is  $\alpha_3$ . We have

$$\begin{aligned} p_{\alpha_3; \bar{\alpha}_1} &= m_{\alpha_3; \bar{\alpha}_1} - \Lambda_1^{(2)} = 1 - 1 = 0 \\ p_{\alpha_3; \bar{\alpha}_2} &= m_{\alpha_3; \bar{\alpha}_2} - \Lambda_2^{(2)} = 1 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

We conclude that  $\alpha_3 = \theta$ , the highest root in  $\mathfrak{su}(3)$ . This algebra terminates at level  $k = 2$ .

For each  $k = 3$  root  $\rho$ , record the set of non-zero  $\{m_{\rho; \bar{\alpha}_i}\}$  ( $m_{\rho; \bar{\alpha}_i} \in \{0, 1, 2\}$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ ), which specify the number of lower-level roots below  $\rho$  accessed by acting repeatedly with each  $e_{-\bar{\alpha}_i}$  on  $\rho$ .

The algorithm iterates until the highest root  $\theta$  is reached.

### 5.3.3 $G_2$ example

Let us illustrate the algorithm with a less trivial rank-2 example: the exceptional Lie algebra  $G_2$ . The Cartan matrix is (as quoted in Fig. 5.6)

$$\hat{A}_{G_2} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

• At  $k = 1$ , we have the simple roots

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ (\bar{\alpha}_1) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ (\bar{\alpha}_2) \end{bmatrix}$$

• At  $k = 2$ , the sum  $\rho^{(2)} \equiv \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$  is a valid root since [Eq. (5.3.17)]

$$\begin{aligned} p_{\bar{\alpha}_2; \bar{\alpha}_1} &= 1 \\ p_{\bar{\alpha}_1; \bar{\alpha}_2} &= 3 \end{aligned} \tag{5.3.26 b}$$

The Dynkin labels obtain from summing those of  $\bar{\alpha}_{1,2}$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.3.26c}$$

The depths are

$$m_{\rho^{(2)}; \bar{\alpha}_1} = m_{\rho^{(2)}; \bar{\alpha}_2} = 1 \tag{5.3.26d}$$

• At  $k = 3$ , we compute

$$\begin{aligned} p_{\rho^{(2)}; \bar{\alpha}_1} &= m_{\rho^{(2)}; \bar{\alpha}_1} - 1 = 0 \\ p_{\rho^{(2)}; \bar{\alpha}_2} &= m_{\rho^{(2)}; \bar{\alpha}_2} + 1 = 2 \end{aligned} \tag{5.3.26e}$$

$\rho^{(3)} = \rho^{(2)} + \bar{\alpha}_2$  is the only  $k = 3$  root,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &(\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2) \end{aligned} \tag{5.3.26f}$$

The depths are

$$m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_1} = 0, \quad m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_2} = 2 \tag{5.3.26 g}$$

• At  $k = 4$ ,

$$\begin{aligned} p_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_1} &= m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_1} - 0 = 0 \\ p_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_2} &= m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_2} - 1 = 1 \end{aligned} \tag{5.3.26 h}$$

$\rho^{(4)} = \rho^{(3)} + \bar{\alpha}_2$  is the only  $k = 4$  root,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &(\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2) \end{aligned} \tag{5.3.26i}$$

The depths are

$$m_{\rho^{(4)}; \bar{\alpha}_1} = 0, \quad m_{\rho^{(4)}; \bar{\alpha}_2} = 3 \tag{5.3.26j}$$

• At  $k = 5$ ,

$$\begin{aligned} p_{\rho^{(4)}; \bar{\alpha}_1} &= m_{\rho^{(4)}; \bar{\alpha}_1} + 1 = 1 \\ p_{\rho^{(4)}; \bar{\alpha}_2} &= m_{\rho^{(4)}; \bar{\alpha}_2} - 3 = 0 \end{aligned} \tag{5.3.26k}$$

$\rho^{(5)} = \rho^{(4)} + \bar{\alpha}_1$  is the only  $k = 5$  root,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} \quad (5.3.261)$$

The depths are

$$m_{\rho^{(5)}; \bar{\alpha}_1} = 1, \quad m_{\rho^{(5)}; \bar{\alpha}_2} = 0 \quad (5.3.26 \text{ m})$$

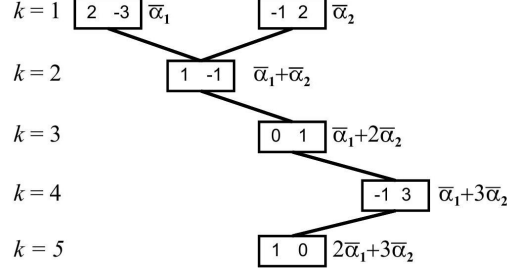


Figure 5.8: Positive roots at successive levels  $k$  in  $G_2$ . For a rank-2 algebra such as this, we can graphically distinguish "left-moves" (raising by  $e_{\bar{\alpha}_1}$ ) from "right-moves" (raising by  $e_{\bar{\alpha}_2}$ ). Branching diagrams can be constructed for the adjoint representation of any Lie algebra, although planar figures become cumbersome for higher rank algebras.

- At  $k = 6$ ,

$$\begin{aligned} p_{\rho^{(5)}; \bar{\alpha}_1} &= m_{\rho^{(5)}; \bar{\alpha}_1} - 1 = 0 \\ p_{\rho^{(5)}; \bar{\alpha}_2} &= m_{\rho^{(5)}; \bar{\alpha}_2} - 0 = 0 \end{aligned} \quad (5.3.26n)$$

We conclude that there are no  $k = 6$  roots.  $\rho^{(5)} = 2\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2 \equiv \theta$  is the highest root.

The results of the positive-root-finding algorithm can be indicated with a branching diagram, shown in Fig. 5.8. Since the roots are non-degenerate [Proposition (VI.), Sec. 5.2.2] and each positive root  $\rho$  has a corresponding negative root  $-\rho$ , we have a complete inventory of the roots for  $G_2$ . There are  $|\Delta| = 12$  roots, so the group dimension  $d = 12 + 2 = 14$ .

To get a geometrical picture of the algebra, we examine the Cartan matrix in Eq. (5.3.25). The angle between simple roots  $\bar{\alpha}_1$  and  $\bar{\alpha}_2$  is encoded in the product [Eq. (5.3.12)]

$$\frac{A_{12}A_{21}}{4} = \cos^2 \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 150^\circ \quad (5.3.27)$$

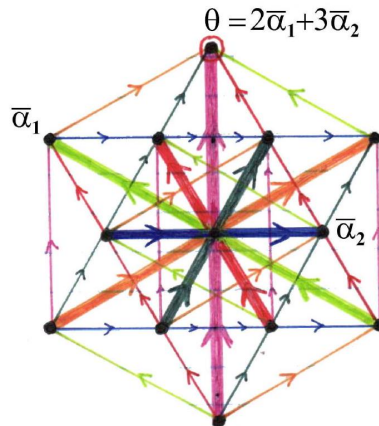


Figure 5.9: The adjoint representation of the exceptional Lie algebra  $G_2$ .

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_{A_1 \times A_1} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \circ \\ \bar{\alpha}_1 \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ \bar{\alpha}_2 \end{array} \\
 \hat{A}_{A_2} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \circ \\ \bar{\alpha}_1 \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ \bar{\alpha}_2 \end{array} \\
 \hat{A}_{C_2} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bar{\alpha}_1 \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bar{\alpha}_2 \end{array} \\
 \hat{A}_{G_2} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bar{\alpha}_1 \end{array} & \begin{array}{c} \bullet \\ \bar{\alpha}_2 \end{array}
 \end{aligned}$$

Figure 5.10: The Dynkin diagrams for rank-2 algebras.

The relative squared lengths of simple roots  $\bar{\alpha}_1$  and  $\bar{\alpha}_2$  are encoded in the ratio [Eq. (5.3.14)]

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = \frac{|\bar{\alpha}_1|^2}{|\bar{\alpha}_2|^2} = 3 \quad (5.3.28)$$

so that  $|\bar{\alpha}_1| = \sqrt{3}|\bar{\alpha}_2|$ . Combining this information with the root inventory, we immediately get the picture shown in Fig. 5.9. We note that the roots come in two varieties, short and long, and that the highest root  $\theta$  is a long root. For non-simply-laced algebras with short and long roots, it turns out that the highest root is always long.

### 5.3.4 Dynkin diagrams

The Cartan matrix  $A_{ij}$  [Eq. (5.3.8)] succinctly encodes the entire structure of a Lie algebra. One can use Dynkin coefficients  $[\Lambda_1 \ \Lambda_2 \ \cdots \ \Lambda_r]$  to define all possible highest weight states in finite-dimensional irreducible representations. Then one employs a variant of the root-building algorithm presented above to determine all weights in the representation (module 7). Weight space multiplicities obtain via Freudenthal's formula (module 8). All commutation relations can in principle be reconstructed from  $A_{ij}$ ; we will sketch how in module 7.

We close this module with an alternative way of encoding the Cartan subalgebra data for a given Lie algebra. The Dynkin diagram for a Lie algebra  $L$  with Cartan matrix  $\hat{A}$  is constructed as follows.

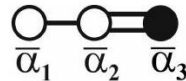
- For each simple root, place an open dot  $\circ$ .
- Fill in (darken  $\bullet$ ) dots corresponding to short roots.
- Connect the  $i^{\text{th}}$  and  $j^{\text{th}}$  dots with

$$A_{ij}A_{ji} = 4\cos^2\theta \in \{0, 1, 2, 3\}$$

straight lines. Thus orthogonal simple roots ( $\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = 0$  corresponding to  $[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] = 0$ ) are disconnected, while simple root pairs separated by  $120^\circ, 135^\circ$ , or  $150^\circ$  are respectively connected by one, two, or three lines.

The Dynkin diagram for a simple Lie algebra is fully connected, but can be divided into two pieces by cutting one single, double, or triple "bond." The Dynkin diagram for a semi-simple Lie algebra consists of disjoint pieces, each of which corresponds to a simple Lie algebra.

The rank-2 examples are shown in Fig. 5.10.


 Figure 5.11: The Dynkin diagram for a rank-3 algebra [ $B_3 = \mathfrak{so}(5)$ ].

We can also reconstruct the Cartan matrix from a Dynkin diagram. A rank-3 example is shown in Fig. 5.11.  $\bar{\alpha}_3$  is apparently a short root.  $A_{12}A_{21} = 1$ , so that  $A_{12} = A_{21} = -1$ .  $\bar{\alpha}_1$  and  $\bar{\alpha}_3$  are not connected, so that  $A_{13} \propto A_{31} \propto \langle \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_3 \rangle = 0$ . Finally  $A_{23}A_{32} = 2$ , which implies that  $\{A_{23}, A_{32}\} \in \{-1, -2\}$ . Since  $\bar{\alpha}_3$  is short, we conclude that

$$\frac{A_{23}}{A_{32}} = \frac{|\bar{\alpha}_2|^2}{|\bar{\alpha}_3|^2} = 2$$

Therefore the Cartan matrix corresponding to Fig. 5.11 is

$$\hat{A}_{B_3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.3.29)$$

This is the Cartan matrix for  $\mathfrak{so}(7) = B_3$ .

### 8.3.6 The classical and exceptional Lie algebras

In Sec. 5.3, we demonstrated how the root system (adjoint representation) for a generic Lie algebra can be constructed from the Cartan matrix or Dynkin diagram. The latter encodes the inner products and norm ratios of the simple roots. In this module, we assemble the Cartan matrix from the simple roots for the four classical Lie algebra families  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ , and  $D_n$ . The needed data is extracted from the defining representation for each algebra. We will also state (but not derive) the results for the five exceptional algebras  $G_2$ ,  $F_4$ , and  $E_{6,7,8}$ .

In the next module 8, we will show how the Cartan matrix can be used to obtain the full set of weights in any (finite dimensional) irreducible representation. In addition, the weights of the defining representation for the orthogonal algebras  $B_n$  [ $\mathfrak{so}(2n+1)$ ] and  $D_n$  [ $\mathfrak{so}(2n)$ ] turn out to give a useful alternative basis for  $H^*$ , since these prove to be orthonormal. We will exploit this fact later in module 10 to construct spinor representations.

#### 7.1 $\mathfrak{su}(n) : A_{n-1}$

Consider the space of all  $n \times n$  matrices with real or complex elements. A basis for this space can be defined as follows:

$$\left( \hat{E}_{ab} \right)_{ij} = \delta_{ai} \delta_{bj} \Rightarrow \hat{E}_{ab} \rightarrow \begin{matrix} & \dots & b-1 & \textcolor{blue}{b} & b+1 & \dots \\ \vdots & & & & & \\ a-1 & & & & & \\ \textcolor{blue}{a} & & & \textcolor{blue}{1} & & \\ a+1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{matrix}.$$

All unmarked entries are zero. These elements satisfy the multiplication rule

$$\hat{E}_{ab} \cdot \hat{E}_{cd} \rightarrow \left( \hat{E}_{ab} \right)_{ij} \left( \hat{E}_{cd} \right)_{jk} = \delta_{ai} \delta_{bj} \delta_{cj} \delta_{dk} \rightarrow \delta_{bc} \hat{E}_{ad} \quad (7.1.2)$$

so that

$$\left[ \hat{E}_{ab}, \hat{E}_{cd} \right] = \delta_{bc} \hat{E}_{ad} - \delta_{da} \hat{E}_{cb} \quad (7.1.3)$$

Note that

$$\sum_c \left[ \hat{E}_{ab}, \hat{E}_{cc} \right] = 0 \quad (7.1.4)$$

which implies that the identity

$$\hat{1}_n = \sum_c \hat{E}_{cc} \quad (7.1.5)$$

generates a one-dimensional abelian ideal. We want to construct root systems for generic semi-simple Lie algebras (no abelian ideals); we should therefore restrict ourselves to traceless  $n \times n$  matrices, i.e. the  $\mathfrak{su}(n) = A_{n-1}$  Lie algebra. In this case, an arbitrary element of the Cartan subalgebra can be written as

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{E}_{ii}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (7.1.6)$$

Now

$$\hat{a}_{dh}(e_{ab}) \rightarrow [\hat{H}, \hat{E}_{ab}] = \lambda_a \hat{E}_{ab} - \lambda_b \hat{E}_{ab} \quad (7.1.7)$$

which implies that  $e_{ab}$  is a root vector:

$$[h, e_{ab}] = \alpha_{ab}(h)e_{ab}, \quad \alpha_{ab}\left(\sum_i \lambda_i e_{ii}\right) = \lambda_a - \lambda_b \quad (7.1.8)$$

We identify the positive root vectors with set of upper triangular  $\{\hat{E}_{ab}\}$ . For a generic Cartan subalgebra element  $h \in H$  defined via Eq. (7.1.6), we claim that the set of simple roots  $\Pi$  can be associated to the first diagonal root vectors:

| root vector                               | root $\alpha(h)$                                    |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $e_{12} \equiv e_{\bar{\alpha}_1}$        | $\bar{\alpha}_1(h) = \lambda_1 - \lambda_2$         |
| $e_{23} \equiv e_{\bar{\alpha}_2}$        | $\bar{\alpha}_2(h) = \lambda_2 - \lambda_3$         |
| $\vdots$                                  | $\vdots$                                            |
| $e_{n-1,n} \equiv e_{\bar{\alpha}_{n-1}}$ | $\bar{\alpha}_{n-1}(h) = \lambda_{n-1} - \lambda_n$ |

(7.1.9)

Proof: A generic positive root is

$$\alpha_{ij}(h) = \lambda_i - \lambda_j, \quad i < j \quad (7.1.10)$$

This can be written as

$$\alpha_{ij}(h) = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + (\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}) + (\lambda_{i+2} - \lambda_{i+3}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) = \sum_{l=i}^{j-1} \bar{\alpha}_l \quad (7.1.11)$$

Therefore every positive root can be expressed as a linear combination of the  $\{\bar{\alpha}_i\}$  with non-negative integral coefficients. Moreover,  $\bar{\alpha}_i$  cannot be expressed as a linear combination of the other proposed simple roots. To see this, assume the converse, i.e. that  $\bar{\alpha}_i$  is positive, but not simple. Then

$$\bar{\alpha}_i(h) = \lambda_i - \lambda_{i+1} = \sum_{j \neq i} \kappa_j^{(i)} \bar{\alpha}_j(h) = \dots + \kappa_{i-1}^{(i)} (\lambda_{i-1} - \lambda_i) + \kappa_{i+1}^{(i)} (\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}) + \dots \quad (7.1.12)$$

Since all the  $\kappa_j^{(i)}$  are positive, there is no way to get  $\lambda_{i+1}$  with a negative coefficient (contradiction).

For the simple roots, we therefore have the associated Lie brackets

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] = \delta_{j,i+1} e_{i,i+2} - \delta_{j,i-1} e_{i-1,i+1} \quad (7.1.13a)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_j}] = \delta_{ij} (e_{ii} - e_{i+1,i+1}) \quad (7.1.13b)$$

$$[h, e_{\bar{\alpha}_i}] = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) e_{\bar{\alpha}_i}, \quad h \text{ defined as in Eq. (7.1.6)}. \quad (7.1.13c)$$

Here the root vector associated to  $-\bar{\alpha}_j$  is  $e_{-\bar{\alpha}_j} \rightarrow \hat{E}_{j+1,j}$ . Eq. (7.1.13b) is consistent with the fact that simple roots are lowest weight states in mutually generated strings of the adjoint representation [Eq. (5.3.3)].

It is useful to construct the  $\{h_{\bar{\alpha}_i}\} (i \in \{1, 2, \dots, n-1\})$ , i.e. the elements of the Cartan subalgebra  $H$  that represent the simple roots. Consider the Killing form between generic elements of  $H$ . We use the algorithm described in module 4 [Eq. (4.2.2)]. For

$$h \equiv \sum_i \lambda_i e_{ii}, \quad h' \equiv \sum_j \lambda'_j e_{jj} \quad (7.1.14)$$

we have the Killing form

$$(h, h') = \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^n ([h, [h', e_{ab}]])_{\text{coeff. of } e_{ab}} = \sum_{a,b=1}^n (\lambda_a - \lambda_b) (\lambda'_a - \lambda'_b) = 2n \sum_{a=1}^n \lambda_a \lambda'_a \quad (7.1.15)$$

since  $\sum_b \lambda_b = 0$ . Therefore, since

$$(h_{\bar{\alpha}_i}, h') = \bar{\alpha}_i (h') = \lambda'_i - \lambda'_{i+1} \quad (7.1.16)$$

we conclude that

$$h_{\bar{\alpha}_i} = \frac{e_{ii} - e_{i+1,i+1}}{2n} \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\bar{\alpha}_i)} e_{jj}, \quad \lambda_j^{(\bar{\alpha}_i)} = \frac{1}{2n} (\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j}) \quad (7.1.17)$$

Recall that [Eq. (4.4.10)]

$$h_{\bar{\alpha}_i} = \frac{[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_i}]}{(e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_i})} \quad (7.1.18)$$

Eqs. (7.1.13b), (7.1.17) and (7.1.18) therefore give the Killing form of the simple root vectors,

$$(e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_i}) = 2n \quad (7.1.19)$$

We can now compute the scalar products between simple roots, using

$$\begin{aligned} [h_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] &= \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle e_{\bar{\alpha}_j} \\ &= \left( \lambda_j^{(\bar{\alpha}_i)} - \lambda_{j+1}^{(\bar{\alpha}_i)} \right) e_{\bar{\alpha}_j} = \frac{1}{2n} (\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j+1}) e_{\bar{\alpha}_j} \end{aligned} \quad (7.1.20)$$

Therefore

$$\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = \frac{1}{2n} (2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}), \quad | \quad \text{simple root scalar products in } A_{n-1} \quad (7.1.21)$$

The Cartan matrix is defined as [Eqs. (5.3.8) and (5.3.9)]

$$A_{ij} = \frac{2 \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle}{\langle \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_j \rangle} = -p_{\bar{\alpha}_i; \bar{\alpha}_j} (i \neq j) \quad (7.1.22)$$

where  $p_{\bar{\alpha}_i; \bar{\alpha}_j} \in \{0, 1, 2, 3\}$  determines the number of states above  $\bar{\alpha}_i$  in the root string generated by  $e_{\bar{\alpha}_j}$ . For  $A_{n-1}$ , Eq. (7.1.21) implies that



$$A_{ij} = 2\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} \Rightarrow \hat{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Cartan matrix for } A_{n-1} \quad (7.1.23)$$

The corresponding Dynkin diagram is shown in Fig. 7.1. Because all roots have the same length,  $\mathfrak{su}(n) = A_{n-1}$  is simply laced.



Figure 7.1:  $\mathfrak{su}(n) = A_{n-1}$ .

### 7.1.1 Example: $\mathfrak{su}(4) = A_3$ .

Using the root-building algorithm from Sec. 5.3.2, we construct the roots for  $A_3$ .

- At  $k = 1$ , we have the simple roots

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ (\bar{\alpha}_1) & (\bar{\alpha}_2) & (\bar{\alpha}_3) \end{array}$$

- At  $k = 2$ , the sum  $\rho_1^{(2)} \equiv \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$  is a valid root since [Eq. (7.1.22)]

$$\begin{aligned} p_{\bar{\alpha}_1; \bar{\alpha}_2} &= 1 \\ p_{\bar{\alpha}_2; \bar{\alpha}_1} &= 1 \end{aligned} \quad (7.1.24b)$$

The sum  $\rho_2^{(2)} \equiv \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3$  is a valid root since

$$\begin{aligned} p_{\bar{\alpha}_2; \bar{\alpha}_3} &= 1 \\ p_{\bar{\alpha}_3; \bar{\alpha}_2} &= 1 \end{aligned} \quad (7.1.24c)$$

The Dynkin labels for these level 2 roots are

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1.24 d)$$

The non-zero depths are

$$m_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_1} = m_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_2} = 1, \quad m_{\rho_2^{(2)}; \bar{\alpha}_2} = m_{\rho_2^{(2)}; \bar{\alpha}_3} = 1 \quad (7.1.24e)$$

- At  $k = 3$ , we compute

$$\begin{aligned}
p_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_1} &= m_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_1} - 1 = 0, \\
p_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_2} &= m_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_2} - 1 = 0, \\
p_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_3} &= m_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_3} + 1 = 1, \\
p_{\rho_2^{(2)}; \bar{\alpha}_1} &= m_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_1} + 1 = 1, \\
p_{\rho_2^{(2)}; \bar{\alpha}_2} &= m_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_2} - 1 = 0, \\
p_{\rho_2^{(2)}; \bar{\alpha}_3} &= m_{\rho_1^{(2)}; \bar{\alpha}_3} - 1 = 0.
\end{aligned} \tag{7.1.24f}$$

Thus  $\rho^{(3)} \equiv \rho_1^{(2)} + \bar{\alpha}_3 = \rho_2^{(2)} + \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3$  is the only  $k = 3$  root,

$$[ \ 1 \ 0 \ 1 \ ] \tag{7.1.24 g}$$

The depths are

$$m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_1} = 1, \quad m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_2} = 0, \quad m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_3} = 1$$

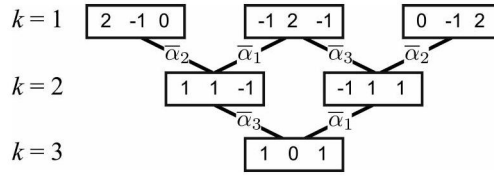


Figure 7.2: Root tree for  $\mathfrak{su}(4) = A_3$ . Roots are specified by their Dynkin labels. The level  $k = 1$  simple roots appear at the top; linear combinations of these give the other positive roots. The labels on diagonal lines indicate the simple root that gives the level  $(k + 1)^{\text{th}}$  root from the  $k^{\text{th}}$  one.

- At  $k = 4$ ,

$$\begin{aligned}
p_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_1} &= m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_1} - 1 = 0 \\
p_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_2} &= m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_2} - 0 = 0, \quad p_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_3} = m_{\rho^{(3)}; \bar{\alpha}_3} - 1 = 0
\end{aligned} \tag{7.1.24i}$$

We conclude that there are no level  $k = 4$  roots.  $\rho^{(3)} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3 \equiv \theta$  is the highest root.

The results of the algorithm can be indicated with the branching diagram in Fig. 7.2. Since the roots are non-degenerate [Proposition (VI.), Sec. 5.2.2] and each positive root  $\rho$  has a corresponding negative root  $-\rho$ , we have a complete inventory for the set of roots  $\Delta$  for  $A_3$ . There are  $|\Delta| = 12$  roots, so the group dimension  $d = 12 + 3 = 15$ , as expected for  $\mathfrak{su}(4)$ .

To get a geometrical picture of the algebra, we examine the Cartan matrix in Eq. (7.1.23). The angle between simple roots  $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2\}$  and between  $\{\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3\}$  is  $120^\circ$ , while  $\bar{\alpha}_1$  and  $\bar{\alpha}_3$  are orthogonal. Combined with the fact that the algebra is simply laced and the inventory of roots (Fig. 7.2), one finds that the roots correspond to the twelve vertices of a certain quasiregular polyhedron (a cuboctahedron). See Fig. 7.3.

## 7.2 $\mathfrak{sp}(2n) : C_n$

Next we consider  $C_n$ , the Lie algebra associated to symplectic  $\mathfrak{Sp}(2n)$  transformations. From module 2A, Eqs. (2A.3.1) and (2A.3.3), the defining conditions for a symplectic transformation  $\hat{U}$  on a  $2n$ -component complex vector are

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}_{2n} \quad (7.2.1a)$$

$$\hat{U}^\top \hat{\epsilon} \hat{U} = \hat{\epsilon} \quad (7.2.1b)$$

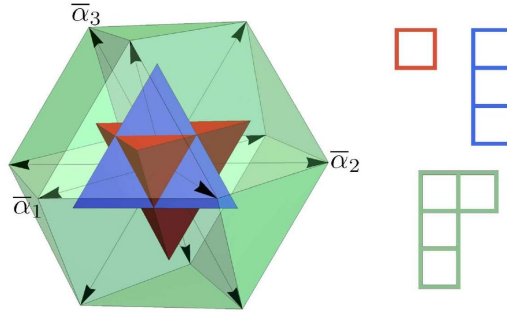


Figure 7.3: Root geometry for  $\mathfrak{su}(4) = A_3$ . The twelve roots correspond to the vertices of the green polyhedron (a cuboctahedron). The vertices of the embedded red (blue) tetrahedron correspond to the four weights of the defining "4" (conjugate "4") representation, as demonstrated module 8. The box arrays on the right are the corresponding Young tableaux, also discussed in module 8.

where the  $2n \times 2n$  matrix  $\hat{\epsilon}$  is a block rank-2 Levi-Civita symbol,

$$\hat{\epsilon} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \hat{1}_n \\ -\hat{1}_n & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2.2)$$

If we express  $\hat{U}$  as the exponentiation of an (antihermitian)  $2n \times 2n$  matrix  $\hat{Y}$

$$\hat{U} = \exp(\hat{Y})$$

then the symplectic condition translates to

$$\hat{Y}^\top = \hat{\epsilon} \hat{Y} \hat{\epsilon} \quad (7.2.3)$$

As with  $\hat{\epsilon}$ , we decompose this into  $n \times n$  blocks,

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 & \hat{Y}_2 \\ \hat{Y}_3 & \hat{Y}_4 \end{bmatrix} \quad (7.2.4)$$

Eq. (7.2.3) then implies that

$$\begin{aligned} \hat{Y}_4 &= -\hat{Y}_1^\top \\ \hat{Y}_2 &= \hat{Y}_2^\top \\ \hat{Y}_3 &= \hat{Y}_3^\top \end{aligned}$$

Let  $1 \leq j, k \leq n$ . We can define the following basis elements for  $\hat{Y}$ ,

$$\hat{E}_{jk}^1 \equiv \hat{E}_{jk} - \hat{E}_{k+n, j+n} \quad (7.2.6a)$$

$$\hat{E}_{jk}^2 \equiv \hat{E}_{j, k+n} + \hat{E}_{k, j+n} = \hat{E}_{(jk)}^2 \quad (7.2.6b)$$

$$\hat{E}_{jk}^3 \equiv \hat{E}_{j+n, k} + \hat{E}_{k+n, j} = \hat{E}_{(jk)}^3 \quad (7.2.6c)$$

The parentheses here denote symmetrization [Eq. (1.4.2)]. The total number of such elements is

$$n^2 + n(n+1) = n(2n+1)$$

which is the correct group dimension [Eq. (2A.3.5)].

Explicitly for  $n = 5[\text{sp}(10)]$ , we have (e.g.)

$$\hat{E}_{34}^1 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (7.2.7a)$$

$$\hat{E}_{34}^2 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$\hat{E}_{25}^3 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (7.2.7c)$$

Using Eq. (7.1.3), one can verify the following Lie brackets implied by the corresponding commutation relations:

$$[e_{jk}^1, e_{lp}^1] = \delta_{kl}e_{jp}^1 - \delta_{jp}e_{lk}^1 \quad (7.2.8a)$$

$$[e_{jk}^1, e_{lp}^2] = \delta_{kl}e_{jp}^2 + \delta_{pk}e_{jl}^2 \quad (7.2.8b)$$

$$[e_{jk}^1, e_{lp}^3] = -\delta_{jp}e_{kl}^3 - \delta_{jl}e_{kp}^3 \quad (7.2.8c)$$

$$[e_{jk}^2, e_{lp}^2] = 0 \quad (7.2.8d)$$

$$[e_{jk}^3, e_{lp}^3] = 0 \quad (7.2.8e)$$

$$[e_{jk}^2, e_{lp}^3] = \delta_{kl}e_{jp}^1 + \delta_{jp}e_{kl}^1 + \delta_{pk}e_{jl}^1 + \delta_{jl}e_{kp}^1 \quad (7.2.8f)$$

**Exercise**

Verify all of the Lie brackets in Eq. (7.2.8)

A basis for the  $n$ -dimensional Cartan subalgebra  $H$  is given by the diagonal traceless elements  $\{e_{jj}^1\}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ; a generic element  $h \in H$  is

$$h = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_{jj}^1 \quad (7.2.9)$$

Then

$$[h, e_{jk}^1] = (\lambda_j - \lambda_k) e_{jk}^1 \quad (7.2.10a)$$

$$[h, e_{jk}^2] = (\lambda_j + \lambda_k) e_{jk}^2 \quad (7.2.10b)$$

$$[h, e_{jk}^3] = -(\lambda_j + \lambda_k) e_{jk}^3 \quad (7.2.10c)$$

so that the collection of  $\{e_{jk}^{1,2,3}\}$  excluding diagonal  $\{e_{jj}^1\}$  is the set of root vectors.

The simple roots can be associated to the root vectors

| root vector                                 | root $\alpha(h)$                                    |          |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------|
| $e_{12}^1 \equiv e_{\bar{\alpha}_1}$        | $\bar{\alpha}_1(h) = \lambda_1 - \lambda_2$         | (7.2.11) |
| $e_{23}^1 \equiv e_{\bar{\alpha}_2}$        | $\bar{\alpha}_2(h) = \lambda_2 - \lambda_3$         |          |
| $\vdots$                                    | $\vdots$                                            |          |
| $e_{n-1,n}^1 \equiv e_{\bar{\alpha}_{n-1}}$ | $\bar{\alpha}_{n-1}(h) = \lambda_{n-1} - \lambda_n$ |          |
| $e_{n-n}^2 \equiv e_{\bar{\alpha}_n}$       | $\bar{\alpha}_n(h) = 2\lambda_n$                    |          |

By definition, we take  $\bar{\alpha}_1 > \bar{\alpha}_2 > \dots > \bar{\alpha}_n$  (lexicographic ordering). Then positive roots are associated to root vectors  $\{e_{jk}^1\}$  with  $j < k$ , and to  $\{e_{jk}^2\}$ . Negative root vectors are  $\{e_{jk}^1\}$  ( $j > k$ ) and  $\{e_{jk}^3\}$ . The positive root associated to  $e_{jk}^1$  ( $j < k$ ) is expressed in terms of simple roots identically as in Eq. (7.1.11). For  $e_{ij}^2$ , the decomposition is (taking  $j \geq i$  WLoG)

$$\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_n) + 2\lambda_n = \sum_{l=i}^{j-1} \bar{\alpha}_l + 2 \sum_{l=j}^{n-1} \bar{\alpha}_l + \bar{\alpha}_n \quad (7.2.12)$$

The commutation relations between the simple root vectors are given by

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] = \delta_{j,i+1} e_{i,i+2}^1 - \delta_{j,i-1} e_{i-1,i+1}^1, \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (7.2.13a)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_n}] = 2\delta_{i,n-1} e_{n-1,n}^2, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (7.2.13b)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_j}] = \delta_{ij} (e_{i,i}^1 - e_{i+1,i+1}^1), \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (7.2.13c)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_n}] = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (7.2.13d)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_n}, e_{-\bar{\alpha}_n}] = 4e_{nn}^1 \quad (7.2.13e)$$

The Killing form between Cartan subalgebra elements

$$h \equiv \sum_i \lambda_i e_{ii}^1, \quad h' \equiv \sum_j \lambda'_j e_{jj}^1 \quad (7.2.14)$$

is given by

$$\begin{aligned}
(h, h') &= \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n ([h, [h', e_{pq}^1]])_{\text{coeff. of } e_{pq}^1} + \sum_{p \geq q=1}^n ([h, [h', e_{pq}^2]])_{\text{coeff. of } e_{pq}^2} + \sum_{p \geq q=1}^n ([h, [h', e_{pq}^3]])_{\text{coeff. of } e_{pq}^3} \\
&= \sum_{p,q=1}^n (\lambda_p - \lambda_q) (\lambda'_p - \lambda'_q) + 2 \sum_{p \geq q=1}^n (\lambda_p + \lambda_q) (\lambda'_p + \lambda'_q) \\
&= \sum_{p,q=1}^n (\lambda_p - \lambda_q) (\lambda'_p - \lambda'_q) + \sum_{p,q=1}^n (\lambda_p + \lambda_q) (\lambda'_p + \lambda'_q) + 4 \sum_{p=1}^n \lambda_p \lambda'_p \\
&= 4(n+1) \sum_{p=1}^n \lambda_p \lambda'_p
\end{aligned} \tag{7.2.15}$$

Now since

$$(h_{\bar{\alpha}_i}, h') = \bar{\alpha}_i(h') = \begin{cases} \lambda'_i - \lambda'_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ 2\lambda'_n, & i = n \end{cases} \tag{7.2.16}$$

we conclude that

$$\begin{aligned}
h_{\bar{\alpha}_i} &= \frac{1}{4(n+1)} (e_{ii}^1 - e_{i+1,i+1}^1) \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\bar{\alpha}_i)} e_{jj}^1, \quad \lambda_j^{(\bar{\alpha}_i)} = \frac{1}{4(n+1)} (\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j}), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
h_{\bar{\alpha}_n} &= \frac{1}{2(n+1)} e_{nn}^1 \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\bar{\alpha}_n)} e_{jj}^1, \quad \lambda_j^{(\bar{\alpha}_n)} = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{j,n}
\end{aligned} \tag{7.2.17}$$

Eqs. (7.2.13c), (7.2.13e), (7.2.17) and (7.1.18) therefore give the Killing forms of the simple root vectors,

$$\begin{aligned}
(e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_i}) &= 4(n+1), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\
(e_{\bar{\alpha}_n}, e_{-\bar{\alpha}_n}) &= 8(n+1)
\end{aligned} \tag{7.2.18}$$

We can now compute the scalar products between simple roots, using

$$\begin{aligned}
[h_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] &= \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle e_{\bar{\alpha}_j} \\
&= \left( \lambda_j^{(\bar{\alpha}_i)} - \lambda_{j+1}^{(\bar{\alpha}_i)} \right) e_{\bar{\alpha}_j} = \frac{1}{4(n+1)} (2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}) e_{\bar{\alpha}_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \\
[h_{\bar{\alpha}_n}, e_{\bar{\alpha}_j}] &= \langle \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_j \rangle e_{\bar{\alpha}_j} \\
&= \left( \lambda_j^{(\bar{\alpha}_n)} - \lambda_{j+1}^{(\bar{\alpha}_n)} \right) e_{\bar{\alpha}_j} = -\frac{1}{2(n+1)} \delta_{j+1,n} e_{\bar{\alpha}_j}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\
[h_{\bar{\alpha}_n}, e_{\bar{\alpha}_n}] &= \langle \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_n \rangle e_{\bar{\alpha}_n} \\
&= \frac{1}{(n+1)} e_{\bar{\alpha}_n}
\end{aligned} \tag{7.2.19}$$

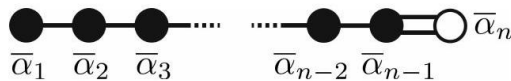


Figure 7.4:  $\mathfrak{sp}(2n) = C_n$ .

Therefore

$$\begin{aligned}\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle &= \frac{1}{4(n+1)} (2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}), & 1 \leq i, j \leq n-1 \\ \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_n \rangle &= -\frac{1}{2(n+1)} \delta_{i,n-1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \langle \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_n \rangle &= \frac{1}{(n+1)}\end{aligned}$$

$$\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_n \rangle = -\frac{1}{2(n+1)} \delta_{i,n-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \text{simple root scalar products in } C_n$$

The last equation implies that  $\bar{\alpha}_n$  is a long root, with  $|\bar{\alpha}_n|^2 = 2|\bar{\alpha}_j|^2, 1 \leq j \leq n-1$ .  $C_n$  is not simply laced.

The corresponding Cartan matrix is given by [via Eq. (7.1.22)]

$$\hat{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Cartan matrix for } C_n \quad (7.2.21)$$

The Dynkin diagram is shown in Fig. 7.4.

### 7.3 $\mathfrak{so}(2n) : D_n$

Next we consider  $D_n$ , the Lie algebra associated to special orthogonal  $\text{SO}(2n)$  transformations on even-dimensional vectors. From Eq. (2A.2.2) in module 2A, the defining condition for an orthogonal transformation  $\hat{U}$  on a  $2n$ -component vector is

$$\hat{U}^\top \hat{U} = \hat{1}_{2n} \quad (7.3.1)$$

If we express  $\hat{U}$  as the exponentiation of an (antihermitian)  $2n \times 2n$  matrix  $\hat{Y}$

$$\hat{U} = \exp(\hat{Y})$$

then we have the antisymmetry condition

$$-\hat{Y}^\top = \hat{Y} \quad (7.3.2)$$

Since we would like to identify Cartan subalgebra elements with diagonal matrices, Eq. (7.3.2) is inconvenient. Instead, we make a unitary (but not orthogonal) basis transformation,

$$\hat{U}' \equiv \hat{V}^\dagger \hat{U} \hat{V}, \quad \hat{V}^\dagger \hat{V} = \hat{1}_{2n} \quad (7.3.3)$$

Then

$$\begin{aligned}\hat{U}'^\top \hat{M} \hat{U}' &= \hat{M} \\ \hat{M} &\equiv \hat{V}^\top \hat{V} = \hat{M}^\top, \quad \hat{M}^\dagger \hat{M} = \hat{1}_{2n}\end{aligned} \quad (7.3.4)$$

For  $\hat{U}' = \exp(\hat{Y}')$

$$-\hat{M}^\dagger \hat{Y}'^\top \hat{M} = \hat{Y}' \quad (7.3.5)$$

We choose  $\hat{V}$  to have the block form

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i\hat{1}_n & -i\hat{1}_n \\ -\hat{1}_n & -\hat{1}_n \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \hat{M} = \hat{M}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & \hat{1}_n \\ \hat{1}_n & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3.6)$$

As with  $\hat{M}$ , we decompose  $\hat{Y}'$  into  $n \times n$  blocks,

$$\hat{Y}' = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 & \hat{Y}_2 \\ \hat{Y}_3 & \hat{Y}_4 \end{bmatrix} \quad (7.3.7)$$

Eq. (7.3.5) then implies that

$$\begin{aligned} \hat{Y}_4 &= -\hat{Y}_1^\top \\ \hat{Y}_2 &= -\hat{Y}_2^\top \\ \hat{Y}_3 &= -\hat{Y}_3^\top \end{aligned} \quad (\text{array})$$

This is almost the same as the symplectic case [Eq. (7.2.5)], except the off-diagonal blocks are now antisymmetric. Let  $1 \leq j, k \leq n$ . We can define the following basis elements for  $\hat{Y}$ ,

$$\hat{E}_{jk}^1 \equiv \hat{E}_{jk} - \hat{E}_{k+n, j+n}, \quad (7.3.9a)$$

$$\hat{E}_{jk}^2 \equiv \hat{E}_{j, k+n} - \hat{E}_{k, j+n} = \hat{E}_{[jk]}^2, \quad (7.3.9 \text{ b})$$

$$\hat{E}_{jk}^3 \equiv \hat{E}_{j+n, k} - \hat{E}_{k+n, j} = \hat{E}_{[jk]}^3. \quad (7.3.9c)$$

The parentheses here denote antisymmetrization [Eq. (1.4.2)]. The total number of such elements is

$$n^2 + n(n-1) = n(2n-1)$$

which is the correct group dimension [Eq. (7.3.2)].

Relative to the  $n = 5$  symplectic example in Eq. (7.2.7),

$$\hat{E}_{34}^2 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (7.3.10a)$$

$$\hat{E}_{25}^3 \rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (7.3.10b)$$



Using Eq. (7.1.3), the Lie brackets are given by [c.f. Eq. (7.2.8)]

$$[e_{jk}^1, e_{lp}^1] = \delta_{kl}e_{jp}^1 - \delta_{jp}e_{lk}^1 \quad (7.3.11a)$$

$$[e_{jk}^1, e_{lp}^2] = \delta_{kl}e_{jp}^2 - \delta_{pk}e_{jl}^2 \quad (7.3.11b)$$

$$[e_{jk}^1, e_{lp}^3] = \delta_{jp}e_{kl}^3 - \delta_{jl}e_{kp}^3 \quad (7.3.11c)$$

$$[e_{jk}^2, e_{lp}^2] = 0$$

$$[e_{jk}^3, e_{lp}^3] = 0 \quad (7.3.11e)$$

$$[e_{jk}^2, e_{lp}^3] = \delta_{kl}e_{jp}^1 + \delta_{jp}e_{kl}^1 - \delta_{pk}e_{jl}^1 - \delta_{jl}e_{kp}^1 \quad (7.3.11f)$$

### Exercise

Verify the Lie brackets in Eq. (7.3.11).

A generic Cartan subalgebra  $H$  element is given by

$$h = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_{jj}^1 \quad (7.3.12)$$

Then

$$[h, e_{jk}^1] = (\lambda_j - \lambda_k) e_{jk}^1 \quad (7.3.13a)$$

$$[h, e_{jk}^2] = (\lambda_j + \lambda_k) e_{jk}^2 \quad (7.3.13b)$$

$$[h, e_{jk}^3] = -(\lambda_j + \lambda_k) e_{jk}^3 \quad (7.3.13c)$$

The simple roots can be associated to the root vectors

| root vector                                 | root $\alpha(h)$                                    |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $e_{12}^1 \equiv e_{\bar{\alpha}_1}$        | $\bar{\alpha}_1(h) = \lambda_1 - \lambda_2$         |
| $e_{23}^1 \equiv e_{\bar{\alpha}_2}$        | $\bar{\alpha}_2(h) = \lambda_2 - \lambda_3$         |
| $\vdots$                                    | $\vdots$                                            |
| $e_{n-1,n}^1 \equiv e_{\bar{\alpha}_{n-1}}$ | $\bar{\alpha}_{n-1}(h) = \lambda_{n-1} - \lambda_n$ |
| $e_{n-1,n}^2 \equiv e_{\bar{\alpha}_n}$     | $\bar{\alpha}_n(h) = \lambda_{n-1} + \lambda_n$     |

By definition, we take  $\bar{\alpha}_1 > \bar{\alpha}_2 > \dots > \bar{\alpha}_n$  (lexicographic ordering). Then positive roots are associated to root vectors  $\{e_{jk}^1\}$  with  $j < k$ , and to  $\{e_{jk}^2\}$ . Negative root vectors are  $\{e_{jk}^1\}$  ( $j > k$ ) and  $\{e_{jk}^3\}$ . The positive root associated to  $e_{jk}^1$  ( $j < k$ ) is expressed in terms of simple roots identically as in Eq. (7.1.11). For  $e_{ij}^2$ , the decomposition is (taking  $j > i$  WLoG)

$$\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{n-1}) + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) + (\lambda_{n-1} + \lambda_n) = \sum_{l=i}^{j-1} \bar{\alpha}_l + 2 \sum_{l=j}^{n-2} \bar{\alpha}_l + \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{\alpha}_n \quad (7.3.15)$$

The commutation relations between the simple root vectors are given by

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] = \delta_{j,i+1} e_{i,i+2}^1 - \delta_{j,i-1} e_{i-1,i+1}^1, \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (7.3.16a)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_n}] = \delta_{i,n-2} e_{n-2,n}^2, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (7.3.16b)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_j}] = \delta_{ij} (e_{i,i}^1 - e_{i+1,i+1}^1), \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (7.3.16c)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_n}] = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (7.3.16d)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_n}, e_{-\bar{\alpha}_n}] = e_{n-1,n-1}^1 + e_{n,n}^1. \quad (7.3.16e)$$

The Killing form between Cartan subalgebra elements

$$h \equiv \sum_i \lambda_i e_{ii}^1, \quad h' \equiv \sum_j \lambda'_j e_{jj}^1 \quad (7.3.17)$$

is given by

$$(h, h') = 4(n-1) \sum_{p=1}^n \lambda_p \lambda'_p$$

### Exercise

Verify Eq. (7.3.18).

Now since

$$(h_{\bar{\alpha}_i}, h') = \bar{\alpha}_i(h') = \begin{cases} \lambda'_i - \lambda'_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \lambda'_{n-1} + \lambda'_n, & i = n \end{cases} \quad (7.3.19)$$

we conclude that

$$h_{\bar{\alpha}_i} = \frac{1}{4(n-1)} (e_{ii}^1 - e_{i+1,i+1}^1) \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\pi_i)} e_{jj}^1, \quad \lambda_j^{(\pi_i)} = \frac{1}{4(n-1)} (\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j}), \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (7.3.20)$$

$$h_{\bar{\alpha}_n} = \frac{1}{4(n-1)} (e_{n-1,n-1}^1 + e_{n,n}^1) \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\bar{\sigma}_n)} e_{jj}^1, \quad \lambda_j^{(\bar{\sigma}_n)} = \frac{1}{4(n-1)} (\delta_{n-1,j} + \delta_{n,j})$$

Eqs. (7.3.16c), (7.3.16e), (7.3.20) and (7.1.18) therefore give the Killing forms of the simple root vectors,

$$(e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_i}) = 4(n-1), \quad 1 \leq i \leq n \quad (7.3.21)$$

We can now compute the scalar products between simple roots, using

$$\begin{aligned} [h_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] &= \frac{1}{4(n-1)} (2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}) e_{\bar{\alpha}_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1, \\ [h_{\bar{\alpha}_n}, e_{\bar{\alpha}_j}] &= -\frac{1}{4(n-1)} \delta_{j,n-2} e_{\bar{\alpha}_j}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ [h_{\bar{\alpha}_n}, e_{\bar{\alpha}_n}] &= \frac{2}{4(n-1)} e_{\bar{\alpha}_n} \end{aligned} \quad (7.3.22)$$

Therefore

$$\begin{aligned} \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle &= \frac{1}{4(n-1)} (2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}), \quad 1 \leq i, j \leq n-1, \\ \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_n \rangle &= -\frac{1}{4(n-1)} \delta_{i,n-2}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \langle \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_n \rangle &= \frac{2}{4(n-1)}, \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

simple root scalar products in  $D_n$ .

Since all roots have the same length,  $D_n$  is simply laced.

The corresponding Cartan matrix is given by [via Eq. (7.1.22)]

$$\hat{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Cartan matrix for } D_n. \quad (7.3.24)$$

The Dynkin diagram is shown in Fig. 7.5.



Figure 7.5:  $\mathfrak{so}(2n) = D_n$ .

#### 7.4 $\mathfrak{so}(2n+1) : B_n$

Finally we consider  $B_n \Leftrightarrow \mathfrak{so}(2n+1)$ . We can view the  $B_n$  generators in the defining representation as equivalent to those for  $D_n$ , but with an added "zeroth" row and "zeroth" column preceding the  $2n \times 2n$  generators of  $\mathfrak{so}(2n)$ ; i.e. a vector index  $i$  runs from  $0 \leq i \leq 2n$ .

As in Sec. 7.3, we begin by rotating the orthogonal condition  $\hat{U}^\top \hat{U} = \hat{1}_{2n+1}$  to a different basis. Applying the transformation as in Eq. (7.3.3), we choose

$$\hat{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \hat{0}_{1,n} & \hat{0}_{1,n} \\ \hat{0}_{n,1} & i\hat{1}_n & -i\hat{1}_n \\ \hat{0}_{n,1} & -\hat{1}_n & -\hat{1}_n \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \hat{M} = \hat{V}^\top \hat{V} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{0}_{1,n} & \hat{0}_{1,n} \\ \hat{0}_{n,1} & 0 & \hat{1}_n \\ \hat{0}_{n,1} & \hat{1}_n & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4.1)$$

Here  $\hat{0}_{1,n}$  ( $\hat{0}_{n,1}$ ) denotes an  $n$ -fold row (column) of zeroes. The  $(2n+1) \times (2n+1)$  generator  $\hat{Y}'$  satisfies the condition as in Eq. (7.3.5), which allows the block decomposition [c.f. Eqs. (7.3.7) and (7.3.8)]

$$\hat{Y}' = \begin{bmatrix} b^1 & \hat{c}_{1,n}^1 & \hat{c}_{1,n}^2 \\ \hat{d}_{n,1}^1 & \hat{Y}_1 & \hat{Y}_2 \\ \hat{d}_{n,1}^2 & \hat{Y}_3 & \hat{Y}_4 \end{bmatrix} \quad (7.4.2)$$

Eq. (7.3.5) then implies that

$$\begin{aligned} \hat{Y}_4 &= -\hat{Y}_1^\top \\ \hat{Y}_2 &= -\hat{Y}_2^\top \\ \hat{Y}_3 &= -\hat{Y}_3^\top \\ b^1 &= 0 \\ \hat{c}_{1,n}^1 &= -\left[\hat{d}_{n,1}^2\right]^\top \\ \hat{c}_{1,n}^2 &= -\left[\hat{d}_{n,1}^1\right]^\top \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

The basis elements for  $\hat{Y}$  include  $\{\hat{E}_{jk}^1, \hat{E}_{jk}^2, \hat{E}_{jk}^3\}$  ( $1 \leq j, k \leq n$ ) from Eq. (7.3.9), and

$$\hat{E}_j^4 \equiv \hat{E}_{0,j} - \hat{E}_{j+n,0} \quad (7.4.4a)$$

$$\hat{E}_j^5 \equiv \hat{E}_{j,0} - \hat{E}_{0,j+n} \quad (7.4.4 b)$$

both with  $1 \leq j \leq n$ . The total number of such elements is

$$n(2n-1) + 2n = n(2n+1)$$

Relative to the example in Eq. (7.3.10),  $\{\hat{E}_{jk}^1, \hat{E}_{jk}^2, \hat{E}_{jk}^3\}$  are now block embedded in  $11 \times 11$  matrices (after one initial row and one initial column of zeroes), while (e.g.)

$$\hat{E}_4^4 \rightarrow \left[ \begin{array}{c|cccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (7.4.5a)$$

$$\hat{E}_3^5 \rightarrow \left[ \begin{array}{c|cccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (7.4.5 b)$$

In addition to the Lie brackets in Eq. (7.3.11), we have

$$[e_{jk}^1, e_l^4] = -\delta_{jl} e_k^4 \quad (7.4.6a)$$

$$[e_{jk}^1, e_l^5] = \delta_{kl} e_j^5 \quad (7.4.6 b)$$

$$[e_{jk}^2, e_l^4] = \delta_{jl} e_k^5 - \delta_{kl} e_j^5 \quad (7.4.6c)$$

$$[e_{jk}^2, e_l^5] = 0 \quad (7.4.6 d)$$

$$[e_{jk}^3, e_l^4] = 0 \quad (7.4.6e)$$

$$[e_{jk}^3, e_l^5] = \delta_{jl} e_k^4 - \delta_{kl} e_j^4 \quad (7.4.6f)$$

$$[e_j^4, e_k^4] = -e_{jk}^3 \quad (7.4.6g)$$

$$[e_j^5, e_k^5] = -e_{jk}^2 \quad (7.4.6h)$$

$$[e_j^4, e_k^5] = -e_{kj}^1 \quad (7.4.6i)$$

•

**Exercise**

Verify the Lie brackets in Eq. (7.4.6).

A generic Cartan subalgebra  $H$  element is given by

$$h = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_{jj}^1 \quad (7.4.7)$$

Then

$$[h, e_{jk}^1] = (\lambda_j - \lambda_k) e_{jk}^1 \quad (7.4.8a)$$

$$[h, e_{jk}^2] = (\lambda_j + \lambda_k) e_{jk}^2 \quad (7.4.8b)$$

$$[h, e_{jk}^3] = -(\lambda_j + \lambda_k) e_{jk}^3 \quad (7.4.8c)$$

$$[h, e_j^4] = -\lambda_j e_j^4 \quad (7.4.8d)$$

$$[h, e_j^5] = \lambda_j e_j^5 \quad (7.4.8e)$$

The simple roots can be associated to the root vectors

| root vector                                 | root $\alpha(h)$                                    |         |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------|---------|
| $e_{12}^1 \equiv e_{\bar{\alpha}_1}$        | $\bar{\alpha}_1(h) = \lambda_1 - \lambda_2$         |         |
| $e_{23}^1 \equiv e_{\bar{\alpha}_2}$        | $\bar{\alpha}_2(h) = \lambda_2 - \lambda_3$         |         |
| $\vdots$                                    | $\vdots$                                            |         |
| $e_{n-1,n}^1 \equiv e_{\bar{\alpha}_{n-1}}$ | $\bar{\alpha}_{n-1}(h) = \lambda_{n-1} - \lambda_n$ |         |
| $e_n^5 \equiv e_{\bar{\alpha}_n}$           | $\bar{\alpha}_n(h) = \lambda_n$                     | (7.4.9) |

By definition, we take  $\bar{\alpha}_1 > \bar{\alpha}_2 > \dots > \bar{\alpha}_n$  (lexicographic ordering). The positive roots are associated to root vectors  $\{e_{jk}^1\}$  with  $j < k$ ,  $\{e_{jk}^2\}$ , and  $\{e_j^5\}$ . Negative root vectors are  $\{e_{jk}^1\}$  ( $j > k$ ),  $\{e_{jk}^3\}$ , and  $\{e_j^4\}$ . The positive root associated to  $e_{jk}^1$  ( $j < k$ ) is expressed in terms of simple roots identically as in Eq. (7.1.11). For  $e_{ij}^2$ , the decomposition is (taking  $j > i$  WLoG)

$$\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_n) + 2\lambda_n = \sum_{l=i}^{j-1} \bar{\alpha}_l + 2 \sum_{l=j}^{n-1} \bar{\alpha}_l + 2\bar{\alpha}_n \quad (7.4.10)$$

Eq. (7.4.10) has almost the same form as the symplectic  $C_n$  case, Eq. (7.2.12); the difference is the prefactor of two for  $\bar{\alpha}_n$  in Eq. (7.4.10). In fact we will see that  $B_n$  and  $C_n$  are closely related (although not identical, except for  $B_2 = C_2$ ). For  $e_i^5$ , the decomposition is

$$\lambda_i = (\lambda_i - \lambda_n) + \lambda_n = \sum_{l=i}^{n-1} \bar{\alpha}_l + \bar{\alpha}_n$$

The commutation relations between the simple root vectors are given by

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] = \delta_{j,i+1} e_{i,i+2}^1 - \delta_{j,i-1} e_{i-1,i+1}^1, \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (7.4.12a)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_n}] = \delta_{i,n-1} e_{n-1,n}^5, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (7.4.12b)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_j}] = \delta_{ij} (e_{i,i}^1 - e_{i+1,i+1}^1), \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \quad (7.4.12c)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_n}] = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (7.4.12d)$$

$$[e_{\bar{\alpha}_n}, e_{-\bar{\alpha}_n}] = e_{nn}^1$$

The Killing form between Cartan subalgebra elements

$$h \equiv \sum_i \lambda_i e_{ii}^1, \quad h' \equiv \sum_j \lambda'_j e_{jj}^1 \quad (7.4.13)$$

is given by

$$(h, h') = 4 \left( n - \frac{1}{2} \right) \sum_{p=1}^n \lambda_p \lambda'_p \quad (7.4.14)$$

### Exercise

Verify Eq. (7.4.14).

Now since

$$(h_{\bar{\alpha}_i}, h') = \bar{\alpha}_i(h') = \begin{cases} \lambda'_i - \lambda'_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \lambda'_n, & i = n \end{cases} \quad (7.4.15)$$

we conclude that

$$\begin{aligned} h_{\bar{\alpha}_i} &= \frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} (e_{ii}^1 - e_{i+1,i+1}^1) \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\bar{\alpha}_i)} e_{jj}^1, & \lambda_j^{(\bar{\alpha}_i)} &= \frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} (\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j}), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ h_{\bar{\alpha}_n} &= \frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} e_{nn}^1 \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\bar{\alpha}_n)} e_{jj}^1, & \lambda_j^{(\bar{\alpha}_n)} &= \frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} \delta_{n,j} \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

Eqs. (7.4.12c), (7.4.12e), (7.4.16) and (7.1.18) therefore give the Killing forms of the simple root vectors,

$$(e_{\bar{\alpha}_i}, e_{-\bar{\alpha}_i}) = 4 \left( n - \frac{1}{2} \right), \quad 1 \leq i \leq n \quad (7.4.17)$$

We can now compute the scalar products between simple roots, using

$$\begin{aligned} [h_{\bar{\alpha}_i}, e_{\bar{\alpha}_j}] &= \frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} (2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}) e_{\bar{\alpha}_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \\ [h_{\bar{\alpha}_n}, e_{\bar{\alpha}_j}] &= -\frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} \delta_{j,n-1} e_{\bar{\alpha}_j}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ [h_{\bar{\alpha}_n}, e_{\bar{\alpha}_n}] &= \frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} e_{\bar{\alpha}_n} \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

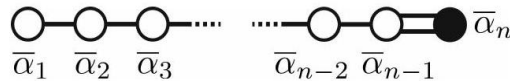


Figure 7.6:  $\mathfrak{so}(2n+1) = B_n$ .

Therefore

$$\begin{aligned} \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle &= \frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} (2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}), \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \\ \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_n \rangle &= -\frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} \delta_{i,n-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \langle \bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_n \rangle &= \frac{1}{4(n-\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

simple root scalar products in  $B_n$ .

The last equation implies that  $\bar{\alpha}_n$  is a short root, with  $|\bar{\alpha}_n|^2 = |\bar{\alpha}_j|^2/2, 1 \leq j \leq n-1$ . Like  $C_n, B_n$  is not simply laced.

The corresponding Cartan matrix is given by [via Eq. (7.1.22)]

$$\hat{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Cartan matrix for } B_n \quad (7.4.20)$$

The Dynkin diagram is shown in Fig. 7.6.

The Cartan matrices/Dynkin diagrams for  $C_n$  [Eq. (7.2.21), Fig. 7.4] and  $B_n$  [Eq. (7.4.20), Fig. 7.6] are almost identical. In both cases, the only non-vanishing simple root inner products involve "nearest-neighbors"  $\bar{\alpha}_i$  and  $\bar{\alpha}_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1$ . The first  $n-1$  simple roots share the same length, while  $\bar{\alpha}_n$  is a long (short) root for  $C_n (B_n)$ . In fact, the root systems for  $B_n$  and  $C_n$  have the same geometry, except that long and short roots are interchanged.

On the other hand, we will see that  $D_n$  and  $B_n$  have more in common in terms of the  $n$  simplest (so called fundamental<sup>1</sup>) representations, described in module 8. In particular, both  $D_n$  and  $B_n$  possess fundamental spinor representations, which are qualitatively distinct and cannot be built by tensoring together defining vector indices. By contrast, every representation of  $C_n$  or  $A_n$  can be built by tensoring together indices transforming in the the defining  $2n$ -dimensional  $[(n+1)\text{-dimensional}]$  representation.

### Exercise

Find the inventory of roots and plot the 3D root geometry for  $B_3$  and  $C_3$ , following the same approach used for  $A_3$  in Sec. 7.1.1.

## 7.5 Classical Lie algebras to rank 4; equivalent algebras

In Table 1, we show the classical Lie algebras through rank four. Various "accidental" equivalences between different algebras of the same rank are indicated, and easily recognized by the identical Dynkin diagrams. All four families are distinct for each rank above three. Of course, equivalence of the Lie algebras does not imply equivalence of the corresponding symmetry groups.

## 7.6 The exceptional algebras

The four classical families studied above do not exhaust the possibilities for (semi-)simple Lie algebras. It is perhaps surprising that there are only five additional possibilities corresponding to particular algebras of fixed rank. This can be shown by a careful determination of allowable Dynkin diagrams. The argument is explicated in chapter IX of Cahn [1] and chapter 20 of Georgi [2];

Table 1: Classical Lie algebras to rank 4.

<sup>1</sup> Note that in the physics literature, the terms "defining" and "fundamental" are often used interchangeably. However, for a given Lie algebra  $L$ , there exists a set of "simplest" representations (which always includes the defining one), and mathematicians and mathematical physicists refer to each member of this set as a fundamental representation. We will define fundamental representations precisely in module 8, using the fundamental weights.

| Rank | Dynkin | Cartan                 | Compact                                                       | # of positive roots |
|------|--------|------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------|
| 1    | (A)1   | $A_1$                  | $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{so}(3)$      | 1                   |
|      | (A)2   | $A_2$                  | $\mathfrak{su}(3)$                                            | 3                   |
| 2    | (B)2   | $B_2 = C_2$            | $\mathfrak{so}(5) = \mathfrak{sp}(4)$                         | 4                   |
|      | (D)2   | $D_2 = A_1 \times A_1$ | $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ | 2                   |
|      | (A)3   | $A_3 = D_3$            | $\mathfrak{su}(4) = \mathfrak{so}(6)$                         | 6                   |
| 3    | (B)3   | $B_3$                  | $\mathfrak{so}(7)$                                            | 9                   |
|      | (C)3   | $C_3$                  | $\mathfrak{sp}(6)$                                            | 9                   |
|      | (A)4   | $A_4$                  | $\mathfrak{su}(5)$                                            | 10                  |
| 4    | (B)4   | $B_4$                  | $\mathfrak{so}(9)$                                            | 16                  |
|      | (C)4   | $C_4$                  | $\mathfrak{sp}(8)$                                            | 16                  |
|      | (D)4   | $D_4$                  | $\mathfrak{so}(8)$                                            | 12                  |

we won't belabor it here. Instead, we simply state the Cartan matrices and Dynkin diagrams for the five exceptional algebras  $G_2$ ,  $F_4$ , and  $E_{6,7,8}$ . Our labeling conventions are the same as chapter 13 of [3].

Cartan matrices for the exceptional Lie algebras  $G_2$ ,  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ , and  $E_8$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{G_2} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, & \hat{A}_{E_6} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
\hat{A}_{F_4} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, & \hat{A}_{E_7} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, & (7.6.2) \\
\hat{A}_{E_8} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$



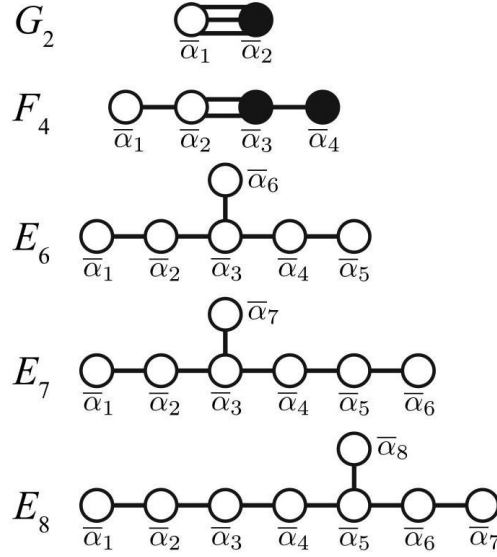


Figure 7.7: The five exceptional algebras.

### 8.3.7 Highest-weight representations

#### 8.1 Weights in 3 bases

In this module we focus on generic irreducible highest-weight representations, wherein we assume the existence of some state that cannot be raised using simple root vector operators, and we use the Master Weight Depth Formula (MWDF) Eq. (5.1.23) to obtain all other weights below it in the representation.

The emphasis so far has been on expressing weights in terms of the  $n$  simple roots  $\{\bar{\alpha}_j\}$  for a rank-  $n$  Lie algebra. In the adjoint representation, the set of positive roots consists of simple root combinations with non-negative integral coefficients. For a general representation, however, the coefficients are only required to be rational numbers. In order to specify a generic highest-weight representation, it is advantageous to develop a basis for the space of weights  $H^*$  in which expansion coefficients are integral.

##### 8.1.1 Roots, coroots, and fundamental weights

In fact, let us specify three different bases, each of which gives certain advantages. Let  $\Lambda$  be a weight in some irreducible representation. Then

Bases for a generic weight  $\Lambda \in H^*$

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \sum_{j=1}^n \kappa_j^{(\Lambda)} \bar{\alpha}_j, && \text{Expansion in terms of simple roots} \\
 &= \sum_{j=1}^n \kappa_j^{V(\Lambda)} \bar{\alpha}_j^\vee, && \text{Expansion in terms of simple coroots} \\
 &= \sum_{j=1}^n \Lambda_j \omega_j, && \text{Expansion in terms of fundamental weights}
 \end{aligned}
 \tag{8.1.1}$$

As defined in Eq. (5.1.23), the coroot  $\bar{\alpha}_i^\vee$  associated to a root  $\bar{\alpha}_i$  is defined via

$$\bar{\alpha}_i^\vee \equiv \frac{2\bar{\alpha}_i}{\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i \rangle}
 \tag{8.1.2}$$

The Cartan matrix is expressed as the scalar product between roots and coroots,  $A_{ij} = \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle$  [Eq. (5.3.8)]. The expansion coefficients  $\{\kappa_i^{(\Lambda)}, \kappa_j^{V(\Lambda)}\} \in \mathbb{Q}$  (the field of rational numbers) [Prop. VIII., Sec. 5.2.2].

The fundamental weights  $\{\omega_i\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) are defined to be dual to the set of simple coroots, i.e. these are mutually orthonormal:

$$\langle \omega_i, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle = \delta_{ij} \quad (8.1.3)$$

Since the simple coroots span  $H^*$ , the fundamental weights do as well. The coefficients  $\{\Lambda_j\}$  for the expansion of a weight  $\Lambda$  in terms of fundamental weights are the Dynkin labels, which are guaranteed to be integers. This follows from taking the inner product of the expansion with a simple coroot,

$$\langle \Lambda, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle = \Lambda_i = (m - p)_{\Lambda; \bar{\alpha}_i} \quad (8.1.4)$$

where  $m$  and  $p$  respectively denote the number of weights below and above  $\Lambda$  in the chain generated by acting with  $\hat{E}_{\pm \bar{\alpha}_i}$  [Eq. (5.1.23)].

We then immediately see that a highest weight  $\Lambda$  is defined by a set of non-negative Dynkin coefficients  $\{\Lambda_i \geq 0\}$ , since by definition  $p_{\Lambda; \bar{\alpha}_i} = 0 \forall \bar{\alpha}_i$ . Thus we can encode any representation by the  $n$  non-negative Dynkin coefficients of its highest weight. On the other hand, the expansion of weights in terms of simple roots is also useful, since it encodes the geometric picture for the representation connected to root scalar products. To relate these, we write the overlap matrices

$$\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = A_{ij} \frac{|\bar{\alpha}_j|^2}{2} \quad (8.1.5a)$$

$$\langle \bar{\alpha}_i^\vee, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle = \frac{2}{|\bar{\alpha}_i|^2} A_{ij} \quad (8.1.5b)$$

$$\langle \omega_i, \omega_j \rangle = F_{ij} \quad (8.1.5c)$$

In these equations  $A_{ij}$  denotes the Cartan matrix. The symmetric overlap matrix between fundamental weights  $F_{ij}$  is called the quadratic form matrix. Its relation to the Cartan matrix follows from

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= \langle \Lambda, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle = \sum_{i=1}^n \kappa_i^{(\Lambda)} A_{ij} \\ \kappa_j^{V(\Lambda)} &= \langle \Lambda, \omega_j \rangle = \sum_{i=1}^n \Lambda_i F_{ij} \\ \Rightarrow \Lambda_j &= \sum_{l=1}^n \kappa_l^{V(\Lambda)} \frac{2}{|\bar{\alpha}_l|^2} A_{lj} = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \sum_{l=1}^n F_{il} \frac{2}{|\bar{\alpha}_l|^2} A_{lj} \Rightarrow \sum_{l=1}^n F_{il} \frac{2}{|\bar{\alpha}_l|^2} A_{lj} = \delta_{ij} \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

so that

$$\left( \hat{F}^{-1} \right)_{ij} = \frac{2}{|\bar{\alpha}_i|^2} A_{ij} = \langle \bar{\alpha}_i^\vee, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle \quad (8.1.7)$$

The quadratic form matrices for all 9 classes of semi-simple Lie algebras are known explicitly. These are tabulated for the four classical Lie algebra families in Sec. 8.6; the exceptional cases can be found in section 13.A of [2].

For the moment, we note that Eq. (8.1.6) implies that

$$\Lambda = \kappa^{(\Lambda)} \hat{A}, \quad \kappa^{(\Lambda)} = \Lambda \hat{A}^{-1} \quad (8.1.8)$$

where we view  $\Lambda$  and  $\kappa^{(\Lambda)}$  as row vectors of coefficients. Consider the defining or 3 representation of  $\text{su}(3)$ , previously analyzed in Sec. 5.1. In Eq. (5.1.8), we found that the weights in this representation can be expressed as

$$\begin{aligned} M^A &= \frac{2}{3}\bar{\alpha}_1 + \frac{1}{3}\bar{\alpha}_2 \\ M^B &= -\frac{1}{3}\bar{\alpha}_1 + \frac{1}{3}\bar{\alpha}_2 \\ M^C &= -\frac{1}{3}\bar{\alpha}_1 - \frac{2}{3}\bar{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

where  $\alpha_{t_+} \rightarrow \bar{\alpha}_1$  and  $\alpha_{u_+} \rightarrow \bar{\alpha}_2$ . Using the  $\text{su}(3)$  Cartan matrix from Eq. (5.3.15), the associated Dynkin coefficients are [via Eq. (8.1.8)]

$$\begin{aligned} M^A &\rightarrow (1, 0) \\ M^B &\rightarrow (-1, 1) \\ M^C &\rightarrow (0, -1) \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

We can obtain these another way, using the MWDF Eq. (5.1.23). This is the complement to the positive-root-building algorithm we used in Secs. 5.3.2 and 7.1.1. Now, we subtract simple roots to generate all of the weights from the highest one:

- We start with the highest weight state

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1.11a)$$

The depths are given by the Dynkin coefficients,

$$m_{\Lambda; \bar{\alpha}_1} = 1, \quad m_{\Lambda; \bar{\alpha}_2} = 0 \quad (8.1.11b)$$

- At the second depth level, we know that  $\Lambda^{(2)} \equiv \Lambda - \bar{\alpha}_1$  is a valid weight. Its Dynkin coefficients are

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.1.11c)$$

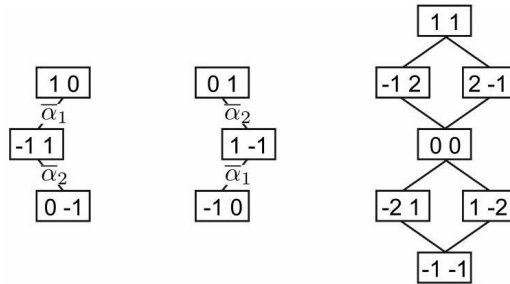
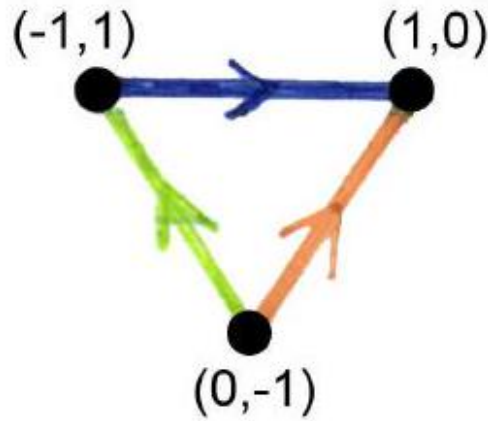
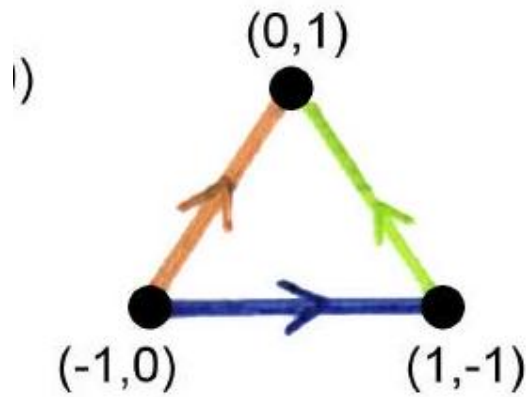


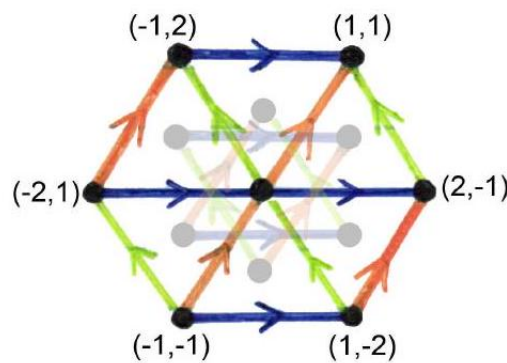
Figure 8.1: Weight trees for the defining "3" (1,0), conjugate " $\bar{3}$ " (0,1), and adjoint (1,1) representations of  $\text{su}(3)$ . The ordered pair labels  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  ( $\Lambda_i \in \mathbb{Z}$ ) are Dynkin coefficients. The simple root labels  $\{\bar{\alpha}_i\}$  indicate the difference between the weights above and below the connecting line.



(1, 0)



(0, 1)



(1, 1)

Figure 8.2: Weight geometries for the defining "3" (1,0), conjugate " $\bar{3}$ " (0,1), and adjoint (1,1) representations of  $\mathfrak{su}(3)$ . The 3 and  $\bar{3}$  representations are also faintly superimposed over the adjoint. These three representations belong to the three different conjugacy classes (shifted triangular lattices) of  $\mathfrak{su}(3)$  weights.

The heights are

$$p_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_1} = 1, \quad p_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_2} = 0 \quad (8.1.11 \text{ d})$$

so that the depths below this level are

$$\begin{aligned} m_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_1} &= p_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_1} + \Lambda_1^{(2)} = 1 - 1 = 0 \\ m_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_2} &= p_{\Lambda^{(2)}; \bar{\alpha}_2} + \Lambda_2^{(2)} = 0 + 1 = 1 \end{aligned} \quad (8.1.11e)$$

• At the third depth level, we know that  $\Lambda^{(3)} \equiv \Lambda^{(2)} - \bar{\alpha}_2$  is a valid weight. Its Dynkin coefficients are

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.1.11f)$$

The heights are

$$p_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_1} = 0, \quad p_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_2} = 1 \quad (8.1.11g)$$

so that the depths below this level are

$$m_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_1} = p_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_1} + 0 = 0, \quad m_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_2} = p_{\Lambda^{(3)}; \bar{\alpha}_2} - 1 = 0 \quad (8.1.11h)$$

We conclude that  $\Lambda^{(3)}$  is the lowest weight state.

In addition to the defining representation  $(1, 0) \Leftrightarrow \omega_1$ , the  $A_2 = \mathfrak{su}(3)$  algebra has a second fundamental representation  $(0, 1) \Leftrightarrow \omega_2$ . This turns out to be the conjugate or " $\bar{3}$ " representation. The weight trees for the  $3$ ,  $\bar{3}$ , and adjoint representations of  $\mathfrak{su}(3)$  are depicted in Fig. 8.1. We can use Eq. (8.1.8) to obtain the expansion coefficients of all of these weights in terms of simple roots; the simple root geometry then implies the geometry of the representations shown in Fig. 8.2. Note that these three representations  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ , and  $(1, 1)$  correspond to regular fragments of three different triangular lattices. The lattices are generated by the same lattice vectors  $\bar{\alpha}_1$  and  $\bar{\alpha}_2$ , but from different (shifted) origins. The different lattices are the three conjugacy classes of  $\mathfrak{su}(3)$ , exemplified by these representations. All other representations reside on one of these lattices.

Conjugate representations will be defined precisely below, but the key features appear in Figs. 8.1 and 8.2. Namely, the top weight of the conjugate  $\bar{3}$  representation is minus the bottom weight of the defining  $3$  representation (and vice-versa). All weights are in one-to-one correspondence between a representation and its conjugate, being related by inversion ( $\Lambda \rightarrow -\Lambda$ ). Finally, the adjoint representation is self-conjugate, since its lowest weight  $(-1, -1)$  is minus its highest one.

### 8.1.2 Marks and comarks

The highest weight state of the adjoint representation for any rank-  $n$  Lie algebra is the highest root  $\theta$ , introduced in Sec. 5.3.1. It can be expanded as in Eq. (8.1.1),

$$\theta = \sum_{j=1}^n a_j \bar{\alpha}_j = \sum_{j=1}^n a_j^\vee \bar{\alpha}_j^\vee = \sum_{j=1}^n \theta_j \omega_j \quad (8.1.12)$$

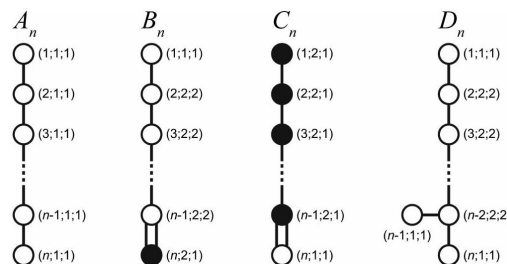


Figure 8.3: Dynkin diagrams for the four classical families  $A_n = \mathfrak{su}(n+1)$ ,  $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$ ,  $C_n = \mathfrak{sp}(2n)$ , and  $D_n = \mathfrak{so}(2n)$ . The three numbers  $(m, a_m, a_m^\vee)$  that label each node specify the fundamental weight  $\omega_m$ , the mark for the associated root  $a_m$ , and the comark for the associated coroot  $a_m^\vee$ . Here we set  $|\alpha|^2 = 2$ , where  $\alpha$  is a long root, so that marks and comarks are identical for simply-laced algebras.

In this case, the root and coroot coefficients are called marks  $\{a_j\}$  and comarks  $\{a_j^\vee\}$ , respectively. The comarks play a key role in the construction of dominant highest-weight representations in affine Lie algebras, which are equivalent to certain exactly solvable 2D conformal field theories (Kac-Moody current algebras). The marks and comarks can be computed from the Dynkin coefficients of  $\theta$  via Eq. (8.1.8). For  $\mathfrak{su}(3)$ ,  $\theta = (1, 1)$ . We will derive the  $\{\theta_j\}$  for the four classical families in Sec. 8.2.4, below.

Another key piece of data for any Lie algebra is the dual Coxeter number  $g$ , defined via

$$g = 1 + \sum_{j=1}^n a_j^\vee \quad (8.1.13)$$

In module 9, we will show that  $g$  is half the value of the quadratic Casimir operator, evaluated in the adjoint representation. The dual Coxeter numbers for the four classical families are given in Sec. 8.6.

We can use Dynkin diagrams to enumerate the fundamental weights for each rank-  $n$  algebra. These are shown in Fig. 8.3, along with the corresponding marks and comarks. Here and in Sec. 8.6, we use a normalization scheme such that long roots have  $|\alpha|^2 = 2$ .

## 8.2 Mostly $\mathfrak{su}(n+1)$

### 8.2.1 Elementary tensors representations: complete (anti)symmetrization

We will build up more complex representations from simpler ones by tensoring together the latter. If we have two representations  $\phi_i$  and  $\eta_i$  such that for  $x \in L$ ,

$$\begin{aligned} \left( \hat{X}^{(1)} \phi \right)_i &= X_{ij}^{(1)} \phi_j \\ \left( \hat{X}^{(2)} \eta \right)_i &= X_{ij}^{(2)} \eta_j \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

then the action on the tensor (direct) product is

$$(\hat{X} \phi \otimes \eta)_{ij} = X_{ik}^{(1)} \phi_k \eta_j + X_{jk}^{(2)} \phi_i \eta_k \quad (8.2.2)$$

Thus if  $\phi$  and  $\eta$  are weight vectors with weights  $M^{(1)}$  and  $M^{(2)}$ , respectively, then  $\phi_i \eta_j$  is also a weight vector with weight  $M^{(1)} + M^{(2)}$ . In particular, if we tensor together two highest weight representations with highest weights  $\Lambda^{(1)}$  and  $\Lambda^{(2)}$ , respectively, then the highest weight of the tensor product is given by  $\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)}$ .

In what follows, we will exploit the following fact, which we do not prove here:

- Claim: The weight space <sup>1</sup> (degeneracy) of the highest weight is always one-dimensional for an irreducible representation.

If we tensor together  $m$  different copies of the defining representation in some Lie algebra (i.e. form an  $m$ -fold direct product), the resulting rank- $m$  tensor  $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$  will not belong to an irreducible representation. As discussed in the previous section, any highest-weight representation in a rank-  $n$  Lie algebra can be specified by the  $n$  non-negative Dynkin labels of its highest weight  $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n)$ . We can in fact generate most or all <sup>2</sup> representations by appropriately symmetrizing and antisymmetrizing groups of indices of the unsymmetrized  $T_{i_1 i_2 \dots i_m}$ .

The simplest cases correspond to complete antisymmetrization or complete symmetrization. We now show how to obtain the Dynkin coefficients for  $\text{su}(n+1)$  tensors in these cases.

### 8.2.1.1 Complete antisymmetrization: the fundamental weight representations

Consider the defining " $n+1$ " representation of  $A_n = \text{su}(n+1)$ . As in  $\text{su}(3)$  (Figs 8.1 and 8.2), the Dynkin labels for the  $n+1$  representation are  $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_n) = (1, 0, 0, \dots, 0)$ . Equivalently, we say that the defining representation is equal to the first fundamental weight,

$$\Lambda = \omega_1$$

Using the  $n \times n$  Cartan matrix for  $A_n$  [Eq. (7.1.23)]

$$\hat{A}_{A_n} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.2.3)$$

we can generate the  $n$  descendants of the highest weight using the MWDF algorithm in Eq. (8.1.11). This gives the defining representation weight tree shown in Fig. 8.4. Note that the  $m^{\text{th}}$  step down the chain is generated by lowering with the simple root  $\bar{\alpha}_m$  ( $1 \leq m \leq n$ ). This is also easily seen from the explicit matrix representation of the simple root vectors  $\{\hat{E}_{\bar{\alpha}_i}\}$  for  $A_n$ , Eqs. (7.1.1) and (7.1.9). Since there are  $n+1$  different weights in Fig. 8.4, all weight spaces in the defining representation are one-dimensional (non-degenerate).

We can view the  $n+1$  representation as a rank-1 tensor  $T_i, i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ . Now, consider the completely antisymmetrized rank- $m$  tensor

$$T_{[i_1 i_2 \dots i_m]}, \quad 1 \leq m \leq n+1 \quad (8.2.4)$$

This has

$$\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \quad (8.2.5)$$

independent components. We assert that this  $m$ -fold tensor is automatically an irreducible representation. The argument is twofold:

- We cannot simplify the index structure further, i.e. symmetrize any subgroup of indices,
- We cannot contract any two indices to form a simpler tensor.

The second fact is equivalent to the statement that there is no natural "metric" for  $\text{su}(n+1)$  ( $n \geq 2$ ) that can be used to contract pairs of defining representation indices to produce an invariant scalar, unlike in  $\text{sp}(2n)$  or  $\text{so}(n)$  (module 2 A). [We will discuss contractions using the rank- $(n+1)$  Levi-Civita symbol when we introduce conjugate representations, below.]

What are the Dynkin coefficients for  $T_{[i_1 i_2 \dots i_m]}$ ?

•  $m = 2$ : second-rank, antisymmetric tensor  $T_{[ij]}$  with  $(n+1)n/2$  components. The highest weight possible for each index  $i$  and  $j$  is  $\omega_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ , associated to  $i = 1$  or  $j = 1$ . However, due to the antisymmetrization, we cannot have  $i = j$ . Thus, the component with the highest possible weight is  $T_{12} = -T_{21}$ . From Fig. 8.4, this has weight

$$(1, 0, 0, \dots, 0) + (-1, 1, 0, \dots, 0) = (0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow \omega_2 \quad (8.2.6a)$$

Thus the case  $m = 2$  gives a realization of the representation with highest weight  $\Lambda = \omega_2$ .

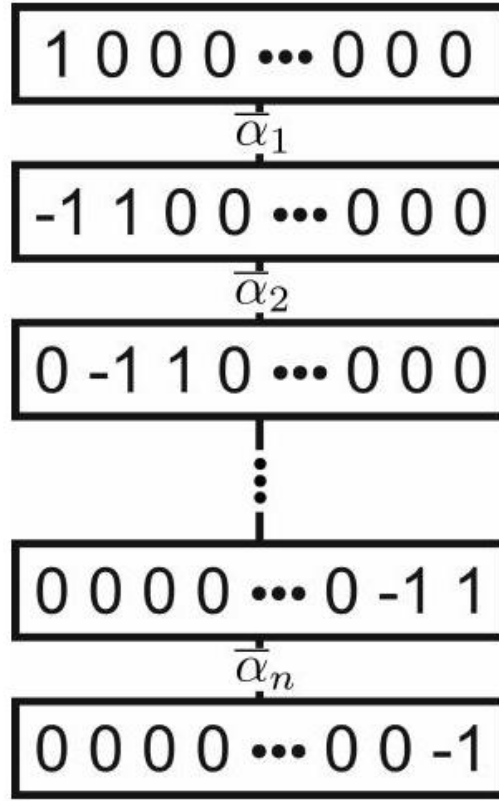


Figure 8.4: Weight tree for the defining representation of  $\mathfrak{su}(n+1)$  ( $A_n$ ):  $(1, 0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \omega_1$ . The simple root labels  $\{\bar{\alpha}_i\}$  indicate the difference between the weights above and below the connecting line.

- $m = 3 : T_{[ijk]}$  with  $(n+1)n(n-1)/3!$  components. The component with the highest possible weight is  $T_{123} = -T_{213} = T_{231}$  (etc.). The highest weight is

$$(1, 0, 0, 0, \dots, 0) + (-1, 1, 0, 0, \dots, 0) + (0, -1, 1, 0, \dots, 0) = (0, 0, 1, \dots, 0) \rightarrow \omega_3 \quad (8.2.6b)$$

- $m = n : T_{[i_1 i_2 \dots i_n]}$  with  $n+1$  components. The highest weight is

$$(1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0) + (-1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, 0, -1, 1) = (0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1) \rightarrow \omega_n \quad (8.2.6c)$$

- $m = n+1 : T_{[i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}]}$ . This is proportional to the rank-  $(n+1)$  Levi-Civita symbol  $\epsilon_{i_1 \dots i_{n+1}}$  and has only one unique component (which may be zero); see also Sec. 8.2.3, below. The weight is

<sup>1</sup> Recall from module 5 that the weight space is the degeneracy of a particular weight  $\Lambda$  in some irreducible representation. If we consider all possible representations in the same conjugacy class, then the weight space must be specified for all "sites" of the corresponding infinite weight lattice. Each weight space is therefore characterized by a non-negative integer. This is not to be confused with  $H^*$ , which is the space of weights, i.e. the space in which different weights are expressed as linear combinations of simple roots, simple coroots, or fundamental weights. The terminology here is a bit unfortunate.

<sup>2</sup> All representations in  $A_n = \mathfrak{su}(n+1)$  and  $C_n = \mathfrak{sp}(2n)$  can be obtained by tensoring together copies of the defining representation, and (anti)symmetrizing. In  $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$  and  $D_n = \mathfrak{so}(2n)$ , however, there are spinor representations that cannot be obtained by tensoring together vector indices. We will demonstrate this in Sec. 8.3.



$$(1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0) + (-1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0) = 0 \quad (8.2.6 \text{ d})$$

• Thus for  $\mathfrak{su}(n+1)$ , the fundamental weight  $\omega_m$  corresponds precisely to a rank-  $m$  completely antisymmetric tensor:

$$T_{[i_1 i_2 \dots i_m]}, \quad 1 \leq m \leq n : \text{ irreducible representation of } \mathfrak{su}(n+1) \text{ with highest weight } \omega_m \quad (8.2.7)$$

The same conclusion will apply to all but one (two) fundamental weights in  $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$  [ $D_n = \mathfrak{so}(2n)$ ]; the outliers are the fundamental spinor representations. In  $C_n = \mathfrak{sp}(2n)$ , the fundamental weight  $\omega_m$  also corresponds to a rank-  $m$  completely antisymmetric tensor  $\tilde{T}_{[i_1 \dots i_m]} (1 \leq m \leq n)$ ; the tilde indicates that, in addition, all traces with the antisymmetric "symplectic metric"  $\epsilon^{ij}$  have been removed [c.f. Eqs. (7.2.1) and (7.2.2)].

### 8.2.1.2 Complete symmetrization

Another class of representations are the completely symmetric rank-  $m$  tensors,

$$T_{(i_1 i_2 \dots i_m)}, \quad m \geq 1 \quad (8.2.8)$$

This has

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} \quad (8.2.9)$$

independent components. For  $\mathfrak{su}(n+1)$ , completely symmetric tensors are also irreducible representations; the argument is the same as the antisymmetric case. The highest weight state of the rank-  $m$  tensor is  $T_{11\dots 1}$ , with weight  $\Lambda = (m, 0, 0, \dots, 0)$ :

$$T_{(i_1 i_2 \dots i_m)}, \quad m \geq 1 : \text{ irreducible representation of } \mathfrak{su}(n+1) \text{ with highest weight } m\omega_1. \quad (8.2.10)$$

A completely symmetric rank-  $m$  tensor forms an irreducible representation with weight  $m\omega_1$  for  $C_n$  as well. For the orthogonal algebras one has to in addition remove all possible traces to get irreducible representations.

Thus we have identified tensor representations with highest weight  $\Lambda$  given by the fundamental weights  $\Lambda \in \{\omega_i\}$  (completely antisymmetric) or by  $\Lambda = m\omega_1$  (completely symmetric). Other irreducible representations of  $\mathfrak{su}(n+1)$  can be built from tensors with mixed indices; one technique (Young tableaux) will be demonstrated below in Sec. 8.5.

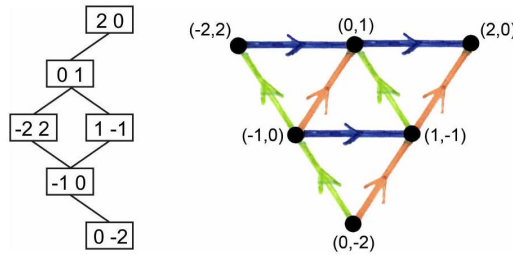


Figure 8.5: Symmetric second rank tensor  $(2, 0) \Leftrightarrow T_{(ij)}$  representation of  $\mathfrak{su}(3)$ . This is in the conjugacy class of the conjugate  $\bar{3} \Leftrightarrow (0, 1)$  representation. There are  $3(4)/2 = 6$  states in this representation, so all weight spaces are one dimensional.

### 8.2.2 su(3) again

We next construct the weight trees and geometries for a couple of more complex su(3) representations. The fundamental representations  $\omega_1$  and  $\omega_2$  were depicted in Figs. 8.1 and 8.2, along with the adjoint representation  $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow (1, 1)$ . The second-rank symmetric tensor representation  $T_{(ij)} \Leftrightarrow (2, 0)$  is shown in Fig. 8.5. A mixed tensor representation with Dynkin labels  $(2, 1)$  is shown in Fig. 8.6. This representation turns out to have 15 total states, but only 12 distinct weights. In this case, each of the "inner triangle" weights is doubly degenerate, as we will prove later in module 9.

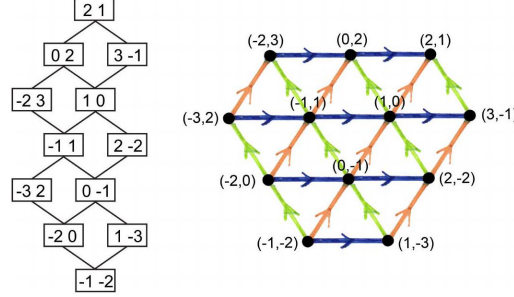


Figure 8.6:  $(2, 1)$  representation of su(3). This is in the conjugacy class of the defining  $3 \Leftrightarrow (1, 0)$  representation. There are 15 states in this representation, but only 12 distinct weights. Each of the weights in the inner triangle are doubly degenerate, as we will show using Freudenthal's formula in module 9.

### 8.2.3 The Levi-Civita symbol, $\overline{n+1}$ representation of su( $n+1$ ), and conjugate representations

We argued above that completely (anti)symmetric tensors are automatic irreducible representations of su( $n+1$ ). Part of the argument was that there is no natural "metric" with which we can "tie up" pairs of defining representation indices to form a "singlet" (group invariant) in  $A_n$ . In fact, there is one very important tensor that is a group invariant: the rank- ( $n+1$ ) completely antisymmetric tensor (Levi-Civita symbol <sup>3</sup>):

$$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} = \epsilon^{[i_1 i_2 \dots i_{n+1}]}, \quad \epsilon^{1, 2, 3, \dots, n, n+1} = +1 \quad (8.2.11)$$

Here we write this object with all indices "upstairs," as opposed to the tensor in Eq. (8.2.4) built out of defining, "downstairs"  $\omega_1$ -indices. Following conventions from general relativity and differential geometry, the idea is that we can only "contract" (sum pairwise) over one upper and one lower index, but never pairs of lower or upper indices. If we have a rank  $m \geq n+1$  tensor, then we can contract

$$\begin{aligned} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} T_{i_1 \dots i_{n+1} i_{n+2} \dots i_m} &= \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} T_{[i_1 \dots i_{n+1}] i_{n+2} \dots i_m} \\ &\equiv \tilde{T}_{i_{n+2} i_{n+3} \dots i_m}, \quad m \geq n+1 \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

Here repeated indices are summed (Einstein). The square brackets on the right-hand side of the first line mean complete antisymmetrization: the Levi-Civita symbol projects out this combination of components. In particular, if  $m = n+1$ , then  $\tilde{T}$  (if non-zero) is guaranteed to be a scalar, i.e. to not transform under SU( $n+1$ ) transformations. The reason is simply because

<sup>3</sup> Here we use the terms "Levi-Civita symbol" and "Levi-Civita tensor" interchangeably. There is a distinction for coordinate tensors on curved manifolds but our indices here are constructed from the defining representation in a linear vector space. This is independent of the arbitrary coordinates used to parameterize the corresponding Lie group manifold.

the Levi-Civita symbol has only one unique component. Thus  $(n + 1)$  different  $\omega_1$ -indices are needed to form a "singlet" in  $\text{su}(n + 1)$ .

We can also use the Levi-Civita symbol to "raise" indices on a completely antisymmetric rank-  $m \leq n$  tensor:

$$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1} \dots i_{n+1}} T_{[i_1 \dots i_m]} \equiv T^{[i_{m+1} \dots i_{n+1}]}, \quad m \leq n \quad (8.2.13)$$

This gives an alternative tensor representation for the  $\omega_m$  representation as an antisymmetric tensor with  $(n + 1 - m)$  indices. In particular, the conjugate  $\overline{n + 1}$  representation is defined via

$$T^i \equiv \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n i} T_{[j_1 j_2 \dots j_n]}, \quad \overline{n + 1} = \omega_n \text{ conjugate representation of } \text{su}(n + 1) \quad (8.2.14)$$

The  $T^{[i_1 \dots i_m]}$  can be viewed as the completely antisymmetrized tensor of  $m(\overline{n + 1})$ -representation indices; this is itself an irreducible representation with highest weight  $\Lambda = \omega_{n+1-m}$  ( $1 \leq m \leq n$ ). The defining  $n + 1$  representation is therefore equivalent to the  $n^{\text{th}}$ -rank tensor  $T^{[i_1 \dots i_n]}$ . The precise relation obtains by introducing the Levi-Civita symbol with all lower indices,

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} = \epsilon_{[i_1 i_2 \dots i_{n+1}]}; \quad \epsilon_{1,2,3,\dots,n,n+1} = +1 \quad (8.2.15)$$

so that

$$T_i = \frac{1}{n!} \epsilon_{i j_1 j_2 \dots j_n} T^{[j_1 j_2 \dots j_n]} = \frac{1}{n!} \epsilon_{i j_1 \dots j_n} \epsilon^{k j_1 \dots j_n} T_k = T_i \quad (8.2.16)$$

We can also consider tensors with mixed upper and lower indices. The simplest is the Kronecker delta  $\delta_j^i$ , which is automatically an invariant tensor. A general second-rank tensor  $T^i_j$  instead decomposes into

$$\text{scalar } (0) : T_0 \equiv T^i_i \quad (8.2.17a)$$

$$\text{adjoint}(1, 1) : \tilde{T}_j^i \equiv T_j^i - \frac{\delta_j^i}{(n + 1)} T^k_k \quad (8.2.17b)$$

Thus the pairwise contraction of defining  $n + 1$  and conjugate  $\overline{n + 1}$  indices gives a scalar, but this can be alternatively viewed as the contraction with the  $n + 1$ -fold Levi-Civita tensor:

$$U^i V_i = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}} U_{[i_1 \dots i_n]} V_{i_{n+1}} \quad (8.2.18)$$

These are familiar from the action of symmetry transformations on a complex wavefunction or field operator in quantum mechanics and quantum field theory. If

$$\psi \rightarrow \hat{U} \psi, \quad \psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger \hat{U}^\dagger, \quad \hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1} \quad (8.2.19)$$

then we have the following transformation properties for the bilinears:

$$\begin{aligned} \psi^\dagger \psi &\rightarrow \psi^\dagger \psi, & \text{invariant scalar,} \\ \psi^\dagger \hat{M} \psi &\rightarrow \psi^\dagger (\hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{U}) \psi, & \text{adjoint representation for } \text{Tr}(\hat{M}) = 0 \end{aligned}$$

If  $\psi_i \left[ (\psi^\dagger)^j \right]$  transforms in the  $(n + 1)[(\overline{n + 1})]$  representation of  $\text{SU}(n + 1)$ , then  $M_j^i$  can be decomposed into a linear combination of  $\text{su}(n + 1)$  generators. The similarity transformation

$\hat{M} \rightarrow \hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{U}$  acts in the adjoint representation. In Sec. 8.5, we will connect tensors with different combinations of (anti)symmetrized upper and lower indices with more complex irreducible representations of  $\mathfrak{su}(n+1)$ .

Eq. (8.2.19) gives an alternative way to define the  $\overline{n+1}$  representation. If we express the  $\mathrm{SU}(n+1)$  transformation as

$$\psi_i \rightarrow U_i^j \psi_j, \quad \hat{U} = \exp \left( i \hat{T}^a \theta^a \right) \quad (8.2.20)$$

where  $\{\hat{T}^a\}$  are the generators acting on the  $n+1$  representation, then

$$(\psi^\dagger)^i \rightarrow (\psi^\dagger)^j (U^*)^i_j, \quad \hat{U}^* = \exp \left[ i \left( -\hat{T}^a \right)^* (\theta^a)^* \right] \quad (8.2.21)$$

We restrict the generators to the Cartan subalgebra, so that we can take  $\hat{T}^a \in \{\hat{H}_{\hat{\alpha}_i}^{(n+1)}\}$ . Then  $\hat{T}^a = \left( \hat{T}^a \right)^\dagger$  and  $\theta^a \in \mathbb{R}$ . Moreover, the  $\hat{H}_{\hat{\alpha}_i}^{(n+1)}$  can be taken to be diagonal and hence symmetric (module 7). We conclude that the Cartan subalgebra generators of  $\overline{n+1}$  are (c.f. Fig. 8.4)

$$\hat{H}_{\hat{\alpha}_i}^{(\overline{n+1})} = -\hat{H}_{\hat{\alpha}_i}^{(n+1)} \quad (8.2.22)$$

Explicitly, if the weight vectors and weights of the defining  $n+1$  representation are

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Lambda^{(1)} = (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad \text{highest weight state,} \\ |2\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Lambda^{(2)} = (-1, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ |n+1\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Lambda^{(n+1)} = (0, 0, 0, \dots, 0, -1), \quad \text{lowest weight state,} \end{aligned} \quad (8.2.23)$$

then the weight vectors and weights of the conjugate  $\overline{n+1}$  representation are

$$\begin{aligned}
|1\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -\Lambda^{(1)} = (-1, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad \text{lowest weight state,} \\
|2\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -\Lambda^{(2)} = (1, -1, 0, \dots, 0, 0), \\
&\vdots \\
|n+1\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -\Lambda^{(n+1)} = (0, 0, 0, \dots, 0, 1), \quad \text{highest weight state.}
\end{aligned}$$

Therefore the weights of  $\overline{n+1}$  are minus those of  $n+1$ ; the highest-weight state of  $n+1$  corresponds to the lowest weight state of  $\overline{n+1}$ . This ensures that the weight of each term  $\{U_1 V^1, U_2 V^2, \dots, U_{n+1} V^{n+1}\}$  is zero, a necessary condition for  $U_i V^i$  to be a scalar.

Eq. (8.2.22) can be generalized to all irreducible representations. A representation  $\Lambda$  (defined by the Dynkin coefficients of its highest weight) is self-conjugate if its lowest weight is equal to minus its highest weight. Otherwise, the representation is said to be complex, and there exists a conjugate representation  $\Lambda^*$  which has weights equal to minus those of  $\Lambda$ .

|                              |                                                           |                      |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------|
| 100                          | 010                                                       | 001                  |
| $\bar{\alpha}_1$             | $\frac{\bar{\alpha}}{2}$                                  | $\bar{\alpha}_3$     |
| -110                         | 1 - 11                                                    | 01 - 1               |
| $\frac{\bar{\alpha}_1 2}{2}$ | $\bar{\alpha}_1 \hat{\alpha}_3$                           | $\frac{1}{\alpha_2}$ |
| -111                         | $\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$ | 1 - 10               |
| $\frac{\bar{\alpha}_1 3}{1}$ | $\vec{\alpha}_3, \bar{\alpha}_1$                          | $\bar{\alpha}_1$     |
| 00                           | -1 1 -1                                                   | -100                 |
|                              | $\bar{\alpha}_2$<br>0 - 10                                |                      |

Figure 8.7: Weight trees for the three fundamental representations of  $\text{su}(4)$ :  $(1, 0, 0) \Leftrightarrow \omega_1$  (defining "4")  $(0, 1, 0) \Leftrightarrow \omega_2$ , and  $(0, 0, 1) \Leftrightarrow \omega_3$  (conjugate "4"). The simple root labels  $\bar{\alpha}_{1,2,3}$  indicate the difference between the weights above and below the connecting line. The  $(0, 1, 0)$  representation is self-conjugate.

• Claim: All representations of  $B_n = \text{so}(2n+1)$ ,  $C_n = \text{sp}(2n)$ ,  $G_2$ ,  $F_4$ ,  $E_7$ , and  $E_8$  are self-conjugate. This is related to the absence of reflection symmetry for the Dynkin diagrams of these algebras [2]. It turns out that all  $D_{2n} = \text{so}(4n)$  representations are also self-conjugate. By contrast,  $A_n = \text{su}(n+1)$ ,  $D_{2m+1} = \text{so}(4m+2)$ , and  $E_6$  have both self-conjugate and pairwise conjugate representations.

### 8.2.4 The highest root for $A_n, B_n, C_n$ , and $D_n$

With the basics of tensor-building and conjugate representations in place, we can now define the adjoint representation for each of the classical families in terms of the Dynkin coefficients for the highest root  $\theta$ . For  $A_n = \mathfrak{su}(n+1)$ , the adjoint representation corresponds to a traceless product of  $n+1$  and  $\overline{n+1}$  representations,  $\tilde{T}^i_j$  in Eq. (8.2.17b). Tracelessness does not force the highest-weight state  $\tilde{T}^{n+1}_1$  to vanish [see Eqs. (8.2.23) and (8.2.24)]. Therefore

$$\theta = \omega_1 + \omega_n \Leftrightarrow (1, 0, 0, \dots, 0, 1), \quad \text{Highest root of } A_n.$$

For the orthogonal algebras  $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$  and  $D_n = \mathfrak{so}(2n)$ , the generators acting in the defining vector representation are completely antisymmetric matrices [Eq. (7.3.2)]. The completely antisymmetric tensor  $T_{[ij]}$  has weight  $\omega_2$ :

$$\theta = \omega_2 \Leftrightarrow (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \quad \text{Highest root of } B_n \text{ and } D_n.$$

Finally, in  $C_n = \mathfrak{sp}(2n)$  the symmetric second rank tensor  $T_{(ij)}$  is an irreducible representation, because it cannot be contracted with the  $2n \times 2n$  antisymmetric "metric"  $\epsilon^{ij}$  [Eq. (7.2.2)]. [Note that  $\epsilon^{ij}$  is a block rank-2 Levi-Civita symbol; this should not be confused

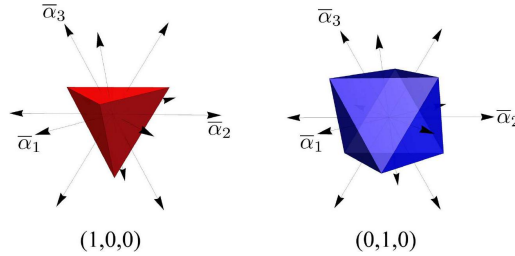


Figure 8.8: Weight geometries for the first two fundamental representations of  $\mathfrak{su}(4)$  :  $(1, 0, 0) \Leftrightarrow \omega_1$  (defining) and  $(0, 1, 0) \Leftrightarrow \omega_2$ . Weights correspond to the vertices of the polyhedra. The  $(0, 1, 0)$  representation corresponds to the second rank antisymmetric tensor  $T_{[ij]}$ . The roots are indicated with arrows.

with the rank-  $2n$  tensor  $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_{2n}}$ . Both are group invariants for  $\mathfrak{Sp}(2n)$ .] In the defining  $2n$  representation, the symplectic generators in fact satisfy a generalized symmetry constraint, see Eq. (2A.3.5). We therefore claim that  $T_{(ij)}$  is in fact the adjoint representation,

$$\theta = 2\omega_1 \Leftrightarrow (2, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad \text{Highest root of } C_n \quad (8.2.27)$$

The Dynkin coefficients for the highest root of the exceptional algebras are given in Sec. 13.A of [2].

### 8.2.5 $\mathfrak{su}(4)$

The  $\mathfrak{su}(3)$  algebra exhibits most, but not all general characteristics of  $\mathfrak{su}(n+1)$  representations. The root system for  $\mathfrak{su}(4)$  was constructed in Sec. 7.1.1. Unlike  $\mathfrak{su}(3)$ , the defining and conjugate representations do not exhaust the fundamental weights. In  $\mathfrak{su}(4)$ , the second fundamental weight  $\omega_2 \Leftrightarrow (0, 1, 0)$  is associated to rank-2 antisymmetric tensor  $T_{[ij]}$ . This representation is self-conjugate. The weight trees for all three fundamental representations are shown in Fig. 8.7. Using Eq. (8.1.8) to reconstruct the simple root expansion coefficients, one obtains the weight geometries shown in Fig. 8.8. The geometry of the defining  $\omega_1$ , conjugate  $\omega_3$ , and adjoint  $\theta = \omega_1 + \omega_3$  representations were depicted in Fig. 7.3. The fundamental representations  $\{\omega_m\}$  ( $1 \leq m \leq n$ ) plus the adjoint representation  $\theta = \omega_1 + \omega_n$  exhaust the  $n+1$  different conjugacy classes of  $\mathfrak{su}(n+1)$ , as we discuss in Sec. 8.4, below.

•

**Exercise**

Verify the weight geometries in Fig. (8.8).

•

**Exercise**

Construct the weight tree for the  $(0, 2, 0)$  representation of  $\mathfrak{su}(4)$ .

**8.3  $\mathfrak{so}(2n+1)$ ,  $\mathfrak{so}(2n)$ , and  $\mathfrak{sp}(2n)$** 

We now explore fundamental highest-weight representations for the other classical families. At rank two, we have the special cases  $D_2 = A_1 \times A_1$  and  $B_2 = C_2$  (Table 1 in module 7). The representations of the former are trivial, while those of the latter can be inferred from  $C_n$  at higher ranks. We therefore begin with rank three.

**8.3.1  $\mathfrak{so}(2n+1)$** 

Consider  $\mathfrak{so}(7) = B_3$ . The defining vector representation is  $(1, 0, 0) \Leftrightarrow \omega_1$ . The adjoint representation (second-rank antisymmetric tensor  $T_{[ij]}$ ) is  $(0, 1, 0) \Leftrightarrow \omega_2$ . Can we associate  $(0, 0, 1) \Leftrightarrow \omega_3$  with a third-rank antisymmetric tensor? To determine this, we compute the weight tree for  $(1, 0, 0)$  using the Cartan matrix [Eq. (7.4.20)]

$$\hat{A}_{B_3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.3.1)$$

The results are shown in Fig. 8.9.

As in  $A_n$ , all completely antisymmetric tensors are irreducible representations of  $B_n$  or  $D_n$ , since we cannot trace out any pair of indices with the symmetric "metric"  $\delta^{ij}$  (i.e. the usual vector dot product). We will compute the Dynkin coefficients for the antisymmetric tensor representations of  $\mathfrak{so}(7)$  from the  $(1, 0, 0)$  weight tree, as we did in Eq. (8.2.6).

•  $m = 2$ : second-rank, antisymmetric tensor  $T_{[ij]}$  with 21 components. From Fig. 8.9, this has highest weight

$$(1, 0, 0) + (-1, 1, 0) = (0, 1, 0) \rightarrow \omega_2 \quad (8.3.2a)$$

consistent with the identification of  $(0, 1, 0)$  with the adjoint representation.

•  $m = 3$ :  $T_{[ijk]}$  with 35 components. The highest weight is

$$(1, 0, 0) + (-1, 1, 0) + (0, -1, 2) = (0, 0, 2) \rightarrow 2\omega_3 \quad (8.3.2b)$$

Thus the third-rank antisymmetric tensor is associated to  $(0, 0, 2) \rightarrow 2\omega_3$ , and is not a fundamental weight. Note that there is no need to consider higher-rank antisymmetric tensors, since these are equivalent to the first three via the rank-7 Levi-Civita symbol:

$$\begin{aligned} T_{[i_1 i_2 i_3]} &\equiv \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7} T_{[i_1 i_2 i_3 i_4]} \Leftrightarrow (0, 0, 2) \rightarrow 2\omega_3 \\ T_{[i_1 i_2]} &\equiv \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7} T_{[i_1 i_2 i_3 i_4 i_5]} \Leftrightarrow (0, 1, 0) \rightarrow \omega_2 \\ T_{i_1} &\equiv \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7} T_{[i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6]} \Leftrightarrow (1, 0, 0) \rightarrow \omega_1 \\ T &\equiv \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7} T_{[i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7]} \Leftrightarrow 0 \text{ (scalar)} \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

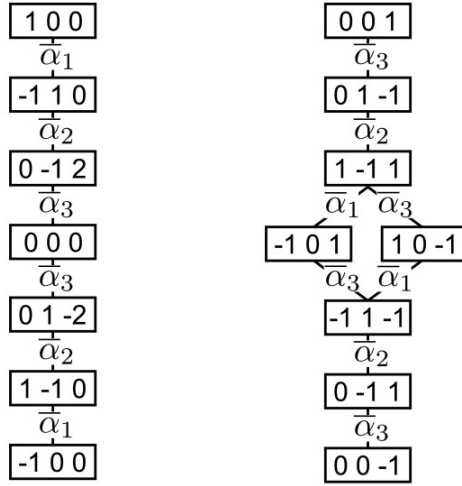
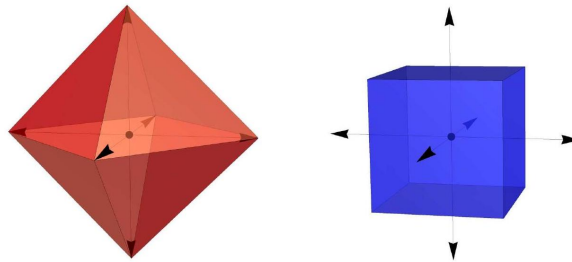


Figure 8.9: Weight trees for the first and last fundamental representations of  $\mathfrak{so}(7)$  :  $(1, 0, 0) \Leftrightarrow \omega_1$  (defining) and  $(0, 0, 1) \Leftrightarrow \omega_3$ . The simple root labels  $\bar{\alpha}_{1,2,3}$  indicate the difference between the weights above and below the connecting line. The  $(0, 0, 1)$  representation has  $2^3 = 8$  total states, and corresponds to the fundamental spinor representation of  $\mathfrak{so}(7)$ . We will discuss spinor representations of  $B_n$  and  $D_n$  in detail in module 10. Like all representations of  $B_n$ , these representations are self-conjugate.

In  $B_n, C_n$ , and  $D_n$ , the defining representation is self-conjugate. There is thus no need to distinguish between upper and lower indices. (In fact all representations of  $B_n, C_n$ , and  $D_{2m}$  are self-conjugate, but this is not true for  $D_{2m+1}$ ).

The question remains: what is the  $(0, 0, 1) \rightarrow \omega_3$  representation of  $\mathfrak{so}(7) = B_3$ . Clearly it cannot be obtained by any combination of symmetrizing or antisymmetrizing vector indices. The weight tree is shown in Fig. 8.9. There are  $2^3 = 8$  different weights in  $(0, 0, 1)$ ; all turn out to be non-degenerate. The highest weight representation  $\omega_3$  is the fundamental spinor representation of  $\mathfrak{so}(7)$ . We will discuss spinor representations of  $B_n$  and  $D_n$  in detail in module 10.

Using the Eq. (8.1.8) and the root geometry for  $B_3$ , one can determine the weight geometries for the fundamental vector  $(1, 0, 0)$  and spinor  $(0, 0, 1)$  representations. These are depicted in Fig. 8.10. An interesting and important fact is that the positive



left -  $(1, 0, 0)$ , right -  $(0, 0, 1)$

Figure 8.10: Weight geometries for the first and last fundamental representations of  $\mathfrak{so}(7)$  :  $(1, 0, 0) \Leftrightarrow \omega_1$  (defining) and  $(0, 0, 1) \Leftrightarrow \omega_3$  (fundamental spinor). Weights correspond to the vertices of the polyhedra. The defining vector representation  $(1, 0, 0)$  also includes the central weight  $(0, 0, 0)$ ; in both subfigures, this is indicated by the black dot. The other  $(1, 0, 0)$  weights are also indicated by arrows in both subfigures. A special feature of the defining representation for both  $B_n = \mathfrak{so}(2n + 1)$  and  $D_n = \mathfrak{so}(2n)$  is that the positive weights are orthonormal [c.f. Eqs. (8.3.4) and (8.3.5)]. Note that roots are not depicted in either subfigure. weights of the vector representation (Fig. 8.9)



$$\begin{aligned}
 \Lambda^{(1)} &\equiv (1, 0, 0) = \omega_1 \\
 \Lambda^{(2)} &\equiv (-1, 1, 0) \\
 \Lambda^{(3)} &\equiv (0, -1, 2)
 \end{aligned}
 \tag{8.3.4}$$

are orthonormal:

$$\langle \Lambda^{(a)}, \Lambda^{(b)} \rangle = \delta^{a,b} \tag{8.3.5}$$

(adopting a standard normalization of the roots such that  $|\alpha|^2 = 2$  for long roots-see module 9). In Eqs. (8.3.4) and (8.3.5), we define positive weights in the vector representation as the highest weight and its descendants above the central zero weight.

### Exercise

Prove Eq. (8.3.5) using the Dynkin coefficients for each weight and the quadratic form matrix  $F_{ij}$  for  $\mathfrak{so}(7)$ , given by Eq. (8.6.2b).

By contrast, the weights of the fundamental spinor representation ( $\equiv \{\Xi^{(a)}\}$ ) correspond to the vertices of the cube,

$$\Xi^{(a)} \in \frac{1}{2} (s_1 \Lambda^{(1)} + s_2 \Lambda^{(2)} + s_3 \Lambda^{(3)}) \tag{8.3.6}$$

where  $s_{1,2,3} \in \pm 1$ . See Fig. 8.10. These facts generalize to  $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$  for  $n \geq 3$ :

Highest fundamental weight representations of  $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$

- The  $n$  positive weights  $\{\Lambda^{(a)} > 0\}$  of the defining vector representation  $\omega_1$  are orthonormal [Eq. (8.3.5)].
- The fundamental weight  $\omega_m$  representation ( $1 \leq m \leq n-1$ ) corresponds to a rank- $m$  antisymmetric tensor  $T_{[i_1 \dots i_m]}$ .
- The fundamental weight  $\omega_n$  is the highest weight state of the fundamental spinor representation.

This has  $2^n$  non-degenerate weights that correspond to the vertices of an  $n$ -dimensional hypercube.

- The spinor representation cannot be obtained by tensoring together vector indices.

We will prove these statements in modules 9 and 10. Finally, we note that symmetric traceless tensors of vector indices are also irreducible representations:

$$\tilde{T}_{(i_1 \dots i_m)}, \quad \tilde{T}_{(iii_3 \dots i_m)} = 0, \quad m \geq 1 : \quad \text{irreducible representation of } \mathfrak{so}(2n+1) \text{ with highest weight } m\omega_1 \tag{8.3.8}$$

The weights that correspond to irreducible representations built entirely from vector indices reside in a single conjugacy class of  $B_n$ . This includes any combination of the fundamental weights  $\{\omega_m\}$  with  $1 \leq m \leq n-1$ . The fundamental spinor representation resides in a separate conjugacy class. Higher-rank spinor- or mixed spinor- and vector-index tensors belong to one of these two classes.

### 8.3.2 $\mathfrak{sp}(2n)$

The defining  $2n$  representation of  $\mathfrak{sp}(2n)$  has highest weight  $\omega_1$ . Using the Cartan matrix [Eq. (7.2.21)]

$$\hat{A}_{C_n} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.3.9)$$

we can obtain the weight tree shown in Fig. 8.11.

### Exercise

Derive the weight tree shown in Fig. 8.11.

Unlike  $A_n$ ,  $B_n$ , and  $D_n$ , an antisymmetrized tensor  $T_{[i_1 i_2 \dots i_m]}$  does not automatically correspond to an irreducible representation of  $C_n$ . This is because any pair of indices can be contracted with the rank-2 antisymmetric "metric"  $\epsilon_{ij}$  [Eq. (7.2.2)], which is a group invariant. Here we disregard the distinction between upper and lower indices, because the defining and all other irreducible representations of  $\mathfrak{sp}(2n)$  are self-conjugate. We can define traceless antisymmetric tensors

$$\tilde{T}_{[i_1 \dots i_m]}, \quad \epsilon_{pq} \tilde{T}_{[pq i_3 \dots i_m]} = 0, \quad 1 \leq m \leq n \quad (8.3.10)$$

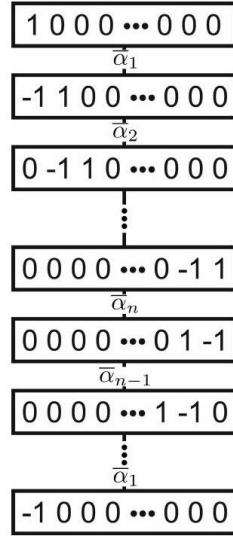


Figure 8.11: Weight tree for the defining representation of  $\mathfrak{sp}(2n)$  ( $C_n$ ):  $(1, 0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \omega_1$ . The simple root labels  $\{\bar{\alpha}_i\}$  indicate the difference between the weights above and below the connecting line. Like all representations of  $C_n$ , the defining representation is self-conjugate.

and these do correspond to irreducible representations. There is no need to consider a rank  $m > n$  antisymmetric tensor, since if it is non-zero it is equivalent to a rank  $2n - m < n$  tensor, obtained by contracting indices with the rank- $2n$  Levi-Civita symbol. The rank- $m$  traceless tensor  $\tilde{T}_{[i_1 \dots i_m]}$  has

$$\frac{(2n)!}{m!(2n-m)!} - \frac{(2n)!}{(m-2)!(2n-m+2)!} = 2(n+1-m) \frac{(2n+1)!}{m!(2n-m+2)!} \quad (8.3.11)$$

independent components. On the left-hand-side of this equation, the second term is the number of constraints imposed by the trace condition  $\epsilon_{pq} \tilde{T}_{[pq i_3 \dots i_m]} = 0$ .

We determine the Dynkin coefficients for traceless antisymmetric tensors as in Eq. (8.2.6).

•  $m = 2 : \tilde{T}_{[ij]}$ . Tracelessness does not require that  $\tilde{T}_{12} = -\tilde{T}_{21}$  is equal to zero. Fig. 8.11 therefore implies that the highest weight is

$$(1, 0, 0, \dots, 0) + (-1, 1, 0, \dots, 0) = (0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow \omega_2 \quad (8.3.12a)$$

•  $m = 3 : \tilde{T}_{[ijk]}$ . The highest weight is

$$(1, 0, 0, 0, \dots, 0) + (-1, 1, 0, 0, \dots, 0) + (0, -1, 1, 0, \dots, 0) = (0, 0, 1, \dots, 0) \rightarrow \omega_3 \quad (8.3.12b)$$

•  $m = n : \tilde{T}_{[i_1 i_2 \dots i_n]}$ . The highest weight is

$$(1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0) + (-1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, 0, -1, 1) = (0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1) \rightarrow \omega_n$$

•  $m = n + 1 : \tilde{T}_{[i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}]}$ . The weight is

$$(0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1) + (0, 0, 0, \dots, 0, 1, -1) = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0) \rightarrow \omega_{n-1} \quad (8.3.12d)$$

This is just the  $m = n - 1$  tensor in disguise. More generally, the rank-2n Levi-Civita symbol converts

$$\epsilon_{[i_1 i_2 \dots i_{n+m} j_1 \dots j_{n-m}]} \tilde{T}_{[i_1 \dots i_{n+m}]} \equiv \tilde{T}_{[j_1 \dots j_{n-m}]}, \quad 1 \leq m \leq n \quad (8.3.12e)$$

As argued above in Sec. 8.2.4, completely symmetric tensors are automatically irreducible representations. We conclude that

$$\text{Elementary tensor representations of } C_n = \text{sp}(2n) \quad (8.3.13)$$

•  $\tilde{T}_{[i_1 i_2 \dots i_m]}$ ,  $\epsilon_{pq} \tilde{T}_{[pq i_3 \dots i_m]} = 0$ ,  $1 \leq m \leq n$ : irreducible representation with highest weight  $\omega_m$ . •  $T_{(i_1 i_2 \dots i_m)}$ ,  $m \geq 1$ : irreducible representation with highest weight  $m\omega_1$ .

Thus, similar to  $\text{su}(n + 1)$ , all fundamental representations of  $C_n$  can be identified with (traceless) antisymmetric tensors. All irreducible representations of  $C_n$  can be formed by tensoring together copies of the defining  $\omega_1$  representation, symmetrizing and/or antisymmetrizing, and removing all traces.

### Exercise

Show that the top  $n$  weights  $\{\Lambda^{(a)}\}$  of the defining  $2n$  representation satisfy

$$\langle \Lambda^{(a)}, \Lambda^{(b)} \rangle = \frac{1}{2} \delta^{a,b} \quad (8.3.14)$$

To do this, use the Dynkin coefficients for the weights shown in Fig. 8.11 and the explicit form of the quadratic form matrix  $F_{ij}$  given by Eq. (8.6.2c).

### 8.3.3 $\text{so}(2n)$

Finally we consider  $D_n = \text{so}(2n)$ . The defining  $2n$ -component vector representation has highest weight  $\omega_1$ . The descendant weights obtain via the MWDF, using the Cartan matrix [Eq. (7.3.24)]

$$\hat{A}_{D_n} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.3.15)$$

The result is the weight tree shown in Fig. 8.12.

As for  $B_n$ , we expect there will be spinor representations of  $D_n$  corresponding to fundamental weights. To find them, we first search for completely antisymmetric tensor representations, following the same logic in Eqs. (8.2.6), (8.3.2), and (8.3.12). One finds that the first  $n - 2$  ranks correspond to fundamental weights; a traceless symmetric tensor of rank  $m$  corresponds as usual to weight  $m\omega_1$ :

Elementary tensor representations of  $D_n = \text{so}(2n)$ :

- $T_{[i_1 i_2 \dots i_m]}$ ,  $1 \leq m \leq n - 2$ : irreducible representation with highest weight  $\omega_m$ . •
- $\tilde{T}_{(i_1 i_2 \dots i_m)}$ ,  $\delta_{pq} \tilde{T}_{(pq i_3 \dots i_m)} = 0$ ,  $m \geq 1$ : irreducible representation with highest weight  $m\omega_1$ .

As for  $B_n$  and  $C_n$ , we do not distinguish upper and lower indices because the defining representation is self-conjugate.

What about rank-  $(n - 1)$  and rank-  $n$  tensors? The Dynkin labels for the highest weight state of  $T_{[i_1 \dots i_{n-1}]}$  are given by [ Eq. (8.3.16) and Fig. 8.12]

$$\bullet T_{[i_1 i_2 \dots i_{n-1}]} : (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0) + (0, 0, 0, \dots, 0, -1, 1, 1) = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1) \rightarrow \omega_{n-1} + \omega_n \quad (8.3.17)$$

For the rank-  $n$  tensor  $T_{[i_1 \dots i_n]}$ , there are two possibilities according to Fig. 8.12:

$$\begin{aligned} -T_{[i_1 i_2 \dots i_n]} : (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1) + (0, 0, 0, \dots, 0, -1, 1) &= (0, 0, 0, \dots, 0, 0, 2) \rightarrow 2\omega_n \\ (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1) + (0, 0, 0, \dots, 0, 1, -1) &= (0, 0, 0, \dots, 0, 2, 0) \rightarrow 2\omega_{n-1} \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

We see that  $T_{[i_1 i_2 \dots i_n]}$  splits into two representations. The interpretation is that there are really two independent rank-  $n$  antisymmetric tensors. Define

$$\begin{aligned} T_{[i_1 i_2 \dots i_n]}^{(I)} &\equiv T_{[i_1 i_2 \dots i_n]} \\ T_{[i_1 i_2 \dots i_n]}^{(II)} &\equiv \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} T_{[j_1 j_2 \dots j_n]} \end{aligned} \quad (8.3.19)$$

Note that

$$\frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} T_{[j_1 j_2 \dots j_n]}^{(II)} = \left( \frac{1}{n!} \right)^2 \epsilon_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n k_1 \dots k_n} T_{[k_1 k_2 \dots k_n]}^{(I)} \quad (8.3.20)$$

$$= T_{[i_1 i_2 \dots i_n]}^{(I)} \quad (8.3.21)$$

where we have used the fact (not proven here) that

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n k_1 \dots k_n} = n! \sum_P (-1)^P \delta_{i_1, P(k_1)} \delta_{i_2, P(k_2)} \times \dots \times \delta_{i_n, P(k_n)}$$

and  $P$  denotes a permutation of the  $n$  symbols  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ . Thus  $T^{(I)}$  and  $T^{(II)}$  are "dual" to each other. One can form the combinations [4]

$$T_{[i_1 i_2 \dots i_n]}^\pm \equiv T_{[i_1 i_2 \dots i_n]}^{(I)} \pm T_{[i_1 i_2 \dots i_n]}^{(II)} \quad (8.3.22)$$

Then  $T^+$  ( $T^-$ ) is self-dual (anti-self-dual), and these are independent representations.

Therefore the rank  $n - 1$  and  $n$  antisymmetric tensors do not correspond to fundamental weights. In  $D_n$ , there are two fundamental spinor representations. We will prove the following statements in module 10:

Fundamental spinor representations of  $D_n = \text{so}(2n)$ :

- The fundamental weights  $\omega_{n-1}$  and  $\omega_n$  (associated to the "ears" of the  $D_n$  Dynkin diagram in Fig. 8.3) are the highest weight states of the two fundamental spinor representations.
- Each spinor representation has  $2^{n-1}$  non-degenerate weights. These can be viewed as the bipartitioning of the  $2^n$ -dimension  $\text{so}(2n + 1)$  fundamental spinor representation.
- The spinor representations cannot be obtained by tensoring together vector indices.

Although the fundamental spinor representations cannot be constructed by tensoring together vector indices, the converse is not true: all representations can be constructed by tensoring together fundamental spinor indices. The key to the construction is the Clifford algebra, introduced in module 10. The semi-simple algebra  $D_2 = A_1 \times A_1 = \text{su}(2) \times \text{su}(2)$  gives an extreme example

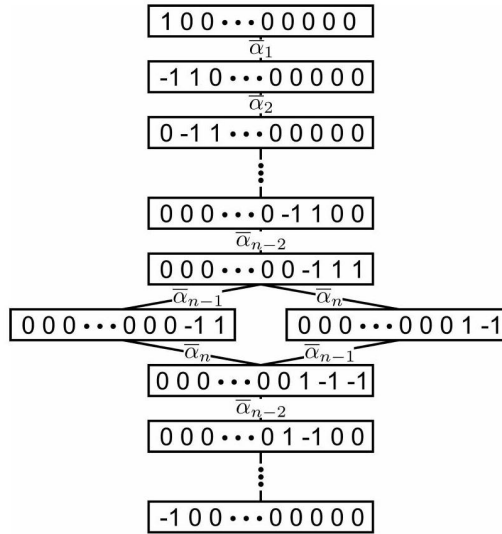


Figure 8.12: Weight tree for the defining representation of  $\text{so}(2n) (D_n) : (1, 0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \omega_1$ . The simple root labels  $\{\bar{\alpha}_i\}$  indicate the difference between the weights above and below the connecting line.

of this, since the two fundamental weights  $\omega_{1,2}$  are spin-  $1/2$  spinor representations. In high-energy (and recently, condensed matter) physics, these two inequivalent representations of  $\text{so}(4)$  correspond to left- and right-handed Weyl fermions.

For  $D_{2m} = \text{so}(4m) (m \in \{1, 2, \dots\})$ , the two fundamental spinor representations are each self-conjugate. For  $D_{2m+1} = \text{so}(4m+2) (m \in \{1, 2, \dots\})$ , the two fundamental spinor representations are pairwise conjugates. The spinor representations belong to different conjugacy classes than tensors built from vector indices, but the overall class structure of  $D_n$  is slightly more involved than it is for the other algebras. It will be discussed in the next section.

### Exercise

Show that the two spinor representations are self-conjugate (pairwise conjugate) for  $\mathfrak{so}(8)$  [ $\mathfrak{so}(10)$ ] by computing the weight trees from the Dynkin coefficients

- $\mathfrak{so}(8) : (0, 0, 1, 0)$  and  $(0, 0, 0, 1)$ ,
- $\mathfrak{so}(10) : (0, 0, 0, 1, 0)$  and  $(0, 0, 0, 0, 1)$ .

How many distinct weights do you find in each case?

### 8.4 Lattices and conjugacy classes

In a rank- $n$  Lie algebra, all roots can be expressed as linear combinations of  $n$  simple roots with integral coefficients. The MWDF Eq. (5.1.23) then implies that all weights in a given irreducible representation consist of a section of an infinite  $n$ -dimensional lattice generated by the simple root vectors. The weight geometries computed thus far are displayed in Figs. 8.2, 8.5, and 8.6 [ $A_2 = \mathfrak{su}(3)$ ], Figs. 7.3 and 8.8 [ $A_3 = \mathfrak{su}(4)$ ], and Fig. 8.10 [ $B_3 = \mathfrak{so}(7)$ ]. These figures make it clear that different representations of the same algebra can reside on different lattices. These differ only by a fractional lattice vector displacement relative to the origin, which we assign to the zero weight (i.e., the Cartan subalgebra of the adjoint representation).

In other words, the set of all representations divides into different conjugacy classes (or congruence classes), and these classes label the different lattices. We can crystallize this idea by defining two lattices:

$$\text{The weight lattice: } P = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 + \dots + \mathbb{Z}\omega_n \quad (8.4.1a)$$

$$\text{The root lattice: } Q = \mathbb{Z}\bar{\alpha}_1 + \mathbb{Z}\bar{\alpha}_2 + \dots + \mathbb{Z}\bar{\alpha}_n. \quad (8.4.1b)$$

All weights of all highest weight representations reside in the weight lattice  $P$ . Only those representations that include the zero weight reside in the root lattice  $Q$ . We label the conjugacy class of  $Q$  by zero; this automatically includes the adjoint representation of any semi-simple Lie algebra. The lattices  $P$  and  $Q$  can be viewed as abelian groups, and the number of conjugacy classes is equal to the number of distinct elements of the coset  $P/Q$ , which is a finite (factor) group. The order  $|P/Q|$  is equal to the determinant of the Cartan matrix. For the classical families, one has

| algebra | $ P/Q $ |
|---------|---------|
| $A_n$   | $n + 1$ |
| $B_n$   | 2       |
| $C_n$   | 2       |
| $D_n$   | 4       |

We can assign conjugacy classes using the congruence vector  $v$ , an  $n$ -component vector with integer elements that is fixed for a given algebra. For a weight  $\Lambda$ , the conjugacy classes are defined via

$$\Lambda \cdot v \equiv \sum_{i=1}^n \Lambda_i v_i \pmod{|P/Q|} \quad (8.4.3)$$

In this equation, the  $\{\Lambda_i\}$  are the Dynkin coefficients of weight  $\Lambda$ .

#### 8.4.1 $A_n = \mathfrak{su}(n + 1)$

The congruence vector is

$$v = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (8.4.4)$$

so that

$$\Lambda \cdot v = \Lambda_1 + 2\Lambda_2 + 3\Lambda_3 + \dots + n\Lambda_n \mod (n+1) \quad (8.4.5)$$

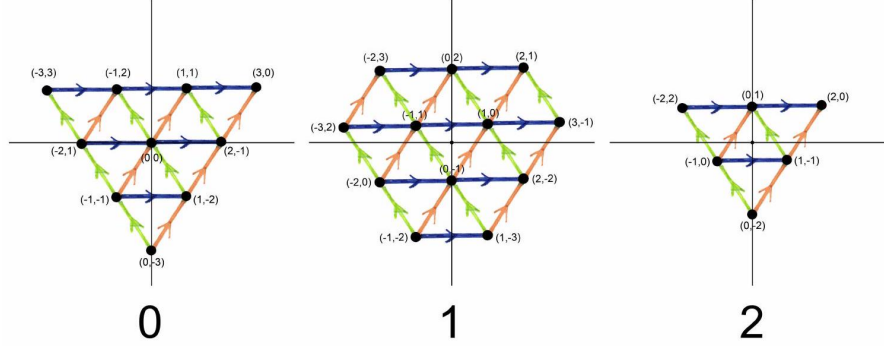


Figure 8.13:  $\mathfrak{su}(3)$  representations in each of the algebra's three conjugacy classes. Classes 0, 1, and 2 include the adjoint, defining 3, and conjugate  $\bar{3}$  representations, respectively (see Fig. 8.2). Here we display the weights of three higher-dimensional representations:  $(3, 0)$ ,  $(2, 1)$ , and  $(2, 0)$ . All reside on triangular lattices generated by the simple root vectors  $\bar{\alpha}_1$  and  $\bar{\alpha}_2$ , but the origin for the class 1 or 2 lattice is shifted relative to class 0. The adjoint origin (the zero weight associated to the Cartan subalgebra) is indicated by the axes drawn in each subfigure.

Thus the fundamental weight representation with highest weight  $\omega_m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) resides in class  $m$ , while the adjoint representation resides in class 0. The defining  $n+1$  (conjugate  $n+1$ ) representation is in class  $1(n)$ .

The three classes of  $\mathfrak{su}(3)$  were previously exhibited in Fig. 8.2. Fig. 8.13 shows three other representatives of the  $\mathfrak{su}(3)$  conjugacy classes.

#### 8.4.2 $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$

We first note that all irreducible representations of  $B_n$  are self-conjugate, which means the lowest weight is equal to minus the highest weight in every representation. This in part explains the simpler conjugacy class structure relative to  $A_n$ .

The congruence vector is

$$v = \{0, 0, 0, \dots, 0, 1\} \quad (8.4.6)$$

so that

$$\Lambda \cdot v = \Lambda_n \mod (2)$$

Recall that  $\omega_n$  corresponds to the fundamental spinor representation. This resides in class 1. All other fundamental weight representations  $\omega_m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) reside in class 0. Moreover, all representations built from the first  $n-1$  fundamental weights also reside in class 0, as does any representation in which  $\Lambda_n$  is even. These are the irreducible representations that obtain by tensoring together vector indices. Irreducible representations built from an even (odd) number of spinor indices and any number of vector indices reside in class 0(1).

### 8.4.3 $C_n = \text{sp}(2n)$

All irreducible representations of  $C_n$  are self-conjugate.

The congruence vector is

$$v = \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (8.4.8)$$

so that

$$\Lambda \cdot v = \Lambda_1 + 2\Lambda_2 + 3\Lambda_3 + \dots + n\Lambda_n \pmod{2} \quad (8.4.9)$$

The odd (even) fundamental weight representation  $\omega_m$  with  $m \in \{1, 3, 5, \dots\}$  ( $m \in \{2, 4, 6, \dots\}$ ) resides in class 1 (0). The adjoint representation  $\theta = 2\omega_1$  resides in class 0 (as expected).

8.4.4  $D_{2m} = \text{so}(4m), m \in \mathbb{Z}_+$ .

All irreducible representations of  $D_n$  with  $n = 2m$  (even) are self-conjugate. This leads to a simpler conjugacy class structure than  $D_{2m+1}$ .

The congruence vector is

$$v = \{0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1\} \quad (8.4.10)$$

so that

$$\Lambda \cdot v = \Lambda_{n-1} + \Lambda_n \pmod{4}, \quad n = 2m \quad (8.4.11)$$

The fundamental representations  $\{\omega_m\}$  with  $\{1 \leq m \leq n-2\}$  reside in class 0. This includes the adjoint representation  $\omega_2$ . The fundamental spinor representations  $\omega_{n-1}$  and  $\omega_n$  reside in class 1. Completely antisymmetric tensors of rank  $n-1$  and  $n$  reside in class 2 [Eqs. (8.3.17) and (8.3.18)].

### 8.4.5 $D_{2m+1} = \text{so}(4m+2), m \in \mathbb{Z}_+$ .

Representations of  $D_n$  with  $n = 2m+1$  (odd) can be self- or pairwise-conjugate.

The congruence vector is

$$v = \{2, 4, 6, \dots, 2n-4, n-2, n\}, \quad n = 2m+1 \quad (8.4.12)$$

so that

$$\Lambda \cdot v = 2\Lambda_1 + 4\Lambda_2 + 6\Lambda_3 + \dots + 2(n-2)\Lambda_{n-2} + (n-2)\Lambda_{n-1} + n\Lambda_n \pmod{4} \quad (8.4.13)$$

| class             | fundamental weight representations                  |
|-------------------|-----------------------------------------------------|
| 0                 | $\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots, \omega_{n-3}$ |
| 2                 | $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots, \omega_{n-2}$ |
| $(2m-1) \pmod{4}$ | $\omega_{n-1}$                                      |
| $(2m+1) \pmod{4}$ | $\omega_n$                                          |

Thus the fundamental highest weight representations divide up as follows:

Completely antisymmetric tensors of even (odd) rank less than  $n-2$  reside in class 0 (2). Completely symmetric tensors of any even (odd) rank also reside in class 0 (2). The rank- $(n-1)$  completely antisymmetric tensor [Eq. (8.3.17)] resides in class 0, while the rank- $n$  antisymmetric tensor [Eq. (8.3.17)] divides into two representations, both in class 2.



### Exercise

Prove two facts about the  $(0, 2, 0)$  and  $(0, 0, 2)$  partitions of the third-rank antisymmetric tensor of  $D_3$ :

- The representations  $(0, 2, 0)$  and  $(0, 0, 2)$  reside in the same conjugacy class (for example, share a weight),
- The  $(0, 2, 0)$  and  $(0, 0, 2)$  representations are pairwise conjugate.

To do this, compute the weight trees for these representations explicitly. Are there degenerate weights?

The fundamental spinor representations  $\{\omega_{n-1}, \omega_n\}$  respectively reside in conjugacy classes  $\{1, 3\}$  or  $\{3, 1\}$ , depending on  $m$ .

### 8.5 Tensors and tableaux for $\mathfrak{su}(n)$

For the four classical Lie algebra families, we have seen how to associate completely antisymmetric and completely symmetric tensors (with suitable traces removed in  $B_n, C_n$ , and  $D_n$ ) with the fundamental weights  $\{\omega_m\}$ , or simple combinations thereof. The orthogonal algebra  $B_n (D_n)$  has in addition one (two) fundamental spinor representation(s). We will consider spinor representations and their tensor products in module 10.

Completely antisymmetric, symmetric, or spinor tensors are the most frequently encountered representations in many-body quantum physics, be it high energy or condensed matter. These can arise e.g. as composite operators built from products of elementary boson or fermion fields with indices transforming in some physical symmetry space (spin, particle-hole, color, flavor, replica, etc.). They can also arise as order parameters for effective low-energy field theories with a spontaneously broken continuous symmetry. Nevertheless, occasionally one must confront more complicated representations corresponding to mixed symmetry tensors.

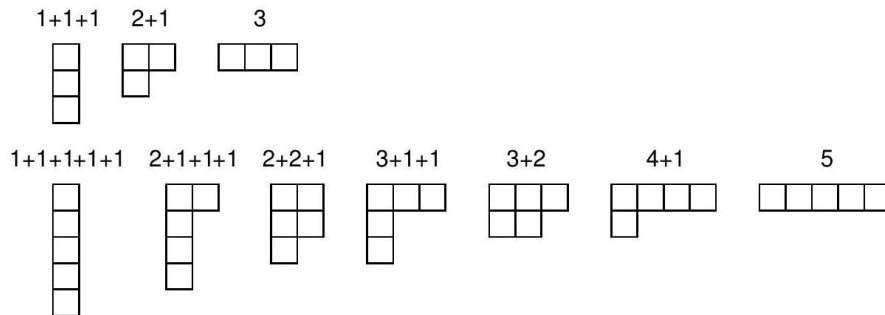


Figure 8.14: Complete set of Young tableaux with 3 boxes (top) and 5 boxes (bottom). Each  $n$ -box tableau corresponds to particular partition of  $n$ .

The standard method for dealing with generic tensor representations in  $A_{n-1} = \mathfrak{su}(n)$  is Young tableaux. These also appear in the classification of representations of the symmetric permutation group  $S_n$  (of order  $n!$ ). An advantage of Young tableaux is that they can be used to find all states in a representation, including degeneracies; the MWDF algorithm that we have been using only determines the weights, but not the dimensionality of the associated weight spaces. In the next module, we will however develop a recursive algorithm (Freudenthal) for determining weight degeneracies for any representation of any semi-simple Lie algebra, as well as the total dimension of such a representation (Weyl).

A disadvantage of Young tableaux is that they are mainly useful for  $\mathfrak{su}(n)$ , whereas we have tried to emphasize tools that work the same way for all Lie algebras.

### 8.5.1 Young tableaux

A Young tableau <sup>4</sup> is a top- and left-justified array of boxes. The boxes are arranged into rows. If the  $m^{\text{th}}$  row has  $p_m$  boxes, then the  $(m+1)^{\text{th}}$  row can have  $p_{m+1}$  boxes with  $0 \leq p_{m+1} \leq p_m$ . In other words, the number of boxes in each successive row must either decrease or stay the same.

Young tableaux enumerate the partitions of the positive integers (natural numbers)  $\mathbb{N}$ . A partition is a decomposition of a number  $n \in \mathbb{N}$  into a sum over components  $\{n_i \in \mathbb{N}\}$ , such that  $1 \leq n_i \leq n$ . For example, there are 5 partitions of the number 4:

$$\begin{aligned} 4 &= 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 2 \\ &= 2 + 2 \\ &= 1 + 3 \\ &= 4. \end{aligned}$$

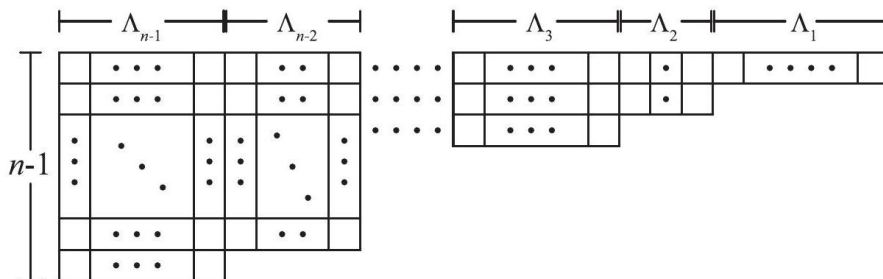
The set of all Young tableaux with  $n$  boxes is in one-to-one correspondence with the partitions of  $n$ , see Fig. 8.14.

### 8.5.2 Young tableau for a generic highest weight representation; tensors

There is a canonical construction for assembling a Young tableau from a highest weight representation of  $A_{n-1}$ , using the expansion of the weight in terms of an orthonormal basis (instead of the simple roots, coroots, or fundamental weights). This can be found e.g. in Sec. 13.3.2 of [2]. The derivation leads to the conclusion that a highest weight can be viewed in terms the integral partitions of its Dynkin labels. Because Young tableaux precisely enumerate partitions of the positive integers, they are an efficient tool for  $\text{su}(n)$ . Here we will only state the result and provide examples of particular classes of tensor representations.

The Young tableau for a generic highest-weight representation of  $\text{su}(n)$  is shown in Fig. 8.15. If the highest weight has Dynkin labels  $\Lambda \rightarrow \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1}\}$ , then the tableau has  $\Lambda_{n-1} \geq 0$  columns of length  $(n-1)$ ,  $\Lambda_{n-2} \geq 0$  columns of length  $(n-2)$ , etc. We can interpret each box in the tableau as a particular index  $i_m$  in a rank- $R$  tensor ( $1 \leq m \leq R$ ). All indices belong to the defining ("n") representation ( $1 \leq i_m \leq n$ ). From Fig. 8.15, the rank  $R$  is

$$\begin{aligned} R &= \Lambda_1 + 2\Lambda_2 + 3\Lambda_3 + \dots + (n-1)\Lambda_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \Lambda_i \end{aligned} \tag{8.5.1}$$



<sup>4</sup> Unlabeled tableaux are sometimes called Young diagrams.

Figure 8.15: Young tableau for a generic finite-dimensional, irreducible representation of  $\mathfrak{su}(n) = A_{n-1}$ . The highest weight is assumed to possess the Dynkin labels  $\Lambda \rightarrow \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1}\}$ .

where  $v = \{1, 2, \dots, n-1\}$  is the congruence vector for  $\mathfrak{su}(n)$  [Eq. (8.4.4)]. Eq. (8.5.1) implies that all Young tableaux with the same number of boxes (mod  $n$ ) belong to the same conjugacy class.

The rank- $R$  tensor  $T_{i_1 i_2 \dots i_R}$  corresponding to the tableau in Fig. 8.15 is made an irreducible representation by the following prescription:

- Take a generic rank- $R$  tensor, and symmetrize the indices within each row of the tableau.
- Now antisymmetrize indices within each column.

A generic tensor of this form is obviously cumbersome to work with; in the remainder we will specialize to simpler cases.

The  $m^{\text{th}}$  fundamental representation (rank- $m$  fully antisymmetric tensor) with highest weight  $\Lambda = \omega_m$  corresponds to a single column of  $m$  boxes, (a) in Fig. 8.16. The rank- $p$  fully symmetric tensor with highest weight  $\Lambda = p\omega_1$  corresponds to a single row of  $p$  boxes. This displays the general scheme: indices in rows are (pre)symmetrized, while indices in columns are antisymmetrized. Moreover, we cannot have a column of length greater than  $n$ . A length- $n$  column corresponds to a set of  $n$  indices that can be contracted with the rank- $n$  Levi-Civita symbol; for this reason, we always omit columns of length  $n$ .

We can also exhibit tableaux for tensors built from conjugate  $\bar{n}$  ("upstairs") indices (see Sec. 8.2.3, above). The rank- $m$  fully antisymmetric tensor  $T^{[i_1 \dots i_m]}$  has weight  $\omega_{n-m}$ , and thus corresponds to a single column of  $n-m$  boxes, (c) in Fig. 8.16. A fully symmetrized rank- $p$  conjugate-index tensor  $T^{(i_1 \dots i_p)}$  has highest weight  $\Lambda = (0, 0, \dots, 0, p) = p\omega_{n-1}$ . This corresponds to the  $(n-1) \times p$  block tableau in Fig. 8.16(d). It is always important to remember that the boxes of correspond to defining  $n$ -representation indices. In particular, the rank-1 conjugate representation  $T^i$  corresponds to a single maximal column of  $(n-1)$  boxes.

More complicated tensors can be built by mixing defining- $n$  and conjugate- $\bar{n}$  indices. Two simple classes that correspond to irreducible representations are mixed, traceless, mutually (anti)symmetric tensors:

- $\tilde{T}^{(j_1 \dots j_q)}_{(i_1 \dots i_p)}; \tilde{T}^{(kj_2 \dots j_q)}_{(ki_2 \dots i_p)} = 0$ : bisymmetrized rank- $p \times$  rank- $q$  traceless tensor. The highest weight is

$$(p, 0, 0, \dots, 0, q) \Leftrightarrow p\omega_1 + q\omega_{n-1} \quad (8.5.2)$$

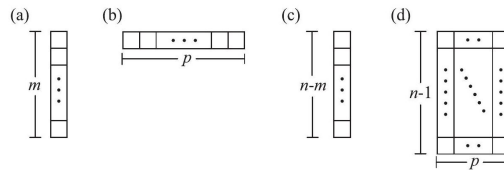


Figure 8.16: Young tableau for simple tensors. (a) Fundamental representation  $T_{[i_1 \dots i_m]} \Leftrightarrow \omega_m$ . (b) Fully symmetrized representation  $T_{(i_1 \dots i_p)} \Leftrightarrow p\omega_1$ . (c) Fully antisymmetrized rank- $m$  tensor built from conjugate indices,  $T^{[i_1 \dots i_m]} \Leftrightarrow T_{[j_1 \dots j_{n-m}]} \Leftrightarrow \omega_{n-m}$ . (d) Fully symmetrized rank- $p$  tensor built from conjugate indices,  $T^{(i_1 \dots i_p)} \Leftrightarrow p\omega_{n-1}$ .

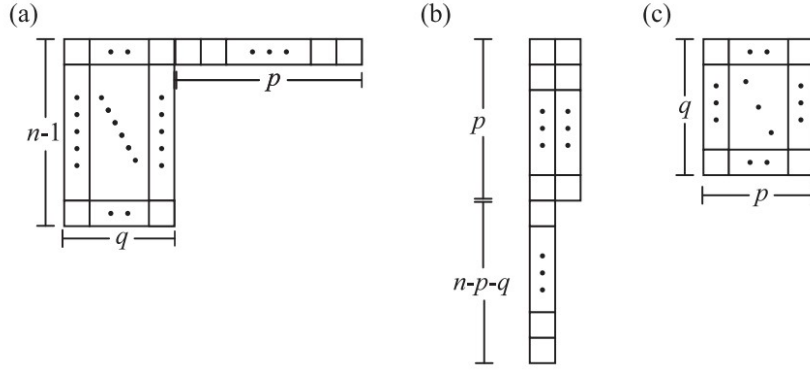


Figure 8.17: Subfigures (a) and (b) can be associated to tensors with mixed lower and upper indices. Subfigure (a) corresponds to a symmetrized traceless tensor  $\tilde{T}_{(i_1 \dots i_p)}^{(j_1 \dots j_q)} \Leftrightarrow p\omega_1 + q\omega_{n-1}$  [Eq. (8.5.2)]. Subfigure (b) corresponds to an antisymmetrized traceless tensor  $\tilde{T}_{[i_1 \dots i_q]}^{[j_1 \dots j_p]} \Leftrightarrow \omega_p + \omega_{n-q}$  ( $p + q \neq n$ ) [Eq. (8.5.3)]. Subfigure (c) shows a generic block tableau corresponding to  $p\omega_q$  [Eq. (8.5.4)].

•  $\tilde{T}_{[i_1 \dots i_p]}^{[j_1 \dots j_q]}, \tilde{T}_{[k_1 \dots k_p]}^{[l_1 \dots l_q]} = 0$ : biantisymmetrized rank-  $p \times$  rank-  $q$  traceless tensor. The highest weight is

$$\left( 0, 0, \dots, 0, \overset{p^{\text{th}}}{\underset{\text{place}}{1}}, 0, \dots, 0, \overset{n-q}{\underset{\text{place}}{1}}, 0, \dots, 0, 0 \right) \Leftrightarrow \omega_p + \omega_{n-q}, \quad (p + q \neq n) \quad (8.5.3)$$

The corresponding tableaux correspond to the simple "gluing" of the defining rank-  $p$  and conjugate rank-  $q$  tableaux, Figs. 8.17(a,b). As a final example, we consider the tableau corresponding to the highest weight

$$\left( 0, 0, \dots, 0, \overset{q^{\text{th}}}{\underset{\text{Place}}{p}}, 0, \dots, 0, 0 \right) \Leftrightarrow p\omega_q \quad (8.5.4)$$

The tableau is the "block" shown in Fig. 8.17(c). The general prescription says that we can view this irreducible representation as a tensor of  $p \times q$  defining indices, first symmetrized in the rows of the tableau, and finally antisymmetrized in the columns. I.e.,

$$T_{[i_{1,1}i_{2,1}\dots i_{q,1}][i_{1,2}i_{2,2}\dots i_{q,2}]\dots[i_{1,p}i_{2,p}\dots i_{q,p}]} \quad (8.5.5)$$

where  $i_{m,n}$  is an index appearing in the  $m^{\text{th}}$  row and  $n^{\text{th}}$  column of the tableau. Here the indices are grouped according to columns, each completely antisymmetric. The "presymmetrization" of indices sharing rows [i.e.,  $(i_{1,1}i_{1,2}\dots i_{1,p})$ ] is necessary to obtain an irreducible representation.

### 8.5.3 Dimension rule: "Factors over hooks"

We can encode any irreducible representation of  $\mathfrak{su}(n)$  by a Young tableau. Yet this doesn't appear to give a particularly more transparent picture for a representation than its explicit tensor form (at least for simple cases). Nor do tableaux clearly convey geometrical information (e.g. the weight geometry of a representation). Why bother introducing them at all?

The main advantage is a number of simple tableau-based algorithms that allow efficient calculation of data pertaining to  $\mathfrak{su}(n)$  representations and their products. We will present a couple of these schemes here, and more later in the course. At this stage these are presented as "cookbook" recipes, rather than derived.

The dimension of an  $\mathfrak{su}(n)$  irreducible representation can be computed from its tableau using the "factors over hooks" rule. A hook is a line passing up through a particular column of a tableau up to some particular row, turning right, and passing out through that row. See Figs. 8.18(a)-(c).

To compute the dimension, there is the following prescription. Given a young tableau with  $R$  boxes,

- Write " $n$ " in the upper-left corner box.
- Fill in rows with monotonically increasing sequences. I.e., the first row of length  $p$  should read  $\{n, n+1, n+2, \dots, n+p\}$ .
- Fill in columns with monotonically decreasing sequences. I.e., the first column of length  $q$  should read  $\{n, n-1, n-2, \dots, n-q+1\}$ .

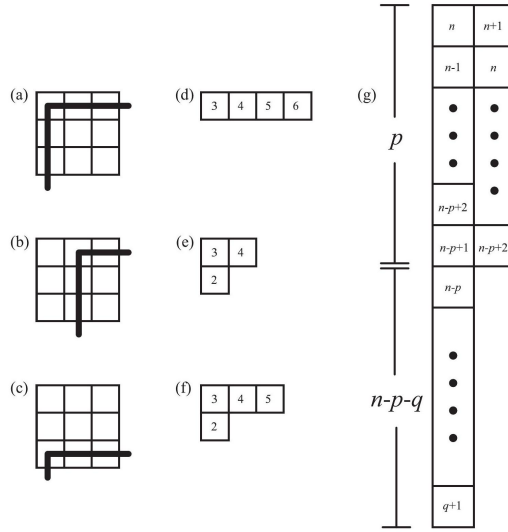


Figure 8.18: Ingredients in the "factors over hooks" rule for computing the dimension  $d_\Lambda$  of an irreducible representation (labeled by the Dynkin coefficients  $\{\Lambda_i\}$  if its highest weight state, or the associated tableau). (a)-(c) show examples of "hooks." The hook in (a), (b), or (c) passes through 5, 4, or 3 boxes, respectively. Subfigures (d)-(f) [(g)] show  $\mathfrak{su}(3)$  [ $\mathfrak{su}(n)$ ] tableaux enumerated according to the factors over hooks scheme. The dimensions are computed in the text.

- The dimension  $d_\Lambda$  of the representation is give by

$$d_\Lambda = \frac{\prod_{\text{boxes}} (\text{factor in each box})}{\prod_{\text{hooks}} (\text{number of boxes intersected by each hook})} \equiv \frac{F_\Lambda}{H_\Lambda} \quad (8.5.6)$$

This seemingly ad-hoc scheme is in fact a special case of the Weyl character formula, which we will derive for any Lie algebra in module 9.

Let us verify the factors over hooks rule for a number of cases. First we consider tableau for  $\mathfrak{su}(3)$ . Fig. 8.18(d) corresponds to the representation  $\Lambda = 4\omega_1$ , i.e. a rank-4 fully symmetric tensor. This has

$$d_{(4,0)} = \frac{(4+2)!}{4!2!} = 15$$

independent components. On the other hand, the numerator and denominator of Eq. (8.5.6) are given by

$$\begin{aligned} F_{(4,0)} &= 3 \times 4 \times 5 \times 6, & H_{(4,0)} &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &\Rightarrow d_{(4,0)} = 15 \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

in agreement with the above. Fig. 8.18(e) is the  $\mathfrak{su}(3)$  adjoint representation with dimension  $d_{(1,1)} = 8$ . Eq. (8.5.6) gives

$$\begin{aligned} F_{(1,1)} &= 3 \times 4 \times 2, & H_{(1,1)} &= 3 \times 1 \times 1 \\ &\Rightarrow d_{(1,1)} = 8 \end{aligned} \quad (8.5.8)$$

Fig. 8.18(f) is the  $\mathfrak{su}(3)$  representation  $(2, 1)$  with weight geometry shown in Fig. 8.6. We will show in module 9 that this has  $d_{(2,1)} = 15$ . Eq. (8.5.6) gives

$$\begin{aligned} F_{(2,1)} &= 3 \times 4 \times 5 \times 2, & H_{(2,1)} &= 4 \times 2 \times 1 \times 1 \\ &\Rightarrow d_{(2,1)} = 15 \end{aligned} \quad (8.5.9)$$

Finally, consider the  $\mathfrak{su}(n)$  tableau shown in Fig. 8.18(g). This corresponds to the traceless biantisymmetric tensor  $\tilde{T}_{[i_1 \dots i_p]}^{[j_1 \dots j_q]} \Leftrightarrow \omega_p + \omega_{n-q}$ , Eq. (8.5.3). The number of components of such a tensor is

$$\begin{aligned} d_{\omega_p + \omega_{n-q}} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{n!}{q!(n-q)!} - \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} \frac{n!}{(q-1)!(n-q+1)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p+1)!} \frac{n!}{q!(n-q+1)!} [(n-p+1)(n-q+1) - pq] \\ &= \frac{n!(n+1)!(n+1-p-q)}{p!(n-p+1)!q!(n-q+1)!} \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

The second term on the right-hand-side of the first line of Eq. (8.5.10) accounts for the traceless constraint. On the other hand, Eq. (8.5.6) gives

$$\begin{aligned} F_{\omega_p + \omega_{n-q}} &= \frac{n!}{q!} \frac{(n+1)!}{(n-p+1)!} \\ H_{\omega_p + \omega_{n-q}} &= \frac{(n-q+1)!}{(n-p-q+1)!} (n-p-q)! p! \\ \Rightarrow d_{\omega_p + \omega_{n-q}} &= \frac{n!(n+1)!(n-p-q+1)}{p!(n-p+1)!q!(n-q+1)!} \end{aligned} \quad (8.5.11)$$

#### 8.5.4 Semistandard Young tableaux: enumerating the states

We can also generate all states of an irreducible  $\mathfrak{su}(n)$  representation explicitly using semistandard Young tableaux. From a given tableau corresponding to a particular highest weight representation, states are enumerated by filling in boxes with different sequences of positive integers. The prescription is to generate all possible labelings adhering to the following rules. Let  $c_{i,j}$  be the integer appearing in the box in the  $i^{\text{th}}$  row and  $j^{\text{th}}$  column. Then

$$1 \leq c_{i,j} \leq n, \quad c_{i,j} \leq c_{i,j+1}, \quad c_{i,j} < c_{i+1,j} \quad (8.5.12)$$

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

12

$$(b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

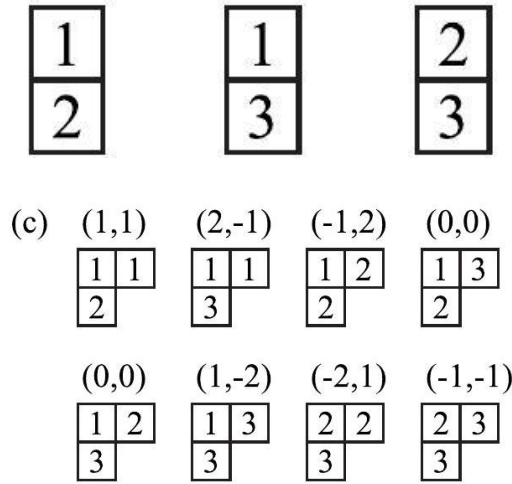


Figure 8.19: Semistandard tableaux for  $\mathfrak{su}(3)$  representations (a)  $(1,0)$   $(3)$ , (b)  $(0,1)$   $(\bar{3})$ , and (c)  $(1,1)$  (adjoint).

I.e., each successive element of a row is greater than or equal to the previous entry, while successive elements of a column are strictly greater than previous entries.

We apply this algorithm to the defining  $3$ , conjugate  $\bar{3}$ , and adjoint representations of  $\mathfrak{su}(3)$  in Fig. 8.19.

Each semistandard tableau corresponds to a particular state in the representation, irrespective of the dimension of the associated weight space. The weights themselves can be reconstructed as follows. For an  $\mathfrak{su}(n)$  semistandard tableau, a box with number  $p$  ( $1 \leq p \leq n$ ) is associated to the weight

$$\omega_p - \omega_{p-1}, \quad \omega_0 = \omega_n \equiv 0 \quad (8.5.13)$$

The weight of the semistandard tableau obtains by summing the contributions of all boxes, c.f. Fig. 8.19 for  $\mathfrak{su}(3)$  examples.

## 8.6 Dual Coxeter numbers and quadratic form matrices

Here we list the quadratic form matrices and dual Coxeter numbers for the four classical Lie algebra families. In this section we use a standard normalization scheme for the root scalar products, such that long roots are normalized to 2 :  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ . This means that roots and coroots are identical for simply laced algebras. This normalization scheme is different from the one employed to define the classical Lie algebras in module 7, and will be explained in module 9.

The dual Coxeter numbers are

| algebra | group dimension $d$ | $g$    |
|---------|---------------------|--------|
| $A_n$   | $n(n+2)$            | $n+1$  |
| $B_n$   | $n(2n+1)$           | $2n-1$ |
| $C_n$   | $n(2n+1)$           | $n+1$  |
| $D_n$   | $n(2n-1)$           | $2n-2$ |

(8.6.1)

The quadratic form matrix [Eq. (8.1.5c)] for each of these families is given by

$$\begin{aligned}
(\hat{F}_{A_n})_{ij} &= \frac{1}{(n+1)} \min(i, j)[n+1 - \max(i, j)] \\
\hat{F}_{A_n} &= \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \cdots & 4 & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \cdots & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2(n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{bmatrix} \quad (8.6.2a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\hat{F}_{B_n})_{ij} &= \begin{cases} \min(i, j), & 1 \leq i, j \leq n-1 \\ \min(i, j)/2, & 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } j = n, \text{ or } 1 \leq j \leq n-1 \text{ and } i = n \\ n/4, & i = j = n \end{cases} \\
\hat{F}_{B_n} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2(n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n/2 \end{bmatrix} \quad (8.6.2b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\hat{F}_{C_n})_{ij} &= \frac{1}{2} \min(i, j) \\
\hat{F}_{C_n} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{bmatrix} \quad (8.6.2c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\hat{F}_{D_n})_{ij} &= \begin{cases} \min(i, j), & 1 \leq i, j \leq n-2 \\ \min(i, j)/2, & 1 \leq i \leq n-2 \text{ and } j \in \{n-1, n\}, \text{ or } 1 \leq j \leq n-2 \text{ and } i \in \{n-1, n\} \\ (n-2)/4, & i = n-1 \text{ and } j = n, \text{ or } j = n-1 \text{ and } i = n \\ n/4, & i = j = n-1, \text{ or } i = j = n \end{cases} \\
\hat{F}_{D_n} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 6 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2(n-2) & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n/2 & (n-2)/2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & (n-2)/2 & n/2 \end{bmatrix} \quad (8.6.2 d)
\end{aligned}$$

### 8.3.8 Casimir operators, characters, dimension and strange formulae

#### 9.1 Quadratic Casimir operator

An essential datum for each irreducible  $\mathfrak{su}(2)$  representation is the eigenvalue  $C^{(2j)} = j(j+1)$  of the quadratic Casimir operator (see Sec. 1.3.3),



$$\hat{C} \equiv \hat{T}_z \hat{T}_z + \frac{1}{2} (\hat{T}_+ \hat{T}_- + \hat{T}_- \hat{T}_+) \quad (9.1.1)$$

where  $2j \in \{0, 1, 2, \dots\}$  is the Dynkin label for the spin-  $j$  representation (i.e., the Dynkin coefficient of the highest weight). The key properties of the Casimir operator are

- It gives the same eigenvalue for all states in an irreducible representation,

$$\hat{C}|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle, \quad \hat{T}_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle, \quad m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$$

- It commutes with all generators,

$$[\hat{C}, \hat{T}_+] = [\hat{C}, \hat{T}_-] = [\hat{C}, \hat{T}_z] = 0$$

Eigenvalues of an  $\mathfrak{su}(2)$ -invariant Hamiltonian can depend only on  $C^{(2j)} = j(j+1)$ , not on the "magnetic quantum number"  $m$  that distinguishes different weight vectors. Although each representation is uniquely labeled by its Casimir eigenvalue, it is important to remember that  $\hat{C}$  is not defined abstractly for the Lie algebra  $A_1 = \mathfrak{su}(2)$ , but only for a particular representation in terms of the explicit bilinear sum of matrix generators in Eq. (9.1.1).<sup>1</sup>

For a generic rank-  $n$  Lie algebra, it turns out that one can construct exactly  $n$  Casimir operators satisfying the axioms in Eq. (9.1.2) [3]. We will discuss only the generalization of the quadratic Casimir in Eq. (9.1.1), which is unique. The other higher order Casimir operators are built from sums of  $m$ -fold products, where  $m \geq 3$  is the order of each factor in the operator.  
2

We define the quadratic Casimir operator for a rank-  $n$  Lie algebra  $L$  as an operator acting on states of a generic finitedimensional, irreducible representation as follows:

$$\hat{C} \equiv \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij}^{-1} \hat{H}_{\bar{\alpha}_i} \hat{H}_{\bar{\alpha}_j} + \sum_{\alpha \neq 0} \frac{\hat{E}_\alpha \hat{E}_{-\alpha}}{(e_\alpha, e_{-\alpha})}, \quad \text{Quadratic Casimir operator} \quad (9.1.3a)$$

$$\mathcal{A}_{ij} \equiv \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = A_{ij} \frac{|\bar{\alpha}_j|^2}{2} \quad (9.1.3b)$$

Just as in  $\mathfrak{su}(2)$  [Eq. (9.1.1)], the operator  $\hat{C}$  is a sum of bilinears of Cartan subalgebra elements  $\{\hat{H}_{\bar{\alpha}_i}\}$  or root vector raising and lowering operators  $\{\hat{E}_\alpha, \hat{E}_{-\alpha}\}$ . The overlap matrix  $\mathcal{A}_{ij}$  is a symmetrized version of the Cartan matrix  $A_{ij} = \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle$  [Eq. (5.3.8)]. Note that the sum over root vector operators in  $\hat{C}$  includes all nonzero roots, not just positive or simple ones. The number of terms in the sum Eq. (9.1.3a) is equal to  $N_\theta$ , the dimension of the adjoint representation: [recall that  $\theta$  labels the highest weight (root) of the adjoint representation, Secs. 5.3.1 and 8.2.4]

$$N_\theta = n + |\Delta| = n + |\Delta_+| + |\Delta_-| = d \quad (9.1.4)$$

In this equation,  $n$  denotes the rank,  $|\Delta|$  ( $|\Delta_\pm| = |\Delta|/2$ ) is the number of roots (number of positive or negative roots), and  $d$  is the dimension of the corresponding continuous group  $G$  generated by the Lie algebra  $L$ .

Claim I: The quadratic  $\hat{C}$  is a pure number in any irreducible representation. I.e., it commutes with all  $\{\hat{H}_{\bar{\alpha}_i}, \hat{E}_\alpha\}$ .

Before we prove this statement, we examine some of its consequences.

- Trace in the adjoint representation. Consider the trace

$$(C) \equiv \text{Tr}[\hat{C}]_\theta \quad (9.1.5)$$

where  $\text{Tr}[\cdots]_\Lambda$  denotes the trace in representation  $\Lambda$ ; here  $\theta$  indicates the adjoint representation. Since the trace in the adjoint representation is the Killing form  $\text{Tr}[\hat{a}_d \hat{a}_d]_\theta = (x, y)$ , we have

$$(C) = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij}^{-1} (h_{\bar{\alpha}_i}, h_{\bar{\alpha}_j}) + \sum_{\alpha \neq 0} = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij}^{-1} \mathcal{A}_{ji} + \sum_{\alpha \neq 0} = N_\theta \quad (9.1.6)$$

• Action on the highest-weight state  $\phi_\Lambda$  of an irreducible representation. Let  $\Lambda$  denote the associated highest weight. Then

$$\begin{aligned} \hat{C}\phi_\Lambda &= \sum_{i,j=1}^n \langle \Lambda, \bar{\alpha}_i \rangle \mathcal{A}_{ij}^{-1} \langle \bar{\alpha}_j, \Lambda \rangle \phi_\Lambda + \sum_{\alpha > 0} \left[ \frac{\hat{E}_{-\alpha} \hat{E}_\alpha}{(e_\alpha, e_{-\alpha})} + \hat{H}_\alpha \right] \phi_\Lambda \\ &= \left[ \langle \Lambda, \Lambda \rangle + \sum_{\alpha > 0} \langle \Lambda, \alpha \rangle \right] \phi_\Lambda \end{aligned} \quad (9.1.7)$$

On the first line of Eq. (9.1.7), we have restricted the sum over root vectors to positive roots (because  $\phi_\Lambda$  is a highest weight state annihilated by all  $\hat{E}_{-\alpha}$  with  $\alpha < 0$ ), and we have employed the definition for  $h_\alpha$  in Eq. (4.4.10). On the second line, we have removed the resolution of the identity in the rank-  $n$  space of weights  $H^*$ . For a linearly independent, but not necessarily orthonormal basis of states  $\{|i\rangle\}$ , the identity can be expressed as

$$\hat{1}_n = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{O}_{ij}^{-1} |i\rangle \langle j|, \quad \mathcal{O}_{ij} = \langle i|j\rangle \quad (9.1.8)$$

It will prove useful to rewrite Eq. (9.1.7) in a more compact way. We define the Weyl vector for a Lie algebra as the weight

$$\rho_W \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha = \sum_{j=1}^n \omega_j, \quad \text{Weyl vector for a rank- } n \text{ Lie algebra.} \quad (9.1.9)$$

The second equality implies that the Dynkin coefficients of the Weyl vector are  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) = (1, 1, 1, \dots, 1)$ . We will prove this in Sec. 9.3, below. Eq. (9.1.7) then becomes

$$\hat{C}\phi_\Lambda \equiv C^\Lambda \phi_\Lambda = \langle \Lambda, \Lambda + 2\rho_W \rangle \phi_\Lambda \quad (9.1.10)$$

Proof: The quadratic  $\hat{C}$  commutes with all generators  $\{\hat{H}_{\bar{\alpha}_i}, \hat{E}_\alpha\}$  in an irreducible representation. Exploiting the Lie bracket structure of a generic Lie algebra [Eq. (4.4.11)], we have

<sup>1</sup> To write Eq. (9.1.1), we need to define the (matrix) product between generators. The only product operation defined for the Lie algebra itself is the Lie bracket, which becomes a matrix commutator in a finite-dimensional representation.

<sup>2</sup> The order  $m+1$  of the  $(m+1)$ -fold products summed in a particular Casimir is called the exponent  $m$ . For each algebra  $A_n, B_n, C_n$ , and  $D_n$ , the  $n$  exponents of the algebra are tabulated (e.g.) in Sec. 13 A of [2].

$$\begin{aligned}
[\hat{C}, \hat{H}_{\bar{\alpha}_i}] &= \sum_{\alpha \neq 0} \frac{\hat{E}_\alpha [\hat{E}_{-\alpha}, \hat{H}_{\bar{\alpha}_i}] + [\hat{E}_\alpha, \hat{H}_{\bar{\alpha}_i}] \hat{E}_{-\alpha}}{(e_\alpha, e_{-\alpha})} \\
&= \sum_{\alpha \neq 0} \frac{\hat{E}_\alpha \hat{E}_{-\alpha} \langle \alpha, \bar{\alpha}_i \rangle - \langle \alpha, \bar{\alpha}_i \rangle \hat{E}_\alpha \hat{E}_{-\alpha}}{(e_\alpha, e_{-\alpha})} = 0
\end{aligned} \tag{9.1.11a}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{C}, \hat{E}_\beta] &= \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij}^{-1} \langle \beta, \bar{\alpha}_j \rangle (\hat{H}_{\bar{\alpha}_i} \hat{E}_\beta + \hat{E}_\beta \hat{H}_{\bar{\alpha}_i}) + \sum_{\alpha \neq 0} \frac{\hat{E}_\alpha [\hat{E}_{-\alpha}, \hat{E}_\beta] + [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_\beta] \hat{E}_{-\alpha}}{(e_\alpha, e_{-\alpha})} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij}^{-1} \langle \beta, \bar{\alpha}_j \rangle (\hat{H}_{\bar{\alpha}_i} \hat{E}_\beta + \hat{E}_\beta \hat{H}_{\bar{\alpha}_i}) + \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \neq \beta}} \frac{N_{-\alpha, \beta} \hat{E}_\alpha \hat{E}_{\beta-\alpha}}{(e_\alpha, e_{-\alpha})} + \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \neq -\beta}} \frac{N_{\alpha, \beta} \hat{E}_{\alpha+\beta} \hat{E}_{-\alpha}}{(e_\alpha, e_{-\alpha})} - \hat{E}_\beta \hat{H}_\beta - \hat{H}_\beta \hat{E}_\beta
\end{aligned} \tag{9.1.11b}$$

Next we invoke invariance of the Killing form [Eq. (4.4.8)], as well as Eq. (4.4.5) to obtain

$$\begin{aligned}
(e_\alpha, [e_\beta, e_\gamma]) &= N_{\beta, \gamma} (e_\alpha, e_{-\alpha}) \delta_{\beta+\gamma+\alpha, 0} = -N_{-\beta-\alpha, \beta} (e_\alpha, e_{-\alpha}) \delta_{\beta+\gamma+\alpha, 0} \\
&= ([e_\alpha, e_\beta], e_\gamma) = N_{\alpha, \beta} (e_{\alpha+\beta}, e_{-\alpha-\beta}) \delta_{\alpha+\beta+\gamma, 0} \\
\Rightarrow \frac{N_{\alpha-\beta, \beta}}{(e_{\beta-\alpha}, e_{\alpha-\beta})} &= -\frac{N_{-\alpha, \beta}}{(e_\alpha, e_{-\alpha})}
\end{aligned} \tag{9.1.12}$$

In this equation, we have used  $N_{\alpha, \beta} = -N_{\beta, \alpha}$ , which follows from the antisymmetric property of the Lie bracket [Eq. (1.2.1a)]; on the last line we have sent  $\alpha \rightarrow -\alpha$  on both sides. We can therefore rewrite the red term in Eq. (9.1.11b) as follows:

$$\sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \neq -\beta}} \frac{N_{\alpha, \beta} \hat{E}_{\alpha+\beta} \hat{E}_{-\alpha}}{(e_\alpha, e_{-\alpha})} = \sum_{\substack{\alpha' \neq 0 \\ \alpha' \neq \beta}} \frac{N_{\alpha'-\beta, \beta} \hat{E}_{\alpha'} \hat{E}_{\beta-\alpha'}}{(e_{\alpha'-\beta}, e_{-\alpha'+\beta})} = - \sum_{\substack{\alpha' \neq 0 \\ \alpha' \neq \beta}} \frac{N_{-\alpha', \beta} \hat{E}_{\alpha'} \hat{E}_{\beta-\alpha'}}{(e_{\alpha'}, e_{-\alpha'})} \tag{9.1.13}$$

where we have defined  $\alpha' \equiv \alpha + \beta$ . The two terms in Eq. (9.1.11b) explicitly involving the structure constants therefore exactly cancel, leaving

$$[\hat{C}, \hat{E}_\beta] = \hat{E}_\beta \left[ \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij}^{-1} \langle \beta, \bar{\alpha}_j \rangle \hat{H}_{\bar{\alpha}_i} - \hat{H}_\beta \right] + \left[ \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij}^{-1} \langle \beta, \bar{\alpha}_j \rangle \hat{H}_{\bar{\alpha}_i} - \hat{H}_\beta \right] \hat{E}_\beta = 0 \tag{9.1.14}$$

The final equality follows from the representation of  $\hat{H}_\beta$  in the linearly independent basis  $\{H_{\bar{\alpha}_j}\}$ ; e.g., consider a state  $|f\rangle$  multiplied by the resolution of the identity in Eq. (9.1.8):

$$|f\rangle = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{O}_{ij}^{-1} |i\rangle \langle j| f\rangle$$

Q.E.D.

### 9.1.1 Standard normalization for Killing form and Casimir

The Dynkin coefficients for any weight in an irreducible representation are guaranteed to be integers by the MWDF, Eq. (5.1.23). Dynkin coefficients are independent of the normalization of simple roots, simple coroots, or fundamental weights; the same is true of the Cartan matrix

$A_{ij} = \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle = 2 \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle / \langle \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_j \rangle$ , the rows of which give the Dynkin coefficients for the simple roots.

By contrast, the quadratic form matrix  $F_{ij} = \langle \omega_i, \omega_j \rangle$  [Eq. (8.1.5c)] and the quadratic Casimir eigenvalue in Eq. (9.1.10) do depend upon the normalization scheme. In certain applications (notably affine Lie algebras in conformal field theory (CFT) [2]), it is crucial to adopt a consistent normalization. We define the "standard" normalization scheme used in CFT and elsewhere in this subsection, and will employ it throughout the remainder of these lectures (unless otherwise noted).

Recall that all roots (including simple roots) come in one or two varieties for semi-simple Lie algebras: simply-laced algebras have all roots with the same length; otherwise there are "short" and "long" roots (Prop. IV., Sec. 5.2.2). The inner products of simple roots were computed for the four classical families in module 7, using a particular normalization scheme for the generators of the defining representation in each case. The results for  $A_{n-1} = \mathfrak{su}(n)$  [Eq. (7.1.21)],  $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$  [Eq. (7.4.19)],  $C_n = \mathfrak{sp}(2n)$  [Eq. (7.2.20)], and  $D_n = \mathfrak{so}(2n)$  [Eq. (7.3.23)] show that each long simple root  $\bar{\alpha}_i^{(\text{long})}$  for algebras  $B_n$  and  $C_n$  (all simple roots for simply-laced algebras,  $A_n$  and  $D_n$ ) is normalized to

$$\langle \bar{\alpha}_i^{(\text{long})}, \bar{\alpha}_i^{(\text{long})} \rangle = \left| \bar{\alpha}_i^{(\text{long})} \right|^2 = \frac{1}{g} \quad (9.1.15)$$

where  $g$  is the dual Coxeter number defined in module 8, Eq. (8.1.13). The tabulated values for  $g$  in each case appear in Eq. (8.6.1), and match Eqs. (7.1.21), (7.4.19), (7.2.20), and (7.3.23).

The standard normalization scheme resets  $\left| \bar{\alpha}_i^{(\text{long})} \right|^2 = 2$  for all algebras, i.e. all long roots normalized to two. The highest root  $\theta$  (Sec. 8.2.4) is always a long root, so that this scheme always has  $|\theta|^2 = 2$ . To achieve this, we renormalize the following objects:

- Renormalized Killing form:

$$(x, y)_2 \equiv \frac{1}{2g}(x, y) = \frac{1}{2g} \text{Tr} [\hat{a}_d \hat{a}_{dy}]_\theta \quad (9.1.16a)$$

The trace in the adjoint representation for a product of generators is  $2g$  times the renormalized Killing form.

- Renormalized root representation in  $H$ , the Cartan subalgebra: Let  $h_\alpha \in H$  represent the root  $\alpha \in \Delta$ ;  $\Delta$  denotes the set of roots.  $h_\alpha$  is explicitly defined in the old normalization scheme via Eq. (4.4.10). Then we define the renormalized version

$$h_\alpha^{(2)} \equiv 2gh_\alpha \quad \Rightarrow \quad (h_\alpha^{(2)}, k)_2 = (h_\alpha, k) = \alpha(k) \quad (9.1.16b)$$

Thus the eigenvalue of a root  $\alpha$  acting on a generic element  $k \in H$  is unchanged.

- Root scalar product: Let  $\alpha$  and  $\beta$  belong to the set of roots  $\Delta$ . Then we have the renormalized root scalar product

$$\langle \alpha, \beta \rangle_2 \equiv \left( h_\alpha^{(2)}, h_\beta^{(2)} \right)_2 = 2g \langle \alpha, \beta \rangle \quad (9.1.16c)$$

Comparing Eqs. (9.1.15) and (9.1.16c) guarantees that

$$\langle \bar{\alpha}_i^{(\text{long})}, \bar{\alpha}_i^{(\text{long})} \rangle_2 = 2 \quad (9.1.17)$$

as desired. We also define a renormalized Casimir operator [c.f. Eq. (9.1.3a)],

$$\hat{C}_2 \equiv \sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{2ij}^{-1} \hat{H}_{\bar{\alpha}_i}^{(2)} \hat{H}_{\bar{\alpha}_j}^{(2)} + \sum_{\alpha \neq 0} \frac{\hat{E}_\alpha \hat{E}_{-\alpha}}{(e_\alpha, e_{-\alpha})_2}, \quad \text{Quadratic Casimir operator (standard normalization)} \quad (9.1.18a)$$

$$\mathcal{A}_{2ij} \equiv \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle_2 = A_{ij} \frac{\langle \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_j \rangle_2}{2} \quad (9.1.18b)$$

It is evident that

$$\hat{C}_2 = 2g\hat{C} \quad (9.1.19)$$

Now, the analog of the trace in Eqs. (9.1.5) and (9.1.6) is

$$(C_2)_2 \equiv \frac{1}{2g} \text{Tr} [\hat{C}_2]_\theta = (C) = N_\theta \quad (9.1.20)$$

Eqs. (9.1.10) and (9.1.20) then imply that

$$C_2^\theta = \langle \theta, \theta + 2\rho_w \rangle_2 = 2g. \quad \text{Standard Casimir in the adjoint representation} \quad (9.1.21)$$

= twice the dual Coxeter number.

If we express  $\theta$  in terms of its comarks [Eq. (8.1.12)],

$$\theta = \sum_{j=1}^n a_j^\vee \bar{\alpha}_j^\vee \quad (9.1.22)$$

then using  $\langle \omega_i, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle = \langle \omega_i, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle_2 = \delta_{ij}$ , we get

$$\langle \theta, \rho_w \rangle_2 = \sum_{j=1}^n a_j^\vee \quad (9.1.23)$$

Here we have used the fact that the Weyl vector  $\rho_w$  always has Dynkin coefficients  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  [Eq. (9.1.9)]. Combined with the fact that  $\langle \theta, \theta \rangle_2 = 2$ , Eqs. (9.1.21) and (9.1.23) give

$$g = 1 + \sum_{j=1}^n a_j^\vee \quad (9.1.24)$$

which is the formula for the dual Coxeter number given in terms of comarks by Eq. (8.1.13).

We can compute Eq. (9.1.21) explicitly, using (a) the Dynkin coefficients of the highest root  $\theta = (\Lambda_1^{(\theta)}, \Lambda_2^{(\theta)}, \dots, \Lambda_n^{(\theta)})$  (Sec. 8.2.4), (b) the Dynkin coefficients of the Weyl vector  $\rho_w = (1, 1, \dots, 1)$  [Eq. (9.1.9)], and (c) the quadratic form matrix  $F_{ij}$ , already tabulated in the standard normalization for each algebra in Eq. (8.6.2). The Casimir for the adjoint representation is then

$$C_2^\theta = 2 + 2 \sum_{i,j=1}^n \Lambda_i^{(\theta)} F_{ij} \quad (9.1.25a)$$

For  $\text{su}(n+1)$ ,  $\Lambda_1^{(\theta)} = \Lambda_n^{(\theta)} = 1$  and all others vanish [Eq. (8.2.25)], while  $F_{ij}$  has the form in Eq. (8.6.2a). This leads to

$$C_2^{\theta(A_n)} = 2 + 2 \sum_{j=1}^n (F_{1j} + F_{nj}) = 2 + \frac{2}{n+1} [n(n+1)] = 2(n+1) \quad (9.1.25b)$$

For  $\mathfrak{sp}(2n)$ ,  $\Lambda_1^{(\theta)} = 2$  and all others vanish [Eq. (8.2.27)], while  $F_{ij}$  has the form in Eq. (8.6.2c):

$$C_2^{\theta(C_n)} = 2 + 2^2 \sum_{j=1}^n F_{1j} = 2(n+1) \quad (9.1.25c)$$

For  $\mathfrak{so}(2n)$ ,  $\Lambda_2^{(\theta)} = 1$  and all others vanish [Eq. (8.2.26)], while  $F_{ij}$  has the form in Eq. (8.6.2d):

$$C_2^{\theta(D_n)} = 2 + 2 \sum_{j=1}^n F_{2j} = 2 + [3 \times 2 + (n-3)4] = 2(2n-2) \quad (9.1.25d)$$

Eqs. (9.1.25b)-(9.1.25d) agree with the previously quoted results for  $2g$  in Eq. (8.6.1).

For a generic representation with highest weight  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ , the standard Casimir is

$$C_2^\Lambda = \langle \Lambda, \Lambda + 2\rho_w \rangle_2 = \langle \Lambda, \Lambda \rangle_2 + 2 \sum_{i,j=1}^n \Lambda_i F_{i,j}, \quad \text{Standard Casimir for highest weight representation } \Lambda$$

For the defining representation  $\Lambda = \omega_1$ , one finds the following

| Algebra                     | Casimir $\langle \omega_1, \omega_1 + 2\rho_w \rangle_2$ |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------|
| $A_n = \mathfrak{su}(n+1)$  | $\frac{n(n+2)}{n+1}$                                     |
| $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$ | $2n$                                                     |
| $C_n = \mathfrak{sp}(2n)$   | $n + \frac{1}{2}$                                        |
| $D_n = \mathfrak{so}(2n)$   | $2n - 1$                                                 |

### Exercise

Show that the standard Casimir for a rank-  $q$  fully antisymmetric tensor representation of  $A_n$  is given by

$$\langle \Lambda, \Lambda + 2\rho_w \rangle_2 = \frac{q(n+1-q)(n+2)}{n+1}, \quad 1 \leq q \leq n \quad (9.1.28)$$

### Exercise

Show that the standard Casimir for a rank-  $q$  fully antisymmetric tensor representation of  $C_n$  is given by

$$\langle \Lambda, \Lambda + 2\rho_w \rangle_2 = \frac{1}{2} q [2(n+1) - q], \quad 1 \leq q \leq n \quad (9.1.29)$$

### 9.1.2 Index of a representation; some examples

Let  $x$  and  $y$  be elements of the Lie algebra,  $x, y \in L$ . For a highest weight representation  $\Lambda$ , define

$$((x, y))_\Lambda \equiv \text{Tr}[\hat{X}\hat{Y}]_\Lambda \quad (9.1.30)$$

where the right-hand side is the trace normalization of the product of generators in the irreducible representation. The index  $l_\Lambda$  for representation  $\Lambda$  is then defined via

$$((x, y))_\Lambda = l_\Lambda (x, y)_2. \quad \text{Index of a representation.} \quad (9.1.31)$$

The index relates the trace normalization in some arbitrary irreducible representation  $\Lambda$  to that in the adjoint representation (i.e., the renormalized Killing form). Using the renormalized Casimir operator constructed in the representation  $\Lambda$ , Eqs. (9.1.18a), (9.1.26), and (9.1.31) imply that

$$\begin{aligned} ((C_2)) &= l_\Lambda (C_2)_2 = l_\Lambda N_\theta \\ &= \langle \Lambda, \Lambda + 2\rho_w \rangle_2 N_\Lambda \end{aligned} \quad (9.1.32)$$

which leads to

$$l_\Lambda = \frac{\langle \Lambda, \Lambda + 2\rho_w \rangle_2 N_\Lambda}{N_\theta} \quad (9.1.33)$$

Here  $N_\Lambda$  is the dimension of the representation  $\Lambda$  (i.e., the total number of states, including degeneracies);  $N_\theta$  is the dimension of the adjoint representation. Note that

$$l_\theta = \langle \theta, \theta + 2\rho_w \rangle = 2g \quad (9.1.34)$$

consistent with Eq. (9.1.16a). The index of the defining representation  $l_{\omega_1}$ , the adjoint representation  $l_\theta = 2g$  [Eq. (8.6.1)], as well as the dimension  $N_{\omega_1}$  and the dimension of the adjoint  $N_\theta$  for the classical families are [via Eq. (9.1.27)]

| Algebra                     | $N_{\omega_1}$ | $N_\theta$    | $l_{\omega_1}$ | $l_\theta = 2g$ |
|-----------------------------|----------------|---------------|----------------|-----------------|
| $A_n = \mathfrak{su}(n+1)$  | $n+1$          | $n^2 + 2n$    | 1              | $2(n+1)$        |
| $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$ | $2n+1$         | $n(2n+1)$     | 2              | $2(2n-1)$       |
| $C_n = \mathfrak{sp}(2n)$   | $2n$           | $(2n)(n+1/2)$ | 1              | $2(n+1)$        |
| $D_n = \mathfrak{so}(2n)$   | $2n$           | $n(2n-1)$     | 2              | $4(n-1)$        |

For the orthogonal algebras, it is interesting to compute the Casimirs and indices for the spinor representations.

### Exercise

Show that the standard Casimir for the  $\omega_n$  fundamental spinor representation of  $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$  is given by

$$\langle \omega_n, \omega_n + 2\rho_w \rangle_2 = \frac{n}{4}(2n+1) \quad (9.1.36)$$

### Exercise

Show that the standard Casimir for the  $\omega_{n-1}$  and  $\omega_n$  fundamental spinor representations of  $D_n = \mathfrak{so}(2n)$  is given by

$$\langle \omega_{n-1}, \omega_{n-1} + 2\rho_w \rangle_2 = \langle \omega_n, \omega_n + 2\rho_w \rangle_2 = \frac{n}{4}(2n-1) \quad (9.1.37)$$

Using the facts (proven later) that  $N_{\omega_n} = 2^n$  in  $B_n$  and  $N_{\omega_{n-1}} = N_{\omega_n} = 2^{n-1}$  for  $D_n$ , the indices are given by

| Algebra                     | Fundamental spinor rep. index(ices)         |
|-----------------------------|---------------------------------------------|
| $B_n = \mathfrak{so}(2n+1)$ | $l_{\omega_n} = 2^{n-2}$                    |
| $D_n = \mathfrak{so}(2n)$   | $l_{\omega_{n-1}} = l_{\omega_n} = 2^{n-3}$ |

**9.1.2.1**  $\text{su}(2)$ 

In  $\text{su}(2)$ , the Cartan matrix is a single number:  $A = \langle \theta, \theta \rangle = 2$ . For a simply-laced algebra,  $\alpha^\vee = 2\alpha/|\alpha|^2 = \alpha$  in the standard normalization scheme. Then the quadratic form matrix is  $F = \langle \omega_1, \omega_1 \rangle = A^{-1} = 1/2$ . The Weyl vector is  $\rho_w = \omega_1$ . The spin  $j$  representation has highest weight  $\Lambda = 2j$ . The Casimir for this representation is

$$C_2^{(2j)} = 2j(2j+2) \langle \omega_1, \omega_1 \rangle_2 = 2j(j+1) \quad (9.1.39)$$

This is twice the usual normalization in quantum mechanics. The index is

$$l_{2j} = 2j(j+1) \frac{2j+1}{3} = \frac{2j(j+1)(2j+1)}{3} \quad (9.1.40)$$

The index of the first few  $j$  values is

| $j$ | $l_{2j}$ |
|-----|----------|
| 0   | 0        |
| 1/2 | 1        |
| 1   | 4        |
| 3/2 | 10       |
| 2   | 20       |
| 5/2 | 35       |

Eq. (9.1.41) implies that the  $\text{su}(2)$  generators in the defining  $j = 1/2$  representation are

$$\hat{T}_{x,y,z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\sigma}^{x,y,z}, \quad [\hat{T}_i, \hat{T}_j] = if^{ijk} \hat{T}_k \quad (9.1.42)$$

where  $\hat{\sigma}^{x,y,z}$  are the standard Pauli matrices. The structure constants are  $f^{ijk} = \sqrt{2}\epsilon^{ijk}$ , which explains the "extra" factor of two in Eq. (9.1.39).

**9.1.2.2**  $\text{su}(3)$ 

A special feature of  $\text{su}(3)$  is that any highest weight representation can be associated to a traceless bisymmetrized tensor  $\tilde{T}_{(i_1 \dots i_p)}^{(j_1 \dots j_q)}, \tilde{T}_{(ki_2 \dots i_p)}^{(kj_2 \dots j_0)} = 0$ . The Dynkin coefficients of the associated highest weight are  $(p, q)$  [c.f. Eq. (8.5.2)]. The dimension is the number of independent elements of this tensor,

$$N_{p,q} = \frac{(p+2)!}{p!2!} \frac{(q+2)!}{q!2!} - \frac{(p+1)!}{(p-1)!2!} \frac{(q+1)!}{(q-1)!2!} = \frac{(p+1)(q+1)(p+q+2)}{2} \quad (9.1.43)$$

This result can also be obtained from the "factors over hooks" rule. The Casimir for this representation is

$$\begin{aligned} C_2^{(p,q)} &= \langle p\omega_1 + q\omega_2, (p+2)\omega_1 + (q+2)\omega_2 \rangle \\ &= \frac{2}{3}[p(p+2) + q(q+2)] + \frac{1}{3}[p(q+2) + q(p+2)] = \frac{2}{3}[p^2 + q^2 + pq + 3(p+q)] \end{aligned} \quad (9.1.44)$$

Thus the index is



$$l_{p,q} = \frac{C_2^{(p,q)} N_{p,q}}{N_\theta} = \frac{1}{24} (p+1)(q+1)(p+q+2) [p^2 + q^2 + pq + 3(p+q)] \quad (9.1.45)$$

The Casimir and index for a few low-dimensional representations are

| HWS    | conjugacy<br>class | $N_{p,q}$ | $C_2^{(p,q)}$ | $l_{p,q}$ |
|--------|--------------------|-----------|---------------|-----------|
| (0, 0) | 0                  | 1         | 0             | 0         |
| (1, 0) | 1                  | 3         | 8/3           | 1         |
| (1, 1) | 0                  | 8         | 6             | 6         |
| (2, 0) | 2                  | 6         | 20/3          | 5         |
| (2, 1) | 1                  | 15        | 32/3          | 20        |
| (2, 2) | 0                  | 27        | 16            | 54        |

Eqs. (9.1.35), (9.1.38), (9.1.41), and (9.1.46) suggest that the index is always a non-negative integer; this is indeed the case.

## 9.2 Freudenthal's recursion formula for weight space dimensions

The master weight depth formula Eq. (5.1.23) allows the determination of all weights in a finite-dimensional, highest weight irreducible representation of a Lie algebra. It does not determine the total number of states in a given representation, however, because some weights can be degenerate. For example, the (2, 1) representation of  $\mathfrak{su}(3)$  shown in Fig. 9.1 has only 12 distinct weights. On the other hand, Eq. (9.1.43) implies that  $N_{2,1} = 15$ . Therefore between one to three of the weights in (2,1) must be degenerate. Recall that the weight space refers to the set of states sharing the same weight, i.e. the same Dynkin coefficients.

In this section we will determine a recursive algorithm (Freudenthal's formula) to determine the dimension of all weight spaces in a given representation. Let  $M$  be a weight in the representation with highest weight  $\Lambda$ . Consider the trace of the Casimir [Eq. (9.1.26)] within the possibly degenerate weight space associated to  $M$ ,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ \hat{C}_2^\Lambda \right]_M &= n_M \langle \Lambda, \Lambda + 2\rho_w \rangle_2 \\ &= n_M \langle M, M \rangle_2 + \sum_{\alpha > 0} \frac{\text{Tr}_M \left[ \hat{E}_\alpha \hat{E}_{-\alpha} + \hat{E}_{-\alpha} \hat{E}_\alpha \right]}{(e_\alpha, e_{-\alpha})_2} \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

where  $n_M$  is the dimension of the weight space labeled by  $M$ . In order to evaluate the second term, we consider the  $\mathfrak{su}(2)$  generated by

$$\begin{aligned} \left[ \hat{H}_\alpha^{(2)}, \hat{E}_{\pm\alpha} \right] &= \pm \langle \alpha, \alpha \rangle_2 \hat{E}_{\pm\alpha} \\ \left[ \hat{E}_\alpha, \hat{E}_{-\alpha} \right] &= (e_\alpha, e_{-\alpha})_2 \hat{H}_\alpha^{(2)} \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

It is useful to rewrite this in terms of standard  $\mathfrak{su}(2)$  generators,

$$\left[ \hat{T}_z, \hat{T}_\pm \right] = \pm \hat{T}_\pm, \quad \left[ \hat{T}_+, \hat{T}_- \right] = 2\hat{T}_z \quad (9.2.3)$$

Let

$$\hat{T}_{\pm} \equiv A \hat{E}_{\pm\alpha}, \quad \hat{T}_z \equiv B \hat{H}_{\alpha}, \quad A = \sqrt{\frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle_2 (e_{\alpha}, e_{-\alpha})_2}}, \quad B = \frac{1}{\langle \alpha, \alpha \rangle_2} \quad (9.2.4)$$

For the particular root  $\alpha$ , we have the  $\mathfrak{su}(2)$  Casimir in Eq. (9.1.1),

$$\frac{1}{2} (\hat{T}_+ \hat{T}_- + \hat{T}_- \hat{T}_+) + \hat{T}_z \hat{T}_z = \frac{A^2}{2} [\hat{E}_{\alpha} \hat{E}_{-\alpha} + \hat{E}_{-\alpha} \hat{E}_{\alpha}] + B^2 \hat{H}_{\alpha}^2$$

Now, each state in the  $n_M$ -fold degenerate weight space of  $M$  belongs to some irreducible representation of this  $\mathfrak{su}(2)$  with highest weight  $t \in \mathbb{Z}/2$ , Casimir eigenvalue  $t(t+1)$ . We choose a basis within the weight space such that each weight vector belongs to a distinct  $\alpha$ -generated  $\mathfrak{su}(2)$  representation. The weight space may contain multiple distinguishable copies of the same irreducible representation and associated highest weight  $t$ . It may also possess one or more isolated states, i.e. states with weight  $M$  that cannot be raised or lowered by  $\hat{E}_{\pm\alpha} = \hat{T}_{\pm}/A$ .

Consider the state in the weight space of  $M$  that sits in the  $\alpha$ -generated  $\mathfrak{su}(2)$  with highest weight  $t$ . Denote this state by the weight vector  $\phi_t^{(M)}$ . Suppose that  $\phi_t^{(M+K\alpha)}$  is the associated highest weight:

$$\hat{T}_z \phi_t^{(M+K\alpha)} = t \phi_t^{(M+K\alpha)} = B \langle \alpha, M + K\alpha \rangle_2 \phi_t^{(M+K\alpha)} \Rightarrow t = B \langle \alpha, M + K\alpha \rangle_2 \quad (9.2.6)$$

Then

$$\begin{aligned} [\hat{E}_{\alpha} \hat{E}_{-\alpha} + \hat{E}_{-\alpha} \hat{E}_{\alpha}] \phi_t^{(M)} &= \left\{ -\frac{2B^2}{A^2} \langle M, \alpha \rangle_2^2 + \frac{2B}{A^2} \langle \alpha, M + K\alpha \rangle_2 + \frac{2B^2}{A^2} [\langle \alpha, M \rangle_2^2 + K^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_2^2 + 2K \langle M, \alpha \rangle_2] \right\} \phi_t^{(M)} \\ &= \frac{2B}{A^2} [(2K+1) \langle M, \alpha \rangle_2 + K(K+1) \langle \alpha, \alpha \rangle_2] \phi_t^{(M)} \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Next we note that the number of  $\alpha$ -generated  $\mathfrak{su}(2)$  representations with label  $K$  marking the highest weight is

$$n_{M+\alpha K} - n_{M+\alpha(K+1)} \quad (9.2.8)$$

The first term is the degeneracy of the weight space for the presumed highest weight. The second term is the degeneracy of the weight space one step above the highest weight; taking the difference eliminates the contributions of degenerate states with weight  $M$  that originate by lowering from a higher highest weight state than that assumed. To get the total contribution from the weight space trace on the right-hand side of Eq. (9.2.1), we sum over all possible values of  $K$ . I.e., we sum over all possible highest weight states that can give  $M$  as a descendant:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha > 0} \frac{\text{Tr}_M [\hat{E}_{\alpha} \hat{E}_{-\alpha} + \hat{E}_{-\alpha} \hat{E}_{\alpha}]}{(e_{\alpha}, e_{-\alpha})_2} &= \sum_{\alpha > 0} \sum_{K \geq 0} [n_{M+\alpha K} - n_{M+\alpha(K+1)}] \frac{2B}{A^2 (e_{\alpha}, e_{-\alpha})_2} [(2K+1) \langle M, \alpha \rangle_2 + K(K+1) \langle \alpha, \alpha \rangle_2] \\ &= \sum_{\alpha > 0} \sum_{K \geq 0} [n_{M+\alpha K} - n_{M+\alpha(K+1)}] [(2K+1) \langle M, \alpha \rangle_2 + K(K+1) \langle \alpha, \alpha \rangle_2] \\ &= \sum_{\alpha > 0} \left\{ n_M \langle M, \alpha \rangle_2 + \sum_{K \geq 1} n_{M+\alpha K} [2 \langle M, \alpha \rangle_2 + 2K \langle \alpha, \alpha \rangle_2] \right\} \\ &= \left\{ n_M \langle M, 2\rho_w \rangle_2 + \sum_{\alpha > 0} \sum_{K \geq 1} 2n_{M+\alpha K} [\langle M, \alpha \rangle_2 + K \langle \alpha, \alpha \rangle_2] \right\} \\ &= n_M [\langle \Lambda, \Lambda + 2\rho_w \rangle_2 - \langle M, M \rangle_2]. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

Solving for  $n_M$  leads to

$$n_M = \frac{\sum_{\alpha > 0} \sum_{K \geq 1} 2n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle_2}{\langle \Lambda + M + 2\rho_w, \Lambda - M \rangle_2}, \quad \begin{array}{l} \text{Freudenthal's recursion formula} \\ \text{for the dimension of weight space } M. \end{array} \quad (9.2.10)$$

An algorithm to evaluate Eq. (9.2.10) is the following:

- Start with the highest weight of the representation  $\Lambda$ . This is guaranteed to be non-degenerate, so  $n_\Lambda = 1$ .
- Proceed to each weight that differs from  $\Lambda$  by one root. To compute the inner products in the numerator and denominator of Eq. (9.2.10), one can express all weights in terms of Dynkin coefficients and use the quadratic form matrix [Eq. (8.6.2)]. Alternatively, to compute  $\langle \Lambda, \Lambda' \rangle$  one can express

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \omega_i, \quad \Lambda' = \sum_{j=1}^n \kappa_j^{(\Lambda')} \bar{\alpha}_j$$

so that

$$\langle \Lambda, \Lambda' \rangle = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \kappa_i^{(\Lambda')} \frac{|\bar{\alpha}_i|_2^2}{2} \quad (9.2.12)$$

Here we have exploited the orthonormality of the fundamental weights and simple coroots; the factor of  $|\bar{\alpha}_i|_2^2 / 2$  appears because we have expanded  $\Lambda'$  in terms of simple roots. Note that for a simply-laced algebra,  $|\bar{\alpha}_i|_2^2 = 2$ .

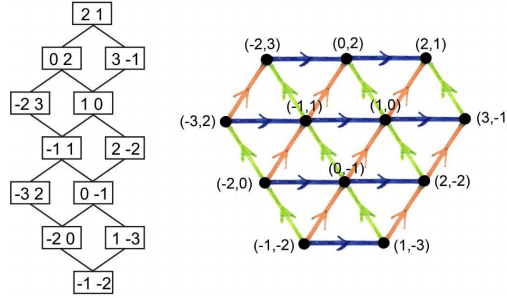


Figure 9.1:  $(2,1)$  representation of  $\mathfrak{su}(3)$ . There are 15 states in this representation, but only 12 distinct weights. Each of the weights in the inner triangle are doubly degenerate.

We will illustrate Eq. (9.2.10) for the  $(2,1)$  representation of the simply-laced algebra  $\mathfrak{su}(3)$ , Fig. 9.1.

- The highest weight state has  $n_{2,1} = 1$ .
- Consider  $M = (0, 2)$ . It has

$$\begin{aligned} \Lambda + M + 2\rho_w &= (2, 1) + (0, 2) + (2, 2) = (4, 5), \quad \Lambda - M = \bar{\alpha}_1 \\ \Rightarrow \quad \langle \Lambda + M + 2\rho_w, \Lambda - M \rangle_2 &= 4 \\ K = 1: \quad 2n_{M+\bar{\alpha}_1} \langle M + \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1 \rangle_2 &= 2(0 + 2) = 4 \end{aligned}$$

so that  $n_{0,2} = 1$ .

3.  $M = (-2, 3)$ .

$$\begin{aligned} \Lambda + M + 2\rho_w &= (2, 1) + (-2, 3) + (2, 2) = (2, 6), \quad \Lambda - M = 2\bar{\alpha}_1 \\ \Rightarrow \quad \langle \Lambda + M + 2\rho_w, \Lambda - M \rangle_2 &= 4 \\ K = 1: \quad 2n_{M+\bar{\alpha}_1} \langle M + \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1 \rangle_2 &= 0 \\ K = 2: \quad 2n_{M+2\bar{\alpha}_1} \langle M + 2\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1 \rangle_2 &= 2(-2 + 4) = 4 \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

so that  $n_{-2,3} = 1$ .

4.  $M = (3, -1)$ .

$$\begin{aligned}\Lambda + M + 2\rho_w &= (2, 1) + (3, -1) + (2, 2) = (7, 2), \quad \Lambda - M = \bar{\alpha}_2 \\ \Rightarrow \quad \langle \Lambda + M + 2\rho_w, \Lambda - M \rangle_2 &= 2 \\ K = 1 : \quad 2n_{M+\bar{\alpha}_2} \langle M + \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_2 \rangle_2 &= 2(-1 + 2) = 2\end{aligned}\tag{9.2.15}$$

so that  $n_{3,-1} = 1$ .

5.  $M = (1, 0)$ .

$$\begin{aligned}\Lambda + M + 2\rho_w &= (2, 1) + (1, 0) + (2, 2) = (5, 3), \quad \Lambda - M = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \\ \Rightarrow \quad \langle \Lambda + M + 2\rho_w, \Lambda - M \rangle_2 &= 8 \\ \bar{\alpha}_1, \quad K = 1 : \quad 2n_{M+\bar{\alpha}_1} \langle M + \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1 \rangle_2 &= 2(2 + 1) = 6 \\ \bar{\alpha}_2, \quad K = 1 : \quad 2n_{M+\bar{\alpha}_2} \langle M + \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_2 \rangle_2 &= 2(2) = 4 \\ \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2, \quad K = 1 : \quad 2n_{M+\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2} \langle M + \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \rangle_2 &= 2(3) = 6\end{aligned}\tag{9.2.16}$$

so that  $n_{1,0} = (6 + 4 + 6)/8 = 2$ .

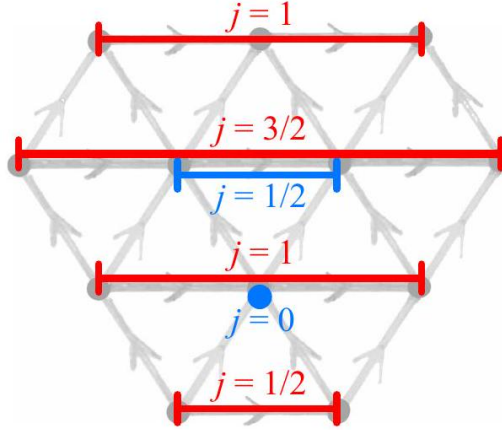


Figure 9.2: The same  $(2,1)$  representation of  $\mathfrak{su}(3)$  as shown in Fig. 9.1. Here we depict the decomposition into irreducible  $\mathfrak{su}(2)$  representations generated by  $\hat{E}_{\pm\bar{\alpha}_1}$ , i.e. the decomposition into parallel strings consisting of weights separated by simple root  $\bar{\alpha}_1$  moves. The doubly-degenerate weights arise due to overlapping representations.

We could proceed to evaluate the remaining weight space dimensions, but it is much easier to simply infer them using Weyl reflections, see Fig. 9.3. We conclude that the weights  $(1, 0)$ ,  $(-1, 1)$ , and  $(0, -1)$  are each doubly-degenerate, while each weight in the "outer layer" (see Fig. 9.1) has a one-dimensional weight space. This gives a total of  $12 + 3 = 15$  weights, in agreement with Eq. (9.1.43).

The partitioning of the  $(2, 1)$  representation into different and sometimes overlapping  $\mathfrak{su}(2)$  representations generated by  $\hat{E}_{\pm\bar{\alpha}_1}$  is depicted in Fig. 9.2.

### Exercise

Determine the weight tree and the dimension of all weight spaces for the  $\mathfrak{su}(3)$  representation  $(2, 2)$ , which has 27 total states [Eq. (9.1.46)]. Is there a pattern to the degeneracies in terms of the weight geometry?

### Exercise

Use Freudenthal's formula to show that all states of the fundamental spinor representation  $(0, 0, 1)$  of  $\mathfrak{so}(7)$  correspond to distinct weights, i.e. that all weight spaces are one-dimensional. The weight tree (geometry) is shown in Fig. 8.9 (Fig. 8.10).

### 9.3 Weyl group

- Throughout the remainder of the course, unless stated otherwise we will employ the "standard normalization" defined by Eq. (9.1.17). We will drop explicit "2" subscripts to lighten the notation.

The Weyl reflection  $S_\alpha$  along a root  $\alpha$  was introduced in Sec. 5.2.1, in the context of root system geometries. The action of  $S_\alpha$  upon a generic weight  $M$  in an irreducible representation is given by [Eq. (5.2.3)]

$$S_\alpha M = M - \langle M, \alpha^\vee \rangle \alpha, \quad S_\alpha^2 = 1, \quad \text{Weyl reflection} \equiv S_\alpha \quad (9.3.1)$$

With respect to the  $\mathfrak{su}(2)$  generated by  $\{\hat{E}_{\pm\alpha}, \hat{H}_\alpha\}$ , an irreducible representation decomposes into parallel strings of weights of varying length. Applying the Weyl reflection interchanges the weights along these strings. Weyl reflections for  $\mathfrak{su}(3)$  are depicted in Fig. 9.3. A simple Weyl reflection  $S_{\bar{\alpha}_i}$  gives

$$S_{\bar{\alpha}_i} M = M - \Lambda_i^{(M)} \bar{\alpha}_i, \quad \text{Simple Weyl reflection} \quad (9.3.2)$$

where  $\Lambda_i^{(M)}$  is the corresponding Dynkin coefficient. Acting on another simple root gives

$$S_{\bar{\alpha}_i} \bar{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j - A_{ji} \bar{\alpha}_i \quad (9.3.3)$$

where  $A_{ji} \equiv \langle \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle$  is the Cartan Matrix [Eq. (5.3.8)].

We prove the following facts about Weyl reflections.

- Invariance of the scalar product.

$$\langle S_\alpha M, M' \rangle = \langle M - \langle M, \alpha^\vee \rangle \alpha, M' \rangle = \langle M, M' \rangle - \langle M, \alpha^\vee \rangle \langle M', \alpha \rangle = \langle M, S_\alpha M' \rangle \quad (9.3.4)$$

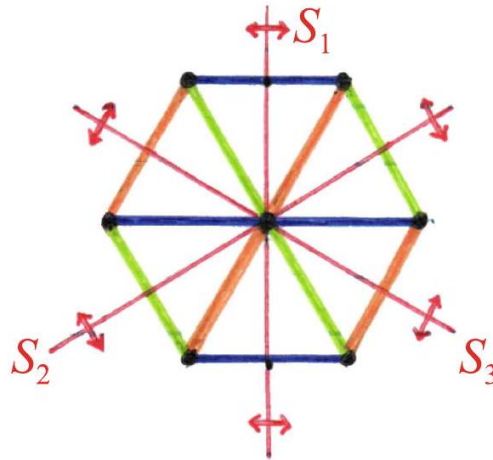


Figure 9.3: Weyl reflections  $S_{1,2,3}$  for  $\mathfrak{su}(3)$ .

- The simple Weyl reflection  $S_{\bar{\alpha}_i}$  permutes positive roots, except for  $\bar{\alpha}_i \rightarrow -\bar{\alpha}_i$ . Consider a positive root  $\beta \in \Delta_+$  [Eq. (5.3.7)]

$$\beta \equiv \sum_{i=1}^n \kappa_i^{(\beta)} \bar{\alpha}_i, \quad \kappa_i^{(\beta)} \in \mathbb{N}_0 \quad (9.3.5)$$

The action of a simple root Weyl reflection is

$$S_{\bar{\alpha}_i} \beta = \sum_{j \neq i}^n \kappa_j^{(\beta)} \bar{\alpha}_j + \bar{\alpha}_i \left[ \sum_{j \neq i}^n \kappa_j^{(\beta)} |A_{ji}| - \kappa_i^{(\beta)} \right] \quad (9.3.6)$$

Now, assuming that the positive root  $\beta \neq \bar{\alpha}_i$ , then at least one  $\kappa_{j \neq i}^{(\beta)} > 0$ . But recall that in the "root-building" application of the MWDF [Eqs. (5.3.26) and (7.1.24)], each positive root obtains by adding some combination of simple roots to a particular simple root. It means that if one expansion coefficient in Eq. (9.3.6) is positive, then so are all others. Therefore  $S_{\bar{\alpha}_i} \beta$  is a positive root.

Using Weyl reflections, we can prove the equivalence of the two expressions for the Weyl vector  $\rho_w$  in Eq. (9.1.9). Let

$$\sigma \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha, \quad \rho \equiv \sum_{j=1}^n \omega_j \quad (9.3.7)$$

Since a simple Weyl reflection  $S_{\bar{\alpha}_i}$  permutes the positive roots except  $\bar{\alpha}_i$ ,

$$S_{\bar{\alpha}_i} \sigma = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha \neq \bar{\alpha}_i}} \alpha - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_i = \sigma - \bar{\alpha}_i \quad (9.3.8)$$

Then

$$\langle S_{\bar{\alpha}_i} \sigma, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle = \langle \sigma, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle - 2 = \langle \sigma, S_{\bar{\alpha}_i} \bar{\alpha}_i^\vee \rangle = -\langle \sigma, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle \quad (9.3.9)$$

or

$$\langle \sigma, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle = \Lambda_i = 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (9.3.10)$$

In this equation  $\{\Lambda_i\}$  denote the Dynkin coefficients of  $\sigma$ . We conclude that  $\sigma = \rho = \rho_w$  in Eq. (9.3.7).

The product of all Weyl reflections forms the Weyl group  $W$ , which is a subgroup of the isometry group for the root system. Any weight geometry associated to an irreducible representation must be left invariant under a Weyl group transformation. Note that the Weyl group contains more than Weyl reflections, since the product of two reflections is equivalent to a rotation. The product of an even (odd) even number of Weyl reflections is a "proper rotation" (an "improper rotation") with determinant equal to +1 (-1) (thinking of  $S_\alpha$  as an orthogonal transformation on  $n$ -dimensional vectors in  $H_0^*$ , the space of distinct weights).

We can choose a "basis" for the Weyl group by considering compositions of simple root Weyl reflections  $\{S_{\bar{\alpha}_j}\}, 1 \leq j \leq n$  (and  $n$  denotes the rank of the algebra). Every element  $w \in W$  can be written as a product of simple Weyl reflections,

$$w = S_{\bar{\alpha}_{i_1}} S_{\bar{\alpha}_{i_2}} \times \dots \times S_{\bar{\alpha}_{i_p}} \quad (9.3.11)$$

The Weyl group is important because it relates weights based on point group symmetries of the representation geometry. In module 8, we mainly stressed tools that do not make this geometry manifest. We focused on expanding weights in terms of the fundamental weights  $\{\omega_i\}$  with Dynkin expansion coefficients, the MWDF algorithm for constructing the weight tree, Young tableaux, etc. The geometry of a representation is instead encoded in the expansion of

a generic weight in terms of simple roots and the geometry of the root system. Weyl group transformations algebraically encode this geometrical information.

An obvious but important statement is the following. Given the set of simple roots, the entire root geometry can be constructed by acting on simple roots with elements of the Weyl group. In other words,

$$\Delta = \{w\bar{\alpha}_1, w\bar{\alpha}_2, \dots, w\bar{\alpha}_n | w \in W\} \quad (9.3.12)$$

Here  $\Delta$  denotes the set of all roots. Evidently any set  $\{w\bar{\alpha}_i\}$  for a particular, fixed Weyl element  $w$  could serve as a basis of simple roots. Thus we can use the Weyl group to change the basis for the simple roots.

Another obvious implication is that

$$n_M = n_{(wM)}, \quad w \in W \quad (9.3.13)$$

Here  $n_M$  is the dimension of the weight space for weight  $M$  in some irreducible representation [as appears in Freudenthal's formula Eq. (9.2.10)] and  $w$  is a generic Weyl group element.

The set of weights that can be obtained by acting with all possible Weyl group operations on some particular weight  $M$  is called the Weyl orbit of  $M$ . We can choose one particular weight in this orbit with non-negative Dynkin coefficients to represent the entire orbit. Proof: Suppose that  $M'$  is the highest weight in the orbit, and suppose that it has a negative Dynkin coefficient:  $\Lambda_i = \langle M', \bar{\alpha}_i^\vee \rangle < 0$ . But then

$$S_{\bar{\alpha}_i} M' = M' - \langle M', \bar{\alpha}_i^\vee \rangle \bar{\alpha}_i = M' + |\Lambda_i| \bar{\alpha}_i \quad (9.3.14)$$

is by definition (lexicographic ordering, Sec. 5.3.1) greater than  $M'$  (contradiction). A weight with non-negative Dynkin coefficients is said to be dominant.

## 9.4 Weyl's character formula: derivation

### 9.4.1 Generating functions

In the following, we will need to view  $H_0^*$  (the space of roots with real coefficients) in two different ways:

- As a linear vector space of dimension  $n$  (where  $n$  denotes the rank), with the linearly independent simple root basis. A generic element is a "vector" (weight)

$$\beta = \sum_{j=1}^n \kappa_j^{(\beta)} \bar{\alpha}_j, \quad \langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \rangle = \mathcal{A}_{ij} = A_{ij} \frac{|\bar{\alpha}_j|^2}{2} \quad (9.4.1)$$

- As an infinite dimensional Hilbert space, where  $|\beta\rangle$  corresponding to a generic weight is itself a basis element. The inner product between two such states is

$$\langle \beta | \lambda \rangle = \delta^{(n)}(\beta - \lambda)$$

A generic state is a linear function,

$$|f\rangle = \int d^n \beta f(\beta) |\beta\rangle \quad (9.4.2)$$

We can view the action of a Weyl group transformation  $w \in W$  in these two different ways:

- As an orthogonal transformation on an  $n$ -component vector,

$$w\beta = \sum_j \kappa_j^{(\beta)} (w\bar{\alpha}_j) \quad (9.4.3)$$

where  $w\bar{\alpha}_j$  is the transformed basis vector.

- As a unitary Hilbert space operator  $\hat{U}_w$  such that

$$\hat{U}_w|\beta\rangle = |w\beta\rangle \quad (9.4.4)$$

The action on a generic function is

$$\hat{U}_w|f\rangle = \int d^n\beta f(\beta)|w\beta\rangle = \int d^n\beta f(w^{-1}\beta)|\beta\rangle \quad (9.4.5)$$

so that

$$(wf)(\beta) \equiv \langle\beta|\hat{U}_w|f\rangle = f(w^{-1}\beta) \quad (9.4.6)$$

Now we define two different functions on  $H_0^*$ :

$$\chi(\beta) = \langle\beta|\chi\rangle \equiv \sum_M n_M e^{\langle M, \beta \rangle} \quad (9.4.7a)$$

$$Q(\beta) = \langle\beta|Q\rangle \equiv \prod_{\alpha>0} \left[ e^{\frac{1}{2}\langle\alpha, \beta\rangle} - e^{-\frac{1}{2}\langle\alpha, \beta\rangle} \right] \quad (9.4.7b)$$

Character of a representation.

(Auxiliary)  $Q$ -function.

The character function  $\chi(\beta)$  involves a sum over all weights  $\{M\}$  of an irreducible representation;  $n_M$  is the weight space dimension [Eq. (9.2.10)]. The  $Q$ -function involves a product over the positive roots.

The character formula is invariant under a Weyl transformation:

$$(w\chi)(\beta) = \chi(w^{-1}\beta) = \sum_M n_M e^{\langle wM, \beta \rangle} = \sum_M n_{w^{-1}M} e^{\langle M, \beta \rangle} = \chi(\beta) \quad (9.4.8)$$

where we have used Eq. (9.3.13).

Let  $\hat{U}_{\bar{\alpha}_i}$  implement a simple Weyl reflection [Eq. (9.3.2)],

$$\hat{U}_{\bar{\alpha}_i}|\beta\rangle = |S_{\bar{\alpha}_i}\beta\rangle \quad (9.4.9)$$

Then

$$\begin{aligned} (S_{\bar{\alpha}_i}Q)(\beta) &= \langle\beta|\hat{U}_{\bar{\alpha}_i}|Q\rangle = \prod_{\alpha>0} \left[ e^{\frac{1}{2}\langle S_{\bar{\alpha}_i}\alpha, \beta \rangle} - e^{-\frac{1}{2}\langle S_{\bar{\alpha}_i}\alpha, \beta \rangle} \right] \\ &= \prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha \neq \bar{\alpha}_i}} \left[ e^{\frac{1}{2}\langle\alpha, \beta\rangle} - e^{-\frac{1}{2}\langle\alpha, \beta\rangle} \right] \left[ e^{-\frac{1}{2}\langle\bar{\alpha}_i, \beta\rangle} - e^{\frac{1}{2}\langle\bar{\alpha}_i, \beta\rangle} \right] = -Q(\beta). \end{aligned} \quad (9.4.10)$$

Here we have used the fact that  $S_{\bar{\alpha}_i}$  permutes the positive roots except for  $\bar{\alpha}_i \rightarrow -\bar{\alpha}_i$ . More generally, can show that

$$(wQ)(\beta) = Q(w^{-1}\beta) = (\det w)Q(\beta), \quad w \in W \quad (9.4.11)$$

Here  $\det w$  is the determinant of the Weyl group element  $w$ , represented as an  $n \times n$  matrix acting on the linear vector space  $H_0^*$  spanned by  $\{\bar{\alpha}_i\}$ . This determinant is guaranteed to be equal to plus or minus one for a proper or improper rotation, respectively. Eq. (9.4.11) implies that  $Q(\beta)$  is an "alternating" function on weight space. Equivalently,  $|Q\rangle$  is an eigenvector of a generic Weyl transformation  $\hat{U}_w$  with eigenvalue  $\det w$ ,



$$\hat{U}_w|Q\rangle = (\det w)|Q\rangle \quad (9.4.12)$$

Define

$$\hat{U}_\sigma \equiv \sum_{w \in W} (\det w) \hat{U}_w, \quad \text{"Alternating" (and un-normalized) projector.} \quad (9.4.13)$$

This has the properties

$$\hat{U}_w \hat{U}_\sigma = \hat{U}_\sigma \hat{U}_w = (\det w) \hat{U}_\sigma \quad (9.4.14a)$$

$$(\sigma f)(\beta) \equiv \langle \beta | \hat{U}_\sigma | f \rangle = \sum_{w \in W} (\det w) f(w^{-1}\beta) \quad (9.4.14b)$$

$$\hat{U}_\sigma^2 = N_W \hat{U}_\sigma \quad (9.4.14c)$$

where  $N_W$  is the order (number of elements) of the Weyl group.

Let us attempt a decomposition for  $Q(\beta)$  using  $\hat{U}_\sigma$ :

$$Q(\beta) \equiv (\sigma R)(\beta) \quad (9.4.15)$$

where  $R(\beta)$  is some other function. Eq. (9.4.14a) guarantees that  $Q(\beta)$  constructed in this way is alternating. If we expand the product in Eq. (9.4.7b), we will get terms of the form  $\exp \left[ \left\langle \sum_{\alpha > 0} (\pm 1)^{m_\alpha} \frac{\alpha}{2}, \beta \right\rangle \right]$ , where  $m_\alpha \in \{0, 1\}$ . The term with all  $m_\alpha = 0$  or all  $m_\alpha = 1$  is  $\exp(\langle \pm \rho_w, \beta \rangle)$  [Eq. (9.1.9)]. We therefore assume an expansion of the form

$$R(\beta) \equiv c_0 f_{\rho_W}(\beta) + \sum_{\alpha > 0} c_\alpha f_{\rho_W - \alpha}(\beta), \quad f_M(\beta) \equiv \exp[\langle M, \beta \rangle] \quad (9.4.16)$$

Note that

$$(\sigma f_M)(\beta) = \sum_{w \in W} (\det w) \exp[\langle wM, \beta \rangle] \quad (9.4.17a)$$

$$(\sigma f_{wM})(\beta) = (\det w) (\sigma f_M)(\beta) \quad (9.4.17b)$$

Eq. (9.4.17b) implies that there is no point including different weights related by Weyl transformations in the expansion Eq. (9.4.16), since their contributions to  $Q(\beta)$  are equivalent up to a sign.

We can therefore restrict the sum in Eq. (9.4.16) to weights  $M = \rho_w - \alpha$  with non-negative Dynkin coefficients [c.f. Eq. (9.3.14) and the surrounding discussion]. In fact,  $(\sigma f_M)(\beta) = 0$  for any weight  $M$  with at least one vanishing Dynkin label.

Proof:

- Suppose the Dynkin coefficient  $\Lambda_i^{(M)} = 0$ . Then [Eq. (9.3.2)]

$$S_{\bar{\alpha}_i} M = M$$

- The function  $f_M(\beta)$  is invariant,

$$(S_{\bar{\alpha}_i} f_M)(\beta) = f_M(S_{\bar{\alpha}_i} \beta) = f_{S_{\bar{\alpha}_i} M}(\beta) = f_M(\beta) \quad \Rightarrow \quad (\sigma f_{S_{\bar{\alpha}_i} M})(\beta) = (\sigma f_M)(\beta)$$

- But then Eq. (9.4.17b) implies that

$$(\sigma S_{\bar{\alpha}_i} f_M)(\beta) = (\sigma f_{S_{\bar{\alpha}_i} M})(\beta) = -(\sigma f_M)(\beta)$$

Therefore  $(\sigma f_M)(\beta) = 0$ .

Now, the Dynkin coefficients of the Weyl vector  $\rho_w$  are  $(1, 1, \dots, 1)$ ; therefore, any weight of the form  $M = \rho_w - \alpha$  is guaranteed to have a negative or zero Dynkin coefficient. We conclude that  $R(\beta)$  in Eq. (9.4.16) reduces to

$$R(\beta) = c_0 \exp[\langle \rho_w, \beta \rangle] \quad (9.4.18)$$

Then

$$Q(\beta) = c_0 \sum_{w \in W} (\det w) e^{\langle w \rho_w, \beta \rangle} = c_0 e^{\langle \rho_w, \beta \rangle} + (\text{terms involving Weyl transformations of } \rho_w) \quad (9.4.19)$$

If we compare this to Eq. (9.4.7b), we conclude that  $c_0 = 1$ ; therefore

$$Q(\beta) = (\sigma f_{\rho_w})(\beta) = \sum_{w \in W} (\det w) e^{\langle w \rho_w, \beta \rangle} = \sum_{w \in W} (\det w) e^{\langle \rho_w, w \beta \rangle} \quad (9.4.20)$$

The last equality holds because  $\det w^{-1} = \det w$  for an orthogonal Weyl group transformation  $w$ .

#### 9.4.2 Freudenthal redux

Freudenthal's formula [Eq. (9.2.10)] can be rewritten as

$$[\langle \Lambda, \Lambda \rangle - \langle M, M \rangle + \langle 2\rho_w, \Lambda - M \rangle] n_M = 2 \sum_{\alpha > 0} \sum_{K \geq 1} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle \quad (9.4.21)$$

It is useful to recast this in slightly different form.

Claim:

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle = 0 \quad (9.4.22)$$

In this equation, it is understood that  $n_{M+\alpha K} = 0$  for weights in the chain generated by  $\hat{E}_{\pm\alpha}$  that do not belong to the highest weight representation  $\Lambda$ .

Proof: The MWDF Eq. (5.1.23) implies that

$$\begin{aligned} \sum_{K=-\infty}^{\infty} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha^\vee \rangle &= \sum_{K=-\infty}^{\infty} n_{M+\alpha K} [(m-p)_{M;\alpha} + 2K] \\ &= n_{M+p\alpha} [(m-p) + 2p] + n_{M-m\alpha} [(m-p) - 2m] \\ &\quad + \\ &\quad n_{M+(p-1)\alpha} [(m-p) + 2(p-1)] + n_{M-(m-1)\alpha} [(m-p) - 2(m-1)] \\ &\quad + \dots \\ &= n_{M+p\alpha} [2(m-p) + 2p - 2m] \\ &\quad + \\ &\quad n_{M+(p-1)\alpha} [2(m-p) + 2(p-1) - 2(m-1)] + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9.4.23)$$

Here we have used invariance of the weight space dimensions under the  $S_\alpha$  Weyl reflection. Thus Eq. (9.4.21) can be written as

$$\begin{aligned}
[\langle \Lambda, \Lambda \rangle - \langle M, M \rangle + \langle 2\rho_w, \Lambda - M \rangle] n_M &= \sum_{\alpha > 0} \sum_{K \geq 1} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle - \sum_{\alpha > 0} n_M \langle M, \alpha \rangle - \sum_{\alpha > 0} \sum_{K \leq -1} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle \\
&= \sum_{\alpha > 0} \sum_{K \geq 1} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle + \sum_{\alpha < 0} \sum_{K \geq 1} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle - 2n_M \langle M, \rho_w \rangle \\
&= \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{K \geq 1} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle - 2n_M \langle M, \rho_w \rangle \quad (9.4.24)
\end{aligned}$$

We can add the  $K = 0$  term to the right-hand side, since

$$\sum_{\alpha \neq 0} n_M \langle M, \alpha \rangle = n_M [\langle M, 2\rho_w \rangle - \langle M, 2\rho_w \rangle] = 0$$

Therefore

$$[\langle \Lambda + \rho_w, \Lambda + \rho_w \rangle - \langle \rho_w, \rho_w \rangle - \langle M, M \rangle] n_M = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{K \geq 0} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle \quad (9.4.25)$$

### 9.4.3 Resumming Freudenthal

Multiplying both sides of Eq. (9.4.25) by  $\exp[\langle M, \beta \rangle]$  and summing over  $M$ , we get

$$[\langle \Lambda + \rho_w, \Lambda + \rho_w \rangle - \langle \rho_w, \rho_w \rangle] \chi(\beta) - \sum_M \langle M, M \rangle n_M e^{\langle M, \beta \rangle} = \sum_M \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{K \geq 0} n_{M+\alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle e^{\langle M, \beta \rangle} \quad (9.4.26)$$

If we express the weight  $\beta$  in terms of the overcomplete sum over all roots  $\alpha \in \Delta$

$$\beta \equiv \sum_{\alpha \in \Delta} \beta_\alpha \alpha \quad (9.4.27)$$

then

$$\frac{\partial^p}{\partial (\beta_\alpha)^p} e^{\langle M, \beta \rangle} = \langle M, \alpha \rangle^p e^{\langle M, \beta \rangle} \Rightarrow \sum_{\alpha \in \Delta} \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} e^{\langle M, \beta \rangle} = \sum_{\alpha \in \Delta} \langle M, \alpha \rangle \langle \alpha, M \rangle e^{\langle M, \beta \rangle} \quad (9.4.28)$$

Now, recall that the scalar product between two weights is defined via the Killing form:

$$\langle M, N \rangle = (h_M, h_N)$$

The Killing form can be evaluated by summing over all elements of the Lie algebra [Eq. (4.2.2)],

$$(x, y) = \sum_{\tilde{\alpha}_i} [x, [y, h_{\tilde{\alpha}_i}]] \Big|_{h_{\tilde{\alpha}_i}} + \sum_{\alpha \neq 0} [x, [y, e_\alpha]] \Big|_{e_\alpha} \quad (9.4.29)$$

where  $\mathcal{O}|_x$  means take the coefficient of the Lie algebra  $x$ . Thus

$$\langle M, N \rangle = (h_M, h_N) = \sum_{\alpha \neq 0} \alpha (h_M) \alpha (h_N) = \sum_{\alpha \neq 0} \langle M, \alpha \rangle \langle \alpha, N \rangle \quad (9.4.30)$$

Therefore Eq. (9.4.28) implies that

$$\sum_{\alpha \in \Delta} \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} e^{\langle M, \beta \rangle} = \langle M, M \rangle e^{\langle M, \beta \rangle} \quad (9.4.31)$$

and Eq. (9.4.26) becomes

$$\left[ \langle \Lambda + \rho_w, \Lambda + \rho_w \rangle - \langle \rho_w, \rho_w \rangle - \sum_{\alpha \in \Delta} \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} \right] \chi(\beta) = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_M I_{M, \alpha}(\beta) \quad (9.4.32a)$$

$$I_{M, \alpha}(\beta) \equiv \sum_{K \geq 0} n_{M + \alpha K} \langle M + K\alpha, \alpha \rangle e^{\langle M, \beta \rangle} \quad (9.4.32b)$$

The left-hand side of Eq. (9.4.32a) is a differential equation for the character function  $\chi(\beta)$ , viewed as a function of the "coordinates"  $\{\beta_\alpha\}$  in Eq. (9.4.27). We want to express the right-hand side of Eq. (9.2.10) in terms of the generating functions  $\chi(\beta)$  and  $Q(\beta)$ , Eq. (9.4.7).

Consider  $I_{M, \alpha}(\beta)$ , Eq. (9.4.32b). For a fixed weight  $M$  in the weight string generated by  $\hat{E}_{\pm\alpha}$ , we must determine the contribution of each spin-  $j$  representation of this  $\mathfrak{su}(2)$  Eq. (9.2.2) to  $I_{M, \alpha}(\beta)$ . The spin-  $j$  representation has an odd ( $j \in \mathbb{Z}$ ) or even [ $j \in (2\mathbb{Z} + 1)/2$ ] number of weights. Let  $M_0$  locate the center of this representation. For integer  $j$  ( $2j + 1$  odd),  $M_0$  is the center weight; for half-integer  $j$  ( $2j + 1$  even),  $M_0$  is not itself a weight. Then a generic weight  $M$  lying somewhere in this representation can be written as

$$M = M_0 + q\alpha, \quad q \in \{-j, -j + 1, \dots, j - 1, j\}$$

Suppose one copy of the spin-  $j$  representation with some (undetermined)  $M_0$  contributes to  $I_{M, \alpha}(\beta)$  in Eq. (9.4.32b). The contribution is

$$I_{M, \alpha}^{(j)}(\beta) \equiv \sum_{K \geq 0} (1) \langle M_0 + (K + q)\alpha, \alpha \rangle e^{\langle M_0 + q\alpha, \beta \rangle} = \langle \alpha, \alpha \rangle e^{\langle M_0, \beta \rangle} \sum_{K \geq 0}^{j-q} (K + q) e^{q\langle \alpha, \beta \rangle} \quad (9.4.34)$$

where we've used the fact that  $\langle M_0, \alpha \rangle = 0$ ; the latter is obvious for the case where  $M_0$  is itself the center weight [Eq. (5.1.23)]. We can sum over the nondegenerate weights [Eq. (9.4.33)] in this spin-  $j$  representation to get

$$I_\alpha^{(j)}(\beta) \equiv \sum_M I_{M, \alpha}^{(j)}(\beta) = \langle \alpha, \alpha \rangle e^{\langle M_0, \beta \rangle} \sum_{q=-j}^j \sum_{K \geq 0}^{j-q} (K + q) e^{q\langle \alpha, \beta \rangle} \quad (9.4.35)$$

Consider

$$\begin{aligned} [e^{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1] I_\alpha^{(j)}(\beta) &= \langle \alpha, \alpha \rangle e^{\langle M_0, \beta \rangle} \left[ \sum_{q=-j}^j \sum_{K \geq 0}^{j-q} (K + q) e^{(q+1)\langle \alpha, \beta \rangle} - \sum_{q=-j-1}^{j-1} \sum_{K \geq 0}^{j-q-1} (K + q + 1) e^{(q+1)\langle \alpha, \beta \rangle} \right] \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle e^{\langle M_0, \beta \rangle} \left[ e^j \left[ \sum_{q=-j}^{j-1} \sum_{K \geq 0}^{j-q-1} (K + q + 1) e^{(q+1)\langle \alpha, \beta \rangle} - \sum_{K=-j}^{2j} (K - j) e^{-j\langle \alpha, \beta \rangle} \right] \right] \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle e^{\langle M_0, \beta \rangle} \left[ j e^{(j+1)\langle \alpha, \beta \rangle} + \sum_{q=-j}^{j-1} j e^{(q+1)\langle \alpha, \beta \rangle} - \sum_{q=-j}^{j-1} (j - q) e^{(q+1)\langle \alpha, \beta \rangle} \right] \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle e^{\langle M_0, \beta \rangle} \sum_{q=-j}^{j-q-1} q e^{(q+1)\langle \alpha, \beta \rangle} \end{aligned}$$

Thus

$$I_\alpha^{(j)}(\beta) = \frac{1}{[e^{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1]} \sum_{q=-j}^j \langle q\alpha, \alpha \rangle e^{\langle M_0 + q\alpha + \alpha, \beta \rangle} = \frac{1}{[e^{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1]} \sum_{q=-j}^j \langle M, \alpha \rangle e^{\langle M + \alpha, \beta \rangle}$$

where we have used Eq. (9.4.33) and the fact that  $\langle M_0, \alpha \rangle = 0$ . Eq. (9.4.37) is the contribution to the right-hand side of Eq. (9.4.32a) of all weights in the spin-  $j$   $\mathfrak{su}(2)$  generated by  $\hat{E}_{\pm\alpha}$ , with central weight  $M_0$ . The key result is that Eq. (9.4.37) does not depend explicitly on  $M_0$ , but only implicitly through the (summed) weight  $M$  [Eq. (9.4.33)].

We can therefore rewrite the right-hand side of Eq. (9.4.32a) as

$$\text{RHS} \equiv \sum_{\alpha \neq 0} \sum_M I_{M, \alpha}(\beta) = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{M_0} \sum_j n_{M_0, j}^{(\alpha)} I_\alpha^{(j)}(\beta) \quad (9.4.38)$$

For each root  $\alpha$ , we must sum over all central weights  $M_0$  and all representations  $j$ ; there is an (undetermined) degeneracy factor  $n_{M_0, j}^{(\alpha)}$  that can be zero, one, or more if there are multiple spin-  $j$   $\mathfrak{su}(2)$  representations with the same central weight that contribute. At this point it looks like we have just introduced many more unknowns, but now a minor miracle ensues. Combining Eqs. (9.4.37) and (9.4.38), we get

$$\text{RHS} = \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{[e^{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1]} \sum_{M_0} \sum_j \sum_{q=-j}^j n_{M_0, j}^{(\alpha)} \langle M, \alpha \rangle e^{\langle M + \alpha, \beta \rangle} = \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{[e^{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1]} \sum_M n_M \langle M, \alpha \rangle e^{\langle M + \alpha, \beta \rangle} \quad (9.4.39)$$

since the sum over representation centers  $M_0$ , representations  $j$ , and weights  $q \in \{-j, \dots, j\}$  weighted by the degeneracy  $n_{M_0, j}^{(\alpha)}$  is just a particular decomposition of the sum over all weights  $M$  (again weighted by the appropriate degeneracy).

As an example, consider the  $(2, 1)$  representation of  $\mathfrak{su}(3)$  shown in Fig. 9.2. For simple root  $\bar{\alpha}_1$ , the center weights  $\{M_0\}$  enumerate the four parallel horizontal weight strings. Each horizontal string consists of one or two different spin-  $j$  representations. Summing over all  $M_0$ , all  $j$ , and states within each  $j$  is equivalent to summing over all weights times the appropriate degeneracies. Note that in this case,  $n_{M_0, j}^{(\bar{\alpha}_1)} = 1$  for all  $M_0$  and  $j$ .

#### 9.4.4 finis

Replacing the right-hand side of Eq. (9.4.32a) with Eq. (9.4.39), we have

$$\left[ \langle \Lambda + \rho_w, \Lambda + \rho_w \rangle - \langle \rho_w, \rho_w \rangle - \sum_{\alpha \in \Delta} \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} \right] \chi(\beta) = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_M \frac{n_M \langle M, \alpha \rangle e^{\langle M + \alpha, \beta \rangle}}{[e^{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1]} \quad (9.4.40)$$

Eq. (9.4.7b) implies that

$$Q^2(\beta) = \prod_{\alpha > 0} [e^{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1] [1 - e^{-\langle \alpha, \beta \rangle}] = \prod_{\alpha \neq 0} [e^{\langle \alpha, \beta \rangle} - 1] (-1)^{|\Delta_+|} \quad (9.4.41)$$

where  $|\Delta_+|$  denotes the number of positive roots. Then

$$\frac{\partial}{\partial \beta_\alpha} \log [Q^2(\beta)] = \sum_{\alpha' \neq 0} \frac{\langle \alpha', \alpha \rangle e^{\langle \alpha', \beta \rangle}}{[e^{\langle \alpha', \beta \rangle} - 1]} \quad (9.4.42)$$

where  $\beta_\alpha$  is an expansion coefficient for weight  $\beta$  in the overcomplete set of all roots, Eq. (9.4.27). Combining the above with Eq. (9.4.28), we get

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \neq 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_\alpha} \log [Q^2(\beta)] \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_\alpha} \chi(\beta) \right\} &= \sum_M n_M \sum_{\alpha' \neq 0} \sum_{\alpha \neq 0} \frac{\langle \alpha', \alpha \rangle \langle \alpha, M \rangle e^{\langle M + \alpha', \beta \rangle}}{[e^{\langle \alpha', \beta \rangle} - 1]} \\
&= \sum_M n_M \sum_{\alpha' \neq 0} \frac{\langle \alpha', M \rangle e^{\langle M + \alpha', \beta \rangle}}{[e^{\langle \alpha', \beta \rangle} - 1]} \\
&= \frac{1}{Q} \sum_{\alpha \neq 0} \left[ \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} (Q\chi)(\beta) - \chi \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} Q(\beta) - Q \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} \chi(\beta) \right]
\end{aligned} \tag{9.4.43}$$

On the second line, we have used Eq. (9.4.30). Eq. (9.4.40) becomes

$$[\langle \Lambda + \rho_w, \Lambda + \rho_w \rangle - \langle \rho_w, \rho_w \rangle] (Q\chi)(\beta) = \sum_{\alpha \neq 0} \left[ \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} (Q\chi)(\beta) - \chi \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} Q(\beta) \right] \tag{9.4.44}$$

Eq. (9.4.20) implies that

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \neq 0} \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} Q(\beta) &= \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{w \in W} (\det w) \langle w\rho_w, \alpha \rangle \langle \alpha, w\rho_w \rangle e^{\langle w\rho_w, \beta \rangle} \\
&= \sum_{w \in W} (\det w) \langle w\rho_w, w\rho_w \rangle e^{\langle w\rho_w, \beta \rangle} \\
&= \langle \rho_w, \rho_w \rangle Q(\beta)
\end{aligned} \tag{9.4.45}$$

Therefore Eq. (9.4.44) becomes

$$\sum_{\alpha \neq 0} \frac{\partial^2}{\partial (\beta_\alpha)^2} (Q\chi)(\beta) = \langle \Lambda + \rho_w, \Lambda + \rho_w \rangle (Q\chi)(\beta)$$

Note that  $(Q\chi)(\beta)$  is an alternating function [Eqs. (9.4.8) and (9.4.11)]. Eqs. (9.4.46), (9.4.45), and (9.4.20) suggest the following simple ansatz (guess):

$$(Q\chi)(\beta) = \sum_{w \in W} (\det w) e^{\langle \Lambda + \rho_w, w\beta \rangle} \tag{9.4.47}$$

This obviously satisfies Eq. (9.4.46), but it is not the unique solution. The precise form of Eq. (9.4.47) can be proven following a similar line of argument used to obtain Eq. (9.4.20) from Eqs. (9.4.15) and (9.4.16).

Combining Eqs. (9.4.47) and (9.4.20), we finally obtain

$$\chi(\beta) = \sum_M n_M e^{\langle M, \beta \rangle} = \frac{\sum_{w \in W} (\det w) e^{\langle \Lambda + \rho_w, w\beta \rangle}}{\sum_{w \in W} (\det w) e^{\langle \rho_w, w\beta \rangle}}, \quad \text{Weyl's character formula.} \tag{9.4.48}$$

Eq. (9.4.48) is essentially a resummation of Freudenthal's recursion formula Eq. (9.2.10), assisted by the Weyl group.

### 9.5 Dimension and strange formulae

The Weyl character  $\chi$  is a functional defined for any irreducible representation; in Eq. (9.4.48) it is evaluated for an arbitrary element  $\beta \in H_0^*$ . If we set

$$\beta = t\rho_w \quad (9.5.1)$$

with  $t \in \mathbb{R}$ , then using Eq. (9.4.7b)

$$\begin{aligned} \chi(t\rho_w) &= \frac{\sum_{w \in W} (\det w) e^{\langle w\rho_w, t(\Lambda + \rho_w) \rangle}}{\sum_{w \in W} (\det w) e^{\langle w\rho_w, t\rho_w \rangle}} = \frac{Q[t(\Lambda + \rho_w)]}{Q(t\rho_w)} \\ &= \prod_{\alpha > 0} \frac{\sinh\left[\frac{1}{2}\langle \alpha, t(\Lambda + \rho_w) \rangle\right]}{\sinh\left[\frac{1}{2}\langle \alpha, t\rho_w \rangle\right]} \end{aligned} \quad (9.5.2)$$

Therefore

$$\lim_{t \rightarrow 0} \chi(t\rho_w) = \sum_M n_M = N_\Lambda \simeq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\prod_{\alpha > 0} \langle \alpha, t(\Lambda + \rho_w) \rangle}{\prod_{\alpha > 0} \langle \alpha, t\rho_w \rangle} \quad (9.5.3)$$

where  $N_\Lambda$  is the dimension of the representation. We thus have the dimension formula

$$N_\Lambda = \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \alpha, \Lambda + \rho_w \rangle}{\langle \alpha, \rho_w \rangle}, \quad \text{Dimension } N_\Lambda \text{ of highest weight representation } \Lambda \quad (9.5.4)$$

We can obtain another formula from Eq. (9.5.2). Expanding again for small  $t$ ,

$$\begin{aligned} \chi(t\rho_w) &\simeq \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \alpha, (\Lambda + \rho_w) \rangle \left[1 + \frac{t^2}{24} \langle \alpha, (\Lambda + \rho_w) \rangle^2 + \dots\right]}{\langle \alpha, \rho_w \rangle \left[1 + \frac{t^2}{24} \langle \alpha, \rho_w \rangle^2 + \dots\right]} \\ &= N_\Lambda \left\{ 1 + \frac{t^2}{48} \sum_{\alpha \neq 0} [\langle (\Lambda + \rho_w), \alpha \rangle \langle \alpha, (\Lambda + \rho_w) \rangle - \langle \rho_w, \alpha \rangle \langle \alpha, \rho_w \rangle] + \dots \right\} \\ &= N_\Lambda \left\{ 1 + \frac{t^2}{48} [\langle (\Lambda + \rho_w), (\Lambda + \rho_w) \rangle - \langle \rho_w, \rho_w \rangle] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

where we have used Eq. (9.4.30). On the other hand,

$$\chi(t\rho_w) = \sum_M n_M e^{\langle M, t\rho_w \rangle} = \sum_M n_M \left[ 1 + t \langle M, \rho_w \rangle + \frac{t^2}{2!} \langle M, \rho_w \rangle^2 + \dots \right] \quad (9.5.6)$$

The terms linear in  $t$  sum to zero due to Weyl invariance. If we take  $\Lambda = \theta$  (the highest root, i.e. we are studying the adjoint representation), then the sum over  $M$  is replaced by a sum over non-zero roots (since the inner product with the zero weight specifying the Cartan subalgebra gives zero). Therefore

$$\chi(t\rho_w) = N_\theta + \frac{t^2}{2!} \sum_{\alpha \neq 0} \langle \alpha, \rho_w \rangle^2 + \dots = N_\theta + \frac{t^2}{2} \langle \rho_w, \rho_w \rangle + \dots \quad (9.5.7)$$

where we have used Eq. (9.4.30) and the non-degeneracy of the roots  $n_\alpha = 1$  (Proposition (VI.), Sec. 5.2.2]. Eqs. (9.5.5) and (9.5.7) imply that

$$\langle \rho_w, \rho_w \rangle = \frac{N_\theta}{24} \langle \theta, \theta + 2\rho_w \rangle \quad (9.5.8)$$

Here  $N_\theta = d$  is the dimension of the adjoint representation (or the Lie group). In the standard normalization we obtain

$$\langle \rho_w, \rho_w \rangle_2 = \frac{N_\theta g}{12}, \quad \text{Freudenthal-de Vries strange formula.} \quad (9.5.9)$$

Here  $g$  denotes the dual Coxeter number [Eq. (9.1.21)].

### 9.5.1 Dimensions for generic representations of the classical algebras

There are different methods to evaluate Eq. (9.5.4) for a generic highest weight representation  $\Lambda$  in a particular Lie algebra. We will use a strategy that works for all algebras and can be easily evaluated numerically.

The simplest case (unsurprisingly) is  $A_{n-1} = \mathfrak{su}(n)$ . In Sec. 7.1, we showed that the positive roots can be enumerated  $\{\alpha_{ij}\}$  with  $1 \leq i < j \leq n$ . These are expressed in terms of the simple roots via Eq. (7.1.11),

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \bar{\alpha}_k = \sum_{k=i}^{j-1} \bar{\alpha}_k^\vee \quad (9.5.10)$$

Then

$$\langle \Lambda + \rho_w, \alpha_{ij} \rangle = \sum_{k=i}^{j-1} (\Lambda_k + 1) = (j - i) + \sum_{k=i}^{j-1} \Lambda_k \equiv 2\mathcal{F}(\Lambda; i, j) \quad (9.5.11a)$$

Therefore

$$N_\Lambda = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j>i}^n \left[ \frac{\mathcal{F}(\Lambda; i, j)}{\mathcal{F}(0; i, j)} \right], \quad \text{Dimension formula for } \mathfrak{su}(n) = A_{n-1} \quad (9.5.12)$$

#### Exercise

Use Eq. (9.5.12) to show that the  $\Lambda = (p, q)$  representation of  $\mathfrak{su}(3)$  has  $N_{p,q}$  given by Eq. (9.1.43).

#### Exercise

Use Eq. (9.5.12) to show that the  $\Lambda = \omega_p$  representation of  $\mathfrak{su}(n)$  has dimension

$$N_p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (9.5.13)$$

consistent with a rank- $p$  antisymmetric tensor [c.f. Eq. (8.2.7)].

The dimension formula for  $\mathfrak{sp}(2n)$  can be similarly obtained using Eqs. (7.1.11) and (7.2.12). The result is

$$N_\Lambda = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{\mathcal{F}(\Lambda; i, n+1)}{\mathcal{F}(0; i, n+1)} \right] \prod_{j>i}^n \left\{ \frac{\mathcal{F}(\Lambda; i, j)[\mathcal{F}(\Lambda; i, j) + 2\mathcal{F}(\Lambda; j, n+1)]}{\mathcal{F}(0; i, j)[\mathcal{F}(0; i, j) + 2\mathcal{F}(0; j, n+1)]} \right\}, \quad \text{Dimension formula for } \mathfrak{sp}(2n) \quad (9.5.14)$$



**Exercise**

Derive Eq. (9.5.14).

**Exercise**

Use Eq. (9.5.14) to verify that the fundamental representation  $\Lambda = \omega_p (1 \leq p \leq n)$  has dimension

$$N_{\omega_p} = 2(n+1-p) \frac{(2n+1)!}{p!(2n-p+2)!} \quad (9.5.15)$$

consistent with a "traceless" fully antisymmetric rank- $p$  tensor [Eq. (8.3.11)].

We can also obtain generic dimension formulae for so  $(2n) = D_n$  and so  $(2n+1) = B_n$ , but we won't transcribe the results here. The most important are the dimensions of the fundamental spinor representations, which are  $N_{\omega_n} = 2^n$  for the  $\omega_n$  representation of  $B_n$ , and  $N_{\omega_{n-1}} = N_{\omega_n} = 2^{n-1}$  for the independent  $\omega_{n-1}$  and  $\omega_n$  representations of  $D_n$ .

---

## Part V

# Problems in algebra

## 9 Typical Algebra problems

### 9.1 Algebra Comprehension questions and small tasks (?)

#### 9.1.1 Questions to test understanding of typical Lie algebra topics 1

(соберу потом ответы, пока додумываю темы)

**Киселев-2023-1.** Расскажите о Производная Ли вектора и структурные константы группы Ли. Свойства скобки Ли.

Ответ

**Киселев-2023-2.** О представлениях алгебр Ли и их свойствах

Расскажите о представлении алгебры Ли, присоединенном представлении, метрике Киллинга, компактные группы. Критерий Картана для полупростоты.

Ответ

**Киселев-2023-3.** Расскажите о Базис Картана-Вейля, веса и система корней.

Ответ

**Киселев-2023-4.** О корнях и диаграммах

Расскажите о Простые положительные корни и коммутатор генераторов, связанных с этими корнями, рекуррентное соотношение для коммутаторов генераторов в последовательностях положительных корней. Схема Дынкина для двух простых положительных корней (число линий).

Ответ

Киселев-2023-5. Расскажите о свойствах связных диаграмм Дынкина (вывод правила запрета петель, остальные без вывода). Компоненты связности и полупростые компактные алгебры.

Ответ

Киселев-2023-6. Расскажите о классификации простых компактных алгебр Ли и соотношения эквивалентности алгебр классических групп

Ответ

Киселев-2023-7. Расскажите о Алгебра  $\mathfrak{su}(3)$ , система корней и коммутаторы.

Ответ

Киселев-2023-8. Расскажите о Старший вес неприводимого представления  $\mu_S$  и фундаментальные векторы  $\lambda_j$ .

Ответ

Киселев-2023-9. Расскажите о Группа отражений Вейля и фундаментальные представления  $\mathfrak{su}(3)$

Ответ

Киселев-2023-10. О симметрии ароматов кварков

Расскажите о симметрии ароматов кварков и представления  $T^{(p_1, p_2)}$  группы  $SU(3)$ . Необходимость цвета.

Ответ

Киселев-2023-11. Расскажите о Тензорный метод и схемы Юнга группы  $SU(3)$ .

Ответ

## 9.1.2 Questions to test understanding of typical Lie algebra topics 2

Ниже - вопросы от Кострикина

Расскажите о

Разбиения на смежные классы и теорема Лагранжа.

Рассказ

Расскажите о

Подгруппы циклической группы.

Рассказ

Расскажите о

Конструкция факторгруппы и основная теорема о гомоморфизмах групп.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Первая теорема об изоморфизме.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Коммутант группы и теорема об абелевых факторгруппах.

**Рассказ**

**Расскажите о** Центр и теорема о факторгруппе по центру и  $S_4$ .

**Рассказ**

**Расскажите о** понятии разрешимой группы. Что известно про разрешимость конечной  $p$ -группы,  $S_3$ ?

**Рассказ**

**Расскажите о** теореме о гомоморфном образе прямого произведения, приведите примеры

**Рассказ**

**Расскажите о**

Действия групп: стабилизаторы точек, длины орбит.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Действие сопряжением. Классы сопряжённости. Теорема о центре конечной  $p$ -группы.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Первая теорема Силова (существование).

**Рассказ**

**Расскажите о**

Вторая теорема Силова (сопряжённость).

**Рассказ**

**Расскажите о**

Простота группы  $A_5$ .

**Рассказ**

**Расскажите о**

Простота группы  $SO(3)$ . 15. Конечно порождённая абелева группа без кручения свободна. Понятие ранга.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Теорема о существовании согласованных базисов свободной абелевой группы конечного ранга и её подгруппы.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Теорема о строении конечно порождённой абелевой группы как следствие теоремы о согласованных базисах.

**Рассказ**

### 9.1.3 Questions to test understanding of typical Lie algebra topics 3

**Расскажите о**

Прямое доказательство теоремы о строении конечных абелевых  $p$ -групп.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Основная теорема о конечных абелевых группах: инвариантные множители, элементарные делители, примеры.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Эквивалентные множества матриц. Лемма Шура и её следствия.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Теорема о неприводимой матричной группе с конечным центром.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Теорема Машке о полной приводимости конечных матричных групп.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Матричное представление конечной группы над  $\mathbb{C}$ . Примеры.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Геометрический язык теории представлений. Примеры линейных представлений. Переход к матричным представлениям.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Каждая неабелева конечная группа имеет неприводимое представление степени  $> 1$  над любым полем нулевой характеристики.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Описание всех неприводимых комплексных представлений конечной абелевой группы. Теорема двойственности.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Теорема о числе одномерных комплексных представлений конечной группы.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Каждое комплексное представление конечной группы эквивалентно унитарному.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Действие линейной группы степени  $n$  на однородных формах от  $n$  переменных. Понятие об инвариантах линейной группы. Примеры.

**Рассказ**

**Расскажите о**

Идеалы колец. Факторкольцо. идеалов.

**Рассказ**

**Расскажите об основной теореме о гомоморфизмах для колец.**

**Рассказ**

**Расскажите о**

Алгебры над полем: ассоциативные алгебры и алгебры Ли. Примеры. Гомоморфизмы алгебр.

**Рассказ**

Расскажите об идеалах в алгебре многочленов и о простоте матричной алгебры чисел.

**Рассказ**

Расскажите о гомоморфных образах алгебры многочленов

**Рассказ**

Расскажите о поле разложения многочлена. Приведите примеры над  $\mathbb{Q}$  и над  $\mathbb{F}_p$ .

**Рассказ**

Расскажите о существовании конечного поля любого порядка  $q = p^n$ .

**Рассказ**

Расскажите о

Единственность конечного поля заданного порядка.

**Рассказ**

Расскажите о

Автоморфизмы конечного поля.

**Рассказ**

Расскажите о

Алгебры с делением. Алгебра кватернионов.

**Рассказ**

Расскажите о

Теорема Фробениуса.

### 9.1.4 Questions about algebraic oddities and details

(кто алгебой много занимается, тот полным полно таких знает. Вообще, большинство отвечено в теор разделах будет.)

## 9.2 Problems in the theory of groups and the basics of Lie algebras from Berstein

(потом сгруппирую!)

### 9.2.1 Problems about defining a group and a permutation group

**Brsht-y1.**

а) Пусть  $\alpha = (1, 3, 5)(2, 4, 7), \beta = (1, 4, 7)(2, 3, 5, 6)$  (перестановки даны в разложении по непересекающимся циклам). Найдите произведение  $\alpha\beta$ .

6) Найдите порядок перестановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

### Brsht-1.2.

а) Докажите, что любая транспозиция (не только элементарная) является нечетной перестановкой. Указание: найдите число инверсий.

б) Пусть перестановка разложена в произведение транспозиций. Тогда ее четность равна четности количества этих транспозиций.

в) Перестановка  $\sigma$  является циклом длины  $d$ . Разложите ее в произведение транспозиций. Найдите четность  $\sigma$ .

### Brsht-1.3.

Поставим каждой перестановке  $\sigma$  в соответствие матрицу  $n \times n R(\sigma)$ , так что  $R(\sigma)_{ij} = 1$  если  $j = \sigma(i)$  и нулю иначе. Найдите собственные значения матрицы  $R(\sigma)$  (дайте ответ в терминах циклического типа перестановки  $\sigma$ ).

### Brsht-1.

4(\*). Каких перестановок в  $S_n$  больше - четных или нечетных?

### Solution

•[a]

$$\alpha = (1, 3, 5)(2, 4, 7), \beta = (1, 4, 7)(2, 3, 5, 6).$$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\boxed{\alpha\beta = (1, 7, 3)(2, 5, 6, 4)} \quad (2)$$

•[6]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 5, 2, 6)(3, 4, 7) \quad (3)$$

$$\boxed{\text{ord} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{НОК}(4, 3) = 12} \quad (4)$$

где  $\text{ord } \sigma$  – порядок элемента  $\sigma$ .

### Solution

•[a]

**Statement 1.** Любая транспозиция является нечётной перестановкой.

*Proof.* Пусть  $\sigma$  – транспозиция. По определению транспозиции:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Число инверсий  $|\sigma| = 1 + 2(b - a - 1)$ , т.к. инверсиями будут следующие пары чисел: первое число из множества чисел между  $a$  и  $b$  (их  $b - a - 1$  штук), второе число из множества  $\{a, b\}$  (таких инверсий  $2(b - a - 1)$  штук), а также  $a$  и  $b$  (1 инверсия). Тогда по определению  $\sigma$  является нечётной перестановкой.  $\square$



•[6)]

Для начала докажем следующее предложение:

**Statement 2.** Умножение на транспозицию меняет чётность перестановки.

*Proof.* Пусть  $\sigma$  – транспозиция. По определению транспозиции:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix} \quad (6)$$

Транспозицию  $\sigma$  можно разложить в элементарные транспозиции. Их количество:  $1 + 2(b - a - 1)(b - a - 1)$  элементарную транспозицию нужно сделать, чтобы  $a$  и  $b$  стали соседними, потом 1 транспозицию, чтобы поменять их местами, и ещё  $b - a - 1$ , чтобы вернуть  $a$  и  $b$  на новое место). Каждая элементарная транспозиция меняет чётность, значит нечётное их число также меняет чётность.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть перестановка разложена в произведение транспозиций. Тогда её чётность равна чётности количества этих транспозиций.

*Proof.* Пусть количество транспозиций  $k$ . Докажем утверждение по индукции. База:  $k = 0$  (0 транспозиций дают чётную перестановку). Предположим, что для  $k - 1$  утверждение верно. Тогда для  $k$  утверждение верно, т.к. домножение на транспозицию меняет чётность перестановки (по предложению 2), а числа  $k - 1$  и  $k$  также имеют противоположные чётности.  $\square$

•[в)] Пусть  $\sigma = (i_1, \dots, i_d)$ . Разложим  $\sigma$  в произведение транспозиций:  $\sigma = (i_1, i_d)(i_1, i_{d-1}) \dots (i_1, i_2)$ . Всего  $d - 1$  транспозиций. Если число транспозиций  $d - 1$  чётно, то и  $\sigma$  чётная (по теореме 3); если  $d - 1$  нечётно, то и  $\sigma$  нечётная ( $|\sigma| = d - 1$ ). Таким образом, если  $d$  и  $\sigma$  имеют противоположные чётности.

## Solution

Ответ на вопрос про собственные числа даёт характеристическое уравнение:

$$\det(R(\sigma) - \lambda E) = 0 \quad (7)$$

Пусть перестановка  $\sigma$  раскладывается в произведение циклов  $\sigma = \prod_{i=1}^l \sigma_i$ , где все  $\sigma_i$  – циклы,  $l$  – их число.

**Definition 4.** Циклический тип перестановки – данные о том, сколько циклов каждой длины присутствует в разложении перестановки через циклы.

Пусть длина цикла  $\sigma_i$  равна  $k_i$ , количество циклов длины  $k$  в произведении равно  $m_k$ . Разумеется,  $\sum_{i=1}^l k_i = \sum_{k=1}^n m_k k = n$ . Характеристическое уравнение инвариантно относительно выбора базиса. Значит выберем его так, чтобы матрица стала блочно-диагональной матрицей с блоками  $R(\sigma_i)$ , соответствующими  $i$  циклу:

$$R(\sigma) = \begin{pmatrix} R(\sigma_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(\sigma_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R(\sigma_l) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Матрица  $R(\sigma_i)_{k_i \times k_i}$  будет выглядеть так:

$$R(\sigma_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\det(R(\sigma) - \lambda E) = \prod_{i=1}^l \det(R(\sigma_i) - \lambda E) \quad (10)$$

Определитель посчитаем, раскрыв по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{k_i-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\det(R(\sigma_i) - \lambda E) = (-\lambda)(-\lambda)^{k_i-1} + (-1)^{k_i-1} = (-1)^{k_i}(\lambda^{k_i} - 1) \quad (12)$$

$$\det(R(\sigma) - \lambda E) = \prod_{i=1}^l (-1)^{k_i}(\lambda^{k_i} - 1) = (-1)^{\sum_{i=1}^l k_i} \prod_{i=1}^l (\lambda^{k_i} - 1) = (-1)^n \prod_{i=1}^l (\lambda^{k_i} - 1) \quad (13)$$

Сгруппируем множители:

$$\det(R(\sigma) - \lambda E) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (\lambda^k - 1)^{m_k} = 0 \quad (14)$$

Теперь мы можем выписать все собственные значения. Как видно, все  $\lambda_k$  – корни из 1 степени  $k$ :

$$\lambda_{k,t} = \exp\left(\frac{2\pi t}{k}i\right), \quad t \in \{0, \dots, k-1\} \quad (15)$$

$m_k$  – количество  $\lambda_{k,0}, \dots, \lambda_{k,k-1}$ . Всего собственных значений  $\sum_{k=1}^n m_k k = n$ , как и должно быть (матрица  $n \times n$  содержит  $n$  комплексных собственных чисел).

### Solution

[\*] Для начала заметим, что при  $n = 1$  перестановка всего одна – тождественная. Для неё нет понятия инверсии, т.к. для нет  $i$  и  $j$  ( $i < j$ ). Элемент всего 1 и 2 разных выбрать нельзя. Далее будем рассматривать случай  $n \geq 2$  (обычно такой случай сразу и рассматривается). Пусть число чётных перестановок  $n_1$ , число нечётных  $n_2$ . Домножим все чётные перестановки на любую транспозицию (например,  $(1, 2)$ ). Все они станут нечётными, а значит  $n_1 \leq n_2$ . Делая то же самое с нечётными перестановками, получим неравенство  $n_2 \leq n_1$ . Таким образом, в группе  $S_n$  число чётных перестановок равно числу нечётных:  $n_1 = n_2 = \frac{n!}{2}$  ( $n!$  чётен при  $n \geq 2$ ).

## 9.2.2 Problems about Abelian groups. The action of a group on a set

### Brsht-2.y1.

- Докажите, что группа  $Z_{10}^*$  изоморфна  $C_4$ .
- Верно ли, что группа  $Z_{15}^*$  циклическая?

### Brsht-2.y2.

а) Пусть  $G$  – группа симметрий куба,  $X$  – множество ребер. Найдите стабилизатор произвольного ребра. Изоморфен ли он какой-то известной вам группе? б) Пусть  $X$  – множество граней. Найдите стабилизатор произвольной грани. Изоморфен ли он какой-то известной вам группе?

Упражнение 3. Группа  $S_3$  действует на себе сопряжениями  $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$ . Найдите стабилизатор каждого элемента. Найдите орбиты для этого действия.

### Brsht-2.4.

Найдите (с точностью до изоморфизма) все абелевы группы порядка 54.

### Brsht-2.5.

Докажите предложение 10: любой точки  $x \in X$  стабилизатор  $G_x$  является подгруппой в  $G$ .

### Solution

#### •[a]

В группе  $Z_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$  2 элемента имеют порядок 4: 3 ( $3^4 = 81 = 1 \pmod{10}$ ) и 7 ( $7^4 = 2401 = 1 \pmod{10}$ ), а значит  $Z_{10}^* \simeq C_4$  (по предложению 3 лекции 2).

•[6])

$Z_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ . Группа не является циклической, поскольку в ней не существует элемента, степени которого порождают всю группу (порядка 8):  $\text{ord } 1 = 1$ ,  $\text{ord } 2 = 4$ ,  $\text{ord } 4 = 2$ ,  $\text{ord } 7 = 4$ ,  $\text{ord } 8 = 4$ ,  $\text{ord } 11 = 2$ ,  $\text{ord } 13 = 4$ ,  $\text{ord } 14 = 2$ .

**Solution**

$|G| = 48$  – порядок группы симметрий куба. По теореме 12 лекции 2:  $|Gx||G_x| = |G| = 48$ .

•[a])

Пусть  $x \in X$  – произвольное ребро. Симметриями оно может быть переведено в любое другое, а значит  $|Gx| = 12$  (в кубе 12 рёбер).  $|G_x| = \frac{|G|}{|Gx|} = 4$ . Найдём эти 4 симметрии: тождественное, поворот на  $180^\circ$  вокруг прямой  $l$ , проходящей через центр ребра  $x$  и центр его противоположного на и эти повороты со симметрией относительно плоскости, проходящей через  $l$  и параллельной 2 граням куба. Повороты образуют группу, изоморфную  $C_2$  (два поворота на  $180^\circ$  эквивалентны тождественному), симметрии тоже. Таким образом,

$$G_x \simeq C_2 \times C_2 \simeq D_2 \quad (16)$$

•[6])

Пусть  $x \in X$  – произвольная грань. Симметриями она может быть переведена в любую другую, а значит  $|Gx| = 6$  (в кубе 6 граней).  $|G_x| = \frac{|G|}{|Gx|} = 8$ . Найдём эти 8 симметрий. Это будет группа симметрий квадрата (диздра  $D_4$ ): тождественное, повороты на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  вокруг прямой  $l$ , проходящей через центр грани  $x$  и центр её противоположной и эти повороты со симметрией относительно плоскости, проходящей через  $l$  и параллельной 2 граням куба. Таким образом,

$$G_x \simeq D_4 \simeq C_2 \times C_4 \quad (17)$$

**Solution**

Порядок группы  $S_3$ :  $|S_3| = 3! = 6$ . По теореме 12 лекции 2:  $|S_{3x}||S_{3x}| = |S_3| = 6$ . Следовательно, стабилизатор группы  $S_{3x}$  (являющийся подгруппой  $S_3$  по предложению 10 лекции 2), имеет порядок, являющийся делителем 6. Всего 4 варианта: 1, 2, 3, 6.

$$S_{3x} = \{g \in S_3 | gxg^{-1} = x\} \quad (18)$$

Найдём элементы  $g$ , удовлетворяющие соотношению  $gxg^{-1} = x$ . Домножим на  $g$  справа:

$$gx = xg \quad (19)$$

Среди таких  $g$  могут быть:  $e$  ( $eg = ge = g$ ),  $x$  ( $xx = x^2$ ),  $x^{-1}$  ( $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ ). Их уже 3 штуки. Рассмотрим несколько случаев:

•  $e = x = x^{-1}$ . С  $e$  коммутирует любой элемент группы, следовательно  $|S_{3e}| = 6$  и

$$S_{3e} = S_3 \quad (20)$$

Со всей группой в  $S_3$  коммутирует только  $e$  (это будет показано в п. 2), а значит при  $x \neq e$   $|S_{3x}| < 6$ . Из этого и того, что варианта всего 4 (1, 2, 3, 6) следует, что при  $x \neq e$   $|S_{3x}| \leq 3$ .

•  $x = x^{-1} \rightarrow x^2 = e$ . Такими элементами являются транспозиции: (1, 2), (1, 3), (2, 3). Может оказаться, что порядок их стабилизаторов не 2, а 3. Проверим, что транспозиции с другими элементами не коммутируют на примере (1, 2) (для (1, 3) и (2, 3) всё аналогично):

$$(1, 2)(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3, 2) \neq (1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3)(1, 2) \quad (21)$$

$$(1, 2)(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3) \neq (1, 3, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3)(1, 2) \quad (22)$$

$$(1, 2)(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3) \neq (1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)(1, 2) \quad (23)$$

$$(1, 2)(1, 3, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3) \neq (2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3, 2)(1, 2) \quad (24)$$

Следовательно  $|S_{3(1,2)}| = |S_{3(1,3)}| = |S_{3(2,3)}| = 2$  и

$$S_{3(1,2)} = \{e, (1, 2)\}, \quad S_{3(1,3)} = \{e, (1, 3)\}, \quad S_{3(2,3)} = \{e, (2, 3)\} \quad (25)$$

•  $e \neq x \neq x^{-1}$ . Такими элементами являются оставшиеся циклы длины 3:  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$  ( $(1, 2, 3)^{-1} = (1, 3, 2)$ ). Значит,  $|S_{3(1,2,3)}| = |S_{3(1,3,2)}| = 3$  (мы уже предоставили 3 разных  $g$ , а больше быть не может) и

$$S_{3(1,2,3)} = S_{3(1,3,2)} = \{e, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\} \quad (26)$$

Таким образом, мы рассмотрели все 6 перестановок и нашли их стабилизаторы. Определение орбиты:

$$S_3 x = \{y \in S_3 | \exists g \in S_3 : y = gxg^{-1}\} \quad (27)$$

Рассмотрим также 3 случая:

•  $x = e$ ,  $|S_{3e}| = 6$ :  $|S_{3e}| = \frac{|S_3|}{|S_{3e}|} = 1$ . Значит нужно найти единственный элемент  $y \in S_{3e}$ :  $y = geg^{-1} = geg^{-1} = e$ .

$$S_{3e} = \{e\} \quad (28)$$

• Транспозиции,  $|S_{3x}| = 2$ :  $|S_{3x}| = \frac{|S_3|}{|S_{3x}|} = 3$ . Значит нужно найти 3 элемента  $y \in S_{3x}$ :  $y = gxg^{-1}$ . Для примера возьмём  $x = (1, 2)$ .  $g = (1, 2)$ :  $y = (1, 2)(1, 2)(1, 2)^{-1} = (1, 2)$ ;  $g = (1, 3)$ :  $y = (1, 3)(1, 2)(1, 3)^{-1} = (2, 3)$ ;  $g = (2, 3)$ :  $y = (2, 3)(1, 2)(2, 3)^{-1} = (1, 3)$ . Все 3 различных элемента  $y$  найдены. Орбиты  $(1, 3)$  и  $(2, 3)$  точно такие же по предложению 11 лекции 2 (они пересекаются, а значит должны совпадать).

$$S_3(1, 2) = S_3(1, 3) = S_3(2, 3) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \quad (29)$$

• Циклы длины 3,  $|S_{3x}| = 3$ :  $|S_{3x}| = \frac{|S_3|}{|S_{3x}|} = 2$ . Значит нужно найти 2 элемента  $y \in S_{3x}$ :  $y = gxg^{-1}$ . Для примера возьмём  $x = (1, 2, 3)$ .  $g = (1, 2, 3)$ :  $y = (1, 2, 3)(1, 2, 3)(1, 2, 3)^{-1} = (1, 2, 3)$ ;  $g = (1, 2)$ :  $y = (1, 2)(1, 2, 3)(1, 2)^{-1} = (1, 3, 2)$ . Оба различных элемента  $y$  найдены. Орбита  $(1, 3, 2)$  точно такая же по предложению 11 лекции 2 (они пересекаются, а значит должны совпадать).

$$S_3(1, 2, 3) = S_3(1, 3, 2) = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\} \quad (30)$$

Множество орбит:

$$S_3/S_3 = \{\{e\}, \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}, \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}\} \quad (31)$$

## Solution

Пусть  $|G| = 54$  – абелева группа. Найдём все возможные такие группы. Воспользуемся теоремой 7 лекции 2:

$$G = C_{n_1} \times \dots \times C_{n_l} \quad (32)$$

При этом  $\prod_{i=1}^l n_i = 54$ . Разложим 54 на простые множители:  $54 = 2 \cdot 3^3$ . Воспользуемся теоремой 7 лекции

2 для того, чтобы найти все неизоморфные группы:

- Группа  $C_2 \times C_{27} \simeq C_{54}$  (т.к.  $\text{НОД}(2, 27) = 1$ ).
- Группа  $C_2 \times C_3 \times C_9 \simeq C_6 \times C_9$  (т.к.  $\text{НОД}(2, 3) = 1$ ).
- Группа  $C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \simeq C_6 \times C_3 \times C_3$  (т.к.  $\text{НОД}(2, 3) = 1$ ).

Всего 3 неизоморфные абелевы группы (они неизоморфны, поскольку  $\text{НОД}(3, 3) = 3 \neq 1$ ).

## Solution

**Statement 5.** Для любой точки  $x \in X$  стабилизатор  $G_x$  является подгруппой в  $G$ .

*Proof.* Проверим свойства подгруппы:

- Пусть  $g_1, g_2 \in G_x$ , тогда  $g_1 x = x$ ,  $g_2 x = x$ .  $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1 x = x$ , поэтому  $g_1 g_2 \in G_x$ .
- Пусть  $g \in G_x$ , тогда  $gx = x$ .  $x = g^{-1}gx = g^{-1}x$ , поэтому  $g^{-1} \in G_x$ .

□

## 9.2.3 Problems about Lagrange's theorem, conjugacy classes, normal subgroups, semidirect product

### Brsht-3.y1.

Проверьте корректность определения полупрямого произведения (то есть, проверьте, что формула действительно задает группу).

### Brsht-3.2.

а) Пусть  $G$  - группа движений сохраняющих правильный тетраэдр. Докажите, что действие  $G$  на множестве вершин тетраэдра задает изоморфизм  $G$  и  $S_4$ . Опишите геометрически (как вращения, симметрии или зеркальные повороты) все перестановки. Найдите классы сопряженности.

б) Пусть  $G_0$  это подгруппа собственных движений сохраняющих правильный тетраэдр. Является ли она нормальной? Найдите классы сопряженности в  $G_0$ .

### Brsht-3.3.

а) Через  $D_{nh}$  обозначим группу симметрий прямоугольной призмы с основанием правильный  $n$  угольник. Найдите порядок группы  $D_{nh}$ .

Другое описание группы  $D_{nh}$  - группа движений трехмерного пространства, сохраняющих правильный  $n$ -угольник лежащий в плоскости  $ХОУ$ .

б) Можно ли представить  $D_{3h}$  в виде произведения (прямого или полупрямого?). Изоморфны ли группы  $D_{3h}$  и  $D_6$ ?

### Brsht-3.4.

а) Пусть  $G$  - группа симметрий прямоугольной (но не квадратной) решетки на плоскости,  $T$  - подгруппа состоящая из трансляций. Докажите, что  $T$  является нормальной подгруппой в  $G$ . Найдите факторгруппу  $G/T$ . Представьте  $G$  в виде полупрямого произведения.

б)\* Найдите классы сопряженности в  $G$ .

## Solution

### Statement 6.

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, \phi_{a_2^{-1}}(b_1) b_2) \quad (33)$$

Полупрямое произведение, заданное формулой (33) является группой.

*Proof.* Проверим свойства группы:

• Ассоциативность:

$$\begin{aligned} ((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) &= (a_1 a_2, \phi_{a_2^{-1}}(b_1) b_2) \cdot (a_3, b_3) = (a_1 a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1}}(\phi_{a_2^{-1}}(b_1) b_2) b_3) = \\ &= (a_1 a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1}}(\phi_{a_2^{-1}}(b_1)) \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3) = (a_1 a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1} a_2^{-1}}(b_1) \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3). \\ (a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)) &= (a_1, b_1) \cdot (a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3) = (a_1 a_2 a_3, \phi_{(a_2 a_3)^{-1}}(b_1) \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3) = \\ &= (a_1 a_2 a_3, \phi_{a_3^{-1} a_2^{-1}}(b_1) \phi_{a_3^{-1}}(b_2) b_3). \end{aligned}$$

• Существование единицы  $(e, e)$ :

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (e, e) &= (ae, \phi_{e^{-1}}(b)e) = (a, b). \\ (e, e) \cdot (a, b) &= (ea, \phi_{a^{-1}}(e)b) = (a, b). \end{aligned}$$

• Существование обратного  $(a^{-1}, \phi_a(b^{-1}))$ :

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (a^{-1}, \phi_a(b^{-1})) &= (aa^{-1}, \phi_a(b) \phi_a(b^{-1})) = (e, e). \\ (a^{-1}, \phi_a(b^{-1})) \cdot (a, b) &= (a^{-1}a, \phi_{a^{-1}}(\phi_a(b^{-1}))b) = (e, e). \end{aligned}$$

□

## Solution

### •[a]

**Statement 7.** Пусть  $G$  - группа движений, сохраняющих правильный тетраэдр. Действие  $G$  на множестве вершин тетраэдра задает изоморфизм  $G$  и  $S_4$ .

*Proof.* Для доказательства изоморфизма выпишем соответствие между перестановками различных циклических типов в  $S_4$  и различными движениями, сохраняющими правильный тетраэдр:

•  $e$  (единичный, 1 шт.) - тождественное движение (ничего не делает с тетраэдром).

• $(a, b)$  (транспозиции, 6 шт.) – отражение относительно плоскости  $\pi$ , проходящей через ребро (вершины которого остаются на месте) и центр противоположного ребра (вершины которого меняются местами).

• $(a, b)(c, d)$  (произведение транспозиций, 3 шт.) – повороты на  $\pi$  вокруг прямой  $l_1$ , проходящей через центры противоположных рёбер (вершины которых и будут меняться местами).

• $(a, b, c)$  (цикл длины 3, 8 шт.) – поворот на  $2\pi/3$  или  $4\pi/3$  вокруг прямой  $l_2$ , проходящей через вершину и центр противоположной грани (вершины этой грани и будут циклически меняться).

• $(a, b, c, d)$  (цикл длины 4, 6 шт.) – зеркальный повороте на  $\pi/2$  с прямой  $l_3$ , проходящей через середины двух противоположных ребер и плоскостью симметрии, проходящей через середины остальных ребер.

Таким образом, построено однозначное соответствие между перестановками и движениями, сохраняющее групповые операции, а значит изоморфизм групп построен.  $\square$

По предложению 7 лекции 3 перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда имеют одинаковую циклическую структуру. А значит классами сопряжённости являются 5 видов движения, описанных выше.

## •[6]

В  $G_0$  будут входить движения вида 1, 3 и 4 (см. список выше), поскольку среди них нет отражений и зеркальных поворотов. Всего 12 штук. Поскольку  $G_0$  состоит из классов сопряжённости, то она нормальна. Также можно заметить, что она изоморфна знакопеременной группе  $A_4$ , которая является нормальной подгруппой  $S_4$ .

Проверим, какие классы сопряжённости из  $G$  перейдут в  $G_0$ . Конечно, класс  $\{e\}$  сохранится. Класс, состоящий из произведений транспозиций сохранится также, поскольку из одного произведения можно получить остальные 2 при сопряжениях с циклами длины 3.  $(1, 3, 4)(1, 2)(3, 4)(1, 3, 4)^{-1} = (1, 4)(2, 3)$ ,  $(1, 4, 3)(1, 2)(3, 4)(1, 4, 3)^{-1} = (1, 3)(2, 4)$  (это все случаи, если учесть, что  $(1, 3, 4)^{-1} = (1, 4, 3)$ ) (для сокращения записи циклы написаны в  $A_4$ , а не в  $G_0$ ).

Рассмотрим циклы длины 3.  $|G_0| = 12$ , а значит класс сопряжённости (орбита) не может состоять из 8 элементов (12 на 8 не делится). В  $G_0$  невозможно получить каждый цикл длины 3 из каждого, т.е. циклы длины 3 создадут 2 класса сопряжённости в  $G_0$ , которые соответствуют поворотам на  $\frac{2\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$  вокруг прямой, проходящей через вершину и центр противоположной грани тетраэдра (по 4 в каждом классе):  $\{(1, 2, 3), (1, 4, 2), (1, 3, 4), (2, 4, 3)\}$ ,  $\{(1, 3, 2), (1, 2, 4), (2, 3, 4), (1, 4, 3)\}$  (для сокращения записи циклы написаны в  $A_4$ , а не в  $G_0$ ).

Таким образом, всего будет 4 класса сопряженности в  $G_0$  (и соответственно в  $A_4$ ).

## Solution

## •[a]

Группой симметрии правильного  $n$ -угольника является группа диэдра  $D_n$  ( $n$  поворотов и  $n$  осевых отражений). Основания могут поменяться местами при помощи отражения относительно плоскости  $\pi$ , проходящей через середины боковых рёбер. Тожественная симметрия (которая ничего не делает с призмой) и отражение образуют группу  $C_2$ . Поскольку все симметрии из  $D_{nh}$  можно представить в виде произведения элементов групп  $D_n$  и  $C_2$ , группы  $D_n$  и  $C_2$  коммутативны и пересечение групп тривиально (по  $e$ ), то

$$D_{nh} = D_n \times C_2 \quad (34)$$

$$|D_{nh}| = |D_n| \cdot |C_2| = 4n \quad (35)$$

Порядок можно было получить проще: только при 2 симметриях вершина  $x$  переходит сама в себя (тождественная и отражение относительно плоскости, проходящей через  $x$ ). Значит  $G_x = 2$ . Любая вершина при симметриях может перейти в любую, значит  $Gx = 2n$ .

$$|D_{nh}| = |G_x| \cdot |Gx| = 4n \quad (36)$$

## •[6]

$$D_{3h} \simeq D_3 \times C_2 \simeq C_3 \times C_2 \times C_2 \quad (37)$$

Сначала докажем следующее предложение:

**Statement 8.**  $D_6$  изоморфно  $D_3 \times C_2$ .

*Proof.* Заметим, что  $D_6$  – группа симметрий правильного шестиугольника, а его вершины являются вершинами двух равносторонних треугольников. Группа симметрии правильного треугольника –  $D_3$ . Один треугольник можно перевести в другой при помощи поворота на  $\pi$  вокруг прямой  $l$ , проходящей через центр шестиугольника и перпендикулярной его плоскости. Тожественная симметрия и такой поворот образуют  $C_2$ . Поскольку все симметрии из  $D_6$  можно представить в виде произведения элементов групп  $D_3$  и  $C_2$ , группы  $D_3$  и  $C_2$  коммутативны и пересечение групп тривиально (по  $e$ ), то утверждение доказано.  $\square$

Учтём, что  $D_{3h} \simeq D_3 \times C_2$  и получим

$$\boxed{D_{3h} \simeq D_3 \times C_2 \simeq D_6} \quad (38)$$

## Solution

•[a] Движения получаются четырёх видов: трансляции относительно векторов решетки, симметрии относительно горизонтальных и вертикальных осей и центральные симметрии относительно точек половинной решётки (повороты на  $\pi$  вокруг прямой, проходящей через центр решётки перпендикулярно ей, можно получить из симметрий).

• Группа трансляций  $T$  порождена сдвигами на порождающие вектора решётки  $e_1$  и  $e_2$ . Её элемент:

$$t_{n_1, n_2, n_3, n_4} : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 + n_1 e_1 + n_2 e_2 \\ x_2 \rightarrow x_2 + n_3 e_1 + n_4 e_2 \end{cases}, \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad (39)$$

• Общая симметрия относительно вертикальных осей:

$$s_{l_1, l_2, l_3, l_4}^v : \begin{cases} x_1 \rightarrow -x_1 + l_1 e_1 + l_2 e_2 \\ x_2 \rightarrow x_2 + l_3 e_1 + l_4 e_2 \end{cases}, \quad l_i \in \mathbb{Z} \quad (40)$$

где  $x_1, x_2$  – координаты вектора  $x$ .

• Общая симметрия относительно горизонтальных осей:

$$s_{k_1, k_2, k_3, k_4}^h : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 + k_1 e_1 + k_2 e_2 \\ x_2 \rightarrow -x_2 + k_3 e_1 + k_4 e_2 \end{cases}, \quad k_i \in \mathbb{Z} \quad (41)$$

• Общая центральная симметрия:

$$s_{m_1, m_2, m_3, m_4} : \begin{cases} x_1 \rightarrow -x_1 + m_1 e_1 + m_2 e_2 \\ x_2 \rightarrow -x_2 + m_3 e_1 + m_4 e_2 \end{cases}, \quad m_i \in \mathbb{Z} \quad (42)$$

**Statement 9.** Подгруппа  $T$  является нормальной

*Proof.* При сопряжениях с движениями любых видов трансляция перейдёт в трансляцию (коэффициенты перед  $x_1$  и  $x_2$  будут либо 1, либо  $(-1)^2 = 1$ , а значит  $x \rightarrow x + a$ , где  $a$  – некоторый вектор с целыми координатами).  $\square$

Движения различных типов ( $T$ , 3 вида симметрий) – 4 класса смежности по  $T$ . Факторгруппа  $G/T$  состоит из 4 элементов:

•

$$e = t_{0,0,0,0} : x \rightarrow x \quad (43)$$

•

$$s_{0,0,0,0}^v : \begin{cases} x_1 \rightarrow -x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 \end{cases} \quad (44)$$

•

$$s_{0,0,0,0}^h : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 \\ x_2 \rightarrow -x_2 \end{cases} \quad (45)$$

•

$$s_{0,0,0,0} : x \rightarrow -x \quad (46)$$

Такая факторгруппа  $G/T \simeq C_2 \times C_2$  (таблицы умножения совпадают). Рассмотрим подгруппу  $G_0$  движений, сохраняющих начало координат.

Пусть  $G_0$  – подгруппа движений, сохраняющих начало координат. Группа  $G \simeq G_0 \ltimes T$ ,  $G_0$  действует на  $T$  следующим образом:  $\phi_e(t_{n_1, n_2, n_3, n_4}) = t_{n_1, n_2, n_3, n_4}$ ,  $\phi_{s_0^v}(t_{n_1, n_2, n_3, n_4}) = t_{-n_1, -n_2, n_3, n_4}$ ,  $\phi_{s_0^h}(t_{n_1, n_2, n_3, n_4}) = t_{n_1, n_2, -n_3, -n_4}$  и  $\phi_{s_0}(t_{n_1, n_2, n_3, n_4}) = t_{-n_1, -n_2, -n_3, -n_4}$ :

$$\phi_e(t_{n_1, n_2, n_3, n_4})(x) = e t_{n_1, n_2, n_3, n_4} e(x) = t_{n_1, n_2, n_3, n_4}(x)$$

$$\begin{aligned}\phi_{s_0^v}(t_{n_1, n_2, n_3, n_4})(x_1, x_2)^T &= s_{0,0,0,0}^v t_{n_1, n_2, n_3, n_4} s_{0,0,0,0}^v (x_1, x_2)^T = s_{0,0,0,0}^v t_{n_1, n_2, n_3, n_4} (-x_1, x_2)^T = \\ &= s_{0,0,0,0}^v (-x_1 + n_1 e_1 + n_2 e_2, x_2 + n_3 e_1 + n_4 e_2)^T = (x_1 - n_1 e_1 - n_2 e_2, x_2 + n_3 e_1 + n_4 e_2)^T = t_{-n_1, -n_2, n_3, n_4}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{s_0^h}(t_{n_1, n_2, n_3, n_4})(x_1, x_2)^T &= s_{0,0,0,0}^h t_{n_1, n_2, n_3, n_4} s_{0,0,0,0}^h (x_1, x_2)^T = s_{0,0,0,0}^h t_{n_1, n_2, n_3, n_4} (x_1, -x_2)^T = \\ &= s_{0,0,0,0}^h (x_1 + n_1 e_1 + n_2 e_2, -x_2 + n_3 e_1 + n_4 e_2)^T = (x_1 + n_1 e_1 + n_2 e_2, x_2 - n_3 e_1 - n_4 e_2)^T = t_{n_1, n_2, -n_3, -n_4}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{s_0}(t_{n_1, n_2, n_3, n_4})(x_1, x_2)^T &= s_{0,0,0,0} t_{n_1, n_2, n_3, n_4} s_{0,0,0,0} (x_1, x_2)^T = s_{0,0,0,0} t_{n_1, n_2, n_3, n_4} (-x_1, -x_2)^T = \\ &= s_{0,0,0,0} (-x_1 + n_1 e_1 + n_2 e_2, -x_2 + n_3 e_1 + n_4 e_2)^T = (x_1 - n_1 e_1 - n_2 e_2, x_2 - n_3 e_1 - n_4 e_2)^T = \\ &= t_{-n_1, -n_2, -n_3, -n_4}(x_1, x_2)^T\end{aligned}$$

•[6]\*] Найдём классы сопряжённости в  $G$ . Они также будут совпадать с 4 типами движений: трансляции и 3 симметрии (см. список выше), поскольку невозможно получить из движения одного типа сопряжением движение другого типа (т.к. при сопряжениях знак при  $x_1$  и  $x_2$  меняется чётное число раз: 0 (если то, чем мы сопрягаем не меняет там знак) или 2 (если то, чем мы сопрягаем меняет там знак)). Т.е. если например трансляция не меняла знаки при  $x_1$  и  $x_2$ . то и при сопряжении чем угодно менять знак не будет; если симметрия меняла знак при  $x_1$  и не меняла при  $x_2$ , то и при сопряжении чем угодно будет менять при  $x_1$  и не будет при  $x_2$ . Т.е. всего 4 класса сопряжённости (трансляции и 3 вида симметрий).

## 9.2.4 Problems about different setups

### Brsht-4.1.

Постройте сюръективный гомоморфизм из группы  $S_4$  в группу  $S_3$ . Найдите его ядро.

Указание: воспользуйтесь действием  $S_4$  на пространстве многочленов от четырех переменных переставляя переменные. Точнее воспользуйтесь орбитой многочлена  $P = x_1 x_2 + x_3 x_4$  такого действия.

### Brsht-4.2.

Через  $\mathbb{C}^*$  обозначим группу ненулевых комплексных чисел с операцией умножения, через  $\mathbb{R}_+$  обозначим подгруппу положительных вещественных чисел. Найдите факторгруппу  $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+$ .

Указание: представьте  $\mathbb{C}^*$  в виде произведения  $\mathbb{R}_+$  и другой подгруппы.

Определение 4. Подгруппа порожденная элементами вида  $x y x^{-1} y^{-1}$  называется коммутантом группы  $G$ . Выражение  $x y x^{-1} y^{-1}$  называется коммутатором элементов  $x, y$ . Коммутант группы  $G$  обозначается  $[G, G]$ .

### Brsht-4.3.

а) Найдите классы сопряженности в группе  $D_n$ .

б) Найдите коммутант группы  $D_n$ .

Указание: используйте, то что любой элемент  $D_n$  может быть записан в виде  $r^b$  или  $sr^b u$  соотношения на  $r, s$  найденные на лекции

в)\* Представьте группу  $D_n$  в виде нетривиального полупрямого произведения.

### Solution Brsht-3.

Ответ.

а) Если  $n$  нечетно, то все симметрии  $sr^b$  образуют один класс сопряженности. Если  $n$  четно, то симметрии распадаются на два класса сопряженности:  $sr^{2a}$  и  $sr^{2a-1}$ . Повороты  $r^a$  и  $r^b$  сопряжены только если  $a = b$  или  $a = n - b$ .

б) Если  $n$  нечетно, то коммутант - это группа всех поворотов  $r^a$ . Если  $n$  четно, то коммутант это группа всех четных поворотов  $r^{2a}$ .

в)  $D_n \simeq C_2 \ltimes C_n$

### Brsht-4.4.

Пусть  $G$  - группа движений сохраняющих куб,  $G_0$  - подгруппа собственных движений.

а) Постройте нетривиальный гомоморфизм из  $G_0$  в  $S_4$  используя действие  $G$  на множестве диагоналей куба. Является ли он изоморфизмом?

б) Найдите классы сопряженности в группе  $G_0$ . Опишите эти классы геометрически как (как вращения, симметрии или зеркальные повороты).

в) Опишите  $G$  как произведение (прямое или полупрямое) Сколько существует классов сопряженности в  $G$ ?



### Solution Brsht-4.

Решение. Пункты а,б аналогичны задаче из прошлого задания, доказывается, что  $G_0 \simeq S_4$ , классы сопряженности  $S_4$  мы знаем, их 5 штук. Внутри всей  $G$  есть подгруппа  $C_2$  порожденная центральной симметрией. Любой элемент из  $G$  является либо собственным движением либо произведением собственного движения и центральной симметрии. Поэтому  $G \simeq C_2 \times G_0$ . Для описания классов сопряженности применим предложение.

Предложение 1. Классы сопряженности произведения групп  $G \times H$  являются собой произведения классов сопряженности группы  $G$  и группы  $H$ .

Доказательство. Достаточно заметить, что элементы  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$  сопряжены тогда и только тогда когда элементы  $g_1, g_2 \in G$  сопряжены и элементы  $h_1, h_2 \in H$  сопряжены.

Т.е. в нашей задаче группа  $G$  имеет  $2 \cdot 5 = 10$  классов сопряженности.

Замечание. Для полупрямого произведения аналогичное предложение неверно. Примером является прошлая задача - хотя  $D_n \simeq C_2 \ltimes C_n$ , количество классов сопряженности в  $D_n$  не равно  $2n$ .

### Некоторые решения задач из лекции 4.

#### Solution

Пусть  $\varphi$  – гомоморфизм из  $S_4$  в  $S_3$ . По предложению 2 лекции 4  $\text{Ker } \varphi$  – нормальная подгруппа в  $S_4$ . Значит,  $\text{Ker } \varphi$  является объединением каких-то классов сопряженности.  $|S_4| = 4! = 24$ ,  $|S_3| = 3! = 6$ .

Тогда по предложению 5 лекции 4  $|S_4| = |\text{Ker } \varphi| |S_3|$ , откуда  $|\text{Ker } \varphi| = \frac{|S_4|}{|S_3|} = 4$ . Классы сопряженности  $S_4$  рассмотрены в задаче 3.2. Всего 2 класса имеют мощность, не превышающую 4:  $\{e\}$  и  $\{(1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ , они и будут составлять ядро (их суммарная мощность равна 4):  $\text{Ker } \varphi = \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ .

Воспользуемся действием  $S_4$  на пространстве многочленов от четырех переменных вида  $P = x_1x_2 + x_3x_4$ , переставляя переменные. Ещё есть 2 многочлена такого вида, не равные  $P$ :  $Q = x_1x_3 + x_2x_4$  и  $R = x_1x_4 + x_2x_3$ . Все элементы ядра соответствуют перестановке  $P \rightarrow P$ ,  $Q \rightarrow Q$ ,  $R \rightarrow R$  ( $\varphi(\text{Ker } \varphi) = e$ ). Транспозиции  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$  соответствуют перестановке  $(Q, R)$  ( $\varphi((1, 2)) = \varphi((3, 4)) = (Q, R)$ ). Транспозиции  $(1, 3)$ ,  $(2, 4)$  соответствуют перестановке  $(P, R)$  ( $\varphi((1, 3)) = \varphi((2, 4)) = (P, R)$ ). Транспозиции  $(1, 4)$ ,  $(2, 3)$  соответствуют перестановке  $(P, Q)$  ( $\varphi((1, 4)) = \varphi((2, 3)) = (P, Q)$ ). Циклы длины 3  $(1, 3, 2)$ ,  $(1, 4, 3)$ ,  $(1, 2, 4)$ ,  $(2, 3, 4)$  соответствуют перестановке  $(P, Q, R)$  ( $\varphi((1, 3, 2)) = \varphi((1, 4, 3)) = \varphi((1, 2, 4)) = \varphi((2, 3, 4)) = (P, Q, R)$ ). Циклы длины 3  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 4)$ ,  $(1, 4, 2)$ ,  $(2, 4, 3)$  соответствуют перестановке  $(P, R, Q)$  ( $\varphi((1, 2, 3)) = \varphi((1, 3, 4)) = \varphi((1, 4, 2)) = \varphi((2, 4, 3)) = (P, R, Q)$ ). Циклы длины 4  $(1, 2, 4, 3)$ ,  $(1, 3, 4, 2)$  соответствуют перестановке  $(P, Q)$  ( $\varphi((1, 2, 4, 3)) = \varphi((1, 3, 4, 2)) = (P, Q)$ ). Циклы длины 4  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $(1, 4, 3, 2)$  соответствуют перестановке  $(P, R)$  ( $\varphi((1, 2, 3, 4)) = \varphi((1, 4, 3, 2)) = (P, R)$ ). Циклы длины 4  $(1, 3, 2, 4)$ ,  $(1, 4, 2, 3)$  соответствуют перестановке  $(Q, R)$  ( $\varphi((1, 3, 2, 4)) = \varphi((1, 4, 2, 3)) = (Q, R)$ ). Таким образом, построено отображение из  $S_4$  в  $S_3$ . Оно сюръективно, поскольку  $\text{Im } \varphi = S_3$ . Также  $\forall a, b \in S_4$   $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ , поскольку  $a$  переставит индексы в многочленах (этому соответствует перестановка многочленов  $\varphi(a)$ ),  $b$  переставит индексы в многочленах (этому соответствует перестановка многочленов  $\varphi(b)$ ), а перестановке индексов  $ab$  соответствует перестановка многочленов  $\varphi(ab)$ . Значит  $\varphi$  – действительно сюръективный гомоморфизм из  $S_4$  в  $S_3$ .

Ядро гомоморфизма:

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}} \quad (47)$$

#### Solution

Рассмотрим две подгруппы  $\mathbb{C}^*$ :  $\mathbb{R}_+$  и  $U(1)$  (унитарная группа порядка 1 – подгруппа комплексных чисел, по модулю равных 1 (на комплексной плоскости это окружность радиуса 1):  $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, z = \exp(i\theta)\}$ ).  $\mathbb{R}_+$  и  $U(1)$  коммутируют (комплексные числа коммутируют при умножении).  $\mathbb{R}_+ \cap U(1) = \{1\}$  (луч из центра окружности пересекается с окружностью в 1 точке).  $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+ \cdot U(1)$  (любое комплексное число представимо в экспоненциальной форме:  $z = r \exp(i\theta)$ ). Тогда по предложению 7 лекции 4:  $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{R}_+ \times U(1)$ . По предложению 10 лекции 4:

$$\boxed{\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \simeq U(1)} \quad (48)$$

#### Solution

##### •[a]

Любой элемент  $D_n$  может быть представлен в виде  $r^b$  или  $sr^b$ . Найдём классы сопряженности  $r^b$ .

$$r^a r^b r^{-a} = r^b, \quad sr^a r^b (sr^a)^{-1} = sr^{a+b} r^{-a} s^{-1} = sr^b s^{-1} = r^{-b} \quad (49)$$

Таким образом, если  $n$  – чётное, то классы сопряжённости:  $\{e\}, \{r, r^{-1}\}, \{r^2, r^{-2}\}, \dots, \{r^{\frac{n}{2}}, r^{-\frac{n}{2}}\}$  ( $\frac{n}{2} + 1$  штук); если  $n$  – нечётное, то классы сопряжённости:  $\{e\}, \{r, r^{-1}\}, \{r^2, r^{-2}\}, \dots, \{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{-\frac{n-1}{2}}\}$  ( $\frac{n+1}{2}$  штук). Найдём классы сопряжённости  $sr^b$ .

$$r^a sr^b r^{-a} = r^a sr^{b-a} = sr^{b-2a}, \quad sr^a sr^b (sr^a)^{-1} = sr^a sr^{b-a} s = sr^{2a-b} \quad (50)$$

Таким образом, если  $n$  – чётное, то классы сопряжённости:  $\{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$  ( $b$  нечётное) и  $\{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$  ( $b$  чётное); если  $n$  – нечётное, то класс сопряжённости 1 (не зависит от чётности  $b$ ):  $\{s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ .

### •[6]

Рассмотрим 4 возможных случая:

$$\bullet x = r^a, y = r^b.$$

$$xyx^{-1}y^{-1} = r^a r^b r^{-a} r^{-b} = r^0 = e \quad (51)$$

$$\bullet x = sr^a, y = r^b.$$

$$xyx^{-1}y^{-1} = sr^a r^b (sr^a)^{-1} r^{-b} = sr^{a+b} r^{-a} s^{-1} r^{-b} = sr^b sr^{-b} = r^{-2b} \quad (52)$$

$$\bullet x = r^a, y = sr^b.$$

$$xyx^{-1}y^{-1} = r^a sr^b r^{-a} (sr^b)^{-1} = r^a sr^{-a} s = r^{2a} \quad (53)$$

$$\bullet x = sr^a, y = sr^b.$$

$$xyx^{-1}y^{-1} = sr^a sr^b (sr^a)^{-1} (sr^b)^{-1} = r^{b-a} r^{-a} sr^{-b} s = r^{2(b-a)} \quad (54)$$

Во всех возможных случаях коммутаторы элементов – повороты в чётной степени. При определённых  $a$  и  $b$  среди них есть  $r^2$ , который порождает коммутант.

Если  $n$  – чётное, то коммутант состоит из всех поворотов в чётной степени:

$$\boxed{[D_n, D_n] = \{e, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}, \quad n = 2k, k \in \mathbb{Z}} \quad (55)$$

Если  $n$  – нечётное, то  $r^{n-1}r^2 = r^1$  и коммутант состоит из всех поворотов:

$$\boxed{[D_n, D_n] = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \quad n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}} \quad (56)$$

### •[B]\*

**Statement 10.**  $D_n$  изоморфно полупрямому произведению  $C_n$  и  $C_2$ .

*Proof.* В группе  $D_n$  содержатся повороты (подгруппа  $C_n$ ) и симметрия (подгруппа  $C_2$ ). Они пересекаются только по  $e$ . Любой элемент  $D_n$  –  $r^b$  или  $sr^b$ . Группа  $C_n$  является нормальной подгруппой в  $D_n$ , поскольку является объединением классов сопряжённости из  $D_n$  (см. п. а). По предложению 9 лекции 4, предложение доказано.  $\square$

$$\boxed{D_n \simeq C_2 \ltimes C_n} \quad (57)$$

## Solution

### •[a]

**Statement 11.** Пусть  $G_0$  – группа собственных движений, сохраняющих куб. Действие  $G_0$  на множестве диагоналей куба задаёт изоморфизм  $G_0$  и  $S_4$ .

*Proof.* Для доказательства изоморфизма выпишем соответствие между перестановками различных циклических типов в  $S_4$  и различными собственными движениями, сохраняющими куб:

- $e$  (единичный, 1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с кубом).
- $(a, b)$  (транспозиции, 6 шт.) – повороты на  $\pi$  вокруг прямой  $l_1$ , проходящей через центры противоположных рёбер.
- $(a, b)(c, d)$  (произведение транспозиций, 3 шт.) – повороты на  $\pi$  вокруг прямой  $l_2$ , проходящей через центры противоположных граней.
- $(a, b, c)$  (цикл длины 3, 8 шт.) – поворот на  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  вокруг прямой  $l_3$ , проходящей через диагональ куба.
- $(a, b, c, d)$  (цикл длины 4, 6 шт.) – повороты на  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  вокруг прямой  $l_2$ , проходящей через центры противоположных граней.

Таким образом, построено однозначное соответствие между перестановками и движениями, сохраняющее групповые операции, а значит изоморфизм групп построен.  $\square$

## •[6)]

По предложению 7 лекции 3 перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда имеют одинаковую циклическую структуру. А значит классами сопряжённости являются 5 видов движения, описанных выше.

## •[B)]

**Statement 12.**  $G$  изоморфно  $G_0 \times C_2$ .

*Proof.* В  $G$  тождественное движение и центральная симметрия образуют  $C_2$ . Все движения из  $G$  можно представить в виде произведения собственных движений из  $G_0$  и элементов  $C_2$ . Подгруппы  $G_0$  и  $C_2$  коммутируют и пересекаются только по  $e$ . По предложению 7 лекции 4 предложение доказано.  $\square$

$$\boxed{G \simeq G_0 \times C_2} \quad (58)$$

В  $G_0$  5 классов сопряжённости, в  $C_2$  – 2 класса ( $\{e\}$  и  $\{r\}$ ). Пусть  $x = (g_x, c_x) \in G_0 \times C_2$ ,  $y = (g_y, c_y) \in G_0 \times C_2$ . Найдём классы сопряжённости в  $G_0 \times C_2$ .

$$xyx^{-1} = (g_x, c_x)(g_y, c_y)(g_x, c_x)^{-1} = (g_x g_y g_x^{-1}, c_x c_y c_x^{-1}) \quad (59)$$

Как видно, если  $g_x$  и  $g_y$  сопряжены и  $c_x$  и  $c_y$  сопряжены, то и  $(g_x, c_x)$  и  $(g_y, c_y)$  сопряжены и наоборот. Т.е. классы сопряжения произведения групп – произведения классов сопряжённости этих групп. Поэтому число классов сопряжённости  $2 \cdot 5 = 10$ .

## 9.2.5 Problems about group representations

Brsht-5.y1. представление  $C_3$ 

а) Регулярное представление  $C_3$  задается матрицами

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad r^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите инвариантные подпространства в этом представлении. Разложите их в сумму представлений  $R_j$ , описанных на лекции.

б) Найдите матрицу перехода  $\varphi$  которая приводит регулярное представление  $C_3$  к сумме одномерных.

## •[a)]

Регулярное представление  $C_3$ :

$$e \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad r^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Найдём инвариантные подпространства в этом представлении (кроме тривиальных  $\{0\}$  и  $\mathbb{C}^3$ ). Для этого найдём собственные векторы матриц  $\rho(r)$  и  $\rho(r^2)$  (для единичной матрицы любой вектор собственный с собственным значением 1).

$$\det(\rho(r) - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 = 0 \quad (61)$$

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \lambda_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} \quad (62)$$

$$\lambda_0 = 1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{01} \\ h_{02} \\ h_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} : \begin{pmatrix} -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 & 1 \\ 1 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$\lambda_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} : \begin{pmatrix} -e^{\frac{4\pi i}{3}} & 0 & 1 \\ 1 & -e^{\frac{4\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 1 & -e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (65)$$

Заметим, что эти же вектора и значения являются собственными и для  $\rho(r^2)$ :

$$\rho(r^2)h_0 = \lambda_0 h_0, \quad \rho(r^2)h_1 = \lambda_2 h_1, \quad \rho(r^2)h_2 = \lambda_1 h_2 \quad (66)$$

Таким образом,

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix} \right\rangle \quad (67)$$

являются одномерными инвариантными представлениями.

$$\mathbb{C}^3 = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \quad (68)$$

Разложим представление  $C_n$  в сумму  $R_j$ :

- В  $V_0$ :  $R_0(e) = 1, R_0(r) = 1, R_0(r^2) = 1$ .
- В  $V_1$ :  $R_1(e) = 1, R_1(r) = e^{\frac{2\pi i}{3}}, R_1(r^2) = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ .
- В  $V_2$ :  $R_2(e) = 1, R_2(r) = e^{\frac{4\pi i}{3}}, R_2(r^2) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ .

Заметим, что для  $R_j$  можно записать общую формулу:

$$R_j(r^m) = e^{\frac{2\pi i}{n}mj} \quad (69)$$

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \quad (70)$$

•[6]

В базисе  $h_0, h_1, h_2$ :

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \quad \rho(r^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (71)$$

Матрица перехода к этому базису:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (72)$$

## Brsht-5.2. Свойства характеров

- а) Докажите, что характеры сопряженных элементов равны.
- б) Задайте представление  $U_2$  (из примера на лекции) матрицами. Например можно воспользоваться базисом  $e_1 - e_2, e_1 - e_3$ .
- в) Найдите характеры тривиального, перестановочного и регулярного представлений  $S_3$ . Найдите характер представления  $U_2$ .

•[a]

**Statement 13.** *Характеры сопряжённых элементов равны.*

*Proof.*

$$\text{tr}(\rho(gxg^{-1})) = \text{tr}(\rho(g)\rho(x)\rho(g^{-1})) = \text{tr}(\rho(g)\rho(x)\rho(g)^{-1}) = \text{tr}(\rho(g)\rho(g)^{-1}\rho(x)) = \text{tr}(\rho(x))$$

□

## •[6)]

$$U_2 = \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i e_i \mid \sum_{i=1}^3 x_i = 0 \right\} \quad (73)$$

Воспользуемся базисом:

$$e' = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'' = e_1 - e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (74)$$

Любой вектор может быть выражен через базисные вектора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -x_2 e' - x_3 e'' \quad (75)$$

Выпишем, во что будут переходить  $e'$  и  $e''$  при домножении слева на  $\rho(g)$  (из перестановочного представления):  $\rho(e)e' = (1, -1, 0)^T = e'$ ,  $\rho(e)e'' = (1, 0, -1)^T = e''$ ,  $\rho((1, 2))e' = (-1, 1, 0)^T = -e'$ ,  $\rho((1, 2))e'' = (0, 1, -1)^T = e'' - e'$ ,  $\rho((1, 3))e' = (0, -1, 1)^T = e' - e''$ ,  $\rho((1, 3))e'' = (-1, 0, 1)^T = -e''$ ,  $\rho((2, 3))e' = (1, 0, -1)^T = e''$ ,  $\rho((2, 3))e'' = (1, -1, 0)^T = e'$ ,  $\rho((1, 2, 3))e' = (0, 1, -1)^T = e'' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3))e'' = (-1, 1, 0)^T = -e'$ ,  $\rho((1, 3, 2))e' = (-1, 0, 1)^T = -e''$ ,  $\rho((1, 3, 2))e'' = (0, -1, 1)^T = e' - e''$ .  
Представление  $U_2$ :

$$e \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1, 3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$(2, 3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1, 2, 3) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1, 3, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

## •[B)]

Тривиальное представление:

$$\rho(g) = 1 \rightarrow \boxed{\chi_V(g) = \text{Tr } 1 = 1} \quad (78)$$

Перестановочное представление  $S_3$  задаётся матрицами ( $\rho(g)e_x = e_{gx}$ ):

$$e \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1, 3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (79)$$

$$(2, 3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1, 2, 3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1, 3, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (80)$$

$$\boxed{\chi_V(e) = 3, \quad \chi_V((a, b)) = 1, \quad \chi_V((a, b, c)) = 0} \quad (81)$$

Регулярное представление ( $ge_x = e_{gx}$ ).

$|S_3| = 6$ . Рассмотрим пространство  $V = \mathbb{C}^6$ . Элементы  $S_3$  представим в виде:  $e = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 2) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(2, 3) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 3) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 3) = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 3, 2) = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ .

Все матрицы регулярного представления состоят из 0 и 1, в каждой строке и столбце по одной 1. Если характер элемента не равен 0, то на диагонали по крайней мере есть одна 1. Пусть она будет стоять на  $m$  месте. Это значит, что  $ge_m = e_m$ , что может быть только при  $g = e$ . Следовательно, при  $g \neq e$  характер  $\rho(g)$  равен 0.

$$\boxed{\chi_V(e) = 6, \quad \chi_V(g) = 0, \quad g \neq e} \quad (82)$$

Представление  $U_2$ :

$$\boxed{\chi_V(e) = 2, \quad \chi_V((a, b)) = 0, \quad \chi_V((a, b, c)) = -1} \quad (83)$$

**Brsht-5.3. Вращения, тетраэдры, кубы**

а) Пусть  $R_\alpha$  - вращение трехмерного пространства относительно некоторой оси на угол  $\alpha$ . Найдите след матрицы  $R_\alpha$ .

Пусть  $S_\alpha$  - зеркальный поворот - композиция вращения трехмерного пространства относительно некоторой оси на угол  $\alpha$  и отражения относительно плоскости перпендикулярной этой оси. Найдите след матрицы  $S_\alpha$ .

б) Мы знаем, что  $S_4$  изоморфна группе симметрий тетраэдра, поэтому каждому элементу  $S_4$  можно сопоставить матрицу  $3 \times 3$ . Это дает трехмерное представление  $\rho_3 : S_4 \rightarrow GL(3)$ . Найдите характер  $\rho_3$ .

в) Мы знаем, что  $S_4$  изоморфна группе вращений куба, поэтому каждому элементу  $S_4$  можно сопоставить матрицу  $3 \times 3$ . Это дает трехмерное представление  $\rho_4 : S_4 \rightarrow GL(3)$ . Найдите характер  $\rho_4$ .

**•[a)]**

$R_\alpha$  - вращение трёхмерного пространства относительно некоторой оси на угол  $\alpha$ . В базисе, в котором один из базисных векторов ( $\vec{k}$ ) проходит через эту ось,  $R_\alpha$  записывается в виде

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

$$\boxed{\text{tr} R_\alpha = 2 \cos \alpha + 1} \quad (85)$$

Такой след будет иметь матрица  $R_\alpha$  в любом базисе, поскольку следы сопряжённых матриц равны.  $S_\alpha$  - зеркальный поворот - композиция вращения трёхмерного пространства относительно некоторой оси на угол  $\alpha$  и отражения относительно плоскости перпендикулярной этой оси. В базисе, в котором один из базисных векторов ( $\vec{k}$ ) проходит через эту ось,  $S_\alpha$  записывается в виде

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (86)$$

$$\boxed{\text{tr} S_\alpha = 2 \cos \alpha - 1} \quad (87)$$

Такой след будет иметь матрица  $S_\alpha$  в любом базисе, поскольку следы сопряжённых матриц равны.

**•[б)]**

Выпишем следы матриц  $\rho_3$  для всех симметрий, сохраняющих правильный тетраэдр:

• $e$  (единичный, 1 шт.) - тождественное движение (ничего не делает с тетраэдром).

$$\text{tr} R_0 = 2 \cos 0 + 1 = 3 \quad (88)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}(e) = 3} \quad (89)$$

• $(a, b)$  (транспозиции, 6 шт.) - отражение относительно плоскости  $\pi$ , проходящей через ребро (вершины которого остаются на месте) и центр противоположного ребра (вершины которого меняются местами).

$$\text{tr} S_0 = 2 \cos 0 - 1 = 1 \quad (90)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b)) = 1} \quad (91)$$

• $(a, b)(c, d)$  (произведение транспозиций, 3 шт.) - повороты на  $\pi$  вокруг прямой  $l_1$ , проходящей через центры противоположных рёбер (вершины которых и будут меняться местами).

$$\text{tr} R_\pi = 2 \cos \pi + 1 = -1 \quad (92)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b)(c, d)) = -1} \quad (93)$$

• $(a, b, c)$  (цикл длины 3, 8 шт.) - поворот на  $2\pi/3$  или  $4\pi/3$  вокруг прямой  $l_2$ , проходящей через вершину и центр противоположной грани (вершины этой грани и будут циклически меняться).

$$\text{tr} R_{\frac{2\pi}{3}} = \text{tr} R_{\frac{4\pi}{3}} = 2 \cos \frac{2\pi}{3} + 1 = 0 \quad (94)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b, c)) = 0} \quad (95)$$

• $(a, b, c, d)$  (цикл длины 4, 6 шт.) - зеркальный повороте на  $\pi/2$  с прямой  $l_3$ , проходящей через середины двух противоположных ребер и плоскостью симметрии, проходящей через середины остальных ребер.

$$\text{tr} S_{\frac{\pi}{2}} = 2 \cos \frac{\pi}{2} - 1 = -1 \quad (96)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b, c, d)) = -1} \quad (97)$$

## •[B)]

Выпишем следы матриц  $\rho_4$  для всех вращений, сохраняющих куб:

• $e$  (единичный, 1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с кубом).

$$\text{tr} R_0 = 2 \cos 0 + 1 = 3 \quad (98)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}(e) = 3} \quad (99)$$

• $(a, b)$  (транспозиции, 6 шт.) – повороты на  $\pi$  вокруг прямой  $l_1$ , проходящей через центры противоположных рёбер.

$$\text{tr} R_\pi = 2 \cos \pi + 1 = -1 \quad (100)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b)) = -1} \quad (101)$$

• $(a, b)(c, d)$  (произведение транспозиций, 3 шт.) – повороты на  $\pi$  вокруг прямой  $l_2$ , проходящей через центры противоположных граней.

$$\text{tr} R_\pi = 2 \cos \pi + 1 = -1 \quad (102)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b)(c, d)) = -1} \quad (103)$$

• $(a, b, c)$  (цикл длины 3, 8 шт.) – поворот на  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  вокруг прямой  $l_3$ , проходящей через диагональ куба.

$$\text{tr} R_{\frac{2\pi}{3}} = \text{tr} R_{\frac{4\pi}{3}} = 2 \cos \frac{2\pi}{3} + 1 = 0 \quad (104)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b, c)) = 0} \quad (105)$$

• $(a, b, c, d)$  (цикл длины 4, 6 шт.) – повороты на  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  вокруг прямой  $l_2$ , проходящей через центры противоположных граней.

$$\text{tr} R_{\frac{\pi}{2}} = \text{tr} R_{\frac{3\pi}{2}} = 2 \cos \frac{\pi}{2} + 1 = 1 \quad (106)$$

$$\boxed{\chi_{\mathbb{R}^3}((a, b, c, d)) = 1} \quad (107)$$

## Brsht-5.4. Коммутант и группы

а) Докажите, что для любой группы  $G$  коммутант является нормальной подгруппой.

б)\* Докажите, что фактор по коммутанту является коммутативной группой.

## •[a)]

**Statement 14.** Для любой группы  $G$  коммутант является нормальной подгруппой.

*Proof.* Коммутант группы порождён коммутаторами её элементов  $[x, y]$ . А значит любой элемент коммутанта можно представить в виде  $[x_1, y_1] \dots [x_l, y_l]$ .

$$\forall g, x, y \in G, \quad g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) \quad (108)$$

$$\forall g, x, y \in G, \quad g[x, y]g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$$

Используем выведенные выше равенства:

$$g([x_1, y_1] \dots [x_l, y_l])g^{-1} = (g[x_1, y_1]g^{-1}) \dots (g[x_l, y_l]g^{-1}) = [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}] \dots [gx_lg^{-1}, gy_lg^{-1}] \in [G, G]$$

Значит,  $[G, G]$  является нормальной подгруппой.  $\square$

## •[6)\*]

**Statement 15.** Для любой группы  $G$  фактор по коммутанту является коммутативной группой.

*Proof.* Пусть  $x[G, G], y[G, G] \in G/[G, G]$ .

$$(x[G, G])(y[G, G]) = xy[G, G] = xy[y^{-1}, x^{-1}][G, G] = yx[G, G] = (y[G, G])(x[G, G]) \quad (109)$$

Значит,  $G/[G, G]$  является коммутативной группой.  $\square$

**Brsht-5.5. Свойства группы  $S_n$** 

а) Найдите все одномерные представления группы  $S_n$ .

б)\* Докажите, что коммутант  $S_n$  это  $A_n$ .

Указание: докажите, что любой тройной цикл лежит в коммутанте, а, далее, докажите, что тройные циклы порождают  $A_n$ .

**•[a)]**

**Statement 16.** Единственные одномерные представления симметрической группы - это тривиальное представление и знаковое представление.

*Proof.* Пусть  $\rho$  – одномерное представление  $S_n$ . Любая транспозиция имеет порядок 2, значит должна переходить либо в 1, либо в  $-1$ . Рассмотрим 2 случая:

•  $\exists$  транспозиция  $\alpha : \rho(\alpha) = 1$ . Все транспозиции лежат в одном классе сопряжённости, значит  $\forall \beta \in S_n$  и  $\gamma \in S_n$  можно написать  $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$ .

$$\rho(\alpha) = \rho(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \rho(\gamma)\rho(\beta)\rho(\gamma^{-1}) = \rho(\gamma)\rho(\gamma^{-1})\rho(\beta) = \rho(\gamma\gamma^{-1}\beta) = \rho(\beta) \quad (110)$$

Значит любая транспозиция переходит в 1. Любой элемент  $S_n$  может быть представлен в виде произведения транспозиций. Значит любой элемент  $S_n$  переходит в 1 и  $\rho$  – тривиальное представление.

•  $\exists$  транспозиция  $\alpha : \rho(\alpha) = -1$ . Значит любая транспозиция переходит в  $-1$  (по аналогии с предыдущим пунктом). Любой элемент  $S_n$  может быть представлен в виде произведения  $m$  транспозиций (чётность элемента равна чётности их количества  $m$  по предложению 3). Значит любой элемент  $S_n$  переходит в свою чётность  $(-1)^m$  и  $\rho$  – знаковое представление.  $\square$

**•[6)\*]**

**Statement 17.** Коммутант группы  $S_n$  – это  $A_n$ .

*Proof.* Любой тройной цикл является коммутатором:

$$(a, b, c) = (b, c)(a, b)(b, c)(a, b) = [(b, c), (a, b)] \quad (111)$$

Значит, любой тройной цикл лежит в коммутанте. Коммутатор любых двух перестановок чётен, поэтому  $[S_n, S_n] \subseteq A_n$ . Рассмотрим случаи произведения двух транспозиций:

•

$$(a, b)(a, b) = e = (a, b, c)(c, b, a) \quad (112)$$

•

$$(a, b)(a, c) = (a, c, b), \quad b \neq c \quad (113)$$

•

$$(a, b)(c, d) = (a, d, b)(a, d, c) \quad (114)$$

Таким образом, произведение транспозиций – цикл длины 3 или произведение циклов длины 3. Т.к. любой элемент  $A_n$  раскладывается в чётное число транспозиций, то, разбив транспозиции на пары и заменив на циклы длины 3, любой элемент  $A_n$  выражается через циклы длины 3. Значит  $A_n$  порождена циклами длины 3 и  $A_n \subseteq [S_n, S_n]$ . Таким образом,  $[S_n, S_n] = A_n$ .  $\square$

**Brsht-5.6.**

\* а) Проверьте, что для матриц  $A(g), B(g), C(g)$  и матрицы  $S$ , введенной в доказательстве Теоремы 2, выполнено свойство

$$\begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(h) & B(h) \\ 0 & D(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(h) & 0 \\ 0 & D(h) \end{pmatrix}$$

для любого  $h \in G$ . Указание: воспользуйтесь соотношениями на матрицы  $A, B, C$ . Также надо будет делать замену переменной в сумме.

б) Проверьте, что формула для  $S$  получается конструкцией усреднения из второго способа в доказательстве Теоремы 2, примененной к проектору  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .



## 9.2.6 Problems about unitarity and characters of representations

### Brsht-6.y1.

а) Докажите, что вектор  $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$  не является разложимым (т.е. не существует  $v, u$  таких, что  $v \otimes u = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ ).

б) Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ . Напишите матрицу  $A \otimes B$ . Проверьте, что  $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr } A \cdot \text{Tr } B$ .

### Brsht-6.2.

а) Найдите все одномерные неприводимые представления группы  $D_7$ . б) Найдите все неприводимые представления группы  $D_7$ , составьте таблицу характеров. Для каждого неприводимого представления задайте его указав матрицы соответствующие образующим группы  $D_7$ .

### Brsht-6.3.

Найдите таблицу характеров группы  $S_4$ . Проверьте соотношения ортогональности между характерами. Для любых двух неприводимых трехмерных представлений  $V_1, V_2$  группы  $S_4$  (возможно изоморфных) разложите тензорное произведение  $V_1 \otimes V_2$  на неприводимые.

Указание: размерности неприводимых представлений мы нашли на лекции, одномерные мы знаем. Трехмерные можно искать геометрически как в задании к прошлой лекции. Можно также получать недостающие представления разлагая какие-то известные вам представления на неприводимые: использовать перестановочные представления, регулярное представление, тензорные произведения представлений. Также можно использовать соотношения ортогональности.

### Brsht-6.

4 (Второе соотношение ортогональности для характеров). Докажите, что для любых двух классов сопряженности  $C_i, C_j$ , где  $1 \leq i, j \leq k$  верно:

$$\sum_{\alpha=1}^k \chi^{(\alpha)}(h_i) \overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)} = \delta_{i,j} \frac{|G|}{|C_i|}$$

Указание: используйте, то что матрица характеров является матрицей переход от одного ортонормированного базиса  $\chi^{(i)}, x$  другому ортогональному базису  $\gamma_i$ , поэтому после некоторого домножения столбцов должна стать унитарной, а значит ее столбцы будут попарно ортогональны.

### Solution

#### •[a)]

**Statement 18.** Вектор  $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$  не является разложимым.

*Proof.* Докажем от противного. Предположим, что  $\exists v = \sum_i a^i e_i, u = \sum_i b^j f_j$ :

$$v \otimes u = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 \quad (115)$$

Подставим  $v$  и  $u$ :

$$a^1 b^1 e_1 \otimes f_1 + a^2 b^1 e_2 \otimes f_1 + a^1 b^2 e_1 \otimes f_2 + a^2 b^2 e_2 \otimes f_2 = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 \quad (116)$$

$$a^1 b^1 = a^2 b^2 = 1, \quad a^1 b^2 = a^2 b^1 = 0 \quad (117)$$

Из правых уравнений следует, что в каждой паре из  $a^1, b^2$  и  $a^2, b^1$  есть хотя бы 1 ноль. Противоречие с левыми уравнениями.  $\square$

•[6])

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ .

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (118)$$

$$\text{tr} A \otimes B = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}, \quad \text{tr} A = a_{11} + a_{22}, \quad \text{tr} B = b_{11} + b_{22} \quad (119)$$

$$\boxed{\text{tr} A \otimes B = \text{tr} A \cdot \text{tr} B} \quad (120)$$

**Solution**

•[a])

Классы сопряжённости групп  $D_n$  описаны в задаче 4.3, п. а. В  $D_7$  5 классов сопряжённости:  $\{e\}$ ,  $\{r^{-1}, r^1\}$ ,  $\{r^2, r^{-2}\}$ ,  $\{r^3, r^{-3}\}$ ,  $\{sr^b\}$ . Значит и число неприводимых представлений равно 5. Найдём их размерности:  $|D_7| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 14$ . Единственный возможный вариант:  $d_1 = d_2 = 1$ ,  $d_3 = d_4 = d_5 = 2$ . Найдём все одномерные представления (их всего 2). Коммутанты  $D_n$  описаны в задаче 4.3, п. б.  $[D_7, D_7] = \{e, r, r^2, \dots, r^6\}$ . Факторгруппа  $D_7/[D_7, D_7] \simeq \mathbb{Z}_2$ , т.е.  $|D_7/[D_7, D_7]| = |\mathbb{Z}_2| = 2$  (ещё раз получаем, что всего 2 одномерных неприводимых представления). Любое одномерное неприводимое представление – представление фактора по коммутанту. Первое одномерное неприводимое представление – *тривиальное*: все элементы  $D_7$  переходят в 1.

$$\boxed{\rho_1(r) = \rho_1(s) = 1} \quad (121)$$

Для отражений верно, что  $(sr^b)^2 = sr^b sr^b = r^{-b} r^b = e$ . Поэтому  $\rho(sr^b)^2 = \rho((sr^b)^2) = \rho(e) = 1$  и  $\rho(sr^b) = \pm 1$ .  $\rho(sr^b) = 1$  соответствует тривиальному представлению, а  $\rho(sr^b) = -1$  – второму одномерному представлению. Т.е. во втором одномерном представлении все повороты перейдут в 1, а отражения – в  $-1$ .

$$\boxed{\rho_2(r) = 1, \quad \rho_2(s) = -1} \quad (122)$$

•[6])

Найдём 3 оставшихся двумерных неприводимых представления. Для них должны выполняться тождества:  $\rho(r^b)^7 = \rho((r^b)^7) = \rho(e) = 1$  (матрицы поворота),  $\rho(sr^b)^2 = \rho((sr^b)^2) = \rho(e) = 1$  (матрица отражения),  $\rho(r)\rho(s)\rho(r)\rho(s) = \rho(rsr s) = \rho(e) = 1$ .

$$\boxed{\rho_3(r) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{7} & -\sin \frac{2\pi}{7} \\ \sin \frac{2\pi}{7} & \cos \frac{2\pi}{7} \end{pmatrix}, \quad \rho_3(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad (123)$$

$$\boxed{\rho_4(r) = \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{7} & -\sin \frac{4\pi}{7} \\ \sin \frac{4\pi}{7} & \cos \frac{4\pi}{7} \end{pmatrix}, \quad \rho_4(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad (124)$$

$$\boxed{\rho_5(r) = \begin{pmatrix} \cos \frac{6\pi}{7} & -\sin \frac{6\pi}{7} \\ \sin \frac{6\pi}{7} & \cos \frac{6\pi}{7} \end{pmatrix}, \quad \rho_5(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad (125)$$

Ещё раз проверим, что все найденные представления являются неприводимыми. Для этого воспользуемся критерием  $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(i)} \rangle = 1$ :

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{14}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1) = 1 \quad (126)$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{14}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1) = 1 \quad (127)$$

$$\langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{14}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cos^2 \frac{2\pi}{7} + 2 \cdot 4 \cos^2 \frac{4\pi}{7} + 1 \cdot 4 \cos^2 \frac{6\pi}{7} + 7 \cdot 0) = 1 \quad (128)$$

|              | $e^1$ | $r^1, r^{-1\ 2}$        | $r^2, r^{-2\ 2}$        | $r^3, r^{-3\ 2}$        | $sr^b\ 7$ |
|--------------|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------|
| $\chi^{(1)}$ | 1     | 1                       | 1                       | 1                       | 1         |
| $\chi^{(2)}$ | 1     | 1                       | 1                       | 1                       | -1        |
| $\chi^{(3)}$ | 2     | $2 \cos \frac{2\pi}{7}$ | $2 \cos \frac{4\pi}{7}$ | $2 \cos \frac{6\pi}{7}$ | 0         |
| $\chi^{(4)}$ | 2     | $2 \cos \frac{4\pi}{7}$ | $2 \cos \frac{6\pi}{7}$ | $2 \cos \frac{2\pi}{7}$ | 0         |
| $\chi^{(5)}$ | 2     | $2 \cos \frac{6\pi}{7}$ | $2 \cos \frac{2\pi}{7}$ | $2 \cos \frac{4\pi}{7}$ | 0         |

Table 1: Таблица характеров группы  $D_7$ 

$$\langle \chi^{(4)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{14}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cos^2 \frac{4\pi}{7} + 2 \cdot 4 \cos^2 \frac{6\pi}{7} + 1 \cdot 4 \cos^2 \frac{2\pi}{7} + 7 \cdot 0) = 1 \quad (129)$$

$$\langle \chi^{(5)}, \chi^{(5)} \rangle = \frac{1}{14}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cos^2 \frac{6\pi}{7} + 2 \cdot 4 \cos^2 \frac{2\pi}{7} + 1 \cdot 4 \cos^2 \frac{4\pi}{7} + 7 \cdot 0) = 1 \quad (130)$$

В приведённых выше равенствах использовано, что:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7} + \cos^2 \frac{6\pi}{7} &= \frac{(e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{2\pi}{7}})^2}{4} + \frac{(e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}})^2}{4} + \frac{(e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{6\pi}{7}})^2}{4} = \\ &= \frac{1}{4}(e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}} + 2 + e^{i\frac{8\pi}{7}} + e^{-i\frac{8\pi}{7}} + 2 + e^{i\frac{12\pi}{7}} + e^{-i\frac{12\pi}{7}} + 2) = \frac{1}{4}(5 + e^{-i\frac{12\pi}{7}}(1 + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{8\pi}{7}} + \dots + e^{i\frac{24\pi}{7}})) = \\ &= \frac{5}{4} + \frac{e^{-i\frac{12\pi}{7}}}{4} \frac{e^{4\pi i} - 1}{e^{i\frac{4\pi}{7}} - 1} = \frac{5}{4} \quad (131) \end{aligned}$$

где в предпоследнем равенстве использована формула для суммы геометрической прогрессии.

## Solution

Классы сопряжённости  $S_4$  описаны в задаче 3.2, п. а и в задаче 4.4, п. а и б. Всего классов сопряжённости 5, значит и неприводимых представлений 5. Найдём их размерности:  $|S_4| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 24$ . У  $S_n$  всего 2 одномерных неприводимых представления: тривиальное и знаковое (см. задачу 5.5, п.а), значит  $d_1 = d_2 = 1$ ,  $d_3, d_4, d_5 > 1$ . Найдём размерности остальных. Единственный возможный вариант:  $d_3 = d_4 = 3$ ,  $d_5 = 2$ .

Трёхмерные представления  $S_4$  рассмотрены в задаче 5.3, п. б и в:  $\rho_3$  получено из изоморфизма  $S_4$  и группы симметрий тетраэдра,  $\rho_4$  – из изоморфизма  $S_4$  и группы вращений куба.

Характеры двумерного произведения  $\rho_5$  можно найти из следствия 1 предложения 9 лекции 6:

$$\chi_{\text{reg}} = d_1\chi^{(1)} + d_2\chi^{(2)} + d_3\chi^{(3)} + d_4\chi^{(4)} + d_5\chi^{(5)} \rightarrow \chi^{(5)} = \frac{1}{2}(\chi_{\text{reg}} - \chi^{(1)} - \chi^{(2)} - 3\chi^{(3)} - 3\chi^{(4)}) \quad (132)$$

Характер регулярного произведения можно найти из предложения 8 лекции 6:

$$\chi_{\text{reg}}(e) = |S_4| = 24, \quad \chi_{\text{reg}}(g) = 0, \quad g \neq e \quad (133)$$

$$\chi^{(5)}(e) = \frac{1}{2}(24 - 1 - 1 - 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3) = 2 = d_5 \quad (134)$$

$$\chi^{(5)}((a, b)) = \frac{1}{2}(0 - 1 + 1 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)) = 0 \quad (135)$$

$$\chi^{(5)}((a, b)(c, d)) = \frac{1}{2}(0 - 1 - 1 - 3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1)) = 2 \quad (136)$$

$$\chi^{(5)}((a, b, c)) = \frac{1}{2}(0 - 1 - 1 - 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0) = -1 \quad (137)$$

$$\chi^{(5)}((a, b, c, d)) = \frac{1}{2}(0 - 1 + 1 - 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = 0 \quad (138)$$

Проверим соотношения ортогональности между характерами:

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{24}(1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = 1 \quad (139)$$

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{24}(1 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - 6 \cdot 1) = 0 \quad (140)$$

|              | $e^1$ | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
|--------------|-------|------------|------------------|---------------|------------------|
| $\chi^{(1)}$ | 1     | 1          | 1                | 1             | 1                |
| $\chi^{(2)}$ | 1     | -1         | 1                | 1             | -1               |
| $\chi^{(3)}$ | 3     | 1          | -1               | 0             | -1               |
| $\chi^{(4)}$ | 3     | -1         | -1               | 0             | 1                |
| $\chi^{(5)}$ | 2     | 0          | 2                | -1            | 0                |

Table 2: Таблица характеров группы  $S_4$ 

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 3 + 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 6 \cdot 1) = 0 \quad (141)$$

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 3 - 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 0 \quad (142)$$

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(5)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = 0 \quad (143)$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{24}(1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = 1 \quad (144)$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 3 - 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 0 \quad (145)$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 3 + 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 6 \cdot 1) = 0 \quad (146)$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(5)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = 0 \quad (147)$$

$$\langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 9 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 1 \quad (148)$$

$$\langle \chi^{(3)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 9 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 6 \cdot 1) = 0 \quad (149)$$

$$\langle \chi^{(3)}, \chi^{(5)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 6 + 6 \cdot 0 - 3 \cdot 2 - 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = 0 \quad (150)$$

$$\langle \chi^{(4)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 9 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 1 \quad (151)$$

$$\langle \chi^{(4)}, \chi^{(5)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 6 - 6 \cdot 0 - 3 \cdot 2 - 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = 0 \quad (152)$$

$$\langle \chi^{(5)}, \chi^{(5)} \rangle = \frac{1}{24}(1 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = 1 \quad (153)$$

Рассмотрим  $\rho_6 = \rho_3 \otimes \rho_4$ . По предложению 5 лекции 6 получим:

$$\chi^{(6)} = \chi^{(4)} \cdot \chi^{(5)} \quad (154)$$

|              | $e^1$ | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
|--------------|-------|------------|------------------|---------------|------------------|
| $\chi^{(6)}$ | 9     | -1         | 1                | 0             | -1               |

Воспользуемся алгоритмом разложения на неприводимые:

$$\chi^{(6)} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi^{(6)} \rangle \quad (155)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot 9 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 6 \cdot 1) = 0 \quad (156)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot 9 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 1 \quad (157)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot 27 - 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 1 \quad (158)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot 27 + 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 - 6 \cdot 1) = 1 \quad (159)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot 18 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 1 \quad (160)$$

Таким образом, получаем разложение:

$$\boxed{V_6 = V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus V_5} \quad (161)$$

## Solution

**Statement 19 (Второе соотношение ортогональности для характеров).** Для любых двух классов сопряженности  $C_i, C_j$ , где  $i, j \leq k$  верно:

$$\sum_{\alpha=1}^k \chi^{(\alpha)}(h_i) \overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)} = \delta_{i,j} \frac{|G|}{|C_i|} \quad (162)$$

*Proof.* Разложим  $\gamma_i$  по базису  $\chi^{(\alpha)}$ :

$$\gamma_i = \sum_{\alpha=1}^k \gamma_i^{(\alpha)} \chi^{(\alpha)}, \quad (163)$$

где  $\gamma_i^{(\alpha)}$  можно найти по формуле

$$\gamma_i^{(\alpha)} = \langle \chi^{(\alpha)}, \gamma_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^k \overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)} \gamma_i(h_j) \quad (164)$$

Воспользуемся определением характеристической функции  $\gamma_i$ :

$$\gamma_i(h_j) = \delta_{i,j} \quad (165)$$

Тогда в сумме останутся  $|C_i|$  слагаемых  $\chi^{(\alpha)}(h_i)$ :

$$\gamma_i^{(\alpha)} = \frac{|C_i|}{|G|} \overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)} \quad (166)$$

Подставим в (163):

$$\gamma_i = \sum_{\alpha=1}^k \frac{|C_i|}{|G|} \overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)} \chi^{(\alpha)} = \frac{|C_i|}{|G|} \sum_{\alpha=1}^k \overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)} \chi^{(\alpha)} \quad (167)$$

$$\gamma_i(h_j) = \frac{|C_i|}{|G|} \sum_{\alpha=1}^k \overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)} \chi^{(\alpha)}(h_j) = \delta_{i,j} \quad (168)$$

$$\sum_{\alpha=1}^k \overline{\chi^{(\alpha)}(h_i)} \chi^{(\alpha)}(h_j) = \delta_{i,j} \frac{|G|}{|C_j|} \quad (169)$$

Поменяем индексы  $i$  и  $j$  местами:

$$\sum_{\alpha=1}^k \chi^{(\alpha)}(h_i) \overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)} = \delta_{i,j} \frac{|G|}{|C_i|} \quad (170)$$

□

## 9.2.7 Problems about different setups and $SO(2)$

Упражнение 1.\* Пусть  $A$  - матрица состоящая из одного жорданова блока размера  $n \times n, n > 1$  с собственным значением  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Докажите, что матрица  $\exp(\alpha A)$  не будет диагональной при любом  $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ . Докажите, что при  $\lambda \neq 0$  матрица  $A^k$  не будет диагональной при любом  $k \in \mathbb{N}$ .

**Brsht-7.2.**

а) Напишите таблицу характеров группы  $D_6$ .

б) Сколько существует неприводимых двумерных представлений у группы движений призмы  $D_{6h}$ ? Найдите их характеры.

<sup>1</sup> Обычно формулу суммирования Пуассона пишут в виде

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

для любой достаточно гладкой и убывающей на бесконечности функции  $f$ ,  $\hat{f}$  обозначает преобразование Фурье. Теперь заметим, что это равенство можно написать для обобщенных функций, обобщенная функция  $\delta(x - n)$  примененная к  $f$  дает  $f(n)$ , применение функции  $\delta(x - k)$  к  $\hat{f}$  равносильно умножению на  $e^{2\pi i k x}$ . Итого имеем равенство обобщенных функций (мы тут делаем замену переменных)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikx}$$

У нас функции периодические, поэтому слева стоит просто одна  $\delta$  функция.

**Brsht-7.3.**

Найдите матрицу характеров неприводимых представлений группы  $A_4$ . Опишите разложение ограничений неприводимых представлений  $S_4$  на  $A_4$ . Указание: помимо ограничения представлений  $S_4$ , используйте умение описывать одномерные представления.

**Brsht-7.4.**

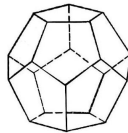
а) Докажите, что порядок группы вращений додекаэдра  $G_0$  равен 60.

б) Найдите порядки элементов этой группы, опишите эти вращения геометрически.

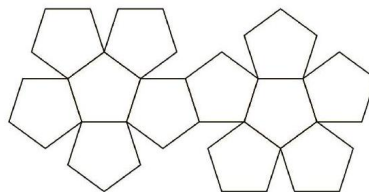
в) Докажите, что  $G_0$  изоморфна группе четных перестановок  $A_5$ .

Указание: разбейте вершины додекаэдра на 5 тетраэдров, так чтобы группа  $G_0$  действовала на этом множестве из 5 элементов.

г) Докажите, что группа всех симметрий додекаэдра  $G$  изоморфна одной из групп  $S_5$  или  $C_2 \times A_5$ . д) Докажите, что группы  $S_5$  и  $C_2 \times A_5$  не изоморфны.



Додекаэдр



Развертка

**Brsht-7.5.**

Разложите пятимерное перестановочное (мономиальное) представление группы  $S_5$  в прямую сумму двух неприводимых.

Указание: разложение устроено аналогично разложению перестановочного представления для группы  $S_3$ . Неприводимость можно доказывать или посчитав скалярный квадрат характера или по определению. Во втором способе можно взять произвольный вектор  $x = \sum x_i e_i$ ,  $\sum x_i = 0$  и действуя на него  $S_5$  и беря линейные комбинации получить все вектора вида  $e_1 - e_j$  т.е. получить базис подпредставления.

**Brsht-7.6.**

\* а) Найдите классы сопряженности в группе  $A_5$ . Указание: удобно использовать геометрическое описание как вращения додекаэдра.

б) Найдите три различных неприводимых представления группы  $A_5$ .

в) Найдите таблицу характеров  $A_5$ .

## Solution

[\*]

**Statement 20.** Пусть  $A$  – матрица, состоящая из одного жорданова блока размера  $n \times n$ ,  $n > 1$  с собственным значением  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Матрица  $\exp(\alpha A)$  не будет диагональной при любом  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ . При  $\lambda \neq 0$  матрица  $A^k$  не будет диагональной при любом  $k \in \mathbb{N}$ .

*Proof.* Жорданова клетка  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (171)$$

$$A = \lambda E + B \quad (172)$$

где  $B$  – нильпотентная матрица:  $B^n = 0$ . Домножение  $B^i$  на  $B$  сдвигает “диагональ единиц” на одну позицию вверх. Найдём экспоненту матрицы  $B$ :

$$e^B = E + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{B^i}{i!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (173)$$

$$e^{\alpha B} = E + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\alpha B)^i}{i!} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} & \dots & \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & \frac{\alpha^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{\alpha^{n-4}}{(n-4)!} & \frac{\alpha^{n-3}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (174)$$

$$e^{\alpha A} = e^{\alpha \lambda E} e^{\alpha B} = e^{\alpha \lambda} e^{\alpha B} = e^{\alpha \lambda} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} & \dots & \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & \frac{\alpha^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{\alpha^{n-4}}{(n-4)!} & \frac{\alpha^{n-3}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (175)$$

Данная матрица не является диагональной при  $\alpha \neq 0$ .

$$A^k = (\lambda E + B)^k = \sum_{i=1}^{\min(k, n-1)} C_k^i \lambda^{n-i} B^i = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{n-2} \lambda^{k-n+2} & C_k^{n-1} \lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \dots & C_k^{n-3} \lambda^{k-n+3} & C_k^{n-2} \lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \dots & C_k^{n-4} \lambda^{k-n+4} & C_k^{n-3} \lambda^{k-n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

где подразумевается, что  $C_k^i = 0$  при  $i > k$ . При  $k \geq 1$  и  $\lambda \neq 0$  матрица  $A^k$  не диагональна.  $\square$

## Solution

•[a)]

Классы сопряжённости групп  $D_n$  описаны в задаче 4.3, п. а. В  $D_6$  6 классов сопряжённости:  $\{e\}$ ,  $\{r^{-1}, r^1\}$ ,  $\{r^2, r^{-2}\}$ ,  $\{r^3\}$ ,  $\{sr^{2b}\}$ ,  $\{sr^{2b+1}\}$ . Значит и число неприводимых представлений равно 6. Найдём их размерности:  $|D_6| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 = 12$ . Единственный возможный вариант:  $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$ ,  $d_5 = d_6 = 2$ .

Найдём все одномерные представления (их всего 4). Коммутанты  $D_n$  описаны в задаче 4.3, п. 6.  $[D_6, D_6] = \{e, r^2, r^4\}$ . Факторгруппа  $D_6/[D_6, D_6] \simeq C_2 \times C_2$ , т.е.  $|D_6/[D_6, D_6]| = |C_2 \times C_2| = 4$  (ещё раз получаем, что всего 4 одномерных неприводимых представления). Любое одномерное неприводимое представление – представление фактора по коммутанту. Первое одномерное неприводимое представление – *тривиальное*: все элементы  $D_6$  переходят в 1.

$$\boxed{\rho_1(r) = \rho_1(s) = 1} \quad (176)$$

Для отражений верно, что  $(sr^b)^2 = sr^b sr^b = r^{-b} r^b = e$ . Поэтому  $\rho(sr^b)^2 = \rho((sr^b)^2) = \rho(e) = 1$  и  $\rho(sr^b) = \pm 1$ .  $\rho(sr^b) = 1$  соответствует тривиальному представлению, а  $\rho(sr^b) = -1$  – второму одномерному представлению. Т.е. во втором одномерном представлении все повороты перейдут в 1, а отражения – в  $-1$ .

$$\boxed{\rho_2(r) = 1, \quad \rho_2(s) = -1} \quad (177)$$

Произведение двух нечётных поворотов – чётный поворот. Поэтому все чётные повороты можно перевести в 1, а нечётные – в  $-1$ . Отражения  $sr^{2b}$  можно перевести в 1, а  $sr^{2b+1}$  – в  $-1$  (третье представление) или наоборот (четвёртое представление). При этом будут выполняться необходимые тождества:  $\rho(r^a r^b) = \rho(r^{a+b})$ ,  $\rho(r^a sr^b) = \rho(sr^{b-a}) = \rho(sr^{a+b}) = \rho(sr^a r^b)$ ,  $\rho(sr^a sr^b) = \rho(r^{b-a})$ .

$$\boxed{\rho_3(r^2) = 1, \quad \rho_3(r) = -1, \quad \rho_3(sr^2) = 1, \quad \rho_3(sr) = -1} \quad (178)$$

$$\boxed{\rho_4(r^2) = 1, \quad \rho_4(r) = -1, \quad \rho_4(sr^2) = -1, \quad \rho_4(sr) = 1} \quad (179)$$

Найдём 2 оставшихся двумерных неприводимых представления. Для них должны выполняться тождества:  $\rho(r^b)^6 = \rho((r^b)^6) = \rho(e) = 1$  (матрицы поворота),  $\rho(sr^b)^2 = \rho((sr^b)^2) = \rho(e) = 1$  (матрица отражения),  $\rho(r)\rho(s)\rho(r)\rho(s) = \rho(rsrs) = \rho(e) = 1$ .

$$\boxed{\rho_5(r) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{6} & -\sin \frac{2\pi}{6} \\ \sin \frac{2\pi}{6} & \cos \frac{2\pi}{6} \end{pmatrix}, \quad \rho_5(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad (180)$$

$$\boxed{\rho_6(r) = \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{6} & -\sin \frac{4\pi}{6} \\ \sin \frac{4\pi}{6} & \cos \frac{4\pi}{6} \end{pmatrix}, \quad \rho_6(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad (181)$$

|              | $e^1$ | $r^1, r^{-1}$ | $r^2, r^{-2}$ | $r^3$ | $sr^{2b}$ | $sr^{2b+1}$ |
|--------------|-------|---------------|---------------|-------|-----------|-------------|
| $\chi^{(1)}$ | 1     | 1             | 1             | 1     | 1         | 1           |
| $\chi^{(2)}$ | 1     | 1             | 1             | 1     | -1        | -1          |
| $\chi^{(3)}$ | 1     | -1            | 1             | -1    | 1         | -1          |
| $\chi^{(4)}$ | 1     | -1            | 1             | -1    | -1        | 1           |
| $\chi^{(5)}$ | 2     | 1             | -1            | -2    | 0         | 0           |
| $\chi^{(6)}$ | 2     | -1            | -1            | 2     | 0         | 0           |

Table 3: Таблица характеров группы  $D_6$

Ещё раз проверим, что все найденные представления являются неприводимыми. Для этого воспользуемся критерием  $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(i)} \rangle = 1$ :

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 1 \quad (182)$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 1 \quad (183)$$

$$\langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 1 \quad (184)$$

$$\langle \chi^{(4)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 1 \quad (185)$$

$$\langle \chi^{(5)}, \chi^{(5)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 1 \quad (186)$$

$$\langle \chi^{(6)}, \chi^{(6)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 1 \quad (187)$$



## •[6])

Группа  $D_{nh}$  рассмотрена в задаче 3.3, п. а.  $D_{nh} = D_n \times C_2$ . По теореме 1 лекции 7 все неприводимые представления  $D_{6h}$  можно получить как  $\rho^{D_6} \boxtimes \rho^{C_2}$ , где  $\rho^{D_6}$  и  $\rho^{C_2}$  – неприводимые представления  $D_6$  и  $C_2$  соответственно. В группе  $C_2$  всего 2 элемента:  $e$  и  $r$ , каждый из которых является классом сопряжённости. Значит всего 2 неприводимых представления. Найдём их размерности:  $|C_2| = d_1^2 + d_2^2 = 2$ . Единственный возможный вариант:  $d_1 = d_2 = 1$ .

$$\rho_1(e) = 1, \quad \rho_1(r) = 1 \quad (188)$$

$$\rho_2(e) = 1, \quad \rho_2(r) = -1 \quad (189)$$

|              | $e^1$ | $r, {}^1$ |
|--------------|-------|-----------|
| $\chi^{(1)}$ | 1     | 1         |
| $\chi^{(2)}$ | 1     | -1        |

Table 4: Таблица характеров группы  $C_2$ 

$$\dim(V \otimes U) = \dim V \cdot \dim U \quad (190)$$

Значит для получения двумерных неприводимых представлений нужно перемножить два двумерных представления  $D_6$  с двумя одномерными представлениями  $C_2$ . Получится всего 4 двумерных подпространства  $D_{6h}$ .

Их характеры можно найти по формуле

$$\chi_{\rho^{D_6} \boxtimes \rho^{C_2}}(g^{D_6}, g^{C_2}) = \chi_{\rho^{D_6}}(g^{D_6}) \cdot \chi_{\rho^{C_2}}(g^{C_2}), \quad (191)$$

где  $g^{D_6} \in D_6$  и  $g^{C_2} \in C_2$ .

|                                              | $(e, e)^1$ | $(r^1, e), (r^{-1}, e)^2$ | $(r^2, e), (r^{-2}, e)^2$ | $(r^3, e)^1$ | $(sr^{2b}, e)^3$ | $(sr^{2b+1}, e)^3$ |
|----------------------------------------------|------------|---------------------------|---------------------------|--------------|------------------|--------------------|
| $\chi_{\rho_5^{D_6} \boxtimes \rho_1^{C_2}}$ | 2          | 1                         | -1                        | -2           | 0                | 0                  |
| $\chi_{\rho_6^{D_6} \boxtimes \rho_1^{C_2}}$ | 2          | -1                        | -1                        | 2            | 0                | 0                  |
|                                              | $(e, r)^1$ | $(r^1, r), (r^{-1}, r)^2$ | $(r^2, r), (r^{-2}, r)^2$ | $(r^3, r)^1$ | $(sr^{2b}, r)^3$ | $(sr^{2b+1}, r)^3$ |
| $\chi_{\rho_5^{D_6} \boxtimes \rho_1^{C_2}}$ | 2          | 1                         | -1                        | -2           | 0                | 0                  |
| $\chi_{\rho_6^{D_6} \boxtimes \rho_1^{C_2}}$ | 2          | -1                        | -1                        | 2            | 0                | 0                  |
|                                              | $(e, e)^1$ | $(r^1, e), (r^{-1}, e)^2$ | $(r^2, e), (r^{-2}, e)^2$ | $(r^3, e)^1$ | $(sr^{2b}, e)^3$ | $(sr^{2b+1}, e)^3$ |
| $\chi_{\rho_5^{D_6} \boxtimes \rho_2^{C_2}}$ | 2          | 1                         | -1                        | -2           | 0                | 0                  |
| $\chi_{\rho_6^{D_6} \boxtimes \rho_2^{C_2}}$ | 2          | -1                        | -1                        | 2            | 0                | 0                  |
|                                              | $(e, r)^1$ | $(r^1, r), (r^{-1}, r)^2$ | $(r^2, r), (r^{-2}, r)^2$ | $(r^3, r)^1$ | $(sr^{2b}, r)^3$ | $(sr^{2b+1}, r)^3$ |
| $\chi_{\rho_5^{D_6} \boxtimes \rho_2^{C_2}}$ | -2         | -1                        | 1                         | 2            | 0                | 0                  |
| $\chi_{\rho_6^{D_6} \boxtimes \rho_2^{C_2}}$ | -2         | 1                         | 1                         | -2           | 0                | 0                  |

Table 5: Двумерные неприводимые представления  $D_{6h}$ **Solution**

Классы сопряжённости  $A_4$  описаны в задаче 3.2, п. б. Всего классов сопряжённости 4, значит и неприводимых представлений 4. Найдём их размерности:  $|A_4| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 12$ . Единственный возможный вариант:  $d_1 = d_2 = d_3 = 1, d_4 = 3$ .

Найдём все одномерные представления. Для этого найдём коммутант  $A_4$ . В  $A_4$  всего 4 коммутатора, они порождают коммутант:  $[A_4, A_4] = \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ . Факторгруппа  $A_4/[A_4, A_4] \simeq \mathbb{Z}_3$ , т.е.  $|A_4/[A_4, A_4]| = |\mathbb{Z}_3| = 3$  (ещё раз получаем, что всего 2 одномерных неприводимых представления). Любое одномерное неприводимое представление – представление фактора по коммутанту. Первое одномерное неприводимое представление – *тривиальное*: все элементы  $A_4$  переходят в 1.

$$\rho_1(g) = 1, \quad \forall g \in A_4 \quad (192)$$

Второе одномерное неприводимое представление – циклы из группы  $(1, 2, 3)$  переходят в корень 3 степени из 1 ( $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ), циклы из группы  $(1, 3, 2)$  – в другой корень 3 степени из 1 ( $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ ) (квадрат цикла из группы  $(1, 2, 3)$  равен циклу из группы  $(1, 3, 2)$  и наоборот). Произведения транспозиций  $(a, b)(c, d)$  перейдут в 1, поскольку произведение циклов длины 3 из разных группы равно произведению транспозиций и  $\rho((a, b)(c, d)) = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1$ .

$$\rho_2((a, b)(c, d)) = 1, \quad \rho_2((1, 2, 3)) = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad \rho_2((1, 3, 2)) = e^{i\frac{4\pi}{3}} \quad (193)$$

Третье одномерное неприводимое представление – циклы из группы  $(1, 2, 3)$  переходят в корень 3 степени из 1 ( $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ ), циклы из группы  $(1, 3, 2)$  – в другой корень 3 степени из 1 ( $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ) (квадрат цикла из группы  $(1, 2, 3)$  равен циклу из группы  $(1, 3, 2)$  и наоборот). Произведения транспозиций  $(a, b)(c, d)$  перейдут в 1, поскольку произведение циклов длины 3 из разных группы равно произведению транспозиций и  $\rho((a, b)(c, d)) = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1$ .

$$\rho_3((a, b)(c, d)) = 1, \quad \rho_3((1, 2, 3)) = e^{i\frac{4\pi}{3}}, \quad \rho_3((1, 3, 2)) = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad (194)$$

где через  $(1, 2, 3)$  обозначены все циклы длины 3, содержащиеся в одном с  $(1, 2, 3)$  классе сопряжённости, через  $(1, 3, 2)$  аналогично.

Трёхмерное неприводимое представление  $A_4$  можно получить как ограничение трёхмерных неприводимых представлений  $S_4$  на  $A_4$  (они сольются в одно).

|              | $e^1$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(1, 2, 3)^4$         | $(1, 3, 2)^4$         |
|--------------|-------|------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\chi^{(1)}$ | 1     | 1                | 1                     | 1                     |
| $\chi^{(2)}$ | 1     | 1                | $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ | $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ |
| $\chi^{(3)}$ | 1     | 1                | $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ | $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ |
| $\chi^{(4)}$ | 3     | -1               | 0                     | 0                     |

Table 6: Таблица характеров группы  $A_4$

Ещё раз проверим, что все найденные представления являются неприводимыми. Для этого воспользуемся критерием  $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(i)} \rangle = 1$ :

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = 1 \quad (195)$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} + 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 1 \quad (196)$$

$$\langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} + 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}) = 1 \quad (197)$$

$$\langle \chi^{(4)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{12}(1 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0) = 1 \quad (198)$$

Разложим ограничения неприводимых представлений  $S_4$  на  $A_4$ :

|                    | $e^1$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(1, 2, 3)^4$ | $(1, 3, 2)^4$ |
|--------------------|-------|------------------|---------------|---------------|
| $\bar{\chi}^{(1)}$ | 1     | 1                | 1             | 1             |
| $\bar{\chi}^{(2)}$ | 1     | 1                | 1             | 1             |
| $\bar{\chi}^{(3)}$ | 3     | -1               | 0             | 0             |
| $\bar{\chi}^{(4)}$ | 3     | -1               | 0             | 0             |
| $\bar{\chi}^{(5)}$ | 2     | 2                | -1            | -1            |

Table 7: Ограничение неприводимых представлений  $S_4$  на  $A_4$

Как видно,

$$\bar{\chi}^{(1)} = \bar{\chi}^{(2)} = \chi^{(1)} \quad (199)$$

$$\bar{\chi}^{(3)} = \bar{\chi}^{(4)} = \chi^{(4)} \quad (200)$$

Разложим  $\bar{\chi}^{(5)}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\bar{\chi}^{(5)} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \bar{\chi}^{(5)} \rangle \quad (201)$$

$$a_1 = \frac{1}{12}(1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1) = 0 \quad (202)$$

$$a_2 = \frac{1}{12}(1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}) = 1 \quad (203)$$

$$a_3 = \frac{1}{12}(1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} - 4 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 1 \quad (204)$$

$$a_4 = \frac{1}{12}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0) = 0 \quad (205)$$

Таким образом, двумерное пространство оказалось приводимым:

$$\boxed{\bar{\chi}^{(5)} = \chi^{(2)} + \chi^{(3)}} \quad (206)$$

## Solution

### •[a)]

**Statement 21.** Порядок группы вращений додекаэдра  $G_0$  равен 60.

*Proof.* Пусть  $x$  – произвольная грань додекаэдра. Симметриями она может быть переведена в любую другую, а значит  $|Gx| = 12$  (в додекаэдре 12 граней). Вращения, переводящие грань додекаэдра (правильный пятиугольник) в себя, образуют группу  $C_5$ .  $|G_x| = |C_5| = 5$ . Таким образом,

$$\boxed{|G_0| = |G_x||Gx| = 60} \quad (207)$$

□

### •[б)]

Различные собственными движения, сохраняющие додекаэдр:

- Id (1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с додекаэдром).
- $r_1$  (12 шт., порядок 5) – повороты на  $\pm \frac{2\pi}{5}$  вокруг прямых  $l_1$ , проходящих через центры противоположных граней.
- $r_2$  (12 шт., порядок 5) – повороты на  $\pm \frac{4\pi}{5}$  вокруг прямых  $l_1$ , проходящих через центры противоположных граней.
- $r_3$  (20 шт., порядок 3) – повороты на  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  вокруг прямых  $l_2$ , проходящих через противоположные вершины.
- $r_4$  (15 шт., порядок 2) – повороты на  $\pi$  вокруг прямых  $l_3$ , проходящих через середины противоположных рёбер.

### •[в)]

**Statement 22.**  $G_0$  изоморфна группе чётных перестановок  $A_5$ .

*Proof.* Для доказательства изоморфизма выпишем соответствие между перестановками различных циклических типов в  $A_5$  5 тетраэдров и различными движениями, сохраняющими додекаэдр:

- $e$  (единичный, 1 шт.) – Id.
- $(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 4, 5, 3), (1, 2, 5, 3, 4), (1, 3, 2, 5, 4), (1, 3, 4, 2, 5), (1, 3, 5, 4, 2), (1, 4, 2, 3, 5), (1, 4, 3, 5, 2), (1, 4, 5, 2, 3), (1, 5, 2, 4, 3), (1, 5, 3, 2, 4), (1, 5, 4, 3, 2)$  (циклы длины 5, 12 шт.) –  $r_1$ .
- $(1, 2, 3, 5, 4), (1, 2, 4, 3, 5), (1, 2, 5, 4, 3), (1, 3, 2, 4, 5), (1, 3, 4, 5, 2), (1, 3, 5, 2, 4), (1, 4, 2, 5, 3), (1, 4, 3, 2, 5), (1, 4, 5, 3, 2), (1, 5, 2, 3, 4), (1, 5, 3, 4, 2), (1, 5, 4, 2, 3)$  (циклы длины 5, 12 шт.) –  $r_2$ .
- $(a, b, c)$  (циклы длины 3, 20 шт.) –  $r_3$ .
- $(a, b)(c, d)$  (произведение транспозиций, 15 шт.) –  $r_4$ .

Таким образом, построено однозначное соответствие между перестановками и движениями, сохраняющее групповые операции, а значит изоморфизм групп построен. □

### •[г)]

**Statement 23.** Группа всех симметрий додекаэдра  $G$  изоморфна группе  $C_2 \times A_5$ .

*Proof.* В  $G$  тождественное движение и центральная симметрия образуют  $C_2$ . Все движения из  $G$  можно представить в виде произведения собственных движений из  $G_0$  и элементов  $C_2$ . Подгруппы  $G_0$  и  $C_2$  коммутируют и пересекаются только по  $e$ . По предложению 7 лекции 4 предложение доказано. □

•[д)]

**Statement 24.** Группы  $S_5$  и  $C_2 \times A_5$  не изоморфны.

*Proof.* В группе  $S_5$  максимальный порядок среди всех элементов 6 (у элементов  $(a, b, c)(d, e)$ ). В группе  $C_2 \times A_5$  есть элемент порядка 10 (у элементов  $((a, b, c, d, e), s)$ , где  $s$  – центральная симметрия). Значит, эти группы изоморфными быть не могут.  $\square$

**Solution**

По предложению 7 лекции 3 перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда имеют одинаковую циклическую структуру. Значит, в  $S_5$  всего 7 классов сопряжённости:  $\{e, (a, b), (a, b, c), (a, b, c, d), (a, b, c, d, e), (a, b)(c, d), (a, b, c)(d, e)\}$ . Рассмотрим перестановочное представление  $S_5$ . Оно имеет два нетривиальных подпредставления

$$U_1 = \left\{ \sum_{i=1}^5 x_i e_i \mid x_1 = x_2 = \dots = x_5 \right\}, \quad U_2 = \left\{ \sum_{i=1}^5 x_i e_i \mid \sum_{i=1}^5 x_i = 0 \right\} \quad (208)$$

$$\mathbb{C}^5 = U_1 \oplus U_2 \quad (209)$$

Любое одномерное представление неприводимо. Докажем, что  $U_2$  также является неприводимым. Для этого воспользуемся базисом:

$$e' = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'' = e_1 - e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (210)$$

$$e''' = e_1 - e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'''' = e_1 - e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (211)$$

Любой вектор может быть выражен через базисные вектора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = -x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (212)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = -x_2 e' - x_3 e'' - x_4 e''' - x_5 e'''' \quad (213)$$

Выпишем, во что будут переходить базисные векторы при домножении слева на  $\rho(g)$  (из перестановочного представления):  $\rho(e)e' = (1, -1, 0, 0, 0)^T = e'$ ,  $\rho(e)e'' = (1, 0, -1, 0, 0)^T = e''$ ,  $\rho(e)e''' = (1, 0, 0, -1, 0)^T = e'''$ ,  $\rho(e)e'''' = (1, 0, 0, 0, -1)^T = e''''$ ,  $\rho((1, 2))e' = (-1, 1, 0, 0, 0)^T = -e'$ ,  $\rho((1, 2))e'' = (0, 1, -1, 0, 0)^T = e'' - e'$ ,  $\rho((1, 2))e''' = (0, 1, 0, -1, 0)^T = e''' - e'$ ,  $\rho((1, 2))e'''' = (0, 1, 0, 0, -1)^T = e'''' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3))e' = (0, 1, -1, 0, 0)^T = e'' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3))e'' = (-1, 1, 0, 0, 0)^T = -e'$ ,  $\rho((1, 2, 3))e''' = (0, 1, 0, -1, 0)^T = e''' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3))e'''' = (0, 1, 0, 0, -1)^T = e'''' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3, 4))e' = (0, 1, -1, 0, 0)^T = e'' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3, 4))e'' = (-1, 1, 0, 0, 0)^T = -e'$ ,  $\rho((1, 2, 3, 4))e''' = (0, 1, 0, -1, 0)^T = e''' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3, 4))e'''' = (-1, 1, 0, 0, 0)^T = -e'$ ,  $\rho((1, 2, 3, 4, 5))e' = (0, 1, -1, 0, 0)^T = e'' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3, 4, 5))e'' = (0, 1, 0, -1, 0)^T = e''' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3, 4, 5))e''' = (0, 1, 0, 0, -1)^T = e'''' - e'$ ,  $\rho((1, 2)(3, 4))e' = (-1, 1, 0, 0, 0)^T = -e'$ ,  $\rho((1, 2)(3, 4))e'' = (0, 1, 0, -1, 0)^T = e''' - e'$ ,  $\rho((1, 2)(3, 4))e''' = (0, 1, -1, 0, 0)^T = e'' - e'$ ,  $\rho((1, 2)(3, 4))e'''' = (0, 1, 0, 0, -1)^T = e'''' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3)(4, 5))e' = (0, 1, -1, 0, 0)^T = e'' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3)(4, 5))e'' = (-1, 1, 0, 0, 0)^T = -e'$ ,  $\rho((1, 2, 3)(4, 5))e''' = (0, 1, 0, -1, 0)^T = e''' - e'$ ,  $\rho((1, 2, 3)(4, 5))e'''' = (0, 1, 0, 0, -1)^T = e'''' - e'$ .

Представление  $U_2$ :

$$e \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1, 2) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1, 2, 3) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1, 2, 3, 4) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1, 2, 3, 4, 5) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (214)$$

$$(1, 2)(3, 4) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1, 2, 3)(4, 5) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (215)$$

Характер представления  $U_2$ :

|              | $e^1$ | $(a, b)^{10}$ | $(a, b, c)^{20}$ | $(a, b, c, d)^{30}$ | $(a, b, c, d, e)^{24}$ | $(a, b)(c, d)^{15}$ | $(a, b, c)(d, e)^{20}$ |
|--------------|-------|---------------|------------------|---------------------|------------------------|---------------------|------------------------|
| $\chi^{(4)}$ | 4     | 2             | 1                | 0                   | -1                     | 0                   | -1                     |

Проверим, что все представление  $U_2$  являются неприводимыми. Для этого воспользуемся критерием  $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(i)} \rangle = 1$ :

$$\langle \chi^{(4)}, \chi^{(4)} \rangle = \frac{1}{120} (1 \cdot 16 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 0 + 24 \cdot 1 + 15 \cdot 0 + 20 \cdot 1) = 1 \quad (216)$$

Таким образом, пятимерное перестановочное произведение разложено в прямую сумму двух неприводимых:

$$\mathbb{C}^5 = U_1 \oplus U_2 \quad (217)$$

## Solution

•[a\*] Проверим, какие классы сопряжённости из  $S_5$  перейдут в  $A_5$ . Конечно, класс  $\{e\}$  сохранится. 2 класса, состоящие из произведений транспозиций и циклов длины 3, сохраняются также. Рассмотрим циклы длины 5.  $|A_5| = 60$ , а значит класс сопряжённости (орбита) не может состоять из 24 элементов (60 на 24 не делится). В  $A_5$  невозможно получить каждый цикл длины 5 из каждого, т.е. циклы длины 5 создадут 2 класса сопряжённости в  $A_5$ , которые соответствуют поворотам на  $\pm \frac{2\pi}{5}$  и  $\pm \frac{4\pi}{5}$  вокруг прямых, проходящих через центры противоположных граней додекаэдра (по 12 в каждом классе):  $\{(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 4, 5, 3), (1, 2, 5, 3, 4), (1, 3, 2, 5, 4), (1, 3, 4, 2, 5), (1, 3, 5, 4, 2), (1, 4, 2, 3, 5), (1, 4, 3, 5, 2), (1, 4, 5, 2, 3), (1, 5, 2, 4, 3), (1, 5, 3, 2, 4), (1, 5, 4, 3, 2)\}$ ;  $\{(1, 2, 3, 5, 4), (1, 2, 4, 3, 5), (1, 2, 5, 4, 3), (1, 3, 2, 4, 5), (1, 3, 4, 5, 2), (1, 3, 5, 2, 4), (1, 4, 2, 5, 3), (1, 4, 3, 2, 5), (1, 4, 5, 3, 2), (1, 5, 2, 3, 4), (1, 5, 3, 4, 2), (1, 5, 4, 2, 3)\}$ . Таким образом, всего будет 5 классов сопряженности в  $A_5$ .

## •[6]

3 различных неприводимых представления группы  $A_5$ :

- Тривиальное одномерное представление. Все элементы  $A_5$  переходят в 1.
- Первое трёхмерное представление, соответствующее вращениям додекаэдра:

$$e \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a, b)(c, d) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi & 0 \\ \sin \pi & \cos \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1, 2, 3, 4, 5) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} & -\sin \frac{2\pi}{5} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1, 2, 3, 5, 4) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} & -\sin \frac{4\pi}{5} & 0 \\ \sin \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Второе трёхмерное представление, соответствующее вращениям додекаэдра (соответствует другому способу нумерования тетраэдров):

$$e \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a, b)(c, d) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi & 0 \\ \sin \pi & \cos \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1, 2, 3, 4, 5) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{5} & -\sin \frac{4\pi}{5} & 0 \\ \sin \frac{4\pi}{5} & \cos \frac{4\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1, 2, 3, 5, 4) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} & -\sin \frac{2\pi}{5} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

•[B]

Классы сопряжённости  $A_5$  описаны в п. а. Всего классов сопряжённости 5, значит и неприводимых представлений 5. Найдём их размерности:  $|A_5| = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 60$ . Единственный возможный вариант:  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = d_3 = 3$ ,  $d_4 = 4$ ,  $d_5 = 5$ .

Единственное одномерное представление  $\rho_1$  – тривиальное. Оба трёхмерных представления  $\rho_2$  и  $\rho_3$   $A_5$  рассмотрены в п. б. Четырёхмерное представление в  $A_5$   $\rho_4$  – ограничение представления  $U_2$  (см. задачу 7.5) на  $A_5$ .

Характеры пятимерного произведения  $\rho_5$  можно найти из следствия 1 предложения 9 лекции 6:

$$\chi_{\text{reg}} = d_1\chi^{(1)} + d_2\chi^{(2)} + d_3\chi^{(3)} + d_4\chi^{(4)} + d_5\chi^{(5)} \rightarrow \chi^{(5)} = \frac{1}{5}(\chi_{\text{reg}} - \chi^{(1)} - 3\chi^{(2)} - 3\chi^{(3)} - 4\chi^{(4)}) \quad (218)$$

Характер регулярного произведения можно найти из предложения 8 лекции 6:

$$\chi_{\text{reg}}(e) = |A_5| = 60, \quad \chi_{\text{reg}}(g) = 0, \quad g \neq e \quad (219)$$

$$\chi^{(5)}(e) = \frac{1}{5}(60 - 1 - 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - 4 \cdot 4) = 5 = d_5 \quad (220)$$

$$\chi^{(5)}((a, b, c)) = \frac{1}{5}(0 - 1 - 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1) = -1 \quad (221)$$

$$\chi^{(5)}((a, b)(c, d)) = \frac{1}{5}(0 - 1 - 3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 0) = 1 \quad (222)$$

$$\chi^{(5)}((1, 2, 3, 4, 5)) = \frac{1}{5}(0 - 1 - 3 \cdot (1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5}) - 3 \cdot (1 + 2 \cos \frac{4\pi}{5}) - 4 \cdot (-1)) = 0 \quad (223)$$

$$\chi^{(5)}((1, 2, 3, 5, 4)) = \frac{1}{5}(0 - 1 - 3 \cdot (1 + 2 \cos \frac{4\pi}{5}) - 3 \cdot (1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5}) - 4 \cdot (-1)) = 0 \quad (224)$$

В последних 2 уравнениях использовано равенство:

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}}{2} + \frac{e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}}}{2} = \frac{1}{2}(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}}) = \frac{e^{-i\frac{4\pi}{5}}}{2} \frac{e^{i\frac{8\pi}{5}} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1} = -\frac{1}{2} \quad (225)$$

Таблица характеров  $A_5$ :

|              | $e^1$ | $(a, b, c)^{20}$ | $(1, 2, 3, 4, 5)^{12}$      | $(1, 2, 3, 5, 4)^{12}$      | $(a, b)(c, d)^{15}$ |
|--------------|-------|------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------|
| $\chi^{(1)}$ | 1     | 1                | 1                           | 1                           | 1                   |
| $\chi^{(2)}$ | 3     | 0                | $1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ | $1 + 2 \cos \frac{4\pi}{5}$ | -1                  |
| $\chi^{(3)}$ | 3     | 0                | $1 + 2 \cos \frac{4\pi}{5}$ | $1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ | -1                  |
| $\chi^{(4)}$ | 4     | 1                | -1                          | -1                          | 0                   |
| $\chi^{(5)}$ | 5     | -1               | 0                           | 0                           | 1                   |

Table 8: Таблица характеров группы  $A_5$

Проверим представления на неприводимость, для этого воспользуемся критерием  $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(i)} \rangle = 1$ :

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{60}(1 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 15 \cdot 1) = 1 \quad (226)$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{60} \left( 1 \cdot 9 + 20 \cdot 0 + 12 \cdot \left( 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} \right)^2 + 12 \cdot \left( 1 + 2 \cos \frac{4\pi}{5} \right)^2 + 15 \cdot 1 \right) = 1 \quad (227)$$

$$\langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{60} \left( 1 \cdot 9 + 20 \cdot 0 + 12 \cdot \left( 1 + 2 \cos \frac{4\pi}{5} \right)^2 + 12 \cdot \left( 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} \right)^2 + 15 \cdot 1 \right) = 1 \quad (228)$$

Неприводимость  $\chi^{(4)}$  проверена в задаче 7.5.

$$\langle \chi^{(5)}, \chi^{(5)} \rangle = \frac{1}{60}(1 \cdot 25 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 15 \cdot 1) = 1 \quad (229)$$

## 9.2.8 Problems about Lie groups, Lie algebras

### Brsht-8.y1

Группа  $U(1)$  действует на матрицах  $2 \times 2$  по формуле

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

Рассматривая  $a, b, c, d$  как координаты в четырехмерном пространстве мы получаем четырехмерное представление  $U(1)$ . Найдите его характер, разложите его на неприводимые.

### Solution

Перемножим матрицы:

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha a} & e^{i\alpha b} \\ e^{-i\alpha c} & e^{i\alpha d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & e^{2i\alpha} b \\ e^{-2i\alpha} c & d \end{pmatrix}$$

Рассматривая  $a, b, c, d$  как координаты в четырёхмерном пространстве, получим

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow e^{2i\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow e^{-2i\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда для  $e^{i\alpha} \in U(1)$  верно, что

$$\rho(e^{i\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (230)$$

Характер этого перестановочного представления:

$$\chi(\alpha) = 2 + e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha} \quad (231)$$

$$\boxed{\chi(\alpha) = 2(1 + \cos 2\alpha)} \quad (232)$$

Все неприводимые представления абелевых групп одномерны. Неприводимые представления  $U(1)$  были рассмотрены на лекции 7:

$$\chi^{(k)}(\alpha) = e^{ik\alpha} \quad (233)$$

Разложение характера в ряд Фурье:

$$\chi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \chi^{(k)}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(\alpha) \overline{\chi^{(k)}(\alpha)} d\alpha \quad (234)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 + e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}) e^{-ik\alpha} d\alpha \quad (235)$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 + e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}) d\alpha = \frac{1}{2\pi} (2 \cdot 2\pi) = 2 \quad (236)$$

$$c_{\pm 2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 + e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}) e^{\mp 2i\alpha} d\alpha = \frac{1}{2\pi} (2\pi) = 1 \quad (237)$$

Все остальные  $c_k = 0$  как интегралы по целому числу периодов от синусов и косинусов.

$$\boxed{\chi = 2\chi^{(0)} + \chi^{(-2)} + \chi^{(2)}} \quad (238)$$

**Brsht-8.2. Свойства  $U(n)$** 

Найдите число (вещественных) уравнений задающих группу унитарных матриц  $U(n)$ . Найдите касательно пространство  $T_E U(n)$ . Проверьте, что полученное множество матриц замкнуто относительно коммутатора.

**Solution**

Группа унитарных матриц  $U(n)$  состоит из таких матриц  $g_{n \times n} \in U(n)$ , что  $g^* g = g g^* = E$ .  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ . Распишем условие  $g g^* = E$  через столбцы  $g_i$ :  $g_i \bar{g}_j^T = \delta_{ij}$ . При  $i = j$ :  $g_i \bar{g}_i^T = |g_i|^2 = 1$  – всего  $n$  вещественных уравнений; при  $i \neq j$ :  $g_i \bar{g}_j^T = 0$  – всего  $\frac{n(n-1)}{2}$  комплексных или  $n(n-1)$  вещественных уравнений. Всего вещественных уравнений:

$$\boxed{n + n(n-1) = n^2} \quad (239)$$

Рассмотрим все возможные гладкие кривые  $g(t) \in U(n)$ , где  $g(0) = E$ . При малых  $t$  эта кривая имеет вид  $g(t) = E + At + o(t)$ , где  $A = g'(0)$ .  $g g^* = (E + At + o(t))(E + A^* t + o(t)) = E + (A + A^*)t + o(t) = E$ , значит  $A + A^* = 0$ . Всё  $T_E U(n)$  состоит из таких  $A$ , значит  $T_E U(n)$  – пространство антиэрмитовых матриц размера  $n \times n$ .

**Statement 25.**  $T_E U(n)$  замкнуто относительно коммутатора.

*Proof.* Пусть  $A, B \in T_E U(n)$ , тогда  $A^* = -A$ ,  $B^* = -B$ .

$$[A, B] + [A, B]^* = AB - BA + (AB - BA)^* = AB - BA + B^* A^* - A^* B^* = AB - BA + BA - AB = 0$$

Значит,  $[A, B] \in T_E U(n)$  и  $T_E U(n)$  замкнуто относительно коммутатора.  $\square$

**Brsht-8.3. Изоморфизмы**

- а) Докажите, что алгебра Ли  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$  изоморфна алгебре векторов  $\mathbb{R}^3$ .  
 б) Обозначим через  $SU(2)$  группу унитарных матриц с определителем 1, через  $\mathfrak{su}(2)$  ее алгебру Ли. Докажите, что  $\mathfrak{su}(2)$  тоже изоморфна  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ .  
 в)\* Докажите, что алгебра Ли  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  не изоморфна  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ . Указание: а) Выберите удачный базис в  $\mathfrak{so}(3)$  и проверьте совпадение структурных констант.

**Solution****•[a)]**

**Statement 26.** Алгебра Ли  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$  изоморфна алгебре векторов  $\mathbb{R}^3$ .

*Proof.* Для матриц  $[A, B] = AB - BA$ . Алгебра Ли  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$  состоит из всех кососимметричных матриц размера  $3 \times 3$  (пример 1, п. в лекции 8). Базис в  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ :

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (240)$$

$$[I_1, I_2] = I_3, \quad [I_1, I_3] = -I_2, \quad [I_2, I_3] = I_1 \quad (241)$$

Структурные константы:

$$c_{ij}^k = \epsilon_{ijk} \quad (242)$$

Для векторов в  $\mathbb{R}^3$  коммутатор – векторное произведение. Пусть  $e_1, e_2, e_3$  – базис в  $\mathbb{R}^3$ .

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k \quad (243)$$

Структурные константы:

$$c_{ij}^k = \epsilon_{ijk} \quad (244)$$

$\square$



## •[6)]

**Statement 27.** Алгебра Ли  $\mathfrak{su}(2)$  изоморфна алгебре  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ .

*Proof.* Пусть  $g \in SU(2)$ , тогда  $gg^* = E$  и  $\det g = 1$ . Рассмотрим малое приращение

$$g = E + t\delta g + o(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (245)$$

Подставим это в уравнение на  $g$ :

$$(E + t\delta g + o(t))(E + t\delta g + o(t))^* = (E + t\delta g + o(t))(E + t\delta g^* + o(t)) = E + t(\delta g + \delta g^*) + o(t) = E$$

$$\det g = 1 + t \operatorname{tr} \delta g + o(t) = 1 \quad (246)$$

$$\delta g = -\delta g^*, \quad \operatorname{tr} \delta g = 0 \quad (247)$$

Таким образом, алгебра Ли  $\mathfrak{su}(2)$  состоит из антиэрмитовых матриц с нулевым следом. Пусть  $A \in \mathfrak{su}(2)$ , тогда общий вид такой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & -ia_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (248)$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \quad (249)$$

Базис в  $\mathfrak{su}(2)$ :

$$I_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (250)$$

$$[I_1, I_2] = I_3, \quad [I_1, I_3] = -I_2, \quad [I_2, I_3] = I_1 \quad (251)$$

Структурные константы:

$$c_{ij}^k = \epsilon_{ijk} \quad (252)$$

□

## •[B)\*]

**Statement 28.** Алгебра Ли  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  не изоморфна алгебре  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ .

*Proof.* Алгебра Ли  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  состоит из всех матриц размера  $2 \times 2$  с нулевым следом. Базис в  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ :

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (253)$$

$$[I_1, I_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (254)$$

Т.е. коммутатор  $[I_1, I_2]$  пропорционален  $I_2$ , чего точно не может быть в векторном произведении. □

## Решериеен Берштейна пункта в)

*Доказательство.* Алгебр Ли  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  состоит из матриц  $2 \times 2$  с нулевым следом. Естественным базисом в ней являются матрицы

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутаторы в этом базисе равны

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Но в алгебре Ли  $\mathbb{R}^3$  (изоморфной  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ ) не может быть чтобы векторное произведение двух ненулевых векторов было пропорционально третьему. А для  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  так получается. Значит, они не изоморфны.

## 9.2.9 Problems about symmetric tensors. Lie groups $SO(3)$ , $SU(2)$

**Brsht-9.y1.**

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Задайте матрицами  $S^2A$ ,  $\Lambda^2A$ , найдите их след.

**Solution**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A \otimes A = \begin{pmatrix} a_{11}A & a_{12}A \\ a_{21}A & a_{22}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{12} & a_{22}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}^2 & a_{21}a_{22} & a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (255)$$

Пусть  $e_1, e_2$  – базис в векторном пространстве  $V$ . Базисные векторы пространства  $V \otimes V$ :

$$e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (256)$$

$$S^2V = \langle e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \rangle \quad (257)$$

$$A \otimes A(e_1 \otimes e_1) = \begin{pmatrix} a_{11}^2 \\ a_{11}a_{21} \\ a_{11}a_{21} \\ a_{21}^2 \end{pmatrix} = a_{11}^2 e_1 \otimes e_1 + a_{11}a_{21}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + a_{21}^2 e_2 \otimes e_2 \quad (258)$$

$$A \otimes A(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = \begin{pmatrix} 2a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \\ a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \\ 2a_{21}a_{22} \end{pmatrix} = 2a_{11}a_{12}e_1 \otimes e_1 + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + 2a_{21}a_{22}e_2 \otimes e_2 \quad (259)$$

$$A \otimes A(e_2 \otimes e_2) = \begin{pmatrix} a_{12}^2 \\ a_{12}a_{22} \\ a_{12}a_{22} \\ a_{22}^2 \end{pmatrix} = a_{12}^2 e_1 \otimes e_1 + a_{12}a_{22}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + a_{22}^2 e_2 \otimes e_2 \quad (260)$$

Таким образом,  $S^2A$  можно задать матрицей:

$$S^2A = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 2a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}^2 & 2a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (261)$$

$$\text{tr } S^2A = a_{11}^2 + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + a_{22}^2 \quad (262)$$

$$\Lambda^2V = \langle e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \rangle \quad (263)$$

$$A \otimes A(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \quad (264)$$

Таким образом,  $\Lambda^2A$  можно задать матрицей:

$$\Lambda^2A = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad (265)$$

$$\text{tr } \Lambda^2A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (266)$$

Как видно, предположение 3 лекции 9 в данном упражнении выполняется ( $\text{tr } A = a_{11} + a_{22}$ ,  $\text{tr } A^2 = a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2$ ):

$$\text{tr } S^2A = \frac{1}{2}((\text{tr } A)^2 + \text{tr } A^2), \quad \text{tr } \Lambda^2A = \frac{1}{2}((\text{tr } A)^2 - \text{tr } A^2) \quad (267)$$

**Brsht-9.y2.**

Используя ряды для экспоненты, синуса и косинуса, проверьте, что любой элемент группы  $SU(2)$  имеет вид  $\exp(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))$ .

**Brsht-9.3.**

- а) Напишите матрицу обратную для матрицы  $g$  заданной формулой (1). Как изменились параметры  $\vec{n}$  и  $\alpha$ ?
- б) Напишите формулу (матрицу для  $3 \times 3$ ) присоединенного действия матрицы  $g = \exp(i\alpha\sigma_3)$ , проверьте, что получилось ортогональное преобразование (в алгебре Ли  $\mathfrak{su}(2)$  удобно взять базис  $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ ).
- в) Покажите, что общему  $g$  заданному формулой (1) в присоединенном представлении будет соответствовать ортогональное преобразование.
- г) Является ли полученный гомоморфизм из группы  $SU(2)$  в группу  $SO(3)$  сюръективным, какое у него ядро?

**Solution Берштейна**

- б) Напомним вид  $\sigma$  матриц

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad g(i\sigma_3)g^{-1} = i\sigma_3$$

$$g(i\sigma_1)g^{-1} = g \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{2i\alpha} \\ ie^{-2i\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \cos(2\alpha)i\sigma_1 - \sin(2\alpha)i\sigma_2$$

$$g(i\sigma_2)g^{-1} = g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\alpha} \\ -e^{-2i\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \sin(2\alpha)i\sigma_1 + \cos(2\alpha)i\sigma_2.$$

Т.е. действие  $\exp(i\alpha\sigma_3)$  является поворотом на угол  $2\alpha$  относительно оси натянутой на  $i\sigma_3$ .

- в) Прямым вычислением можно показать, что сопряжение элементом  $g$  вида (1) дает поворот вокруг оси  $\vec{n}$  на угол  $2\alpha$ . Из этого следует, что получилось ортогональное преобразование.

Приведем другой способ доказать ортогональность, который не требует вычислений. А именно, нам надо доказать что присоединенное представление группы  $SU(2)$  сохраняет некоторое положительно определенное скалярное произведение. Определим скалярное произведение на пространстве алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$  по формуле  $(A, B) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(AB)$ . Тогда, легко видеть что в базисе из матриц  $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$  эти скалярные произведения имеют вид  $(i\sigma_a, i\sigma_b) = \delta_{ab}$ , то есть получилось положительно определенное скалярное произведение. Теперь проверим, что оно является инвариантным

$$(gAg^{-1}, gBg^{-1}) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(gAg^{-1}gBg^{-1}) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(gABg^{-1}) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(AB) = (A, B)$$

Значит присоединенное действие  $SU(2)$  сохраняет положительно определенное скалярное произведение, т.е. образ лежит в  $SO(3)$ .

Еще один (близкий) способ, это построить на алгебре Ли  $\mathfrak{su}(2)$  не скалярное произведение, а квадратичную форму  $A \mapsto \det A$ . Далее можно показать, что присоединенное представление сохраняет эту форму, и условие, того что группа сохраняет квадратичную форму эквивалентно тому, что группа сохраняет скалярное произведение.

- г) Сюръективность следует из того, что сопряжение элементом  $g$  вида (1) дает поворот вокруг оси  $\vec{n}$  на угол  $2\alpha$  и все элементы группы  $SO(3)$  имеют такой вид.

Можно показать сюръективность не проводя вычисления для общего  $g$ , а воспользоваться тем, что действие элементов  $\exp(i\alpha\sigma_a)$  будут поворотами относительно соответствующих осей и такие повороты порождают группу  $SO(3)$ .

Ядро - это элементы  $g \in SU(2)$  такие, что  $g\sigma_ag^{-1} = \sigma_a$  для любого  $a = 1, 2, 3$ . Легко видеть, что этим условиям удовлетворяют только скалярные матрицы, таких в  $SU(2)$  две:  $E$  и  $-E$ . Они образуют подгруппу из двух элементов изоморфную  $C_2$ .

Замечание. Из этой задачи и теоремы о гомоморфизме следует, что  $SO(3) \simeq SU(2)/C_2$ . У групп  $SO(3)$  и  $SU(2)$  изоморфные алгебры Ли, но как группы они различны, отличаются на фактор по дискретной подгруппе. Мы уже знаем, что  $SU(2)$  можно отождествить с трехмерной сферой, тогда  $SO(3)$  отождествится с трехмерным проективным пространством.

**Brsht-9.4.**

а) Рассмотрим алгебру  $\mathfrak{so}(n)$ . Она имеет естественный базис  $J_{ab} = E_{ab} - E_{ba}$ , где  $E_{ab}$  это матрица у которых 1 стоит на месте  $(a, b)$ , а в остальные места стоит 0. Разложите коммутатор  $[J_{ab}, J_{cd}]$  по этому базису.

б)\* Докажите, что алгебра Ли  $\mathfrak{so}(4)$  изоморфна прямой сумме  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ .

Указание: выразите через  $J_{ab}$  другие образующие  $J_1, J_2, J_3$  и  $J'_1, J'_2, J'_3$  так, что каждая тройка удовлетворяет соотношениям  $\mathfrak{so}(3)$ , а  $[J, J'] = 0$ .

**Solution a)**

Рассмотрим алгебру  $\mathfrak{so}(n)$ . Она имеет естественный базис  $J_{ik} = E_{ik} - E_{ki}$ , где  $E_{ik}$  это матрица у которых 1 стоит на месте  $(i, k)$ , а в остальных местах стоит 0. Разложите коммутатор  $[J_{ab}, J_{cd}]$  по этому базису.

**Solution б)**

Докажите, что алгебра Ли  $\mathfrak{so}(4)$  изоморфна прямой сумме  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ . Указание: выразите через  $J_{ab}$  другие образующие  $J_1, J_2, J_3$  и  $J'_1, J'_2, J'_3$  так, что каждая тройка удовлетворяет соотношениям  $\mathfrak{so}(3)$ , а  $[J, J'] = 0$ .

Решение. а) Сначала напишем коммутатор матричных единиц

$$[E_{ab}, E_{cd}] = \delta_{bc}E_{ad} - \delta_{ad}E_{cb}$$

Отсюда следует, что

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{bc}J_{ad} + \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{ac}J_{db} + \delta_{bd}J_{ca}$$

Заметим, что при перестановке  $a$  и  $b$  левая часть меняет знак (так как  $J_{ab} = -J_{ba}$ ). Можно проверить, что этим свойством обладает и правая часть. Эта симметрия, вместе с аналогичным свойством при перестановке  $c, d$ , фиксирует знаки слагаемых в правой части.

б) Введем элементы

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}(J_{12} + J_{34}), & J_2 &= \frac{1}{2}(J_{14} + J_{23})J_3 = \frac{1}{2}(J_{13} + J_{42}), \\ J'_1 &= \frac{1}{2}(J_{12} - J_{34}), & J'_2 &= \frac{1}{2}(-J_{14} + J_{23})J'_3 = \frac{1}{2}(J_{13} - J_{42}). \end{aligned}$$

Тогда легко видеть, что  $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J_c$ ,  $[J'_a, J'_b] = \epsilon_{abc}J'_c$  и  $[J_a, J'_b] = 0$ .

**Solution**

Пусть  $g \in SU(2)$ , тогда

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (268)$$

$$\begin{cases} a = a_0 + ia_3, \\ b = a_2 + ia_1. \end{cases} \rightarrow g = a_0E + ia_1\sigma_1 + ia_2\sigma_2 + ia_3\sigma_3 \quad (269)$$

где  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  – матрицы Паули.

Пусть  $a_0 = \cos \alpha$  и  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sin^2 \alpha$ . Введём  $n_j$  так, что  $a_j = n_j \sin \alpha$  и  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ .

$$g = E \cos \alpha + i \sin \alpha (\vec{n}, \vec{\sigma}) \quad (270)$$

Разложим  $\exp(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))$  в ряд Тейлора:

$$\exp(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma}))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n} (\vec{n}, \vec{\sigma})^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1} (\vec{n}, \vec{\sigma})^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (271)$$

$$(\vec{n}, \vec{\sigma})^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2 + n_3^2 \sigma_3^2 + n_1 n_2 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1) + n_1 n_3 (\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + n_2 n_3 (\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2) \quad (272)$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \rightarrow (\vec{n}, \vec{\sigma})^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2 + n_3^2 \sigma_3^2 = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)E = E \quad (273)$$

$$(\vec{n}, \vec{\sigma})^{2n} = E, \quad (\vec{n}, \vec{\sigma})^{2n+1} = (\vec{n}, \vec{\sigma}) \quad (274)$$

Подставим (274) в (271):

$$\exp(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n} E}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1} (\vec{n}, \vec{\sigma})}{(2n+1)!} = E \cos \alpha + i \sin \alpha (\vec{n}, \vec{\sigma}) \quad (275)$$

Таким образом,

$$\boxed{g = \exp(i\alpha(\vec{n}, \vec{\sigma})), \quad \forall g \in SU(2)} \quad (276)$$

## Solution

### •[a)]

$$g = E \cos \alpha + i \sin \alpha (\vec{n}, \vec{\sigma}) \quad (277)$$

$$g^{-1} = g^* = (E \cos \alpha + i \sin \alpha (\vec{n}, \vec{\sigma}))^* = E \cos \alpha - i \sin \alpha (\vec{n}, \vec{\sigma}^*) \quad (278)$$

$$\boxed{g^{-1} = E \cos \alpha - i \sin \alpha (\vec{n}, \vec{\sigma})} \quad (279)$$

### •[б)]

$$g = \exp(i\alpha\sigma_3) = E \cos \alpha + i \sin \alpha \sigma_3, \quad g^{-1} = E \cos \alpha - i \sin \alpha \sigma_3 \quad (280)$$

Рассмотрим действие  $g$  на базисе  $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$  алгебры Ли  $\mathfrak{su}(2)$ .

$$\begin{aligned} gi\sigma_1g^{-1} &= (E \cos \alpha + i \sin \alpha \sigma_3)i\sigma_1(E \cos \alpha - i \sin \alpha \sigma_3) = i\sigma_1 \cos^2 \alpha + i\sigma_3\sigma_1\sigma_3 \sin^2 \alpha - \\ &\quad - \sin \alpha \cos \alpha \sigma_3\sigma_1 + \sin \alpha \cos \alpha \sigma_1\sigma_3 = i\sigma_1(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2i\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = i\sigma_1 \cos 2\alpha - i\sigma_2 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gi\sigma_2g^{-1} &= (E \cos \alpha + i \sin \alpha \sigma_3)i\sigma_2(E \cos \alpha - i \sin \alpha \sigma_3) = i\sigma_2 \cos^2 \alpha + i\sigma_3\sigma_2\sigma_3 \sin^2 \alpha - \\ &\quad - \sin \alpha \cos \alpha \sigma_3\sigma_2 + \sin \alpha \cos \alpha \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2i\sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha = i\sigma_2 \cos 2\alpha + i\sigma_1 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gi\sigma_3g^{-1} &= (E \cos \alpha + i \sin \alpha \sigma_3)i\sigma_3(E \cos \alpha - i \sin \alpha \sigma_3) = i\sigma_3 \cos^2 \alpha + i\sigma_3^3 \sin^2 \alpha - \\ &\quad - \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = i\sigma_3 \end{aligned}$$

Таким образом, матрица присоединённого действия

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad (281)$$

соответствует повороту на  $2\alpha$  вокруг оси, проходящей через  $i\sigma_3$ . Это преобразование является ортогональным:

$$AA^T = E \quad (282)$$

### •[в)]

Покажем, что присоединённое представление сохраняет скалярное произведение:  $(A, B) = c \text{Tr} AB$ , где  $c = \text{const}$ :

$$(gAg^{-1}, gBg^{-1}) = c \text{Tr}(gAg^{-1}gBg^{-1}) = c \text{Tr}(gABg^{-1}) = c \text{Tr}(AB) = (A, B) \quad (283)$$

Найдём  $c$ . Вычислим скалярные произведения базисных векторов:  $(i\sigma_j, i\sigma_k) = -2c\delta_{jk} = 1$ . Тогда  $c = -\frac{1}{2}$ . Поскольку преобразование сохраняет скалярное произведение, то оно является ортогональным.

### •[г)]

**Statement 29.** Полученный гомоморфизм  $\varphi$  из группы  $SU(2)$  в  $SO(3)$  является сюръективным.

*Proof.* По аналогии с п. а, действия  $g = \exp(i\alpha\sigma_j)$  являются поворотами на  $2\alpha$  вокруг оси, проходящей через  $i\sigma_j$ . Из таких поворотов состоит любой элемент  $SO(3)$ , а значит гомоморфизм  $\varphi$  сюръективен.  $\square$

$$\text{Ker } \varphi = \{g \in SU(2) : gi\sigma_jg^{-1} = i\sigma_j\} \quad (284)$$

$$\cos 2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow g = \cos \pi n = (-1)^n E \quad (285)$$

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \{E, -E\} \simeq C_2} \quad (286)$$

### Solution

#### •[a)]

Естественный базис алгебры Ли  $\mathfrak{so}(n)$ :

$$J_{ab} = E_{ab} - E_{ba} \quad (287)$$

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= [E_{ab} - E_{ba}, E_{cd} - E_{dc}] = (E_{ab} - E_{ba})(E_{cd} - E_{dc}) - (E_{cd} - E_{dc})(E_{ab} - E_{ba}) = \\ &= E_{ab}E_{cd} - E_{ba}E_{cd} - E_{ab}E_{dc} + E_{ba}E_{dc} - E_{cd}E_{ab} + E_{dc}E_{ab} + E_{cd}E_{ba} - E_{dc}E_{ba} = \\ &= \delta_{bc}E_{ad} - \delta_{ac}E_{bd} - \delta_{bd}E_{ac} + \delta_{ad}E_{bc} - \delta_{ad}E_{cb} + \delta_{ac}E_{db} + \delta_{bd}E_{ca} - \delta_{bc}E_{da} = \\ &= \delta_{bc}(E_{ad} - E_{da}) + \delta_{ad}(E_{bc} - E_{cb}) + \delta_{ac}(E_{db} - E_{bd}) + \delta_{bd}(E_{ca} - E_{ac}) \end{aligned} \quad (288)$$

$$\boxed{[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{bc}J_{ad} + \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{ac}J_{db} + \delta_{bd}J_{ca}} \quad (289)$$

#### •[б)\*]

**Statement 30.** Алгебра Ли  $\mathfrak{so}(4)$  изоморфна прямой сумме  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ .

*Proof.* Естественный базис алгебры Ли  $\mathfrak{so}(4)$ :  $J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}$ . Пусть

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{34}), \quad J_2 = \frac{1}{2}(J_{14} + J_{23}), \quad J_3 = \frac{1}{2}(J_{13} - J_{24}) \quad (290)$$

$$J'_1 = \frac{1}{2}(J_{12} - J_{34}), \quad J'_2 = \frac{1}{2}(J_{13} + J_{24}), \quad J'_3 = \frac{1}{2}(J_{14} - J_{23}) \quad (291)$$

$$[J_1, J_2] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{14}] + [J_{34}, J_{14}] + [J_{12}, J_{23}] + [J_{34}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(J_{42} + J_{13} + J_{13} + J_{42}) = \frac{1}{2}(J_{13} - J_{24}) = J_3$$

$$[J_1, J_3] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{13}] + [J_{34}, J_{13}] - [J_{12}, J_{24}] - [J_{34}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(J_{32} + J_{41} - J_{14} - J_{23}) = -\frac{1}{2}(J_{14} - J_{23}) = -J_2$$

$$[J_2, J_3] = \frac{1}{4}([J_{14}, J_{13}] + [J_{23}, J_{13}] - [J_{14}, J_{24}] - [J_{23}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(J_{34} + J_{12} + J_{12} + J_{34}) = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{34}) = J_1$$

Следовательно,

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}J_k \rightarrow \langle J_1, J_2, J_3 \rangle \simeq \mathfrak{so}(3) \quad (292)$$

$$[J'_1, J'_2] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{13}] + [J_{12}, J_{24}] - [J_{34}, J_{13}] - [J_{34}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(-J_{23} + J_{14} + J_{14} - J_{23}) = \frac{1}{2}(J_{14} - J_{23}) = J'_3$$

$$[J'_1, J'_3] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{14}] - [J_{34}, J_{14}] - [J_{12}, J_{23}] + [J_{34}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(-J_{24} - J_{13} - J_{13} - J_{24}) = -\frac{1}{2}(J_{13} + J_{24}) = -J'_2$$

$$[J'_2, J'_3] = \frac{1}{4}([J_{13}, J_{14}] + [J_{24}, J_{14}] - [J_{13}, J_{23}] - [J_{24}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(-J_{34} + J_{12} + J_{12} - J_{34}) = \frac{1}{2}(J_{12} - J_{34}) = J'_1$$

Следовательно,

$$[J'_i, J'_j] = \epsilon_{ijk}J'_k \rightarrow \langle J'_1, J'_2, J'_3 \rangle \simeq \mathfrak{so}(3) \quad (293)$$

$$[J_1, J'_1] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{12}] + [J_{34}, J_{12}] - [J_{12}, J_{34}] - [J_{34}, J_{34}]) = 0$$

$$[J_1, J'_2] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{13}] + [J_{34}, J_{13}] + [J_{12}, J_{24}] + [J_{34}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(-J_{23} - J_{14} + J_{14} + J_{23}) = 0$$

$$[J_1, J'_3] = \frac{1}{4}([J_{12}, J_{14}] + [J_{34}, J_{14}] - [J_{12}, J_{23}] - [J_{34}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(-J_{24} + J_{13} - J_{13} + J_{24}) = 0$$

$$[J_2, J'_1] = \frac{1}{4}([J_{14}, J_{12}] + [J_{23}, J_{12}] - [J_{14}, J_{34}] - [J_{23}, J_{34}]) = \frac{1}{4}(J_{24} - J_{13} - J_{13} - J_{24}) = 0$$

$$[J_2, J'_2] = \frac{1}{4}([J_{14}, J_{13}] + [J_{23}, J_{13}] + [J_{14}, J_{24}] + [J_{23}, J_{24}]) = \frac{1}{4}(J_{34} + J_{12} - J_{12} - J_{34}) = 0$$

$$[J_2, J'_3] = \frac{1}{4}([J_{14}, J_{14}] + [J_{23}, J_{14}] - [J_{14}, J_{23}] - [J_{23}, J_{23}]) = 0$$

$$[J_3, J'_1] = \frac{1}{4}([J_{13}, J_{12}] - [J_{24}, J_{12}] - [J_{13}, J_{34}] + [J_{24}, J_{34}]) = \frac{1}{4}(J_{23} + J_{14} - J_{14} - J_{23}) = 0$$

$$[J_3, J'_2] = \frac{1}{4}([J_{13}, J_{13}] - [J_{24}, J_{13}] + [J_{13}, J_{24}] - [J_{24}, J_{24}]) = 0$$

$$[J_3, J'_3] = \frac{1}{4}([J_{13}, J_{14}] - [J_{24}, J_{14}] - [J_{13}, J_{23}] + [J_{24}, J_{23}]) = \frac{1}{4}(-J_{34} - J_{12} + J_{12} + J_{34}) = 0$$

Следовательно,

$$[J_i, J'_j] = 0 \quad (294)$$

Таким образом,

$$\boxed{\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)} \quad (295)$$

□

## 9.2.10 Problems about the representation of the $\mathfrak{su}(2)$ algebra

### Brsht-10.1.

а) Докажите, что  $J_+ J_- = -J^2 - J_3^2 - iJ_3$ .

б) Найдите значение  $a_m$  в предположении, что базис  $v_{\lambda, m}$  ортонормированный (уравнения фиксируют только  $|a_m|$ , можно еще домножить вектора ортонормированного базиса на фазу чтобы  $a_m^2$  стало вещественным).

### Brsht-10.2.

Найдите разложение тензорного произведения  $\pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2}$  на неприводимые представления  $SU(2)$ .

Указание: напишите характер и представьте его в виде суммы характеров  $\pi_j$

### Brsht-10.3.

Докажите, что представление  $\pi_j$  в котором действие генераторов  $iJ_3, J_+, J_-$  задано формулами (4) является неприводимым.

Указание: докажите, сначала, что в любом инвариантном подпространстве должен содержаться старший вектор  $v_{\lambda, j}$ .

## Solution

### •[a]

**Statement 31.**  $J_+ J_- = -J^2 - J_3^2 - iJ_3$ .

*Proof.*

$$J^2 = -J_1^2 - J_2^2 - J_3^2, \quad J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2 \quad (296)$$

$$J_+ J_- = (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) = J_1^2 - iJ_1 J_2 + iJ_2 J_1 + J_2^2 = J_1^2 + J_2^2 - i[J_1, J_2] \quad (297)$$

$$\boxed{J_+ J_- = -J^2 - J_3^2 - iJ_3} \quad (298)$$

□

### •[6]

$$J_+ J_- = \text{diag}(a_{j-1} b_j, a_{j-2} b_{j-1}, \dots, a_{-j} b_{1-j}, 0) \quad (299)$$

Подставим доказанное в п. а равенством  $J_+ J_- = -J^2 - J_3^2 - iJ_3$  и  $b_{m+1} = -\bar{a}_m$ :

$$\text{diag}(a_{j-1} b_j, a_{j-2} b_{j-1}, \dots, a_{-j} b_{1-j}, 0) = -J^2 - J_3^2 - iJ_3 \quad (300)$$

$$\text{diag}(-|a_{j-1}|^2, -|a_{j-2}|^2, \dots, -|a_{-j}|^2, 0) = \text{diag}(-\lambda - j^2 - j, \dots, -\lambda + j^2 + j, 0) \quad (301)$$

$$|a_{j-1-k}|^2 = \lambda + j - k - (j - k)^2 = 2j - k - k^2 + 2jk = 2j(k + 1) - k(k + 1) \quad (302)$$

$$|a_{j-1-k}| = \sqrt{(2j - k)(k + 1)} \quad (303)$$

Домножим векторы ортонормированного базиса на фазу, чтобы  $a_m^2 \in \mathbb{R}$ .

$$\boxed{a_{j-1-k} = \pm \sqrt{(2j - k)(k + 1)}} \quad (304)$$

### Solution

По предложению 6 лекции 10 характеры неприводимых представлений  $\pi_j$  группы  $SU(2)$  равны:

$$\chi_j(\varphi) = \frac{\sin((2j+1)\varphi)}{\sin \varphi} \quad (305)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}}}(\varphi) &= \chi_{\frac{1}{2}}^2(\varphi) = \frac{\sin^2 2\varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{2(1 + \cos 2\varphi) \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{2 \sin \varphi + \sin 3\varphi - \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin \varphi + \sin 3\varphi}{\sin \varphi} \\ \chi_{\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}}}(\varphi) &= \chi_0(\varphi) + \chi_1(\varphi) \end{aligned} \quad (306)$$

Таким образом,  $\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}}$  раскладывается как

$$\boxed{\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}} = \pi_0 \oplus \pi_1} \quad (307)$$

### Solution

**Statement 32.** Представление  $\pi_j$ , в котором действие генераторов  $iJ_3, J_+, J_-$  задано формулами:

$$iJ_3 \rightarrow \begin{pmatrix} j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -j+1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -j \end{pmatrix}, \quad (308)$$

$$J_+ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_{j-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{-j} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_{1-j} & 0 \end{pmatrix}, \quad (309)$$

является неприводимым.

*Proof.* Пусть  $U \subset V$  – инвариантное относительно  $iJ_3, J_+, J_-$  подпространство,  $u_1, \dots, u_t$  – его базис. Разложим векторы  $u_i$  по базису  $v_{\lambda, k}$ :

$$u_i = \sum_{k=-j}^j h_k v_{\lambda, k} \quad (310)$$

В лекции 10 показано, что  $J_+$  нильпотентный, поэтому  $\exists$  минимальное  $n$ :  $J_+^n u_i = 0$ .

$$J_+^{n-1} u_j = h v_{\lambda, j} \in U \rightarrow v_{\lambda, j} \in U \quad (311)$$

Применением  $J_-$  из  $v_{\lambda, j}$  можно получить все  $v_{\lambda, k}$ . Таким образом,  $U = V$  и в  $V$  нет инвариантных подпространств и представление  $\pi_j$  является неприводимым.  $\square$

## 9.2.11 Problems about representations of groups $SO(3)$ и $SU(2)$

### Brsht-11.y1.

а) Разложите тензорное произведение  $\pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2}$  на неприводимые. б) Найдите кратность вхождения тривиального представления в  $\pi_{1/2}^{\otimes 101}$ .

### Solution

•[a]

В задаче 10.2 показано, что

$$\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}} = \pi_0 \oplus \pi_1 \quad (312)$$

По предложению 3 лекции 11  $\pi_{\frac{1}{2}} \otimes (\pi_0 \oplus \pi_1) = \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_{\frac{3}{2}}$ . Таким образом,

$$\boxed{\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}} = \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_{\frac{3}{2}}} \quad (313)$$



•[6]

По предложению 3 лекции 11

$$\pi_0 \otimes \pi_j = \pi_j, \quad \pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_j = \pi_{j+\frac{1}{2}} \oplus \pi_{j-\frac{1}{2}}, \quad j > 0 \quad (314)$$

При тензорном умножении  $\pi_{\frac{1}{2}}$  на себя образуется  $\pi_0$ . Далее при умножении на  $\pi_{\frac{1}{2}}$   $\pi_0$  пропадает (превращается в  $\pi_{\frac{1}{2}}$ ). После этого  $\pi_0$  вновь образуются из произведений  $\pi_{\frac{1}{2}} \otimes \pi_{\frac{1}{2}}$ . Затем они пропадут и т.д. Т.е. наличие  $\pi_0$  определяется чётностью степени  $\pi_{\frac{1}{2}}$ : при нечётных степенях кратность равна 0. Поскольку 101 – нечётное число, то кратность вхождения тривиального представления в  $\pi_{\frac{1}{2}}^{101}$  равна 0.

**Brsht-11.2.**

Обозначим через  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n$  пространство однородных многочленов степени  $n$  от трех переменных  $x_1, x_2, x_3$ . Группа  $SO(3)$  действует на пространстве  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n$  по формуле

$$P(x_1, x_2, x_3) \rightarrow P((x_1, x_2, x_3)g)$$

Пусть  $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$  оператор Лапласа (здесь  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ). Пусть  $H_n$  пространство гармонических функций степени  $n$ , т.е. ядро оператора  $\Delta : \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n \rightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_{n-2}$ .

а) Найдите размерности и базис пространств  $H_0, H_1, H_2, H_3$ .

б) Докажите, что оператор  $\Delta$  является инвариантным относительно действия группы  $SO(3)$ . Выведите из этого, что пространства  $H_n$  являются инвариантными подпространствами относительно группы  $SO(3)$ .

в) Докажите, что отображение

$$t_{i_1 \dots i_n} \rightarrow P(x) = t_{i_1 \dots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

осуществляет изоморфизм между пространством симметричных бесследовых тензоров в  $S^n \mathbb{C}^3$  и пространством гармонических полиномов степени  $n$ .

г)\* Найдите размерность пространства  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n$ . Докажите, что  $\Delta$  является сюръективным отображением. Найдите размерность  $H_n$ .

•[a]

Произвольный многочлен  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_0$ :

$$P_0(x_1, x_2, x_3) = a_1 \quad (315)$$

$$\Delta P_0 = 0 \rightarrow H_0 = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_0, H_0 = \langle 1 \rangle \quad (316)$$

$$\boxed{\dim H_0 = 1} \quad (317)$$

Произвольный многочлен  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1$ :

$$P_1(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad (318)$$

$$\Delta P_1 = 0 \rightarrow H_1 = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1, H_1 = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \quad (319)$$

$$\boxed{\dim H_1 = 3} \quad (320)$$

Произвольный многочлен  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_2$ :

$$P_2(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_1 x_3 + a_6 x_2 x_3 \quad (321)$$

$$\Delta P_2 = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 \quad (322)$$

$$H_2 = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_2 \text{ при } a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad (323)$$

$$H_2 = \langle x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_3^2, x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_3 \rangle \quad (324)$$

$$\boxed{\dim H_2 = 5} \quad (325)$$

Произвольный многочлен  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_3$ :

$$P_3(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_1^2 x_2 + a_5 x_1 x_2^2 + a_6 x_1^2 x_3 + a_7 x_1 x_3^2 + a_8 x_2^2 x_3 + a_9 x_2 x_3^2 + a_{10} x_1 x_2 x_3$$

$$\Delta P_3 = 6a_1 x_1 + 6a_2 x_2 + 6a_3 x_3 + 2a_4 x_2 + 2a_5 x_1 + 2a_6 x_3 + 2a_7 x_1 + 2a_8 x_3 + 2a_9 x_2 \quad (326)$$

$$H_3 = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_3 \text{ при } \begin{cases} 3a_1 + a_5 + a_7 = 0, \\ 3a_2 + a_4 + a_9 = 0, \\ 3a_3 + a_6 + a_8 = 0. \end{cases} \quad (327)$$

$$H_3 = \langle x_1(x_2^2 - x_3^2), x_2(x_1^2 - x_3^2), x_3(x_1^2 - x_2^2), x_1(x_1^2 - 3x_2^2), x_2(x_2^2 - 3x_1^2), x_3(x_3^2 - x_1^2), x_1 x_2 x_3 \rangle \quad (328)$$

$$\boxed{\dim H_3 = 7} \quad (329)$$

## •[6)]

**Statement 33.** Оператор Лапласа  $\Delta$  является инвариантным относительно действия группы  $SO(3)$ .

*Proof.* Группа  $SO(3)$  действует на пространстве  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n$  по формуле

$$P(x_1, x_2, x_3) \rightarrow P((x_1, x_2, x_3)g) \quad (330)$$

Это можно переписать в виде:

$$x'_j = \sum_{i=1}^3 x_i g_{ij}, \quad \sum_{j=1}^3 g_{ij} (g_{jk})^T = \sum_{j=1}^3 g_{ij} g_{kj} = \delta_{ik} \quad (331)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} \right) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} = g_{ik} g_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} \quad (332)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^3 g_{ik} g_{ij} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} = \delta_{jk} \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_k} = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j'^2} = \Delta' \quad (333)$$

Таким образом, оператор Лапласа  $\Delta$  является инвариантным относительно действия группы  $SO(3)$ .  $\square$

Следствие: Пространства  $H_n$  являются инвариантными подпространствами относительно группы  $SO(3)$ .

*Proof.* Пусть  $P(x_1, x_2, x_3) \in H_n$ , тогда  $\Delta P = 0$ . По предложению 33:  $\Delta' P = \Delta P = 0$ , значит  $P(x'_1, x'_2, x'_3) \in H_n$  и пространства  $H_n$  являются инвариантными подпространствами относительно группы  $SO(3)$ .  $\square$

## •[B)]

**Statement 34.** Отображение

$$t_{i_1 \dots i_n} \rightarrow P(x) = t_{i_1 \dots i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n} \quad (334)$$

осуществляет изоморфизм между пространством симметричных бесследовых тензоров в  $S^n \mathbb{C}^3$  и пространством гармонических полиномов степени  $n$ .

*Proof.* Поскольку все операции линейные, то отображение является гомоморфизмом. Рассмотрим многочлен

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^3 t_{i_1, \dots, i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n} \quad (335)$$

$$\Delta P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^3 t_{i_1, \dots, i_n} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=j+1}^3 \sum_{l=j+1}^n x_{i_1} \dots \bar{x}_{i_j} \dots \bar{x}_{i_k} \dots x_{i_n} \delta_{i_j, j} \delta_{i_k, k}, \quad (336)$$

где  $\bar{x}_{i_j}$  обозначает, что множителя  $x_{i_j}$  нет.

$$\Delta P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^3 t_{i_1, \dots, i_n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n x_{i_1} \dots \bar{x}_{i_j} \dots \bar{x}_{i_k} \dots x_{i_n} \delta_{i_j, i_k} \quad (337)$$

$$\Delta P(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i_j, i_k=1}^3 t_{i_1, \dots, i_n} \delta_{i_j, i_k} = 0 \quad \forall j, k \in \{1, \dots, n\} \quad (338)$$

Условие справа означает бесследовость тензора  $t_{i_1, \dots, i_n}$ . Тензор  $t_{i_1, \dots, i_n}$  симметричен, поскольку в  $P$  от переменных мест множителей произведение не меняется. Отображение между пространством симметричных бесследовых тензоров в  $S^n \mathbb{C}^3$  и пространством гармонических полиномов степени  $n$  взаимно-однозначно, поскольку по коэффициентам  $t_{i_1, \dots, i_n}$  многочлен восстанавливается единственным образом. И наоборот, по многочлену легко выписать тензор  $t_{i_1, \dots, i_n}$ . Таким образом, показан изоморфизм между пространством симметричных бесследовых тензоров в  $S^n \mathbb{C}^3$  и пространством гармонических полиномов степени  $n$ .  $\square$

• $[r]^*$

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n = \{x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3}\}, \quad b_1 + b_2 + b_3 = n \quad (339)$$

Найдём число таких  $x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3}$ . Оно равно количеству способов поставить 2 перегородки между  $n + 3$  элементами. Всего мест между элементами для перегородок равно  $n + 2$ . Следовательно,

$$\dim \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n = C_{n+2}^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (340)$$

**Statement 35.** Оператор Лапласа  $\Delta : \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n \rightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_{n-2}$  является сюръективным отображением.

*Proof.* Произвольный многочлен  $P_n$ :

$$P_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{b_1+b_2+b_3=n} c_{b_1, b_2, b_3} x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \quad (341)$$

Пусть  $m = \max(b_1, b_2, b_3)$ . Пусть без ограничения общности  $m = b_1$ . Докажем утверждение методом математической индукции:

- Проверим, что оно верно для  $m = n$ . Произвольный многочлен  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_n$ :

$$P_n(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^n \quad (342)$$

Соответствующий ему многочлен  $P_{n+2}$  из  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_{n+2}$ :  $\Delta P_{n+2} = P_n$ :

$$P_{n+2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{a_1 x_1^{n+2}}{(n+2)(n+1)} \quad (343)$$

Значит, утверждение верно при  $m = n$ .

- Предположим, что утверждение верно для  $m \geq k$ :

$$\forall P_n(x_1, x_2, x_3) : \max(b_1, b_2, b_3) \geq k \exists P_{n+2}(x_1, x_2, x_3) : \Delta P_{n+2} = P_n \quad (344)$$

- Проверим, что оно верно для  $m = k - 1$ .

$$P_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{b_1+b_2+b_3=n} c_{b_1, b_2, b_3} x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3}, \quad \max(b_1, b_2, b_3) = k - 1 \quad (345)$$

$$b_1 = k - 1, \quad b_2 \leq k - 1, \quad b_3 \leq k - 1.$$

$$\Delta(x_1^{k+1} x_2^{b_2} x_3^{b_3}) = (k+1)k x_1^{k-1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} + b_2(b_2-1) x_1^{k+1} x_2^{b_2-2} x_3^{b_3} + b_3(b_3-1) x_1^{k+1} x_2^{b_2} x_3^{b_3-2}$$

По предположению индукции  $\exists P'_{n+2}(x_1, x_2, x_3) : \Delta P'_{n+2} = b_2(b_2-1) x_1^{k+1} x_2^{b_2-2} x_3^{b_3} + b_3(b_3-1) x_1^{k+1} x_2^{b_2} x_3^{b_3-2}$ , поскольку  $\max(k+1, b_2-2, b_3) = \max(k+1, b_2, b_3-2) = k+1 \geq k$ .

$$x_1^{k-1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} = \Delta \left( \frac{x_1^{k+1} x_2^{b_2} x_3^{b_3}}{(k+1)k} - P'_{n+2} \right) \quad (346)$$

А значит и

$$\forall P_n(x_1, x_2, x_3) : \max(b_1, b_2, b_3) = k - 1 \exists P_{n+2}(x_1, x_2, x_3) : \Delta P_{n+2} = P_n \quad (347)$$

□

В п. в показан изоморфизм между пространством симметричных бесследовых тензоров в  $S^n \mathbb{C}^3$  и пространством  $H_n$ . По предложению 1 лекции 9 размерность пространства симметричных тензоров в  $S^n \mathbb{C}^3$ :

$$\dim S^n \mathbb{C}^3 = C_{n+2}^2 \quad (348)$$

Условие бесследовости:

$$\delta_{i_j i_k} t_{i_1 \dots i_j \dots i_k \dots i_n} = 0 \quad (349)$$

Число уравнений равно числу способов выбрать 2 из  $n$  элементов:  $C_n^2$ .

$$\dim H_n = \dim S^n \mathbb{C}^3 - C_n^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \quad (350)$$

$$\boxed{\dim H_n = 2n + 1} \quad (351)$$

**Brsht-11.3.**

Рассмотрим тензорное произведение  $\pi_1 \otimes \pi_{1/2}$  представлений  $\mathfrak{su}(2)$ .

а) Задайте операторы  $J_+, J_-, iJ_3$  матрицами в базисе из разложимых тензоров.

б) Найдите инвариантные подпространства (в терминах базиса разложимых векторов).

в)\* Найдите  $3j$  символы (в обозначениях лекции речь идет о случае  $j_1 = 1, j_2 = 1/2$ , можно ограничиться случаем  $m = 1$ ).

•[a)]

$$V = \langle e_+, e_- \rangle, \quad S^2 V = \langle e_+ \otimes e_+, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+), e_- \otimes e_- \rangle \quad (352)$$

$$\begin{aligned} \pi_1 \otimes \pi_{\frac{1}{2}} \simeq S^2 V \otimes V = \langle e|_+ \otimes e_+ \otimes e_+, e_+ \otimes e_+ \otimes e_-, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-), e_- \otimes e_- \otimes e_+, e_- \otimes e_- \otimes e_- \rangle \end{aligned}$$

Пусть  $e_1 = e_+ \otimes e_+ \otimes e_+$ ,  $e_2 = e_+ \otimes e_+ \otimes e_-$ ,  $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+)$ ,  $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-)$ ,  $e_5 = e_- \otimes e_- \otimes e_+$ ,  $e_6 = e_- \otimes e_- \otimes e_-$ .

$$J_+(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+) = 0, \quad J_+(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) = e_+ \otimes e_+ \otimes e_+ \quad (353)$$

$$J_+ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+) \right) = \sqrt{2}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+) \quad (354)$$

$$J_+ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-) \right) = \sqrt{2}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) + \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+)$$

$$J_+(e_- \otimes e_- \otimes e_+) = e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+, \quad J_+(e_- \otimes e_- \otimes e_-) = e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_- \otimes e_+$$

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (355)$$

$$J_-(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+) = -e_- \otimes e_+ \otimes e_+ - e_+ \otimes e_- \otimes e_+ - e_+ \otimes e_+ \otimes e_-$$

$$J_-(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) = -e_+ \otimes e_- \otimes e_- - e_- \otimes e_+ \otimes e_- \quad (356)$$

$$J_- \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+) \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-) - \sqrt{2}e_- \otimes e_- \otimes e_+$$

$$J_- \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-) \right) = -\sqrt{2}e_- \otimes e_- \otimes e_- \quad (357)$$

$$J_+(e_- \otimes e_- \otimes e_+) = -e_- \otimes e_- \otimes e_-, \quad J_-(e_- \otimes e_- \otimes e_-) = 0 \quad (358)$$

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (359)$$

$$iJ_3(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+) = \frac{3}{2}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_+), \quad iJ_3(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) = \frac{1}{2}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_-) \quad (360)$$

$$iJ_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+)\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+) \quad (361)$$

$$iJ_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-)\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_-) \quad (362)$$

$$iJ_3(e_- \otimes e_- \otimes e_+) = -\frac{1}{2}(e_- \otimes e_- \otimes e_+), \quad iJ_3(e_- \otimes e_- \otimes e_-) = -\frac{3}{2}(e_- \otimes e_- \otimes e_-) \quad (363)$$

$$iJ_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (364)$$

•[6]

По предложению 3 лекции 11:

$$\pi_1 \otimes \pi_{\frac{1}{2}} = \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_{\frac{3}{2}} \simeq S^3V \oplus V \quad (365)$$

Значит,  $V$  и  $S^3V$  являются инвариантными подпространствами.

$$S^3V = \langle e_+ \otimes e_+ \otimes e_+, \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_- + e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+), \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_- \otimes e_+), e_- \otimes e_- \otimes e_- \rangle$$

Выразим базисные векторы в  $S^3V$  через базисные векторы в  $S^2V \otimes V$  из п. а:

$$e'_1 = e_+ \otimes e_+ \otimes e_+ = e_1 \quad (366)$$

$$e'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+ \otimes e_+ \otimes e_- + e_+ \otimes e_- \otimes e_+ + e_- \otimes e_+ \otimes e_+) = \frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3 \quad (367)$$

$$e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+ \otimes e_- \otimes e_- + e_- \otimes e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_- \otimes e_+) = \sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}} \quad (368)$$

$$e'_4 = e_- \otimes e_- \otimes e_- = e_6 \quad (369)$$

$$S^3V = \langle e_1, \frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3, \sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}}, e_6 \rangle \quad (370)$$

Дополним  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4$  до базиса векторами  $e_2$  и  $e_5$  при помощи ортогонализации Грама-Шмидта. Вектор  $e_2$  выбран, т.к. он ортогонален всем векторам, кроме  $e'_2$ :

$$\tilde{e}'_5 = e_2 - \frac{(e_2, e'_2)}{(e'_2, e'_2)}e'_2 = e_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3\right) = \frac{2e_2 - \sqrt{2}e_3}{3} \quad (371)$$

$$e'_5 = \frac{\tilde{e}'_5}{(\tilde{e}'_5, \tilde{e}'_5)} = \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}} \quad (372)$$

Вектор  $e_5$  выбран, т.к. он ортогонален всем векторам, кроме  $e'_3$ :

$$\tilde{e}'_6 = e_5 - \frac{(e_5, e'_3)}{(e'_3, e'_3)}e'_3 = e_5 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2e_5 - \sqrt{2}e_4}{3} \quad (373)$$

$$e'_6 = \frac{\tilde{e}'_6}{(\tilde{e}'_6, \tilde{e}'_6)} = \sqrt{\frac{2}{3}}e_5 - \frac{e_4}{\sqrt{3}} \quad (374)$$

Рассмотрим действие генераторов  $J_+, J_-, iJ_3$  в новом базисе.

$$J_+(e'_1) = J_+(e_1) = 0, \quad J_+(e'_2) = J_+\left(\frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3\right) = \sqrt{3}e_1 = \sqrt{3}e'_1 \quad (375)$$

$$J_+(e'_3) = J_+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}e_3 + \frac{2}{\sqrt{3}}e_2 = 2e'_2, \quad J_+(e'_4) = J_+(e_6) = e_5 + \sqrt{2}e_4 = \sqrt{3}e'_3$$

$$J_+(e'_5) = J_+ \left( \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 = 0 \quad (376)$$

$$J_+(e'_6) = J_+ \left( \sqrt{\frac{2}{3}}e_5 - \frac{e_4}{\sqrt{3}} \right) = \frac{e_3}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 = -e'_5$$

Как видно,  $J_+(e'_6) = -e'_5$ . Нужно, чтобы  $J_+(e'_6) = e'_5$ , поэтому поменяем знак  $e'_6$ :

$$e'_6 = \frac{e_4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}e_5 \quad (377)$$

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (378)$$

$$J_-(e'_1) = J_-(e_1) = -\sqrt{3}e'_2, \quad J_-(e'_2) = J_- \left( \frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3 \right) = -2e'_3 \quad (379)$$

$$J_-(e'_3) = J_- \left( \sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}} \right) = -\sqrt{3}e_4, \quad J_-(e'_4) = J_-(e_6) = 0 \quad (380)$$

$$J_-(e'_5) = J_- \left( \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right) = -e'_6, \quad J_-(e'_6) = J_- \left( \sqrt{\frac{2}{3}}e_5 - \frac{e_4}{\sqrt{3}} \right) = 0 \quad (381)$$

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (382)$$

$$iJ_3(e'_1) = iJ_3(e_1) = \frac{3}{2}e'_2, \quad iJ_3(e'_2) = iJ_3 \left( \frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3 \right) = \frac{1}{2}e'_2 \quad (383)$$

$$iJ_3(e'_3) = iJ_3 \left( \sqrt{\frac{2}{3}}e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{1}{2}e_4, \quad iJ_3(e'_4) = iJ_3(e_6) = -\frac{3}{2}e_4 \quad (384)$$

$$iJ_3(e'_5) = iJ_3 \left( \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2}e'_5, \quad iJ_3(e'_6) = iJ_3 \left( \sqrt{\frac{2}{3}}e_5 - \frac{e_4}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{1}{2}e'_6 \quad (385)$$

$$iJ_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (386)$$

$$V = \left\langle \sqrt{\frac{2}{3}}e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}e_5 \right\rangle \quad (387)$$

•[в]\*]  $3j$  символы Вигнера – коэффициенты разложения одного базиса по другому:

$$v_{j,m} = \sum C_{j,m}^{j_1, m_1, j_2, m_2} v_{j_1, m_1} \otimes v_{j_2, m_2}, \quad j_1 = 1, j_2 = \frac{1}{2} \quad (388)$$

$$v_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} = e'_1 = e_1 = e_+ \otimes e_+ \otimes e_+ = v_{1,1} \otimes v_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad (389)$$

$$C_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 1 \quad (390)$$

$$v_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = e'_2 = \frac{e_2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} e_+ \otimes e_+ \otimes e_- + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} (e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+) \otimes e_+ \quad (391)$$

$$v_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} v_{1,1} \otimes v_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} v_{1,0} \otimes v_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad (392)$$

$$\boxed{C_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{1,1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad C_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{1,0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}} \quad (393)$$

$$v_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} = e'_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} e_4 + \frac{e_5}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} e_- \otimes e_- \otimes e_+ + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} (e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+) \otimes e_- \quad (394)$$

$$v_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} v_{1,-1} \otimes v_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} v_{1,0} \otimes v_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad (395)$$

$$\boxed{C_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{1,-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad C_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{1,0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}} \quad (396)$$

$$v_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} = e'_4 = e_6 = e_- \otimes e_- \otimes e_- = v_{1,-1} \otimes v_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad (397)$$

$$\boxed{C_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}^{1,-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = 1} \quad (398)$$

$$v_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = e'_5 = \sqrt{\frac{2}{3}} e_2 - \frac{e_3}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} e_+ \otimes e_+ \otimes e_- - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} (e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+) \otimes e_+ \quad (399)$$

$$v_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} v_{1,1} \otimes v_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} v_{1,0} \otimes v_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad (400)$$

$$\boxed{C_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{1,1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad C_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}^{1,0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (401)$$

$$v_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} = e'_6 = \frac{e_4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} e_5 = -\sqrt{\frac{2}{3}} e_- \otimes e_- \otimes e_+ + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} (e_+ \otimes e_- + e_- \otimes e_+) \otimes e_- \quad (402)$$

$$v_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} v_{1,-1} \otimes v_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} v_{1,0} \otimes v_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad (403)$$

$$\boxed{C_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{1,-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad C_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}^{1,0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (404)$$

#### Brsht-11.4.

\* Группа  $S_4$  вложена группу  $SO(3)$  как группа вращений куба. Тогда любое неприводимое представление группы  $SO(3)\pi_n$  (выше оно еще обозначалось  $S_n$ ) можно ограничить на  $S_4$ .

- а) Разложите это ограничение  $\pi_2$  на неприводимые представления  $S_4$ .
- б) То же, для произвольного  $\pi_n, n \in \mathbb{Z}$ .

#### •[a]

Соответствие между перестановками различных циклических типов в  $S_4$  и различными собственными движениями, сохраняющими куб (см. задачу 4.4):

- $e$  (единичный, 1 шт.) – тождественное движение (ничего не делает с кубом).
- $(a, b)$  (транспозиции, 6 шт.) – повороты на  $\pi$  вокруг прямой  $l_1$ , проходящей через центры противоположных рёбер.
- $(a, b)(c, d)$  (произведение транспозиций, 3 шт.) – повороты на  $\pi$  вокруг прямой  $l_2$ , проходящей через центры противоположных граней.
- $(a, b, c)$  (цикл длины 3, 8 шт.) – поворот на  $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  вокруг прямой  $l_3$ , проходящей через диагональ куба.
- $(a, b, c, d)$  (цикл длины 4, 6 шт.) – повороты на  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  вокруг прямой  $l_2$ , проходящей через центры противоположных граней.

Таблица характеров группы  $S_4$  (см. задачу 6.3):

|              | $e^1$ | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
|--------------|-------|------------|------------------|---------------|------------------|
| $\chi^{(1)}$ | 1     | 1          | 1                | 1             | 1                |
| $\chi^{(2)}$ | 1     | -1         | 1                | 1             | -1               |
| $\chi^{(3)}$ | 3     | 1          | -1               | 0             | -1               |
| $\chi^{(4)}$ | 3     | -1         | -1               | 0             | 1                |
| $\chi^{(5)}$ | 2     | 0          | 2                | -1            | 0                |

$$\chi_{\pi_2}(R(\alpha)) = e^{-2i\alpha} + e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} = 1 + 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha \quad (405)$$

$$\chi_{\pi_2}(R(0)) = 1 + 2 + 2 = 5 \quad (406)$$

$$\chi_{\pi_2}(R(\pi)) = 1 - 2 + 2 = 1 \quad (407)$$

$$\chi_{\pi_2}\left(R\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 1 - 1 - 1 = -1 \quad (408)$$

$$\chi_{\pi_2}\left(R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 + 0 - 2 = -1 \quad (409)$$

|                | $e^1$ | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
|----------------|-------|------------|------------------|---------------|------------------|
| $\chi_{\pi_2}$ | 5     | 1          | 1                | -1            | -1               |

Разложим  $\chi_{\pi_2}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_2} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_2} \rangle \quad (410)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot 5 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = 0 \quad (411)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = 0 \quad (412)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot 15 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = 1 \quad (413)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot 15 + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = 0 \quad (414)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot 10 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = 1 \quad (415)$$

$$\boxed{\chi_{\pi_2} = \chi^{(3)} + \chi^{(5)}} \quad (416)$$

•[6]

$$\chi_{\pi_n}(R(\alpha)) = \sum_{j=-n}^n e^{ij\alpha} = \frac{e^{-in\alpha}(e^{i(2n+1)\alpha} - 1)}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\alpha} - e^{-in\alpha}}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\alpha} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\alpha}}{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}}}$$

$$\chi_{\pi_n}(R(\alpha)) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sin n\alpha \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \cos n\alpha \quad (417)$$

$$\chi_{\pi_n}(R(0)) = 2n + 1 \quad (418)$$

$$\chi_{\pi_n}(R(\pi)) = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (419)$$

$$\chi_{\pi_n}\left(R\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \begin{cases} 1, & n = 3k \\ 0, & n = 3k + 1 \\ -1, & n = 3k + 2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (420)$$

$$\chi_{\pi_n}\left(R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} 1, & n = 4k, 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2, 4k + 3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (421)$$



|                |          |            |                  |               |                  |
|----------------|----------|------------|------------------|---------------|------------------|
|                | $e^1$    | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n + 1$ | 1          | 1                | 1             | 1                |

Рассмотрим все случаи:

•  $n = 12k, k \in \mathbb{Z}$ .

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (422)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n + 1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = \frac{n}{12} + 1 \quad (423)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n + 1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n}{12} \quad (424)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n + 3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n}{4} \quad (425)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n + 3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n}{4} \quad (426)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n + 2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 0) = \frac{n}{6} \quad (427)$$

$$\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)} \left( \frac{n}{12} + 1 \right) + \chi^{(2)} \frac{n}{12} + (\chi^{(3)} + \chi^{(4)}) \frac{n}{4} + \chi^{(5)} \frac{n}{6} \quad (428)$$

•  $n = 12k + 1, k \in \mathbb{Z}$ .

|                |          |            |                  |               |                  |
|----------------|----------|------------|------------------|---------------|------------------|
|                | $e^1$    | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n + 1$ | -1         | -1               | 0             | 1                |

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (429)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n + 1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n - 1}{12} \quad (430)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n + 1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n - 1}{12} \quad (431)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n + 3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n - 1}{4} \quad (432)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n + 3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n + 3}{4} \quad (433)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n + 2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = \frac{n - 1}{6} \quad (434)$$

$$\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)} \frac{n - 1}{12} + \chi^{(2)} \frac{n - 1}{12} + \chi^{(3)} \frac{n + 3}{4} + \chi^{(4)} \frac{n + 3}{4} + \chi^{(5)} \frac{n - 1}{6} \quad (435)$$

•  $n = 12k + 2, k \in \mathbb{Z}$ .

|                |          |            |                  |               |                  |
|----------------|----------|------------|------------------|---------------|------------------|
|                | $e^1$    | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n + 1$ | 1          | 1                | -1            | -1               |

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (436)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-2}{12} \quad (437)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = \frac{n-2}{12} \quad (438)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+2}{4} \quad (439)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-2}{4} \quad (440)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = \frac{n+4}{6} \quad (441)$$

$$\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)} \frac{n-2}{12} + \chi^{(2)} \frac{n+2}{12} + \chi^{(3)} \frac{n+2}{4} + \chi^{(4)} \frac{n-2}{4} + \chi^{(5)} \frac{n+4}{6} \quad (442)$$

•  $n = 12k + 3, k \in \mathbb{Z}$ .

|                | $e^1$  | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
|----------------|--------|------------|------------------|---------------|------------------|
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n+1$ | $-1$       | $-1$             | $1$           | $-1$             |

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (443)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-3}{12} \quad (444)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = \frac{n+9}{12} \quad (445)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+1}{4} \quad (446)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+1}{4} \quad (447)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 0) = \frac{n-3}{6} \quad (448)$$

$$\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)} \frac{n-3}{12} + \chi^{(2)} \frac{n+9}{12} + \chi^{(3)} \frac{n+1}{4} + \chi^{(4)} \frac{n+1}{4} + \chi^{(5)} \frac{n-3}{6} \quad (449)$$

•  $n = 12k + 4, k \in \mathbb{Z}$ .

|                | $e^1$  | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
|----------------|--------|------------|------------------|---------------|------------------|
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n+1$ | $1$        | $1$              | $0$           | $1$              |

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (450)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+8}{12} \quad (451)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-4}{12} \quad (452)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n}{4} \quad (453)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n}{4} \quad (454)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = \frac{n+2}{6} \quad (455)$$

|                |          |            |                  |               |                  |
|----------------|----------|------------|------------------|---------------|------------------|
|                | $e^1$    | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n + 1$ | $-1$       | $-1$             | $-1$          | $1$              |

$$\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)} \frac{n+8}{12} + \chi^{(2)} \frac{n-4}{12} + \chi^{(3)} \frac{n}{4} + \chi^{(4)} \frac{n}{4} + \chi^{(5)} \frac{n+2}{6} \quad (456)$$

•  $n = 12k + 5, k \in \mathbb{Z}$ .

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (457)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = \frac{n-5}{12} \quad (458)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-5}{12} \quad (459)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-1}{4} \quad (460)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+3}{4} \quad (461)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = \frac{n+1}{6} \quad (462)$$

$$\chi_{\pi_n} = (\chi^{(1)} + \chi^{(2)}) \frac{n-5}{12} + \chi^{(3)} \frac{n-1}{4} + \chi^{(4)} \frac{n+3}{4} + \chi^{(5)} \frac{n+1}{6} \quad (463)$$

•  $n = 12k + 6, k \in \mathbb{Z}$ .

|                |          |            |                  |               |                  |
|----------------|----------|------------|------------------|---------------|------------------|
|                | $e^1$    | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n + 1$ | $1$        | $1$              | $1$           | $-1$             |

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (464)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+6}{12} \quad (465)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = \frac{n+6}{12} \quad (466)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+2}{4} \quad (467)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-2}{4} \quad (468)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 0) = \frac{n}{6} \quad (469)$$

$$\chi_{\pi_n} = (\chi^{(1)} + \chi^{(2)}) \frac{n+6}{12} + \chi^{(3)} \frac{n+2}{4} + \chi^{(4)} \frac{n-2}{4} + \chi^{(5)} \frac{n}{6} \quad (470)$$

•  $n = 12k + 7, k \in \mathbb{Z}$ .

|                |          |            |                  |               |                  |
|----------------|----------|------------|------------------|---------------|------------------|
|                | $e^1$    | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n + 1$ | $-1$       | $-1$             | $0$           | $-1$             |

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (471)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-7}{12} \quad (472)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+5}{12} \quad (473)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+1}{4} \quad (474)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+1}{4} \quad (475)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = \frac{n-1}{6} \quad (476)$$

$$\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)} \frac{n-7}{12} + \chi^{(2)} \frac{n+5}{12} + (\chi^{(3)} + \chi^{(4)}) \frac{n+1}{4} + \chi^{(5)} \frac{n-1}{6} \quad (477)$$

•  $n = 12k + 8, k \in \mathbb{Z}$ .

|                |        |            |                  |               |                  |
|----------------|--------|------------|------------------|---------------|------------------|
|                | $e^1$  | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n+1$ | 1          | 1                | -1            | 1                |

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (478)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = \frac{n+4}{12} \quad (479)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-8}{12} \quad (480)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n}{4} \quad (481)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n}{4} \quad (482)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = \frac{n+4}{6} \quad (483)$$

$$\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)} \frac{n+4}{12} + \chi^{(2)} \frac{n-8}{12} + \chi^{(3)} \frac{n}{4} + \chi^{(4)} \frac{n}{4} + \chi^{(5)} \frac{n+4}{6} \quad (484)$$

•  $n = 12k + 9, k \in \mathbb{Z}$ .

|                |        |            |                  |               |                  |
|----------------|--------|------------|------------------|---------------|------------------|
|                | $e^1$  | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n+1$ | -1         | -1               | 1             | 1                |

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (485)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = \frac{n+3}{12} \quad (486)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+3}{12} \quad (487)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-1}{4} \quad (488)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+3}{4} \quad (489)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 0) = \frac{n-3}{6} \quad (490)$$

|                | $e^1$    | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
|----------------|----------|------------|------------------|---------------|------------------|
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n + 1$ | 1          | 1                | 0             | -1               |

$$\chi_{\pi_n} = (\chi^{(1)} + \chi^{(2)})\frac{n+3}{12} + \chi^{(3)}\frac{n-1}{4} + \chi^{(4)}\frac{n+3}{4} + \chi^{(5)}\frac{n-3}{6} \quad (491)$$

•  $n = 12k + 10, k \in \mathbb{Z}$ .

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (492)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+2}{12} \quad (493)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+2}{12} \quad (494)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+2}{4} \quad (495)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-2}{4} \quad (496)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0) = \frac{n+2}{6} \quad (497)$$

$$\chi_{\pi_n} = (\chi^{(1)} + \chi^{(2)})\frac{n+2}{12} + \chi^{(3)}\frac{n+2}{4} + \chi^{(4)}\frac{n-2}{4} + \chi^{(5)}\frac{n+2}{6} \quad (498)$$

•  $n = 12k + 11, k \in \mathbb{Z}$ .

|                | $e^1$    | $(a, b)^6$ | $(a, b)(c, d)^3$ | $(a, b, c)^8$ | $(a, b, c, d)^6$ |
|----------------|----------|------------|------------------|---------------|------------------|
| $\chi_{\pi_n}$ | $2n + 1$ | -1         | -1               | -1            | -1               |

Разложим  $\chi_{\pi_n}$  при помощи алгоритма разложения на неприводимые:

$$\chi_{\pi_n} = \sum_{i=1}^5 a_i \chi^{(i)}, \quad a_i = \langle \chi^{(i)}, \chi_{\pi_n} \rangle \quad (499)$$

$$a_1 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1)) = \frac{n-11}{12} \quad (500)$$

$$a_2 = \frac{1}{24}(1 \cdot (2n+1) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) + 6 \cdot 1) = \frac{n+1}{12} \quad (501)$$

$$a_3 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1) = \frac{n+1}{4} \quad (502)$$

$$a_4 = \frac{1}{24}(1 \cdot (6n+3) + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)) = \frac{n+1}{4} \quad (503)$$

$$a_5 = \frac{1}{24}(1 \cdot (4n+2) + 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = \frac{n+1}{6} \quad (504)$$

$$\chi_{\pi_n} = \chi^{(1)}\frac{n-11}{12} + \chi^{(2)}\frac{n+1}{12} + (\chi^{(3)} + \chi^{(4)})\frac{n+1}{4} + \chi^{(5)}\frac{n+1}{6} \quad (505)$$

## 9.2.12 Problems about representations of more general Lie groups

### Brsht-12.1.

- а) Найдите характер (на матрицах вида (11)) тензорного произведения представлений  $V \otimes \Lambda^2 V$ .  
 б) Найдите характер (на матрицах вида (11)) присоединенного представления  $SU(3)$ . Покажите, что характер  $V \otimes \Lambda^2 V$  есть сумма характеров присоединенного и тривиального одномерного.  
 в)\* Укажите явно это тривиальное подпредставление внутри  $V \otimes \Lambda^2 V$ .

**Brsht-12.2.**

- а) Найдите базис в алгебре Ли  $\mathfrak{so}(3, 1)$ , найдите структурные константы в этом базисе.  
 б) Докажите, что алгебры  $\mathfrak{so}(3, 1)$  и  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  изоморфны (здесь  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  рассматриваемая как вещественная 6-мерная алгебра Ли).  
 в)\* Задайте два двумерных представления алгебры Ли  $\mathfrak{so}(3, 1)$  явно (т.е. укажите в какие матрицы переходят базисные элементы).

**Brsht-12.3.**

Пусть  $V$  векторное пространство с положительно определенным скалярным произведением,  $e_1, \dots, e_N$  ортонормированный базис. Через  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$  обозначим соответствующие образующие, которые удовлетворяют соотношениям (12) которые в данном случае имеют вид  $\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = \delta_{a,b}$ . Проверьте, что элементы  $J_{ab} = \gamma_a \gamma_b$ ,  $a \neq b$  удовлетворяют соотношениям (4) алгебры Ли  $\mathfrak{so}(N)$ .

**Brsht-12.4.**

- а) Пусть  $V$  - четырехмерное представление алгебры  $\mathfrak{so}(4)$ . Используя изоморфизм  $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  посчитайте характер  $V$ . Достаточно его считать на матрицах вида  $\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix}$ . Свяжите это представление с  $\pi_{j_1} \otimes \pi_{j_2}$ .  
 б)\* Найдите характеры спинорных представлений. Свяжите эти представления с  $\pi_{j_1} \otimes \pi_{j_2}$ .

**Solution**

•[a)]

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1+i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix} \quad (506)$$

$$\chi_V(g) = e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1+i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} \quad (507)$$

Из лекции 12:

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = e^{-i\varphi_1} + e^{i\varphi_1-i\varphi_2} + e^{i\varphi_2} \quad (508)$$

$$\chi_{V \otimes \Lambda^2 V} = \chi_V \chi_{\Lambda^2 V} = (e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1+i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2})(e^{-i\varphi_1} + e^{i\varphi_1-i\varphi_2} + e^{i\varphi_2}) \quad (509)$$

$$\chi_{V \otimes \Lambda^2 V} = 3 + e^{2i\varphi_1-i\varphi_2} + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} + e^{-2i\varphi_1+i\varphi_2} + e^{-i\varphi_1+2i\varphi_2} + e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} + e^{i\varphi_1-2i\varphi_2} \quad (510)$$

$$\boxed{\chi_{V \otimes \Lambda^2 V} = 3 + 2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + 2 \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + 2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (511)$$

•[б)]

Генераторами группы  $SU(3)$  являются матрицы Гелл-Манна:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (512)$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (513)$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (514)$$

$$g\lambda^1 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i(2\varphi_1-\varphi_2)} & 0 \\ e^{i(-2\varphi_1+\varphi_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g\lambda^2 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i(2\varphi_1-\varphi_2)} & 0 \\ ie^{i(-2\varphi_1+\varphi_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g\lambda^3 g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g\lambda^4 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g\lambda^5 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ie^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ ie^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g\lambda^6 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_1-2\varphi_2)} \\ 0 & e^{i(\varphi_1-2\varphi_2)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$g\lambda^7 g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ie^{-i(\varphi_1-2\varphi_2)} \\ 0 & ie^{i(\varphi_1-2\varphi_2)} & 0 \end{pmatrix}, \quad g\lambda^8 g^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$g\lambda^1 g^{-1} = \cos(2\varphi_1 - \varphi_2)\lambda^1 - \sin(2\varphi_1 - \varphi_2)\lambda^2 \quad (515)$$

$$g\lambda^2 g^{-1} = \sin(2\varphi_1 - \varphi_2)\lambda^1 + \cos(2\varphi_1 - \varphi_2)\lambda^2 \quad (516)$$

$$g\lambda^3 g^{-1} = \lambda^3 \quad (517)$$

$$g\lambda^4 g^{-1} = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\lambda^4 - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\lambda^5 \quad (518)$$

$$g\lambda^5 g^{-1} = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\lambda^4 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\lambda^5 \quad (519)$$

$$g\lambda^6 g^{-1} = \cos(2\varphi_2 - \varphi_1)\lambda^6 - \sin(2\varphi_2 - \varphi_1)\lambda^7 \quad (520)$$

$$g\lambda^7 g^{-1} = \sin(2\varphi_2 - \varphi_1)\lambda^6 + \cos(2\varphi_2 - \varphi_1)\lambda^7 \quad (521)$$

$$g\lambda^8 g^{-1} = \lambda^8 \quad (522)$$

Присоединённое представление:

$$Ad_g = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) & \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(2\varphi_1 - \varphi_2) & \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & +\cos(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(2\varphi_2 - \varphi_1) & \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(2\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (523)$$

Характер присоединённого представления  $SU(3)$ :

$$\chi_{Ad_g} = 2(1 + \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (524)$$

•[в]\*] Как видно из п. а и б ( $\chi_{\text{triv}} = 1$  – характер тривиального):

$$\chi_{V \otimes \Lambda^2 V} = \chi_{Ad_g} + \chi_{\text{triv}} \quad (525)$$

## Solution

•[а]

Базис в алгебре Ли  $\mathfrak{so}(3, 1)$ :

$$J_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём структурные константы в этом базисе:

$$[J_i, J_j] = \sum_k a_{ij}^k J_k, \quad [K_i, K_j] = \sum_k b_{ij}^k J_k, \quad [J_i, K_j] = \sum_k b_{ij}^k K_k \quad (526)$$

$$[J_1, J_2] = J_1 J_2 - J_2 J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iJ_3 \quad (527)$$

$$[J_1, J_3] = J_1 J_3 - J_3 J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iJ_2 \quad (528)$$

$$[J_2, J_3] = J_2 J_3 - J_3 J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = iJ_1 \quad (529)$$

$$\boxed{a_{ij}^k = i\epsilon_{ijk}} \quad (530)$$

$$[K_1, K_2] = K_1 K_2 - K_2 K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iK_3 \quad (531)$$

$$[K_1, K_3] = K_1 K_3 - K_3 K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iK_2 \quad (532)$$

$$[K_2, K_3] = K_2 K_3 - K_3 K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iK_1 \quad (533)$$

$$\boxed{b_{ij}^k = -i\epsilon_{ijk}} \quad (534)$$

$$[J_1, K_2] = J_1 K_2 - K_2 J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iK_3 \quad (535)$$

$$[J_1, K_3] = J_1 K_3 - K_3 J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -iK_2 \quad (536)$$

$$[J_2, K_3] = J_2 K_3 - K_3 J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iK_1 \quad (537)$$

$$\boxed{c_{ij}^k = i\epsilon_{ijk}} \quad (538)$$

### •[6]

**Statement 36.** Алгебры  $\mathfrak{so}(3, 1)$  и  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  изоморфны.

*Proof.* Для доказательства изоморфизма проверим совпадение структурных констант в  $\mathfrak{so}(3, 1)$  и  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Структурные константы в  $\mathfrak{so}(3, 1)$  (см. п. а):

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} K_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \quad (539)$$

Естественный базис в  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ :  $e, h, f, ie, if, ih$ , где

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (540)$$

Выберем в  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  базис из

$$k = \frac{1}{2}(e + f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad m = \frac{1}{2}(e - f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (541)$$

$$[k, l] = -m, \quad [k, m] = -l, \quad [l, m] = k$$

Соответствие между базисами:  $k \rightarrow iJ_1, l \rightarrow iJ_2, m \rightarrow iJ_3, ik \rightarrow K_1, il \rightarrow K_2, im \rightarrow K_3$ .  $\square$



**Solution**

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$  – образующие, которые удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = \delta_{a,b} \quad (542)$$

$$J_{ab} = \gamma_a \gamma_b, \quad a \neq b \quad (543)$$

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d - \gamma_c \gamma_d \gamma_a \gamma_b = \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d - \gamma_c (\delta_{ad} - \gamma_a \gamma_d) \gamma_b = \gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d - \gamma_c \delta_{ad} \gamma_b + \\ &+ \gamma_c \gamma_a (\delta_{bd} - \gamma_b \gamma_d) = (\gamma_a \gamma_b \gamma_c - \gamma_c \gamma_a \gamma_b) \gamma_d + J_{ca} \delta_{bd} - \gamma_c \gamma_b \delta_{ad} = (\gamma_a \gamma_b \gamma_c - (\delta_{ca} - \gamma_a \gamma_c) \gamma_b) \gamma_d + \\ &+ J_{ca} \delta_{bd} + J_{bc} \delta_{ad} \end{aligned} \quad (544)$$

$$\boxed{[J_{ab}, J_{cd}] = J_{ad} \delta_{bc} + J_{db} \delta_{ac} + J_{ca} \delta_{bd} + J_{bc} \delta_{ad}} \quad (545)$$

**Solution****•[a)]**

$V$  – четырёхмерное представление алгебры  $\mathfrak{so}(4)$ .  $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ , значит

$$\chi_V = \chi_{\mathfrak{su}(2)} + \chi_{\mathfrak{su}(2)} \quad (546)$$

$$\chi_V = e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2} \quad (547)$$

$$\boxed{\chi_V = 2 \cos \varphi_1 + 2 \cos \varphi_2} \quad (548)$$

**9.3 Exercises from Kostrikin**

(потом сгруппирую!)

**9.3.1 Exercises about basics of group theory and algebra**

N)

Используя геометрическое изображение группы  $SU(2)$ , показать, что

$$(0, 1, 0, 0) * (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1) \neq (0, 0, 1, 0) * (0, 1, 0, 0)$$

(произведение точек на  $S^3$ ). Те же точки  $(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ , рассматриваемые на  $\mathbb{RP}^3$ , перестановочны.

1

N)

Показать, что если коэффициенты унитарных матриц

$$K_1(t) = \begin{vmatrix} \cos \frac{t}{2} & i \sin \frac{t}{2} \\ i \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{vmatrix}, \quad K_2(t) = \begin{vmatrix} \cos \frac{t}{2} & -\sin \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{vmatrix},$$

$$K_3(t) = \begin{vmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{vmatrix}$$

продифференцировать по  $t$  и положить затем  $t = 0$ , то получатся матрицы

$$K_1 = \frac{i}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{i}{2} h_1, K_2 = \frac{i}{2} \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix} = \frac{i}{2} h_2, K_3 = \frac{i}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{i}{2} h_3,$$

составляющие базис пространства  $M_2^-$  косэрмитовых матриц

$$K = \begin{vmatrix} ik_3 & -k_2 + ik_1 \\ k_2 + ik_1 & -ik_3 \end{vmatrix}, \quad k_j \in \mathbb{R}$$

с нулевым следом:  $K^* = -K, \operatorname{tr} K = 0$ .

2

N)

Кватернионные единицы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  порождают в  $\text{Sp}(1)$  интересную подгруппу - группу кватернионов  $Q_8$  порядка 8, играющую заметную роль в разном рода вопросах. Какое отношение к  $Q_8$  имеют матрицы

$$\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \pm \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}, \quad \pm \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \pm \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix}?$$

3

N)

Можно ли построить ассоциативную алгебру с делением  $A$  над  $\mathbb{R}$  размерности 3, содержащую  $\mathbb{C}$  в качестве подалгебры?

N)

Эйфория, возникшая в связи с открытием кватернионов, привела к созданию общества сторонников кватернионных функций - аналога функций комплексного переменного. Хотя больших достижений на этом пути не было достигнуто, нельзя отрицать, что кватернионы имеют прямое отношение к математической физике. В какой-то мере это можно усмотреть, введя дифференциальный оператор

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

на трёхмерном функциональном пространстве с базисом  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . Справедливы следующие соотношения:

$$\nabla t = \mathbf{i} \frac{\partial t}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial t}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial t}{\partial z}$$

N)

градиент скаляра  $t$ ;

$$\nabla^2 t = -\Delta t = -\left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

N)

выражение из теории потенциала;

$$\begin{aligned} \nabla(\underbrace{(\mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w)}_{\text{поле}}) = -(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{дивергенция поля}} + \frac{\partial w}{\partial z}) + \\ + \underbrace{\mathbf{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{\text{вихрь (ротатор) поля}}. \end{aligned}$$

Предлагается провести все необходимые вычисления, опираясь на правила умножения в алгебре кватернионов.

## 9.3.2 Exercises about Subgroup

N)

Доказать, что в любой группе подгруппа индекса 2 обязательно нормальна.

N)

При помощи упр. 1 попробуйте доказать, что с точностью до изоморфизма  $S_3$  - единственная неабелева группа порядка 6.

### 9.3.3 Exercises about group actions on sets

N)

Пусть  $\Phi$  и  $\Phi'$  - гомоморфизмы группы  $G$  в  $S(\Omega)$  и  $S(\Omega')$  соответственно. Тогда определённые ими действия на  $\Omega$  и на  $\Omega'$  называются эквивалентными, если существует биективное отображение  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega'$ , делающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega' \\ \Phi_g \downarrow & & \downarrow \Phi'_g \\ \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega' \end{array}$$

коммутативной при всех  $g \in G$ . Таким образом,  $\Phi'_g = \sigma \Phi_g \sigma^{-1}$ . Доказать, что каждое транзитивное действие группы  $G$  эквивалентно действию  $G$  на левых смежных классах по некоторой подгруппе  $H$ .

Опираясь на теорему 2, доказать, что все группы порядка  $p^2$  ( $p$  - простое число) абелевы.

N)

Показать, что центр группы  $P$ , приведённой в конце примера 1, имеет вид

$$Z(P) = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \mid c \in Z_p \right\}$$

Найти сопряжённые классы группы  $P$ .

3

N)

Пусть  $n$  - натуральное число. Запишем его в виде суммы  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$  с  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 1$ . Число всех таких разбиений с  $m = 1, 2, \dots$  обозначим через  $p(n)$ , так что  $p(3) = 3, p(4) = 5$  и т.д. Разложение  $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_m$  каждой перестановки  $\pi \in S_n$  в произведение независимых циклов (см. [BA I, гл. 1, 8]) однозначно определяет разбиение числа  $n$ . Показать, что классы сопряжённости группы  $S_n$  находятся в биективном соответствии с разбиениями числа  $n$ .

N)

Пусть перестановка  $\pi \in S_n$  записывается в виде произведения  $r$  циклов длины 1,  $s$  циклов длины 2,  $t$  циклов длины 3 и т.д., так что  $n = r + 2s + 3t + \dots$ . Показать, что мощность сопряжённого класса в  $S_n$ , содержащего перестановку  $\pi$ , выражается формулой

$$|\pi^{S_n}| = \frac{n!}{1^r r! 2^s s! 3^t t! \dots}$$

5

N)

Пусть группа  $G$  действует на множестве  $\Omega$ . Назовём подмножество  $\Gamma \subset \Omega$  инвариантным относительно  $G$  (или  $G$ -инвариантным), если  $gx \in \Gamma$  для всех  $g \in G$  и  $x \in \Gamma$ . Например, инвариантными множествами при действии  $SO(2)$  на  $\mathbb{R}^2$  являются концентрические кольца.

Показать, что всякое инвариантное подмножество в  $\Omega$  является объединением орбит, причём  $G$ -орбита любого элемента  $x \in \Omega$  есть не что иное, как наименьшее инвариантное подмножество, содержащее  $x$ .

6

N)

Показать, что для группы  $G$  с подгруппой  $H$

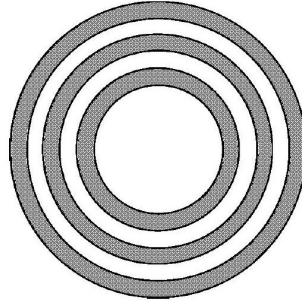


Рис. 1 действие  $H \times G \longrightarrow G$ , определённое сдвигом  $(h, g) \mapsto hg$ , задаёт разбиение  $G$  на правые смежные классы  $G$  по  $H$ .

7

N)

Видоизменив доказательство теоремы 1, получить соотношение

$$r(G : \Omega) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} N(g)$$

где  $r(G : \Omega)$  - число орбит группы перестановок  $G$ , действующей на множестве  $\Omega$ .  
9 (G.R. Goodson, 1999). Наряду с централизатором  $C(a) = \{x \in G | xa = ax\}$  в группе  $G$  рассматривают ещё косой инерализатор

$$D(a) = \{x \in G | xa = a^{-1}x\}$$

встречающийся в теории динамических систем. Вообще говоря,  $D(a)$  не является группой. Доказать, что:

N)

$D(a)$  группа  $\iff a^2 = e$  и  $D(a) = C(a)$ ;

N)

множество  $E(a) = C(a) \cup D(a)$  всегда является группой.

### 9.3.4 Exercises about quotient groups and homomorphisms

N)

Вспомним определение из [BA I, гл. 4, 2, п. 4] внутреннего автоморфизма  $I_a : g \mapsto aga^{-1}$  и группы  $\text{Inn}(G) \subset \text{Aut}(G)$ . Показать, что  $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$  и  $\text{Inn}(G) \cong G/Z(G)$ , где  $Z(G)$  - центр группы  $G$ . Факторгруппа  $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$  называется группой внешних автоморфизмов.

N)

Пусть  $H$  и  $K$  - подгруппы группы  $G$ . Показать, что

$$|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K|$$

(аналог формулы, известной из теории линейных пространств). Показать, далее, что множество  $HK$  будет подгруппой тогда и только тогда, когда  $HK = KH$ ; в случае  $K \triangleleft G$  это условие автоматически выполняется.

2

N)

Составим для симметрической группы  $S_4$  таблицу

|     |            |        |         |          |
|-----|------------|--------|---------|----------|
| 1   | 3          | 6      | 8       | 6        |
| $e$ | $(12)(34)$ | $(12)$ | $(123)$ | $(1234)$ |

аналогичную тем, которые мы использовали в только что рассмотренных примерах. Опираясь на достаточно очевидное соображение, что в любой группе нормальная подгруппа есть объединение некоторого множества сопряжённых классов, повторить данное нами в примере 2 описание нормальных подгрупп группы  $S_4$ .

3

N)

Показать, что  $Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B)$ .

N)

Если  $K_1, K_2 \triangleleft G, K_1 \cap K_2 = e$ , то  $G$  изоморфна некоторой подгруппе в  $(G/K_1) \times (G/K_2)$ . Верно ли это?

N)

Пусть  $K \triangleleft G = A \times B$ . Доказать, что либо подгруппа  $K$  абелева, либо одно из пересечений  $K \cap A, K \cap B$  нетривиально. Дать пример группы  $A \times B$  с нетривиальной нормальной подгруппой  $K$  такой, что  $K \cap A = e$  и  $K \cap B = e$ . Тем самым из  $K \triangleleft A \times B$ , вообще говоря, не следует, что  $K = (K \cap A) \times (K \cap B)$ .

N)

Является ли группа кватернионов  $Q_8$  полупрямым произведением какихто двух своих собственных подгрупп?

N)

Показать, что  $H \triangleleft Q_8$  для любой собственной подгруппы  $H \subset Q_8$ .

N)

Показать, что группы  $D_4$  и  $Q_8$  не изоморфны.

N)

Показать, что  $\text{Aut}(D_4) \cong D_4$  (так как  $|Z(D_4)| = 2$ , то, согласно упражнению 1,  $|\text{Out}(G)| = 2$ ).

N)

Все комплексные корни из 1 степеней  $p^i, i = 0, 1, 2, \dots$ , образуют бесконечную группу  $C(p^\infty)$ . Она называется квазициклической, поскольку любое конечное число её элементов порождает циклическую группу. Проверить это и показать, что

$$C(p^\infty) = \langle a_1, a_2, a_3, \dots | a_1^p = 1, a_{i+1}^p = a_i; i = 1, 2, 3, \dots \rangle.$$

12 (J. Monthly, 80, № 9, 1973). Пусть

$$G = \langle a, b | aba = ba^2b, a^3 = e, b^{2n-1} = e \rangle$$

где  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что  $n = 1$ , т. е.  $b = e$  и фактически  $G = \langle a | a^3 = e \rangle$  - циклическая группа порядка

3.

12

N)

Построить мономорфизм  $f : S_n \rightarrow GL(n)$  такой, что матрица  $f(\pi)$ ,  $\pi \in S_n$ , имеет определитель  $\det f(\pi) = \varepsilon_\pi$ .

Матрицы вида  $f(\pi)$ ,  $\pi \in S_n$ , называются матрицами перестановок. Ограничение  $f$  на  $A_n$  является мономорфизмом в  $SL(n, \mathbb{R})$ . Композиция  $f \circ L$  отображений  $L : G \rightarrow S_n$  (теорема Кэли) и  $f : S_n \rightarrow GL(n)$  приводит к мономорфизму  $G \rightarrow GL(n)$  для любой конечной группы  $G$ .

Выписать отображение  $f$  в явном виде при  $n = 3$ .

13

N)

Дополнить деталями следующее формальное определение свободной группы в  $F_n$  ранга  $n$ . К алфавиту  $A = \{a_1, a_1^{-1}, \dots, a_n, a_n^{-1}\}$ , состоящему из  $n$  букв  $a_1, \dots, a_n$  и их "антиподов"  $a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ , добавляется символ  $e := \emptyset$ . Пусть  $S$  - множество всех "слов", получающихся выписыванием этих  $2n + 1$  символов в любом порядке в строки конечной длины. В словах допускаются повторения символов. Под произведением  $uv$  двух слов  $u, v$  понимается приписывание слова  $v$  к концу слова  $u$ . Обратным к  $u = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_m}^{\varepsilon_m}$ ,  $\varepsilon_k = \pm 1$ ,  $k = 1, \dots, m$ , называется слово  $u^{-1} = a_{i_m}^{-\varepsilon_m} \dots a_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ ,  $e^{-1} = e$ . На  $S$  вводится отношение эквивалентности  $\sim$ . Именно, два слова считаются эквивалентными, если одно получается из другого в результате применения конечного числа следующих элементарных преобразований:

$$\begin{aligned} ee &\sim e, \\ a_i a_i^{-1} &\sim e, \quad a_i^{-1} a_i \sim e, \\ a_i e &\sim a_i, \quad a_i^{-1} e \sim a_i^{-1}, \\ ea_i &\sim a_i, \quad ea_i^{-1} \sim a_i^{-1}. \end{aligned}$$

В каждом классе эквивалентности содержится одно-единственное "несократимое" (кратчайшее) слово. На классах эквивалентности по отношению определена ассоциативная операция умножения (и обращение классов), индуцированная умножением слов. Единицей будет класс эквивалентности "пустого" слова  $e$ . Множество классов эквивалентности с данной операцией умножения и есть как раз свободная группа  $F_n$  с  $n$  свободными образующими  $a_1, \dots, a_n$  (свободная группа ранга  $n$ ).

Пр и м е р. По "восьмёрке", охватывающей своими петлями два столба, бегает в разных направлениях котёнок с нитяной шпилькой, укладывая последующие витки ниток поверх предыдущих. Когда котёнок находится в центре между столбами, то направление его движения может меняться произвольным образом. Пройденные им пути с начальными и конечными точками в центре интерпретируются, очевидно, как элементы свободной группы  $F_2$  ранга 2.

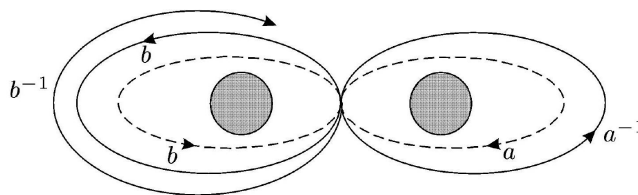


Рис. 3

Несократимым словам отвечают натянутые нитки, освобождённые от тривиальных петель  $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ . На рис. 3 участки  $a$  и  $a^{-1}, b$  и  $b^{-1}$  изображены геометрически различными лишь для наглядности. Наш пример реализует  $F_2$  в виде совокупности классов "гомотопически эквивалентных путей" (топологическая терминология) лемнискаты. В этом смысле фундаментальной группой лепестка, изображённого на рис. 6 в комментариях к 3.3.2 в разделе ответов и решений, будет свободная группа  $F_5$ .

## 9.3.5 Exercises about solvable and simple groups

N)

Цепочка подгрупп

$$e = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n \subset G_{n+1} = G$$

где  $G_{i-1} \triangleleft G_i$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ , называется нормальным рядом группы  $G$ . Нормальным называется также ряд убывающих подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset G_{n+1} = e$$

где  $G_{i+1} \triangleleft G_i$ .

Если все члены ряда (\*) различны и  $G_{i-1} \triangleleft H \triangleleft G_i \implies H = G_{i-1}$  или  $H = G_i$  при всех  $i$ , то говорят о композиционном ряде группы  $G$ . Факторгруппы  $F_i = G_i/G_{i-1}$  в этом случае называются композиционными факторами.

Показать, что:

N)

любой нормальный ряд конечной группы можно уплотнить до композиционного ряда, вставляя в него дополнительные члены до тех пор, пока это будет возможно;

N)

факторы  $F_i$  являются простыми группами (или циклическими группами простых порядков);

N)

группа  $G$  разрешима ровно тогда, когда все её композиционные факторы являются циклическими группами простых порядков.

Упомянем без доказательства о теореме Жордана-Гёльдера, согласно которой набор композиционных факторов группы  $G$  с точностью до изоморфизма и порядка следования не зависит от выбора композиционного ряда.

1

N)

Доказать, что любая конечная  $p$ -группа разрешима.

N)

Доказать простоту знакопеременной группы  $A_n$ ,  $n \geq 5$ , следуя набросанной ниже схеме рассуждений.

а) В нормальной подгруппе  $K \triangleleft A_n$ ,  $K \neq e$ , следует взять перестановку  $\pi \neq e$ , оставляющую на месте максимально возможное число  $m$  символов из  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ . Если  $m = n - 3$ , то  $\pi = (ijk)$  и  $K = A_n$  (см. [ВА I, гл. 4, 2, упр. 11]), поэтому считаем  $m < n - 3$ .

б) Если  $\pi = (123\dots)$ ... - разложение  $\pi$  на независимые циклы, то чётность  $\pi$  и условие  $m < n - 3$  влекут неравенство  $m < n - 5$ . Возможно ещё, что  $\pi = (12)(34)\dots$  состоит из независимых циклов длины 2.

в) В любом случае рассмотреть коммутатор  $(\pi, \sigma) = \pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1} \neq e$  с  $\sigma = (345)$  и проверить, что он оставляет на месте более  $m$  символов. Это противоречит выбору  $m$  и доказывает утверждение.

3

N)

Показать, что знакопеременная группа  $A_5$  не содержит подгрупп порядков 15 и 20.

## 9.3.6 Exercises about Silov 's theorems

N)

Найти число силовских 5-подгрупп в  $A_5$ .

N)

Проверить, что множество  $P$  матриц

$$\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \pm \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \pm \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \pm \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

над  $Z_3$  составляет группу, изоморфную группе кватернионов  $Q_8$  и являющуюся силовой 2-подгруппой в  $SL(2, Z_3)$ . Показать, что  $P \triangleleft SL(2, Z_3)$ .

2

N)

Показать, что группы  $S_4$  и  $SL(2, Z_3)$  не изоморфны. Будут ли изоморфны группы  $PSL(2, Z_3)$  и  $A_4$ ?  
4. Доказать, что всякая группа  $G$  порядка  $pq$  ( $p < q$  - простые числа) является либо циклической, либо неабелевой с нормальной силовой  $q$ -подгруппой, причём последнее возможно тогда и только тогда, когда  $q - 1$  делится на  $p$ . В частности, все группы порядка 15 циклические.

N)

Получить заново (см. [BA I, гл. 61, пример]) сравнение  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  для простого  $p$  путём прямого подсчёта числа  $N_p$  силовских  $p$ -подгрупп в симметрической группе  $S_p$ .

N)

Убедиться в том, что группа  $G$  порядка  $|G| \leq 30$  не может быть простой.

## 9.3.7 Exercises about linear Lie groups

N)

Показать, что для каждой однопараметрической подгруппы  $\sigma$  группы  $GL(n, \mathbb{R})$  существует матрица  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , такая, что  $\sigma(t) = \exp(tA)$ .

N)

Автоморфизмы алгебры Ли  $L(G)$  данной линейной группы Ли  $G$  в свою очередь образуют линейную группу Ли  $\text{Aut}(L(G))$ . Если  $\Gamma_t$  - некоторая кривая в  $\text{Aut}(L(G))$ , то  $\Gamma_t[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\Gamma_t \mathbf{a}, \Gamma_t \mathbf{b}]$ . Дифференцирование при  $t = 0$  приводит в обозначении  $\mathcal{D} = \left(\frac{d}{dt} \Gamma_t\right)_{t=0}$  (считаем  $\Gamma_0 = E$ ) к соотношению

$$\mathcal{D}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathcal{D}\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathcal{D}\mathbf{b}]$$

которое позволяет назвать  $\mathcal{D}$  дифференцированием алгебры Ли  $L(G)$ . С этим понятием мы уже встречались в [BA II].

Доказать, что если  $\mathcal{D}$  - дифференцирование алгебры Ли  $L(G)$ , то  $\exp \mathcal{D}$  - её автоморфизм.

## 9.3.8 Exercises about the basics of representation theory

N)

Группа  $SO(2)$  задаётся своим естественным двумерным представлением

$$\Phi'(\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

неприводимым над  $\mathbb{R}$ . Проверить, что

$$A\Phi'(\theta)A^{-1} = \begin{vmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{vmatrix} \quad \text{для} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

Значит,  $\Phi'$  - прямая сумма двух неэквивалентных (в данном случае просто различных) одномерных представлений.



1

N)

Неприводимо ли при  $n = 2$  и  $n = 3$   $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ -пространство  $M_n^0(\mathbb{C})$  в разложении (5)?

N)

Пусть  $\Phi$  и  $\Psi$  - неприводимые комплексные представления циклической группы  $\langle a | a^n = e \rangle$  порядка  $n$ . Показать, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(a^k) \overline{\Psi(a^k)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi \approx \Psi \\ 0, & \text{если } \Phi \not\approx \Psi \end{cases}$$

3

N)

Опираясь на упр. 3, убедиться в справедливости следующего утверждения. Любую комплекснозначную функцию  $f$  на конечной циклической группе  $\langle a | a^n = e \rangle$  можно записать в виде разложения "по элементарным гармоникам"

$$f(a^k) = \sum_{m=0}^{n-1} c_m \varepsilon^{mk}, \quad \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$$

"Коэффициенты Фурье"  $c_m$  вычисляются по формуле

$$c_m = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a^k) \varepsilon^{-mk}$$

4

N)

Из формулы для числа ожерелий (см. начало главы) вывести элементарные следствия:

- а)  $q^p - q \equiv 0 \pmod{p}$  (малая теорема Ферма, см. 4 гл. 4);
- б)  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ .

### 9.3.9 Exercises about unitarity and reducibility

N)

Всякое одномерное непрерывное представление группы  $(\mathbb{R}, +)$  (когда близким числам соответствуют близкие операторы) имеет вид  $\Phi^{(\alpha)} : t \mapsto e^{i\alpha t}$ , где  $\alpha$  - комплексное число. Показать, что  $\Phi^{(\alpha)}$  унитарно тогда и только тогда, когда  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

N)

Ядро гомоморфизма  $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  группы  $(\mathbb{R}, +)$  на  $\mathrm{SO}(2)$  состоит из чисел  $t = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

Таким образом,  $\mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ , и каждому неприводимому унитарному представлению  $\Phi$  (согласно результатам 4 оно обязательно одномерно) группы  $\mathrm{SO}(2)$  отвечает неприводимое унитарное представление

$$\tilde{\Phi} : t + 2\pi m \mapsto \Phi(t), \quad 0 \leq t < 2\pi$$

группы  $\mathbb{R}$ , для которого  $\tilde{\Phi}(2\pi) = \Phi(0) = 1$ . Вывести из упр. 1, что  $\tilde{\Phi} = \Phi^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . В сочетании с замечанием 3) в п. 1 это означает, что всякое неприводимое представление группы  $SO(2)$  имеет вид  $\Phi^{(n)}(t) = e^{int}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Проверить, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \cdot \overline{e^{ilt}} dt = \delta^{kl}$$

(сравнить с соотношением в упр. 3 из 1: порядок  $n$  заменён "объёмом"  $2\pi$  группы  $SO(2)$ ). В анализе система функций  $\{e^{int}\}$  служит классическим примером полной ортонормированной системы периодических функций (или функций на окружности  $S^1 \sim SO(2)$ ; см., в частности, [BA II]). С этого начинается обширная теория рядов Фурье.

2

N)

При помощи теоремы Машке доказать, что любое точное комплексное двумерное представление неабелевой конечной группы неприводимо.

### 9.3.10 Exercises about finite groups of rotations

N)

В группе икосаэдра  $I$ , помимо единичной подгруппы, имеется 15 сопряжённых циклических подгрупп порядка 2, 10 сопряжённых циклических подгрупп порядка 3 и 6 сопряжённых циклических подгрупп порядка 5. Доказать, что  $I$  простая группа.

N)

Установить изоморфизм между группами  $I$  и  $A_5$ .

N)

Показать, что если  $H$  - конечная подгруппа нечётного порядка в  $SU(2)$  или  $SO(3)$ , то  $H$  циклическая.

N)

Если конечная подгруппа  $H \subset SU(2)$  не является прообразом какой-либо подгруппы  $G \subset SO(3)$ , то  $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ . Убедиться в этом.

N)

Показать, что с точностью до сопряжения

$$D_3^* = \left\langle \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \right\|; \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \right\rangle.$$

5

N)

Что общего между собой имеют бинарная группа икосаэдра  $I^*$  и группа

$$SL(2, Z_5) = \left\{ \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| \mid ad - bc = 1; a, b, c, d \in Z_5 \right\}?$$

6

N)

Пусть атомы  $q$  различных сортов ( $q < 200$ ) располагаются всевозможными способами (без учёта каких-либо химических связей) в вершинах правильного многогранника  $M$ . "Молекулы", получающиеся друг из друга поворотом вокруг некоторой оси, не различаются. Пусть  $f(M, q)$  - число различных молекул. Получить формулы

$$\begin{aligned} f(\Delta_4, q) &= \frac{q^2}{12} (q^2 + 11), \\ f(\square_6, q) &= \frac{q^2}{24} (q^6 + 17q^2 + 6), \\ f(\Delta_8, q) &= \frac{q^2}{24} (q^4 + 3q^2 + 12q + 8). \end{aligned}$$

7

N)

Показать, что подсчёт числа различных раскрасок граней многогранника  $M$  красками  $q$  сортов приводит в случае тетраэдра  $\Delta_4$  к той же формуле, что и в упр. 7, а в случае куба и октаэдра формулы поменяются местами.

### 9.3.11 Exercises about characters of linear representations

N)

Пусть  $\Phi, \Psi$  - неприводимые комплексные представления конечной группы  $G$ . Получить обобщение теоремы 2

$$|G|^{-1} \sum_g \chi_\Psi(hg) \overline{\chi_\Phi(g)} = \delta_{\Phi, \Psi} \frac{\chi_\Phi(h)}{\chi_\Phi(e)}$$

Здесь  $h$  - произвольный элемент группы  $G$ ;  $\delta_{\Phi, \Psi} = 1$  или  $\delta_{\Phi, \Psi} = 0$  в зависимости от эквивалентности или неэквивалентности  $\Phi$  и  $\Psi$ .

1

N)

Применить критерий неприводимости, основанный на характерах, к представлению  $\Phi^{(3)}$  группы  $S_3$  из примера 1 п. 12.

N)

Доказать при помощи леммы Шура, что все неприводимые представления над  $\mathbb{C}$  абелевой группы  $G$  одномерны.

N)

Если группа  $G$  обладает автоморфизмом  $\tau$ , то с каждым линейным представлением  $(\Phi, V)$  этой группы ассоциируется ещё одно представление  $(\Phi^\tau, V)$ , определённое по правилу  $\Phi^\tau(g) = \Phi(\tau(g))$ . Проверить, что это действительно так, и показать, что неприводимость  $\Phi$  влечёт неприводимость  $\Phi^\tau$ . Как правило,  $\Phi^\tau \approx \Phi$ , но бывают случаи, когда получается новое представление. Что следует ожидать в случае внутреннего автоморфизма?

Пусть  $G = A_5$  и  $\Phi$  - представление, рассмотренное в примере 2. Отображение  $\tau : \pi \mapsto (12)\pi(12)^{-1}$  является (внешним) автоморфизмом группы  $A_5$ , переставляющим классы с представителями  $(12345)$  и  $(12354)$ . Множества значений характеров  $\chi$  и  $\chi^\tau$  получаются друг из друга перестановкой местами  $(1 + \sqrt{5})/2$  и  $(1 - \sqrt{5})/2$ . Показать, что характеры  $\chi^\tau$  и  $\chi$  неэквивалентны.

4

N)

Пусть  $\Phi : G \longrightarrow U(n), \Psi : G \longrightarrow U(n)$  - эквивалентные унитарные неприводимые представления конечной группы  $G$ . Доказать, что найдётся унитарная матрица  $C$ , для которой  $C\Phi_g C^{-1} = \Psi_g \forall g \in G$ .

N)

Доказать, что центр  $Z(G)$  конечной группы  $G$ , обладающей точным неприводимым представлением над  $\mathbb{C}$ , всегда тривиальный или циклический.

N)

Пусть  $g \mapsto \Phi_g, g \mapsto \Psi_g$  - два матричных комплексных представления конечной группы  $G$ . Предположим, что для каждого  $g \in G$  найдётся невырожденная матрица  $C_g$  такая, что  $C_g \Phi_g C_g^{-1} = \Psi_g$ . Доказать, что существует невырожденная матрица  $C$ , не зависящая от  $g$ , для которой  $C\Phi_g C^{-1} = \Psi_g$ .

### 9.3.12 Exercises about representing rotation groups

N)

Получить соотношение (4), выписывая в явном виде выражение  $t_{ij} = (\Gamma_i, \chi_j)_G$  для коэффициентов разложения  $\Gamma_i = \sum_j t_{ij} \chi_j$  базисной центральной функции  $\Gamma_i$  (см. (7) из 4) через неприводимые характеры.

N)

Проверить (и вспомнить об изоморфизме между векторным пространством  $V$  и сопряжённым к нему пространством  $V^*$  линейных функций), что отображение  $\tau : A \longrightarrow \hat{\hat{A}}$ , определённое условием

$$a^\tau(\chi) = \chi(a)$$

задаёт изоморфизм абелевой группы  $A$  на  $\hat{\hat{A}}$ .

Это упражнение вместе с теоремой 4 устанавливает часть так называемого закона двойственности для конечных абелевых групп. Аналогичный, но гораздо более глубокий закон двойственности для топологических абелевых групп, приводящий к важным следствиям, был установлен в 30-х годах Л.С. Понтрягиным.

2

N)

Доказать, что если конечная абелева группа  $A$  допускает точное комплексное неприводимое представление, то  $A$  - циклическая группа.

N)

Пусть  $A$  - конечная абелева группа,  $B$  - её подгруппа. Доказать, что любой характер группы  $B$  продолжается до характера группы  $A$  и число таких продолжений равно индексу  $(A : B)$ . 5. Обосновать фразу перед заключительными скобками в В) из п. 4.

N)

Чему равна средняя величина  $\frac{1}{|G|} \sum_g \chi(g)$  значений комплексного характера  $\chi$  на элементах конечной группы  $G$ ?

N)

Собрать из разных мест таблицы, относящиеся к группе  $A_5$ , в сводную таблицу характеров

| 60<br>$A_5$ | 1<br>$e$ | 15<br>(12)(34) | 20<br>(123) | 12<br>(12345)      | 12<br>(12354)      |
|-------------|----------|----------------|-------------|--------------------|--------------------|
| $\chi_1$    | 1        | 1              | 1           | 1                  | 1                  |
| $\chi_2$    | 3        | -1             | 0           | $(1 + \sqrt{5})/2$ | $(1 - \sqrt{5})/2$ |
| $\chi_3$    | 3        | -1             | 0           | $(1 - \sqrt{5})/2$ | $(1 + \sqrt{5})/2$ |
| $\chi_4$    | 4        | 0              | 1           | -1                 | -1                 |
| $\chi_5$    | *        | *              | *           | *                  | *                  |

Дать описание неприводимых представлений с характерами  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ . Заполнить последнюю строку таблицы, используя второе соотношение ортогональности (4) для характеров.

7

N)

Пусть  $P = \langle A^i B^j C^k; 0 \leq i, j, k \leq p-1 \rangle$  - группа порядка  $p^3$ , рассмотренная в упр. 3 из 3 гл. 1;  $V = \langle e_0, e_1, \dots, e_{p-1} \rangle_{\mathbb{C}}$  - комплексное векторное пространство размерности  $p$ ;  $\varepsilon$  - примитивный корень степени  $p$  из 1;  $A, B, C$  линейные операторы на  $V$ , определённые соотношениями

$$Ae_i = e_{i+1}, \quad B^k e_i = \varepsilon^{-ki} e_i, \quad C^k e_i = \varepsilon^k e_i, \quad 0 \leq i \leq p-1$$

(нижние индексы у базисных элементов берутся по модулю  $p$ ).  
Показать, что отображение

$$\Phi^{(k)} : A \mapsto A, B \mapsto B^k, C \mapsto C^k$$

задаёт линейное неприводимое представление группы  $P$ . Представления  $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(p-1)}$  попарно неэквивалентны и вместе с  $p^2$  одномерными представлениями ( $p^2$ -индекс коммутанта  $P' = \langle C \rangle$  в  $P$ ) исчерпывают все неприводимые комплексные представления группы  $P$ .

8

N)

Дополнить вычислениями следующее рассуждение. Пусть

$$D_n = \langle a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{n-1} \rangle$$

N)

группа диэдра порядка  $2n$ , свойства которой (включая описание классов сопряжённых элементов) даны в примере 1 из п. 54 гл. 1. Так как  $\langle a \rangle \triangleleft D_n$ , то отображениями  $a \mapsto 1, b \mapsto 1$  и  $a \mapsto -1, b \mapsto -1$  задаются два одномерных представления. Пусть  $\varepsilon$  - примитивный корень  $n$ -й степени из 1. Тогда отображение

$$\Phi^{(j)} : a \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon^j & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-j} \end{pmatrix}$$

будет определять представление степени 2. Представление  $\Phi^{(j)}$  неприводимо при  $j = 1, 2, \dots, [(n-1)/2]$  ( $[\alpha]$  - целая часть вещественного числа  $\alpha$ ). При  $n = 2m$  представление  $\Phi^{(m)}$  распадается в прямую сумму двух одномерных представлений:  $a \mapsto -1, b \mapsto 1$  и  $a \mapsto -1, b \mapsto -1$ . Это согласуется с тем фактом, что коммутант  $D'_{2m}$  имеет индекс 4 в  $D_{2m}$  и  $D_{2m}/D'_{2m} \cong Z_2 \times Z_2$ . Все указанные представления неприводимы и составляют полное множество неприводимых комплексных представлений группы диэдра. Найти вещественную реализацию представлений  $\Phi^{(j)}$ . Указать в явном виде изоморфизм (эквивалентность)  $\Phi^{(j)} \approx \Phi^{(k)}, k > m, j \leq m$ . 10. Кристаллографические группы (к задаче 2 из 2 гл. 1 в [BA I]). Пусть  $E$  -  $n$ -мерное евклидово пространство и  $V$  - ассоциированное с ним векторное пространство с евклидовым скалярным произведением. Всякому движению  $d$  пространства  $E$  отвечает ортогональное линейное преобразование  $\bar{d} \in O(n)$ , причём так, что  $\overline{d_1 d_2} = \bar{d}_1 \bar{d}_2$ . Группа  $D$  движений пространства называется *ис-таллографической группой*, если  $D$ -орбита произвольной точки дискретна (не имеет предельных точек) и существует компактное множество  $M \subset E$ , для которого  $D(M) = \bigcup_{d \in D} d(M) = E$ . Справедлива теорема Шёнфлиса-Бибераха, согласно которой

кристаллографическая группа  $D$  содержит  $n$  независимых аффинных переносов, порождающих в  $D$  нормальную подгруппу  $L$ , и  $\bar{D} \cong D/L$  конечная группа (точечная кристаллографическая группа). Всего геометрически различных точечных кристаллографических групп при  $n = 3$  имеется 32. Среди них, очевидно, должны быть группы, содержащие отражения (несобственные движения). Из условий кристаллографичности следует, что всякое собственное вращение из  $\bar{D}$  изображается матрицей, подобной

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{ctr } A = 1 + 2\cos \theta \in \mathbb{Z}$ . Опираясь на теорему 2 из 3 и на отмеченное соображение, показать, что при  $n = 3$  точечными кристаллографическими группами без отражений будут, лишь циклические  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6$ , диэдральные  $D_2, D_3, D_4, D_6$ , группа тетраэдра  $T$  и группа куба (октаэдра)  $O$ .

### 9.3.13 Exercises about SU(2), SO(3)

N)

Построить  $2m + 1$  линейно независимых однородных гармонических многочленов степени  $m$ .

N)

Показать, что всякий однородный многочлен  $f \in P_m$  записывается в виде линейной комбинации с коэффициентами, зависящими от  $x^2 + y^2 + z^2$ , гармонических многочленов степеней  $m, m - 2, m - 4, \dots$

N)

Вывести из упр. 2, что всякая полиномиальная функция  $\tilde{g} : (X, Y, Z) \mapsto g(x, y, z)$  на сфере  $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  разлагается по сферическим функциям - ограничениям гармонических многочленов на  $S^2$ .

N)

Показать, не обращаясь к полному описанию неприводимых представлений группы SO(3), что гомоморфизм  $\tau : \text{SO}(3) \longrightarrow \text{SU}(2)$  может быть только тривиальным.

### 9.3.14 Exercises about tensor product of representations

N)

При помощи формулы (6) и таблиц из п. 12, п. 25, п. 45 проверить, что справедливы разложения

$$\Phi^{(3)} \otimes \Phi^{(3)} \approx \Phi^{(1)} \dot{+} \Phi^{(2)} \dot{+} \Phi^{(3)}$$

для тензорного квадрата двумерного представления  $\Phi^{(3)}$  симметрической группы  $S_3$  и

$$\Phi^{(5)} \otimes \Phi^{(5)} \approx \Phi^{(1)} \dot{+} \Phi^{(2)} \dot{+} \Phi^{(3)} \dot{+} \Phi^{(4)}$$

для тензорного квадрата двумерного представления  $\Phi^{(5)}$  группы кватернионов  $Q_8$ .

1

N)

Представления прямого произведения групп. Пусть имеются две группы  $G, H$  с линейными представлениями  $(\Phi, V), (\Psi, W)$ . Тогда, полагая

$$(\Phi \otimes \Psi)(g \cdot h) = \Phi(g) \otimes \Psi(h)$$

где  $g \cdot h$  - элемент прямого произведения  $G \times H$  групп  $G, H$ , мы заставим  $G \times H$  действовать на тензорном произведении  $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ ; как обычно,

$$(\Phi(g) \otimes \Psi(h))(v \otimes w) = \Phi(g)v \otimes \Psi(h)w$$

Проверить, что так определённое отображение

$$\Phi \otimes \Psi : G \times H \longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W)$$

является представлением группы  $G \times H$  с характером  $\chi_{\Phi \otimes \Psi} = \chi_{\Phi} \chi_{\Psi}$ . Доказать следующее утверждение. Пусть  $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(r)}$  (соответственно  $\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(s)}$ ) - все неприводимые представления группы  $G$  (соответственно  $H$ ). Тогда представления  $\Phi^{(i)} \otimes \Psi^{(j)}$  группы  $G \times H$  неприводимы, и все неприводимые представления группы  $G \times H$  исчерпываются представлениями

$$\Phi^{(i)} \otimes \Psi^{(j)}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq s.$$

2

N)

Формы  $xy, x^n + y^n$  являются инвариантами двумерной линейной группы диэдра

$$(D_n, \Phi) = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \varepsilon^n = 1$$

(см. упр. 9 из 5). Показать, что любой другой (целый) инвариант группы  $(D_n, \Phi)$  имеет вид многочлена от  $xy, x^n + y^n$ .

3

N)

Проверить, что группа кватернионов, рассматриваемая в своём двумерном неприводимом представлении, не обладает квадратичными и кубическими инвариантами. Что можно сказать о формах  $x^2y^2, x^4 + y^4$ ?

### 9.3.15 Exercises about the basics of ring theory

N)

Показать, что кольцо  $Q_M(\mathbb{Z})$  всех рациональных чисел  $a/bcb$ , не делящимся на фиксированное простое число  $p$ , содержит единственный максимальный идеал

$$J = \{a/b \in Q_M(\mathbb{Z}) \mid p \text{ делит } a\}.$$

Всякое кольцо, обладающее единственным максимальным идеалом, называется локальным кольцом.

1

N)

Показать, что в любом локальном кольце  $K$  с максимальным идеалом  $\mathfrak{m}$  элементы, не лежащие в  $\mathfrak{m}$ , обратимы.

N)

Идеал  $\mathfrak{p}$  кольца  $K$  с единицей называется простым, если факторкольцо  $K/\mathfrak{p}$  целостно. Всякий максимальный идеал прост. Дополнение  $M = K \setminus \mathfrak{p}$  в кольце  $K$  является мультипликативным подмножеством (моноидом, не содержащим 0). Кольцо  $Q_M(K)$  в этих условиях обозначается чаще символом  $M^{-1}K$  или просто  $K_{\mathfrak{p}}$ .

Показать, что кольцо  $K_{\mathfrak{p}}$  всегда локально и что его максимальный идеал  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$  состоит из частных вида  $a/b$ , где  $a \in \mathfrak{p}, b \in K \setminus \mathfrak{p}$ . Показать также, что  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \cap K = \mathfrak{p}$ .

Операция перехода от  $K$  к локальному кольцу  $K_{\mathfrak{p}}$  называется локализацией кольца  $K$  относительно простого идеала  $\mathfrak{p}$ .

## 9.3.16 More exercises about rings

N)

Доказать, что ненулевой элемент  $p$  факториального кольца  $K$  является простым тогда и только тогда, когда  $K/pK$  - целостное кольцо.

N)

Доказать, что если целостное кольцо  $K$  не является полем, то  $K[X]$  не является кольцом главных идеалов.

N)

Показать, что элементы  $x + y\sqrt{-3}$ , где  $x, y \in \mathbb{Z}$  или же  $x = (2k+1)/2, y = (2l+1)/2, k, l \in \mathbb{Z}$ , составляют целостное кольцо  $K$ . Проверить, что оно евклидово с функцией  $\delta = N$  (норма в  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ). Показать, что подкольцо  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \subset K$  не является даже факториальным.

N)

Найти все простые элементы кольца целых гауссовых чисел.

N)

Усовершенствовать следствие теоремы 6 в случае факториального кольца  $K$ , для чего, наряду с попарно взаимно простыми элементами  $a_1, \dots, a_n$ , ввести элементы  $\tilde{a}_i = \prod_{j \neq i} a_j$ . Найти  $b_i \in K$ , для которых

$$b_i \equiv 1 \pmod{a_i}, \quad b_i \equiv 0 \pmod{\tilde{a}_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Пусть  $x_1, \dots, x_n \in K$ . Ввести элемент  $x = \sum b_i x_i$  и проверить, что  $x \equiv x_i \pmod{a_i}, 1 \leq i \leq n$  (удобство, ощутимое в тех случаях, когда имеют дело с большим числом наборов  $x_1, \dots, x_n$ ).

5

N)

Применить предыдущее упражнение к модулям  $a_1 = 5, a_2 = 9$  и к парам  $(x_1, x_2) = (2, 5), (3, 2), (3, 5)$ . Что можно сказать о порядке  $x$  по модулю 45?

N)

Пусть  $p$  - нечётное простое число. Если сравнение  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  имеет решение, то целое число  $a$  называется квадратичным вычетом по модулю  $p$ , в противном случае - квадратичным невычетом. Символ Лежандра  $\left(\frac{a}{p}\right)$  определяется соотношением

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{p}, \\ 1, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ — квадратичный вычет,} \\ -1, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ — квадратичный невычет.} \end{cases}$$

Показать, что  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \iff a + p\mathbb{Z} \in (Z_p^*)^2$  и  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ . Далее,  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$  и число квадратичных вычетов в приведённой системе  $1, 2, \dots, p-1$  совпадает с числом невычетов. Проверить для небольших нечётных простых чисел  $p$  и  $q$  выполнение квадратичного закона взаимности

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

доказанного в общем случае (многими способами) Гауссом. Извлечь из теоремы 1 соотношение  $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ .



N)

Доказать (в обозначениях предыдущего упражнения), что  $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ , т.е. 2 является квадратом по mod  $p$  в точности тогда, когда  $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ .

N)

(Дополнение к [BA I, гл. 3, 4]). Пусть  $f(X) = f(\dots, x_{ij}, \dots)$  - ненулевой многочлен от  $n^2$  независимых переменных  $x_{ij} \in K, 1 \leq i, j \leq n$ , с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  или в некотором поле, рассматриваемый как функция матрицы  $X = (x_{ij})$ . Доказать, что если  $f(XY) = f(X)f(Y)$  для всех  $X, Y \in M_n(K)$ , то  $f(X) = (\det X)^m$ , где  $m$  - некоторое неотрицательное целое число. В частности,  $f(X) = \det X$ , коль скоро  $f(\text{diag}(x, 1, \dots, 1)) = x$ .

### 9.3.17 Exercises about modules

N)

Используя общие результаты о модулях над  $\mathbb{C}[X]$ , наметить схему доказательства теоремы о ЖНФ (см. [BA II]).

N)

Используя общие результаты о модулях над  $\mathbb{Z}$ , наметить схему доказательства теоремы о конечно порождённых абелевых группах.

N)

Пусть  $A = P[X_1, \dots, X_n]$  - кольцо многочленов от  $n$  переменных над полем  $P$ . Последовательность  $(f_1, \dots, f_r)$  из  $r$  многочленов  $f_i \in A$  называется унимодулярной, если  $Af_1 + Af_2 + \dots + Af_r = A$ , т.е.

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \dots + u_r f_r = 1$$

для некоторых  $u_i \in A, 1 \leq i \leq r$ .

Пусть, далее,  $V$  - модуль конечного типа над  $A$ . В связи с некоторыми тонкими вопросами из алгебраической геометрии французский математик Ж.-П. Серр (1955 г.) выдвинул гипотезу

$$\{V \oplus A^s \cong A^{s+t} \implies V \cong A^t\}$$

которой была придана следующая изящная форма: всякое соотношение (\*) можно записать в виде равенства

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_r \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r1} & u_{r2} & \dots & u_{rr} \end{vmatrix} = 1$$

при подходящих  $u_{ij} \in A$ . Это утверждение, несмотря на свою кажущуюся простоту, было доказано лишь в 1976 г. независимо А.А. Суслиным (Россия) и Д. Квилленом (США). Попробуйте это реализовать при небольших  $n$  и  $r$ .

Основная идея - изучить действие группы  $\text{GL}(r, A[X_1, \dots, X_{n-1}])$  на множестве унимодулярных последовательностей и использовать индукцию по  $n$ . С доказательством можно познакомиться по оригинальной статье: Суслин А.А. // ДАН СССР. - 1976. - Т. 229, № 5. - С. 1063-1066; или по докладу на семинаре Н. Бурбаки: Ferrand D. // Sm. N. Bourbaki, 28 me annuee, 1975/76, Juin 1976. Изложение вполне элементарное. Какой ценой оно достигнуто, можно судить по более раннему докладу на семинаре Н. Бурбаки: Bass H. // Sm. N. Bourbaki, 26 me annuee, 1973/74, Juin 1974. В указанной литературе содержатся постановки нерешённых задач. Весь круг вопросов очень хорош для обсуждения на спецсеминаре.

### 9.3.18 Exercises about algebras over fields

N)

Алгебра обобщённых кватернионов. Показать, что таблицей умножения

| $\cdot$ | 1     | $e_1$   | $e_2$  | $e_3$   |
|---------|-------|---------|--------|---------|
| 1       | 1     | $e_1$   | $e_2$  | $e_3$   |
| $e_1$   | $e_1$ | $n$     | $e_3$  | $ne_2$  |
| $e_2$   | $e_2$ | $-e_3$  | $m$    | $-me_1$ |
| $e_3$   | $e_3$ | $-ne_2$ | $me_1$ | $-nm$   |

с  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $nm \neq 0$ , на четырёхмерном векторном пространстве  $\mathbb{H}(n, m) = \langle 1, e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$  над  $\mathbb{Q}$  вводится структура ассоциативной алгебры с единицей. Использовать для этой цели представление

$$x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \mapsto A_x = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \sqrt{n} & x_2 \sqrt{m} + x_3 \sqrt{nm} \\ x_2 \sqrt{m} - x_3 \sqrt{nm} & x_0 - x_1 \sqrt{n} \end{pmatrix}$$

Определитель  $\det A_x = x_0^2 - x_1^2 n - x_2^2 m + x_3^2 nm$  называется нормой элемента  $x$ . Проверить, что при выполнении условия  $x \in \mathbb{H}(n, m), x \neq 0 \implies N(x) \neq 0$  пространство  $\mathbb{H}(n, m)$  является алгеброй с делением (обобщённой алгеброй кватернионов). Используя понятия и результаты упр. 7 из 2, показать, что при простом  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$  алгебра  $\mathbb{H}(2, p)$  будет алгеброй с делением.

1

N)

Пусть  $A$  - алгебра с единицей 1 над  $\mathbb{R}$ . Пусть на  $A$  задана операция сопряжения  $x \mapsto \bar{x}$ , обладающая свойствами  $\bar{\bar{x}} = x, \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ . Снабдим пространство  $A \oplus A = \{(x, y) | x, y \in A\}$  билинейной операцией умножения

$$(x, y)(u, v) = (xu - \bar{v}y, y\bar{u} + vx)$$

Получается алгебра, называемая удвоением алгебры  $A$ .

Проверить, что  $\mathbb{C}$  - удвоение алгебры  $\mathbb{R}$ , а  $\mathbb{H}$  - удвоение алгебры  $\mathbb{C}$ . Удвоение алгебры  $\mathbb{H}$  называется алгеброй Кэли  $\mathbb{C}\mathbb{D}$ .

Проверить, что  $\mathbb{C}a$  - некоммутативная и неассоциативная алгебра. Выразить в явном виде операцию сопряжения на  $\mathbb{C}a$ .

2

N)

Рассмотреть  $\mathbb{F}_{2^n}$  как векторное пространство  $V$  размерности  $n$  над  $\mathbb{F}_2$ . Наряду с операцией сложения, наследуемой из  $\mathbb{F}_{2^n}$ , ввести на  $V$  операцию умножения  $(x, y) \mapsto x \circ y = \sqrt{xy}$ . Здесь  $x \mapsto \sqrt{x}$  - автоморфизм на  $\mathbb{F}_{2^n}$ , обратный к  $x \mapsto x^2$ , так что  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ . Показать, что  $(V, +, \circ)$  - коммутативная (неассоциативная) алгебра над  $\mathbb{F}_2$ , обладающая свойствами: а) в  $V$  нет делителей нуля и нет единицы; б) уравнение  $a \circ x = b$  с  $a \neq 0$  однозначно разрешимо; в) группа автоморфизмов  $\text{Aut}(V)$  действует на  $V \setminus \{0\}$  транзитивно.

N)

В любой алгебре выполняется тождество для ассоциаторов

$$t(x, y, z) + (t, x, y)z = (tx, y, z) - (t, xy, z) + (t, x, yz)$$

Убедиться в этом прямой проверкой и показать, что если в алгебре  $A$  с единицей 1 над полем  $P$  для всех ассоциаторов имеет место включение  $(x, y, z) \in P \cdot 1$ , то  $A$  - ассоциативная алгебра.

4

N)

Пусть  $G$  и  $H$  - конечные группы и  $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}[H]$  - изоморфизм  $\mathbb{C}$ -алгебр. Можно ли утверждать, что  $G \cong H$ ?

N)

Пусть  $\Phi$  - комплексное матричное неприводимое представление степени  $n$  конечной группы  $G$ . Доказать, что если

$$\mathrm{tr} \{C\Phi_x\} = 0 \quad \forall x \in G$$

где  $C$  - постоянная  $(n \times n)$ -матрица, то  $C = 0$ .

### 9.3.19 Exercises Irreducible modules over the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2)$

N)

Задать на  $V_n$  структуру  $\mathfrak{su}(2)$ -модуля, используя формулы (2), возвращаясь к базисным элементам

$$\mathbf{k}_1 = \frac{1}{2}(e_{-1} + e_2), \quad \mathbf{k}_2 = \frac{i}{2}(e_{-1} - e_1), \quad \mathbf{k}_3 = -\frac{i}{2}e_0$$

и ставя им в соответствие линейные операторы  $K_1, K_2, K_3$ .

1

N)

Пусть  $L = \langle e_{-1}, e_0, e_1 \rangle$  - простая алгебра Ли с таблицей умножения (1) над алгебраически замкнутым полем  $F$  характеристики  $p > 2$ . Рассмотрим квадратные матрицы порядка  $p$

$$E_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{p-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{p-1} \\ \gamma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_0 = [E_{-1}, E_1] = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda + 2, \dots, \lambda + 2(p-2), \lambda + 2(p-1)).$$

Проверить, что соответствие  $e_i \mapsto E_i$ ,  $i = -1, 0, 1$ , устанавливает неприводимое матричное представление алгебры Ли  $L$ , зависящее от трёх параметров  $(\lambda, \beta, \gamma_0)$ . При этом

$$\gamma_k = \beta\gamma_0 + k\lambda + k(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, p-1$$

(Эта совершенно новая ситуация типична для представлений над полем конечной характеристики.)

### ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ Кострикин 3

Номер р.г.г. отсылает к упражнению  $\mathbf{r}$  из  $\mathbf{q}$  главы  $\mathbf{p}$ .

3.  $Q_8$  изоморфна группе этих матриц. 4. Нет.

1.2.1. Разложить  $G$  по  $H$  сначала в левые, а затем в правые смежные классы с теми же представителями.

1.3.1. Взять в качестве  $H$  стационарную подгруппу  $G_1$  точки  $1 \in \Omega$ , воспользоваться разложением (3) и положить  $\sigma(i) = g_i G_1$ .

1.3.3. Обратит внимание на то, что все элементы группы  $P$  имеют вид  $g = A^i B^j C^k$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

если  $g \notin Z(P)$ , то  $C_P(g) = \langle g \rangle Z(G)$ ,  $|C_P(g)| = p^2$ .

1.3.4. Если  $\sigma \in S_n$  и  $\pi = \pi_1 \dots \pi_m$ , то

$$\sigma \pi \sigma^{-1} = \sigma \pi_1 \sigma^{-1} \dots \sigma \pi_m \sigma^{-1}$$

далее,

$$\sigma(i_1 i_2 \dots i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_k))$$

для любого цикла  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  длины  $k$ .

1.3.8. В сумме  $\sum N(g)$  каждый элемент  $x \in \Omega$  подсчитывается  $|St(x)|$  раз. Стало быть, элементы, лежащие с  $x$  в одной орбите, вносят в  $\sum N(g)$  вклад, равный

$$(G : St(x)) \times |St(x)| = |G|.$$

1.3.9. 1) Если  $D(a)$  - группа, то  $e \in D(a)$ , так что  $ea = a^{-1}e$ , т.е.  $a^2 = e$  и  $D(a) = C(a)$ .

Если  $D(a)$  пусто, то  $E(a) = C(a) \cup D(a)$  - группа, так что считаем  $D(a)$  непустым множеством. Заметим, что  $xa = a^{-1}x \implies a^{-1}x^{-1} = x^{-1}a$ . Поэтому

$$x \in D(a) \iff x^{-1} \in D(a), \quad xa = a^{-1}x \iff ax = xa^{-1}.$$

Так как  $C(a)$  и  $D(a)$  замкнуты относительно взятия обратных, то таково же и множество  $E(a)$ .

Если  $x, y \in C(a)$ , то и  $xy \in C(a)$ . Если  $x, y \in D(a)$ , то

$$axy = xa^{-1}y = xya$$

т.е.  $xy \in C(a) \subset E(a)$ . Третья возможность:  $x \in D(a), y \in C(a)$ . В этом случае

$$axy = xa^{-1}y = xya^{-1}$$

так что  $xy \in D(a) \subset E(a)$ . Остаётся заметить, что  $e \in C(a) \subset E(a)$ .

1.4.9. Подсчитать число элементов порядка 2 или воспользоваться результатом упр. 8.

1.4.12.  $aba = ba^2b = ba^{-1}b \implies ab^2 = aba \cdot a^{-1}b = ba^{-1}b \cdot a^{-1}b = ba^{-1} \cdot aba = b^2a$ . Сделать отсюда заключение, что  $ab = ba$  и, следовательно, с учётом других соотношений  $b = e$ .

1.4.13. Любая матрица  $A = (a_{ij})$  размера  $n \times n$  записывается в виде объединения столбцов  $(a_{ij}) = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ . Определим отображение  $f: S_n \rightarrow GL(n)$ , полагая

$$\pi \mapsto f(\pi) = (E^{(\pi^1)}, \dots, E^{(\pi n)})$$

где  $E^{(i)}$  -  $i$ -й столбец единичной матрицы  $E$ . Таким образом,  $f(\pi)$  есть  $n \times n$ -матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой стоит ровно одна единица, а остальные места заняты нулями (матрица перестановки). Легко сообразить, что  $f(\pi) \in GL(n)$ .

Пусть  $\sigma, \tau$  - произвольные перестановки,  $\pi = \sigma\tau$  - их произведение. По определению в  $i$ -й строке матрицы  $f(\sigma) = (a_{is})$  и в  $j$ -м столбце матрицы  $f(\tau) = (b_{kj})$  отличными от нуля элементами будут соответственно  $a_{i,\sigma^{-1}i} = 1$  и  $b_{\tau j, j} = 1$ . Поэтому для матрицы  $f(\sigma)f(\tau) = (c_{ij})$  условие  $c_{ij} \neq 0$  эквивалентно условию  $\sigma^{-1}i = \tau j$ , т.е.  $i = \sigma\tau j = \pi j$ , а это как раз и означает, что  $f(\sigma)f(\tau) = f(\sigma\tau)$ . Следовательно,  $f$  - гомоморфизм.

Свойство  $\text{Ker } f = e$  очевидно, поскольку непосредственно из (\*) видно, что  $f(\pi) = E \implies \pi = e$ . Стало быть,  $f$  - мономорфизм.

Наконец, определитель - кососимметрическая функция своих столбцов. Поэтому  $\det f(\pi) = g(E^{(1)}, \dots, E^{(n)})$  - кососимметрическая функция аргументов  $E^{(1)}, \dots, E^{(n)}$ . Из (\*), а также из определения  $\varepsilon_\pi$  и действия  $S_n$  на  $g$  вытекает, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pi \det f(\pi) &= \varepsilon_\pi \cdot g(E^{(1)}, \dots, E^{(n)}) = (\pi \circ g)(E^{(1)}, \dots, E^{(n)}) = \\ &= g(E^{(\pi^1)}, \dots, E^{(\pi n)}) = \det(E^{(1)}, \dots, E^{(n)}) = \det E = 1. \end{aligned}$$

Стало быть,  $\det f(\pi) = \varepsilon_\pi$ .

Случаи  $n = 3$ :

$$\begin{aligned} e &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, (12) \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, (13) \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (23) &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, (123) \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, (132) \mapsto \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2.2.3. Группа  $S_4$  без центра, а  $SL(2, 3)$  имеет центр порядка 2. Да, группы  $A_4$  и  $PSL(2, 3)$  изоморфны.

2.2.4. Группа  $G$  порядка  $pq, p < q$ , обязательно имеет нормальную силовскую  $q$ -подгруппу, поскольку  $N_q = 1 + kq$  должно быть делителем  $G$ , а это возможно только при  $k = 0$ . Если и  $N_p = 1$ , то  $G$  - циклическая группа. При  $N_p = 1 + lp = q$  группа будет неабелевой.

2.2.6. Наиболее интересен случай  $|G| = 30$ . Прямая проверка с использованием теорем Силова показывает, что хотя бы одна из подгрупп  $G_p$  должна быть нормальной. В противном случае  $N_5 = 6, N_3 = 10$ , и получается 24 элемента порядка 5, 20 элементов порядка 3, что явно абсурдно.

2.3.9. Применить теорему о согласованных базисах. В случае совпадения рангов доказать заодно, что  $(F_n^{ab} : A) = \det C$ , где  $C$  - матрица перехода от базиса в  $F_n^{ab}$  к базису в  $A$ .

2.4.1. Положим  $\Gamma_t = \log \sigma(t)$ . Тогда  $\Gamma_t$  будет кривой в  $M_n(\mathbb{R})$  с  $\sigma(t) = \exp(\Gamma_t)$ . Если  $\Gamma'_0 = A$ , то нужно показать, что  $\Gamma_t$  - прямая в  $M(\mathbb{R})$ , проходящая через 0, т.е.  $\Gamma_t = tA$ . Зафиксировав  $t$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma'_t &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{t+s} - \Gamma_t}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log \sigma(t+s) - \log \sigma(t)}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log(\sigma(t)\sigma(s)) - \log \sigma(t)}{s}, \end{aligned}$$

поскольку  $\sigma$  - однопараметрическая подгруппа и  $t + s = s + t$ . Это показывает, что

$$\Gamma'_t = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log \sigma(s)}{s} = \Gamma'_0$$

Мы видим, что  $\Gamma'_t$  не зависит от  $t$ , являясь прямой. Итак, любой касательный вектор к  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  совпадает с производной в 0 некоторой однопараметрической подгруппы.

2.5.2. Пусть  $\mathcal{D}$  - дифференцирование алгебры Ли  $L(G)$ . Полагая  $c_t = [(\exp(t\mathcal{D}))\mathbf{a}, (\exp(t\mathcal{D}))\mathbf{b}]$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c_t &= [\mathcal{D}(\exp(t\mathcal{D}))\mathbf{a}, (\exp(t\mathcal{D}))\mathbf{b}] + [(\exp(t\mathcal{D}))\mathbf{a}, \mathcal{D}(\exp(t\mathcal{D}))\mathbf{b}] = \\ &= \mathcal{D}[(\exp(t\mathcal{D}))\mathbf{a}, (\exp(t\mathcal{D}))\mathbf{b}] = \mathcal{D}c_t \end{aligned}$$

Но дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}c_t = \mathcal{D}c_t$$

с начальным условием  $c_0 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  обладает единственным решением

$$c_t = (\exp(t\mathcal{D}))[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

Мы видим, что  $\exp(t\mathcal{D})$  - автоморфизм.

3.1.2. Да.

3.2.1. Продифференцировать равенство  $e^{i\alpha t} \overline{e^{i\alpha t}}$  по  $t$  и положить  $t = 0$ .

3.3.1. Посмотреть на доказательство теоремы 2 из §2 гл. 1.

3.3.2. Используя сопряжённость всех элементов порядка 2, показать, что они располагаются в "букете" (см. рис. 6) из пяти попарно непересекающихся (точнее, пересекающихся по  $e$ ) сопряжённых силовских подгрупп порядка 4. Группа  $I$  действует на букете сопряжением. Это действие точно, поскольку  $I$  - простая группа (см. упр. 1).

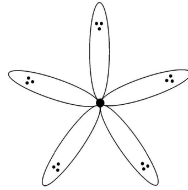


Рис. 6

3.4.3. Применить теорему о гомоморфизмах к случаю  $\Phi: \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ .

3.3.7. Применить соображения, использованные при подсчете числа ожерелий (задача 2 в начале главы).

3.4.1. Переписать соотношения (4) и (5) в виде

$$|G|^{-1} \sum_g \psi_{jj_0}(g) \varphi_{i_0 i}(g^{-1}) = \delta_{\Phi, \Psi} \frac{\delta_{ji} \delta_{j_0 i_0}}{\chi_{\Phi}(e)}$$

Умножить обе части этого равенства на  $\psi_{kj}(h)$  и просуммировать по  $j$ , приняв во внимание равенство  $\sum_j \psi_{kj}(h) \psi_{jj_0}(g) = \psi_{kj_0}(hg)$ . В получившемся соотношении

$$|G|^{-1} \sum_g \psi_{kj_0}(hg) \varphi_{i_0 i}(g^{-1}) = \delta_{\Phi, \Psi} \frac{\psi_{ki}(h) \delta_{j_0 i_0}}{\chi_{\Phi}(e)}$$

положить  $j_0 = k, i_0 = i$ , а затем суммированием по  $i$  и  $k$  перейти к характеристам.

3.4.3. Пусть  $\Phi$  - неприводимое представление,  $h$  - элемент из  $G$ . В силу коммутативности группы  $\Phi(g)\Phi(h) = \Phi(h)\Phi(g) \forall g \in G$ . Положив  $\sigma = \Phi(h)$  в лемме Шура, получим  $\Phi(h) = \lambda_h \mathcal{E}$ . Это верно для любого  $h \in G$ . Для неприводимого  $\Phi$  остаётся единственная возможность - быть одномерным.

3.4.5. По условию  $B\Phi_g B^{-1} = \Psi_g$  для некоторой матрицы  $B = (b_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ . Операция  $A \mapsto A^* = {}^t \bar{A}$ , применённая к  $B\Phi_g = \Psi_g B$ , даёт  $\Phi_g^{-1} B^* = B^* \Psi_g^{-1}$ , откуда  $\Phi_g^{-1} B^* B = B^* B \Phi_g^{-1}$ . По лемме Шура  $B^* B = \lambda \mathcal{E}$ . Далее,  $\lambda = \sum_{k=1}^n |b_{ki}|^2 = \mu \bar{\mu}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$  и  $C = \mu^{-1} B$  - искомая унитарная матрица.

3.4.6. Без ограничения общности считаем  $G$  матричной группой:  $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ , где  $n$  - степень представления. Пусть

$$C(G) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) | MX = XM \quad \forall X \in G\}$$

— централизатор группы  $G$  в  $M_n(\mathbb{C})$ . Очевидно, что  $C(G)$  - подкольцо, содержащее  $Z(G)$ . По лемме Шура каждая матрица в  $C(G)$ , отличная от нулевой, невырожденная. Следовательно,  $C(G)$  - тело. Его

центр  $K$  является полем и  $Z(G) \subseteq K$ . Таким образом,  $Z(G)$  - конечная подгруппа мультипликативной группы поля  $K$ . Как известно ещё из [BA I], такая подгруппа всегда циклическая.

3.4.7. Решение короче формулировки упражнения. Нужно заметить, что

$$\chi_\Phi(g) = \text{tr } \Phi_g = \text{tr } C_g \Phi_g C_g^{-1} = \text{tr } \Psi_g = \chi_\Psi(g) \quad \forall g \in G$$

т.е. характеры представлений  $\Phi$  и  $\Psi$  совпадают. Теперь достаточно применить следствие теоремы 2.

3.5.2. Из  $a^\tau(\chi_1\chi_2) = a^\tau(\chi_1)a^\tau(\chi_2)$  следует, что  $a^\tau$  - характер группы  $\hat{A}$ . Так как  $(aa')^\tau = a^\tau(a')^\tau$ , то  $\tau$  - гомоморфизм  $A$  в  $\hat{A}$ . Далее,

$$\text{Ker } \tau = \left\{ a \in A \mid a^\tau(\chi) = \chi(a) = 1 \forall \chi \in \hat{A} \right\} \implies \text{Ker } \tau = e$$

а  $|\hat{A}| = |\hat{A}| = |A| \implies \tau$  - изоморфизм.

3.5.7. 5, 1, -1, 0, 0.

3.6.2. Сравнивая размерности, получить разложение в прямую сумму пространств

$$P_m = H_m \oplus (x^2 + y^2 + z^2) H_{m-2} \oplus (x^2 + y^2 + z^2)^2 H_{m-4} \oplus \dots$$

3.6.4. Ввиду простоты  $\text{SO}(3)$  нетривиальность  $\tau$  означала бы, что  $\tau$  - точное представление степени 2. Но, как видно из примера 3 п. 4§5 или из описания конечных подгрупп в  $\text{SU}(2)$  (см. 3), даже ограничение  $\tau|_{\mathfrak{o}}$ ,  $\mathfrak{o} \cong S_4$  не может быть точным.

4.1.1. Очевидно, что  $J$  - собственный идеал в  $Q_M(\mathbb{Z})$ . Если  $c/d \notin J$ , то  $c \notin p\mathbb{Z}$ , и, следовательно,  $d/c \in Q_M(\mathbb{Z})$ . Это означает, что всякий идеал  $L$ , полученный из  $J$  добавлением хотя бы одного элемента  $c/d$ , содержит  $1 = c/d \odot d/c$  и, стало быть, совпадает с  $Q_M(\mathbb{Z})$ .

4.2.8. Рассмотрим примитивный корень  $\alpha$  степени 8 из 1 в алгебраическом замыкании  $\Omega_p$  поля  $\mathbb{F}_p$ . Так как  $\alpha^4 = -1$ , то  $\alpha^2 + \alpha^{-2} = 0$ ; кроме того,  $\alpha^5 = -\alpha, \alpha^{-5} = -\alpha^{-1}$ , откуда  $\alpha^5 + \alpha^{-5} = -(\alpha + \alpha^{-1})$ . Полагая  $\beta = \alpha + \alpha^{-1}$ , будем иметь  $\beta^2 = \alpha^2 + \alpha^{-2} + 2 = 2$ , так что  $p \equiv \pm 1 \pmod{8} \implies \beta^p = \alpha^p + \alpha^{-p} = \alpha + \alpha^{-1} = \beta \implies$

$$\implies 1 = \beta^{p-1} = (\beta^2)^{(p-1)/2} = 2^{(p-1)/2} \implies \left(\frac{2}{p}\right) = 1.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} p \equiv \pm 5 \pmod{8} \implies \beta^p &= \alpha^p + \alpha^{-p} = \alpha^5 + \alpha^{-5} = \\ &= -(\alpha + \alpha^{-1}) = -\beta \implies -1 = \beta^{p-1} = 2^{(p-1)/2} \implies \left(\frac{2}{p}\right) = -1. \end{aligned}$$

4.2.9. Если  $n = 1$  и  $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i, a_m \neq 0$ , то

$$f(xy) = \sum_{i=1}^m a_i x^i y^i = f(x)f(y) = f(x) \left( \sum_{i=1}^m a_i y^i \right)$$

где  $x, y$  - независимые переменные. Равенство коэффициентов при  $y^m$  показывает, что  $a_m x^m = f(x)a_m$  и, стало быть,  $f(x) = x^m$ . Если теперь в общем случае положить  $g(x) = f(x \cdot E)$ , то  $g(xy) = g(x)g(y)$ . Отсюда и из справедливости утверждения при  $n = 1$  вытекает, что  $g(x) = x^s$ . Так как  $X \cdot X^\vee = (\det X) \cdot E$ , то

$$f(X)f(X^\vee) = f((\det X)E) = g(\det X) = (\det X)^s.$$

Но  $f(X), f(X^\vee)$  и  $\det X$  - многочлены от  $x_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ , причём  $\det X$  неприводим (см. [BA I, гл. 5§3, упр. 7]). По теореме 4 о факториальности кольца многочленов любого числа переменных  $f(X) = c(\det X)^m, c$  - константа, причём  $f(XY) = f(X)f(Y) \implies c^2 = c$ , а так как  $c \neq 0$ , то  $c = 1$ .

4.4.2. Ясно, что  $(1, 0)$  - двусторонняя единица в  $A \oplus A$ . Положим  $e = (0, 1)$ . По определению  $e^2 = -1$ . Так как  $(x, 0)e = (0, x)$ , то, отождествив элемент  $x \in A$  с элементом  $(x, 0) \in A \oplus A$ , придём к выражению  $(x, y) = x + ye$ . Операция сопряжения в  $A \oplus A$  задаётся формулой  $(x, y) = (\bar{x}, -y)$ , т.е.  $\bar{x} + y\bar{e} = \bar{x} - ye$ . Если теперь  $a = x + ye, b = u + ve$ , то

$$\overline{ab} = \overline{xu} + \overline{yeu} + \overline{xve} + \overline{yeve} = \overline{ux} - \overline{u}(ye) - (ve)\bar{x} + (ve)(ye) = \bar{b}\bar{a}.$$

Таким образом, операция сопряжения определена правильно. Непосредственно проверяются свойства

$$ea = \bar{a}e, \quad a(be) = (ba)e$$

Всё это означает, что удвоение алгебры  $A$  некоммутативно, если операция сопряжения на  $A$  не является тождественной. Удвоение неассоциативно, если исходная алгебра  $A$  некоммутативна. Удвоение коммутативной и ассоциативной алгебры  $A$  ассоциативно. Эти замечания показывают, в частности, что восьмимерная алгебра Кэли  $\text{Ca}$  неассоциативна.

4.4.5. Нет. По теореме 4 для любых двух абелевых групп одинаковых порядков строение их групповых алгебр над  $\mathbb{C}$  одно и то же. Гораздо более тонкие вопросы возникают при изоморфизме групповых колец:  $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[H]$ .

4.4.6. Воспользоваться следствием теоремы 3:  $\langle \Phi_g | g \in G \rangle = M_n(\mathbb{C})$ . Приходим к выводу, что  $\text{tr}(CX) = 0$  для любой матрицы  $X \in M_n(\mathbb{C})$ , т.е.  $C = 0$ .

5.1.4. Рассмотрим поле разложения  $F$  многочлена  $X^p - a$ . Пусть  $\theta \in F$  - один из корней, так что  $a = \theta^p$  и  $X^p - a = (X - \theta)^p$ . Если теперь  $X^p - a = u(X)v(X)$ , где  $u(X)$  - нормализованный многочлен над  $P$  положительной степени  $m < p$ , то в силу факториальности  $F[X]$  должно выполняться равенство  $u(X) = (X - \theta)^m$ . В частности,  $\theta^m, \theta^p \in P \implies \theta \in P$ .

5.1.5. Согласно предыдущему упражнению достаточно убедиться, что равенство

$$X^p - Y = \left( X - \frac{g(Y)}{h(Y)} \right)^p$$

с  $g, h \in Z_p[Y]$  невозможно.

5.2.1. Согласно (8)  $X^d - 1 = \prod_{e|d} \Phi_e(X)$ . Поэтому

$$X^n - 1 = (X^d - 1) \prod_{s|n; s \neq d} \Phi_s(X) = (X^d - 1) \Phi_n(X) \prod_{s|n; s \neq d, n} \Phi_s(X)$$

Остаётся сослаться на (10).

5.2.2. Так как  $\Phi_n(X) = \prod (X - \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  пробегает примитивные корни, то при  $n > 1$  все  $\varepsilon$  не равны 1, и поэтому расстояние на комплексной плоскости от точки  $q$  до любого  $\varepsilon$  больше расстояния от  $q$  до 1. Стало быть,  $|\Phi_n(q)| = \prod (q - \varepsilon) > q - 1$  и  $q - 1$  никак не может делиться на  $\Phi_n(q)$ .

5.2.7. Перейти к уравнению  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  с  $x, y, z \in \mathbb{F}_p$ . По теореме Шевалле (см. упр. 4 из [BA I, гл. 6, §1]) общее число  $N$  решений этого уравнения делится на  $p$ . Пусть решений с  $xyz \neq 0$  не существует. Подсчитать тогда  $N$ , рассматривая отдельно два случая. Если не существует  $a \in \mathbb{F}_p$  с  $a^2 + 1 = 0$ , то решениями будут лишь

$$(0, 0, 0), (0, n, \pm n), (n, 0, \pm n), \quad n = 1, 2, \dots, p-1$$

и поэтому  $N = 4p - 3 \equiv 0 \pmod{p} \implies p = 3$ . Если  $a^2 + 1 = 0$  для некоторого  $a \in \mathbb{F}_p$ , то  $N = 6p - 5 \equiv 0 \pmod{p} \implies p = 5$ .

5.2.8. Вообще говоря, нет.

5.3.2. а)  $A_3$ ; б)  $S_3$ ; в)  $S_3$ ; г)  $Z_4$ ; д)  $D_4$ .

5.3.1. Над полем  $P(\zeta)$ ,  $\zeta^p = 1$ , многочлен  $X^p - a \in P[X]$  либо неприводим, либо распадается на линейные множители, когда все корни лежат в  $P(\zeta)$ . Предположим, что имеет место последнее и что  $u$  - один из корней. По теореме 4F/P будет расширением Галуа для любого  $F/P \subset P(\zeta)/P$ . В частности, минимальный многочлен  $f_u$  элемента  $u$  распадается в  $P(u)$  на линейные множители. Предположив, что  $u \notin P$ , т.е.  $\deg f_u \geq 2$ , рассмотрим другой его корень  $v \neq u$ . Тогда с точностью до выбора примитивного корня  $\zeta = u/v \in P(u)$  и  $P(u) = P(\zeta)$ . Это означает, что если  $X^p - a$  не имеет корней в поле  $P$ , то все его неприводимые множители одной и той же степени  $[P(\zeta) : P]$ , т.е.  $[P(\zeta) : P]$  делит простое число  $p$ . Но это исключается, поскольку  $1 < [P(u) : P] = [P(\zeta) : P] \leq p - 1$ . Итак, многочлен  $X^p - a$ , не имеющий корней в поле  $P$ , неприводим над  $P(\zeta)$ .

5.4.1.  $\theta + 1$

5.5.3. Предположив, что один из корней  $\alpha$  можно выразить через вещественные радикалы, мы должны заключить, что это справедливо и для остальных двух вещественных корней  $\beta, \gamma$ , поскольку они удовлетворяют квадратному уравнению с коэффициентами в поле  $P(\alpha)$ . Согласно теореме 13 порядок группы Галуа поля разложения нашего многочлена должен быть степенью двойки. Но это не так: порядок группы Галуа неприводимого многочлена степени 3 делится на 3. 5.5.4. а) Очевидно.

б)  $\sigma((\mathcal{L}(v))^n) = (\sigma(\mathcal{L}(v)))^n = (\zeta \mathcal{L}(v))^n = \mathcal{L}(v)^n \implies \mathcal{L}(v) \in P$ .

в) В качестве базиса поля  $F$  над  $P$  можно взять  $(1, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ . Положим  $u_j = \sigma^j(u)$  и допустим на время, что

$$\mathcal{L}(u^i) = u_0^i + \zeta^{-1} u_1^i + \dots + \zeta^{-(n-1)} u_{n-1}^i = 0$$

для  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . В таком случае строки матрицы  $(u_j^i), 0 \leq i < j \leq n-1$ , были бы линейно зависимы, а её определитель  $\det(u_j^i) = \prod_{k>l} (u_k - u_l)$  равнялся бы нулю. Но это не так, поскольку все элементы  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  попарно различны.

5.6.2. Действительно, предположим обратное. Тогда  $(g_1, \dots, g_m) \in \mathcal{S} \implies (\sigma g_1, \dots, \sigma g_m) \in \mathcal{S}$ . Так как  $G$  действует транзитивно на  $\mathcal{S}$  внутренним сопряжением, то найдётся  $g \in G$ , для которого  $\sigma g_i = g g_i g^{-1} \forall i$ . Но  $\langle g_1, \dots, g_m \rangle = G$  и, следовательно,  $\sigma$  - внутренний автоморфизм, вопреки предположению.

5.6.3. Чтобы доказать сильную жёсткость указанных троек, проще всего вычислить мощность  $|\tilde{\mathcal{S}}|$  в каждом случае, используя формулу (5) и известную нам таблицу неприводимых комплексных характеров

| $\cdot$  | 1A | 2A | 3A | 5A         | 5B         |
|----------|----|----|----|------------|------------|
| $\chi_1$ | 1  | 1  | 1  | 1          | 1          |
| $\chi_2$ | 3  | -1 | 0  | $\lambda$  | $\lambda'$ |
| $\chi_3$ | 3  | -1 | 0  | $\lambda'$ | $\lambda$  |
| $\chi_4$ | 4  | 1  | -1 | 0          | 0          |
| $\chi_5$ | 5  | 1  | -1 | 0          | 0          |

Здесь  $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2$ ,  $\lambda' = (1 - \sqrt{5})/2$ . Результат вычислений:

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{S}}(2A, 3A, 5A)| &= \frac{60^2}{4 \cdot 3 \cdot 5} (1 + 0 + 0 + 0 + 0) = 60 \\ |\tilde{\mathcal{S}}(2A, 5A, 5B)| &= \frac{60^2}{4 \cdot 5 \cdot 5} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 + 0\right) = 60 \\ |\tilde{\mathcal{S}}(3A, 5A, 5B)| &= \frac{60^2}{(3 \cdot 5 \cdot 5)} \left(1 + 0 + 0 + \frac{1}{4} + 0\right) = 60 \end{aligned}$$

Легко проверяется также, что любая тройка в  $\tilde{\mathcal{S}}$  порождает  $A_5$ .

5.6.4. Очевидные замечания:  $K_1(z)$  - целое число, и поэтому  $\overline{K_1(z)} = K_1(z)$ ;  $K_1$  - центральная функция. Далее рассуждаем, как в тексте, т.е. по лемме Шура имеем равенство

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Psi_i(xy x^{-1}) = \lambda_i E$$

где  $\Psi_i$  - представление с характером  $\chi_i$ ,  $\lambda_i = \chi_i(y)/\chi_i(e)$ . Из уравнения

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Psi_i(xy x^{-1} y^{-1}) = \lambda_i \Psi_i(y^{-1})$$

переходом к следу и последующим суммированием по  $y$  получаем, используя соотношения ортогональности,

$$\frac{1}{|G|} \sum_s K_1(g_s) |g_s^G| \chi_i(g_s) = \frac{1}{\chi_i(e)} \sum_y \chi_i(y) \overline{\chi_i(y)} = \frac{|G|}{\chi_i(e)}$$

( $g_s$  - представители классов сопряженности, записываемые в виде коммутатора). Умножаем на  $\overline{\chi_i(z)}$  и суммируем по  $i$ :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{s=1}^r K_1(g_s) |g_s^G| \sum_{i=1}^r \chi_i(g_s) \overline{\chi_i(z)} = |G| \sum_i \frac{\overline{\chi_i(z)}}{\chi_i(e)}$$

Но в левой части равенства стоит  $K_1(z)$ , поскольку  $\sum_{i=1}^r \chi_i(g_s) \overline{\chi_i(z)} = 0$ , если  $g_s^G \neq z^G$  и  $|C(z)|$  в противном случае. Таким образом,

$$K_1(z) = \overline{K_1(z)} = |G| \sum_i \frac{\chi_i(z)}{\chi_i(e)}$$

Теперь более или менее ясно, как получить выражение для  $K_m(z)$ .

## 9.4 Basic algebraic problems

### 9.4.1 Problems about representations of algebra

#### Adj representation of $\mathfrak{gl}_2$

Consider algebra  $\mathfrak{gl}_2$ . Find matrices in the adjoint representation in a basis:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

If you want, use computer to save time in matrix multiplication.

#### Solution

For each matrix in the basis  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , we introduce a 4 columns with 1 at each position. Now we do straightforward computations. For example, for  $e_2$  we have:

$$\text{ad}_{e_2} e_1 = -e_2, \quad \text{ad}_{e_2} e_2 = 0, \quad \text{ad}_{e_2} e_3 = e_1 - e_4, \quad \text{ad}_{e_2} e_4 = -e_3.$$



So the matrix should be:

$$\text{ad}(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

because if we act with it on column we will get a column that correspond to the proper  $e_i$ .

Others are done the same way.

The result is:

$$\text{ad}(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ad}(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ad}(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ad}(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note that result could have a different form if one use rows for basis vectors.

### Adj representation of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Special linear Lie algebra  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  has three basis vectors:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Find the matrices of  $X, Y, H$  in the adjoint representation and a matrix of a Killing form.

If you want, use computer to save time in matrix multiplication.

### Solution

We have nonzero commutators only  $[X, Y] = 2H$ ,  $[X, H] = 2Y$  and  $[Y, H] = 2X$ . So if each basis vector is a column,

$$\text{ad}(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ad}(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ad}(H) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Note that the result could have a different form if one use rows for basis vectors.

Now, from the definition, of the Killing form,  $B(X, Y) := \text{Tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$ , we plug all possible combinations of basis vectors, take trace and get  $B(u, v) \equiv u^T B v$  with

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

### Adj representation of arbitrary element

Let  $\mathfrak{g}$  be defined by the following commutator relations:  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_3, e_1] = e_2$ . Find the matrix of adjoint representation for an element  $\xi = ae_1 + be_2 + ce_3$

Prove that  $\mathfrak{g}$  is isomorphic to  $\mathfrak{so}(3)$ .

### Solution.

First, we determine  $[\xi, \mathfrak{g}] = [ae_1 + be_2 + ce_3, \mathfrak{g}]$ .

$$\begin{aligned} [\xi, e_1] &= 0 \cdot e_1 - be_3 + ce_2 = ce_2 - be_3 \\ [\xi, e_2] &= ae_3 + 0 \cdot e_2 - ce_1 = -ce_1 + ae_3 \\ [\xi, e_3] &= -ae_2 + be_1 + 0 \cdot e_3 = be_1 - ae_2 \end{aligned}$$

Thus by acting on column with the following matrix, the relations are fulfilled:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{so}(3)$  algebra is made of skew-symmetric matrices, and here we have them, so we have  $\mathfrak{so}(3)$  algebra.

## 9.5 Problems in Lie algebras

### 9.5.1 Problems about representations

#### FS-5.1

Check that the contragredient representation as defined in (5.16) is indeed a representation. Show that also the direct sum (5.17) and the tensor product (5.18) of two representations are again representations. Check that the tensor product obeys the associativity property (5.19), and that the prescription (5.20) defines a representation.

#### Solution

#### FS-5.2

Show that the prescription  $x \mapsto R(x) := R_1(x) \otimes R_2(x)$ , with  $R_1$  and  $R_2$  linear representations of some algebra  $\mathfrak{A}$ , does not yield a map linear in  $x$ , and hence in particular does not define a tensor product representation.

#### Solution

#### FS-5.3

Verify that the kernel  $\text{Ker}(f) \subseteq V$  and the image  $\text{Im}(f) \subseteq W$  of any intertwiner  $f : V \rightarrow W$  of  $\mathfrak{g}$ -modules is a  $\mathfrak{g}$ -submodule of  $V$  respectively  $W$ .

#### Solution

#### FS-5.4 Reducibility

Show that a representation  $R$  of a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is irreducible (respectively fully reducible, not fully reducible) if and only if the image  $R(\mathfrak{g})$  is a simple (respectively semisimple, non-semisimple) Lie algebra.

As an application, prove that the adjoint representation of a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is irreducible (fully reducible, not fully reducible) if and only if  $\mathfrak{g}$  is simple (semisimple, non-semisimple).

#### Solution

#### FS-5.5

Prove that a matrix representation  $R$  is fully reducible if and only if it can be transformed by a change of basis to the block diagonal form (5.23).

Show that a matrix representation  $R$  on a module  $V$  is reducible, but not fully reducible, if it can be transformed to the block form (5.24). Hint: identify the submodule  $V_1$  which corresponds to the representation  $R_1$ , and analyze the action of  $R$  on the vector space direct sum  $V = V_1 \oplus V_2$ .

#### Solution

#### FS-5.6

Work out the representation theory of abelian Lie algebras  $\mathfrak{g}$ :

a) Show that the representation matrices  $R(x)$  for a fully reducible representation of  $\mathfrak{g}$  are diagonal matrices.

Hint: First show that the representation matrices are normal, i.e. commute with their transpose. Normal matrices that commute can be simultaneously diagonalized. Conclude that any fully reducible module is the direct sum of one-dimensional modules.

b) Prove that any finite-dimensional irreducible representation of an abelian Lie algebra is one-dimensional. (Actually this is even true for an arbitrary solvable Lie algebra.) Conclude that on any irreducible module of  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{u}(1)$  the single generator  $T$  acts on each element of the module as multiplication

$$R(T) \cdot v = qv$$

by the charge  $q$  of the module.

c) What is the module conjugate to a  $\mathfrak{u}(1)$ -module of charge  $q$ ? Determine its  $\mathfrak{u}(1)$ -charge.

**FS-5.7**

Remember that a basis of  $\mathfrak{sl}(n) \cong A_{n-1}$  is then provided by the union  $\mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_-$  of three sets

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+1,i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\}, \\ \mathcal{B}_+(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq i < j \leq n\}, \\ \mathcal{B}_-(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq j < i \leq n\}.\end{aligned}$$

- a) Verify that the matrices  $\mathcal{E}_{i,j}$  with entries  $(\mathcal{E}_{i,j})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$  obey the commutation relation  $\mathcal{E}_{i,j}\mathcal{E}_{k,l} = \delta_{jk}\mathcal{E}_{i,l}$ .  
b) Check that the generators in  $\mathcal{B}_0$  all commute among each other, and that the linear span of both  $\mathcal{B}_+$  and  $\mathcal{B}_-$  is a subalgebra. Compute the eigenvalues of the elements of  $\mathcal{B}_\pm$  under the adjoint map for elements of  $\mathcal{B}_0$ .  
c) Use these results to show that the Lie algebras  $A_n$  are semisimple.  
Hint: As a characterization of semisimplicity, use the property that  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ . Use the fact that the elements of  $\mathcal{B}_\pm$  are eigenvectors of  $\text{ad}_x$  with  $x \in \mathcal{B}_0$ ; find generators  $x, y$  such that  $[x, y]$  is an element of  $\mathcal{B}_0$ .

**Solution (a)**

The  $\{H^2\}$  are diagonal matrices, and thus commute. Take different names:

$$\begin{aligned}[H^k, \mathcal{E}_{i,j}] &= [\mathcal{E}_{k,k} - \mathcal{E}_{k+1,k+1}, \mathcal{E}_{i,j}] \\ &= (\mathcal{E}_{k,k} - \mathcal{E}_{k+1,k+1})\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{i,j}(\mathcal{E}_{k,k} - \mathcal{E}_{k+1,k+1}) \\ &= (\delta_i^k - \delta_i^{k+1} - \delta_j^k + \delta_j^{k+1})\mathcal{E}_{i,j}.\end{aligned}$$

**Solution (b)**

When multiplying  $\mathcal{E}_{i,j}$  with  $i > j$  with  $\mathcal{E}_{k,\ell}$  with  $k > \ell$ , it is only nonzero if  $j = k$  and leads to  $\mathcal{E}_{i,\ell}$  where then  $i > j = k > \ell$ . Thus we only obtain elements of  $\mathfrak{B}_+$ .

When multiplying  $\mathcal{E}_{i,j}$  with  $i < j$  with  $\mathcal{E}_{k,\ell}$  with  $k < \ell$ , it is only nonzero if  $j = k$  and leads to  $\mathcal{E}_{i,\ell}$  where then  $i < j = k < \ell$ . Thus we only obtain elements of  $\mathfrak{B}_-$ .

Eigenvalues  $\text{ad}_{H^k}$ , according to  $[H^k, \mathcal{E}_{i,j}]$  for elements of  $\mathfrak{B}_+$ :

- if  $i > k+1$ : nonzero for  $\mathcal{E}_{ik}$ : is -1, and  $\mathcal{E}_{i(k+1)}$ : is 1.
- $\mathcal{E}_{(k+1)k}$ : -2 and for  $\mathcal{E}_{(k+1)j}$  with  $j < k$ : is -1.
- $\mathcal{E}_{kj}$  (with  $j < k$ ): 1.
- for  $i < k$  all zero.

Other way of writing the same result: We know that  $i > j$  and distinguish

- $i = j+1$ :  $k < i-2 = j-1$ : 0,  $k = i-2 = j-1$ : 1,  $k = i-1 = j$ : -2,  $k = i = j+1$ : 1,  $k > i = j+1$ : 0.
- $i > j+1$ : nonzero only for  $k = j-1$ : 1,  $k = j$ : -1,  $k = i-1$ : -1 and  $k = i$ : 1.

**FS-5.8 Easy structural constants**

Use the matrices

$$R_{\text{ad}}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad R_{\text{ad}}(E_+) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{\text{ad}}(E_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

to compute the structure constants of  $\mathfrak{sl}(2)$ .

**Solution**

(it is straightforward, just by def., boring)

**FS-5.9 Dimensions**

Determine the dimension of the Lie algebras  $B_n, C_n$  and  $D_n$ .

Perform the calculations analogous to exercise 5.7 b) and c) for these algebras.

### Solution

$A_n$ , i.e.  $\mathfrak{sl}(n+1)$ : all  $(n+1) \times (n+1)$  matrices except that the trace should be zero: thus dimension  $(n+1)^2 - 1 = n(n+2)$ . There are  $n$  in the CSA:  $H^i$  from  $i = 1$  to  $i = n$ . Hence there are  $n(n+1)$  others divided in  $\frac{1}{2}n(n+1)$  in  $\mathfrak{B}_+$  and the same number in  $\mathfrak{B}_-$ .

Other way of counting  $\mathfrak{B}_+ = \{\mathcal{E}_{i,j} | i > j\}$  with  $i = 1, \dots, n+1$  has  $\frac{1}{2}n(n+1)$  objects.

$B_n$ , i.e.  $\mathfrak{so}(2n+1)$ : can be chosen as the antisymmetric  $(2n+1) \times (2n+1)$  matrices: hence dimension  $\frac{1}{2}(2n)(2n+1) = n(2n+1)$ . The CSA  $\mathfrak{B}_0$  has the diagonal matrices  $D_i$  with  $i = 1, \dots, n$  and hence dimension  $n$ . The remaining are divided in  $n^2$  in  $\mathfrak{B}_+$  and the same number in  $\mathfrak{B}_-$ .

Other way of counting  $\mathfrak{B}_+$  contains  $n(n-1)/2$  of the form  $B_{ij}$  with  $i < j$ , the same number of  $A_{ij}$ , and the  $n$  vectors  $x$ . (????)

$C_n$ , i.e.  $\mathfrak{sp}(2n)$ : The condition is that  $JM$  should be symmetric  $2n \times 2n$  matrices, hence the dimension is  $n(2n+1)$ . Same counting as above for the CSA  $\mathfrak{B}_0$ . Thus splitting the others again gives  $n^2$  in  $\mathfrak{B}_+$  and the same number in  $\mathfrak{B}_-$ .

Other way of counting  $\mathfrak{B}_+$  contains  $B_{ij}$  with  $i \geq j$  has  $n(n+1)/2$  entries and  $A_{ij}$  with  $i < j$  has  $n(n-1)/2$ .

$D_n$ , i.e.  $\mathfrak{so}(2n)$ : Antisymmetric  $2n \times 2n$  matrices: dimension  $\frac{1}{2}2n(2n-1) = n(2n-1)$ . The same counting as above for the CSA  $\mathfrak{B}_0$ . Thus splitting the others again gives  $n(n-1)$  in  $\mathfrak{B}_+$  and the same number in  $\mathfrak{B}_-$ .

Other way of counting  $\mathfrak{B}_+$  contains  $B_{ij}$  with  $i < j$  has  $n(n-1)/2$  entries and  $A_{ij}$  with  $i < j$  has  $n(n-1)/2$ .

### LebOsin.2021.ex3.spr.3.

Игра в пятнашки представляет собой доску 4 на 4 с пронумерованными квадратами от 1 до 15. Правильная позиция показана на таблице слева. Игра заключается в том, что бы передвигая клетки на пустое место и тем самым меняя их друг с другом местами, из заданной позиции прийти в правильную. Допустим, что была задана позиция на таблице справа, где по сравнению с правильной номера 14 и 15 поменяли местами. Докажите, что подобную позицию к правильной привести нельзя.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 |    |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 |    |

Hint: О пустой клетке можно думать как о 16ой.

Это простая задача на перестановки. Действительно, если представлять вместо пустой клетки номер 16, то любая позиция есть ничто иное, как перестановка из группы  $S_{16}$ . Каждым ходом мы меняем 16 с каким-то номером в таблице, т.е. домножаем перестановку на транспозицию. При этом, следовательно, на каждом ходе четность перестановки меняется. Чтобы из неправильной позиции вернуться в правильную, 16 должна пройти вверх столько же раз, сколько и вниз. Аналогично, налево число 16 должно сходить столько же, сколько и направо. Таким образом, необходимо совершить четное число шагов и четность начальной и конечной перестановок должна быть одинакова. С другой стороны,

наша исходная позиция есть просто транспозиция (14,15) и является нечетной перестановкой. Правильная же позиция является тривиальной перестановкой и является четной. Таким образом, мы приходим к противоречию и соответственно неправильную позицию к правильной привести не удастся.

### LebOsin.2021.ex3.spr.4.

Построить таблицу характеров неприводимых представлений группы симметрий правильного треугольника  $\mathbb{D}_3$ . Опишите элементы неприводимых представлений (предъявите матрицы представлений для элементов группы).

В группе  $\mathbb{D}_3$  всего 3 класса сопряженности:  $\{e\}$  - тривиальный поворот,  $\{r, r^2\}$  поворот на  $2\pi/3$  сопряжен повороту на  $4\pi/3$  и  $\{s, sr, sr^2\}$  - все осевые симметрии сопряжены друг другу. Значит всего неприводимых представлений, не изоморфных друг другу, 3 штуки (столько же, сколько и классов сопряженности).

| $\mathbb{D}_3$ | $\{e\}$ | $\{r, r^2\}$ | $\{s, sr, sr^2\}$ |
|----------------|---------|--------------|-------------------|
| $\chi^{(1)}$   | 1       | 1            | 1                 |
| $\chi^{(2)}$   | 1       | 1            | -1                |
| $\chi^{(3)}$   | 2       | -1           | 0                 |

У любой группы есть тривиальное одномерное представление и первая строчка очевидна - все элементы группы переводим в 1. По теореме Бернсайда сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна размеру группы.  $|\mathbb{D}_3| = 6 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ . Единственная возможность это  $n_1 = n_2 = 1$ , а  $n_3 = 2$ . Т.к. характер тривиального представления равен числу единиц на диагонали единичной матрицы, т.е. размерности представления, то первый столбец также очевиден.

Повороты  $r, r^2$  имеют порядок 3, а потому для одномерных представлений, если  $\rho(r) = \lambda$ , то  $\lambda^3 = 1 \Rightarrow \lambda = 1, \exp(2\pi i/3), \exp(4\pi i/3)$ . При этом, т.к. характеры сопряженных элементов совпадают, то должно выполняться условие  $\text{Tr } \rho(r) = \text{Tr } \rho(r^2) \Rightarrow \lambda = \lambda^2$ . Таким образом,  $\lambda = 1$ . Второй элемент второй строки мы получили.

Любое отражение примененное дважды возвращает систему в исходное положение, потому для одномерного представления мы получим  $(sr^k)^2 = e \Rightarrow \rho(sr^k) = \lambda = \pm 1$ . Если  $\lambda = 1$ , то мы получим уже имеющееся тривиальное представление.  $\lambda = -1$  задает в некотором смысле "знаковое представление". Т.е. элементу

группы сопоставляется число  $+1$ , если элемент группы сохраняет ориентацию базиса на плоскости, и  $-1$  - иначе.

Третью строчку можно теперь мгновенно заполнить используя ортогональность характеров неприводимых представлений по столбцам, т.е.:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \chi^{(\alpha)}(h_i) \chi^{(\alpha)*}(h_j) = 0, h_i \neq h_j. \quad (35)$$

Где  $h_i$  - выбранный какой-то элемент из  $i$ -класса сопряженности. Мгновенно получаем третью строчку. Тем не менее представление можно предъявить явно, если переводить элементы группы в соответствующие матрицы преобразования плоскости.

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}; \rho(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Последняя матрица есть матрица отражения относительно оси  $y$ . Представление любого другого элемента легко получить по свойству гомоморфизма  $\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1g_2)$ . Можно легко видеть, что следы этих матриц удовлетворяют написанному нами в таблице.

Убедимся, что мы построили неприводимое представление. Посчитаем скалярный квадрат  $\langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle &= \frac{1}{|\mathbb{D}_3|} \sum_{g \in \mathbb{G}} \chi^{(3)}(g) \chi^{(3)*}(g) = \frac{1}{|\mathbb{D}_3|} \sum_{i=1}^3 |C_i| \chi^{(3)}(h_i) \chi^{(3)*}(h_i) = \\ &= \frac{1}{6} (1 \cdot 2^2 + 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 0^2) = 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Действительно, скалярный квадрат оказался 1, а потому представление неприводимо. Задача решена.

Leb0sin.2021.ex3.spr.5.

Группа Ли  $SL(2, \mathbb{R})$  задана вещественными матрицами вида:  $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с единичным определителем.

Докажите, что отображение:

$$\sigma_W : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (38)$$

задает действие группы на  $\mathbb{C}$  (требуется проверить  $\sigma_{W_1} \circ \sigma_{W_2} = \sigma_{W_1 W_2}$ ). Элементы алгебры  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  определяются как коэффициенты разложения матрицы  $W$  вблизи единичной, т.е.:

$$W \approx 1 + \delta W; \delta W = L_{-1}\delta b + (\delta a - \delta d)L_0 + L_1\delta c. \quad (39)$$

(здесь переменные  $\delta a$  и  $\delta d$  вообще говоря зависимые величины). Найдите явный вид и коммутационные соотношения для матриц  $L_n$ .

Проверим свойство гомоморфизма для отображения  $\sigma_W$

$$\begin{aligned} \sigma_{W_1} \circ \sigma_{W_2}(z) &= \sigma_{W_1} \left( \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) = \frac{a_1 \left( \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \\ &= \frac{a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1 c_2 z + b_1 d_2}{c_1 a_2 z + c_1 b_2 + c_2 d_1 z + d_1 d_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(a_2 c_1 + c_2 d_1)z + (b_2 c_1 + d_1 d_2)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь найдем коэффициенты  $W = W_1 W_2$ :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + c_2 d_1 & b_2 c_1 + d_1 d_2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Таким образом, коэффициенты матрицы  $W$  совпали с коэффициентами в действии  $\sigma_{W_1} \circ \sigma_{W_2}(z)$  и действие на множестве доказано.

В группе  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  размерность группы составляет  $n^2 - 1 = 3$  (1 засчет условия на детерминант), а потому в матрице  $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  в качестве независимых переменных можно выбрать элементы  $a, b, c$ , в то время как  $d = (1 + bc)/a$  из условия единичности детерминанта. В окрестности единичной матрицы  $a = 1 + \delta a, b = \delta b, c = \delta c, d = 1 + \delta d = (1 + \delta b \delta c)/(1 + \delta a) \approx 1 - \delta a$ . Отсюда мы сразу получаем, что  $\delta d = -\delta a$ .

Генераторы в группе:

$$\frac{\partial}{\partial a} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{a=1, b=c=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \frac{\partial}{\partial b} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{a=1, b=c=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \frac{\partial}{\partial c} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{a=1, b=c=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Таким образом, из разложения (39) в силу условия  $\delta a = -\delta d$ :

$$L_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; L_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Вычислим коммутаторы этих матриц для установления структурных констант алгебры  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ :

$$[L_0, L_1] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -L_1, \quad (44)$$

$$[L_0, L_{-1}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = L_{-1}, \quad (45)$$

$$[L_{-1}, L_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2L_0. \quad (46)$$

Итого:

$$[L_0, L_{\pm 1}] = \mp L_{\pm 1} \quad (47)$$

$$[L_{-1}, L_1] = 2L_0 \quad (48)$$

LebOsin.2021.ex3.spr.6.

Построим унитарные представления для алгебры  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  (элементы группы унитарные матрицы, следовательно  $L_0 = L_0^\dagger, L_1^\dagger = L_{-1}$ ).

Рассмотрим оператор

$$Q = L_0^2 + \frac{L_{-1}L_1 + L_1L_{-1}}{2} \quad (49)$$

Покажите, что этот оператор коммутирует с операторами  $L_n$ .

Таким образом, оператор  $Q$  - аналог оператора квадрата спина (оператор Казимира) и все неприводимые представления классифицируются по значению на них этого оператора. Зафиксируем представление так, что для любого вектора  $|e\rangle$

верно:  $Q|e\rangle = q|e\rangle$ . В этом представлении у оператора  $L_0$  есть собственный вектор  $L_0|m\rangle = -m|m\rangle$ .

Покажите, что операторы  $L_1$  и  $L_{-1}$  являются повышающим и понижающим операторами соответственно.

Теперь, мы переходим к представлениям алгебры  $\xi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}$ , т.е. рассматриваем алгебры с теми же коммутационными соотношениями, но размер матриц может быть и больше. Догадаться до того, что элемент Казимира имеет именно такой вид можно, если мы заметим, что  $L_0 = s_z, L_{\pm 1} = s_{\mp}$ . Известно, что для спинов оператор Казимира имеет вид:

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_z^2 + \frac{s_+ s_- + s_- s_+}{2}. \quad (50)$$

Однако мы можем убедиться в этом и непосредственно используя коммутационные соотношения (44)-(46). Мы воспользуемся известной формулой для коммутатора:

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B. \quad (51)$$

$$\begin{aligned} [Q, L_0] &= \left[ L_0^2 + \frac{L_{-1}L_1 + L_1L_{-1}}{2}, L_0 \right] = \left[ \frac{L_{-1}L_1 + L_1L_{-1}}{2}, L_0 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \{ L_{-1} [L_1, L_0] + [L_{-1}, L_0] L_1 + L_1 [L_{-1}, L_0] + [L_1, L_0] L_{-1} \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ L_{-1}L_1 - L_{-1}L_1 - L_1L_{-1} + L_1L_{-1} \} = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} [Q, L_{\pm 1}] &= L_0 [L_0, L_{\pm 1}] + [L_0, L_{\pm 1}] L_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \{ L_{-1} [L_1, L_{\pm 1}] + [L_{-1}, L_{\pm 1}] L_1 + L_1 [L_{-1}, L_{\pm 1}] + [L_1, L_{\pm 1}] L_{-1} \} = \\ &= \mp \{ L_0 L_{\pm 1} + L_{\pm 1} L_0 \} \pm \frac{1}{2} \{ 2L_0 L_{\pm 1} + 2L_{\pm 1} L_0 \} = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Таким образом, оператор Казимира коммутирует со всеми базисными элементами алгебры. Как известно, из этого следует, что матрица  $Q \propto E$  для каждого неприводимого представления алгебры (действует константой в данном пространстве, для спина это  $s(s+1)$ ). Пусть  $Q|v\rangle = q|v\rangle$  для любого  $v$  в нашем неприводимом представлении алгебры. Поскольку представления группы  $SL(2, \mathbb{R})$  унитаризуемы (т.е. матрицы представлений группы являются унитарными), то из экспоненциального представления группы через элементы алгебры:

$$W = \exp(\alpha L_0 + \beta L_1 + \gamma L_{-1}) = (W^+)^{-1} \quad (54)$$

следует, что можно искать  $L_0 = L_0^+, L_1^+ = L_{-1}$ . Раз  $Q \propto E$  - эрмитова и  $L_0$  - эрмитова и коммутирует с  $Q$ , то у них есть общая система собственных векторов. Пусть:

$$L_0|m\rangle = -m|m\rangle. \quad (55)$$

Покажем, что операторы  $L_1$  и  $L_{-1}$  являются повышающим и понижающим операторами соответственно. Рассмотрим вектор  $L_{\pm 1}|m\rangle$  и подействуем на него  $L_0$ :

$$L_0 L_{\mp 1}|m\rangle \stackrel{(47)}{=} (\mp L_{\pm 1} + L_{\pm 1} L_0)|m\rangle = (\mp L_{\pm 1} - mL_{\pm 1})|m\rangle = -(m \pm 1)L_{\pm 1}|m\rangle \quad (56)$$

Т.е. вектор  $L_{\pm 1}|m\rangle$  является собственным для  $L_0$  с собственным значением  $m \pm 1$ , т.е.  $L_{\pm 1}|m\rangle \propto |m \pm 1\rangle$ . Это и доказывает сформулированное утверждение.

## 9.5.2 Problems about Cartan-Weyl basis

### FS-6.4 Subalgebras of $\mathfrak{su}(3)$

Show that the Lie algebra  $\mathfrak{su}(3)$  possesses abelian subalgebras of dimension two which are not Cartan subalgebras, i.e. whose elements are generically not ad-diagonalizable.

Hint: Consider step operators associated to positive or negative simple roots. To show that the action cannot be diagonalized, choose a matrix representation.

#### Solution

Consider the abelian subalgebra generated by  $E_+^1$  and  $E_-^2$ , with matrices representations as listed in Chapter 3, equations (3.17).

Fix a matrix  $T^a = (a_{ij})$ , and conclude that  $E_+^1$  is not ad-diagonalizable by computing  $[E_+^1, T^a]$ . Imposing  $[E_+^1, T^a] = \gamma_a T^a$  implies restrictions on the entries  $a_{ij}$ . These restrictions restrict  $T^a$  to a proper subspace of  $\mathfrak{gl}(3)$ , hence there can be no basis of the full algebra composed by such  $T^a$  s.

### FS-6.5 Structure constants in a Chevalley basis

Verify the relations  $\frac{e_{\beta, -\alpha-\beta}}{e_{-\alpha-\beta, \alpha}} = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}$  and  $\frac{e_{-\alpha-\beta, \alpha}}{e_{\alpha, \beta}} = \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}$  for the structure constants in a Chevalley basis.

Hint: Write down the Jacobi identity for the generators  $E^\alpha, E^\beta$  and  $E^{-(\alpha+\beta)}$ . To evaluate the various contributions, use the definition of the Chevalley generators  $H^\alpha$  to show that  $H^{-\alpha} = -H^\alpha$ , and that if  $\alpha, \beta$  and  $\alpha + \beta$  are roots, then

$$H^{\alpha+\beta} = [(\alpha + \beta, \alpha + \beta)]^{-1} ((\alpha, \alpha)H^\alpha + (\beta, \beta)H^\beta).$$

**Solution**

(??? не понял, что за эти  $e_{\beta, -\alpha-\beta}$ ??)

**FS-6.6 Restriction of Killing form to the Cartan subalgebra**

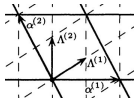
Prove that the restriction of the Killing form of a semisimple Lie algebra to the Cartan subalgebra is non-degenerate.

Hint: Use

$$I_{\text{ad}} \kappa^{ab} = \begin{cases} \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha^i \alpha^j & \text{for } a = i, b = j \\ \left\{ 2(\alpha, \tilde{\alpha}) + \sum_{\gamma} e_{\alpha, \gamma} e_{-\alpha, \alpha+\gamma} \right\} \delta_{\alpha, -\beta} & \text{for } a = \alpha, b = \beta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

to compute  $\kappa(h, h)$ , with  $h$  any real linear combination of the generators  $H^i$ .

**Solution****FS-6.7 Root and weight lattices**

Draw pictures analogous to  for the root and weight lattices of  $A_1 \oplus A_1$ ,  $B_2$ , and  $G_2$ .

**Solution****FS-6.8 Bracket relation of ladder operators**

Prove the bracket relation  $[E^{-\alpha}, [E^{\alpha}, E^{\beta}]] = n_+ (n_- + 1) E^{\beta}$ .

Hint: Observe that in terms of the  $\mathfrak{sl}(2)_{\alpha}$ -representation one has to consider the action of  $E^{-\alpha}$  on  $v_{n_- n_+ + 2}$  (analogously as in the computation of  $[E^{\alpha}, E^{\beta}]$  via the action of  $E^{\alpha}$  on  $v_{n_- - n_+}$ ).

**Solution****FS-6.9 Properties of structure constants  $e_{\alpha, \beta}$** 

Derive the formula  $(e_{\alpha, \beta})^2 = n_+ (n_- + 1) \frac{(\alpha + \beta, \alpha + \beta)}{(\beta, \beta)}$  for the structure constants  $e_{\alpha, \beta}$ .

Hint: Deduce from  $e_{-\alpha, -\beta} = -e_{\alpha, \beta}$  that  $-[[E^{\alpha}, E^{\beta}], [E^{-\alpha}, E^{-\beta}]] = e_{\alpha, \beta}^2 [E^{\alpha + \beta}, E^{-\alpha - \beta}] = e_{\alpha, \beta}^2 H^{\alpha + \beta}$ . Then employ the Jacobi identity and the relation  $[E^{-\alpha}, [E^{\alpha}, E^{\beta}]] = n_+ (n_- + 1) E^{\beta}$  to evaluate the left hand side of this equation as  $m_+ (m_- + 1) H^{\alpha} + n_+ (n_- + 1) H^{\beta}$ , with  $n_{\pm} \equiv n_{\pm}^{(\alpha; \beta)}$  and  $m_{\pm} \equiv n_{\pm}^{(\beta; \alpha)}$ . On the right hand side, use  $H^{\alpha + \beta} = [(\alpha + \beta, \alpha + \beta)]^{-1} ((\alpha, \alpha) H^{\alpha} + (\beta, \beta) H^{\beta})$ . The formula then follows by comparing the coefficients of  $H^{\beta}$ .

**Solution****FS-6.10 Relation of  $n_-$  and  $n_+$** 

Prove the relation

$$\frac{n_- + 1}{n_+} = \frac{(\alpha + \beta, \alpha + \beta)}{(\beta, \beta)},$$

where (????)

Hint: Consider the quantity  $M := n_- - \frac{(\alpha + \beta, \alpha + \beta)}{(\beta, \beta)} n_+ + 1$ . Eliminate  $n_-$  with the help of  $(\beta, \alpha^{\vee}) = n_- - n_+$  to obtain  $M = [(\beta, \alpha^{\vee}) + 1] \cdot \left[ 1 - \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} n_+ \right]$ . Then show that one of the two factors in square brackets vanishes; to this end, consider the cases  $(\alpha, \alpha) \geq (\beta, \beta)$  and  $(\alpha, \alpha) < (\beta, \beta)$  separately.



### Solution

From  $M = n_- - \frac{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}{(\beta, \beta)} n_+ + 1$

(I'll add derivations here, I did it!)

Finally we get  $M = [(\beta, \alpha^\vee) + 1] \cdot \left[1 - \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} n_+\right]$ .

Now, let  $m := (\beta, \alpha^\vee) = n_- - n_+$ , and  $n := (\alpha, \beta^\vee) = l_- - l_+$ , where  $l_-$  and  $l_+$  are now related to the root string of  $\beta$  through  $\alpha$ . First of all, we assume  $e_{\alpha, \beta} \neq 0$  (which just means  $\alpha + \beta$  is a root). Hence  $n_+$  and  $l_+$  have to be both larger or equal than 1. Furthermore, we know that

$$mn \in \{1, 2, 3\}, \quad m/n = \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

1. First case:  $mn = 1$ :

(a)  $m = n = -1$ , we are done, since  $M = 0$ .

(b)  $m = n = 1$ . This is possible if (i)  $n_- = 1$  and  $n_+ = 0$ , which is not allowed; (ii)  $n_- = 2$  and  $n_+ = 1$ , which implies  $M = 0$ ; (iii)  $n_- \geq 3$ , which implies  $n_+ \geq 2$ , but then the root string of  $\alpha$  through  $\beta$  is too large.

2. Second case:  $mn = 2$ :

(a)  $m = 1, n = 2$ . In this case, either (i)  $l_+ = 0$  and  $l_- = 2$ , which is not allowed; or (ii)  $l_+ \geq 1$  and  $l_- \geq 3$ , which makes the string too long. So this is never the case.

(b)  $m = 2, n = 1$ . Similar as above, but for  $n_\pm$ .

(c)  $m = -2, n = -1$ . Notice that, in this case,  $(\alpha, \alpha)/(\beta, \beta) = 1/2$ . (i)  $n_+ = 2$  and  $n_- = 0$ , which implies  $M = 0$ ; (ii)  $n_+ = 3$  and  $n_- = 1$ , which makes the string too long.

(d)  $m = -1, n = -2$ , which immediately implies  $M = 0$ .

3. Third case:  $mn = 3$ : similar arguments apply.

Hence we conclude  $M = 0$ , and the result follows. (Here I'll add derivations!!!)

### FS-6.11 Angles between roots

Given two roots  $\alpha$  and  $\beta$  of a semisimple Lie algebra, define  $m := (\beta, \alpha^\vee)$  and  $n := (\alpha, \beta^\vee)$ . Prove that

$$mn \leq 4 \quad \text{and} \quad m/n = (\beta, \beta)/(\alpha, \alpha).$$

Use this result to constrain the allowed angles between  $\alpha$  and  $\beta$  and the ratio of their lengths.

### Solution

By definition,

$$mn = 4 \frac{(\beta, \alpha)(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = 4 \cos^2(\theta) \leq 4,$$

where  $\theta$  is the angle between  $\alpha$  and  $\beta$ .

Formula  $m/n = (\beta, \beta)/(\alpha, \alpha)$  follows by definition, and from the assumption that  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ . For roots  $\alpha$  and  $\beta$  of a semisimple Lie algebra, there is a property  $(\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$  for all  $\alpha, \beta \in \Phi$ , thus both  $m, n \in \mathbb{Z}$ , and therefore

$$mn = (2 \cos \theta)^2 \in \mathbb{Z} \cap [0, 4].$$

Hence we conclude

$$\cos \theta \in \left\{ \pm 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1 \right\}$$

For each allowed angle, there is a correspondent length ratio.

- If  $\cos \theta = 0$ , the vectors are orthogonal and there is no restriction on their length ratio.

- If we fix  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ , we have  $mn = 1$ . This implies  $(m, n) \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$ . Hence the roots must have the same length.

- etc. (???)

### FS-6.12 Structure constants of $A_{n-1}$

Compute the structure constants of  $A_{n-1}$  in the basis described by  $H^i = \mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+1,i+1}$  and  $E_+^i = \mathcal{E}_{i,i+1}$ , where  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

**Solution****KUL-2024-4.2(m) Roots for  $A_1$  and  $A_2$** 

Lie algebra  $A_{n-1} \cong \mathfrak{sl}(n)$  can be provided by  $\mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_-$ , where

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+1,i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\}, \\ \mathcal{B}_+(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq i < j \leq n\}, \\ \mathcal{B}_-(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq j < i \leq n\}.\end{aligned}$$

(a) Let  $H \in \mathcal{B}_0(A_1)$ ,  $E^\pm \in \mathcal{B}_\pm(A_1)$ . Check that  $\{H, E^\pm\}$  is a Cartan-Weyl basis for  $A_1$ , and compute the root vectors for each  $E^\pm$ .

(b) Let  $\mathcal{B}_0(A_2)$  be a Cartan subalgebra for  $A_2 \cong \mathfrak{sl}(3)$ , find a corresponding root space decomposition and the root vectors.

**Solution (a)**

For  $A_1 \cong \mathfrak{sl}(n=2)$  we have  $n-1=1$ ;  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $E^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (E^-)^T$ . We evaluate the following commutators:

$$[H, E^+] = \dots = 2E^+ \quad [H, E^-] = \dots = -2E^-.$$

Thus the roots are  $\alpha^\pm = \pm 2$ .

**Solution (b)**

The Cartan subalgebra  $\mathcal{B}_0$  has two elements, which we denote by  $H^1$  and  $H^2$ . The remaining generators we denote by  $E_1^\pm, E_2^\pm$  and  $E_3^\pm$ , where  $E_j^+ \in \mathcal{B}_+$  and  $E_j^- \in \mathcal{B}_-$ . By expressing them in a matrix form, one can check they obey well-known commutation relations of  $\mathfrak{sl}(3)$ :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} H^1, H^2 \\ H^1, E_\pm^1 \\ H^2, E_\pm^1 \\ E_\pm^1, E_\pm^2 \\ E_\pm^1, E_\pm^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0, \\ \pm 2E_\pm^1, \\ \mp E_\pm^1, \\ \pm E_\pm^\theta, \\ [E_\pm^1, E_\pm^2] = [E_\pm^1, E_\pm^\theta] = [E_\pm^2, E_\pm^\theta] = 0, \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} E_\pm^1, E_\pm^1 \\ H^1, E_\pm^2 \\ H^2, E_\pm^2 \\ E_\pm^1, E_\pm^\theta \\ E_\pm^\theta, E_\pm^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^1, \\ \mp E_\pm^2, \\ \pm 2E_\pm^2, \\ \mp E_\pm^2, \\ H^1 + H^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} E_\pm^2, E_\pm^2 \\ H^1, E_\pm^\theta \\ H^2, E_\pm^\theta \\ E_\pm^2, E_\pm^\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^2 \\ \pm E_\pm^\theta \\ \pm E_\pm^\theta \\ \pm E_\pm^1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(here  $E_3$  corresponds to  $E_\theta$ ).

(!! I'll add a one computation here!!!!)

Hence one can see the roots  $\alpha_j^\pm$  (by their definition) are:

$$\alpha_1^\pm = (\pm 2, \mp 1), \quad \alpha_2^\pm = (\mp 1, \pm 2), \quad \alpha_3^\pm = (\pm 1, \pm 1).$$

**KUL-2024-4.3(m) Roots for  $C_2$** 

The triangular decomposition of  $C_n \cong \mathfrak{sp}(n)$  is:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\} \\ \mathcal{B}_+ &= \{\mathcal{E}_{i,j+n} + \mathcal{E}_{j,i+n} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\}, \\ \mathcal{B}_- &= \{\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\}\end{aligned}$$

for all  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , where  $\mathcal{E}_{i,j}$  is a matrix of zeros, except element “1” on the  $i$ -th row and  $j$ -th column. Consider  $\mathcal{B}_0(C_2)$  as a Cartan subalgebra, and find the corresponding root space decomposition for  $C_2$ . Find the root vectors and positive roots. Draw root diagram.

**Solution**

From the definition for  $n=2$  we find

$$H^1 = \mathcal{E}_{1,1} - \mathcal{E}_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \mathcal{E}_{2,2} - \mathcal{E}_{4,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_1^+ = \mathcal{E}_{1,3} + \mathcal{E}_{1,3}; \quad \mathcal{E}_2^+ = \mathcal{E}_{1,4} + \mathcal{E}_{2,3}; \quad \mathcal{E}_3^+ = \mathcal{E}_{2,4} + \mathcal{E}_{2,4}; \quad \mathcal{E}_4^+ = \mathcal{E}_{1,2} - \mathcal{E}_{4,3}.$$

Positive roots we get from definition  $[h, E^\alpha] = \text{ad}_h(E^\alpha) = \alpha(h)E^\alpha$ , so we need to compute the commutator with positive operators. For example, a root  $\alpha_2 := (2, 0)$  is obtained by

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

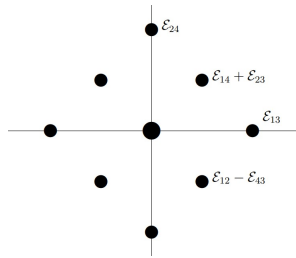
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Others are obtained the same way. All the positive roots are

$$(1, -1), (2, 0), (1, 1), (0, 2).$$

Angle =? (????)

(I don't understand now how to picture them, later I'll add this here!)  
The root diagram is from the coordinates  $(x, y)$  is:



## 9.5.3 Problems about real Lie algebras and real forms

### KUL-2024-8.1 Character for real forms

Calculate the character for the following real forms. Write in your answer the dimensions of the algebras that you used. 1.  $\mathfrak{su}(p, q)$ . 2.  $\mathfrak{su}^*(2n)$  3.  $\mathfrak{sl}(n)$  4.  $\mathfrak{so}^*(2n)$  5.  $G_{2,2}$  (using its maximal compact subalgebra) 6.  $E_{8,-24}$  (using its maximal compact subalgebra)

### Solution

(I am not sure)

### FS-8.1

The hydrogen problem in quantum mechanics gives rise to a six-dimensional symmetry algebra which is spanned by the components of angular momentum  $\vec{L}$  and of the Runge-Lenz vector  $\vec{R}$ . This algebra acts on the energy eigenstates of fixed energy. This algebra is regarded as a complex Lie algebra, but in the application to the hydrogen problem one deals with hermitian operators so that the relevant structure is that of a Lie algebra over  $\mathbb{R}$ .

a) At zero energy the complex symmetry algebra is the semidirect sum of an abelian Lie algebra with  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . When considering real Lie algebras, which is the relevant real form of  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ?

b) At non-zero energy the complex symmetry algebra is the direct sum  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Show that two different real forms of this Lie algebra appear, depending on whether the energy is positive (scattering states) or negative (bound states). Are these real forms simple as real Lie algebras?

c) The symmetry algebra acting on the bound states, i.e. the states with negative energy, can even be extended further. To see this, compute the commutation relations among  $\vec{L}$  and the seven operators

$$\vec{S}^{(\pm)} := \vec{q}(\vec{p} \cdot \vec{p}) - 2\vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{p}) \pm \vec{q}, \quad S^{(0)} := \vec{q} \cdot \vec{p} - i$$

Conclude that together these operators span a real form of  $B_2$ ; which one?

d) Analyze the five additional operators

$$\vec{T}^{(0)} := r\vec{p}, \quad T^{(\pm)} := r(\vec{p} \cdot \vec{p} \pm 1)$$

( $r \equiv |\vec{q}|$ ) in the same manner. Which real form of  $\mathfrak{sl}(4)$  does one obtain? What is the real Lie algebra spanned by  $S^{(0)}$  and  $T^{(\pm)}$ ?

**Solution****FS-8.2 No symmetric invariant form**

Consider the infinite-dimensional Lie algebra spanned by generators  $L_n$  with  $n \in \mathbb{Z}$  and by a generator  $K$ , and having the bracket relations

$$\begin{aligned}[L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}K \\ [L_n, K] &= 0\end{aligned}$$

This Lie algebra is called the Virasoro algebra. Show that the Virasoro algebra does not admit for a symmetric invariant form.

Hints: Apply the invariance property (8.2) of a symmetric invariant form to the expression  $\kappa([K, L_n], L_m)$  and conclude that  $\kappa(K, \cdot) = 0$ . Then use the invariance for expressions of the type  $\kappa([L_m, L_n], L_p)$  with  $p = 0$  to conclude that  $\kappa$  is of the form  $\kappa_{nm} \propto \delta_{n+m,0}$ . Show that for a nonzero constant of proportionality, this ansatz leads to a contradiction.

**Solution**

We follow the hints. Firstly, since  $[K, L_n] = 0$ , we have that

$$\begin{aligned}0 &= \kappa([K, L_n], L_m) = \kappa(K, [L_n, L_m]) \\ &= (n-m)\kappa(K, L_{n+m}) \quad \forall m, n\end{aligned}$$

Hence  $\kappa(L_j, K) = 0$  for every  $j$ . Now, on the one hand (by using the above),

$$\kappa([L_m, L_n], L_p) = \kappa(L_m, [L_n, L_p]) = (n-p)\kappa(L_m, L_{n+p})$$

and, on the other hand,

$$\kappa([L_m, L_n], L_p) = -\kappa([L_n, L_m], L_p) = -\kappa(L_n, [L_m, L_p]) = -(m-p)\kappa(L_{m+p}, L_n).$$

For  $p = 0$ , the above implies

$$(n+m)\kappa_{mn} = 0,$$

hence  $\kappa_{mn} \propto \delta_{m+n,0}$ . This ansatz, along with the invariance of the Killing form (applied to  $\kappa([L^n, L^m], L^j)$ ), implies

$$(n-m)\delta_{m+n+j} = (m-j)\delta_{n+m+j} = (j-n)\delta_{n+m+j}$$

for every  $n, m, j$ . But the only solution for the above is  $j = n = m = 0$ . Hence, a contradiction.

**FS-8.3**

Show that in any basis in which the Killing form is of the form (8.8) the structure constants with only upper indices are totally antisymmetric.

Hint: Use the invariance property (8.2) of the Killing form. Be careful to keep track of the signs of the metric.

**Solution**

Notice that

$$\kappa([T^a, T^b], T^c) = f_e^{ab}\kappa^{ec} = f^{abc}.$$

Hence we can check that

$$f^{cba} = \kappa([T^c, T^b], T^a) = -\kappa([T^a, T^b], T^c) = -f^{abc}.$$

Similarly,  $f^{acb} = -f^{abc}$  etc.

**FS-8.4 Quaternions form a field**

Verify that the quaternions  $\mathbb{H}$  form a field. Hint: Use that

$$\tau^i \tau^j = -\delta^{ij} \mathbf{1} + \sum_{k=1}^3 \epsilon^{ijk} \tau^k$$

for  $i, j = 1, 2, 3$  and  $\tau^0 \tau^i = \tau^i \tau^0 = \tau^i$  for any  $i$ . Show that  $\mathbb{H}$  contains both  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{C}$  as a subfield. How many subfields isomorphic to  $\mathbb{C}$  are there? Compute the norm  $\xi^* \xi$  of a quaternion  $\xi \in \mathbb{H}$ .

### Solution

$\mathbb{R}$  is isomorphic as a field to the subfield  $\mathbb{R}\tau_0$  of  $\mathbb{H}$ , and  $\mathbb{C}$  is isomorphic to the real span of  $\{\tau_0, \tau_j\}, j \in \{1, 2, 3\}$ , via isomorphism  $\phi(a + bi) = a\tau_0 + b\tau_j$ . The norm of a quaternion is  $\xi^*\xi = \sum_{j=0}^3 (\xi^j)^2$ .

### FS-8.5

Show that the vector space spanned over  $\mathbb{R}$  by the elements of a Chevalley-Serre basis of a complex simple Lie algebra is a real Lie algebra, and that the real vector space spanned by the generators

$$\{iH^j | j = 1, 2, \dots, r\} \cup \left\{ \frac{i}{2}\sqrt{(\alpha, \alpha)}(E^\alpha + E^{-\alpha}), \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha, \alpha)}(E^\alpha - E^{-\alpha}) \mid \alpha \in \Phi \right\}$$

is a real Lie algebra as well. Compute the Killing form to conclude that the latter is the compact real form.

(In the case of  $\mathfrak{sl}(2)$ , these bases are precisely the bases (2.5) and (2.3) of  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  and  $\mathfrak{su}(2)$ , respectively.)

### Solution

One can use  $\kappa^{ab} = \frac{1}{I_{\text{ad}}} \sum_{c,e=1}^d f^{bc}_e f^{ae}_c$  to compute the Killing form in terms of the structure constants.

### FS-8.6 Not simple algebra

Show that the Lie algebra  $\mathfrak{gl}(V)$  is not simple.

Hint: Identify an abelian ideal.

### Solution

The algebra  $\mathfrak{gl}(V)$  has an abelian ideal given by  $I = \{\lambda 1 | \lambda \in \mathbb{C}\}$ , where 1 denotes the identity matrix.

## 9.5.4 Problems about isomorphisms of Lie algebras

### Prove isomorphism $SO(3) \times SO(3)$ isomorphic to $SO(4)/Z_2$ (!!!)

#### Solution by Kenta S

It is well-known that  $SL_2(\mathbb{C}) \cong \text{Spin}_3(\mathbb{C})$ . I will give a construction of the map  $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_4(\mathbb{C})$ .

The group  $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$  acts on  $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  in the obvious way, namely  $(g, h) \cdot (v \otimes w) := gv \otimes hw$ . This action has determinant 1, so gives a homomorphism  $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SL(V)$ .

Also note that  $\mathbb{C}^2$  carries a  $SL_2(\mathbb{C})$ -equivariant anti-symmetric form  $\omega(v, w) := \det(v, w)$ . Thus,  $V$  carries a bilinear form  $\langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \rangle := \omega(v_1, v_2)\omega(w_1, w_2)$  which is now symmetric. This is  $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ -equivariant since  $\omega$  is  $SL_2(\mathbb{C})$ -equivariant. We have thus constructed a homomorphism

$$SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_4(\mathbb{C}),$$

which has kernel  $\{1, (-1, -1)\}$ . Surjectivity follows from a dimension-counting argument.

By the way, the isomorphism  $SL_2(\mathbb{C}) \cong \text{Spin}_3(\mathbb{C})$  can be constructed similarly, by considering the action of  $SL_2(\mathbb{C})$  on  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , which carries the Killing form.

### Prove isomorphism $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$ (!!!)

#### Solution by Kenta S

In general given a semisimple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  we have the adjoint representation  $\text{Ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ , sending  $X$  to  $\text{ad } X: Y \mapsto [XY]$ . In fact, since  $[\mathfrak{g}\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ , the homomorphism  $\text{Ad}$  lands in  $\mathfrak{sl}(\mathfrak{g})$ . Moreover,  $\text{Ad}$  is injective since its kernel is  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ .

Note that  $\mathfrak{g}$  comes with a non-degenerate pairing (the Killing form)  $K: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ , given by  $K(X, Y) := \text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)$ . Then we see that  $K([XY], Z) = K(X, [YZ])$ , so  $\text{ad } X$  is orthogonal with respect to the pairing  $K(-, -)$ . Thus, the adjoint representation is in fact an injective homomorphism  $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{g})$ .

When  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , this gives an isomorphism, since  $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{so}(\mathfrak{g}) = 3$ .

This argument does not work over  $\mathbb{R}$ , since not all non-degenerate bilinear pairings  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  on a  $\mathbb{R}$ -vector space  $V$  are equivalent to each other. For instance,  $(x, y) * (z, w) := xz + yw$  and  $(x, y) *' (z, w) := xz - yw$  are not equivalent. Bilinear forms are classified by its signature  $(p, q)$ , corresponding to the bilinear form on  $\mathbb{R}^{p+q}$  given by the symmetric matrix  $\begin{pmatrix} 1_{p \times p} & \\ & -1_{q \times q} \end{pmatrix}$ . Correspondingly, we have Lie algebras  $\mathfrak{so}_{p,q}$ , which only become  $\mathfrak{so}_{p+q}$  over  $\mathbb{C}$ .

One can check that the Killing form  $K(-, -)$  on  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  has signature  $(2, 1)$ , so  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}_{2,1}(\mathbb{R})$ , \*not\*  $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ .

### Solution by HK Lee

Note that  $\{e, f, h\}$  of  $sl(2, \mathbf{R})$  in original post is a basis in  $sl(2, \mathbf{C})$ : And these elements satisfy the relation

$$* [e, f] = h, [e, h] = -2e, [f, h] = 2f$$

So remaining thing is to make a basis in  $\mathbf{C}^3$ : I do not know who will find through *reasonable way*. My way is try and error, i.e., just trying.

(1) If  $v_k = \sum_{i=1}^3 a_i^k e_i$ ,  $a_i^k \in \mathbf{C}$  where  $e_i$  is a canonical basis in  $\mathbf{R}^3$ , then let  $\phi(v_1) = e$ ,  $\phi(v_2) = f$ ,  $\phi(v_3) = h$

so that we have an equation for  $a_i^k$ . Then we solve it (I believe that this way would work).

(2) Another way: Note that from  $*$  we have

$$[e + f, h] = -2(e - f)$$

And

$$[e + f, e - f] = -2h$$

That is we have  $v = e + f$ ,  $w = h$ ,  $x = e - f$  s.t. they are basis for  $sl(2, \mathbf{R})$  and

$$[v, w] = -2x, [w, x] = 2v, [x, v] = 2w$$

This relation is similar to  $(\{e_i\}, \wedge)$  so that we let

$$\phi(v) = ae_1, \phi(w) = be_2, \phi(x) = ce_3$$

So from calculation we have

$$\frac{1}{2}(a, b, c) = (\pm i, \pm i, 1)$$

### KUL-2024-8.2 Isomorphisms from complexification

We know that:

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(3) &= \mathfrak{su}(2) = \mathfrak{su}^*(2), & \mathfrak{so}(2, 1) &= \mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{su}(1, 1) = \mathfrak{sp}(2), \\ \mathfrak{so}(4) &= \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), & \mathfrak{so}(3, 1) &= \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \\ \mathfrak{so}(2, 2) &= \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2), & \mathfrak{so}^*(4) &= \mathfrak{su}(1, 1) \oplus \mathfrak{su}(2), \\ \mathfrak{so}(5) &= \mathfrak{usp}(4), & \mathfrak{so}(4, 1) &= \mathfrak{usp}(2, 2), & \mathfrak{so}(3, 2) &= \mathfrak{sp}(4), \\ \mathfrak{so}(6) &= \mathfrak{su}(4), & \mathfrak{so}(5, 1) &= \mathfrak{su}^*(4), & \mathfrak{so}(4, 2) &= \mathfrak{su}(2, 2) \\ \mathfrak{so}(3, 3) &= \mathfrak{sl}(4), & \mathfrak{so}^*(6) &= \mathfrak{su}(3, 1), \\ \mathfrak{so}^*(8) &= \mathfrak{so}(6, 2). \end{aligned}$$

Argue for these, first by identifying the complex algebras (see the Dynkin diagrams), and then by calculating the character of the different real forms. Find one extra ... = .... Argue then which of the above are normal real forms.

### Solution

(?? Proeyen has several pages about them, see his note for theory to think about solutions.)

## 9.5.5 Problems about Dynkin diagrams

### KUL-2024-7.1.

Prove the following facts about abstract Dynkin diagrams:

(a) Argue that the diagram obtained after removing the  $i$ -th vertex from an abstract Dynkin diagram, and removing all edges attached to that vertex, is still an abstract Dynkin diagram (possibly nonconnected).

Hint: Consider the corresponding operation on the Cartan matrix.

(b) Prove the diagram associated to an  $\ell \times \ell$  Cartan matrix has at most  $\ell$  pairs of vertices  $i < j$  with at least one edge connecting them.

Hint: Consider the length squared of the following linear combination:  $\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\alpha^{(i)}}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})^{\frac{1}{2}}}$ .

(c) Use items (a) and (b) to argue that there can be no loops in the abstract Dynkin diagram associated to a Cartan matrix  $A$ .

(d) The Dynkin diagram of  $G_2$  cannot be a subdiagram of any larger diagram.

Hint: Consider an additional node labelled '3' attached to the second node of the  $G_2$  Dynkin diagram, and find an upper bound on the length squared  $(\beta, \beta)$  of

$$\beta = \sqrt{3}\alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}.$$

#### Solution to (a)

This corresponds to removing the  $i$ -th row and column of the associated Cartan matrix, and obtaining a new Cartan matrix.

#### Solution to (b)

We compute the squared length of  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} 0 < (\alpha, \alpha) &= \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})^{\frac{1}{2}} (\alpha^{(j)}, \alpha^{(j)})^{\frac{1}{2}}} = \ell + 2 \sum_{i < j} \frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})^{\frac{1}{2}} (\alpha^{(j)}, \alpha^{(j)})^{\frac{1}{2}}} = \ell - \sum_{i < j} \sqrt{|A^{ij} A^{ji}|} \leq \\ &\leq \ell - \#\{i < j\} \end{aligned}$$

where  $\#\{i < j\}$  is the number of pairs  $(i, j)$  with at least one edge connecting them. Hence we see that  $\#\{i < j\} < \ell$ .

#### Solution to (c)

We can use item (a) to reduce the problem into the case where the Dynkin diagram is connected, and consists only of a single loop. In this case there are  $\ell$  pairs of vertices with at least one edge connecting them, in violation of item (b).

#### Solution to (d)

From the Cartan matrix of  $G_2$ ,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

we can write

$$-3 = A^{12} = 2 \frac{(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})}{(\alpha^{(2)}, \alpha^{(2)})}, \quad \text{and} \quad -1 = A^{21} = 2 \frac{(\alpha^{(2)}, \alpha^{(1)})}{(\alpha^{(1)}, \alpha^{(1)})}$$

Let us choose a normalization  $(\alpha^{(2)}, \alpha^{(2)}) = 1$ , which implies then

$$(\alpha^{(1)}, \alpha^{(1)}) = 3, \quad (\alpha^{(2)}, \alpha^{(2)}) = 1, \quad (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) = (\alpha^{(2)}, \alpha^{(1)}) = -\frac{3}{2}.$$

Now, to the Dynkin diagram of  $G_2$  we associate an additional node  $\alpha^{(3)}$  attached to its second node. We can let  $\beta = \sqrt{3}\alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}$ , and compute

$$\begin{aligned} (\beta, \beta) &= (\sqrt{3}\alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}, \sqrt{3}\alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}) \\ &= 9 + 2\sqrt{3}(-3/2) + 2\sqrt{3}(-3/2) + 4 + 2(\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}) + 2(\alpha^{(3)}, \alpha^{(2)}) + (\alpha^{(3)}, \alpha^{(3)}) \\ &= 13 - 6\sqrt{3} + 4(\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}) + (\alpha^{(3)}, \alpha^{(3)}). \end{aligned}$$

The Cartan matrix for this extension of  $G_2$  can be written as

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & d \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix}$$

where one of the following properties of Cartan matrix hold: i.  $b = d = -1$ , ii.  $b = -2, d = -1$ , (or vice-versa) iii.  $b = -3, d = -1$  (or vice-versa).

- If i. holds, then one can find  $(\alpha^{(3)}, \alpha^{(3)}) = 1$  and  $(\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}) = -\frac{1}{2}$ , which implies

$$(\beta, \beta) = 13 - 6\sqrt{3} - 2 + 1 = 12 - 6\sqrt{3} < 0,$$

which is not allowed.

- for the rest of the cases (ii., iii.) we need to perform analogous computations and come to same conclusion. Alternatively, one can also check the condition for the determinant of  $A$ :

$$\det A = 2 - 2bd > 0,$$

but this only holds when either  $b$  or  $d$  is zero. Hence it is not possible to have this extension of  $G_2$  as a Dynkin diagram.

### FS-7.1 Facts about Dynkin diagrams

Use the conditions (7.7) to derive the following facts about the Dynkin diagrams of finite-dimensional simple Lie algebras. (These are crucial steps in the classification of these algebras.)

- The Dynkin diagram of  $G_2$  cannot be a subdiagram of any larger diagram.
- A diagram can contain the Dynkin diagram of  $B_2$  at mQst once as a subdiagram.
- The allowed Dynkin diagrams have at most three end points.

Hint: For any diagram of forbidden type, construct a vector with negative length squared as a suitable linear combination of simple roots. For example, in the case of  $G_2$  consider an additional node labelled '3' attached to the second node of the  $G_2$  Dynkin diagram, and find an upper bound on the length squared  $(\beta, \beta)$  of  $\beta = \sqrt{3}\alpha^{(1)} + 2\alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}$ .

### Solution

### FS-7.2 Algebras with $2 \times 2$ Cartan submatrix

As an illustration of the classification of affine Lie algebras, take  $r = 2$  and consider the case where a rank two  $2 \times 2$  submatrix of the Cartan matrix  $A$  is equal to the Cartan matrix of  $G_2$ . Thus, possibly up to a renumbering of rows and columns,  $A$  reads

$$A = \begin{pmatrix} 2 & p & q \\ r & 2 & -3 \\ s & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Show that there are only two allowed combinations of the integers  $p, q, r, s$  for which the determinant of  $A$  is zero, and use the table VIII to identify the associated affine Lie algebras.

(!!! add relevant parts of a table!)

### Solution

The associated affine Lie algebras are  $G_2^{(1)}$  and  $G_2^{(3)}$ .

### FS-7.3 Check system of simple roots

By computing the inner product of the simple roots given in table below, check that they provide indeed a system of simple roots for the respective simple Lie algebras.



| $\mathfrak{g}$ | D     | simple roots                                                                                           | positive roots                                                                                                                      |
|----------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_r$          | $r+1$ | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r$                                                                 | $e_i - e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r+1$                                                                                            |
| $B_r$          | $r$   | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1;$<br>$e_r$                                                     | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r;$<br>$e_i, \quad 1 \leq i \leq r$                                                           |
| $C_r$          | $r$   | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1;$<br>$2e_r$                                                    | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r;$<br>$2e_i, \quad 1 \leq i \leq r$                                                          |
| $D_r$          | $r$   | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1;$<br>$e_{r-1} + e_r$                                           | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r$                                                                                            |
| $E_6$          | 8     | $e_{i+1} - e_i, \quad 1 \leq i \leq 4;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{j=2}^7 e_j),$<br>$e_1 + e_2$ | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq j < i \leq 5;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{j=1}^5 (\pm) e_j),$<br>even number of minus signs |

|       |   |                                                                                                        |                                                                                                                                              |
|-------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $E_7$ | 8 | $e_{i+1} - e_i, \quad 1 \leq i \leq 5;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{j=2}^7 e_j),$<br>$e_1 + e_2$ | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq j < i \leq 6;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 - e_7 + \sum_{j=1}^6 (\pm) e_j),$<br>odd number of minus signs;<br>$e_8 - e_7$ |
| $E_8$ | 8 | $e_{i+1} - e_i, \quad 1 \leq i \leq 6;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{j=2}^7 e_j),$<br>$e_1 + e_2$ | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq j < i \leq 8;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + \sum_{j=1}^7 (\pm) e_j),$<br>even number of minus signs                      |
| $F_4$ | 4 | $e_2 - e_3, e_3 - e_4,$<br>$e_4,$<br>$\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$                              | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4;$<br>$e_i, \quad 1 \leq i \leq 4;$<br>$\frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$                     |
| $G_2$ | 3 | $e_1 - e_2,$<br>$e_2 + e_3 - 2e_1$                                                                     | $e_1 - e_2, e_3 - e_1, e_3 - e_2,$<br>$e_2 + e_3 - 2e_1, e_1 + e_3 - 2e_2,$<br>$-e_1 - e_2 + 2e_3$                                           |

## Solution

(????)

## FS-7.4 Recursion relation

a) Derive the recursion relation

$$(e_{\alpha, \beta + (j-1)\alpha})^2 - (e_{\alpha, \beta + j\alpha})^2 = (\beta + j\alpha, \alpha^\vee)$$

for the structure constants  $e_{\alpha, \beta}$  of CW basis.

Hint: Evaluate the Jacobi identity for  $E^\alpha, E^{-\alpha}$  and  $E^{\beta+j\alpha}$  and employ the relations  $\frac{e_{\beta, -\alpha-\beta}}{e_{-\alpha-\beta, \alpha}} = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}, \quad \frac{e_{-\alpha-\beta, \alpha}}{e_{\alpha, \beta}} = \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}$ .

b) Solve the recursion relation with the initial condition  $e_{\alpha, \beta + n_+ \alpha} = 0$ . Deduce that  $-n_+ \leq (\beta, \alpha^\vee) \leq n_-$  from the fact that  $g$  is finite-dimensional.

c) For  $g$  simply laced, use the derived recursion identity to show that the structure constant  $e_{\alpha, \beta + (n_+ - 1)\alpha}$  can be an integer only if  $n_+ = 1$ .

## Solution

(?? what is simply laced??)

## FS-7.5 Understanding table

Show that the roots in the orthonormal basis of a classical simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  as given in table below

| $\mathfrak{g}$ | D     | simple roots                                                                                           | positive roots                                                                                                                      |
|----------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_r$          | $r+1$ | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r$                                                                 | $e_i - e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r+1$                                                                                            |
| $B_r$          | $r$   | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1;$<br>$e_r$                                                     | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r;$<br>$e_i, \quad 1 \leq i \leq r$                                                           |
| $C_r$          | $r$   | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1;$<br>$2e_r$                                                    | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r;$<br>$2e_i, \quad 1 \leq i \leq r$                                                          |
| $D_r$          | $r$   | $e_i - e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r-1;$<br>$e_{r-1} + e_r$                                           | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq r$                                                                                            |
| $E_6$          | 8     | $e_{i+1} - e_i, \quad 1 \leq i \leq 4;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{j=2}^7 e_j),$<br>$e_1 + e_2$ | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq j < i \leq 5;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{j=1}^5 (\pm) e_j),$<br>even number of minus signs |

|       |   |                                                                                                        |                                                                                                                                              |
|-------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $E_7$ | 8 | $e_{i+1} - e_i, \quad 1 \leq i \leq 5;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{j=2}^7 e_j),$<br>$e_1 + e_2$ | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq j < i \leq 6;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 - e_7 + \sum_{j=1}^6 (\pm) e_j),$<br>odd number of minus signs;<br>$e_8 - e_7$ |
| $E_8$ | 8 | $e_{i+1} - e_i, \quad 1 \leq i \leq 6;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + e_1 - \sum_{j=2}^7 e_j),$<br>$e_1 + e_2$ | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq j < i \leq 8;$<br>$\frac{1}{2}(e_8 + \sum_{j=1}^7 (\pm) e_j),$<br>even number of minus signs                      |
| $F_4$ | 4 | $e_2 - e_3, e_3 - e_4,$<br>$e_4,$<br>$\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$                              | $e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4;$<br>$e_i, \quad 1 \leq i \leq 4;$<br>$\frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$                     |
| $G_2$ | 3 | $e_1 - e_2,$<br>$e_2 + e_3 - 2e_1$                                                                     | $e_1 - e_2, e_3 - e_1, e_3 - e_2,$<br>$e_2 + e_3 - 2e_1, e_1 + e_3 - 2e_2,$<br>$-e_1 - e_2 + 2e_3$                                           |

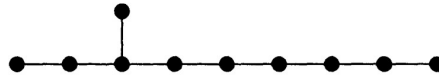
correspond to the Cartan-Weyl basis of  $\mathfrak{g}$  that is defined by

$$\begin{aligned}
 A_{n-1} : \quad & \mathcal{B}_o(A_{n-1}) = \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+1,i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \\
 & \mathcal{B}_+(A_{n-1}) = \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq i < j \leq n\} \\
 & \mathcal{B}_-(A_{n-1}) = \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq j < i \leq n\} \\
 C_n : \quad & \mathcal{B}_o = \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\}, \\
 & \mathcal{B}_+ = \{\mathcal{E}_{i,j+n} + \mathcal{E}_{j,i+n} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\}, \\
 & \mathcal{B}_- = \{\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\} \\
 D_n : \quad & \mathcal{B}_o = \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\}, \\
 & \mathcal{B}_+ = \{\mathcal{E}_{i,j+n} - \mathcal{E}_{j,i+n} | i < j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\}, \\
 & \mathcal{B}_- = \{-\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i < j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\}. \\
 B_n : \quad & \mathcal{B}_o = \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\}, \\
 & \mathcal{B}_+ = \{\mathcal{E}_{i,j+n} + \mathcal{E}_{j,i+n} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,0} - \mathcal{E}_{0,i+n}\} \\
 & \mathcal{B}_- = \{-\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\} \cup \{\mathcal{E}_{0,i} - \mathcal{E}_{i+n,0}\}
 \end{aligned}$$

### Solution

#### FS-7.6 Kac-Moody algebra is hyperbolic

Check that the Kac-Moody algebra associated to the Dynkin diagram is hyperbolic.



As a comparison of this Dynkin diagram to those of the  $E$  series shows, it is natural to denote this algebra by  $E_{10}$ . Likewise, one could write  $E_9$  for  $E_8^{(1)}$ , and define  $E_r$  with  $r > 10$  in the obvious way by joining consecutively further nodes to the rightmost one of the Dynkin diagram, and also  $E_5 \equiv D_5$  and  $E_4 \equiv A_4$ . Show that the determinant of the Cartan matrices for this extended  $E$  series is given by the formula  $\det A(E_r) = 9 - r$ . Conclude that  $E_{10}$  is the only hyperbolic algebra in the  $E$  series, and  $E_9$  the only affine one.

#### FS-7.7 Simplicity of Kac-Moody algebra

Show that a Kac-Moody algebra is simple, i.e. does not contain any non-trivial ideal, if and only if its Cartan matrix  $A$  is indecomposable and satisfies  $\det A \neq 0$ . (This implies in particular that hyperbolic Kac-Moody algebras are simple.)

Hint: Take the fact for granted that any ideal of a Kac-Moody algebra has non-zero intersection with the Cartan subalgebra. Also use that  $\det A \neq 0$  implies that the center of the Kac-Moody algebra is trivial.

## 9.5.6 Problems about connection of Lie algebras and Lie groups

### FS-9.1

a) Show that the fact that the multiplication of a Lie group is differentiable implies that the inversion is differentiable as well. Hint: Define the map  $f : G \times G \rightarrow G \times G$ ,  $f(\gamma, \gamma') := (\gamma, \gamma\gamma')$ . Compute its inverse, show that  $(e, e)$  is a regular value of  $f$ , and conclude that locally a differentiable inverse exists. Use the fact that left-translation is differentiable to show the claim globally.

b) Show that the action of a (Lie) group on itself by left or right multiplication is transitive and free. Is the same true for the adjoint action of  $G$  on itself, i.e. for the action defined by  $R_\gamma(\beta) := \gamma\beta\gamma^{-1}$ ?

### Solution

### FS-9.2

Check that the definition (9.4) of the Lie derivative is covariant under coordinate transformations  $y = y(x)$  and turns the space of all vector fields on a manifold  $\mathcal{M}$  into a Lie algebra. Explain how the Lie derivative (9.4) can be interpreted as the commutator of the differential operators  $A = \sum_a A^a \partial / \partial \xi^a$  acting on functions on  $\mathcal{M}$ .

Show that on a Lie group the bracket of two left-invariant vector fields is left-invariant as well.

**Solution****FS-9.3**

Show that the Lorentz group  $SO(n, 1)$  is not compact.

Hint: In a compact manifold any sequence of points has an accumulation point. Find a suitable sequence of pseudo-rotations (boosts).

**FS-9.4**

Express the exponentials  $\exp(\xi M_+)$  and  $\exp(\xi M_-)$  of the matrices

$$M_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in terms of trigonometric or hyperbolic functions. Which range of values of the variable  $\xi$  is needed to describe these exponentials, and how is this related to the sign of  $\text{tr}((M_{\pm})^2)$ ?

**Solution****FS-9.5**

a) Compute the exponential of the matrix  $M$  whose entries are

$$M_{ij} = \xi \delta_{i,j} + \delta_{j,i+1},$$

with  $\xi$  some complex number.

**Solution**

(?? тут хотя бы задачу понимаю, потом подумаю про нее)

**9.6 Problems about special algebraic constructions****9.6.1 Problems about embeddings**

(see sect 18 of FS)

**9.6.2 Problems about Clifford algebras and spinors**

(see sect 20 of FS)

**FS**

Show that the realization (20.2) of the generators of  $\mathfrak{so}(n)$  is unitarily equivalent to the one given in equation (5.32). What are the virtues of the respective realizations? Hint: In terms of the elements  $\gamma$  of the Lie group  $SO(n)$ , the relation reads  $\gamma_{(\text{I})} = U \gamma_{(\text{II})} U^{-1}$ , where the matrices  $\gamma_{(\text{I})}$  corresponding to the choice (20.2) are orthogonal,  $\gamma_{(\text{I})} \gamma_{(\text{I})}^t = 1$ , while the matrices  $\gamma_{(\text{II})}$  corresponding to (5.32) satisfy (why?)  $\gamma_{(\text{II})}^t K \gamma_{(\text{II})} = K$  with  $K$  as given in equation (5.26) (for  $n$  even, respectively as  $K'$  in (5.27) for  $n$  odd).

**FS**

Let  $e_i, i = 1, 2, \dots, n$ , satisfy the Clifford algebra relations (20.3). Show that the elements

$$S_{0,i} := -\frac{i}{2} S_{0,i} = -\frac{i}{2} e_i \quad \text{and} \quad S_{j,k} := \frac{1}{4} S_{j,k} = \frac{1}{4} [e_j, e_k]$$

$i = 1, 2, \dots, n$  and  $1 \leq j < k \leq n$  span the Lie algebra  $\mathfrak{so}(n+1)$ .

**FS**

Compute the representation matrix for  $e_1 e_2 e_3$  in each of the two irreducible representations of  $\mathcal{C}(\mathbb{C}^3)$ . Conclude that both representations are not faithful, and that the two representations are inequivalent.

**FS**

Use the definition (20.1) of the  $\mathfrak{so}(n+1)$ -generators (which correspond to the defining (vector) representation) to show that the representations of Clifford algebras provide the spinor representations of  $\mathfrak{so}(n+1)$ .

**FS**

Check that orthogonal transformations of the type (20.12) of the representation matrices of a complex Clifford algebra yield again a representation of the Clifford algebra. What is the analogue of this statement in the case of real Clifford algebras?

**FS**

Show that the universal covering group of  $\mathrm{SO}(3, 1)^+$  is isomorphic to  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . Hint: Identify the determinant of the matrix (20.26) with the Lorentz norm of  $x$ . Then examine  $M x_m \sigma^m M^\dagger$  with  $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Verify that  $G/P_1$ , with  $P_1$  as in (20.55), is isomorphic to the space of complex two-dimensional subspaces of a four-dimensional complex vector space  $\mathbb{C}^4$ , and that  $G/P_2$  is isomorphic to the three-dimensional complex projective space  $\mathbb{P}\mathbb{C}^3$ .

Show that the complexification of the Lie algebra of the Lorentz group is isomorphic to the direct sum  $A_1 \oplus A_1$ . Hint: Consider the maximal compact subgroup isomorphic to  $\mathrm{SO}(3)$ , consisting of rotations of the three space coordinates. As generators for the non-compact subspace choose boosts (pseudo-rotations)  $K_i := M_{0i}$  along the space coordinate axes. Compute the algebra spanned by the  $K_i$  and consider appropriate complex linear combinations with infinitesimal rotations.

Find the explicit form of the 'conjugate' sigma matrices  $\bar{\sigma}^m$  defined in (20.31). Verify the relations

$$\sigma^m \bar{\sigma}^n + \sigma^n \bar{\sigma}^m = -2\eta^{mn} \mathbf{1}, \quad \mathrm{tr}(\sigma^m \bar{\sigma}^n) = -2\eta^{mn}$$

$$\sum_m \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\sigma}_m^{\beta\dot{\beta}} = -2\delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$$

and compute  $\bar{\sigma}^m \sigma^n + \bar{\sigma}^n \sigma^m$  and  $\mathrm{tr}(\sigma^k \bar{\sigma}^l \sigma^m \bar{\sigma}^n)$ .

Consider a 'Grassmann number' variable  $\theta$ , which by definition satisfies  $\theta^2 = 0$ . By a function of  $\theta$  one means a power series in  $\theta$  with complex coefficients. The derivative  $\frac{d}{d\theta}$  with respect to a Grassmann variable is defined by  $\frac{d}{d\theta} 1 = 0$ ,  $\frac{d}{d\theta} \theta = 1$ , and an indefinite integral by

$$\int d\theta = 0, \quad \int \theta d\theta = 1.$$

a) Show that on functions of Grassmann variables, differentiation  $\frac{d}{d\theta}$  and integration  $\int d\theta$  give identical results.

b) How does partial integration work? How does  $d\theta$  transform under a change  $\theta \mapsto \xi\theta$  ( $\xi \in \mathbb{C}$ ) of variables? What is the analogue of Dirac's delta function?

c) Extend differentiation and integration to functions of several Grassmann variables  $\theta_i$  which satisfy  $\theta_i^2 = 0$  and  $\theta_j \theta_i = -\theta_i \theta_j$ . Compute the integral of the exponential power series  $\exp\left(-\sum_{i,j} \xi_{ij} \theta_i \theta_j\right)$  over all Grassmann variables, and compare the result with Gaussian integration over complex variables.

### 9.6.3 Problems about Young tableaux

## 9.7 Problems about Galois theory and polynomials

### 9.7.1 Problems about extensions fields

**N)**

Показать, что расширение  $F \supset P$  простой степени не имеет собственных ( $\neq P, F$ ) подполей.

N)

Найти примитивный элемент расширения  $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.

N)

Найти размерность над  $\mathbb{Q}$  поля разложения многочлена  $X^p - 2$ .

N)

Показать, что над полем  $P$  характеристики  $p > 0$  для многочлена  $X^p - a$  имеются лишь две возможности: быть неприводимым или же быть  $p$ -й степенью линейного многочлена.

N)

Пусть  $Z_p(Y)$  - поле рациональных дробей характеристики  $p$ . Показать, что  $X^p - Y$  - неприводимый над  $Z_p(Y)$  многочлен, все корни которого совпадают.

## 9.7.2 Problems about finite fields

N)

Доказать, что при любом  $d|n, d < n$ , имеет место соотношение  $X^n - 1 = (X^d - 1) \Phi_n(X) h_d(X)$ , где  $h_d \in \mathbb{Z}[X]$ .

N)

Пусть  $q$  - целое положительное число  $> 1$ . Согласно  $(10)\Phi_n(q) \in \mathbb{Z}$ . Показать, что  $\Phi_n(q) \mid (q - 1) \implies n = 1$ .

N)

Проверить, что круговой многочлен

$$\Phi_{15}(X) = X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$$

рассматриваемый над полем  $\mathbb{F}_2$ , является произведением двух неприводимых многочленов  $X^4 + X^3 + 1$  и  $X^4 + X + 1$ . Используя это обстоятельство, доказать неприводимость  $\Phi_{15}(X)$  над  $\mathbb{Q}$  (ср. с упр. 11 из [BA I, гл. 6, §1]).

N)

Проверить следующие свойства круговых многочленов.

Если  $p$  - простое число и  $p|n$ , то  $\Phi_{pn}(X) = \Phi_n(X^p)$ ; если же  $p \nmid n$ , то  $\Phi_{pn}(X) = \Phi_n(X^p) / \Phi_n(X)$ .

N)

Исходя из цепочки естественных включений

$$GF(p) \subset GF(p^{2!}) \subset GF(p^{3!}) \subset \dots$$

ввести так называемое предельное поле  $\Omega_p = GF(p^{\infty!})$ , полагая

$$\alpha \in \Omega_p \iff \{\alpha \in GF(p^{n!}) \text{ при достаточно большом } n\}.$$

Опираясь на основные свойства конечных полей, доказать, что  $\Omega_p$  - алгебраически замкнутое поле. Таким образом получаются, с учётом поля комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , примеры алгебраически замкнутых полей любой характеристики.

N)

Пусть  $q = p^n$ . Показать, что при  $p = 2$  все элементы поля  $\mathbb{F}_q$  являются квадратами, а при  $p > 2$  квадраты группы  $\mathbb{F}_q^*$  образуют в ней подгруппу  $\mathbb{F}_q^{*2}$  индекса 2, причём  $\mathbb{F}_q^{*2} = \text{Ker}(t \mapsto t^{(q-1)/2})$ .

7 (M. Aschbacher). Пусть  $\mathbb{F}_q$  - конечное поле с нечётным числом  $q = p^n$  элементов. Если  $q$  не равно 3 или 5, то "на окружности"  $x^2 + y^2 = 1$  найдётся точка с координатами  $x, y \in \mathbb{F}_q^*$ . Доказать это утверждение при  $p > 5$ .

N)

Всякий ли примитивный элемент поля  $\mathbb{F}_q$  является образующей мультипликативной группы  $\mathbb{F}_q^*$ ?

N)

Пусть  $A(q) = \text{Ass}_F(X_1, \dots, X_q)$  - свободная ассоциативная алгебра над полем  $F$ , порождённая  $q$  свободными образующими - некоммутирующими переменными  $X_1, \dots, X_q$ . Положив

$$A_m(q) = \langle X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_m} | 1 \leq i_j \leq q \rangle_F, \quad \dim A_m(q) = q^m$$

мы замечаем, что  $A(q)$  - градуированная алгебра:

$$A(q) = F \cdot 1 \oplus A_1(q) \oplus A_2(q) \oplus A_3(q) \oplus \dots$$

В  $A(q)$  содержится свободная алгебра Ли  $L(q) = \text{Lie}(X_1, \dots, X_q)$  с теми же свободными образующими и операцией коммутирования  $[UV] = UV - VU$ . Алгебра  $L(q)$  также градуирована: где

$$L(q) = L_1(q) \oplus L_2(q) \oplus L_3(q) \oplus \dots$$

$$L_1(q) = \langle X_1, \dots, X_q \rangle_F, \quad L_2(q) = \langle [X_i, X_j] | i < j \rangle_F, \quad \dots$$

Используя тождество Якоби, убедиться в том, что

$$L_3(q) = \langle [[X_i, X_j], X_k] \rangle, \quad i < j, k \leq j; \quad \dim L_3(q) = \frac{1}{3}(q^3 - q)$$

На самом деле справедлива общая формула Витта

$$\dim L_m(q) = \Psi_m(q) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) q^d$$

в точности совпадающая с формулой (12). Существенная разница лишь в том, что в (12')  $q$  - произвольное натуральное число, а в (12) - степень простого числа. мулой.

Число ожерелий из задачи 2 в преамбуле к гл. 3 выражается такой же фор- (????)

### 9.7.3 Problems about number theory

#### Can a sum of square roots be an integer?

Except for the obvious cases  $n = 0, 1$ , are there any values of  $n$  such that  $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$  is an integer? How does one even approach such a problem?

#### Solution by Jyrki Lahtonen on SE

No, it is not an integer.

Let  $p_1 = 2 < p_2 < p_3 < \dots < p_k$  be all the primes  $\leq n$ . It is known that

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_k})$$

is a Galois extension of the rationals of degree  $2^k$ . The Galois group  $G$  is an elementary abelian 2-group. An automorphism  $\sigma \in G$  is fully determined by a sequence of  $k$  signs  $s_i \in \{+1, -1\}$ ,  $\sigma(\sqrt{p_i}) = s_i \sqrt{p_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

See [this answer/question](https://math.stackexchange.com/a/113701/11619) for a proof of the dimension of this field extension. There are then several ways of getting the Galois theoretic claims. For example we can view  $K$  as a compositum of linearly disjoint quadratic Galois extensions, or we can use the basis given there to verify that all the above maps  $\sigma$  are distinct automorphisms.

For the sum  $S_n = \sum_{\ell=1}^n \sqrt{\ell} \in K$  to be a rational number, it has to be fixed by all the automorphisms in  $G$ . This is one of the basic ideas of Galois correspondence. But clearly  $\sigma(S_n) < S_n$  for all the non-identity automorphisms  $\sigma \in G$ , so this is not the case.

**Can  $\sqrt[n]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \sqrt[n]{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$  be an integer?**

The number  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  cannot be an integer if  $a, b$  are integers such that  $\sqrt{b}$  is not an integer. (In fact, this is true for any number of square roots, and I believe even for cube roots, etc.) Therefore  $\sqrt[n]{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  cannot be an integer either, for any positive integer  $n$ .

What about if we sum it with the conjugate? That is, do there exist positive integers  $n \geq 2, a, b$  such that  $\sqrt{b}$  is not an integer but  $\sqrt[n]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \sqrt[n]{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$  is an integer?

\*Update\*: As Jyrki Lahtonen points out in the comment, there do exist such integers. What about if we also require that  $\sqrt{a}$  is not an integer either?

### Solution by Giuseppe Mancò

The answer is yes. Pell's equations solve the problem.  
Let

$$A.N'^2 + 1 = M'^2$$

the generic Pell equation, the solution of which is:

$$N' = \frac{(M+N\sqrt{A})^n - (M-N\sqrt{A})^n}{2\sqrt{A}},$$

$$M' = \frac{(M+N\sqrt{A})^n + (M-N\sqrt{A})^n}{2}$$

where  $M$  and  $N$  are the basic solutions of  $A$   
(For example if we choose  $A = 8, N = 1$  and  $M = 3$ ).

$$\sqrt[n]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \sqrt[n]{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = M',$$

$$\sqrt[n]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt[n]{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = N'\sqrt{A};$$

$$a = 2^{-2(n+1)} \left( (M + N\sqrt{A})^n + (M - N\sqrt{A})^n \right)^2,$$

$$b = 2^{-2(n+1)} \left( (M + N\sqrt{A})^n - (M - N\sqrt{A})^n \right)^2.$$

Let's take an example:  $A = 13, N = 180$  and  $M = 649$ ,  
we choose  $n = 4$ , then

$$\sqrt[4]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \sqrt[4]{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1419278889601,$$

$$a = \frac{1053711982714216551873491874429255128997076465231993345538436469128908160121757992166220331730227201}{256},$$

$b$

$$= 4116062432477408405755827634489277847644829942312474006009517457534797500475617156899298170821200.$$

If we choose  $A = 8, M = 3$  and  $N = 1$  and  $n = 5$ , we get:

$$\sqrt[4]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \sqrt[4]{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 3363,$$

$$a = \frac{47370562574818466708936539960450008969}{1024},$$

$$b = \frac{5921320321852308338617067495056251121}{128},$$

and so on. . .

## 9.7.4 Problems about Galois correspondence

N)

Пусть  $P$  - поле характеристики 0,  $p$  - простое число,  $\zeta$  - примитивный корень степени  $p$  из 1. Показать, что многочлен  $X^p - a \in P[X]$ , не имеющий корней в поле  $P$ , неприводим над  $P(\zeta)$ .

N)

Найти группы Галуа многочленов: а)  $X^3 - 12X + 8$ ; б)  $X^3 - 2X - 2$ ; в)  $X^3 + X + 1$ ; г)  $X^4 + 4X^2 + 2$ ; д)  $X^4 + 3X^3 - 3X + 3$ .

## 9.7.5 Problems about calculating the Galois group

N)

Найти нормальный базис расширения  $\mathbb{F}_8/\mathbb{F}_2$ . Для определённости считаем  $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2(\theta), \theta^3 + \theta + 1 = 0$ .

N)

Найти нормальный базис расширения  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ .

### 9.7.6 Problems about the Galois extension

N)

Разрешимо ли в радикалах уравнение

$$x^6 + 2x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0?$$

N)

Пусть  $\zeta$  - примитивный корень степени 5 из 1,  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $\alpha_i$  - нули уравнения

$$x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - 2b = 0.$$

Показать, что

$$\alpha_i = \zeta^i \sqrt[5]{b + \sqrt{b^2 - a^5}} + \zeta^{5-i} \sqrt[5]{b - \sqrt{b^2 - a^5}}, \quad 0 \leq i \leq 4$$

N)

Показать, что если все три корня неприводимого над полем  $P \subset \mathbb{R}$  многочлена  $X^3 + pX + q$  вещественны, то их нельзя выразить посредством вещественных радикалов.

N)

Ряд утверждений из пп. 3-4 можно доказать, используя понятие резольвенты Лагранжа  $\mathcal{L}(u)$  элемента  $u$ . Именно, если  $F = P(u)$  - циклическое расширение степени  $n$  поля  $P$ , содержащего примитивный корень  $\zeta$  степени  $n$  из 1, и если  $\text{Gal } F/P = \langle \sigma \rangle$ ,  $v \in F$ , то по определению

$$\mathcal{L}(v) = u + \zeta^{-1}\sigma(v) + \zeta^{-2}\sigma^2(v) + \dots + \zeta^{-(n-1)}\sigma^{n-1}(v)$$

Проверить, что резольвента Лагранжа обладает следующими свойствами:

- а)  $\sigma(\mathcal{L}(v)) = \zeta \mathcal{L}(v)$
- б)  $\mathcal{L}(v)^n \in P$
- в) существует элемент  $v \in F$ , для которого  $\mathcal{L}(v) \neq 0$ .

### 9.7.7 Problems about rigidity and rationality in finite groups

N)

Пусть  $G, H$  - конечные группы с сильно жёсткими семействами

$$\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m), \quad \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{K}'_1, \dots, \mathcal{K}'_{m'})$$

Показать, что тогда

$$\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{K}_i \times \mathcal{K}'_j | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m')$$

N)

сильно жёсткое семейство в  $G \times H$ .

N)

Пусть  $\sigma$  - внешний автоморфизм конечной группы, и пусть  $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$  - жёсткое семейство классов сопряжённости в  $G$ . Показать, что тогда  $\sigma(\mathcal{K}_i) \neq \mathcal{K}_i$  для некоторого  $i$ .



**N)**

Показать, что в знакопеременной группе  $A_5$  с известными нам классами сопряжённости  $1A, 2A, 3A, 5A, 5B$  тройки

$$(2A, 3A, 5A), \quad (2A, 5A, 5B), \quad (3A, 5A, 5B)$$

являются сильно жёсткими. Отсюда следует, что  $A_5 \cong \text{Gal}F/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .

**N)**

Обозначим через  $K_1(z)$  число представлений элемента  $z$  конечной группы  $G$  в виде коммутатора, т.е. число решений уравнения  $z = xyx^{-1}y^{-1}$ . Показать, что

$$K_1(z) = |G| \sum_{i=1}^r \frac{\chi_i(z)}{\chi_i(e)}$$

Более общо: если  $K_m(z)$  - число решений уравнения

$$z = (x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}) (x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1}) \dots (x_m y_m x_m^{-1} y_m^{-1})$$

то

$$K_m(z) = |G|^{2m-1} \sum_i \frac{\chi_i(z)}{\chi_i(e)^{2m-1}}$$

---

## Part VI

# —— Special Constructions in a Nutshell

---

## 10 Other basic properties and methods of Lie algebras

### 10.1 Other well-known algebraic structures

#### 10.1.1 $\mathfrak{su}(n) \equiv A_{n-1}$ , $\mathfrak{so}(2n+1) \equiv B_n$ , $\mathfrak{sp}(2n) \equiv C_n$ , $\mathfrak{so}(2n) \equiv D_n$

(see lectures by Foster, haven't think much about them yet)

### Comparison of special algebras

A basis of  $\mathfrak{sl}(n) \cong A_{n-1}$  is then provided by the union

$$\mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_-$$

of three sets  $\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{B}_0(A_{n-1})$  and  $\mathcal{B}_\pm \equiv \mathcal{B}_\pm(A_{n-1})$ , which are defined as

$$\begin{aligned} A_{n-1} : \quad \mathcal{B}_0(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+1,i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \\ \mathcal{B}_+(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq i < j \leq n\} \\ \mathcal{B}_-(A_{n-1}) &= \{\mathcal{E}_{i,j} | 1 \leq j < i \leq n\} \end{aligned}$$

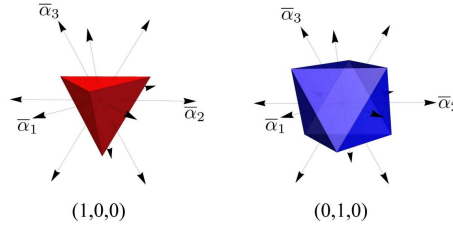
Together there are thus  $(n-1) + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - 1$  generators, so that the dimension of  $A_{n-1}$  is  $n^2 - 1$ .

$$\begin{aligned} B_n : \quad \mathcal{B}_0 &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\}, \\ \mathcal{B}_+ &= \{\mathcal{E}_{i,j+n} + \mathcal{E}_{j,i+n} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,0} - \mathcal{E}_{0,i+n}\} \\ \mathcal{B}_- &= \{-\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\} \cup \{\mathcal{E}_{0,i} - \mathcal{E}_{i+n,0}\} \\ C_n : \quad \mathcal{B}_0 &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\}, \\ \mathcal{B}_+ &= \{\mathcal{E}_{i,j+n} + \mathcal{E}_{j,i+n} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\}, \\ \mathcal{B}_- &= \{\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i \leq j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\} \\ D_n : \quad \mathcal{B}_0 &= \{\mathcal{E}_{i,i} - \mathcal{E}_{i+n,i+n}\}, \\ \mathcal{B}_+ &= \{\mathcal{E}_{i,j+n} - \mathcal{E}_{j,i+n} | i < j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | i < j\}, \\ \mathcal{B}_- &= \{-\mathcal{E}_{j+n,i} + \mathcal{E}_{i+n,j} | i < j\} \cup \{\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{j+n,i+n} | j < i\}. \end{aligned}$$

(!!! add explanation here, see 5.6 FS)

### On $\mathfrak{su}(4)$

$\mathfrak{su}(4)$  weights:



(??? think again about foster's lectures!)

### 10.1.2 $\mathfrak{sl}(3)$

#### Main properties of $\mathfrak{sl}(3)$

$$\begin{aligned}
 [H^1, H^2] &= 0, & [E_+^1, E_-^1] &= H^1, & [E_+^2, E_-^2] &= H^2 \\
 [H^1, E_\pm^1] &= \pm 2E_\pm^1, & [H^1, E_\pm^2] &= \mp E_\pm^2, & [H^1, E_\pm^\theta] &= \pm E_\pm^\theta \\
 [H^2, E_\pm^1] &= \mp E_\pm^1, & [H^2, E_\pm^2] &= \pm 2E_\pm^2, & [H^2, E_\pm^\theta] &= \pm E_\pm^\theta \\
 [E_\pm^1, E_\pm^2] &= \pm E_\pm^\theta, & [E_\pm^1, E_\mp^\theta] &= \mp E_\mp^2, & [E_\pm^2, E_\mp^\theta] &= \pm E_\mp^1 \\
 [E_\pm^1, E_\mp^2] &= [E_\pm^1, E_\pm^\theta] = [E_\pm^2, E_\pm^\theta] = 0, & [E_+^\theta, E_-^\theta] &= H^1 + H^2
 \end{aligned}$$

(here  $E_3$  corresponds to  $E_\theta$ ).

#### Overview of other properties of $\mathfrak{sl}(2)$

### 10.1.3 $SP(n), \mathfrak{sp}(n)$

#### Main formulas of $SP(n)$

$$R^T J R = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

That is, they are matrices that preserve the quadratic form  $J$ , like how the elements of  $O(p, q)$  preserve  $\text{diag}(I_p, -I_q)$ . - To count parameters, note that the left-hand side is automatically antisymmetric, so the number of constraints is  $(2n)(2n-1)/2$ . Then

$$\dim Sp(2n, \mathbb{R}) = 4n^2 - n(2n-1) = n(2n+1)$$

- Directly from the definition, we see  $\det R = \pm 1$ . However, it turns out that we automatically have  $\det R = 1$ . For example, for  $n = 1$ , the symplectic condition is simply  $\det R = 1$ , so  $Sp(2, \mathbb{R}) \cong SL(2, \mathbb{R})$ .

#### Examples of applications of $SP(n)$

##### symplectic groups in Hamiltonian mechanics

Combining the canonical positions and momenta into a single vector  $Z$ , Hamilton's equations are

$$\frac{dZ_a}{dt} = J_{ab} \frac{\partial H}{\partial Z_b}$$

and the form of the equations are preserved under any symplectic transformation  $Z \rightarrow RZ$ . - Similarly, one may define the complex symplectic groups  $Sp(2n, \mathbb{C})$ , where the definition still contains a transpose rather than a conjugate transpose,  $R^T U R = U$ .

## 10.2 Other properties of well-known algebras in a nutshell

### 10.2.1 Other formalisms for typical properties of Lie algebras

(тут повторение тех же тем, что в 1й части, разве что в формализмах, которые пусть и интересные, не часто используются. пока по итогу только формализм Киселева тут, но, наверняка, другие тоже есть, которые редко используются)

#### Понятие системы корней алгебры Ли в формализме Киселева

корни:

$$\alpha^{(k_1 k_2)} = \mu^{(k_1)} - \mu^{(k_2)}.$$

Корни так же, как и векторы  $\mu^{(k)}$  с собственными значениями матриц подалгебры Картана, являются  $n$ -мерными векторами.

Напомним, что собственные векторы  $\mu^{(k)}$  матриц  $(\text{ad } \Gamma_\alpha)_{\beta} = \text{if}_{\alpha\beta}^\gamma$ ,

Переход от базисного состояния с одним весом  $\mu^{(k_2)}$  к другому базисному состоянию с другим весом  $\mu^{(k_1)}$  может быть за счет одного преобразования - линейной комбинации генераторов алгебры Ли, описывающееся корнем  $\alpha^{(k_1 k_2)}$ . Можно также сделать последовательность из нескольких преобразований, каждое из которых характеризуется своим  $\alpha^{(k'_1 k'_2)}$ , т.е.

$$\alpha^{(k_1 k_2)} = \alpha^{(k_1 k'_2)} + \alpha^{(k'_2 k'_3)} + \dots + \alpha^{(k'_{n-1} k'_n)} + \alpha^{(k'_n k_2)},$$

и, следовательно, корень алгебры Ли может выражаться в виде суммы других корней алгебры Ли с целыми коэффициентами.

У каждого корня есть противоположный, ибо наряду с переходом от базисного состояния с одним весом  $\mu^{(k_2)}$  к базисному состоянию с другим весом  $\mu^{(k_1)}$  существует и обратное,

$$\alpha^{(k_2 k_1)} = \mu^{(k_2)} - \mu^{(k_1)} = -\alpha^{(k_1 k_2)}.$$

$$\alpha_m = \sum_{m'} c_{mm'} \alpha_{m'}, \quad c_{mm'} \in \mathbb{Z}$$

и с ее помощью мы можем ввести определение простого положительного корня: простой положительный корень не может быть представлен в виде суперпозиции положительных корней  $\alpha_m = \sum_{m'} c_{mm'} \alpha_{m'}$  с натуральными (положительными целыми) коэффициентами  $c_{mm'}$ .

Интересна обратная задача: определить для алгебр Ли все свойства корней, которым соответствуют линейные преобразования одного базисного состояния в другое в присоединенном представлении, и, уже исходя из этих свойств, перечислить все возможные наборы структурных констант алгебр Ли, например, полупростых и компактных, включая значения весов и прочее. Т.е. перечислить допустимые положительные корни полупростой компактной алгебры Ли и их свойств как раз и есть классификация этих алгебр Ли.

### Понятие ранга алгебры Ли и веса базиса собственных состояний в формализме Киселева

$$[\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0, \quad l = \{\overline{1, n}\}, \quad \Gamma_l \in \mathfrak{H},$$

$$\Gamma_l |\mu\rangle = \mu_l |\mu\rangle, \quad \mu_l \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} (a')^{l'} &= S_{\bullet l'}^{l'} a^l, \\ \Gamma_{l'} &= \Gamma_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l, \\ \Gamma_{l'} |\mu\rangle &= \left( \mu_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l \right) |\mu\rangle = \mu_{l'} |\mu\rangle, \end{aligned}$$

$$\mu_{l'} = \mu_l (S^{-1})_{\bullet l'}^l.$$

$$(\mathbf{l})_m := \delta_{lm}, \quad l, m \in \{\overline{1, n}\}.$$

$$\mu_l^{(k)} = (\mathbf{l}, \mu^{(k)}),$$

$$\Gamma_l |\mu^{(k)}\rangle = (\mathbf{l}, \mu^{(k)}) |\mu^{(k)}\rangle.$$

$$g_{ll'} = \text{tr} (\Gamma_l \Gamma_{l'}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \mu^{(k)} | \Gamma_l \Gamma_{l'} | \mu^{(k)} \rangle = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \langle \mu^{(k)} | \mu^{(k)} \rangle (\mathbf{l}', \mu^{(k)}) (\mathbf{l}, \mu^{(k)}).$$

(???????)

$$g_{ll} = \delta_{ll}$$

Если  $\langle \mu^{(k_1)} | \mu^{(k_2)} \rangle = \delta^{k_1 k_2}$ , то в новом базисе, где  $g_{ll'} = \delta_{ll'}$ ,

$$\delta_{ll'} = \sum_{k=1}^{\mathcal{D}} (\mathbf{l}', \mu^{(k)}) (\mu^{(k)}, \mathbf{l}) = (\mathbf{l}', \mathbf{l}),$$

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{D}} \mu_l^{(k)} \mu_{l'}^{(k)} = \delta_{ll'} \quad \mathcal{D} > n$$

(Чему равно  $\mathcal{D}$ ????)

### Базис Картана-Вейля в обозначениях Киселева

(когда-то пропишу, пока теория в другом формализме итак очень работает)

### Main idea of Serre relations in Kiselev's notation

Chevalley generators:

$$\begin{aligned} h_i &= \kappa_i (\alpha_i)_l \Gamma_l, & \text{сумм. по } l, \alpha_i - \text{простой положительный корень,} \\ e_i &= \sqrt{\kappa_i} \Gamma_{\alpha_i}, \quad f_i = \sqrt{\kappa_i} \Gamma_{-\alpha_i}, \quad i \in \{\overline{1, n}\}, & \text{нет сумм. по } i, \quad \kappa_i := \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= \kappa_i \kappa_j (\alpha_i)_l (\alpha_j)_{l'} [\Gamma_l, \Gamma_{l'}] = 0, \\ [e_i, f_i] &= \kappa_i [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{-\alpha_i}] = \kappa_i (\alpha_i)_l \Gamma_l = h_i, \\ [e_i, f_j] &= \sqrt{\kappa_i \kappa_j} [\Gamma_{\alpha_i}, \Gamma_{-\alpha_j}] = 0, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

$$[h_i, e_j] = \kappa_i \sqrt{\kappa_j} (\alpha_i)_l [\Gamma_l, \Gamma_{\alpha_j}] = \kappa_i \sqrt{\kappa_j} (\alpha_i)_l (\alpha_j)_l \Gamma_{\alpha_j} = \kappa_i \sqrt{\kappa_j} (\alpha_i, \alpha_j) \Gamma_{\alpha_j} = a_{ij} e_j, \text{ (no sum on } j)$$

$$a_{ij} = \kappa_i (\alpha_i, \alpha_j) = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = -\kappa_{ij}^{\max}.$$

( $\kappa_{ij}^{\max}$  - макс. число шагов, в последовательности положительных корней  $\alpha_j + \kappa \alpha_i$ )

### Последовательности корней и дискретный спектр скалярных произведений корней

Рассмотрим теперь  $\alpha$ -последовательность для корня  $\beta$  в виде сумм, построенных из двух различных простых положительных корней с коэффициентом  $\kappa \leq 0$ :

$$\beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \quad \dots, \quad \beta + \kappa\alpha, \quad \dots, \quad \beta + \kappa_{\alpha|\beta}^{\max} \alpha,$$

которая может быть только конечной, так как в базисе представления  $|\mu^{(k)}\rangle$  конечное число состояний, и следовательно, имеется конечное число сдвигов между ними  $\kappa_{\alpha|\beta}^{\max}$ , т.е.  $0 \leq \kappa \leq \kappa_{\alpha|\beta}^{\max}$ .

(словами указания, что же происходит тут?)

Лестничные генераторы, отвечающие простым положительным корневым векторам, — это повышающие операторы, из коммутаторов которых однозначно строятся все повышающие операторы в заданной алгебре группы Ли

(?? выше - написана теория)

Так для цепочки корневых векторов в случае двух простых положительных корней. Если таких корней больше двух, то воспользуемся упорядоченным множеством простых положительных корней  $\{\alpha_m\}, m \in \{1, n\}$  и сопоставим  $\alpha \mapsto \alpha_i, \beta \mapsto \alpha_j$ , так что элементарно в этих обозначениях

$$\kappa_{ij}^{\max} = -2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \equiv -a_{ij},$$

где  $a_{ij}$  называют матрицей Картана, причем, очевидно, что диагональный  $i$ -й элемент матрицы Картана  $a_{ii} = 2$ .

Любые кратные корневому векторы не являются корнями алгебры Ли.

## 10.2.2 Some special properties of Lie algebras

(сюда не актуальные разделы перекинул из книги Левена)

### Gradations and Lie superalgebras

A gradation of a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  by an abelian semigroup  $G$  (with group operation denoted by  $+$ ) is by definition a decomposition

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in G} \mathfrak{g}_{(p)}$$

$$[\mathfrak{g}_{(p)}, \mathfrak{g}_{(q)}] \subseteq \mathfrak{g}_{(p+q)}$$

for all  $p, q \in G$ .  $\mathfrak{g}$  is said to be graded by the semigroup  $G$ . Also, if  $x \in \mathfrak{g}_{(p)}$  for some  $p \in G$ , then  $x$  is called a homogeneous element (with respect to the grading) of  $\mathfrak{g}$ , and the label  $p$  is referred to as the grade or degree of  $x$  and denoted by  $p = \deg x$ .

In the special case of the two-element group  $G = \mathbb{Z}_2$ , the gradation can be employed to construct a 'supersymmetric' generalization of Lie algebras. Namely, one defines a Lie superalgebra  $\mathfrak{g}_s$  as a  $\mathbb{Z}_2$ -graded algebra whose product, denoted by  $[\cdot, \cdot]_s$ , satisfies  $\mathbb{Z}_2$ -graded analogues of the Jacobi identity (4.4) and the antisymmetry property of the Lie bracket, namely the super Jacobi identity

$$(-1)^{|x||z|} [x, [y, z]_s]_s + (-1)^{|x||y|} [y, [z, x]_s]_s + (-1)^{|y||z|} [z, [x, y]_s]_s = 0$$

for all homogeneous  $x, y, z \in \mathfrak{g}_s$ , as well as

$$[x, y]_s = (-1)^{1+|x||y|} [y, x]_s$$

Here the notation  $|x| \equiv \deg x$  is used, and  $\mathbb{Z}_2$  is understood as the set  $\{0, 1\}$  with addition modulo 2 .

(???)

### Open and non-linear algebras

$[T^i, T^j]$  in the associative algebra can be expressed as a sum over terms  $f_k^{ij} (T^l) T^k$ , where the  $f_k^{ij}$  are polynomials in the generators  $T^l$ :

$$[T^i, T^j] = \sum_k f_k^{ij} (T^l) T^k$$

Superficially this looks like the relations of a Lie algebra, if it were not for the fact the  $f_k^{ij} (T^l)$  are functions of  $T^l$  rather than constants. Such a structure is therefore sometimes referred to as an open or soft (Lie) algebra, or as a non-linear (Lie) algebra (e.g. as quadratic algebra when the polynomials  $f_k^{ij} (T^l)$  are linear in the generators  $T^l$ ). Another terminology that is sometimes used is to speak of 'field dependent structure constants'.

(?? who needs it?)

### On Non-semisimple Lie algebras (????)

(??? don't know much about them. See 6.13 FS)

### On Kac-Moody algebras

### On Affine Lie algebras

### On Coxeter labels and dual Coxeter labels

## 10.2.3 Automorphisms of Lie algebras

(deeper understanding of Lie algebras, not so important. See FS ch. 11)

### On The group of automorphisms

### On Automorphisms of finite order

Simple and affine Lie algebras with non-trivial Dynkin diagram automorphisms:

| $\mathfrak{g}$         | $\Gamma(\mathfrak{g})$ | $\mathfrak{g}$            | $\Gamma(\mathfrak{g})$ |
|------------------------|------------------------|---------------------------|------------------------|
| $A_r \quad (r \geq 2)$ | $\mathbb{Z}_2$         | $A_r^{(1)}$               | $\mathcal{D}_{r+1}$    |
| $D_4$                  | $\mathcal{S}_3$        | $B_r^{(1)}, C_r^{(1)}$    | $\mathbb{Z}_2$         |
| $D_r \quad (r > 4)$    | $\mathbb{Z}_2$         | $D_4^{(1)}$               | $\mathcal{S}_4$        |
| $E_6$                  | $\mathbb{Z}_2$         | $D_r^{(1)} \quad (r > 4)$ | $\mathcal{D}_4$        |
|                        |                        | $E_6^{(1)}$               | $\mathcal{S}_3$        |
|                        |                        | $E_7^{(1)}$               | $\mathbb{Z}_2$         |
|                        |                        | $B_r^{(2)}, C_r^{(2)}$    | $\mathbb{Z}_2$         |

### On Inner and outer automorphisms

- Any two Cartan subalgebras of a simple Lie algebra are conjugate by some inner automorphism.

- The group  $\text{Int}(\mathfrak{g})$  of inner automorphisms is generated by those automorphisms  $\text{Ad}_x$  for which the elements  $x$  are the step operators in an arbitrarily chosen triangular decomposition. The first statement implies the claim made in section 6.1 that the choice of a Cartan subalgebra does not introduce any arbitrariness in the description of a simple Lie algebra.

### On An $\mathfrak{sl}(2)$ example

### On Dynkin diagram symmetries

### On Finite order inner automorphisms of simple Lie algebras

### On Automorphisms of the root system

### On Finite order outer automorphisms of simple Lie algebras

### On Involutive automorphisms, conjugations, real forms

Of special interest are automorphisms which are of order two; these are called involutive automorphisms. The eigenvalues of an involutive automorphism are  $\pm 1$ . The decomposition (11.5) into eigenspaces reads  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(0)} \oplus \mathfrak{g}_{(1)}$ , and their Lie brackets obey

$$[\mathfrak{g}_{(0)}, \mathfrak{g}_{(0)}] \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}, \quad [\mathfrak{g}_{(0)}, \mathfrak{g}_{(1)}] \subseteq \mathfrak{g}_{(1)}, \quad [\mathfrak{g}_{(1)}, \mathfrak{g}_{(1)}] \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}$$

### On Involutive automorphisms and symmetric spaces

## 10.3 Special Lie algebras in a nutshell

### 10.3.1 Loop algebras, central extensions, Virassoro, Witt algebras

(see FS ch. 12, not needed at all for now)

### On Central extensions

$$[K^i, K^j] = 0, \quad [T^a, K^j] = 0$$

for  $i, j = 1, 2, \dots, \ell$  and  $a = 1, 2, \dots, d$ , while keeping the original values  $f^{ab}_c$  of those structure constants which involve only the generators  $T^a$ . Then the most general form of the brackets among these  $\hat{\mathfrak{g}}$ -generators reads



$$[T^a, T^b] = \sum_{c=1}^d f^{ab}{}_c T^c + \sum_{i=1}^{\ell} f^{ab}{}_i K^i$$

with  $f^{ab}{}_c$  the structure constants of  $\mathfrak{g}$  in the basis  $\{T^a\}$ . A Lie algebra  $\hat{\mathfrak{g}}$  with brackets of the form (12.1) and (12.2) is called an ( $\ell$ -dimensional) central extension of  $\mathfrak{g}$ .

**On Ray representations and cohomology**

**On Loop algebras**

**On Towards untwisted affine Lie algebras**

**On The derivation**

**On The Cartan-Weyl basis**

**On The root system**

**On Twisted affine Lie algebras**

**On The root system of twisted affine Lie algebras**

**On Heisenberg algebras**

**On Gradations**

**On The Virasoro algebra**

(see conformal field theory, now I don't need it)

### 10.3.2 Highest weight representations

On Highest weight representations of  $sl(2)$

On Highest weight modules of simple Lie algebras

On The weight system

On Unitarity

On Characters and dimensions

On Defining modules and basic modules

On The dual Weyl vector

On Highest weight modules of affine Lie algebras

On Integrable highest weight modules

On Twisted affine Lie algebras

On Triangular decomposition

### 10.3.3 Verma modules, Casimirs, and the character formula

On Universal enveloping algebras

On Quotients of algebras

On The Poincaré-Birkhoff-Witt theorem

On Verma modules and null vectors

On The character of a Verma module

On Null vectors and unitarity

On The quadratic Casimir operator

On Quadratic Casimir eigenvalues

On The second order Dynkin index

On The character formula

On Characters and modular transformations

On Harish-Chandra theorem and higher Casimir operators

### 10.3.4 Tensor products of representations

On Tensor products

On Tensor products for other algebraic structures

On Highest weight modules

On Tensor products for  $sl(2)$

On Conjugacy classes

On Sum rules

On The Racah-Speiser algorithm

On 1. Examples

On Kostant's function and Steinberg's formula

On Affine Lie algebras

### 10.3.5 Sum of momenta, Clebsch-Gordan coeff, tensor operators, Wigner-Eckart th

**On Formulæ for Clebsch-Gordan coefficients****On Intertwiner spaces****On Racah coefficients and  $6j$ -symbols****On The pentagon and hexagon identities****On Tensor operators****On the Wigner-Eckart theorem (!???!!???)**

The defining properties (16.44) of an irreducible tensor operator  $\mathcal{O}^{(k)}$  allow to make a much stronger statement than (16.47), the so-called Wigner-Eckart theorem. This theorem asserts that there exists a set of numbers  $\langle \tau, J \| T^{(k)} \| \tau', J' \rangle$  (called the reduced matrix elements of  $\mathcal{O}^{(k)}$ ) which depend neither on  $q$  nor on  $M$  or  $M'$ , such that

$$\begin{aligned} \langle \tau, JM | T_q^{(k)} | \tau', J' M' \rangle &= \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2J+1}} \langle \tau, J \| T^{(k)} \| \tau', J' \rangle \langle J' k, M' q | J, M \rangle \\ &= (-1)^{J-M} \langle \tau, J \| T^{(k)} \| \tau', J' \rangle \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Неприводимые тензорные операторы и теорема Вигнера–Эккарта по Киселеву (???)**

$$|0, 0\rangle \xrightarrow{T_m^{(j)}} |j, m\rangle \cdot \tilde{T},$$

где  $\tilde{T}$  - это инвариант группы поворотов, например, число, которое не зависит от значения проекции  $m$ , а в общем случае оператор, который действует на квантовые состояния, зависящие от собственных значений инвариантных наблюдаемых <sup>5</sup>. Такой тензорный оператор можно записать в терминах кет- и бра-векторов состояний в виде, который называют стандартным представлением,

$$\hat{T}_m^{(j)} = |j, m\rangle \cdot \tilde{T} \cdot \langle 0, 0|$$

Поскольку при поворотах состояния неприводимого представления преобразуются как

$$\hat{R}|j, m\rangle = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} |j, m'\rangle, \quad \hat{R}|0, 0\rangle = |0, 0\rangle$$

где  $\mathcal{R}_{mm'}^{(j)}$  - это матрица групповых преобразований, которая имеет размер  $(2j+1) \times (2j+1)$ , и мы подразумеваем суммирование по повторяющемуся индексу  $m'$ , то оператор  $\hat{T}_m^{(j)}$  преобразуется как

$$\hat{R} \cdot \hat{T}_m^{(j)} \cdot \hat{R}^\dagger = \hat{R} \cdot |j, m\rangle \cdot \tilde{T} \cdot \langle 0, 0| \hat{R}^\dagger = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} |j, m'\rangle \cdot \tilde{T} \cdot (\hat{R}|0, 0\rangle)^\dagger = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} |j, m'\rangle \cdot \tilde{T} \cdot \langle 0, 0|,$$

(пока не актуально, потом допишу. там специфическая теория)

Теорема Вигнера–Эккарта говорит о том, что неприводимый тензорный оператор представим в виде

$$\hat{T}_m^{(j)} = \sum_{J, M, J', M'} \frac{\langle J' \| T^{(j)} \| J \rangle}{\sqrt{2J'+1}} |J' M'\rangle \langle J', M' | j, m; J, M \rangle \langle J, M|$$

### 10.3.6 Invariant tensors

On Intertwiners and invariant tensors

On Orthogonal and symplectic modules

On Primitive invariants

On Adjoint tensors of  $\mathfrak{sl}(n)$

On Tensors for spinor modules

On Singlets in tensor products

On Projection operators

On Casimir operators

### 10.3.7 Subalgebras and branching rules

On Subalgebras

If all step operators of a reductive subalgebra  $\mathfrak{h}$  of a simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  are also step operators of  $\mathfrak{g}$ , then  $\mathfrak{h}$  is called a [regular subalgebra](#) of  $\mathfrak{g}$ ; otherwise  $\mathfrak{h}$  is called a special subalgebra. More generally, subalgebras which are contained in some regular subalgebra are called  $R$ -subalgebras, while all others are called  $S$ -subalgebras. In order to classify all reductive subalgebras of simple Lie algebras, one thus has to look for the maximal regular subalgebras and for the maximal  $S$ -subalgebras. Also, one finds that every reductive subalgebra of a semisimple Lie algebra that does contain an abelian ideal is an  $R$ -subalgebra.

The root system and the basis of simple roots of the subalgebra  $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  will be denoted by  $\tilde{\Phi}$  and  $\tilde{\Phi}_s = \{\tilde{\alpha}^{(i)}\}$ , respectively. According to one of the main properties of simple roots, the difference  $\tilde{\alpha}^{(i)} - \tilde{\alpha}^{(j)}$  of two simple roots of the subalgebra is never a root:  $\tilde{\alpha}^{(i)} - \tilde{\alpha}^{(j)} \notin \tilde{\Phi}$ . If  $\mathfrak{h}$  is a regular subalgebra, this immediately implies that  $\tilde{\alpha}^{(i)} - \tilde{\alpha}^{(j)} \notin \Phi$  (the root system of  $\mathfrak{g}$ ), because otherwise the element  $E^{\tilde{\alpha}^{(i)} - \tilde{\alpha}^{(j)}} \propto [E^{\tilde{\alpha}^{(i)}}, E^{-\tilde{\alpha}^{(j)}}]$  would not vanish and would also lie in  $\mathfrak{h}$ , in contradiction to  $\tilde{\alpha}^{(i)} - \tilde{\alpha}^{(j)} \notin \tilde{\Phi}$ . As a consequence, the regular subalgebras of  $\mathfrak{g}$  are in one-to-one correspondence to those linearly independent subsets  $\tilde{\mathcal{S}} \subset \tilde{\Phi}$  which obey

$$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{S}} \implies \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \notin \tilde{\Phi}.$$

Given such a subset, the generators  $\{E^{\tilde{\alpha}}, E^{-\tilde{\alpha}}, H^{\tilde{\alpha}} | \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{S}}\}$  generate the regular subalgebra upon taking Lie brackets, and  $\tilde{\Phi}_s = \tilde{\mathcal{S}}$  is a basis of simple roots of  $\mathfrak{h}$ .

A rather common special embedding is the so-called [diagonal embedding](#)

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}.$$

Given identical bases  $\{T_{(1)}^a\}$  and  $\{T_{(2)}^a\}$  of the two copies of  $\mathfrak{g}$ , the diagonal subalgebra is spanned by  $\{T_{(+)}^a\}$  with  $T_{(+)}^a := T_{(1)}^a + T_{(2)}^a$ .

On The Dynkin index of an embedding

$$cI_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} = \frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(\iota(x), \iota(y))}{\kappa_{\mathfrak{h}}(x, y)}$$

for any two elements  $x, y$  of  $\mathfrak{h}$  for which the denominator is non-zero. As the normalization of the Killing form is completely fixed by the length of the highest root  $\theta$ , the Dynkin index can

also be written as

$$I_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} = \frac{(\theta(\mathfrak{g}), \theta(\mathfrak{g}))}{(\theta(\mathfrak{h}), \theta(\mathfrak{h}))}$$

According to the definition (14.33)(???) of the second order Dynkin index  $I_R$  of a  $\mathfrak{g}$  representation  $R$  one then has

$$\begin{aligned} \text{tr}((R \circ \iota)(x)(R \circ \iota)(y)) &= (I_{R \circ \iota} / I_{\text{ad}}(\mathfrak{h})) \kappa_{\mathfrak{h}}(x, y) \\ \equiv \text{tr}(R(\iota(x))R(\iota(y))) &= (I_R / I_{\text{ad}}(\mathfrak{g})) \kappa_{\mathfrak{g}}(\iota(x), \iota(y)) \\ I_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} &= I_{R \circ \iota} / I_R \end{aligned}$$

### On Finding regular subalgebras

Up to isomorphism all maximal regular semisimple subalgebras are obtained by considering all subsets

$$\tilde{\mathcal{S}} \subset \Phi_s \cup \{-\theta\},$$

where  $\theta$  is the highest root of  $\mathfrak{g}$ . More precisely, for  $\mathfrak{g} \neq A_r$  there exist no other maximal regular semisimple subalgebras besides the ones with simple root systems  $\tilde{\Phi}_s = \Phi_s \cup \{-\theta\} \setminus \{\alpha^{(i)}\}$  for some  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ; and conversely, up to very few exceptions each such choice does yield a maximal regular semisimple subalgebra.

The exceptions are encountered only for exceptional algebras, namely when removing the root  $\alpha^{(3)}$  of  $F_4$  or of  $E_7$ , or the roots  $\alpha^{(3)}, \alpha^{(5)}$  or  $\alpha^{(6)}$  of  $E_8$  from  $\Phi_s \cup \{-\theta\}$ . The chains of embeddings which show that these embeddings are not maximal are

$$\begin{aligned} F_4, \Phi_s \cup \{-\theta\} \setminus \{\alpha^{(3)}\} : & \quad A_3 \oplus A_1 \hookrightarrow B_4 \hookrightarrow F_4, \\ E_7, \Phi_s \cup \{-\theta\} \setminus \{\alpha^{(3)}\} : & \quad A_3 \oplus A_3 \oplus A_1 \hookrightarrow D_6 \oplus A_1 \hookrightarrow E_7, \\ E_8, \Phi_s \cup \{-\theta\} \setminus \{\alpha^{(3)}\} : & \quad A_3 \oplus D_5 \hookrightarrow D_8 \hookrightarrow E_8, \\ E_8, \Phi_s \cup \{-\theta\} \setminus \{\alpha^{(5)}\} : & \quad A_5 \oplus A_2 \oplus A_1 \hookrightarrow E_6 \oplus A_2 \hookrightarrow E_8, \\ E_8, \Phi_s \cup \{-\theta\} \setminus \{\alpha^{(6)}\} : & \quad A_7 \oplus A_1 \hookrightarrow E_7 \oplus A_1 \hookrightarrow E_8. \end{aligned}$$

For  $\mathfrak{g} = A_r$  the removal of a single node from the extended Dynkin diagram just gives back the original Dynkin diagram, which explains why one has to discard two simple roots in order to arrive at a (proper) maximal regular semisimple subalgebra. These subalgebras of  $A_r$  are either

$$\mathfrak{h} = A_{r-1} \quad \text{or} \quad \mathfrak{h} = A_{r'} \oplus A_{r-r'-1} \quad \text{with} \quad r' \in \left\{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor\right\}$$

### On $S$ -subalgebras

$$\mathfrak{sl}(n) \oplus \mathfrak{u}(1) \hookrightarrow \mathfrak{so}(2n).$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(mn) \\ \mathfrak{so}(m) \oplus \mathfrak{so}(n) &\hookrightarrow \mathfrak{so}(mn), \\ \mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(n) &\hookrightarrow \mathfrak{so}(4mn), \\ \mathfrak{so}(m) \oplus \mathfrak{sp}(n) &\hookrightarrow \mathfrak{sp}(mn), \\ \mathfrak{so}(2m+1) \oplus \mathfrak{so}(2n+1) &\hookrightarrow \mathfrak{so}(2m+2n+2). \end{aligned}$$

$$\mathfrak{so}(m) \oplus \mathfrak{so}(n) \hookrightarrow \mathfrak{so}(m+n)$$

The maximal  $S$ -subalgebras of the exceptional simple Lie algebras require a case-by-case study. This yields the following result, where the labels in square brackets denote the Dynkin

|                         | $\mathfrak{g}$ | maximal $S$ -subalgebras of $\mathfrak{g}$                                                                                                                   |
|-------------------------|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| index of the embedding: | $E_6$          | $A_2^{[9]}, G_2^{[3]}, C_4^{[1]}, F_4^{[1]}, A_2^{[2]} \oplus G_2^{[1]}$                                                                                     |
|                         | $E_7$          | $A_1^{[231]}, A_1^{[399]}, A_2^{[2]}, A_1^{[15]} \oplus A_1^{[24]}, A_1^{[7]} \oplus G_2^{[2]},$<br>$A_1^{[3]} \oplus F_4^{[1]}, C_3^{[1]} \oplus G_2^{[1]}$ |
|                         | $E_8$          | $A_1^{[520]}, A_1^{[760]}, A_1^{[1240]}, B_2^{[12]}, A_1^{[16]} \oplus A_2^{[6]}, F_4^{[1]} \oplus G_2^{[1]}$                                                |
|                         | $F_4$          | $A_1^{[156]}, A_1^{[8]} \oplus G_2^{[1]}$                                                                                                                    |
|                         | $G_2$          | $A_1^{[28]}$                                                                                                                                                 |

### On Projection maps and defining representations

$\mathfrak{h}_o$  is an abelian subalgebra of semisimple elements of  $\mathfrak{g}$ , and therefore contained in a maximal abelian subalgebra of semisimple elements, i.e. in a Cartan subalgebra  $\mathfrak{g}_o$  of  $\mathfrak{g}$ :

$$\iota(\mathfrak{h}_o) \subseteq \mathfrak{g}_o.$$

If  $\mathfrak{g}$  is simple, this can even be extended to the full triangular decompositions:

$$\iota(\mathfrak{h}_{\pm}) \subseteq \mathfrak{g}_{\pm}$$

The injective map  $\iota$  that embeds the Cartan subalgebra  $\mathfrak{h}_o$  of  $\mathfrak{h}$  into  $\mathfrak{g}_o$  gives rise to a dual map  $\iota^* : \mathfrak{g}_o^* \rightarrow \mathfrak{h}_o^*$  of the weight spaces. The map  $\iota^*$  is surjective and a projection on the weight space of  $\mathfrak{h}$ . Thus the weights of  $\mathfrak{h}$  can be regarded as projections of weights of  $\mathfrak{g}$ , i.e. there is a projection matrix  $P$  - a matrix with rank  $\mathfrak{g}$  rows and rank  $\mathfrak{h}$  columns - such that for any  $\mathfrak{g}$ -weight  $\mu$  the associated  $\mathfrak{h}$ -weight is given by

$$\iota^*(\mu) = P\mu.$$

$$\iota(E^{\alpha'}) = \sum_{\alpha \in \Gamma_{\alpha'}} c_{\alpha}^{\alpha'} E^{\alpha},$$

$$\Gamma_{\alpha'} := \{\alpha \in \Phi | P\alpha = \alpha'\}$$

and where  $c_{\alpha}^{\alpha'}$  are complex numbers which satisfy  $c_{\alpha}^{-\alpha'} = \bar{c}_{\alpha}^{\alpha'}$ . The sets  $\Gamma_{\alpha'}$  obey  $\Gamma_{-\alpha'} = \{-\alpha | \alpha \in \Gamma_{\alpha'}\}$  as well as  $\Gamma_{\alpha'} \cap \Gamma_{\beta'} = 0$  for all distinct roots  $\alpha', \beta'$  of  $\mathfrak{h}$ .

### On Branching rules

In the application to symmetry breaking, the classification of subalgebras tells us which symmetries can survive the breaking. However, typically one also wants to know how the states that in the original system form representation spaces of the larger symmetry get organized into modules of the surviving symmetry algebra. This information is given by the branching rules

$$V_{\Lambda}(\mathfrak{g}) \sim \bigoplus_j V_{\lambda_j}(\mathfrak{h})$$

of the embedding  $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ , which express an irreducible highest weight module  $V_{\Lambda}$  of the ambient algebra  $\mathfrak{g}$  as the direct sum of irreducible modules of the subalgebra  $\mathfrak{h}$ .

For any branching rule, the characters obey the sum rule

$$\chi_{\Lambda}^{(\mathfrak{g})} = \sum_j \chi_{\lambda_j}^{(\mathfrak{h})}$$

with the argument of the  $\mathfrak{g}$ -character restricted to the Cartan subalgebra of  $\mathfrak{h}$ . By evaluation on the zero weight, this yields the dimension sum rule

$$\sum_j \dim(V_{\lambda_j}(\mathfrak{h})) = \dim(V_{\Lambda}(\mathfrak{g}))$$

In addition, as a consequence of (18.6) there is a sum rule for the second order Dynkin index:

$$I_{\Lambda}(\mathfrak{g}) \cdot I_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} = \sum_j I_{\lambda_j}(\mathfrak{h})$$

Thus for a (proper) regular embedding the branching rule of the adjoint module reads

$$V_{\text{ad}}(\mathfrak{g}) \sim V_{\text{ad}}(\mathfrak{h}) \oplus \left( \bigoplus_{\ell \in L} V_{\lambda_{\ell}} \right),$$

with a non-empty set  $L$ . More generally, for any regular embedding  $\iota: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  and any representation  $R$  of  $\mathfrak{g}$ , the representation  $R \circ \iota$  of  $\mathfrak{h}$  is reducible.

$$\mathfrak{sl}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{u}(1) \hookrightarrow \mathfrak{sl}(5).$$

$$5 \sim \left(3; 1; \frac{1}{3}\right) \oplus \left(1; 2; -\frac{1}{2}\right), \quad 10 \sim \left(\bar{3}; 1; \frac{2}{3}\right) \oplus \left(3; 2; -\frac{1}{6}\right) \oplus (1; 1; -1).$$

(!!! see Zhou about it!)

### On Embeddings of affine Lie algebras

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\chi}_{\Lambda}(\tau) &= \tilde{D}_{\Lambda} e^{\pi i c / 12 \tau} \\ \tilde{D}_{\Lambda} &= |L_{\mathfrak{w}} / L^{\vee}|^{-1/2} (k^{\vee} + g^{\vee})^{-r/2} \prod_{\bar{\alpha} > 0} \left[ 2 \sin \left( \frac{2\pi}{(\bar{\theta}, \bar{\theta})} \frac{(\bar{\Lambda} + \bar{\rho}, \bar{\alpha})}{k^{\vee} + \bar{g}^{\vee}} \right) \right] \\ c &= \frac{k^{\vee} \dim \bar{\mathfrak{g}}}{k^{\vee} + g^{\vee}}. \end{aligned}$$

$$c^{(\mathfrak{g})} = c^{(\mathfrak{h})}.$$

(In particular, all modules of  $\mathfrak{g}$  and  $\mathfrak{h}$  have a fixed value of the level of  $\mathfrak{g}$  and  $\mathfrak{h}$ , respectively.) An embedding fulfilling this condition is called a [conformal embedding](#).

$$h^{\vee} = I_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}} k^{\vee}.$$

In particular, for maximal conformal embeddings one has  $k^{\vee} = 1$  and hence  $h^{\vee} = I_{\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}}$ . In the case of conformal embeddings, the asymptotic form of the character sum rule (18.31) reduces to

$$\tilde{D}_{\Lambda}^{(\mathfrak{g})} = \sum_i \tilde{D}_{\Lambda_i}^{(\mathfrak{h})},$$

For non-conformal embeddings the summation in  $\tilde{\chi}_{\Lambda}^{(\mathfrak{g})} = \sum_i \tilde{\chi}_{\Lambda_i}^{(\mathfrak{h})}$  is infinite. However, it can be shown that

$$\tilde{\chi}_{\Lambda}^{(\mathfrak{g})}(\tau) = \sum_j b_{\Lambda; \Lambda_j}(\tau) \tilde{\chi}_{\Lambda_j}^{(\mathfrak{h})}(\tau)$$

### 10.3.8 Supersymmetry, twistors, (...) (???)

(мб это напишу ниже, или тут - указание на алгебру, а ниже - указание на применения)

#### On Supersymmetry

#### On Twistors

### 10.3.9 Function spaces, special functions, Haar measure, Peter-Weyl theorem

(??? не очень понимаю, почему FS писали тут и про теорию групп? мб потом перемещу это в свой раздел про теорию групп. Зу тоже писал про эти темы, его почитаю!)

#### On Group actions on functions spaces

The results presented in this chapter are all based on a rather simple observation about the action of groups on function spaces. To arrive at this observation, let us consider a space  $X$  which carries some action of a group  $G$ . This means that for each  $\gamma \in G$  there is a mapping  $\xi \mapsto \gamma \cdot \xi$  which associates to any  $\xi \in X$  another element  $\gamma \cdot \xi \in X$ , and that this mapping is compatible with the group multiplication, in the sense that  $\gamma \cdot (\gamma' \cdot \xi) = (\gamma\gamma') \cdot \xi$  for all  $\gamma, \gamma' \in G$ , and that  $e \cdot \xi = \xi$  for the unit element  $e$  of  $G$ . (This is also called a left action of  $G$  on  $X$ ; similarly one can consider right actions  $\xi \mapsto \xi \cdot \gamma$  which obey  $(\xi \cdot \gamma) \cdot \gamma' = \xi \cdot (\gamma\gamma')$ .)

We do not assume here that  $X$  is a vector space (in the notation we indicate this by using greek letters for the elements of  $X$ ); the action of  $G$  will therefore in general not be represented by linear maps - the very notion of a linear map does not make sense unless  $X$  is a vector space. Nevertheless one can associate to  $X$  in a natural manner a vector space, namely the space  $\text{Map}(X, \mathbb{C})$  of all maps from  $X$  to the complex numbers  $\mathbb{C}$  (or to some other field  $F$ ). By defining addition and scalar multiplication of such maps  $f$  pointwise, i.e.  $(f_1 + f_2)(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi)$  and  $(zf)(\xi) = zf(\xi)$  for all  $\xi \in X$  and all  $z \in \mathbb{C}$ , this space  $\text{Map}(X, \mathbb{C})$  has the structure of a vector space. If we allow for all maps from  $X$  to  $\mathbb{C}$ , this space is infinite-dimensional unless  $X$  consists of only finitely many points.

#### On Multiplier representations and Lie derivatives

Given an analytic function  $f$  on  $U$ , for any element  $x$  of the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  of  $G$  we consider the operation

$$L_x(f) := \left. \frac{d}{dt} (\text{Exp}(tx)f) \right|_{t=0},$$

with the function  $\text{Exp}(tx)f$  defined analogously to (21.1):

$$(\text{Exp}(tx)f)(\xi) := f(\xi \cdot \text{Exp}(tx))$$

Given an analytic function  $f$  on  $U$ , for any element  $x$  of the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  of  $G$  we consider the operation

$$L_x(f) := \left. \frac{d}{dt} (\text{Exp}(tx)f) \right|_{t=0},$$

with the function  $\text{Exp}(tx)f$  defined analogously to (21.1):

$$(\text{Exp}(tx)f)(\xi) := f(\xi \cdot \text{Exp}(tx))$$

$$\mathcal{R}_\Lambda(\gamma\gamma')f = \mathcal{R}_\Lambda(\gamma)(\mathcal{R}_\Lambda(\gamma')f).$$

In short, up to the action on the argument  $\xi$ , the effect of  $\mathcal{R}_\Lambda$  is to multiply  $f$  with the function  $\nu_\Lambda$ ;  $\mathcal{R}_\Lambda$  is therefore referred to as a multiplier representation of  $G$ .



### On Multiplier representations of $\mathrm{SL}(2)$

$$\mathcal{L}_0 := \Lambda - 2z \frac{d}{dz}, \quad \mathcal{L}_+ := \frac{d}{dz}, \quad \mathcal{L}_- := \Lambda z - z^2 \frac{d}{dz}$$

The commutation relations of these differential operators just reproduce the Lie brackets of  $\mathfrak{sl}(2)$ ; according to the results of the previous section these operators therefore form a set of generalized Lie derivatives for an effective multiplier representation of the matrix group  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . Now any element

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

( $ad - bc = 1$ ) of  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  in a small neighborhood of the identity can be written uniquely as

$$\gamma = \exp\left(\frac{b}{d}L_+\right) \exp(cdL_-) \exp(-\ln(d)L_0),$$

with  $L_0$  and  $L_{\pm}$  the defining  $2 \times 2$  representation matrices of the  $\mathfrak{sl}(2)$  Lie algebra.

$$(\mathcal{R}_{\Lambda}(\gamma)f)(z) = (cz + d)^{\Lambda} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right),$$

i.e. the multiplier function  $\nu_{\Lambda}$  is given by  $\nu_{\Lambda}(\gamma, z) = (cz + d)^{\Lambda}$ , and the group action is  $z \mapsto \gamma \cdot z = (az + b)/(cz + d)$ , which can be interpreted as acting with the matrix (21.10) on a column vector with entries  $z$  and 1.

i.e. the functions  $R_{\Lambda}^{m,n}$  determined by

$$(\mathcal{R}_{\Lambda}(\gamma)f_n)(z) = \sum_{m=0}^{\Lambda} R_{\Lambda}^{m,n}(\gamma) z^m,$$

are called the matrix elements of the multiplier representation  $\mathcal{R}_{\Lambda}$ . From the explicit form of (21.13), i.e.

$$\sum_{m=0}^{\Lambda} R_{\Lambda}^{m,n}(\gamma) z^m = (az + b)^n (cz + d)^{\Lambda-n}$$

one obtains an expression for the matrix elements in terms of hypergeometric polynomials, namely, for  $m \leq n$ ,

$$R_{\Lambda}^{m,n}(\gamma) = \frac{a^m d^{\Lambda-n} b^{n-m} n!}{m!(n-m)!} {}_2F_1\left(-m, -\Lambda - n; n - m + 1; \frac{bc}{ad}\right)$$

and a similar formula for  $m > n$ . (The hypergeometric function  ${}_2F_1$  is the solution of the differential equation  $t(1-t)f''(t) + [\delta - (\alpha + \beta + 1)t]f'(t) - \alpha\beta f(t) = 0$  which around  $t = 0$  has the power series expansion  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \delta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)\Gamma(\delta)/n!\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\delta + n)] t^n$ .)

### On General function spaces

If  $R$  is a representation of the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  on a (possibly infinite-dimensional) vector space  $V$ , one can try to define a corresponding representation of the Lie group  $G$  via the exponential mapping, i.e. write  $\gamma \in G$  as  $\gamma = \mathrm{Exp}(x)$  with  $x \in \mathfrak{g}$  and

$$R(\gamma)v = R(\mathrm{Exp}(x))v = \exp(R(x))v \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (R(x))^j v$$

for  $v \in V$ , where  $\exp$  is the exponential power series. In other words,

imply that the series (21.16) does make sense. More specifically, in this situation there is a multiplier representation  $\mathcal{R}_\Lambda$  of  $G$  such that

$$R(\exp(tx))v = \mathcal{R}_\Lambda(\exp(tx))v$$

for all  $x \in \mathfrak{g}$ , all  $v \in V$  and for sufficiently small  $t$ . Further, if  $\{v_{(n)} | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  is a basis of  $V$ , then the matrix elements of  $\mathcal{R}_\Lambda(\exp(tx))$  are determined by the expansions

$$\left( \mathcal{R}_\Lambda(\exp(tx))\varphi(v_{(n)}) = \sum_{m=0}^{\infty} R_\Lambda^{m,n}(\exp(tx))\varphi(v_{(m)}) \right)$$

of the images of the basis functions under the isomorphism  $\varphi$ .

$$(\mathcal{R}_\Lambda(\gamma))\varphi(v_{(n)}) = \sum_{m=0}^{\infty} R_\Lambda^{m,n}(\gamma)\varphi(v_{(m)}),$$

valid in a neighborhood of the identity element of  $G$ , which can be regarded as a generating function for the matrix elements  $R_\Lambda^{m,n}(\gamma)$  and the basis functions  $\varphi(v_{(n)})$ . Moreover, the representation property implies that the matrix elements satisfy

$$\sum_{m=0}^{\infty} R_\Lambda^{l,m}(\gamma)R_\Lambda^{m,n}(\gamma') = R_\Lambda^{l,n}(\gamma\gamma'),$$

and the generalized Lie derivatives associated to  $\mathcal{R}_\Lambda$  provide differential recurrence relations

$$\mathcal{L}_x\varphi(v_{(m)}) = \varphi(R(x)v_{(m)})$$

for the functions  $\varphi(v_{(n)})$ .

### On Spherical harmonics

(это уже в спецфункциях написано, потом сюда как-то коротко напишу это)

$$\mathcal{L}_0 = -2i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \mathcal{L}_\pm = e^{\pm i\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial\vartheta} + i \cot(\vartheta) \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

### On Hypergeometric functions

$$\mathcal{L}_0 = 2\frac{d}{d\eta}, \quad \mathcal{L}_\pm = e^{\pm\eta} \left( \pm \frac{d}{d\xi} + \Phi(\xi) \frac{d}{d\eta} + \Psi(\xi) \right),$$

where  $\Phi$  and  $\Psi$  are functions to be determined later. Second, we generalize the  $\mathfrak{sl}(2)$  commutation relations to

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_\pm] = \pm 2\mathcal{L}_\pm, \quad [\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-] = \beta\mathcal{L}_0 + \gamma\mathcal{L}_4$$

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_4] = 0 = [\mathcal{L}_\pm, \mathcal{L}_4]$$

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{L}_+\mathcal{L}_- + \mathcal{L}_-\mathcal{L}_+ + \frac{1}{2}\beta\mathcal{L}_0\mathcal{L}_0 + \gamma(\mathcal{L}_0 + 1)\mathcal{L}_4,$$

then reduces to a second order differential operator acting on the functions  $f(\xi) \equiv f_m(\xi)$

(допишу потом, там еще есть полезные свойства)

**On Classification of Lie derivatives (???)**

(??? нет, это пока не знаю, хороший вопрос)

$$\mathcal{L}_0 = -2i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \dot{L}_{\pm} = e^{\pm i \varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{i \ell}{\sin(\vartheta)} \right)$$

where  $\ell$  is an arbitrary complex parameter. The function space on which these differential operators act is spanned by the functions

$$\mathcal{Y}_{j,m;\ell}(\vartheta, \varphi) \propto e^{im\varphi} \cdot (\cos(\vartheta) + 1)^{(m-\ell)/2} (\cos(\vartheta) - 1)^{(m+\ell)/2} \cdot {}_2F_1 \left( j + m + 1, m - j; m + \ell + 1; 1 - \frac{1}{2} \cos(\vartheta) \right)$$

with  $m = j, j - 1, \dots$ . This space is finite-dimensional if and only if both  $j$  is a half integer and the parameter  $\ell$  is one of the numbers  $-j, -j + 1, \dots, j$ ; in this case also  $m \in \{-j, -j + 1, \dots, j\}$ , and the function space is isomorphic to the irreducible highest weight module with highest weight  $\Lambda = 2j$ . If, in addition,  $j$  is an integer, then one may choose  $\ell = 0$ ; doing so one recovers the generalized Lie derivatives (21.22) and, using the identity

$$\mathcal{P}_j(x) = {}_2F_1 \left( j + 1, -j; 1; 1 - \frac{1}{2}(\cos(\vartheta)) \right),$$

**On The Haar measure**

(см. Зху записи!!)

$$\int_G d\mu_{\gamma} f(\gamma\gamma') = \int_G d\mu_{\gamma} f(\gamma)$$

for all  $\gamma' \in G$  and for all integrable functions, i.e. all functions  $f$  for which the right hand side exists. The volume of a measurable subset  $H \subseteq G$  can be written as

$$\mu(H) := \int_G d\mu_{\gamma} \theta_H(\gamma) = \int_H d\mu_{\gamma}.$$

- The group  $SU(2)$  is topologically the three-sphere  $S^3$ . Therefore the Haar measure reads

$$d\mu_{\gamma} = \frac{1}{16\pi^2} \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi d\psi$$

in spherical coordinates, which satisfy with  $0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq 4\pi$ . - Another possibility is to regard  $S^3$  as embedded in  $\mathbb{R}^4$ ; thus we parametrize the elements of  $SU(2)$  as  $\gamma = \xi_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \sigma^i$  with  $\sigma^i$  the Pauli matrices and  $\vec{\xi}^2 \equiv \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = 1$ . Then the integration is over  $\mathbb{R}^4$  with

$$d\mu_{\gamma} = \pi^{-2} d^4 \xi \delta(\vec{\xi}^2 - 1).$$

- The group  $SU(2)$  is topologically the three-sphere  $S^3$ . Therefore the Haar measure reads

$$d\mu_{\gamma} = \frac{1}{16\pi^2} \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi d\psi$$

in spherical coordinates, which satisfy with  $0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq 4\pi$ .

- Another possibility is to regard  $S^3$  as embedded in  $\mathbb{R}^4$ ; thus we parametrize the elements of  $SU(2)$  as  $\gamma = \xi_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \sigma^i$  with  $\sigma^i$  the Pauli matrices and  $\xi^2 \equiv \sum_{i=0}^3 \xi_i^2 = 1$ . Then the integration is over  $\mathbb{R}^4$  with

$$d\mu_\gamma = \pi^{-2} d^4 \xi \delta(\xi^2 - 1).$$

(пока не пишу, не до этой темы)

### On The Peter-Weyl theorem

- The group  $SU(2)$  is topologically the three-sphere  $S^3$ . Therefore the Haar measure reads

$$d\mu_\gamma = \frac{1}{16\pi^2} \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi d\psi$$

in spherical coordinates, which satisfy with  $0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq 4\pi$ . - Another possibility is to regard  $S^3$  as embedded in  $\mathbb{R}^4$ ; thus we parametrize the elements of  $SU(2)$  as  $\gamma = \xi_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \sigma^i$  with  $\sigma^i$  the Pauli matrices and  $\xi^2 \equiv \sum_{i=0}^3 \xi_i^2 = 1$ . Then the integration is over  $\mathbb{R}^4$  with

$$d\mu_\gamma = \pi^{-2} d^4 \xi \delta(\xi^2 - 1).$$

Furthermore, the right and the left action of  $G$  on itself commute with each other. Considering both actions simultaneously, the result (21.53) can therefore be refined to a decomposition in terms of the combined left and right action, namely

$$L^2(G) \cong \bigoplus_{\Lambda} (V_{\Lambda^+} \otimes V_{\Lambda}),$$

where  $V_{\Lambda^+}$  is the representation conjugate to  $V_{\Lambda}$ .

### On Group characters and class functions

$$ch_{\Lambda}(\gamma) := \text{tr}(R_{\Lambda}(\gamma)) \equiv \sum_{m=1}^{d_{\Lambda}} R_{\Lambda}^{m,m}(\gamma)$$

for all  $\gamma \in G$ . The character  $ch_{\Lambda}$  depends only on the isomorphism class of the representation  $R_{\Lambda}$ , not on its specific realization. Furthermore, because of the cyclic invariance of the trace, any character  $f = ch_{\Lambda}$  obeys

$$f(\gamma\gamma'\gamma^{-1}) = f(\gamma')$$

for all  $\gamma, \gamma' \in G$ . A continuous function  $f$  which obeys the relation (21.56) is called a class function or central function of the group  $G$ , and the space of square integrable class functions is frequently denoted by  $L^2(G)^G$ .

follows. Provided that all measures  $\mu, \hat{\mu}$  and  $\nu$  are normalized to volume 1, for any continuous function  $f$  on  $G$  the formula

$$\int_G d\mu_\gamma f(\gamma) = \frac{1}{|W(\mathfrak{g})|} \int_{G_0} d\hat{\mu}_{\gamma_0} \int_{G/G_0} d\nu f(\gamma\gamma_0\gamma^{-1}) J(\gamma_0)$$

holds, where the function  $J$  on the maximal torus  $G_0$  is given by

$$J(\text{Exp}(h)) := \left| \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e^{\alpha(h)/2} - e^{-\alpha(h)/2}) \right|^2.$$

This result is known as Weyl's integration formula.

$$\int_{\mathbf{G}} d\mu_{\gamma} f(\gamma) = \frac{1}{|W(\mathfrak{g})|} \int_{\mathbf{G}_0} d\hat{\mu}_{\gamma_0} f(\gamma_0) J(\gamma_0).$$

### On Fourier analysis

Fourier transform of  $f$ , i.e. are given by

$$\tilde{f}(\Lambda, m, n) = \int_{\mathbf{G}} d\mu_{\gamma} f(\gamma) (d_{\Lambda})^{1/2} R_{\Lambda}^{m,n}(\gamma)$$

In short, one can represent  $f$  as a Fourier series. For class functions, the relations (21.64) and (21.63) simplify to formulæ containing only the group characters rather than general matrix elements:

$$f(\gamma) = \sum_{\Lambda} \tilde{f}(\Lambda) \overline{\text{ch}_{\Lambda}(\gamma)}, \quad \tilde{f}(\Lambda) = (d_{\Lambda})^{-1} \int_{\mathbf{G}} d\mu_{\gamma} f(\gamma) \text{ch}_{\Lambda}(\gamma)$$

When applied to the compact abelian Lie group  $(S^1)^D \equiv (\text{U}(1))^D$ , this prescription is just the standard Fourier transform in  $D$  dimensions for functions in a hypercube with periodic boundary conditions.

Fourier transform of  $f$ , i.e. are given by

$$\tilde{f}(\Lambda, m, n) = \int_{\mathbf{G}} d\mu_{\gamma} f(\gamma) (d_{\Lambda})^{1/2} R_{\Lambda}^{m,n}(\gamma)$$

In short, one can represent  $f$  as a Fourier series. For class functions, the relations (21.64) and (21.63) simplify to formulæ containing only the group characters rather than general matrix elements:

$$f(\gamma) = \sum_{\Lambda} \tilde{f}(\Lambda) \overline{\text{ch}_{\Lambda}(\gamma)}, \quad \tilde{f}(\Lambda) = (d_{\Lambda})^{-1} \int_{\mathbf{G}} d\mu_{\gamma} f(\gamma) \text{ch}_{\Lambda}(\gamma)$$

When applied to the compact abelian Lie group  $(S^1)^D \equiv (\text{U}(1))^D$ , this prescription is just the standard Fourier transform in  $D$  dimensions for functions in a hypercube with periodic boundary conditions.

### 10.3.10 Weyl group, Weyl's character formula, dimension, strange formulae

### 10.3.11 Hopf algebras, quantum groups, representation rings

(нужно будет - начну разбирать)

### On Co-products

The starting point is the observation of section 15.2 that given representations  $R_V$  and  $R_W$  of an algebra  $\mathfrak{A}$  in the spaces  $\mathfrak{gl}(V)$  and  $\mathfrak{gl}(W)$ , respectively, one obtains a representation of the tensor product  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{gl}(V \otimes W)$  through the prescription

$$x \otimes y \mapsto R_V(x) \otimes R_W(y)$$

for all  $x, y \in \mathfrak{A}$ , which is extended linearly to all of  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ . (To verify the representation property, recall that  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$  is an algebra over the same field  $F$  as  $\mathfrak{A}$ . The product of the algebra  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$  is the map from  $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}) \times (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})$  to  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$  that acts as

$$(x \otimes y) \otimes (u \otimes v) \mapsto (x \diamond u) \otimes (y \diamond v),$$

where '  $\Delta$  ' denotes the product of  $\mathfrak{A}$ .) Now as already mentioned in sec-

(!!! ниже кружок внутри треугольника, такой значок, отдельно его техать нужно!!!)

In other words, there must exist a linear mapping

$$\Delta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}.$$

The direction of such a linear map  $\Delta$  is just the opposite of what one is used from a product, which is a map from the Kronecker product  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$  to  $\mathfrak{A}$ ; correspondingly,  $\Delta$  is called a 'dual product' or co-product of the algebra  $\mathscr{A}$ . Given a co-product  $\Delta$ , we make the following ansatz for the tensor product representation:

$$R_{V \otimes W} : x \in \mathfrak{A} \mapsto (R_V \otimes R_W) (\Delta(x)) \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}.$$

When we write out  $\Delta(x)$  like

$$\Delta(x) = \sum_p x_p^{(1)} \otimes x_p^{(2)}$$

as a sum of tensor products of suitable elements  $x_p^{(1)}$  and  $x_p^{(2)}$  of  $\mathfrak{A}$ , the formula (22.4) reads more explicitly

$$x \mapsto \sum_p (R_V (x_p^{(1)}) \otimes R_W (x_p^{(2)}))$$

When the algebra  $\mathfrak{A}$  possesses a unit element  $e$ , then equation (22.7) tells us that

$$\Delta(x) \diamond \Delta(e) = \Delta(x) = \Delta(e) \diamond \Delta(x).$$

By considering (22.9) for  $x = e$ , it follows in particular that  $\Delta(e)$  is a projector i.e. idempotent,  $(\Delta(e))^2 = \Delta(e)$ . A natural solution to this requirement is

$$\Delta(e) = e \otimes e.$$

A co-product satisfying it is called a unital co-product.

### On Co-algebras and bi-algebras

$$\begin{aligned} R_{U \otimes (V \otimes W)}(x) &= (R_U \otimes R_{V \otimes W}) (\otimes(x)) \\ &= (R_U \otimes (R_V \otimes R_W)) ((id \times \Delta) \circ \Delta(x)) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} R_{(U \otimes V) \otimes W}(x) &= (R_{U \otimes V} \otimes R_W) (\Delta(x)) \\ &= ((R_U \otimes R_V) \otimes R_W) ((\Delta \times id) \circ \Delta(x)). \end{aligned}$$

Note that when expressing the co-product in terms of the decomposition (22.5), we have

$$\begin{aligned} (id \times \Delta) \circ \Delta(x) &= (id \times \Delta) \left( \sum_p x_p^{(1)} \otimes x_p^{(2)} \right) \\ &= \sum_{p,q} x_p^{(1)} \otimes (x_p^{(2)})_q^{(1)} \otimes (x_p^{(2)})_q^{(2)}, \end{aligned}$$

### On Hopf algebras

(see FS 22 if needed)

### On Universal enveloping algebras

(see FS 22 if needed)

### On Quasi-triangular Hopf algebras

(see FS 22 if needed)

### On Deformed enveloping algebras

(see FS 22 if needed)

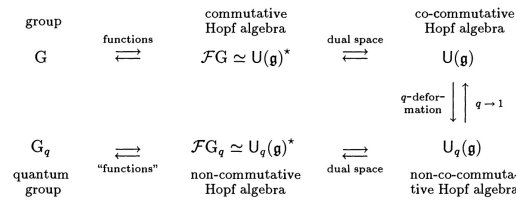
### On Group Hopf algebras

(see FS 22 if needed)

### On Functions on compact groups

(see FS 22 if needed)

### On Quantum groups



### On Quasi-Hopf algebras

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{U \otimes ((V \otimes W) \otimes X)} & \rightarrow & \boxed{(U \otimes (V \otimes W)) \otimes X} \\
 \nearrow & & & & \downarrow \\
 \boxed{U \otimes (V \otimes (W \otimes X))} & & \boxed{(U \otimes V) \otimes (W \otimes X)} & \rightarrow & \boxed{((U \otimes V) \otimes W) \otimes X} \\
 \searrow & & & & 
 \end{array}$$

This property of tensor product representations translates to the relation

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{Q} \otimes e) \diamond [(id \times \Delta \times id)(\mathcal{Q})] \diamond (e \otimes \mathcal{Q}) \\
 &= [(\Delta \times id \times id)(\mathcal{Q})] \diamond [(id \times id \times \Delta)(\mathcal{Q})]
 \end{aligned}$$

for the co-associator; as the five factors in this formula correspond to the five edges in the pentagon-like diagram (22.46), this is called the pentagon identity for  $\mathcal{Q}$ . We have already encountered

**On Character rings**

(see FS 22 if needed)

$$\tilde{f} = \sum_{\mathbf{d} \in \widehat{G}} \tilde{f}_{\mathbf{d}} ch \quad \text{with} \quad \tilde{f}_{\mathbf{d}} := \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in G} ch(\gamma^{-1}) f(\gamma).$$

In the special case of the cyclic group  $G = \mathbb{Z}_N$  of order  $N$ , the group characters  $ch_i$  are given by

$$ch_j(m) = \exp\left(2\pi i \frac{jm}{N}\right)$$

for  $j, m = 1, 2, \dots, N$ , so that (22.49) is just the Fourier decomposition of periodic functions in one variable.

**On Rational fusion rings**

(see FS 22 if needed)

**On The extended Racah-Speiser formalism**

(see FS 22 if needed)

The reader may already have recognized that the condition (22.38) for unitarity of  $U_q(\mathfrak{g})$ -modules is nothing but the condition (13.46) for the integrability of highest weight modules of the untwisted affinization  $\mathfrak{g}^{(1)}$  of  $\mathfrak{g}$  at level  $k^\vee = m - g^\vee$ . This suggests a close connection between the affine Lie algebra  $\mathfrak{g}^{(1)}$  at level  $k^\vee$  and the deformed enveloping algebra  $U_q(\mathfrak{g})$ , respectively its truncation  $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$ , with deformation parameter

$$q = \exp(2\pi i / (k^\vee + g^\vee)).$$

Indeed one can argue that the structure constants  $\mathcal{N}_{\Lambda\Lambda'}^{\Lambda''}$  of the fusion ring of  $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$  can be expressed through a formula that has a rather natural description in terms of the affine algebra  $\mathfrak{g}^{(1)}$ , namely as

$$\mathcal{N}_{\Lambda\Lambda'}^{\Lambda_i} = \sum_{\hat{w} \in \widehat{W}} \text{sign}(\hat{w}) \text{mult}_{\Lambda'}(\hat{w}(\Lambda_i + \rho) - \rho - \Lambda).$$

This result, known as the Kac-Walton formula, is an extension of the Racah-Speiser formula (15.23) for the tensor product multiplicities  $\mathcal{L}_{\Lambda\Lambda'}^{\Lambda_i}$  of  $\mathfrak{g}$ . While in equation (15.23) the summation is over the Weyl group  $W$  of  $\mathfrak{g}$ , now one has to sum over the projection  $\widehat{W}$  of the Weyl group of  $\mathfrak{g}^{(1)}$  to the weight space of  $\mathfrak{g}$ . The infinite group  $\widehat{W}$  is generated by the fundamental reflections  $w_{(j)}$  of  $\mathfrak{g}$  together with reflection about the hyperplane  $(\Lambda, \theta^\vee) = k^\vee + 1 \equiv m - g^\vee + 1$  which implements the additional condition (22.38).

The reader may already have recognized that the condition (22.38) for unitarity of  $U_q(\mathfrak{g})$ -modules is nothing but the condition (13.46) for the integrability of highest weight modules of the untwisted affinization  $\mathfrak{g}^{(1)}$  of  $\mathfrak{g}$  at level  $k^\vee = m - g^\vee$ . This suggests a close connection between the affine Lie algebra  $\mathfrak{g}^{(1)}$  at level  $k^\vee$  and the deformed enveloping algebra  $U_q(\mathfrak{g})$ , respectively its truncation  $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$ , with deformation parameter

$$q = \exp(2\pi i / (k^\vee + g^\vee)).$$

Indeed one can argue that the structure constants  $\mathcal{N}_{\Lambda\Lambda'}^{\Lambda''}$  of the fusion ring of  $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$  can be expressed through a formula that has a rather natural description in terms of the affine algebra  $\mathfrak{g}^{(1)}$ , namely as

$$\mathcal{N}_{\Lambda\Lambda'}^{\Lambda_i} = \sum_{\hat{w} \in \widehat{W}} \text{sign}(\hat{w}) \text{mult}_{\Lambda'}(\hat{w}(\Lambda_i + \rho) - \rho - \Lambda).$$



This result, known as the Kac-Walton formula, is an extension of the Racah-Speiser formula (15.23) for the tensor product multiplicities  $\mathcal{L}_{\Lambda\Lambda}^{\Lambda_i}$  of  $\mathfrak{g}$ . While in equation (15.23) the summation is over the Weyl group  $W$  of  $\mathfrak{g}$ , now one has to sum over the projection  $\widehat{W}$  of the Weyl group of  $\mathfrak{g}^{(1)}$  to the weight space of  $\mathfrak{g}$ . The infinite group  $\widehat{W}$  is generated by the fundamental reflections  $w_{(j)}$  of  $\mathfrak{g}$  together with reflection about the hyperplane  $(\Lambda, \theta^\vee) = k^\vee + 1 \equiv m - g^\vee + 1$  which implements the additional condition (22.38).

### 10.3.12 Silov's theorems on Kostrikin (??)

(не актуально пока что)

### 10.3.13 Other about summation of summation of moments (????)

#### On Littlewood–Richardson coefficients

(??? говорили на лекции, что такие есть, пока не разобрался, еще с многочленами Шура как-то связаны они)

### 10.3.14 Schur polynomial (???)

(есть такие, см. вики, пока не нужны они были никогда)

### 10.3.15 Spin group, spin manifolds, connection, holonomy (???)

(see wiki and <https://emph.maths.ed.ac.uk/Activities/Spin/> by José Miguel Figueroa-O'Farrill)

#### Clifford algebras: basic notions

Definition 1.1. The Clifford algebra - if it exists - is an initial object in  $\text{Cliff}(V, Q)$ . In other words, it is given by an associative algebra  $Cl(V, Q)$  together with a Clifford map  $i : V \rightarrow Cl(V, Q)$  such that for every Clifford map  $\phi : V \rightarrow A$  there is a unique algebra morphism  $\Phi : Cl(V, Q) \rightarrow A$  making the following triangle commute:

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ i \swarrow & & \searrow \phi \\ Cl(V, Q) & \xrightarrow{\Phi} & A \end{array}$$

#### Clifford algebras: classification

#### Spin groups and spinorial representations

#### Spin structures on manifolds

Definition 4.2. A smooth structure on an  $n$ -dimensional manifold  $M$  is an atlas of coordinate charts  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ , for  $I$  some indexing set, where  $\{U_\alpha\}$  is an open cover of  $M$  and  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  are homeomorphisms whose transition functions on nonempty overlaps  $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$

$$g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \longrightarrow \phi_\alpha(U_{\alpha\beta})$$

are diffeomorphisms between open subsets of  $\mathbb{R}^n$ ; that is,  $g_{\alpha\beta}$  are infinitely differentiable with infinitely differentiable inverses. Two smooth structures  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  and  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$  are equivalent if their union is also an atlas. A maximal atlas consists of the union of all atlases in one such equivalence class. A topological manifold with a maximal atlas is called a smooth manifold.

## Connections on fibre bundles

### The spin connection

#### Holonomy

Let  $\pi : P \rightarrow M$  be a fixed principal  $G$ -bundle with connection  $H \subset TP$ . Let  $\omega$  denote the connection 1-form. A smooth curve  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$  is said to be horizontal if the velocity vector is everywhere horizontal:  $\dot{\tilde{\gamma}}(t) \in H_{\tilde{\gamma}(t)}$  for all  $t$ . This is equivalent to  $\omega(\dot{\tilde{\gamma}}(t)) = 0$ . Let  $\gamma(t) = \pi(\tilde{\gamma}(t))$  denote the projection of the curve onto  $M$ . Assume that the curve is small enough so that the image of  $\gamma$  lies inside some trivialising neighbourhood  $U_\alpha$ . Then  $\psi_\alpha(\tilde{\gamma}(t)) = (\gamma(t), g(t))$ , where  $g(t)$  is a smooth curve on  $G$ . The condition  $\omega(\dot{\tilde{\gamma}}(t)) = 0$  translates into the following ordinary differential equation for the curve  $g(t)$ . Indeed, using equation (77) and noticing that  $\pi_* \dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\gamma}$ , we arrive at

$$\text{ad}_{g(t)^{-1}} A_\alpha(\dot{\gamma}(t)) + g(t)^{-1} \dot{g}(t) = 0,$$

where  $A_\alpha$  is the gauge field on  $U_\alpha$  corresponding to the connection and where again we use notation appropriate to matrix groups. Indeed, for matrix groups we can rewrite this equation further as a matrix differential equation:

$$\dot{g}(t) + A_\alpha(\dot{\gamma}(t))g(t) = 0.$$

Theorem 7.2 (Ambrose-Singer). Let  $E \rightarrow M$  be a vector bundle with connection with  $M$  connected. Then the Lie algebra  $\mathfrak{hol}(m)$  of the holonomy group  $\text{Hol}(m)$  is the Lie subalgebra of  $\mathfrak{gl}(E_m)$  spanned by the curvature endomorphisms  $R^\nabla(X, Y)$  and all its covariant derivatives  $\nabla_{Z_1} \cdots \nabla_{Z_k} R^\nabla(X, Y)$  for  $X, Y, Z_i \in \mathcal{X}(M)$ .

#### Riemannian holonomy

#### Parallel and Killing spinors

## 10.3.16 Orthogonal weights, spinor irrep, Jordan-Wigner fermions

(see lecture 9 by Foster)

## 10.4 Computing of algebraic structures on computer

### 10.4.1 LieART in Wolfram in a nutshell

This section provides a tutorial introducing the most important and frequently used functions of LieART for Lie-algebra and representation-theory related calculations. The functions are introduced based on simple examples that can easily be modified and extended to the user's desired application. Most examples use irreducible representations (irreps) of  $SU(5)$ , which most textbooks use in examples since is less trivial than  $SU(3)$ , but small enough to return results almost instantly on any recent computer. Also,  $SU(5)$  frequently appears in unified model building since the Standard-Model gauge group is one of its maximal subgroups. This tutorial can also be found in the LieART documentation integrated into the Wolfram

Documentation as **Quick Start Tutorial** under the drop down **Tutorials** on the upper right of LieART's documentation home.

This loads the package:

```
In[1]:= < LieART'
```

## Entering Irreducible Representations

Irreps are internally described by their Dynkin label with a combined head of **Irrep** and the Lie algebra.

**Irrep**[*algebraClass*][*label*] irrep described by its *algebraClass* and Dynkin *label*.

The *algebraClass* follows the Dynkin classification of simple Lie algebras and can only be A, B, C, D for the classical algebras and E6, E7, E8, F4 and G2 for the exceptional algebras. The precise classical algebra is determined by the length of the Dynkin label.

Entering the  $\overline{10}$  of SU(5) by its Dynkin label and algebra class:

```
In[2]:= Irrep[A][0,0,1,0]//FullForm
```

```
Out[1]:= Irrep[A][0,0,1,0]
```

In **StandardForm** the irrep is displayed in the textbook notation of Dynkin labels:

```
In[3]:= Irrep[A][0,0,1,0]//StandardForm
```

```
Out[2]:= (0010)
```

In **TraditionalForm** (default) the irrep is displayed by its dimensional name:

```
In[4]:= Irrep[A][0,0,1,0]
```

```
Out[3]:=  $\overline{10}$ 
```

The default output format type of LieART is **TraditionalForm**. The associated user setting is overwritten for the front-end session LieART is loaded in. For **StandardForm** as default output

```
CurrentValue[$FrontEndSession, {CommonDefaultFormatTypes, "Output"}] = StandardForm
```

As an example for entering an irrep of an exceptional algebra, consider the **27** of  $E_6$ :

```
In[5]:= Irrep[E6][1,0,0,0,0,0]
```

```
Out[4]:= 27
```

Irreps may also be entered by their dimensional name. The package transforms the irrep into its Dynkin label. Since the algebra of an irrep of a classical Lie algebra becomes ambiguous with only the dimensional name, it has to be specified.

**Irrep**[*algebra*][*dimname*] irrep entered by its *algebra* and dimensional name *dimname*.

Entering the  $\overline{10}$  of SU(5) by its dimensional name specifying the algebra by its Dynkin classification  $A_4$ :

```
In[6]:= Irrep[A4][Bar[10]]//InputForm
```

```
Out[5]:= Irrep[A][0,0,1,0]
```

The traditional name of the algebra SU(5) may also be used:

```
In[7]:= Irrep[SU5][Bar[10]]//InputForm
```

```
Out[6]:= Irrep[A][0,0,1,0]
```

Irreps of product algebras like  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$  are specified by **ProductIrrep** with the individual irreps of simple Lie algebras as arguments.

**ProductIrrep**[*irreps*] head of product *irreps*, gathering irreps of simple Lie algebras.

The product irrep  $(\mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}})$  of  $SU(3) \otimes SU(3)$ :

```
In[8]:= ProductIrrep[Irrep[SU3][3], Irrep[SU3][Bar[3]]]
```

```
Out[7]:= (3,  $\overline{3}$ )
```

```
In[9]:= %//InputForm
```

```
Out[8]:= ProductIrrep[Irrep[A][1,0], Irrep[A][0,1]]
```

```
In[10]:= ProductIrrep[Irrep[A][1,0],Irrep[A][0,1]]
Out[9]:= (3,3̄)
```

Take for example the left-handed quark doublet in the Standard-Model gauge group  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$  (The  $U_1$  charge is not typeset in bold face):

```
In[11]:= ProductIrrep[Irrep[SU3][3],Irrep[SU2][2],Irrep[U1][1/3]]
Out[10]:= (3,2)(1/3)

In[12]:= %//InputForm
Out[11]:= ProductIrrep[Irrep[A][1,0],Irrep[A][1],Irrep[U][1/3]]
```

## Decomposing Tensor Products

`DecomposeProduct[irreps]` decomposes the tensor product of several *irreps*.

Decompose the tensor product  $3 \otimes \bar{3}$  of  $SU(3)$ :

```
In[13]:= DecomposeProduct[Irrep[SU3][3],Irrep[SU3][Bar[3]]]
Out[12]:= 1 + 8
```

Decompose the tensor product  $27 \otimes \bar{27}$  of  $E_6$ :

```
In[14]:= DecomposeProduct[Irrep[E6][27],Irrep[E6][Bar[27]]]
Out[13]:= 1 + 78 + 650
```

Decompose the tensor product  $3 \otimes 3 \otimes 3$  of  $SU(3)$ :

```
In[15]:= DecomposeProduct[Irrep[SU3][3],Irrep[SU3][3],Irrep[SU3][3]]
Out[14]:= 1 + 2(8) + 10
```

Decompose the tensor product  $8 \otimes 8$  of  $SU(3)$ :

```
In[16]:= DecomposeProduct[Irrep[SU3][8],Irrep[SU3][8]]
Out[15]:= 1 + 2(8) + 10 + 10̄ + 27
```

Internally a sum of irreps is represented by `IrrepPlus` and `IrrepTimes`, an analog of the built-in functions `Plus` and `Times`:

```
In[17]:= %//InputForm
Out[16]:= IrrepPlus[Irrep[A][0,0],IrrepTimes[2,Irrep[A][1,1]],
  Irrep[A][3,0],Irrep[A][0,3],Irrep[A][2,2]]
```

The multiplicity of irreps in the sum can be extracted with `IrrepMultiplicity`:

```
In[18]:= IrrepMultiplicity[%,Irrep[SU3][8]]
Out[17]:= 2
```

Results can also be transformed into a list of irreps with `IrrepList`, suitable for further processing with Mathematica built-in functions like `Select` or `Cases`:

```
In[19]:= %//IrrepList
Out[18]:= {1,8,8,10,10̄,27 }
```

Decompose the tensor product  $4 \otimes 4 \otimes 6 \otimes 15$  of  $SU(4)$ :

```
In[20]:= DecomposeProduct[Irrep[SU4][4],Irrep[SU4][4],Irrep[SU4][6],Irrep[SU4][15]]
Out[19]:= 2(1) + 7(15) + 4(20') + 35 + 5(45) + 3(45̄) + 3(84) + 2(175) + 256
```

The Mathematica built-in command `Times` for products is replaced by `DecomposeProduct` for irreps as arguments. E.g., decompose the tensor product  $\bar{10} \otimes 24 \otimes 45$  of  $SU(5)$ :

```
In[21]:= Irrep[SU5][Bar[10]]*Irrep[SU5][24]*Irrep[SU5][45]
Out[20]:= 3(5̄) + 6(45̄) + 3(50̄) + 5(70̄) + 2(105̄) + 175'' + 6(280̄) + 2(280') + 420 + 450' + 3(480̄) +
  2(720̄) + 1120 + 2520
```

For powers of irreps the Mathematica built-in command `Power` may be used. E.g., decompose the tensor product  $27 \otimes 27 \otimes 27$  of  $E_6$ :

```

In[22] := Irrep[E6][27]^3
Out[21] := 1 + 2(78) + 3(650) + 2925 + 3003 + 2(5824)

Decompose tensor products of product irreps  $(\mathbf{3}, \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}) \otimes (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$  of  $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$ :
In[23] := DecomposeProduct[
    ProductIrrep[Irrep[SU3][3], Irrep[SU3][Bar[3]], Irrep[SU3][1]],
    ProductIrrep[Irrep[SU3][Bar[3]], Irrep[SU3][3], Irrep[SU3][1]]]
Out[22] := (1, 1, 1) + (8, 1, 1) + (1, 8, 1) + (8, 8, 1)

```

## Decomposition to Subalgebras

`DecomposeIrrep[irrep, subalgebra]` decomposes *irrep* to the specified *subalgebra*.

`DecomposeIrrep[pirrep, subalgebra, pos]` decomposes the product irrep *pirrep* at position *pos*.

Decompose the  $\overline{\mathbf{10}}$  of  $SU(5)$  to  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$ :

```

In[24] := DecomposeIrrep[Irrep[SU5][Bar[10]], ProductAlgebra[SU3, SU2, U1]]
Out[23] := (1, 1)(6) + (3, 1)(-4) + (3-bar, 2)(1)

```

Decompose the  $\mathbf{10}$  and the  $\bar{\mathbf{5}}$  of  $SU(5)$  to  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$  (`DecomposeIrrep` is `Listable`):

```

In[25] := DecomposeIrrep[{Irrep[SU5][10], Irrep[SU5][Bar[5]]}, ProductAlgebra[SU3, SU2, U1]]
Out[24] := {(3-bar, 1)(4) + (3, 2)(-1) + (1, 1)(-6), (3-bar, 1)(-2) + (1, 2)(3)}

```

Decompose the  $\mathbf{16}$  of  $SO(10)$  to  $SU(5) \otimes U_1$ :

```

In[26] := DecomposeIrrep[Irrep[S010][16], ProductAlgebra[SU5, U1]]
Out[25] := (1)(-5) + (5-bar)(3) + (10)(-1)

```

Decompose the  $\mathbf{27}$  of  $E_6$  to  $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$ :

```

In[27] := DecomposeIrrep[Irrep[E6][27], ProductAlgebra[SU3, SU3, SU3]]
Out[26] := (3, 1, 3) + (1, 3, 3-bar) + (3-bar, 3-bar, 1)

```

Decompose the  $SU(3)$  irrep  $\mathbf{3}$  in  $(\mathbf{24}, \mathbf{3})(-3)$  of  $SU(5) \otimes SU(3) \otimes U_1$  to  $SU(2) \otimes U'(1)$ , i.e.,  $SU(5) \otimes SU(3) \otimes U_1 \rightarrow SU(5) \otimes SU(2) \otimes U'(1) \otimes U_1$ :

```

In[28] := DecomposeIrrep[ProductIrrep[Irrep[SU5][24], Irrep[SU3][3], Irrep[U1][-3]],
    ProductAlgebra[SU2, U1], 2]
Out[27] := (24, 1)(-2)(-3) + (24, 2)(1)(-3)

```

The same decomposition as above displayed as branching rule:

```

In[29] := IrrepRule[#, DecomposeIrrep[#, ProductAlgebra[SU2, U1], 2]] & @
    ProductIrrep[Irrep[SU5][24], Irrep[SU3][3], Irrep[U1][-3]]
Out[28] := (24, 3)(-3) -> (24, 1)(-2)(-3) + (24, 2)(1)(-3)

```

Branching rules for all totally antisymmetric irreps, so-called basic irreps, of  $SU(6)$  to  $SU(3) \otimes SU(3) \otimes U_1$ :

```

In[30] := IrrepRule[#, DecomposeIrrep[#, ProductAlgebra[SU3, SU3, U1]]] & /@
    BasicIrreps[SU6] // TableForm
6 -> (3, 1)(1) + (1, 3)(-1)
15 -> (3-bar, 1)(2) + (1, 3-bar)(-2) + (3, 3)(0)
20 -> (1, 1)(3) + (1, 1)(-3) + (3, 3-bar)(-1) + (3-bar, 3)(1)
Out[29] := 15-bar -> (3, 1)(-2) + (1, 3)(2) + (3-bar, 3)(0)
6-bar -> (3-bar, 1)(-1) + (1, 3-bar)(1)

```

## Young Tableaux

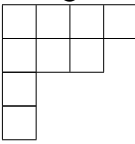
The irreps of  $SU(N)$  have a correspondence to Young tableaux, which can be displayed by `YoungTableau`.

`YoungTableau[irrep]` Displays the Young tableau associated with an  $SU(N)$  *irrep*.

Young tableau of the **720** of SU(5):

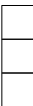
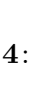
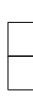
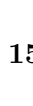
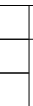
```
In[31]:= YoungTableau[Irrep[A][1,2,0,1]]
```

```
Out[30]:=
```



Display Young tableaux of SU(4) irreps with a maximum of one column per box count:

```
In[32]:= Row[Row[{"#", " ", YoungTableau[#]}]&/@
SortBy[Irrep[A]@@@Tuples[{0,1},3],Dim],Spacer[10]]
```

```
Out[31]:= 1: •     $\bar{4}$ :     4:     6:     15:     20:      $\bar{20}$ :     64: 
```

## 10.5 On supersymmetry and special Susy constructions

(много в физике про это говорят, заготовка чисто про это.)

## 11 Specific algebraic structures in a nutshell

### 11.1 Rings and modules, special fields

(????)

#### 11.1.1 Theoretical-ring structures

1. Идеалы колец и факторкольца (142).
2. Поле разложения многочлена (144).
3. Теоремы об изоморфизме колец (147).

#### 11.1.2 Individual Ring Results

1. Целые гауссовы числа (150).
2. Каноническое разложение суммы двух квадратов (152).
3. Полиномиальные расширения факториальных колец (153),
4. Строение мультипликативной группы  $U(Z_n)$  (154).

#### 11.1.3 Modules

1. Первоначальные сведения о модулях (159). 2. Свободные модули (163). 3. Целые элементы кольца (166). Упражнения (167).

#### 11.1.4 Algebras over the field

1. Определения и примеры алгебр (168).
2. Алгебры с делением (тела) (170).
3. Групповые алгебры и модули над ними (174).

### 11.1.5 Irreducible representations over the algebra $\mathfrak{sl}(2)$

1. Исходный материал (184).
2. Веса и кратности (186).
3. Старший вектор (186).
4. Классификационный результат (187).

### 11.1.6 $p$ -adic numbers in a nutshell

(see articles about it for now)

## 11.2 Polynomials and Galois theory in a nutshell

(см. Кострикин 1, Кострикин 3)

### 11.2.1 Polynomials (???)

§ 2. Кольцо многочленов 180 1. Многочлены от одной переменной A81). 2. Многочлены от многих переменных A85). 3. Алгоритм деления с остатком A87). Упражнения A88).

§ 3. Разложение в кольце многочленов 190 1. Элементарные свойства делимости A90). 2. НОД и НОК в кольцах A92). 3. Факториальность евклидовых колец A94). 4. Неприводимые многочлены A97). Упражнения B00).

§ 4. Поле отношений 201 1. Построение поля отношений целостного кольца B01). 2. Поле рациональных дробей B03). 3. Простейшие дроби B04). Упражнения B07).

### 11.2.2 Kostrikin polynomial roots 1

§ 1. Общие свойства корней 208 1. Корни и линейные множители B08). 2. Полиномиальные функции B10). 3. Дифференцирования кольца многочленов B12). 4. Кратные множители B14). 5. Формулы Вьетта B16). Упражнения B18).

§ 2. Симметрические многочлены 220 1. Кольцо симметрических многочленов B20). 2. Основная теорема о симметрических многочленах B21). 3. Метод неопределённых коэффициентов B24). 4. Дискриминант многочлена B26). 5. Результант B28). Упражнения B31). Оглавление

§ 3. Алгебраическая замкнутость поля  $\mathbb{C}$  232 1. Формулировка основной теоремы B32). 2. Доказательство основной теоремы B34). 3. Ещё одно доказательство основной теоремы B37).

§ 4. Многочлены с вещественными коэффициентами 241 1. Разложение на неприводимые множители в  $\mathbb{R}[X]$  B41). 2. Простейшие дроби над  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}$  B42). 3. Проблема локализации корней многочлена B44). 4. Вещественные многочлены с вещественными корнями B49). 5. Устойчивые многочлены B51). 6. Зависимость корней многочлена от коэффициентов B52). 7. Вычисление корней многочлена B54). 8. Рациональные корни целочисленных многочленов B55). Упражнения B57).

### 11.2.3 Other about polynomials according to Kostrikiyin 1 and not only

1. Проблема якобиана 259 2. Задача о дискриминанте 261 3. Задача о двух порождающих кольца многочленов 261 4. Задачи о критических точках и критических значениях... 262 5. Задача о глобальной сходимости метода Ньютона



### 11.2.4 Finite field extensions

On 1. Primitive elements and degrees of expansion (190).

On 2. Isomorphism of decomposition fields (194).

On 3. The existence of a primitive element (196).

### 11.2.5 End Fields

On 1. Existence and uniqueness (198).

On 2. Subfields and automorphisms of the finite field (200).

On 3. Mobius circulation formula and its application (201).

### 11.2.6 Galois Compliance

On 1. Preliminary results (207).

On 2. Fundamental Galois Compliance (210).

On 3. Illustrations for Galois compliance (211).

### 11.2.7 Calculation of the Galois group

On 1. Action of group  $\text{Gal}(f)$  на корнях многочлена  $f$  (215).

On 2. Polynomials and groups of simple degree (217).

On 3. The method of modulo reduction  $p$  (219).

On 4. Normal basis (224).

### 11.2.8 Galois Extensions and Related Matters

On 1. Простые числа в арифметической прогрессии (228).

On 2. Расширения с абелевой группой Галуа (229).

On 3. Норма и след (230).

On 4. Циклические расширения (233).

On 5. Критерий разрешимости уравнений в радикалах (235)

### 11.2.9 Rigidity and rationality in finite groups (??)

On 1. Определения и формулировка основной теоремы (239).

On 2. Подсчёт решений (240).

On 3. Примеры жёсткости (243).

## 12 Specific applications of algebra in a nutshell

### 12.1 Specific algebra in quantum mechanics, QFT, Standard model

#### 12.1.1 Tensor product of irreducible representations of the Kiselev rotation group(?)

(его последние темы)



### 12.1.2 Other typical models of algebra in particle physics

(см. лекции Киселева для пары моделей, а, вообще, это отдельное направление)

#### Магнитные дипольные моменты протона, нейтрона и странных гиперонов

$$\mu_p \mapsto \frac{e}{2m_p c} g \hbar s_p = \frac{e \hbar}{2m_p c} \equiv \mu_N$$

где  $s_p = \frac{1}{2}$  - это спин протона,  $g$ -фактор в ведущем приближении равен 2, а его малые отклонения от этого значения вычисляются в квантовой теории поля при учете флуктуаций квантовых полей в виде так называемых петлевых поправок. Эксперимент катастрофически расходится с этими ожиданиями

$$\mu_p \approx 2.79\mu_N, \quad \mu_n \approx -1.91\mu_N$$

Гипероны с двумя странными кварками  $\Xi^0 = (ssu)$  и  $\Xi^- = (ssd)$ , обладающие спином  $\frac{1}{2}$ , в составной кварковой модели имеют магнитные моменты близкие к экспериментальным с точностью уже порядка 20%:

$$\begin{aligned} \mu_{\Xi^0}|_{\text{QM}} &= \frac{4}{3} \cdot \mu_s Q_s - \frac{1}{3} \cdot \mu_u Q_u \approx -1.50\mu_N, & \mu_{\Xi^0}|_{\text{exp}} &\approx -1.25\mu_N \\ \mu_{\Xi^-}|_{\text{QM}} &= \frac{4}{3} \cdot \mu_s Q_s - \frac{1}{3} \cdot \mu_d Q_d \approx -0.55\mu_N, & \mu_{\Xi^-}|_{\text{exp}} &\approx -0.65\mu_N. \end{aligned}$$

(это специфическая заадча, пока не до нее)

### 12.1.3 Magnetic dipole moments of the proton, neutron, and strange hyperons

(????)

## 12.2 Specific algebra in special field theories and condensed matter

### 12.2.1 Overview of algebra in Condensed Matter by Tsvelik

(see his big wonderful book for now. I'll start learning it in note of cond. matter)

## 12.2.2 Algebra in condensed matter, topological systems

### Cartan classification of Hamiltonians (???)

| Class              | Example                                                                                                                                                                                                        | $T$ | $P$ | $S$ | Structure                       | Strong top. phase in 3D? |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|---------------------------------|--------------------------|
| $A$ “Unitary”      | Metal with broken $T$ due to (e.g.) magnetic impurities, or magnetic field:<br><a href="#">2D integer quantum Hall effect</a>                                                                                  | 0   | 0   | 0   | $u(N)$                          | no                       |
| $D$                | SC with broken $T$ ; 2D topological p+ip SC:<br><a href="#">5/2 state in fractional quantum Hall effect (?)</a> ;<br><a href="#">superfluid <math>^3\text{He A}</math></a> ;<br>2D thermal quantum Hall effect | 0   | 1   | 0   | $so(2N)$                        | no                       |
| $C$                | SC with broken $T$ and spin $su(2)$ symmetry;<br>2D spin quantum Hall effect                                                                                                                                   | 0   | -1  | 0   | $sp(2N)$                        | no                       |
| $AI$ “Orthogonal”  | Metal with $T$ and spin $su(2)$ symmetry:<br><a href="#">3D P-doped Si</a> , <a href="#">2D Si MOSFET MIT</a>                                                                                                  | 1   | 0   | 0   | $u(N) / so(N)$                  | no                       |
| $BDI$              | Orthogonal metal with chiral symmetry;<br>spinless p-wave SC with $T$                                                                                                                                          | 1   | 1   | 1   | $so(2N) / so(N) \times so(N)$   | no                       |
| $CI$               | SC with $T$ and spin $su(2)$ symmetry:<br><a href="#">2D high-<math>T_c</math> cuprate SCs</a> , 3D topological SC                                                                                             | 1   | -1  | 1   | $sp(2N) / u(N)$                 | yes                      |
| $AII$ “Symplectic” | Metal with $T$ and spin-orbit coupling;<br><a href="#"><math>\mathbb{Z}_2</math> topological insulators in 2D, 3D</a>                                                                                          | -1  | 0   | 0   | $u(2N) / sp(2N)$                | yes                      |
| $DIII$             | SC with $T$ and spin-orbit coupling;<br>3D topological SC, <a href="#">superfluid <math>^3\text{He B}</math></a>                                                                                               | -1  | 1   | 1   | $so(2N) / u(N)$                 | yes                      |
| $CII$              | Symplectic metal with chiral symmetry                                                                                                                                                                          | -1  | -1  | 1   | $sp(4N) / sp(2N) \times sp(2N)$ | yes                      |
| $AIII$             | Unitary metal with chiral symmetry;<br>SC with $T$ and spin $U(1)$ symmetry<br>(e.g. p-wave); 3D topological SC                                                                                                | 0   | 0   | 1   | $u(2N) / u(N) \times u(N)$      | yes                      |

### Examples of Cartan classification of Hamiltonians (???)

Spin-1/2 superconductor with no physical symmetries: Class D

$\hat{h} \in so(4N)$ , spin- 1/2 SC with  $P^2 = +1$ , broken time-reversal, and spin-orbit coupling: class  $D$ .

Spin-1/2 superconductor with time-reversal symmetry and spin-orbit coupling: Class DIII

$\hat{h} \in so(4N)/u(2N)$ , spin- 1/2 SC with  $T^2 = -1$ ,  $P^2 = +1$ , and SO coupling: class DIII.

Spin-1/2 metal with time-reversal invariance and spin-orbit coupling: “Symplectic” class AII

$\hat{h} \in u(2N)/sp(2N)$ , spin- 1/2 metal with  $T^2 = -1$  and SO coupling: class AII.

(???)

(???)

## 12.2.3 Algebra in special field theories

(тут много всякого, много теорий, нужно будет - доизучаю)

## 12.2.4 SUSY algebras in a nutshell

### Supersymmetry

The supersymmetry algebra was discovered in the early 1970s in the search for the most general symmetries of a relativistic quantum field theory. It would go far beyond the scope of this book to explain in any detail what precisely a relativistic quantum field theory is. (The interested reader should consult e.g. [Itzykson and Zuber 1980], [Weinberg 1995] and / or chapters I and II of [Haag 1992].) The relevant result from the investigation of such theories that is needed here is the so-called Coleman-Mandula theorem. This theorem asserts that - under a number of plausible assumptions - the most general Lie algebra of symmetries of a (four-dimensional) relativistic quantum field theory has the form of a direct sum  $\mathcal{P} \oplus \bar{\mathfrak{g}}$  of the Poincaré algebra  $\mathcal{P}$  and some reductive compact real Lie algebra  $\bar{\mathfrak{g}}$ . The statement that the symmetry algebra is such a direct sum means that the transformations described by  $\bar{\mathfrak{g}}$  and the Poincaré algebra transformations commute. In particular, the elements of  $\bar{\mathfrak{g}}$  are Lorentz scalars, and hence the corresponding degrees of freedom of the field theory are insensitive to the structure of space-time;  $\bar{\mathfrak{g}}$  is therefore called the algebra of internal symmetries of the theory.

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

that possesses the following properties which generalize the defining properties of a Lie bracket. - The decomposition (20.43) of  $\mathfrak{g}$  constitutes a  $\mathbb{Z}_2$  gradation with respect to the bilinear product  $\{\cdot, \cdot\}$ , i.e.

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0\} &\subseteq \mathfrak{g}_0, & \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0\} &\subseteq \mathfrak{g}_1 \\ \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1\} &\subseteq \mathfrak{g}_0, & \{\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1\} &\subseteq \mathfrak{g}_1 \end{aligned}$$

Thus to any element  $x_i \in \mathfrak{g}_i$  one assigns its grade  $|x_i| \equiv \deg(x_i) = i$  which is  $\mathbb{Z}_2$ -valued,  $\deg(x_i) \in \{0, 1\}$ . Accordingly, the subspaces  $\mathfrak{g}_0$  and  $\mathfrak{g}_1$  are called the even and odd subspace of  $\mathfrak{g}$ , respectively. - The antisymmetry of the Lie bracket is replaced by the condition that

$$\{x, y\} = (-1)^{1+|x||y|} \{y, x\}$$

- The Jacobi identity is generalized to the super Jacobi identity, which states that

$$(-1)^{|x||z|} \{x, \{y, z\}\} + (-1)^{|x||y|} \{y, \{z, x\}\} + (-1)^{|y||z|} \{z, \{x, y\}\} = 0$$

for all homogeneous elements  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ . We have already touched this structure in section 4.11 ; there we have used the notation  $[x, y]_s$  instead of  $\{x, y\}$ . Note that Lie superalgebras are not Lie algebras. (The terms graded or  $\mathbb{Z}_2$ -graded Lie algebra, which are sometimes used in place of Lie superalgebra, are therefore misleading.)

It follows immediately that the even subspace  $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$  is a Lie algebra, with the restriction of  $\{\cdot, \cdot\}$  to  $\mathfrak{g}_0$  as the Lie bracket;  $\mathfrak{g}_0$  is called the bosonic subalgebra of  $\mathfrak{g}$ . Furthermore,  $\mathfrak{g}_1$  (also called the fermionic subspace) carries a representation of  $\mathfrak{g}_0$ . As a consequence, various results from the structure theory of Lie algebras can be applied to the study of Lie superalgebras.

By analyzing the further constraints that follow from the super Jacobi identity, one can now characterize the most general symmetry Lie superalgebra of a (four-dimensional) relativistic field theory. In this process it is also crucial to have in mind that  $\mathfrak{g}_1$  has the Poincaré algebra as a subalgebra. The result is known as the Haag-Eopuzanski-Sohnius (or HES) theorem (for a simple derivation we refer to the first chapter of [Wess and Bagger 1992]). The HLS theorem states that apart from the Poincaré algebra, whose Lie brackets were already displayed in the previous section, and the relations

$$\begin{aligned} [M_{mn}, Q_\alpha^A] &= (R_{(1,0)}(M_{mn}))_\alpha^\beta Q_\beta^A, \\ [M_{mn}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}, B}] &= (R_{(0,1)}(M_{mn}))_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}, B} \end{aligned}$$

which tell us that the operators  $Q$  and  $\bar{Q}$  are two-spinors, the relations

$$[P_m, Q_\alpha^A] = 0 = [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}, B}] , \quad \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}, B}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m \delta_B^A$$

are required to hold. (From the point of view of physics, the last of these relations is the most interesting new ingredient. It states that, loosely speaking, the supercharges  $Q_\alpha^A$  and  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}, B}$  can be regarded as 'square roots' of the momentum operators  $P_m$ .) Finally, the anti-commutation relations of the supercharges read

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = \epsilon_{\alpha\beta} X^{AB} \quad \text{and} \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}, A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}, B}\} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} X_{AB}^+$$

$$X^{AB} = \xi_a^{AB} T^a.$$

The supercharges transform with respect to  $\bar{\mathfrak{g}}$  according to

$$[Q_\alpha^A, T^a] = S^{a, AB}_B Q_\alpha^B, \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}, A}, T^a] = -(S^+)^{a, B}_A \bar{Q}_{\dot{\alpha}, B},$$

where  $S^a \equiv R(T^a)$  and  $(S^+)^a \equiv -R^+(T^a)$  are the representation matrices for two conjugate  $\bar{\mathfrak{g}}$ -representations  $R$  and  $R^+$ . Furthermore, one can derive the consistency condition

$$S^{a, A}_b \xi_b^{BC} = -\xi_b^{AB} (S^+)^{a, C}_B$$

on the coefficients  $\xi_a^{AB}$  that appear in (20.51). In other words, these quantities intertwine the  $\bar{\mathfrak{g}}$ -representations realized by  $S$  and  $S^+$  on the two types of supercharges. This property constitutes a strong restriction on the existence of central terms.

### Tables and maps

Table B. 1 Real forms of simple bosonic Lie algebras. The first one in each block is the compact real form, the last one is the normal real form.

| algebra    | real form        | maximal compact subgroup                         |
|------------|------------------|--------------------------------------------------|
| $A_{n-1}$  | $SU(n)$          | $SU(n)$                                          |
| $A_{n-1}$  | $SU(p, n-p)$     | $SU(p) \times SU(n-p) \times U(1)$               |
| $A_{2n-1}$ | $SU^*(2n)$       | $USp(2n)$                                        |
| $A_{n-1}$  | $SL(n)$          | $SO(n)$                                          |
| $B_n$      | $SO(2n+1)$       | $SO(2n+1)$                                       |
| $B_n$      | $SO(2n+1-p, p)$  | $SO(2n+1-p) \times SO(p), \quad 0 \leq p \leq n$ |
| $B_n$      | $SO(n, n+1)$     | $SO(n) \times SO(n+1)$                           |
| $D_n$      | $SO(2n)$         | $SO(2n)$                                         |
| $D_n$      | $SO(2n-p, p)$    | $SO(2n-p) \times SO(p)$                          |
| $D_n$      | $SO^*(2n)$       | $U(n)$                                           |
| $D_n$      | $SO(n, n)$       | $SO(n) \times SO(n)$                             |
| $C_n$      | $USp(2n)$        | $USp(2n)$                                        |
| $C_n$      | $USp(2p, 2n-2p)$ | $USp(2p) \times USp(2n-2p)$                      |
| $C_n$      | $Sp(2n)$         | $U(n)$                                           |
| $G_2$      | $G_{2,-14}$      | $G_2$                                            |
| $G_2$      | $G_{2,2}$        | $SU(2) \times SU(2)$                             |
| $F_4$      | $F_{4,-52}$      | $F_{4,-52}$                                      |
| $F_4$      | $F_{4,-20}$      | $SO(9)$                                          |
| $F_4$      | $F_{4,4}$        | $USp(6) \times SU(2)$                            |

Not so used:

|       |              |                                         |
|-------|--------------|-----------------------------------------|
| $E_6$ | $E_{6,-78}$  | $E_{6,-78}$                             |
| $E_6$ | $E_{6,-26}$  | $F_{4,-52}$                             |
| $E_6$ | $E_{6,-14}$  | $\mathrm{SO}(10) \times \mathrm{SO}(2)$ |
| $E_6$ | $E_{6,2}$    | $\mathrm{SU}(6) \times \mathrm{SU}(2)$  |
| $E_6$ | $E_{6,6}$    | $\mathrm{USp}(8)$                       |
| $E_7$ | $E_{7,-133}$ | $E_{7,-133}$                            |
| $E_7$ | $E_{7,-25}$  | $E_{6,-78} \times \mathrm{SO}(2)$       |
| $E_7$ | $E_{7,-5}$   | $\mathrm{SO}(12) \times \mathrm{SU}(2)$ |
| $E_7$ | $E_{7,7}$    | $\mathrm{SU}(8)$                        |
| $E_8$ | $E_{8,-248}$ | $E_{8,-248}$                            |
| $E_8$ | $E_{8,-24}$  | $E_{7,-133} \times \mathrm{SU}(2)$      |
| $E_8$ | $E_{8,8}$    | $\mathrm{SO}(16)$                       |

$$\begin{aligned}
\mathfrak{so}(3) &= \mathfrak{su}(2) = \mathfrak{su}^*(2), & \mathfrak{so}(2,1) &= \mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{su}(1,1) = \mathfrak{sp}(2), \\
\mathfrak{so}(4) &= \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2), & \mathfrak{so}(3,1) &= \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \\
& & \mathfrak{so}(2,2) &= \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2), & \mathfrak{so}^*(4) &= \mathfrak{su}(1,1) \times \mathfrak{su}(2), \\
\mathfrak{so}(5) &= \mathfrak{usp}(4), & \mathfrak{so}(4,1) &= \mathfrak{usp}(2,2), & \mathfrak{so}(3,2) &= \mathfrak{sp}(4), \\
\mathfrak{so}(6) &= \mathfrak{su}(4), & \mathfrak{so}(5,1) &= \mathfrak{su}^*(4), & \mathfrak{so}(4,2) &= \mathfrak{su}(2,2), \\
& & \mathfrak{so}(3,3) &= \mathfrak{sl}(4), & \mathfrak{so}^*(6) &= \mathfrak{su}(3,1), \\
\mathfrak{so}^*(8) &= \mathfrak{so}(6,2).
\end{aligned}$$

### Superalgebras

Some main Lie superalgebras of classical type:

| name                         | range             | bosonic algebra                                                       | fermionic      |
|------------------------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------------|----------------|
| $\mathrm{SU}(m-p, p n-q, q)$ | $m \neq n$        | $\mathrm{SU}(m-p, p) \oplus \mathrm{SU}(n-q, q) \oplus \mathrm{U}(1)$ | $(m, \bar{n})$ |
| $\mathrm{OSp}(m^* n-q, q)$   | $m, n, q$<br>even | $\mathrm{SO}^*(m) \oplus \mathrm{USp}(n-q, q)$                        | $(m, n)$       |
| $F^2(4)$                     |                   |                                                                       |                |

Lie superalgebras are structures with bosonic operators, say  $B_A$ , and fermionic ones, say  $F_\alpha$ . Between the fermionic ones there are anti-commutation relations, and between the others there are commutation relations. Just as an ordinary Lie algebra must satisfy Jacobi identities, the superalgebra should satisfy a graded version thereof, super-Jacobi identities. We write these as

$$\begin{aligned}
[[B_A, B_B], \mathcal{O}] &= [B_A, [B_B, \mathcal{O}]] - [B_B, [B_A, \mathcal{O}]], \\
[\{F_\alpha, F_\beta\}, \mathcal{O}] &= [F_\alpha, [F_\beta, \mathcal{O}]] - [F_\beta, [F_\alpha, \mathcal{O}]],
\end{aligned}$$

where  $\mathcal{O}$  is either a bosonic or a fermionic operator, and  $[F, \mathcal{O}]$  is a commutator when it is bosonic, or an anti-commutator when it is fermionic. The super-Jacobi identities written in this form can be easily remembered: Write one double (anti-)commutator in the left-hand side. Then write at the right-hand side the operators in the same order, but write the inner bracket with the other adjacent operators. Then write another term in the right-hand side with the two operators of the inner bracket of the left-hand side interchanged, and take the sign such that the symmetry between them in the left-hand side is respected.

The definition of the classical superalgebras starts from a graded space (there are odd and even elements) that are mixed by the transformations of the superalgebra. The matrices are thus of the form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

where  $A$  and  $D$  are matrices that do not change the type in the vector space and are thus bosonic transformations, while  $B$  and  $C$  transform bosonic entries to fermionic or vice versa and are thus 'fermionic transformations'. The simplest superalgebras involve the preservation of a metric. For example, for 'orthosymplectic algebras' this is a symmetric matrix in the upper part (and thus  $A$  is an element of an orthogonal algebra) and antisymmetric in the lower part (and thus  $D$  is an element of a symplectic algebra).

General superalgebras have been classified in [363, 364, 365, 58], and a convenient table is given in [12]. We give in Table B. 2 a list of the superalgebras used in this book with the bosonic subalgebra (the  $A + D$  part of (B.9)) and the representation of the latter formed by the fermionic generators. The superalgebra  $SU(m|m)$  has the same structure as  $SU(m|n)$  except that the  $U(1)$  generator can be omitted. Many authors denote the superalgebra without the  $U(1)$  by  $PSU(m|m)$ .

### 12.2.5 Algebra for GUT

(see theory from Zhou for now, it is a very special field. Maybe I'll start this section from his not, but first I need to think a lot about it)

---

## Part VII

# Other Special Methods

Пока что тут то, до чего я не доходил и может быть, не скоро дойду. Позже может быть отдельные части появятся, пока в них смысла нет.

### 12.3 LieART in Wolfram

This section provides a tutorial introducing the most important and frequently used functions of LieART for Lie-algebra and representation-theory related calculations. The functions are introduced based on simple examples that can easily be modified and extended to the user's desired application. Most examples use irreducible representations (irreps) of  $SU(5)$ , which most textbooks use in examples since is less trivial than  $SU(3)$ , but small enough to return results almost instantly on any recent computer. Also,  $SU(5)$  frequently appears in unified model building since the Standard-Model gauge group is one of its maximal subgroups. This tutorial can also be found in the LieART documentation integrated into the Wolfram Documentation as **Quick Start Tutorial** under the drop down **Tutorials** on the upper right of LieART's documentation home.

This loads the package:

```
In[33]:= « LieART'
```

#### Entering Irreducible Representations

Irreps are internally described by their Dynkin label with a combined head of `Irrep` and the Lie algebra.

`Irrep[algebraClass][label]` irrep described by its *algebraClass* and Dynkin *label*.

The *algebraClass* follows the Dynkin classification of simple Lie algebras and can only be A, B, C, D for the classical algebras and E6, E7, E8, F4 and G2 for the exceptional algebras. The precise classical algebra is determined by the length of the Dynkin label.

Entering the  $\overline{10}$  of  $SU(5)$  by its Dynkin label and algebra class:

```
In[34]:= Irrep[A][0,0,1,0]//FullForm
```

```
Out[32]:= Irrep[A][0,0,1,0]
```

In `StandardForm` the irrep is displayed in the textbook notation of Dynkin labels:

```
In[35]:= Irrep[A][0,0,1,0]//StandardForm
```

```
Out[33]:= (0010)
```

In `TraditionalForm` (default) the irrep is displayed by its dimensional name:

```
In[36]:= Irrep[A][0,0,1,0]
```

```
Out[34]:=  $\overline{10}$ 
```

The default output format type of LieART is `TraditionalForm`. The associated user setting is overwritten for the front-end session LieART is loaded in. For `StandardForm` as default output

|                                                                                                 |        |      |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|------|-----------|
|                                                                                                 | format | type | evaluate: |
| <code>CurrentValue[FrontEndSession, {CommonDefaultFormatTypes, "Output"}] = StandardForm</code> |        |      |           |

As an example for entering an irrep of an exceptional algebra, consider the **27** of  $E_6$ :

```
In[37]:= Irrep[E6][1,0,0,0,0,0]
```

```
Out[35]:= 27
```

Irreps may also be entered by their dimensional name. The package transforms the irrep into its Dynkin label. Since the algebra of an irrep of a classical Lie algebra becomes ambiguous with only the dimensional name, it has to be specified.

`Irrep[algebra][dimname]` irrep entered by its *algebra* and dimensional name *dimname*.

Entering the  $\overline{10}$  of  $SU(5)$  by its dimensional name specifying the algebra by its Dynkin classification  $A_4$ :

```
In[38]:= Irrep[A4][Bar[10]]//InputForm
Out[36]:= Irrep[A][0,0,1,0]
```

The traditional name of the algebra  $SU(5)$  may also be used:

```
In[39]:= Irrep[SU5][Bar[10]]//InputForm
Out[37]:= Irrep[A][0,0,1,0]
```

Irreps of product algebras like  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$  are specified by `ProductIrrep` with the individual irreps of simple Lie algebras as arguments.

`ProductIrrep[irreps]` head of product *irreps*, gathering irreps of simple Lie algebras.

The product irrep  $(\mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}})$  of  $SU(3) \otimes SU(3)$ :

```
In[40]:= ProductIrrep[Irrep[SU3][3], Irrep[SU3][Bar[3]]]
Out[38]:= (3, 3)
```

```
In[41]:= %//InputForm
Out[39]:= ProductIrrep[Irrep[A][1,0], Irrep[A][0,1]]
```

```
In[42]:= ProductIrrep[Irrep[A][1,0], Irrep[A][0,1]]
Out[40]:= (3, 3)
```

Take for example the left-handed quark doublet in the Standard-Model gauge group  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$  (The  $U_1$  charge is not typeset in bold face):

```
In[43]:= ProductIrrep[Irrep[SU3][3], Irrep[SU2][2], Irrep[U1][1/3]]
Out[41]:= (3, 2)(1/3)
```

```
In[44]:= %//InputForm
Out[42]:= ProductIrrep[Irrep[A][1,0], Irrep[A][1], Irrep[U][1/3]]
```

## Decomposing Tensor Products

`DecomposeProduct[irreps]` decomposes the tensor product of several *irreps*.

Decompose the tensor product  $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$  of  $SU(3)$ :

```
In[45]:= DecomposeProduct[Irrep[SU3][3], Irrep[SU3][Bar[3]]]
Out[43]:= 1 + 8
```

Decompose the tensor product  $\mathbf{27} \otimes \overline{\mathbf{27}}$  of  $E_6$ :

```
In[46]:= DecomposeProduct[Irrep[E6][27], Irrep[E6][Bar[27]]]
Out[44]:= 1 + 78 + 650
```

Decompose the tensor product  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$  of  $SU(3)$ :

```
In[47]:= DecomposeProduct[Irrep[SU3][3], Irrep[SU3][3], Irrep[SU3][3]]
Out[45]:= 1 + 2(8) + 10
```

Decompose the tensor product  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  of  $SU(3)$ :

```
In[48]:= DecomposeProduct[Irrep[SU3][8], Irrep[SU3][8]]
Out[46]:= 1 + 2(8) + 10 + 10 + 27
```

Internally a sum of irreps is represented by `IrrepPlus` and `IrrepTimes`, an analog of the built-in functions `Plus` and `Times`:

```
In[49]:= %//InputForm
Out[47]:= IrrepPlus[Irrep[A][0,0], IrrepTimes[2, Irrep[A][1,1]],
  Irrep[A][3,0], Irrep[A][0,3], Irrep[A][2,2]]
```

The multiplicity of irreps in the sum can be extracted with `IrrepMultiplicity`:



```
In[50]:= IrrepMultiplicity[%, Irrep[SU3][8]]
Out[48]:= 2
```

Results can also be transformed into a list of irreps with `IrrepList`, suitable for further processing with Mathematica built-in functions like `Select` or `Cases`:

```
In[51]:= %//IrrepList
Out[49]:= {1, 8, 8, 10, 10, 27 }
```

Decompose the tensor product  $4 \otimes 4 \otimes 6 \otimes 15$  of  $SU(4)$ :

```
In[52]:= DecomposeProduct[Irrep[SU4][4], Irrep[SU4][4], Irrep[SU4][6], Irrep[SU4][15]]
Out[50]:= 2(1) + 7(15) + 4(20') + 35 + 5(45) + 3(45) + 3(84) + 2(175) + 256
```

The Mathematica built-in command `Times` for products is replaced by `DecomposeProduct` for irreps as arguments. E.g., decompose the tensor product  $\overline{10} \otimes 24 \otimes 45$  of  $SU(5)$ :

```
In[53]:= Irrep[SU5][Bar[10]]*Irrep[SU5][24]*Irrep[SU5][45]
Out[51]:= 3(5) + 6(45) + 3(50) + 5(70) + 2(105) + 175'' + 6(280) + 2(280') + 420 + 450' + 3(480) +
2(720) + 1120 + 2520
```

For powers of irreps the Mathematica built-in command `Power` may be used. E.g., decompose the tensor product  $27 \otimes 27 \otimes 27$  of  $E_6$ :

```
In[54]:= Irrep[E6][27]^3
Out[52]:= 1 + 2(78) + 3(650) + 2925 + 3003 + 2(5824)
```

Decompose tensor products of product irreps  $(\mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}) \otimes (\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$  of  $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$ :

```
In[55]:= DecomposeProduct[
    ProductIrrep[Irrep[SU3][3], Irrep[SU3][Bar[3]], Irrep[SU3][1]],
    ProductIrrep[Irrep[SU3][Bar[3]], Irrep[SU3][3], Irrep[SU3][1]]]
Out[53]:= (1, 1, 1) + (8, 1, 1) + (1, 8, 1) + (8, 8, 1)
```

## Decomposition to Subalgebras

`DecomposeIrrep[irrep, subalgebra]` decomposes *irrep* to the specified *subalgebra*.

`DecomposeIrrep[pirrep, subalgebra, pos]` decomposes the product irrep *pirrep* at position *pos*.

Decompose the  $\overline{10}$  of  $SU(5)$  to  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$ :

```
In[56]:= DecomposeIrrep[Irrep[SU5][Bar[10]], ProductAlgebra[SU3, SU2, U1]]
Out[54]:= (1, 1)(6) + (3, 1)(-4) + (3, 2)(1)
```

Decompose the  $\mathbf{10}$  and the  $\overline{5}$  of  $SU(5)$  to  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U_1$  (`DecomposeIrrep` is `Listable`):

```
In[57]:= DecomposeIrrep[{Irrep[SU5][10], Irrep[SU5][Bar[5]]}, ProductAlgebra[SU3, SU2, U1]]
Out[55]:= {(3, 1)(4) + (3, 2)(-1) + (1, 1)(-6), (3, 1)(-2) + (1, 2)(3)}
```

Decompose the  $\mathbf{16}$  of  $SO(10)$  to  $SU(5) \otimes U_1$ :

```
In[58]:= DecomposeIrrep[Irrep[S010][16], ProductAlgebra[SU5, U1]]
Out[56]:= (1)(-5) + (5)(3) + (10)(-1)
```

Decompose the  $\mathbf{27}$  of  $E_6$  to  $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$ :

```
In[59]:= DecomposeIrrep[Irrep[E6][27], ProductAlgebra[SU3, SU3, SU3]]
Out[57]:= (3, 1, 3) + (1, 3, 3) + (3, 3, 1)
```

Decompose the  $SU(3)$  irrep  $\mathbf{3}$  in  $(\mathbf{24}, \mathbf{3})(-3)$  of  $SU(5) \otimes SU(3) \otimes U_1$  to  $SU(2) \otimes U'(1)$ , i.e.,  $SU(5) \otimes SU(3) \otimes U_1 \rightarrow SU(5) \otimes SU(2) \otimes U'(1) \otimes U_1$ :

```
In[60]:= DecomposeIrrep[ProductIrrep[Irrep[SU5][24], Irrep[SU3][3], Irrep[U1][-3]],
    ProductAlgebra[SU2, U1], 2]
Out[58]:= (24, 1)(-2)(-3) + (24, 2)(1)(-3)
```

The same decomposition as above displayed as branching rule:

```
In[61]:= IrrepRule[#,DecomposeIrrep[#,ProductAlgebra[SU2,U1],2]]&@
ProductIrrep[Irrep[SU5][24],Irrep[SU3][3],Irrep[U1][-3]]
Out[59]:= (24,3)(-3) → (24,1)(-2)(-3) + (24,2)(1)(-3)
```

Branching rules for all totally antisymmetric irreps, so-called basic irreps, of  $SU(6)$  to  $SU(3) \otimes SU(3) \otimes U_1$ :

```
In[62]:= IrrepRule[#,DecomposeIrrep[#,ProductAlgebra[SU3,SU3,U1]]]&@
BasicIrreps[SU6]//TableForm
6 → (3,1)(1) + (1,3)(-1)
15 → (3,1)(2) + (1,3)(-2) + (3,3)(0)
20 → (1,1)(3) + (1,1)(-3) + (3,3)(-1) + (3,3)(1)
Out[60]:= 15 → (3,1)(-2) + (1,3)(2) + (3,3)(0)
6 → (3,1)(-1) + (1,3)(1)
```

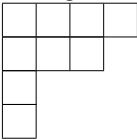
## Young Tableaux

The irreps of  $SU(N)$  have a correspondence to Young tableaux, which can be displayed by `YoungTableau`.

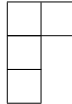
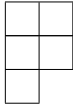
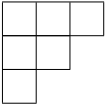
`YoungTableau[irrep]` Displays the Young tableau associated with an  $SU(N)$  *irrep*.

Young tableau of the **720** of  $SU(5)$ :

```
In[63]:= YoungTableau[Irrep[A][1,2,0,1]]
Out[61]:=
```



Display Young tableaux of  $SU(4)$  irreps with a maximum of one column per box count:

```
In[64]:= Row[Row[{#,":", " ", YoungTableau[#]}]]&@
SortBy[Irrep[A]@@@Tuples[{0,1},3],Dim],Spacer[10]]
Out[62]:= 1: • 4:  4:  6:  15:  20:  20:  64: 
```

## 12.4 Beginnings of Galois Theory

Помимо элементарных сведений о конечных расширениях полей, в частности, о конечных полях и полях алгебраических чисел, приводятся фрагменты теории Галуа, достаточные для того, чтобы доказать классическую теорему о неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени больше 4. Доказываются также более интересные теоретико-числовые факты. Излагаются начала современного направления в теории Галуа, привлекательность которого для нас обусловлена активным использованием теории характеров на элементарном уровне главы 3.

### 12.4.1 Final extensions of fields according to Kostrikin 3

#### Primitive elements and extensions.

Если  $F$  - поле, содержащее подполе  $P$ , то  $F$  называется также расширением поля  $P$  [ВА I, гл. 4, §3]. Мы ограничимся вначале простейшим случаем, когда расширение  $F = P(\theta)$  получено из поля  $P$  присоединением (внутри заданного поля  $F$ ) единственного элемента  $\theta \in F$ . Говорят, что  $P(\theta)$  - простое расширение поля  $P$ , а  $\theta$  - примитивный элемент этого расширения. По своему смыслу  $P(\theta)$  - поле отношений целостного кольца  $P[\theta]$ . Элемент  $\theta$  трансцендентен над  $P$  тогда и только тогда, когда расширение  $P(\theta)$  изоморфно полю рациональных дробей. Если, однако,  $\theta$  - алгебраический элемент, то  $P(\theta) \cong P[X]/(f(X))$

(гл. 4, §1, теорема 2). Здесь  $f(X)$  - неприводимый многочлен степени  $n > 0$ , корнем которого является  $\theta$ . Обратно: если  $f[X]$  - неприводимый многочлен, то, как мы знаем из гл. 4, каноническим образом строится поле  $F$ , в котором  $f$  обладает хотя бы одним корнем (назовём его  $\theta$ ). Из построения видно, что  $F$  отождествляется с множеством элементов вида

$$a_0 + a_1\theta + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}, \quad a_i \in P, \quad n = \deg f$$

Для элементов кольца  $P[\theta]$  это очевидно (разделить  $g(X)$  на  $f(X)$  с остатком и подставить  $X = \theta$ ); деление же в  $P[\theta]$  осуществляется так: если  $g(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$ , то неприводимость  $f$  влечёт равенство НОД  $(f, g) = 1$  и существование многочленов  $u(X), v(X)$  степени  $< n$ , для которых  $fu + gv = 1$ ; отсюда  $g(\theta)v(\theta) = 1$  и  $1/g(\theta) = v(\theta)$ . Число  $n$  можно считать размерностью векторного пространства над  $P$  с базисными элементами  $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$ .

В случае произвольного расширения  $F \supset P$  также целесообразно рассмотреть  $F$  как векторное пространство над  $P$ . Его размерность  $\dim_P F$  (возможно, бесконечную) мы обозначим через  $[F : P]$  и назовём степенью расширения  $F$  над  $P$ . Если  $F = P(\theta)$ , то  $[F : P]$  называется также степенью примитивного элемента. Понятно, что для трансцендентного элемента  $\theta \in F$  семейство  $1, \theta, \theta^2, \dots$  линейно независимо над  $P$  и  $[P(\theta) : P] = \infty$ . С другой стороны, из сказанного выше вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть  $F$  - какое-то расширение поля  $P$ . Элемент  $\theta \in F$  алгебраичен над  $P$  тогда и только тогда, когда  $[P(\theta) : P] < \infty$ . Кроме того, алгебраичность  $\theta$  влечёт равенство  $P(\theta) = P[\theta]$ .

Назовём  $K \supset F \supset P$  двухэтажной башней расширений. Она позволяет говорить о трёх векторных пространствах:  $K/P$  ( $K$  над  $P$ ),  $K/F$  ( $K$  над  $F$ ) и  $F/P$  ( $F$  над  $P$ ). Их размерности связаны соотношением, аналогичным соотношению для индексов подгрупп.

Теорема 2. В башне расширений  $K \supset F \supset P$  степень  $[K : P]$  конечна тогда и только тогда, когда конечны степени  $[K : F]$  и  $[F : P]$ . В случае их конечности справедливо соотношение

$$[K : P] = [K : F][F : P]$$

Доказательство. Предположив сначала конечность  $[K : F]$  и  $[F : P]$ , выберем  $P$ -базис  $f_1, \dots, f_m$  в  $F/P$  и  $F$ -базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $K/F$ . Тогда любой элемент  $x \in K$  записывается в виде  $x = \sum_j \alpha_j e_j$  с  $\alpha_j \in F$ . В свою очередь  $\alpha_j = \sum_i p_{ij} f_i$  с  $p_{ij} \in P$ . Следовательно,  $x = \sum_{i,j} p_{ij} f_i e_j$ , и мы видим, что  $mn$  элементов  $f_i e_j$  линейно порождают  $K$  над  $P$ . Предположим наличие линейной зависимости  $\sum_{i,j} p_{ij} f_i e_j = 0$  при некоторых  $p_{ij} \in P$ . Тогда

$$0 = \sum_{i,j} p_{ij} f_i e_j = \sum_j \left( \sum_i p_{ij} f_i \right) e_j \implies \sum_i p_{ij} f_i = 0 \implies p_{ij} = 0$$

для всех  $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ , поскольку  $e_1, \dots, e_n$  линейно независимы над  $F$ , а  $f_1, \dots, f_m$  линейно независимы над  $P$ . Стало быть,  $mn$  элементов  $f_i e_j$  составляют базис векторного пространства  $K/P$  и  $[K : P] = nm = [K : F][F : P]$ .

Обратно неравенство  $[K : P] < \infty$  влечёт конечность  $[F : P]$ , поскольку  $F/P$  - подпространство пространства  $K/P$ . Если  $(a_1, \dots, a_r)$  -  $P$ -базис для  $K$ , то произвольный элемент  $x \in K$  будет линейной комбинацией  $a_1, \dots, a_r$  с коэффициентами в  $P$  и тем более с коэффициентами в  $F$ . Над  $F$  число линейно независимых элементов среди  $a_1, \dots, a_r$  может лишь уменьшиться. Таким образом,  $[K : F] < \infty$ .

Следствие. Пусть  $F$  - расширение поля  $P$ ,  $A$  - множество всех тех элементов из  $F$ , которые алгебраичны над  $P$ . Тогда  $A$  - подполе в  $F$ , содержащее  $P$ .

Д оказ а т е л ь с т в о. Каждый элемент  $t \in P$  является корнем линейного многочлена  $X - t \in P[X]$ , так что  $P \subset A$ . Пусть, далее,  $u, v \in A$ . Тогда по теореме 1 имеем  $[P(u) : P] < \infty$ . Элемент  $v$ , алгебраический над  $P$ , будет алгебраическим и над  $P(u)$ , т.е.

$$[P(u, v) : P(u)] = [P(u)(v) : P(u)] < \infty.$$

Согласно теореме 2

$$[P(u, v) : P] = [P(u, v) : P(u)][P(u) : P] < \infty$$

Так как  $u - v, uv \in P(u, v)$ , то снова по теореме 1 имеем  $u - v, uv \in A$ , т.е.  $A$  - подкольцо в  $F$ . Оно является полем, поскольку

$$0 \neq u \in A \implies [P(u^{-1}) : P] = [P(u) : P] < \infty.$$

Расширение  $F \supset P$  называется алгебраическим над  $P$ , если все элементы из  $F$  алгебраичны над  $P$ . Каждый элемент  $\alpha$  алгебраического расширения является корнем некоторого отличного от нуля нормализованного (т. е. со старшим коэффициентом 1) многочлена  $f \in P[X]$ , зависящего от  $\alpha$ . Если  $f(\alpha) = 0$  и  $g(\alpha) \neq 0$  для любого  $0 \neq g \in P[X]$  с  $\deg g < \deg f$ , то  $f = f_\alpha$  называется минимальным многочленом элемента  $\alpha$ . Минимальный многочлен неприводим над  $P$ , однозначно определён и его степень совпадает со степенью элемента  $\alpha$  (часто многочлен, получающийся из минимального умножением на константу, также называется минимальным). Все различные корни многочлена  $f_\alpha$  считаются сопряжёнными  $\alpha$ . Объяснение этой терминологии даёт ниже теорема 3. Если  $\text{char } P = 0$ , то число различных корней совпадает с  $\deg f_\alpha$  (см. [BA I, гл. 6]), но в общем случае это не так (см. упр. 4 и 5).

Согласно полученным результатам расширение  $F \supset P$  конечной степени  $[F : P]$  является конечным алгебраическим, т. е. оно получается из  $P$  присоединением конечного числа алгебраических элементов  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Обратно: всякое конечное алгебраическое расширение  $F = P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  имеет конечную степень. В самом деле,  $f_k(\alpha_k) = 0, 1 \leq k \leq m, f_k \in P[X]$ . Элемент  $\alpha_k$ , алгебраический над  $P$ , будет, естественно, алгебраическим и над  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$ . Значит,  $[P(\alpha_1, \dots, \alpha_k) : P(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})] < \infty$  и в соответствии с теоремой 2

$$\begin{aligned} [F : P] &= [P(\alpha_1, \dots, \alpha_m) : P] = \\ &= \prod_{k=1}^m [P(\alpha_1, \dots, \alpha_k) : P(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})] < \infty. \end{aligned}$$

П р и м е р. Поле  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$  четырёхмерно:  $F = \langle 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6} \rangle_{\mathbb{Q}}$ , т. е. каждый элемент  $\alpha \in F$  записывается в виде линейной комбинации  $\alpha = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$  с рациональными координатами  $a, b, c, d$ . С другой стороны,

$$F = \langle 1, \theta, \theta^2, \theta^3 \rangle_{\mathbb{Q}}, \quad \text{где} \quad \theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Действительно,

$$\sqrt{2} = -\frac{9}{2}\theta + \frac{1}{2}\theta^3, \quad \sqrt{3} = \frac{11}{2}\theta - \frac{1}{2}\theta^3, \quad \sqrt{6} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\theta^2$$

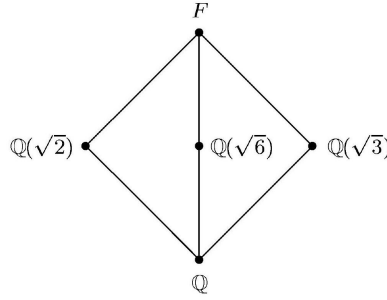
Примитивный элемент  $\theta$  имеет минимальный многочлен  $f_\theta(X) = X^4 - 10X^2 + 1$  с корнями

$$\begin{aligned}\theta^{(1)} &= \theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}, & \theta^{(2)} &= \sqrt{2} - \sqrt{3}, \\ \theta^{(3)} &= -\sqrt{2} + \sqrt{3}, & \theta^{(4)} &= -\sqrt{2} - \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Обратим внимание на тот факт, что  $F$  является полем разложения многочлена  $f_\theta(X)$ , причём

$$F = \mathbb{Q}(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}) = \mathbb{Q}(\theta^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

В общей теории Галуа такое поле было бы названо нормальным. Диаграмма подполей поля  $F$



похожа на диаграмму подгрупп четверной группы  $V_4$ , и это не случайно. Если мы рассмотрим произвольный автоморфизм  $\Phi : F \rightarrow F$ , то из соотношений

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y), \quad \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y) \quad \forall x, y \in F$$

следует, что  $\Phi$  полностью определяется своим действием на примитивный элемент  $\theta$ . Далее,  $\Phi(a) = a \forall a \in \mathbb{Q}$ , поэтому

$$\Phi(\theta)^4 - 10\Phi(\theta)^2 + 1 = \Phi(\theta^4 - 10\theta^2 + 1) = \Phi(0) = 0.$$

Значит,  $\Phi(\theta)$  - один из корней  $\theta^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , и мы приходим к заключению, что группа всех автоморфизмов  $\text{Aut}(F/\mathbb{Q})$ , называемая также группой Галуа  $G(F/\mathbb{Q})$  или  $G(f_\theta)$ , имеет порядок  $4 = [F : \mathbb{Q}]$ . Групп порядка 4 с точностью до изоморфизма всего две: циклическая  $Z_4$  и  $Z_2 \times Z_2 \cong V_4$ . Непосредственные вычисления показывают, что  $\text{Aut}(F/\mathbb{Q}) \cong V_4$ .

Легче всего в этом убедиться, рассмотрев представление  $\text{Aut}(F/\mathbb{Q})$  перестановками на множестве  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ , элементами которого нумеруются корни  $\theta^{(i)}$ . Если, например,  $\Phi(\theta^{(1)}) = \theta^{(2)}$ , то

$$\begin{aligned}\theta^{(1)}\theta^{(2)} &= -1 \implies \theta^{(2)}\Phi(\theta^{(2)}) = -1 \implies \\ &\implies \Phi(\theta^{(2)}) = \theta^{(1)}, \quad \Phi(\theta^{(3)}) = -\Phi(\theta^{(2)}) = -\theta^{(1)} = \theta^{(4)}\end{aligned}$$

т.е.  $\Phi \approx (12)(34) = \sigma$ . Аналогично получаются автоморфизмы  $(13)(24) = \tau$  и  $(14)(23) = \sigma\tau$ .

Остаётся добавить к сказанному, что циклическая подгруппа  $\langle \sigma \rangle$  оставляет поэлементно неподвижным промежуточное подполе  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  и  $\langle \sigma \rangle$  является группой  $G = F/(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$  всех автоморфизмов (группой Галуа) поля  $F$  относительно подполя  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ . Аналогично, полями инвариантов для  $\langle \tau \rangle$  и  $\langle \sigma\tau \rangle$  служат соответственно  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  и  $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ , а группами Галуа  $G = F/(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ ,  $G = F/(\mathbb{Q}(\sqrt{6}))$  будут в свою очередь  $\langle \tau \rangle$  и  $\langle \sigma\tau \rangle$ . Мы проверили на частном примере справедливость биективного соответствия Галуа между подполями нормального поля  $F$  и подгруппами его группы автоморфизмов.

Н) Изоморфизм полей разложения. В 11 гл. 4, где определено и построено поле разложения  $F$  над  $P$  нормализованного многочлена, отмечалось, что в построении имеются элементы произвола. Повторяя сейчас эту конструкцию, мы могли бы лишь сказать, что  $[F : P] \leq n!$  (постарайтесь понять, почему). Но на самом деле все поля разложения над  $P$  данного многочлена  $f$  изоморфны. Чтобы уточнить это высказывание, рассмотрим несколько более общую ситуацию. Согласно теореме 3§2, гл. 5 из [BA I] любое изоморфное отображение  $\varphi$  поля  $P$  на поле  $\tilde{P}$  продолжается единственным образом до изоморфизма  $P[X]$  на  $\tilde{P}[X]$ , так что

$$\begin{aligned} f(X) = x^n + a_1 X_{n-1} + \dots + a_n &\mapsto \tilde{f}(X) = \varphi_X f = \\ &= X^n + \varphi(a_1) X^{n-1} + \dots + \varphi(a_n). \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть  $\varphi : P \rightarrow \tilde{P}$  - изоморфизм полей;  $f \in P[X]$  - нормализованный многочлен степени  $n > 0$ ,  $\tilde{f} = \varphi_X f$  его образ при изоморфизме  $\varphi_X$ ;  $F, \tilde{F}$  - поля разложения многочленов  $f, \tilde{f}$  над  $P$  и над  $\tilde{P}$  соответственно. Тогда  $\varphi$  продолжается до изоморфизма  $\Phi : F \rightarrow \tilde{F}$   $k \leq [F : P]$  способами, причём  $k = [F : P]$ , если все корни многочлена  $f(X)$  различны.

Доказательство. Этап I. Вначале рассмотрим случай произвольных расширений  $K \supset P, \tilde{K} \supset \tilde{P}$ . Пусть  $\theta \in K$  - алгебраический элемент с минимальным многочленом  $g = g_\theta \in P[X]$ . Утверждается, что изоморфизм  $\varphi : P \rightarrow \tilde{P}$  продолжается до мономорфизма  $\rho : P(\theta) \rightarrow \tilde{K}$  в точности тогда, когда  $\tilde{g}$  обладает корнем в  $\tilde{K}$ , причём число продолжений совпадает с числом различных корней многочлена  $\tilde{g}$  в  $\tilde{K}$ .

Действительно, из существования  $\rho$  следует, что элемент  $\rho(\theta)$  должен быть корнем  $\tilde{g}$ :

$$g(\theta) = 0 \implies \tilde{g}(\rho(\theta)) = \rho(g(\theta)) = 0$$

Обратно: если  $g(\omega) = 0$ , то  $\text{Ker } \psi \supset g(X)P[X]$ , где  $\psi : P[X] \rightarrow \tilde{K}$  - гомоморфизм, определённый соответствием  $u(X) \mapsto \tilde{u}(\omega)$ . Как и в случае групп,  $\psi$  индуцирует гомоморфизм

$$\bar{\psi} : P[X]/g(X)P[X] \rightarrow \tilde{K}$$

$(u(X) + g(X)P[X]) \mapsto \tilde{u}(\omega)$ ; если это не совсем ясно, то нужно снова обратиться к результатам гл. 4). Заметим, что ввиду неприводимости  $g(X)$  факторкольцо  $P[X]/g(X)P[X]$  - поле, так что  $\bar{\psi}$  - мономорфизм. Точно таким же способом определяется изоморфизм полей  $\bar{\sigma} : P[X]/g(X)P[X] \rightarrow P(\theta)$   $(u(X) + g(X)P[X]) \mapsto u(\theta)$ . Композиция  $\rho = \bar{\psi} \circ \bar{\sigma}^{-1}$  является мономорфным отображением  $P(\theta)$  в  $\tilde{K}$  ( $\rho(u(\theta)) = \tilde{u}(\omega)$ ). Так как  $P(\theta)$  порождается над  $P$  элементом  $\theta$ , то  $\rho$  - единственное продолжение  $\varphi$ , переводящее  $\theta$  в  $\omega$ . Это и означает, что число различных мономорфизмов  $\rho$  с ограничением  $\rho|_P = \varphi$  равно числу различных корней многочлена  $\tilde{g}(X)$  в  $\tilde{K}$ .

тап II. Поле разложения строилось последовательным присоединением корней неприводимых многочленов. Используем далее индукцию по размерности  $[F : P]$ . При  $[F : P] = 1$  многочлен  $f$  разлагается на линейные множители уже в  $P[X]$ :  $f(X) = (X - c_1) \dots (X - c_n)$ . В таком случае  $\tilde{f}(X) = (\varphi_X f)(X) = (X - \tilde{c}_1) \dots (X - \tilde{c}_n)$ . Корни  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$  многочлена  $\tilde{f}$  содержатся в  $\tilde{P}$ , а поскольку  $\tilde{F}$  порождается ими над  $\tilde{P}$ , то  $\tilde{F} = \tilde{P}$ , так что  $\Phi = \varphi_X$  - единственное продолжение.

При  $[F : P] > 1$  разложим  $f(X)$  над  $P$  на нормализованные неприводимые множители, среди которых должен быть хотя бы один многочлен степени  $m > 1$ . Обозначим его  $g(X)$ . Так как

$$f(X) = g(X)h(X) \implies \tilde{f}(X) = (\varphi_X f)(X) = \tilde{g}(X)\tilde{h}(X)$$

то над полями разложения  $F$  и  $\tilde{F}$  имеют место разложения многочленов

$$\begin{aligned} g(X) &= (X - \theta_1) \dots (X - \theta_m), \\ \tilde{g}(X) &= (X - \omega_1) \dots (X - \omega_m), \quad m \leq n. \end{aligned}$$

Ввиду неприводимости  $g(X)$  является минимальным многочленом элемента  $\theta_1$  над  $P$  и  $[P(\theta_1) : P] = m$ .

Если среди  $\omega_1, \dots, \omega_m$  имеется  $l$  различных, то согласно этапу 1 найдётся  $l$  мономорфных отображений  $\rho_1, \dots, \rho_l$  расширения  $L = P(\theta_1)$  в  $\tilde{F}$  с ограничением  $\rho_i|_P = \varphi$ . Конструкция поля разложения такова, что  $F$  можно считать полем разложения над  $L$  многочлена  $f \in L[X]$ , а  $\tilde{F}$  можно считать полем разложения над  $\rho_i(L)$  многочлена  $\tilde{f}(X)$  при любом  $i = 1, 2, \dots, l$ . По теореме 2 имеем неравенство

$$[F : L] = \frac{[F : P]}{m} < F : P$$

так что по предположению индукции каждый из  $\rho_i$  можно продолжить до изоморфизма  $\Phi_{i,j} : F \longrightarrow \tilde{F}$ , причём число таких продолжений (число индексов  $j$ ) не превосходит  $[F : L]$  и равно этой верхней границе, если все корни в  $\tilde{F}$  многочлена  $\tilde{f}$  различны. Так как

$$\Phi_{i,j}|_L = \rho_i, \quad 1 \leq j \leq [F : L], \quad \rho_i|_P = \varphi$$

то  $\Phi_{i,j}$  - продолжение  $\varphi$ , причём

$$\rho_i \neq \rho_s \implies \Phi_{i,j} \neq \Phi_{s,t} \text{ при } i \neq s.$$

Стало быть, всего получается  $k \leq m[F : L] = [F : P]$  продолжений изоморфизма  $\varphi$ . Это неравенство переходит в равенство, если все корни многочлена  $\tilde{f}$  различны.

Э т а п III. Пусть, наконец,  $\Phi : F \longrightarrow \tilde{F}$  - произвольное продолжение изоморфизма  $\varphi$ . Как и в этапе II, ограничение  $\Phi|_L$ , будучи мономорфным отображением  $L$  в  $\tilde{F}$ , совпадает с одним из  $\rho_i$ , а в таком случае  $\Phi$  совпадает с одним из  $\Phi_{i,j}$ .

Следствие 1. Любые два поля разложения  $F, \tilde{F}$  над  $P$  многочлена  $f \in P[X]$  изоморфны.

Действительно, достаточно положить  $\tilde{P} = P$  в теореме 3 и взять за  $\varphi$  единичное отображение поля  $P$  на себя.

Следствие 2. Группа автоморфизмов  $\text{Aut } F/P$  любого поля разложения  $F$  над  $P$  многочлена  $f \in P[X]$  конечна и имеет порядок  $\leq [F : P]$ . Если все корни многочлена  $f(X)$  различны, то  $|\text{Aut } F/P| = [F : P]$ .

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3.

З а м е ч а н и е. Хотя поле разложения  $F$  над  $\mathbb{Q}$  (или над любым другим числовым полем) многочлена  $f \in \mathbb{Q}[X]$  можно считать вложенным в поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел и тем самым однозначно определённым, следствие 2 показывает, что и в этом случае имело смысл разобрать доказательство теоремы 3.

Расширение  $\bar{P}/P$  называется алгебраическим замыканием поля  $P$ , если оно алгебраично и поле  $\bar{P}$  алгебраически замкнуто. Сравнительно нетрудно доказать, что всякое поле  $P$  обладает алгебраически замкнутым расширением, однозначно определённым с точностью до  $P$ -изоморфизма. Любое алгебраическое расширение  $F/P$  можно вложить  $\leq [F : P]$  способами в алгебраическое замыкание  $\bar{P}$  поля  $P$ .

**N)** Существование примитивного элемента. Многочлен из  $P[X]$  называется сепарабельным, если его неприводимые множители имеют различные корни. Поле  $P$

называется совершенным, коль скоро каждый многочлен  $f \in P[X]$  сепарабельный. Понятно, что любое поле  $P$  нулевой характеристики будет совершенным. С другой стороны, верна

Теорема 4. Пусть  $P$  - поле характеристики  $p > 0$ . Тогда  $P$  будет совершенным в точности при  $P = P^p$  (множество  $p$ -х степеней всех элементов из  $P$ ).

Доказательство. Если  $P^p \subsetneq P$  и  $a \in P \setminus P^p$ , то многочлен  $X^p - a$  неприводим (см. ниже упр. 4). Кроме того,  $(X^p - a)^p = pX^{p-1} = 0$ , так что  $X^p - a$  - несепарабельный многочлен, а значит,  $P$  - несовершенное поле.

Обратно: предположим, что  $f(X)$  - несепарабельный неприводимый многочлен в  $P[X]$ , т.е.  $(f, f') \neq 1$ . Тогда  $f(X) = a_0 + a_p X^p + a_{2p} X^{2p} + \dots$ . Если  $a_i = b_i^p$  для любого  $i$ , то  $f(X) = (b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots)^p$  - противоречие с неприводимостью  $f(X)$ . Следовательно,  $a_i \notin P^p$  для некоторого  $i$ , а поэтому  $P^p \neq P$ .

Конечное алгебраическое расширение  $F \supset P$ , получающееся присоединением к  $P$  конечного числа сепарабельных элементов (корней неприводимых сепарабельных многочленов), называется сепарабельным расширением. Если не привлекать к рассмотрению алгебраические замыкания  $\bar{P}$  поля  $P$ , то можно ограничиться полями алгебраических чисел, вложенными по определению в  $\mathbb{C}$ .

Теорема 5. Пусть  $F$  - конечное расширение поля  $P$ . Прimitивный элемент  $\theta \in F$  (когда  $F = P(\theta)$ ) существует в точности тогда, когда число промежуточных полей  $E (F \supset E \supset P)$  конечно.  $E/F$  сепарабельно над  $P$ , то примитивный элемент  $\theta$  существует.

Доказательство. Для конечного поля  $P$  всё ясно, поскольку  $F^* = \langle \theta \rangle$ , и  $\theta$  будет примитивным элементом. Считаем  $P$  бесконечным.

Предположим сначала, что число промежуточных полей конечно. Пусть  $\alpha, \beta \in F$ . Заставив  $s$  пробегать по элементам из  $P$ , мы получим по условию лишь конечное число полей типа  $P(\alpha + c\beta)$ . Следовательно, найдутся  $c_1, c_2 \in P, c_1 \neq c_2$ , такие, что

$$E := P(\alpha + c_1\beta) = P(\alpha + c_2\beta).$$

Заметим, что

$$\alpha + c_1\beta, \alpha + c_2\beta \in E \implies (c_1 - c_2)\beta \in E \implies \beta \in E \implies \alpha \in E$$

т.е.  $P(\alpha, \beta) = E = P(\alpha + c_1\beta)$ . Действуя по индукции, приходим к выводу, что если  $F = P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , то найдутся  $c_2, \dots, c_n \in P$ , для которых

$$F = P(\theta), \quad \theta = \alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$$

Это доказывает половину первого утверждения.

Обратно: предположим, что  $F = P(\theta)$  для некоторого  $\theta$  и  $f = f_\theta(X)$  - минимальный многочлен для  $\theta$ . Пусть  $P \subset E \subset F$ , и пусть  $g_{E,\theta}$  - минимальный многочлен для  $\theta$  над  $E$ . Очевидно,  $g_{E,\theta}$  делит  $f_\theta$ . Но  $F[X]$  - факториальное кольцо; любой нормализованный многочлен из  $F[X]$ , делящий  $f(X)$ , равен произведению некоторого числа множителей  $X - \alpha_i$ , где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - корни  $f$ . Следовательно, имеется лишь конечное число таких многочленов. Мы получаем отображение  $E \mapsto g_E$  из множества промежуточных полей в конечное множество многочленов.

Пусть  $E_0$  - подполе в  $E$ , порождённое над  $P$  коэффициентами в  $g_E(X)$ . Тогда  $g_E$  имеет коэффициенты в  $E_0$  и является неприводимым над  $E_0$ , поскольку он неприводим над  $E$ . Стало быть, степень элемента  $\theta$  над  $E_0$  совпадает со степенью  $\theta$  над  $E$ , а это даёт равенство  $E = E_0$ . Таким образом, наше поле  $E$  однозначно определяется ассоциированным с ним многочленом  $g_E$ . Поэтому отображение  $E \mapsto g_E$  инъективно. Это завершает доказательство первого утверждения теоремы.



Что касается утверждения относительно сепарабельных расширений, то, действуя по индукции, мы можем без потери общности предполагать, что  $F = P(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha, \beta$  сепарабельны над  $P$ . Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  - различные вложения  $P(\alpha, \beta)$  в алгебраическое замыкание  $\bar{P}$  поля  $P$ . Положим

$$f(X) = \prod_{i \neq j} (\varphi_i \alpha + X \varphi_i \beta - \varphi_j \alpha - X \varphi_j \beta)$$

Тогда  $f(X) \neq 0$ , и поэтому найдётся  $c \in P$ , для которого  $f(c) \neq 0$ . Элементы  $\varphi_i(\alpha + c\beta)$  при  $i = 1, \dots, n$  различны, откуда следует, что  $[P(\alpha + c\beta) : P] \geq n$ . Но  $[P(\alpha, \beta) : P] = n$ , поэтому

$$P(\alpha, \beta) = P(\alpha + c\beta)$$

Другими словами,  $\theta = \alpha + c\beta$  - примитивный элемент.

## 12.4.2 End Fields

### Theory

**N) Существование и единственность.** Помимо  $Z_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , нам встречались и другие примеры конечных полей. Настало время включить их в общую теорию. Первые очевидные замечания относятся к произвольному конечному расширению конечного поля.

**Предложение 1.** Пусть  $F$  - поле с числом элементов  $q$  и  $K \supset F$  - расширение степени  $[K : F] = n$ . Тогда  $|K| = q^n$ .

**Доказательство.** Действительно, после выбора базиса векторное пространство  $K$  над  $F$  отождествляется с пространством  $F^n$  строк  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  длины  $n$ . Все координаты  $\alpha_i$  независимо друг от друга принимают  $q$  значений из  $F$ . Значит,  $|K| = |F^n| = q^n$ .  
**Предложение 2.** Любое конечное поле  $F$  имеет конечную характеристику  $p$  ( $p$  - простое число) и  $|F|$  является степенью  $p$ .

**Доказательство.** В самом деле, простое подполе  $P \subset F$  в силу конечности  $F$  должно быть изоморфно некоторому полю  $Z_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Согласно предложению 1 конечное расширение  $F \supset P$  с  $|P| = p$  имеет мощность  $|F| = p^m$ .

**Теорема 1.** Для каждого конечного поля  $F$  и для каждого целого положительного числа  $n$  существует одно и, с точностью до изоморфизма, только одно расширение  $K \supset F$  степени  $[K : F] = n$ .

**Доказательство. Единственность.** Пусть  $K \supset F$  - расширение степени  $n$ . Согласно предложению 2  $|F| = q \implies q = p^m$ ,  $p$  простое и  $|K| = q^n$ . Следовательно, мультипликативная группа  $K^* = K \setminus \{0\}$  имеет порядок  $q^n - 1$ , а порядок каждого её элемента по теореме Лагранжа делит  $q^n - 1 : t^{q^n-1} = 1 \forall t \neq 0$ . Это значит, что все элементы поля  $K$  (включая  $t = 0$ ) являются различными корнями многочлена  $X^{q^n} - X$  и имеет место разложение

$$X^{q^n} - X = \prod_{t \in K} (X - t)$$

Ни над каким собственным подполем поля  $K$  с числом элементов  $< q^n$  такого разложения на линейные множители быть не может, поэтому  $K$  - поле разложения многочлена  $X^{q^n} - X$ . Обращаясь к следствию 1 теоремы 3 из §1, мы приходим к требуемому заключению.

**Существование.** Рассуждения при доказательстве единственности подсказывают возможный путь построения  $K$ . Возьмём за  $K$  поле разложения над  $P \cong Z_p$  многочлена

$f(X) = X^{q^n} - X$ . Так как  $q = p^m$ , то  $q \cdot 1 = 0$  в  $K$ . Поэтому  $f'(X) = q^n \cdot 1 \cdot X^{q^n-1} - 1 = -1$  и по известному критерию [BA I, гл. 6, §1, теорема 4]  $f(X)$  не имеет кратных корней. Это значит, что подмножество  $K_f \subset K$  корней многочлена  $f(X)$  имеет мощность  $|K_f| = q^n$ .

Так как  $K_f \subset K$  и  $\text{char } K = p$ , то согласно [BA I, гл. 4, §3, упр. 6]  $(x+y)^{p^s} = x^{p^s} + y^{p^s}$  для любых  $x, y \in K_f$  и  $s = 0, 1, 2, \dots$  (отметим, что  $F \subset K_f$ ). В частности,

$$x, y \in K_f \implies (x \pm y)^{q^n} = x^{q^n} \pm y^{q^n} = x \pm y \implies x \pm y \in K_f$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} 1 \in K_f; \quad (xy)^{q^n} &= x^{q^n} y^{q^n} = xy \implies xy \in K_f \\ 0 \neq x \in K_f &\implies (x^{-1})^{q^n} = x^{-1} \implies x^{-1} \in K_f. \end{aligned}$$

Таким образом,  $K_f$  - подполе в  $K$ , содержащее  $F$  и все корни многочлена  $f(X)$ . В соответствии с определением поля разложения должно выполняться равенство  $K_f = K$ . Степень  $[K : F]$  равна  $n$ , поскольку  $q^{[K:F]} = |K| = |K_f| = q^n$ .

Следствие. Для каждого простого числа  $p$  и для каждого целого положительного числа  $n$  существует одно и, с точностью до изоморфизма, только одно поле с числом элементов  $p^n$ .

Доказательство заключается в применении теоремы 1 к частному случаю  $|F| = p$ .

Н) Подполя и автоморфизмы конечного поля. Как уже отмечалось в [BA I, гл. 4, §3], конечное поле с числом элементов  $q = p^n$  принято обозначать символом  $\mathbb{F}_q$  или, в честь Э. Галуа, символом  $GF(p^n)$ . Установим ряд свойств конечных полей.

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения.

- i) Мультипликативная группа  $F_q^*$  конечного поля  $\mathbb{F}_q$  является циклической группой порядка  $q - 1$ .
- ii) Группа автоморфизмов  $\text{Aut } \mathbb{F}_q$  конечного поля  $\mathbb{F}_q$  с числом элементов  $q = p^n$  циклическая порядка  $n$ , причём

$$\text{Aut } \mathbb{F}_q = \langle \Phi | \Phi(t) = t^p \quad \forall t \in \mathbb{F}_q \rangle$$

iii) Если  $\mathbb{F}_{p^d}$  - подполе поля  $\mathbb{F}_{p^n}$ , то  $d \mid n$ . Обратно: каждому делителю  $d$  числа  $n$  отвечает ровно одно подполе  $\{t \in \mathbb{F}_{p^n} \mid \Phi^d(t) = t\} = \mathbb{F}_{p^d}$ . Автоморфизмы, оставляющие это подполе поэлементно неподвижным, образуют группу  $\text{Aut } (\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_{p^d}) = \langle \Phi^d \rangle$ . Таким образом, имеется биективное соответствие между подполями конечного поля  $\mathbb{F}_q$  и подгруппами его группы автоморфизмов (соответствие Галуа).

iv)  $q = p^n$  и  $\mathbb{F}_q^* = \langle \theta \rangle$ , то  $\theta$  - примитивный элемент поля с минимальным многочленом  $h(X)$  степени  $n$  и  $\mathbb{F}_q$  - поле разложения над  $\mathbb{F}_p$  многочлена  $h(X)$ .

v) Для любого натурального числа  $m$  существует хотя бы один неприводимый многочлен степени  $m$  над  $\mathbb{F}_q$ .

Доказательство. i) См. теорему 11 из 3 гл. 2.

ii) Будем смотреть на  $\mathbb{F}_q$  как на конечное расширение  $\mathbb{F}_q \supset \mathbb{F}_p$  степени  $n$  своего простого подполя  $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}_p$ . Так как  $\mathbb{F}_q$  - поле разложения многочлена  $X^q - X$ , все корни которого различны, то согласно следствию 2 теоремы 3 из §1  $|\text{Aut } \mathbb{F}_q| = n$ . Из соотношений  $(x+y)^p = x^p + y^p$ ,  $(xy)^p = x^p y^p$ ,  $1^p = 1$ , отмеченных в ходе доказательства теоремы 1, видно, что отображение  $\Phi : t \mapsto t^p$  является автоморфизмом поля  $\mathbb{F}_q$  (конечность  $\mathbb{F}_q$  существенна). Если  $\Phi^s : t \mapsto t^{p^s}$  - единичный автоморфизм, то  $t^{p^s} - t = 0$  для всех  $t \in \mathbb{F}_q$ , откуда следует неравенство  $s \geq n$ . Но при  $s = n$  мы действительно получаем единичный автоморфизм, так что  $|\langle \Phi \rangle| = n$  и  $\langle \Phi \rangle = \text{Aut } \mathbb{F}_q$ .

iii) Согласно предложению 1  $p^n = (p^d)^r$ , где  $r$  - степень расширения  $\mathbb{F}_{p^n} \supset \mathbb{F}_{p^d}$ . Поэтому  $n = dr$ . Обратно: для любого  $d|n$  введём подмножество  $F = \{t \in \mathbb{F}_{p^n} | t^{p^d} = t\}$ . Так как  $n = dr \implies p^n - 1 =$

$$\begin{aligned} &= (p^d)^r - 1 = (p^d - 1)k, \text{ то} \\ X^{p^n-1} - 1 &= X^{(p^d-1)k} - 1 = (X^{p^d-1} - 1)g(X) \\ X^{p^n} - X &= (X^{p^d} - X)g(X) \end{aligned}$$

Так как  $\mathbb{F}_{p^n}$  - поле разложения многочлена  $X^{p^n} - X$ , то ровно  $p^d$  элементов из  $\mathbb{F}_{p^n}$  будут корнями многочлена  $X^{p^d} - X$ . Из них как раз и состоит подмножество  $F$ , которое можно теперь отождествить с  $\mathbb{F}_{p^d}$ . Этим рассуждением, дуальным теореме 1, устанавливается также единственность подполя с  $p^d$  элементами.

Заметим, что по построению

$$\mathbb{F}_{p^d} = \{t \in \mathbb{F}_{p^n} | \Phi^d(t) = t\}$$

**N)**множество всех элементов, остающихся на месте при действии  $\langle \Phi^d \rangle$ . Так как группа  $\text{Aut}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) = \langle \Phi \rangle$  циклическая, то непосредственно видно, что любой автоморфизм  $\Phi^l$ , не принадлежащий  $\langle \Phi^d \rangle$ , действует на  $\mathbb{F}_{p^d}$  неединичным образом (достаточно применить  $\Phi^l$  к образующей группы  $\mathbb{F}_{p^d}^*$ ). Это и означает, что группа относительных автоморфизмов  $\text{Aut}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_{p^d})$  совпадает с  $\langle \Phi^d \rangle$ . Заключительная фраза в утверждении iii) имеет тот же смысл, что и в примере п. 1.

iv) Совершенно очевидно, что  $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\theta)$ ,  $q = p^n$ . Пусть  $h(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$  - минимальный многочлен примитивного элемента  $\theta$ . Так как элементы простого подполя  $\mathbb{F}_p$  неподвижны при всех автоморфизмах, а  $a_i \in \mathbb{F}_p$ , то, стало быть, корнями  $h(X)$  являются  $\theta, \theta^p, \theta^{p^2}, \dots, \theta^{p^{n-1}}$ . Все они содержатся в нашем поле и

$$\mathbb{F}_p(\theta, \dots, \theta^{p^{n-1}}) = \mathbb{F}_p(\theta) = \mathbb{F}_{p^n}$$

**N)**поле разложения над  $\mathbb{F}_p$  многочлена  $h(X)$ .

v) Опираясь на теорему 1, построим расширение  $K \supset \mathbb{F}_q$  степени  $m$ . Согласно i)  $K^*$  - циклическая группа. Если  $K^* = \langle \theta \rangle$  и  $h(X)$  - минимальный многочлен примитивного элемента  $\theta$ , то  $K = \mathbb{F}_q(\theta)$  и  $\deg h(X) = [\mathbb{F}_q(\theta) : \mathbb{F}_q] = [K : \mathbb{F}_q] = m$ . Минимальный многочлен по определению неприводим (над  $\mathbb{F}_q$ ), поэтому мы имеем то, что нужно.

После несложных теоретико-числовых приготовлений мы получим точную формулу для числа неприводимых многочленов степени  $m$  над  $\mathbb{F}_q$ .

**N)**Формула обращения Мёбиуса и ее применения. Теоретико-числовая функция  $\mu$ , определённая правилами

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \dots p_k, p_i \text{ различные простые} \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат } > 1, \end{cases}$$

называется функцией Мёбиуса. Ясно, что  $\mu$ -мультипликативная функция в том смысле, что  $\mu$  не равна тождественно нулю и  $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$  для любых взаимно простых  $m$  и  $n$ . Ясно также, что если  $n = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ , то

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n_0} \mu(d)$$

где  $n_0 = p_1 \dots p_r$  - свободный от квадратов максимальный делитель числа  $n$ . В свою очередь число делителей  $d = p_{i_1} \dots p_{i_s}$  числа  $n_0$  с фиксированным  $s$  равно  $\binom{r}{s}$ . Таким образом, при  $n > 1$  имеем

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n_0} \mu(d) = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^s = (1-1)^r = 0$$

(суммирование в левой части ведётся по всем делителям  $d \geq 1$  целого числа  $n$ ). Окончательно получаем формулу

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1 \\ 0, & \text{если } n > 1 \end{cases}$$

Полезна также её модификация

$$\sum_{d|n|m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } d = m, \\ 0, & \text{если } d|m, d < m \end{cases}$$

(суммирование ведётся по  $n$ , делящим  $m$  и делящимся на  $d$ ). Положив  $m = dt, n = dl$  и заставив  $l$  пробегать делители числа  $t$ , мы легко перейдём от (2) к (1), и обратно.

Формулу (1) (или (2)) можно было бы взять за определение функции Мёбиуса по индукции. Её ценность для нас заключена в следующем утверждении.

Пусть  $f$  и  $g$  - две произвольные функции из  $\mathbb{N}$  в  $M$  ( $M$  равно  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, F[X]$  и т.д.), свлзанные соотношением

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

Тогда

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$$

В самом деле, с учётом (2) непосредственное суммирование по  $n$ , делящим  $m$ , обеих частей (3), умноженных на  $\mu(m/n)$ , даёт

$$\sum_{n|m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) f(n) = \sum_{n|m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) \sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|m} g(d) \sum_{d|n|m} \mu\left(\frac{m}{n}\right) = g(m)$$

Простая замена обозначений приводит к формуле (4), называемой формулой обращения Мебиуса. Аналогичным образом совершается переход от (4) к (3).

Имеется ещё мультипликативный аналог формулы обращения Мёбиуса: если  $f(n) = \prod_{d|n} g(d)$ , то

$$g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{\mu(n/d)}$$

Для доказательства нужно провести те же формальные выкладки:

$$\begin{aligned} \prod_{n|m} f(n)^{\mu(m/n)} &= \prod_{n|m} \prod_{d|n} g(d)^{\mu(m/n)} = \prod_{d|m} \prod_{d|n|m} g(d)^{\mu(m/n)} = \\ &= \prod_{d|m} g(d)^{\sum_{d|n|m} \mu(m/n)} = g(m) \end{aligned}$$

а затем слегка изменить обозначения.

Приведём три примера на применение формулы обращения Мёбиуса.

**N)** Функция Эйлера  $\varphi$ . По определению  $\varphi(n)$  - число взаимно простых с  $n$  чисел ряда  $1, 2, \dots, n-1$ , или, что равносильно,  $\varphi(n) = |U(Z_n)|$  - порядок группы обратимых элементов кольца  $Z_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Из упр. 5§1 гл. 3 нам известно соотношение

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Непосредственно по формуле (4) получаем

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

Если  $n = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} &= 1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{1}{p_i p_j} - \dots + (-1)^r \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_r} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

**N)** формула, которую мы приводили ещё в [ВА I] и из которой непосредственно вытекает мультипликативность функции  $\varphi$ . 2) Круговые многочлены. Поле разложения  $\Gamma_n$  над  $\mathbb{Q}$  многочлена  $X^n - 1$  называется круговым или циклотомическим. Так как все корни степени  $n$  из 1 образуют циклическую группу порядка  $n$ , то круговое поле имеет вид  $\Gamma_n = \mathbb{Q}(\zeta)$ , где  $\zeta$  - один из примитивных корней ( $\zeta \in \mathbb{C}$ ). Мы хотели бы найти степень  $[\Gamma_n : \mathbb{Q}]$  и минимальный многочлен элемента  $\zeta$  над  $\mathbb{Q}$ .

Обозначим символом  $P_n$  множество мощности  $|P_n| = \varphi(n)$  примитивных корней степени  $n$  из 1. Подгруппы циклической группы порядка  $n$  находятся в биективном соответствии с делителями  $d$  числа  $n$ , а каждый корень  $\zeta^i$  попадает в некоторое множество  $P_d$ . Поэтому имеет место разбиение на непересекающиеся классы:

$$\{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}\} = \bigcup_{d|n} P_d$$

(перейдя к мощностям множеств, мы снова пришли бы к соотношению (6)). Круговым многочленом, отвечающим  $\Gamma_n$ , называется многочлен

$$\Phi_n(X) = \prod_{\zeta} (X - \zeta)$$

степени  $\varphi(n)$ . В соответствии с разбиением (7) мы приходим к разложению

$$X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X - \zeta^i) = \prod_{d|n} \left\{ \prod_{\zeta \in P_d} (X - \zeta) \right\} = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$$

Применяя к (8) мультипликативную формулу обращения Мёбиуса (5), получаем явное выражение для  $\Phi_n$ :

$$\Phi_n(X) = \prod_{d|n} (X^d - 1)^{\mu(n/d)}$$

При небольших значениях  $n$  имеем

$$\begin{aligned}\Phi_1(X) &= X - 1, & \Phi_2(X) &= X + 1, & \Phi_3(X) &= X^2 + X + 1, \\ \Phi_4(X) &= X^2 + 1, & \Phi_6(X) &= X^2 - X + 1, & \Phi_8(X) &= X^4 + 1, \\ \Phi_9(X) &= X^6 + X^3 + 1, & \Phi_{10}(X) &= X^4 - X^3 + X^2 - X + 1, \\ \Phi_{12}(X) &= X^4 - X^2 + 1.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X], \quad \Phi_n(0) = 1, \quad n > 1$$

Чтобы прийти к (10), можно, минуя (9), действовать по индукции. Для небольших  $n$  это проверено, а далее рассуждаем следующим образом. Считая

$$g(X) = \prod_{d|n, d \neq n} \Phi_d(X)$$

нормализованным многочленом с целочисленными коэффициентами и применяя алгоритм деления с остатком (см. [BA I]), мы получаем однозначно определённые многочлены  $q, r \in \mathbb{Z}[X]$  такие, что

$$X^n - 1 = q(X)g(X) + r(X), \quad \deg r(X) < \deg g(X)$$

Но  $X^n - 1 = \Phi_n(X)g(X)$  в  $\mathbb{Q}[X]$ , и мы видим, что  $\Phi_n(X) = q(X) \in \mathbb{Z}[X]$ , причём нормализованность  $g(X)$  влечёт нормализованность  $\Phi_n(X)$ .

Ещё в [BA I] была установлена неприводимость многочлена

$$\Phi_p(X) = (X^p - 1)/(X - 1) = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + 1$$

где  $p$  - произвольное простое число. К вопросу о неприводимости  $\Phi_n(X)$  при любом  $n$  мы вернёмся в следующем параграфе.

**N)** Неприводимые многочлены над  $\mathbb{F}_q$ . Пусть  $\Psi_d(q)$  - общее число неприводимых нормализованных многочленов степени  $d$  над  $\mathbb{F}_q$ ,  $q = p^n$ , и пусть  $f(X)$  - один из этих многочленов. Его поле разложения над  $\mathbb{F}_q$  изоморфно как факторкольцу  $\mathbb{F}_q[X]/(f(X))$ , так и полю разложения многочлена  $X^{q^d} - X$  (следствие теоремы 1). Существование общего корня  $\theta$  у многочленов  $X^{q^d} - X$  и  $f(X)$  влечёт, в силу неприводимости  $f(X)$ , делимость  $X^{q^d} - X$  на  $f(X)$ . Так как  $X^{q^d} - X$  - делитель многочлена  $X^{q^m} - X$  при любом  $m = rd$  и так как  $X^{q^d} - X$  не имеет кратных корней, то мы приходим к выводу, что в разложение  $X^{q^m} - X$  над  $\mathbb{F}_q$  входят все унитарные неприводимые многочлены

$$f_{d,1}, f_{d,2}, \dots, f_{d,\Psi_d(q)}(X)$$

любой степени  $d|m$ , причём ровно по одному разу:

$$X^{q^m} - X = \prod_{d|m} \left\{ \prod_{k=1}^{\Psi_d(q)} f_{d,k}(X) \right\}$$

Вычисление степеней многочленов, стоящих в обеих частях равенства (11), приводит нас к соотношению

$$q^m = \sum_{d|m} d\Psi_m(q)$$

из которого прямым применением формулы обращения Мёбиуса (4) получается выражение для  $\Psi_m(q)$ :

$$\Psi_m(q) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) q^d$$

Пусть, например,  $q = 2$ . Тогда

$$\Psi_2(2) = \frac{1}{2} (2^2 - 2) = 1, \quad \Psi_3(2) = \frac{1}{3} (2^3 - 2) = 2$$

$$\Psi_4(2) = \frac{1}{4} (2^4 - 2^2) = 3, \quad \Psi_5(2) = \frac{1}{5} (2^5 - 2) = 6,$$

$$\Psi_6(2) = \frac{1}{6} (2^6 - 2^3 - 2^2 + 2) = 9.$$

Формула (12) показывает, что с вероятностью, близкой к  $1/m$ , случайно выбранный нормализованный многочлен степени  $m$  над  $\mathbb{F}_q$  окажется неприводимым. Однако нет удовлетворительных критериев неприводимости конкретно взятого многочлена. Что можно сказать, например, о неприводимости трёхчлена  $X^m + X^k + 1$ ? Вопросы такого рода постоянно возникают в алгебраической теории кодирования и при построении псевдослучайных последовательностей.

### 12.4.3 Compliance with Galois Kostrikin 3

#### Avance de resultados.

Пусть  $F \supset P$  - поле разложения некоторого неприводимого над  $P$  многочлена  $f(X)$ ,  $\text{Aut } F/P$  - множество всех автоморфизмов  $\eta$  поля  $F$  таких, что  $\eta(a) = a \forall a \in P$ . Как мы знаем из §1,  $|\text{Aut } F/P| \leq [F : P]$ , причём  $|\text{Aut } F/P| = [F : P]$ , если все корни многочлена  $f$  различны.

Определение. Группу  $\text{Aut } F/P$  принято называть группой Галуа расширения  $F/P$  и обозначать  $\text{Gal } F/P$ . Этот термин уже был использован в ряде мест, включая §1.

В дальнейшем поле  $P$  будет предполагаться совершенным, так что

$$|\text{Gal } F/P| = [F : P]$$

Пусть  $H \subset \text{Gal } F/P$  - любая подгруппа группы Галуа. Положим

$$F^H = \{a \in F \mid \varphi(a) = a \quad \forall \varphi \in H\}$$

Таким образом,  $F^H$  - подполе в  $F$  всех элементов, остающихся неподвижными при действии  $H$ . Имеем два отображения:

N)  $H \mapsto K = F^H$  - из множества подгрупп  $H \subset \text{Gal } F/P$  во множество подполей  $F \supset K \supset P$ ;

N)  $K \mapsto H = \text{Gal } F/K$  - из множества промежуточных подполей  $F \supset K \supset P$  во множество подгрупп  $H \subset \text{Gal } F/P$ . Очевидные свойства:

- i)  $G = \text{Gal } F/P \supset G_1 \supset G_2 \implies F^{G_1} \subset F^{G_2}$ ;
- ii)  $F \supset P_1 \supset P_2 \supseteq P \implies \text{Gal } F/P_1 \subset \text{Gal } F/P_2$ ;
- iii)  $F^{\text{Gal } F/P} \supset P$ ;
- iv)  $\text{Gal } F/F^H \supset H$  для любой подгруппы  $H \subset G$ .

Будем временно понимать под  $K \supset P$  произвольное расширение поля  $P$  (не обязательно поле разложения).

Лемма (Э. Артин). Пусть  $G$  - конечная группа автоморфизмов поля  $K$  и  $P = K^G$ . Тогда

$$[K : P] \leq |G|.$$

Доказательство. Положим  $n = |G|$ . Нам нужно показать, что любые  $m > n$  элементов из  $K$  линейно зависимы над  $P$ . Пусть

$$G = \{\varphi_1 = e, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}, \quad u_1, u_2, \dots, u_m \in K, \quad m > n$$

Однородная система из  $n$  линейных уравнений от  $m$  неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$

$$\sum_{j=1}^m \varphi_i(u_j) x_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

имеет нетривиальное решение  $(a_1, \dots, a_m) \neq (0, \dots, 0)$ . Среди всех решений выбираем такое  $(b_1, \dots, b_m)$ , у которого число ненулевых компонент наименьшее. Без ограничения общности считаем  $b_1 \neq 0$  и даже  $b_1 = 1$ . Достаточно показать, что  $b_j \in K^G \forall j$ , поскольку первое соотношение, отвечающее  $\varphi_1 = e$ , будет иметь вид  $\sum_{j=1}^m u_j b_j = 0$ .

Предположим, что  $b_j \notin P$  для некоторого  $j$ . После возможного переобозначения считаем  $b_j = b_2$ . Применим  $\varphi_k$  к системе уравнений, выбрав  $k$  таким, чтобы  $\varphi_k(b_2) \neq b_2$ . Получим

$$\sum_j (\varphi_k \varphi_i)(u_j) \varphi_k(b_j) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

или, что то же самое,

$$\sum_j \varphi_i(u_j) \varphi_k(b_j) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

поскольку  $\varphi_k \varphi_i, i = 1, \dots, n$ , при фиксированном  $k$  пробегает все элементы группы  $G$ . Следовательно,  $(1, \varphi_k(b_2), \dots, \varphi_k(b_m))$  - тоже решение системы. Вычитая его из  $(1, b_2, \dots, b_m)$ , получим решение

$$(0, b_2 - \varphi_k(b_2), \dots, b_m - \varphi_k(b_m))$$

которое также нетривиально, поскольку  $b_2 - \varphi_k(b_2) \neq 0$  ввиду выбора  $\varphi_k$ . Однако число ненулевых компонент у него меньше, чем у  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ , вопреки выбору последнего. Опрелелени е. Расширение  $F/P$  называется нормальным алгебраическим, если каждый неприводимый многочлен  $f \in P[X]$ , имеющий хотя бы один корень в  $F$ , является произведением линейных множителей в  $F[X]$ . Другими словами,  $F$  содержит поле разложения минимального многочлена  $f_a$  каждого элемента  $a \in F$ .

По определению свойство "нормальность плюс сепарабельность" эквивалентно тому, что каждый неприводимый многочлен из  $P[X]$ , имеющий корень в  $F$ , является произведением различных линейных множителей в  $F[X]$ . Нормальное и сепарабельное алгебраическое расширение  $F \supset P$  называется также расширением Галуа. Если  $F$  - поле разложения многочлена  $f \in P[X]$ , то  $\text{Gal } F/P$  называется также группой Галуа многочлена  $f(X)$  над  $P$  (или уравнения  $f(X) = 0$ ) и обозначается  $\text{Gal}(f)$ .

Теорема 1. Следующие условия на расширение  $F/P$  эквивалентны:

N)  $F$  - поле разложения некоторого сепарабельного многочлена  $f(X)$  над  $P$ ;

N)  $P = F^G$  для некоторой конечной группы  $G \subseteq \text{Aut } F$ ;



**N)**  $F$  - конечномерное нормальное и сепарабельное расширение над  $P$ .

Справедливы также следующие дополнения утверждения 1) и 2):

Д1) если  $F$  и  $P$  такие же, как в 1), и  $G = \text{Gal} F/P$ , то  $P = F^G$ ;

Д2) если  $F$  и  $P$  такие же, как в 2), то  $G = \text{Gal} F/P$ .

Доказательство. 1)  $\implies$  2). Положим в 1)  $G = \text{Gal} F/P$  и  $P' = F^G$ . Тогда  $P'$  - подполе в  $F$ , содержащее  $P$ . Ясно также, что  $F$  - поле разложения над  $P'$  многочлена  $f(X)$ , причём  $G = \text{Gal} F/P'$ .

В силу сепарабельности  $f$  имеем  $|G| = [F : P']$  так же, как  $|G| = [F : P]$ . Но  $F \supset P' \supseteq P \implies [F : P] = [F : P'] [P' : P] \implies [P' : P] = 1 \implies P' = P$ , а это и есть 2). Мы доказали также, что  $P = F^G$  для  $G = \text{Gal} F/P$ , т.е. Д1).

**N)**  $\implies$  3). По лемме Артина

$$P = F^G \implies [F : P] \leq |G|$$

и, таким образом,  $F$  конечномерно над  $P$ . Пусть  $f$  - неприводимый многочлен в  $P[X]$ , имеющий корень  $r \in F$ . Будем считать, что

$$\{r_1 = r, r_2, \dots, r_m\} = \{\varphi(r) | \varphi \in G\}$$

**N)**  $G$ -орбита с представителем  $r$ . Если  $\psi \in G$ , то  $\{\psi(r_1), \dots, \psi(r_m)\}$  - перестановка корней  $r_1, \dots, r_m$ . Разумеется,  $f(r) = 0 \implies f(r_i) = 0$ . Значит,  $f(X)$  делится на  $X - r_i$ , а поскольку  $r_i, 1 \leq i \leq m$ , различны,  $f(X)$  делится на  $g(X) = \prod_{i=1}^m (X - r_i)$ .

Применим к  $g(X)$  автоморфизм кольца  $F[X]$ , для которого  $X \mapsto \psi(X)$  и  $a \mapsto \psi(a), a \in F$ . Тогда

$$\psi \cdot g(X) = \prod_{i=1}^m (X - \psi(r_i)) = \prod_{i=1}^m (X - r_i) = g(X)$$

и мы видим, что коэффициенты многочлена  $g(X)$  являются  $G$ -инвариантными. Следовательно,  $g(X) \in P[X]$ , поскольку  $F^G = P$ . Но  $f$  предполагался неприводимым над  $P$ . Значит,

$$f(X) = g(X) = \prod_{i=1}^m (X - r_i)$$

**N)** произведение различных линейных множителей в  $F[X]$ , т.е. расширение  $F$  сепарабельно и нормально над  $P$ , как и утверждает 3).

3)  $\implies$  1). Так как  $[F : P] < \infty$ , то  $F = P(r_1, \dots, r_k)$ , где  $r_i$  алгебраичны над  $P$ . Пусть  $f_i(X)$  - минимальный многочлен для  $r_i$  над  $P$ . По условию  $f_i(X)$  - произведение различных линейных множителей в  $F[X]$ . Отсюда следует, что  $f(X) = \prod f_i(X)$  сепарабелен, а  $F$  - поле разложения над  $P$  для  $f(X)$ . Следовательно, мы пришли к 1).

Остаётся доказать Д2). Мы видели, что в условиях 2) по лемме Артина  $[F : P] \leq |G|$ , а поскольку по только что доказанному условию 3) имеет место,  $|\text{Gal} F/P| = [F : P]$ . Так как  $F^G = P \implies G \subset \subset \text{Gal} F/P$  и  $|G| \geq [F : P] = |\text{Gal} F/P|$ , то  $G = \text{Gal} F/P$ .

**N)** Фундаментальное соответствие Галуа. Теперь мы готовы доказать центральное утверждение.

Теорема 2. Пусть  $F$  - расширение поля  $P$ , удовлетворяющее любому из условий теоремы 1. Пусть  $G = \text{Gal} F/P$  - группа Галуа,  $\Gamma = \{H\}$  - множество подгрупп в  $G$  и  $\Sigma$  - множество промежуточных полей между  $F$  и  $P$ . Тогда отображения

$$\begin{cases} H \longmapsto F^H \\ K \longmapsto \text{Gal} F/K \end{cases}$$

являются биекциями  $\Gamma$  на  $\Sigma$  и  $\Sigma$  на  $\Gamma$ . Кроме того, это соответствие Галуа обладает следующими свойствами:

- i)  $H_1 \supset H_2 \iff F^{H_1} \subset F^{H_2}$ ;
- ii)  $|H| = [F : F^H]$ ,  $(G : H) = [F^H : P]$ ;
- iii)  $H \triangleleft G \iff F^H$  нормально над  $P$ . В последнем случае

$$\text{Gal}(F^H/P) \cong G/H$$

Доказательство. Итак, пусть  $G = \text{Gal} F/P$ ,  $H \in \Gamma$ . Так как  $P = F^G$ , то  $P \subset F^H$  и  $K = F^H$  - подполе в  $F$ , содержащее  $P$ . Это даёт отображение  $\Gamma \mapsto \Sigma$ . Применяя теорему 1, Д2) с  $H$  вместо  $G$ , мы видим, что  $\text{Gal} F/F^H = H$ , откуда вытекает первая часть утверждения ii):  $|H| = |\text{Gal} F/F^H| = [F : F^H]$ .

Пусть теперь  $K$  - любое подполе между  $F$  и  $P$ . Положим  $H = \text{Gal} F/K$ . Тогда  $H \subset G = \text{Gal} F/P$ , так что  $H$  - подгруппа в  $G$ . Ясно также, что  $F$  - поле разложения над  $K$  некоторого сепарабельного многочлена, поскольку оно является таковым над  $P$ . Стало быть, теорема 1, Д1), применённая к паре  $F$  и  $K$ , показывает, что  $K = F^H$ . Мы убедились, что выделенные скобкой  $\{$  в формулировке теоремы отображения биективны.

В начале параграфа отмечалось в качестве очевидного свойства, что если  $H_1 \supset H_2$ , то  $F^{H_1} \subset F^{H_2}$ . Обратно: если  $F^{H_1} \subset F^{H_2}$ , то  $H_1 = \text{Gal} F/F^{H_1} \supset \text{Gal} F/F^{H_2} = H_2$ . Это даёт i).

Первая часть свойства i) отмечалась ранее. Так как

$$|G| = [F : P] = [F : F^H] [F^H : P] = |H| [F^H : P]$$

и  $|G| = |H| [G : H]$ , то, очевидно,  $[F^H : P] = [G : H]$ , а это доказывает вторую часть свойства i).

Установим, наконец, справедливость свойства ii). Если  $H \in \Gamma$  и  $K = F^H$  - соответствующее подполе, то подполе  $K'$ , отвечающее сопряжённой подгруппе  $\psi H \psi^{-1}$ , есть  $\psi(K)$  (для наглядности сопрягающие элементы из  $G$  обозначены греческими буквами). Это видно сразу, поскольку условие  $\varphi(x) = x \forall x \in K$  эквивалентно  $(\psi \varphi \psi^{-1}) \psi(x) = \psi(x)$ , т.е.  $\psi(x) \in K'$ . Отсюда следует, что

$$H \triangleleft G \iff \psi(K) = K = F^H \quad \forall \psi \in G.$$

Предположим, что  $\psi(K) = K$  для каждого элемента  $\psi \in G$ . В таком случае ограничение  $\bar{\psi} = \psi|_K$  является автоморфизмом поля  $K$  над  $P$ , и мы пришли к гомоморфизму ограничения  $\psi \mapsto \bar{\psi}$  группы  $G = \text{Gal} F/P$  в  $\text{Gal} K/P$ . Образ  $\bar{G}$  является группой автоморфизмов в  $K$  и, очевидно,  $F^{\bar{G}} = P$ . Стало быть,  $\bar{G} = \text{Gal} K/P$ .

Ядром гомоморфизма  $\psi \mapsto \bar{\psi}$  служит множество таких  $\psi \in G$ , что  $\psi|_K = 1_K$ . Соответствие Галуа даёт, что этим множеством является  $\text{Gal} F/K = H$ . Следовательно,  $\bar{G} = \text{Gal} K/P \cong G/H$ .

Так как  $P = F^{\bar{G}}$ , то по теореме 1,3)  $K$  нормально над  $P$ . Обратно, предположив, что поле  $K$  нормально над  $P$ , рассмотрим минимальный многочлен  $f_a$  над  $P$  любого элемента  $a \in K$ . Тогда  $f(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_m)$  в  $K[X]$ , где  $a_1 = a$ . Если  $\varphi \in G$ , то  $f(\varphi(a)) = 0$ , откуда  $\varphi(a) = a_i$  для некоторого  $i$ . Таким образом,  $\varphi(a) \in K$  и  $\varphi(K) \subset K$ . Как и ранее, это означает, что  $\varphi H \varphi^{-1} \subset H$  для каждой подгруппы  $H$ , отвечающей  $K$  в соответствии Галуа. Значит,  $H \triangleleft G$ . Это завершает доказательство iii).

**Н) Иллюстрации к соответствию Галуа.** Поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ , а также конечные поля  $\mathbb{F}_q$ , рассмотренные в первых двух параграфах, служили прелюдией к теории Галуа. Расширим иллюстративный материал.

**А) Круговое поле  $\Gamma_n$ .** Рассмотрим нормальное расширение  $\Gamma_n = \mathbb{Q}(\zeta)$ ,  $\zeta^n = 1$ , связанное с круговым многочленом  $\Phi_n(X)$  (см. §2) степени  $\varphi(n)$ , корнями которого являются все

примитивные корни из 1 степени  $n$  и только они. Убедимся прежде всего в том, что справедлива

Теорема 3. Круговой многочлен  $\Phi_n(X)$  неприводим над  $\mathbb{Q}u$ , таким образом,  $[\Gamma_n : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$ .

Доказательств о. Как нам известно,  $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ . Неприводимость в  $\mathbb{Q}[X]$  по лемме Гаусса эквивалентна неприводимости в  $\mathbb{Z}[X]$ . Предположим, что

$$\Phi_n(X) = g(X)h(X)$$

где  $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ , причём многочлен  $h(X)$  степени  $\geq 1$  неприводим в  $\mathbb{Z}[X]$  (и в  $\mathbb{Q}[X]$ ). Пусть  $p$  - простое число, не делящее  $n$ , и  $h(\lambda) = 0$ . Так как  $\text{НОД}(p, n) = 1$ , то  $\lambda^p$  - примитивный корень степени  $n$  из 1.

Если  $h(\lambda^p) \neq 0$ , то  $g(\lambda^p) = 0$ . Стало быть,  $\lambda$  - корень многочленов  $g(X^p)$  и  $h(X)$ . Ввиду неприводимости  $h$  имеем  $h(X) | g(X^p)$ , т.е.

$$g(X^p) = h(X)l(X), \quad l \in \mathbb{Z}[X].$$

У нас

$$X^n - 1 = \Phi_n(X)d(X) = d(X)g(X)h(X)$$

Перейдём к сравнениям по  $(\text{mod } p)$ , т.е. будем действовать в  $\mathbb{Z}_p[X]$ :

$$\begin{aligned} X^n - \bar{1} &= \bar{d}(X)\bar{g}(X)\bar{h}(X) \\ (f(X) = a_0X^m + a_1X^{m-1} + \dots \in \mathbb{Z}[X]) &\implies \\ \implies \bar{f}(X) = \bar{a}_0X^m + \bar{a}_1X^{m-1} + \dots \in \mathbb{F}_p[X]. \end{aligned}$$

Аналогично,  $\bar{g}(X^p) = \bar{h}(X)\bar{l}(X)$ . Но

$$\bar{f}(X)^p = \bar{a}_0X^{pm} + \bar{a}_1X^{p(m-1)} + \dots = \bar{f}(X^p)$$

для любого  $f \in \mathbb{Z}[X]$ . Таким образом,  $\bar{g}(X)^p = \bar{g}(X^p) = \bar{h}(X)\bar{l}(X)$ , откуда, конечно, следует, что  $\text{НОД}(\bar{g}, \bar{h}) \neq 1$ .

В соответствии с (\*) приходим к заключению, что  $X^n - \bar{1}$  имеет кратные корни в своём поле разложения над  $\mathbb{Z}_p$ . Но это не так, поскольку  $(X^n - \bar{1})' = \bar{n}X^{n-1}$  и  $\bar{n} \neq 0$ , так что  $\text{НОД}(X^n - \bar{1}, (X^n - \bar{1})') = \bar{1}$ . Полученное противоречие показывает, что  $h(\lambda) = 0 \implies h(\lambda^p) = 0$  для каждого простого числа  $p \nmid n$ . Повторение этого рассуждения показывает, что  $\lambda^r$  - корень многочлена  $h(X)$  для любого натурального  $r$ , взаимно простого с  $n$ . Но каждый примитивный корень степени  $n$  из 1 имеет вид  $\lambda^r$ ,  $\text{НО}(r, n) = 1$ . Стало быть,  $h(X)$  делится на  $X - \lambda'$ , где  $\lambda'$  - любой примитивный корень степени  $n$ . В таком случае  $h(X) = \Phi_n(X)$ , т.е.  $\Phi_n$  неприводим.

Пусть  $G = \text{Gal } \Gamma_n / \mathbb{Q}$ . Тогда  $\sigma \in G \implies \sigma(\zeta) = \zeta^m$  для некоторого целого  $m = \tilde{m}(\sigma)$ , причём  $\text{НОД}(\tilde{m}(\sigma), n) = 1$  и  $(\sigma(\zeta))^n = 1$ . Далее,

$$\sigma, \tau \in G \implies (\sigma\tau)(\zeta) = \zeta^{\tilde{m}(\sigma\tau)} = \sigma(\zeta^{\tilde{m}(\tau)}) = \zeta^{\tilde{m}(\sigma)\tilde{m}(\tau)}$$

т.е.  $\tilde{m}(\sigma\tau) = \tilde{m}(\sigma)\tilde{m}(\tau)$ , и, таким образом,  $\tilde{m} : G \longrightarrow U(Z_n)$  - гомоморфизм группы Галуа поля  $\Gamma_n$  в мультипликативную группу  $U(Z_n)$  целых чисел по  $\text{mod } n$ , взаимно простых с  $n$ . Этот гомоморфизм инъективен, поскольку показатель  $\tilde{m}(\sigma)$  однозначно определён по  $\text{mod } n$  автоморфизмом  $\sigma$ , а действие  $\sigma$  на  $\mathbb{Q}(\zeta)$  определено действием на  $\zeta$ . Так как по теореме 3  $[\Gamma_n : \mathbb{Q}] = \varphi(n) = |U(Z_n)|$ , то  $G \cong U(Z_n)$ .

Нами доказана

Теорема 4. Круговое поле  $\Gamma_n$  обладает абелевой группой Галуа, изоморфной  $U(Z_n)$ .

Если заменить  $\mathbb{Q}$  на какое-то поле  $P$ , то, вообще говоря, имеется лишь вложение  $G \hookrightarrow U(Z_n)$ , но не изоморфизм. Строение группы  $U(Z_n)$  было исследовано в гл. 4. Заметим дополнительно, что подгруппы в  $G$  нормальны. Каждое подполе в  $\Gamma_n$  также нормально.

**Пример 1.** Круговое поле  $\Gamma_{17} = \mathbb{Q}(\zeta)$ ,  $\zeta^{17} = 1$ , с циклической группой Галуа  $G = \text{Gal} \Gamma_{17}/\mathbb{Q} = \langle \Phi | \Phi^{16} = 1 \rangle$ , порождённой отображением  $\Phi : \zeta \mapsto \zeta^3$ , имеет прямое отношение к конструктивным числовым полям [ВА I, гл. 5, §1]. Выделим следующий ряд подгрупп:

$$G = G_1 = \langle \Phi \rangle \supset G_2 = \langle \Phi^2 \rangle \supset G_3 = \langle \Phi^4 \rangle \supset G_4 = \langle \Phi^8 \rangle \supset G_5 = 1.$$

По теореме 2 соответствие Галуа приводит к возрастающей цепочке подполей:

$$\mathbb{Q} = F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset F_4 \subset F_5 = F = \mathbb{Q}(\zeta)$$

где  $F_i = F^{G_i}$ . По определению  $\Phi(\zeta) = \zeta^3$ ,  $\Phi^i(\zeta) = \zeta^{3^i}$ . Положим  $z_1 = \sum_{i=1}^8 \Phi^{2i}(\zeta)$ . Тогда  $\Phi^2(z_1) = z_1$ ,  $\Phi(z_1) \neq z_1$ , т.е.  $z_1 \in F_2$ ,  $z_1 \notin F_1$ . Так как  $[G : G_2] = 2$ , то  $[F_2 : F_1] = 2$  и  $F_2 = F_1(z_1)$ . Аналогично,  $z_2 = \sum_{i=1}^4 \Phi^{4i}(\zeta)$ ,  $z_3 = \sum_{i=1}^2 \Phi^{8i}(\zeta) = \zeta^{-1} + \zeta$ ,  $F_3 = F_2(z_2)$ ,  $F_4 = F_3(z_3)$ .

Если найти минимальные многочлены комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3$  соответственно над  $F_1, F_2, F_3$  и выразить эти числа через корни квадратных уравнений, то станет ясно, что они являются конструктивными. А в таком случае конструктивно и число  $\zeta$ , дающее возможность построить правильный 17-угольник при помощи циркуля и линейки.

Сделаем ещё несколько замечаний о конструктивных числовых полях. Если исходить из заданного поля

$$P = \mathbb{Q}(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_m, \bar{z}_m)$$

где  $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ , то  $P$ -конструктивность комплексного числа  $z$  означает, что

$$z \in F = P(u_1, \dots, u_r), \quad u_i^2 \in P(u_1, \dots, u_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq r$$

Башня (1) квадратичных расширений над  $P$  имеет, очевидно, степень  $[F : P] = 2^s$ ,  $s \leq r$ . Таким образом, комплексное число  $\lambda$ , обладающее свойством делимости  $[\mathbb{Q}(\lambda) : \mathbb{Q}]$  на нечётное простое число, не может быть конструктивным.

**Б) Правильные  $n$ -угольники.** При простом  $n = p$  построение правильного  $p$ -угольника равносильно построению комплексного числа  $\zeta = \cos 2\pi/p + i \sin 2\pi/p$ ,  $\zeta^{p-1} + \zeta^{p-2} + \dots + 1 = 0$ ,  $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = p-1$ . Необходимое условие, следовательно, сводится к равенству  $p-1 = 2^s$  для некоторого натурального числа  $s$ . Как отмечалось в [ВА I, гл. 1], таких простых чисел Ферма известно пока всего 5: 3, 5, 17, 257, 65537.

Из выражения для  $[\Gamma_n : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$ , приведённого в §2, видно, что  $\varphi(n) = 2^s$  в том и только том случае, когда все нечётные простые делители числа  $n$  являются простыми числами Ферма и их кратность в разложении равна 1. Это и есть необходимое условие для построения правильного  $n$ -угольника при помощи циркуля и линейки. Условие является также достаточным, но мы на этом не останавливаемся.

**В) Трисекция угла.** Каждый ли угол можно разделить при помощи циркуля и линейки на три равные части? Утверждается, что этого нельзя сделать даже для угла в  $60^\circ$ , т.е. точка  $z = (\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$  не может быть построена, исходя из точек  $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ . Другими словами, надо убедиться в том, что присоединение  $\cos 20^\circ$  к полю  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$  (а это - расширение степени 2 над  $\mathbb{Q}$ ) даст расширение степени  $\neq 2^s$  над  $\mathbb{Q}$ .

Действительно, положив  $u = \cos 20^\circ$ , перепишем тригонометрическое тождество  $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$  при  $\varphi = 20^\circ$  в виде  $4u^3 - 3u - 1/2 = 0$ , или, что то же самое, в

виде  $(2u)^3 - 3(2u) - 1$ . Но многочлен  $X^3 - 3X - 1$  неприводим над  $\mathbb{Q}$ , поэтому  $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$ , а это доказывает требуемое утверждение.

Г) Удвоение куба. Речь идёт о построении стороны куба, имеющего объём 2, т.е. о конструктивности числа  $\sqrt[3]{2}$ . Отрицательный ответ напрашивается сразу, поскольку многочлен  $X^3 - 2$  неприводим над  $\mathbb{Q}$  и, стало быть,  $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ .

В Б)-Г) речь шла, скорее, не о группах Галуа, а о степенях расширений. Приведём пару примеров, где группу Галуа найти сравнительно несложно.

При мер 2. Пусть  $P$  - несовершенное поле характеристики  $p > 0$ ,  $a \in P \setminus P^p$ . Тогда, как мы знаем,  $X^p - a$  - неприводимый многочлен над  $P$ . Если  $F = P(u)$ ,  $u^p = a$ , то  $[F : P] = p$ . Кроме того,  $X^p - a = (X - u)^p$ , т.е.  $F$  - поле разложения над  $P$  несепарабельного многочлена  $X^p - a$ . Для  $\sigma \in \text{Gal } F/P$  имеем  $(\sigma(u))^p = a$ , так что  $\sigma(u) = u$ . Это значит, что  $\sigma = 1$  и  $\text{Gal } F/P$  - единичная группа.

П р и м е р 3. Пусть  $F = P(t)$ , где  $t$  - трансцендентный элемент над  $P$ . Можно показать, что

$$F = P(u) \iff u = \frac{at + b}{ct + d}, \quad a, b, c, d \in P; \quad ad - bc \neq 0$$

Отображение  $\sigma : \frac{f(t)}{g(t)} \mapsto \frac{f(u)}{g(u)}$  является элементом группы Галуа  $G = \text{Gal } F/P$  в самом общем виде, поэтому  $G \cong \text{PGL}(2, P)$ .

## 12.4.4 Calculation of the Galois group

### Group Action $\text{Gal}(f)$ на корнях многочлена $f$ .

Группа Галуа может быть отождествлена с группой перестановок корней. Пусть  $f \in P[X]$  - многочлен степени  $\geq 1$  с различными корнями  $\theta_1, \dots, \theta_n$  в поле разложения  $F = P(\theta_1, \dots, \theta_n)$ . Первоначально Э.Галуа рассматривал исключительно группу  $\text{Gal}(f)$  многочлена  $f$  (или уравнения  $f(X) = 0$ ): каждый автоморфизм интерпретировался как элемент симметрической группы  $S_n$ . Лишь гораздо позднее творец теории идеалов Р. Дедекинд заметил, что  $\text{Gal}(f)$  отождествляется с группой Галуа  $\text{Gal } F/P$ . В настоящее время имеются готовые пакеты программ (типа Maple-V) для вычисления на ЭВМ группы Галуа неприводимых многочленов  $f \in \mathbb{Z}[X]$  небольших степеней.

Вообще говоря,  $\text{Gal}(f)$  - собственная подгруппа в  $S_n$ . Обсудим сначала следующий вопрос: какое подполе в  $F \supset P$  отвечает подгруппе  $\text{Gal}(f) \subset A_n$ , где  $A_n$  - знакопеременная группа?

Теорема 1. Пусть  $P$  - поле характеристики  $\neq 2$ ,  $f$  - нормализованный многочлен положительной степени в  $P[X]$  с различными корнями  $\theta_i$  в поле разложения  $F \supset P$ . Пусть

$$\Delta(f) = \prod_{i < j} (\theta_i - \theta_j)$$

Тогда подполем в  $F$ , отвечающим  $\text{Gal}(f) \cap A_n$ , является  $P(\Delta(f))$ .

Доказа тельств во. Пусть  $\pi \in S_n$ . Посмотрим сначала на кольцо  $P[X_1, \dots, X_n]$ . Его автоморфизм  $\Phi_\pi : X_i \mapsto X_{\pi(i)}$ , оставляющий каждый элемент из  $P$  на месте, продолжается до автоморфизма, обозначаемого также  $\Phi_\pi$ , поля отношений  $P(X_1, \dots, X_n)$ . Понятно, что группа  $G$  всех таких автоморфизмов изоморфна  $S_n$ . Используя соответствие Галуа, нетрудно заметить, что  $F^G = P(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)$ , где  $\mathbf{s}_k$  - элементарная симметрическая функция от  $X_1, \dots, X_n$ . Кстати,  $\text{Gal } P(X_1, \dots, X_n) / P(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) \cong S_n$ .

Положим  $\Delta_n = \prod_{i < j} (X_i - X_j)$ . Известно и легко проверяется, что  $\Phi_\pi(\Delta_n) = \varepsilon_\pi \Delta_n$ . Если  $\psi : X_i \mapsto \theta_i$  - гомоморфизм  $P[X_1, \dots, X_n]$  в  $F$ , то  $\psi(\Phi_\pi(\Delta_n)) = \pi(\Delta(f)) = \pm \Delta(f)$ , где теперь  $\pi \in \text{Gal}(f) \cap S_n$ .

Следовательно, подгруппа в  $\text{Gal}(f) \cong \text{Gal } F/P$ , оставляющая на месте элементы подполя  $P(\Delta(f)) \subset F$ , есть подгруппа чётных перестановок. В силу соответствия Галуа подполем в  $F/P$ , отвечающим  $\text{Gal}(f) \cap A_n$ , будет  $P(\Delta(f)) = F^{\text{Gal}(f) \cap A_n}$ .

Из доказательства видно, что  $\pi(\Delta(f)) = \pm \Delta(f)$  для любой перестановки  $\pi \in \text{Gal}(f)$ . Поэтому дискриминант  $D(f) = \Delta(f)^2$  многочлена  $f$  при действии  $\pi$  остаётся неподвижным и, стало быть,  $D(f) \in P$ . Согласно теореме 1 включение  $\text{Gal}(f) \subset A_n$  имеет место в точности тогда, когда  $P(\Delta(f)) = P$ , т.е.  $\Delta(f) \in P$ . Итак, справедливо

Следствие. Пусть  $f \in P[X]$  - нормализованный полином степени  $n \geq 1$ ,  $D(f) = \prod_{i < j} (\theta_i - \theta_j)^2$  - его дискриминант. Тогда

$$\text{Gal}(f) \subset A_n \iff D(f) - \text{квадрат элемента из } P.$$

Теорема 2 (критерий неприводимости). Пусть корни  $\theta_i, i = 1, \dots, n$ , многочлена  $f \in P[X]$  все различны. Тогда неприводимость  $f$  над  $P$  эквивалентна транзитивности  $\text{Gal}(f)$  на  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ .

Доказательство. По поводу определения транзитивности см. гл. 1. Предположим, что  $f$  неприводим. Из теоремы 3 в §1 вытекает существование изоморфизма  $P(\theta_i)/P \rightarrow P(\theta_j)/P$ , каковы бы ни были индексы  $i \neq j$ . Так как  $F = P(\theta_1, \dots, \theta_n)$  - поле разложения над  $P(\theta_i)$  и над  $P(\theta_j)$  многочлена  $f(X) = \prod_k (X - \theta_k)$ , то по построению поля разложения этот изоморфизм может быть продолжен до автоморфизма  $\sigma$  расширения  $F \supset P$ . Значит,  $\sigma \in \text{Gal } F/P = \text{Gal}(f)$  и  $\sigma(\theta_i) = \theta_j$ , т.е.  $\text{Gal}(f)$  транзитивна.

Обратно: предположим, что  $\text{Gal}(f)$  транзитивна на корнях. Пусть  $f(X) = g(X)h(X)$  - разложение с неприводимым множителем  $g(X)$  положительной степени. Если  $g(\theta_i) = 0$  для какого-то  $i$ , а  $\theta_j$  - любой другой корень многочлена  $f$  и  $\sigma(\theta_i) = \theta_j$  для некоторого  $\sigma \in \text{Gal}(f)$ , то  $g(\theta_i) = 0 \implies 0 = \sigma(g(\theta_i)) = g(\theta_j)$ . Это показывает, что каждый корень многочлена  $f$  является корнем его множителя  $g$  и, следовательно,  $f = g$  неприводим.

Пример 1. Как показано в [BA I, гл. 5, §2], дискриминантом неполного кубического уравнения  $f(x) = x^3 + ax + b = 0$  служит выражение  $D(f) = -4a^3 - 27b^3$ . Пусть  $f$  не имеет корней в основном поле  $\mathbb{Q}$ , т.е.  $f$  неприводим и сепарабелен. Таковыми являются многочлены  $f_1(X) = X^3 - X - 1$  и  $f_2(X) = X^3 - 3X + 1$  с дискриминантами  $D(f_1) = -23$ ,  $D(f_2) = 81 = 9^2$ . Из теорем 1, 2 следует, что  $\text{Gal}(f_1) \cong S_3$ , а  $\text{Gal}(f_2) \cong A_3$ .

Пример 2. Многочлен  $f(X) = x^3 - 2$ , неприводимый над  $\mathbb{Q}$ , имеет вещественный корень  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ . Его полем разложения, однако, будет

$$F = \mathbb{Q}(\alpha, \varepsilon) = \langle 1, \alpha, \alpha^2, \varepsilon, \varepsilon\alpha, \varepsilon\alpha^2 \rangle_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}(\theta)$$

Здесь

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \quad \theta = \alpha + \varepsilon, \quad g(\theta) = 0, \quad g(X) = X^6 + 3X^5 + 6X^4 + 3X^3 + 9X + 9$$

Строение группы Галуа довольно очевидно:

$$G = \text{Gal } F/\mathbb{Q} = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = e = \tau^2, \tau\sigma\tau = \sigma^2 \rangle \cong S_3,$$

где

$$\sigma(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \sigma(\alpha) = \varepsilon\alpha, \quad \sigma(\varepsilon\alpha) = \varepsilon^2\alpha; \quad \tau(\alpha) = \alpha, \quad \tau(\varepsilon) = \varepsilon^2$$

Под каждой подгруппой  $H \subseteq G$  выпишем отвечающее ей в силу соответствия Галуа неподвижное подполе:

|              |                           |                        |                                   |                                 |         |
|--------------|---------------------------|------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------|
| $G$          | $\langle \sigma \rangle$  | $\langle \tau \rangle$ | $\langle \sigma\tau \rangle$      | $\langle \sigma^2\tau \rangle$  | $\{e\}$ |
| $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ | $\mathbb{Q}(\alpha)$   | $\mathbb{Q}(\varepsilon^2\alpha)$ | $\mathbb{Q}(\varepsilon\alpha)$ | $F$     |

так что  
 $\langle \sigma \rangle = \text{Gal } F/\mathbb{Q}(\varepsilon), \langle \tau \rangle = \text{Gal } F/\mathbb{Q}(\alpha), \langle \sigma\tau \rangle = \text{Gal } F/\mathbb{Q}(\varepsilon^2\alpha), \langle \sigma^2\tau \rangle = \text{Gal } F/\mathbb{Q}(\varepsilon\alpha)$ . Так как  $\langle \sigma \rangle \triangleleft G$ , то  $\mathbb{Q}(\varepsilon)$  нормально над  $\mathbb{Q}$  и  $\text{Gal } \mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q} \cong G/\langle \sigma \rangle \cong Z_2$ .

**N)** Многочлены и группы простой степени. В общем вычисление группы Галуа конкретного многочлена  $f \in P[X]$  - довольно трудная задача даже при  $P = \mathbb{Q}$ . Она привлекала внимание крупных математиков. Отметим два результата И. Шура (1931 г.):

$$f(X) = \sum_{m=0}^n X^m/m! \implies \text{Gal}(f) = \begin{cases} A_n, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{4}; \\ S_n, & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Пусть  $H_n(X)$  -  $n$ -й многочлен Эрмита (см. [BA II]). Положим  $H_{2n}(X) = K_n^{(0)}(X^2)$ ,  $H_{2n+1}(X) = XK_n^{(1)}(X^2)$ . Тогда при  $n > 12$  имеет место изоморфизм  $\text{Gal}(K_n^{(j)}(X)) \cong S_n, j = 0, 1$ . Основным полем является  $\mathbb{Q}$ .

Симметрические группы в дальнейшем будут возникать неоднократно, поэтому приведём относящиеся к ним два простых утверждения, развивающие упр. 10 из [BA I, гл. 4, §3].

**Предложение 1.** Транзитивная группа перестановок степени  $n$ , содержащая один двойной и цикл и один цикл длины  $n-1$ , является симметрической.

**Доказательство.** Пусть  $(12\dots n-1)$  - данный  $(n-1)$ -цикл. Транспозицию  $(ij)$  в силу транзитивности группы можно перевести в  $(kn)$ , где  $k$  - один из символов от 1 до  $n-1$ . Сопряжение  $(kn)$  при помощи цикла  $(12\dots n-1)$  и его степеней даёт транспозиции  $(1n), (2n), \dots, (n-1, n)$ , а они порождают  $S_n$ .

**Предложение 2.** Пусть  $p$  - простое число. Если  $G \subseteq S_p$ , причём  $G$  содержит элемент порядка  $p$  и какую-то транспозицию, то  $G = S_p$ .

**Доказательство.** По условию  $G$  содержит  $p$ -цикл  $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_p)$ , где  $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} = \{1, 2, \dots, p\}$ . При надлежащем упорядочении считаем, что  $(12) \in G$ . Так как  $\sigma^s = (12\dots)$  при некотором  $s$ , то считаем с самого начала  $\sigma = (12\dots p), (12) \in G$ . Тогда  $G$  содержит  $\sigma(12)\sigma^{-1} = (23), \sigma(23)\sigma^{-1} = (34), \dots, \sigma(p-2, p-1)\sigma^{-1} = (p-1, p)$ . Но  $\langle (12), (23), \dots, (p-1, p) \rangle = S_p$ . **Теорема 3.** Пусть  $f$  - неприводимый многочлен простой степени  $p$  над  $\mathbb{Q}$ . Предположим, что  $f$  имеет в точности два невещественных корня в  $\mathbb{C}$ . Тогда  $\text{Gal}(f) = S_p$ .

**Доказательство.** Положим

$$f(X) = \prod_{i=1}^p (X - \theta_i), \quad F = \mathbb{Q}(\theta_1, \dots, \theta_p) \subset \mathbb{C}.$$

Так как

$$F \supset \mathbb{Q}(\theta_1), \quad [\mathbb{Q}(\theta_1) : \mathbb{Q}] = \deg f = p$$

то степень  $|\text{Gal}(f)| = [F : \mathbb{Q}]$  делится на  $p$ . По теореме Силова (см. гл. 2, §2)  $\text{Gal}(f)$  содержит элемент порядка  $p$ . Автоморфизм сопряжения  $z \mapsto \bar{z}$  поля  $\mathbb{C}$ , продолженный на  $\mathbb{C}[X]$ , переводит  $f$  в себя. Следовательно, он переставляет корни  $\theta_i$  многочлена  $f$ .

Пусть  $\theta_1, \theta_2$  - невещественные корни. Тогда по условию теоремы  $\theta_2 = \bar{\theta}_1$  и  $\bar{\theta}_i = \theta_i$  при  $i > 2$ . Приходим к выводу, что ограничение автоморфизма сопряжения на  $F$  является элементом в  $\text{Gal}(f)$ , а именно транспозицией. Стало быть,  $\text{Gal}(f)$  содержит элемент порядка  $p$  и транспозицию. Остаётся применить предложение 2.

**Теорема 4 (Р. Брауер).** Для любого простого числа  $p$  можно построить сколь угодно много неприводимых многочленов степени  $p$  с группой Галуа  $S_p$ .

**Доказательство.** Пусть  $m; n_1, \dots, n_{k-2}$  - целые чётные числа,  $m$  положительно,  $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-2}$  и  $k > 3$  нечётно. Рассмотрим многочлен

$$g(X) = (X^2 + m)(X - n_1)(X - n_2) \dots (X - n_{k-2})$$

с вещественными корнями  $n_1, n_2, \dots, n_{k-2}$ .

График  $y = g(x)$  имеет  $(k-3)/2$  относительных максимумов, а так как  $|g(h)| > 2$  для любого нечётного целого  $h$ , то ясно, что значения этих относительных максимумов будут  $> 2$ . Это означает, что график  $y = f(x) = g(x) - 2$  имеет  $(k-3)/2$  положительных относительных максимумов между  $n_1$  и  $n_{k-2}$ . Следовательно,  $f(X)$  имеет  $k-3$  вещественных корней на интервале  $(n_1, n_{k-2})$ . Так как  $f(n_{k-2}) = -2$  и  $f(N) > M$  при любом  $M > 0$  для достаточно большого натурального  $N$ , то существует также вещественный корень  $> n_{k-2}$ . Получаем  $k-2$  вещественных корня многочлена  $f(X)$ . Если

$$f(X) = \prod_{i=1}^k (X - \theta_i) = (X^2 + m)(X - n_1) \dots (X - n_{k-2}) - 2$$

то, сравнивая коэффициенты, будем иметь

$$\sum_{i=1}^k \theta_i = \sum_{l=1}^{k-2} n_l, \quad \sum_{i < j} \theta_i \theta_j = \sum_{l < q} n_l n_q + m.$$

Следовательно,

$$\sum_i \theta_i^2 = \left( \sum_i \theta_i \right)^2 - 2 \sum_{i < j} \theta_i \theta_j = \sum_l n_l^2 - 2m$$

Если выбрать  $m$  достаточно большим, то  $\sum_i \theta_i^2 < 0$ , что означает существование не вещественных корней. В случае  $\theta_1 \notin \mathbb{R}$  будет  $\bar{\theta}_1 \neq \theta_1$ , и мы имеем по крайней мере два не вещественных корня, а по построению этих корней должно быть ровно 2. Заметим теперь, что

$$f(X) = X^k + a_1 X^{k-1} + \dots + a_k, \quad a_i \in 2\mathbb{Z}$$

Так как постоянный член у  $g(X)$  делится на 4, то у  $f(X)$  он делится на 2, но не делится на 4. Из критерия Эйзенштейна, применённого к  $f$  с простым числом 2, следует, что  $f$  неприводим над  $\mathbb{Q}$ . Таким образом, условия теоремы 2 удовлетворяются для каждого простого  $p = k \geq 5$ . При  $p = 2$  и  $p = 3$  см. примеры.

**Н) Метод приведения по модулю  $p$ .** Важным вспомогательным средством для вычисления  $\text{Gal}(f)$ ,  $f \in \mathbb{Z}[X]$ , служит приведение (редукция) по модулю  $p$ , где  $p$  будет пробегать различные простые числа. Редукция коэффициентов многочлена  $f$  приводит к каноническому гомоморфизму  $\mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}_p[X]$ . Пишем  $f_p(X)$  для образа многочлена  $f(X)$  при этом гомоморфизме. Так как дискриминант  $D(f)$  - полиномиальная функция (от коэффициентов  $f$ ) с коэффициентами из  $\mathbb{Z}$ , то  $D(f) \in \mathbb{Z}$  и  $D(f_p) = D(f)_p$ . Если  $D(f_p) \neq 0$ , то  $D(f) \neq 0$  и оба многочлена  $f, f_p$  (одинаковой степени) имеют различные корни. В этом случае справедлива

Теорема 5 (Р. Дедекинд). Пусть  $f \in \mathbb{Z}[X]$  - нормализованный многочлен степени  $n$ ,  $p$  - простое число,  $D(f_p) \neq 0$ . Пусть  $f_p(X)$  разлагается в произведение неприводимых над  $\mathbb{Z}_p$  множителей степеней  $n_1, n_2, \dots, n_r$   $\left( \sum_i n_i = n \right)$ .

Тогда группа Галуа  $\text{Gal}(f)$  содержит перестановку на множестве корней многочлена  $f$  с цикловой структурой



$$(1, 2, \dots, n_1) (n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2) (n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3) \dots$$

при надлежащем упорядочении корней.

Доказательству этой важной теоремы будут предшествовать несколько вспомогательных утверждений. Начнём с классического результата о линейной независимости характеров. Пусть  $H$  - моноид,  $K$  - поле. Под характером  $\chi$  из  $H$  в  $K$  (или под  $K$ -характером моноида  $H$ ) понимается гомоморфизм  $H \rightarrow K^*$  ( $\chi(1) = 1, \chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ ).

Лемма 1 (лемма Дедекинда-Артина о независимости). Различные характеры  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$  моноида  $H$  в поле  $K$  линейно независимы над  $K$ , т.е.

$$\sum_i a_i \chi_i(h) = 0, \quad a_i \in K, \quad \forall h \in H \implies a_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Доказательство проводим индукцией по  $n$ . Если  $n = 1$ , то результат очевиден, поскольку  $a\chi(h) = 0, a \neq 0$ , означает  $\chi(h) = 0$  для любого  $h \in H$ , в то время как по условию  $\chi(1) = 1$ .

Пусть теперь  $n > 1$ , и пусть для  $n - 1$  независимость установлена. Считаем все  $a_i \neq 0$ , иначе действует предположение индукции. Так как  $\chi_1 \neq \chi_2$ , то  $\chi_1(h') \neq \chi_2(h')$  для некоторого  $h' \in H$ . Заменим в предполагаемом соотношении линейной зависимости  $h$  на  $h'h$ . Это приводит к соотношению

$$a_1 \chi_1(h') \chi(h) + a_2 \chi_2(h') \chi_2(h) + \dots + a_n \chi_n(h') \chi_n(h) = 0$$

С другой стороны, умножая исходное соотношение на  $\chi_1(h')$ , будем иметь

$$a_1 \chi_1(h') \chi(h) + a_2 \chi_1(h') \chi_2(h) + \dots + a_n \chi_1(h') \chi_n(h) = 0$$

Вычитая последнее соотношение из первого, получим где

$$a'_2 \chi_2(h) + \dots + a'_n \chi_n(h) = 0$$

$$a'_i = a_i (\chi_i(h') - \chi_1(h')), \quad 2 \leq i \leq n.$$

Так как  $f'_2 = a_2 (\chi_2(h') - \chi_1(h')) \neq 0$ , то имеем противоречие с предположением индукции.

Следствие 1. Пусть  $K_1, K_2 - \partial$  поля  $\eta_1, \dots, \eta_n - \text{радикалы}$  - личные мономорфизмы  $K_1 \rightarrow K_2$ . Тогда они линейно независимы над  $K_2$ .

Доказательство. Ограничить  $\eta_i$  на  $K_1^*$  и положить  $H = K_1^*$ .

Следствие 2 (теорема Артина). Пусть  $G$  - конечная группа автоморфизмов поля  $F$ . Тогда  $F$  является расширением Галуа над своим подполем  $P$  неподвижных относительно  $G$  элементов и  $\text{Gal } F/P = G$ .

Основу доказательства теоремы 5 составляет

Лемма 2. Пусть  $f \in \mathbb{Z}[X]$  - нормализованный многочлен степени  $n$ ,  $F$  - его поле разложения над  $\mathbb{Q}$ ,  $p$  - простое число такое, что  $D(f_p) \neq 0$ , т.е.  $f_p$  имеет различные корни в своём поле разложения  $F_{(p)}$  над  $\mathbb{Z}_p$ . Пусть  $L$  - подполе в  $F$ , порождённое корнями многочлена  $f$ .

Тогда:

а) существует гомоморфизм  $\psi : L \rightarrow F_{(p)}$ ;

б) любой такой гомоморфизм устанавливает биекцию множества  $R$  корней многочлена  $f$  в  $F$  на множество  $R_p$  корней  $f_p$  в  $F_{(p)}$ ; в) если  $\psi, \psi'$  - два таких гомоморфизма, то  $\psi' = \psi \cdot \sigma$ , где  $\sigma \in \text{Gal} F/\mathbb{Q}$ .

Доказательство. По условию

$$F = \mathbb{Q}(\theta_1, \dots, \theta_n), \quad f(X) = \prod_{i=1}^n (X - \theta_i) \text{ в } F[X]$$

По определению  $L = \mathbb{Z}[\theta_1, \dots, \theta_n]$ . Положим

$$L' = \sum_{0 \leq k_i \leq n-1} \mathbb{Z} \theta_1^{k_1} \dots \theta_n^{k_n}$$

— множество  $\mathbb{Z}$ -линейных комбинаций элементов

$$\theta_1^{k_1} \dots \theta_n^{k_n}, \quad 0 \leq k_i \leq n-1$$

Так как  $f(\theta_i) = 0$ , то  $\theta_i^n$  —  $\mathbb{Z}$ -линейная комбинация степеней  $1, \theta_i, \theta_i^2, \dots, \theta_i^{n-1}$ . Следовательно,  $\theta_i L' \subset L'$  и по итерации  $\theta_1^{k_1} \dots \theta_n^{k_n} L' \subset L'$  для любых положительных показателей  $k_1, \dots, k_n$ . Значит,  $L'$  — подкольцо в  $L$ , содержащее по определению  $\theta_1, \dots, \theta_n$  и, таким образом, совпадающее с  $L$ .

Это показывает, что  $L$  — конечно порождённый  $\mathbb{Z}$ -модуль. Так как  $\text{char } F = 0$ , то кручение  $\text{Tor } L$  равно нулю и  $L$  — свободный  $\mathbb{Z}$ -модуль конечного ранга с каким-то базисом  $(u_1, \dots, u_m) : L = \mathbb{Z}u_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}u_m$ .

Утверждается, что  $(u_i)$  — базис для расширения  $F/\mathbb{Q}$  и, следовательно,  $[F : \mathbb{Q}] = m$ . Линейная независимость над  $\mathbb{Q}$  элементов  $u_i$  очевидна, поскольку нетривиальное  $\mathbb{Q}$ -линейное соотношение между  $u_i$  приводит (при умножении на некоторое целое число) к нетривиальному  $\mathbb{Z}$ -линейному соотношению, которое на самом деле отсутствует. Рассмотрим теперь  $\mathbb{Q}L = \sum_i \mathbb{Q}u_i$  — подкольцо в  $F$ , содержащее  $\mathbb{Q}$ . Из алгебраичности  $F$  следует, что  $\mathbb{Q}L$  — подполе в  $F$  (см. следствие теоремы 2 из §1). Так как оно содержит все  $\theta_i, 1 \leq i \leq n$ , то  $\mathbb{Q}L = F$ . Стало быть,  $(u_i)$  — базис для  $F/\mathbb{Q}$ .

Введём в рассмотрение идеал  $pL = \sum_{i=1}^m \mathbb{Z}(pu_i)$  кольца  $L$ . Ясно, что  $|L/pL| = p^m$ . Так как факторкольцо  $L/pL$  конечно, то оно заведомо содержит максимальный собственный идеал вида  $M/pL$ , где  $M$  — максимальный идеал в  $L$ , содержащий  $pL$ . В таком случае  $L/M$  — поле, являющееся гомоморфным образом кольца  $L/pL$ , поскольку по одной из теорем об изоморфизме (см. гл. 4) имеем  $(L/pL)/(M/pL) \cong L/M$ . Из построения видно, что  $\text{char } L/M = p$  и  $Z_p$  — простое подполе в  $L/M$ , а  $|L/M| = p^{m'}$ , где  $m' \leq m$ .

а) Канонический гомоморфизм  $\nu : L \rightarrow L/M$  отображает  $\mathbb{Z}$  на простое поле  $Z_p$  (или, если угодно,  $\mathbb{F}_p$ ), а так как  $L = \mathbb{Z}[\theta_1, \dots, \theta_n]$  и  $f(X) = \prod_{i=1}^n (X - \theta_i)$  в  $L[X]$ , то  $L/M = Z_p[\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_n]$ , где  $\bar{\theta}_i = \nu(\theta_i) = \theta_i + M$ . Далее, из  $f \in \mathbb{Z}[X]$  следует, что коэффициенты многочлена  $\bar{f}(X) = \prod_{i=1}^n (X - \bar{\theta}_i)$  лежат в  $Z_p$  и  $\bar{f}(X) = f_p(X)$ . Таким образом,  $L/M$  — поле разложения для  $f_p(X)$  над  $Z_p$ , и мы имеем изоморфизм  $\mu : L/M \rightarrow F_{(p)}$ . В итоге мы пришли к нужному эпиморфизму  $\psi = \mu \circ \nu : L \rightarrow F_{(p)}$ .

б) Пусть  $\psi$  — гомоморфизм типа, установленного в а). Тогда ограничение  $\psi|_{\mathbb{Z}}$  будет гомоморфизмом  $\mathbb{Z}$  на простое подполе в  $F_{(p)}$ ,  $\psi(1) = 1_{F_{(p)}}$ , так что  $\psi|_{\mathbb{Z}}$  — канонический гомоморфизм  $\mathbb{Z}$  на  $Z_p$ . В таком случае  $f_p(X) = \psi(f(X)) := \prod_i (X - \psi(\theta_i))$ . Следовательно,  $\psi(\theta_i)$  — корни многочлена  $f_p(X)$  в  $F_{(p)}$  и  $\psi|_R$  — биекция  $R$  на  $R_p$ .

в) Зафиксируем гомоморфизм  $\psi : L \rightarrow F_{(p)}$ . Пусть  $\sigma \in G = \text{Gal} F/\mathbb{Q}$ . Тогда  $\sigma$  переставляет  $\theta_i$  и, следовательно,  $\sigma$  переводит  $L$  в себя. Далее,  $\sigma|_L$  — гомоморфизм  $L$  в  $L$  (на самом деле автоморфизм), а  $\psi \circ \sigma$  — гомоморфизм  $L$  в  $F_{(p)}$ . Различные  $\sigma, \sigma' \in G$  дают различные перестановки корней  $\theta_i$ , а поскольку  $\psi|_R$  — биекция на  $R_p$ ,  $\psi \circ \sigma$  и  $\psi \circ \sigma'$  различны.

Таким способом мы получаем  $m = [F : \mathbb{Q}]$  различных гомоморфизмов  $\psi_j = \psi \circ \sigma_j$ , если  $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ .

Утверждается, что других гомоморфизмов больше нет. Действительно, пусть  $\psi_{m+1}$  отличен от  $\psi_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ . По лемме 1, применённой к мультипликативному моноиду  $H$  области  $L$  и полю  $K = F_{(p)}$ , все  $\psi_j$ , включая  $\psi_{m+1}$ , линейно независимы над  $F_{(p)}$ . С другой стороны, рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_i \psi_i(u_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq m$$

Так как неизвестных  $x_i$  больше, чем уравнений, то эта однородная линейная система с коэффициентами  $\psi_i(u_j) \in F_{(p)}$  имеет нетривиальное решение  $(a_1, \dots, a_{m+1})$ ,  $a_i \in F_{(p)}$ . Пусть теперь  $y \in L$ . Тогда  $y = \sum_j n_j u_j$ ,  $n_j \in \mathbb{Z}$ , и

$$\begin{aligned} \psi_i(y) &= \sum_j \bar{n}_j \psi_i(u_j), \quad \bar{n}_j = n_j + p\mathbb{Z} \\ \sum_i a_i \psi_i(y) &= \sum_j \bar{n}_j \left( \sum_i a_i \psi_i(u_j) \right) = \sum_j \bar{n}_j(0) = 0. \end{aligned}$$

Это противоречит независимости  $\psi_i$  и завершает доказательство в).

Наконец, мы готовы дать

Доказательство теоремы 5. Так как  $F_{(p)}$  - поле с  $p^m$  элементами, то отображение  $\pi : a \mapsto a^p, a \in F_{(p)}$  - автоморфизм. Если  $\psi : L \rightarrow F_{(p)}$  - любой гомоморфизм, то и  $\pi \circ \psi$  - гомоморфизм. Соответственно мы имеем единственный элемент  $\sigma = \sigma(\psi) \in \text{Gal}(f)$ , такой, что

$$\pi \circ \psi = \psi \circ \sigma(\psi)$$

Аutomорфизм  $\sigma = \sigma(\psi)$  называется  $p$ -автоморфизмом Фробениуса на  $F/\mathbb{Q}$ , отвечающим  $\psi$ .

Если мы ограничим  $\psi$  и  $\sigma$  на  $R$  и используем тот факт, что  $\psi$  - биекция из  $R$  на  $R_p$ , то получим соотношение  $\sigma = \psi^{-1} \circ \pi \circ \psi$ . Это означает, что орбиты на  $R_p$  относительно  $\langle \pi \rangle$  отображаются посредством  $\psi^{-1}$  в орбиты на  $R$  относительно  $\langle \sigma \rangle$ .

Но орбиты на  $R_p$  относительно  $\langle \pi \rangle$  - это множества корней неприводимых множителей многочлена  $f_p \in Z_p[X]$ . Если  $n_1, \dots, n_r$  - степени этих многочленов, то мощности орбит на  $R$  относительно  $\langle \sigma \rangle$  будут  $n_1, \dots, n_r$ , и, следовательно,  $\sigma$  как перестановка на  $R$  имеет цикловое разложение

$$(12 \dots n_1)(n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2) \dots$$

при надлежащем упорядочении корней.

Пример 3. Пусть  $f(X) = X^6 + 22X^5 + 21X^4 + 12X^3 - 37X^2 - 29X - 15$ . Сначала используем редукцию по mod 2, чтобы получить

$$f_2(X) = X^6 + X^4 + X^2 + X + 1.$$

Делимости на неприводимые многочлены  $X^2 + X + 1$ ,  $X^3 + X^2 + 1$ ,  $X^3 + X + 1$  степени  $\leq 3$  нет, поэтому  $f_2(X)$  неприводим. Следовательно,  $\text{Gal}(f)$  содержит 6-цикл, так что  $\text{Gal}(f)$  транзитивна. Далее,

$$f_3(X) = X(X^5 + X^4 - X + 1)$$

причём  $X^5 + X^4 - X + 1$  неприводим по mod 3. Стало быть,  $\text{Gal}(f)$  содержит 5-цикл. Наконец,

$$f_5(X) = X(X-1)(X+1)(X+2)(X^2+2)$$

и  $X^2+2$  неприводим по mod 5. Следовательно,  $\text{Gal}(f)$  содержит 2-цикл. В соответствии с предложением 1 приходим к заключению, что  $\text{Gal}(f) \cong S_6$ .

Чтобы на основании теоремы 5 построить многочлен  $f \in \mathbb{Z}[X]$  степени  $n > 3$  с  $\text{Gal}(f) \cong S_n$ , выберем сначала неприводимый по mod 2 многочлен  $u \in \mathbb{Z}[X]$  степени  $n$ ; затем - многочлен  $v \in \mathbb{Z}[X]$ , который по mod 3 разлагается в произведение неприводимого множителя степени  $n-1$  и линейного множителя; наконец, выберем многочлен  $w \in \mathbb{Z}[X]$ , который по mod 5 разлагается в произведение неприводимого множителя степени 2 и одного или нескольких неприводимых множителей нечётных степеней. Всё это возможно, поскольку по модулю любого простого числа существует неприводимый многочлен любой наперёд заданной степени.

В заключение выберем многочлен  $f$  так, чтобы выполнялись условия

$$f \equiv u \pmod{2}, \quad f \equiv v \pmod{3}, \quad f \equiv w \pmod{5}$$

Достаточно положить

$$f = -15u + 10v + 6w$$

(все многочлены нормализованы).

Группа  $\text{Gal}(f)$  будет тогда транзитивной (неприводимость  $f$  по mod 2), будет содержать цикл типа  $(1, 2, \dots, n-1)$  и транспозицию, умноженную на независимые циклы нечётной длины. Если это последнее произведение возвести в подходящим образом подобранную нечётную степень, то получится чистая транспозиция. В силу предложения 1 получаем  $\text{Gal}(f) \cong S_n$ .

Упомянутые в самом начале п. 2 результаты И. Шура, относящиеся к конкретным многочленам с группой Галуа, изоморфной  $S_n$ , не обесценивают теорему 5. Основанные на ней вычисления применяются в самых разных ситуациях.

**Н) Нормальный базис.** Пусть  $F$  - произвольное расширение Галуа над  $P$  с  $\text{Gal } F/P = G = \{\eta_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ,  $n = [F : P]$ . Если  $z \in F$  и  $\{z_1, z_2, \dots, z_m\} = Gz$  - орбита при действии  $G$ , то минимальным многочленом для  $z$  над  $P$  будет  $\prod_1^m (X - z_i)$ . Следовательно,  $z$  будет примитивным элементом ровно тогда, когда  $m = |Gz| = n$ . Более сильное свойство: элементы  $\eta_1(z), \eta_2(z), \dots, \eta_n(z)$  не только различны, но и линейно независимы над  $P$ . Если это так, то  $(\eta_1(z), \dots, \eta_n(z))$  - базис для  $F/P$ . Он называется нормальным базисом данного расширения. Доказательство существования нормального базиса основано на следующем критерии.

Прежде всего 3. Пусть  $K/P$  - конечномерное сепарабельное расширение,  $L/P$  - его нормальное замыкание. Тогда:

**Н) Число** мономорфизмов  $K/P \rightarrow L/P$  равно  $n = [K : P]$ ;

**Н) Если**  $1 = \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  - эти мономорфизмы, то набор  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $u_i \in K$ , является базисом для  $K/P$  в том и только том случае, когда

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \eta_2(u_1) & \eta_2(u_2) & \dots & \eta_2(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_n(u_1) & \eta_n(u_2) & \dots & \eta_n(u_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

**Доказательство.** 1) Пусть  $G = \text{Gal } L/P$ , и пусть  $H \subset G$  - подгруппа, фиксирующая  $K$ . Тогда  $n = [K : P] = (G : H)$ , и мы можем написать  $G = \theta_1 H \cup \dots \cup \theta_n H$ ;  $\theta_1 = 1$  - разложение

в левые смежные классы. Положим  $\eta_i = \theta_i|_K$ . Тогда  $\eta_i$  - мономорфное вложение  $K/P \hookrightarrow L/P$  и  $\eta_i \neq \eta_j$  при  $i \neq j$ . Действительно, если  $\eta_i = \eta_j$ , то  $\theta_i^{-1}(\theta_j(u)) = u \quad \forall u \in K$ . В таком случае  $\theta_i^{-1}\theta_j \in H$ , вопреки предположению.

Пусть теперь  $\eta$  - любой мономорфизм  $K/P \hookrightarrow L/P$ . Так как  $L$  - поле разложения над  $P$  некоторого многочлена  $f \in P[X]$ , то  $L$  будет полем разложения того же многочлена над  $K$  и над  $\eta(K)$ . Следовательно (по теореме об изоморфизмах полей разложения), изоморфизм  $\eta : K \rightarrow \eta(K)$  может быть продолжен до автоморфизма  $\theta$  расширения  $L/P$ . Другими словами,  $\theta \in \text{Gal} L/P$  и, стало быть,  $\theta = \theta_i \mu$  для некоторого  $\mu \in H$ . Но тогда  $\eta = \theta|_K = \theta_i|_K = \eta_i$ , т.е.  $\eta_1 = 1, \dots, \eta_n$  - полный комплект мономорфизмов  $K/P \hookrightarrow L/P$ .

Н) Предположив линейную зависимость  $\sum_i a_i u_i = 0, a_i \in P$ , элементов  $u_1, \dots, u_n \in K$  и применяя  $\eta_j$ , мы получаем линейную однородную систему

$$\sum_{i=1}^n a_i \eta_j(u_i) = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

порядка  $n$  с ненулевым решением  $(a_1, \dots, a_n)$ , что означает  $\det(\eta_j(u_i)) = 0$ .

Обратно: предположим, что  $\det(\eta_j(u_i)) = 0$ . В таком случае существует ненулевое решение  $(a_1, \dots, a_n), a_i \in L$ , однородной системы  $\sum_j \eta_j(u_i) x_j = 0, 1 \leq i \leq n$ , а это означает, что  $(u_1, \dots, u_n)$  базисом для  $K$  не является: если любой элемент  $u \in K$  записывается в виде  $\sum_i c_i u_i, c_i \in P$ , и

$$\sum_j a_j \eta_j(u) = \sum_{i,j} a_j c_i \eta_j(u_i) = \sum_i \left( \sum_j a_j \eta_j(u_i) \right) c_i = 0$$

то это противоречит независимости мономорфизмов  $\eta_1, \dots, \eta_n$  (следствие 1 леммы Дедекинда-Артина).

Предложение 4. Расширение Галуа  $L/P$  с конечным  $P$  обладает нормальным базисом.

Доказательство. В случае конечного поля  $P$  расширение  $L/P$  будет циклическим и

$$G = \text{Gal} L/P = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{m-1}\}$$

где  $m = [L : P]$ . Интерпретируем  $\sigma$  как линейный оператор в  $L$  над  $P$ , поскольку

$$\sigma(u + v) = \sigma(u) + \sigma(v), \quad \sigma(au) = a\sigma(u), \quad a \in P$$

Известно, что  $P[X]$ -модуль, определённый линейным оператором, является прямой суммой циклических подпространств с аннуляторами - инвариантными множителями  $d_1(X), \dots, d_s(X)$ , где  $d_s(X)$  - минимальный многочлен линейного оператора (произведение всех инвариантных множителей суть характеристический многочлен). Весь  $P[X]$ -модуль является циклическим в точности тогда, когда характеристический многочлен совпадает с минимальным, т.е. степень минимального многочлена совпадает с размерностью всего пространства.

Именно так обстоит дело в случае с  $\sigma$ . Так как  $\sigma^m = 1$ , то  $X^m - 1$  - характеристический многочлен. С другой стороны, если

$$f(X) = X^k + a_1 X^{k-1} + \dots + a_k, \quad a_i \in P, \quad k < m$$

то  $f(\sigma) \neq 0$ , поскольку автоморфизмы  $1, \sigma, \dots, \sigma^k$  различны, следовательно, линейно независимы над  $L$  и, тем более, над  $P$ .

Тот факт, что  $L$  циклично (как  $P[X]$ -модуль), означает, что  $L/P$  имеет базис вида  $(u, \sigma(u), \dots, \sigma^{m-1}(u))$ . Но это и есть нормальный базис для  $l/P$ .

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $K, L$  - два поля. Семейство  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  мономорфизмов  $K \hookrightarrow L$  называется алгебраически независимым над  $L$ , если

$$f \in L[X_1, \dots, X_n], \quad f(\eta_1(u), \dots, \eta_n(u)) = 0 \quad \forall u \in K \implies f = 0$$

**П р е д л о ж е н и е 5.** Пусть  $P$  - бесконечное поле,  $K$  - конечномерное сепарабельное расширение над  $P$ ,  $L$  - нормальное замыкание расширения  $K/P$ . Пусть  $\eta_1, \dots, \eta_n$  -  $n = [K : P]$  различных мономорфизмов  $K/P \hookrightarrow L/P$ . Тогда  $\eta_i$  алгебраически независимы над  $L$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $f(\eta_1(u), \dots, \eta_n(u)) = 0 \quad \forall u \in K$  для некоторого  $f \in L[X_1, \dots, X_n]$ . Пусть  $(u_i)$  - базис для  $K/P$ . Тогда при любом выборе  $a_i \in P$  имеем

$$\begin{aligned} 0 &= f\left(\eta_1\left(\sum_i a_i u_i\right), \dots, \eta_n\left(\sum_i a_i u_i\right)\right) = \\ &= f\left(\sum_i a_i \eta_1(u_i), \dots, \sum_i a_i \eta_n(u_i)\right). \end{aligned}$$

Если положить

$$g(X_1, \dots, X_n) = f\left(\sum \eta_1(u_i) X_i, \dots, \sum \eta_n(u_i) X_i\right)$$

то  $g(a_1, \dots, a_n) = 0$  при любых  $a_i \in P$ . Пусть  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  - базис для  $L/P$ . Тогда можно написать

$$g(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^m g_j(X_1, \dots, X_n) v_j$$

где  $g_j(X_1, \dots, X_n) \in P[X_1, \dots, X_n]$ . Условие  $g(a_1, \dots, a_n) = 0$  выражается в виде  $g_j(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall j$ . Поскольку это справедливо при всех  $a_i \in P$ , из соответствия между полиномиальными функциями и многочленами над бесконечным полем вытекает, что  $g_j(X_1, \dots, X_n) = 0$ , и, стало быть,  $g(X_1, \dots, X_n) = 0$ .

В силу предложения 3  $\det(\eta_j(u_i)) \neq 0$ , так что матрица  $(\eta_j(u_i))$  имеет обратную  $(v_{ij}) \in M_n(L)$ . Значит,

$$g\left(\sum_{j,k} v_{1j} \eta_j(u_k) X_k, \dots, \sum_{j,k} v_{nj} \eta_j(u_k) X_k\right) = f(X_1, \dots, X_n)$$

Поэтому  $g(X_1, \dots, X_n) = 0 \implies f(X_1, \dots, X_n) = 0$ , что и доказывает алгебраическую независимость  $\eta_i$  над  $L$ .

Мы подошли к центральному результату.

**Т е о р е м а 6.** Любое конечномерное расширение Галуа  $L/P$  имеет нормальный базис.

**Доказательство.** В силу предложения 4 поле  $P$  можно считать бесконечным. Как показывает предложение 5, автоморфизмы  $\eta_1, \dots, \eta_n$  расширения  $L/P$  алгебраически независимы над  $L$ .

Мы видели также, что если  $u \in L$ , то

$$(\eta_1(u), \dots, \eta_n(u)) - \text{базис} \iff \det((\eta_i \eta_j)(u)) \neq 0.$$

Положим  $\eta_i \eta_j = \eta_{i(j)}$ . Тогда  $j \mapsto i(j)$  - перестановка на  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Рассмотрим теперь алгебру многочленов  $L[X_1, \dots, X_n]$  и матрицу  $X = (x_{i(j)})$ . Утверждается, что  $\det X \neq 0$ . С этой целью выберем специализацию  $x_1 = 1, x_i = 0, i > 1$ . Так как перестановки  $j \mapsto i(j)$

при различных  $i$  различны, то  $x_1$  появляется один и только один раз в каждой строке и в каждом столбце матрицы  $X$ . Следовательно,  $\det X (x_1 = 1, x_i = 0, i > 1) = \pm 1$ . Тем более  $\det X \neq 0$  при любом  $X$ .

В силу алгебраической независимости  $\eta_i$  над  $L$  найдётся  $u \in L$ , для которого  $\det((\eta_i \eta_j)(u)) \neq 0$ . В таком случае  $(\eta_1(u), \dots, \eta_n(u))$  - нормальный базис.

На языке теории представлений теорема о нормальном базисе утверждает, что представление группы Галуа на аддитивной группе поля  $L$  (на векторном пространстве) является регулярным. Можно также сказать, что  $L$  - свободный модуль размерности 1 над групповым кольцом  $P[G]$ . Такой результат можно рассматривать как первый шаг в гораздо более тонких исследованиях в алгебраической теории чисел. Именно, пусть  $L$  - числовое поле (конечное расширение поля  $\mathbb{Q}$ ) и  $O_L$  - кольцо в  $L$  целых алгебраических чисел. Строение  $O_L$  как  $\mathbb{Z}[G]$ -модуля - трудная задача.

Казалось бы, теорема о нормальном базисе обесценивает теоретико-групповую часть теории Галуа: регулярное представление не очень интересно. Но надо иметь в виду также мультипликативную структуру поля и то обстоятельство, что группа Галуа реализуется как группа перестановок корней исходного многочлена, а это действие может обладать свойствами примитивности, кратной транзитивности и т.д.

## 12.4.5 Galois Extensions and Related Matters to Kostrikin 3

### Prime numbers in arithmetic progression.

Из определения круговых многочленов в 22 мы получим сейчас два простых утверждения, оформленных в виде лемм.

Лемма 1. Пусть  $a \neq 0$  - целое число,  $n$  - натуральное число, не делящееся на простое число  $p$ . Тогда

$$p | \Phi_n(a) \iff \{ a \text{ имеет период } n \text{ в } Z_p^* \}$$

(эквивалентно:  $a^n \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $a^m \not\equiv 1 \pmod{p} \quad \forall m < n$ ).

Доказательство. Рассмотрим разложение

$$X^n - 1 = \Phi_n(X) \prod_{d|n, d < n} \Phi_d(X) \in Z_p^*[X]$$

Н) Если  $\Phi_n(a) = 0$  в  $Z_p$ , то согласно (\*) имеем  $a^n - 1 = 0$  в  $Z_p$ . Если, кроме того,  $\Phi_m(a) = 0$  для некоторого  $m|n, m < n$ , то  $X^n - 1 = (X - a)^2 f(X)$ . Но производная  $(X^n - 1)' = nX^{n-1}$  взаимно проста с  $X^n - 1$ , поскольку  $n \neq 0$  в  $Z_p$ . Поэтому  $X^n - 1$  не имеет кратных корней. Это означает также, что  $a$  не может быть корнем многочлена  $X^m - 1, m < n, m|n$ , поскольку  $X^m - 1 = \prod_{d|m, d < m} \Phi_d(X)$ . Значит,  $a$  имеет период  $n$ .

Н) Пусть теперь, обратно,  $a$  имеет период  $n$  в  $Z_p^*$ . Если  $\Phi_d(a) = 0$  для некоторого  $d|n, d < n$ , то, как мы уже видели в 1),  $a^d = 1$  в  $Z_p^*$  - противоречие. Остаётся единственная возможность  $\Phi_n(a) = 0$ , (т.е.  $p | \Phi_n(a)$ ).

Лемма 2. Пусть  $n \in \mathbb{Z}, p$  - простое число, не делящее  $n$ . Тогда

$$\Phi_n(a) \equiv 0 \pmod{p} \text{ для некоторого } a \in \mathbb{Z} \iff p \equiv 1 \pmod{n}$$

Доказательство. По лемме 1  $\Phi_n(a) \equiv 0 \pmod{p} \implies a^n \equiv 1 \pmod{p}$ , причём  $n$  - период элемента  $a$ . Но тогда  $n \leq p - 1$ , поскольку всегда  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , и  $n | (p - 1)$ , т.е.  $p \equiv 1 \pmod{n}$ .

Обратно: если  $p \equiv 1 \pmod{n}$ , то в силу цикличности  $Z_p^*$  найдётся  $a \in \mathbb{Z}$  периода  $n$  в  $Z_p^*$ . Снова по лемме 1 имеем  $\Phi_n(a) \equiv 0 \pmod{p}$ .

Теорема 1 (частный случай теоремы Дирихле). В арифметической прогрессии  $kn + 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , существует бесконечно много простых чисел.

Доказательство. Действительно, при любом фиксированном  $n > 1$  имеем

$$\Phi_n(a) = a^m + \alpha_1 a^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} a + 1, \quad m = \varphi(n)$$

Предположим, что существует лишь конечное множество  $M = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$  простых чисел таких, что  $\Phi_n(a) \equiv 0 \pmod{p_i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , для всех достаточно больших натуральных чисел  $a$ . Однако для  $a = (p_1 p_2 \dots p_s)^N$ ,  $N \gg 0$ , будет  $\Phi_n(a) \equiv 1 \pmod{p_i}$ ,  $1 \leq i \leq s$ , противоречие.

Стало быть, существует бесконечно много простых чисел  $p$  таких, что  $\Phi_n(a) \equiv 0 \pmod{p}$  при подходящем выборе натурального числа  $a = a_p$ . По лемме 2 получаем  $p \equiv 1 \pmod{n}$  для каждого такого простого  $p$ .

**Н) Расширения с абелевой группой Галуа.** Говорят о циклических, абелевых, разрешимых расширениях, когда соответствующие группы Галуа циклические, абелевы или разрешимые. Конечных абелевых групп данного порядка, в общем, довольно много, поэтому интересно посмотреть на них с точки зрения теории Галуа.

**Теорема 2.** Пусть  $A$  - произвольная конечная абелева группа. Тогда существует нормальное расширение  $F/\mathbb{Q}$  с группой Галуа

$$\text{Gal } F/\mathbb{Q} \cong A$$

Доказательство. По основной теореме о строении конечных абелевых групп (гл. 2, §3, теорема 10)

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$$

где  $A_j = \langle u_j \rangle$  - циклическая группа порядка  $m_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , причём  $m_1 | m_2, \dots, m_{k-1} | m_k$ . Целые числа  $m_j$  называются инвариантами или множителями группы  $A$ . Очевидно,

$$|A| = m_1 m_2 \dots m_k$$

По теореме 1 найдутся попарно различные простые числа

$$p_1, p_2, \dots, p_k \quad (p_i \neq p_j, \text{ даже если } m_i = m_j)$$

такие, что

$$p_j - 1 = n_j m_j$$

Рассмотрим круговое поле  $\Gamma_n = \mathbb{Q}(\zeta)$ ,  $\zeta^n = 1$ , отвечающее целому числу  $n = p_1 p_2 \dots p_k$ , так что

$$\begin{aligned} [\Gamma_n : \mathbb{Q}] &= \varphi(n) = \varphi(p_1) \varphi(p_2) \dots \varphi(p_k) = \\ &= (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1) = n_1 m_1 n_2 m_2 \dots n_k m_k \end{aligned}$$

Заметим, что если  $F_1, F_2$  - два подполя в поле  $F$ , то наименьшее поле, содержащее  $F_1$  и  $F_2$ , обозначается  $F_1 \cdot F_2$  и называется композитом полей  $F_1, F_2$ . Далее,

$$\Gamma_s \cap \Gamma_t = \mathbb{Q} \text{ при } \text{НОД}(s, t) = 1 \text{ и } \Gamma_s \Gamma_t = \Gamma_{st}.$$

В нашем случае

$$\Gamma_n = \Gamma_{p_1} \cdot \Gamma_{p_2} \dots \Gamma_{p_k}$$

где



$$\Gamma_{p_j} = \mathbb{Q}(\zeta_j), \quad \zeta_j = \zeta^{p_1 \dots \hat{p}_j \dots p_k}, \quad \zeta_j^{p_j} = 1$$

Теперь очевидно, что

$$\{ \text{Gal } \Gamma_{p_j}/\mathbb{Q} \} \cap \left\{ \prod_{i \neq j} \text{Gal } \Gamma_{p_i}/\mathbb{Q} \right\} = \langle 1 \rangle$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Gal } \Gamma_n/\mathbb{Q} &= \text{Gal } \Gamma_{p_1}/\mathbb{Q} \times \dots \times \text{Gal } \Gamma_{p_k}/\mathbb{Q} = \langle \sigma_1 \rangle \times \dots \times \langle \sigma_k \rangle := G, \\ \sigma_j : \zeta_j &\mapsto \zeta_j^{a_j}, \quad \langle a_j \rangle = Z_{p_j}^*, \quad |\langle \sigma_j \rangle| = n_j m_j; \\ \sigma_j : \zeta_i &\mapsto \zeta_i, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

В группе  $G$  содержится подгруппа

$$H = \langle \sigma_1^{m_1} \rangle \times \dots \times \langle \sigma_k^{m_k} \rangle$$

порядка  $n_1 \dots n_k$ . Понятно, что  $H \triangleleft G$  и факторгруппа

$$G/H = \langle \bar{\sigma}_1 \rangle \times \dots \times \langle \bar{\sigma}_k \rangle, \quad \bar{\sigma}_j = \sigma_j \langle \sigma_j^{m_j} \rangle,$$

являющаяся прямым произведением циклических групп порядков  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , изоморфна  $A$ . Если теперь  $F = \Gamma_n^H$  - подполе  $H$ -инвариантов (неподвижных при действии  $H$  элементов) в  $\Gamma_n$ , то в силу соответствия Галуа

$$\text{Gal } F/\mathbb{Q} \cong G/H \cong A.$$

**N) Норма и след.** Пусть  $F/P$  - расширение Галуа,

$$G = \text{Gal } F/P = \langle \eta_1 = 1, \eta_2, \dots, \eta_n \rangle$$

Для  $u \in F$  положим

$$T_P^F(u) = \sum_{i=1}^n \eta_i(u), \quad N_P^F(u) = \prod_{i=1}^n \eta_i(u)$$

и назовём их соответственно следом и нормой элемента  $u$  в  $F/P$ . Очевидно, они неподвижны относительно  $G$ , следовательно, содержатся в  $P$ . Таким образом, мы имеем отображения

$$T_P^F : u \mapsto T_P^F(u), \quad N_P^F : u \mapsto N_P^F(u)$$

из  $F$  в  $P$ . Для  $u, v \in F, a \in P$  имеем

$$T_P^F(u+v) = \sum_i \eta_i(u+v) = \sum_i \eta_i(u) + \sum_i \eta_i(v) = T_P^F(u) + T_P^F(v),$$

$$T_P^F(au) = \sum_i \eta_i(au) = a \sum_i \eta_i(u) = a \cdot T_P^F(u),$$

$$N_P^F(uv) = \prod_i \eta_i(uv) = \prod_i \eta_i(u) \prod_i \eta_i(v) = N_P^F(u) \cdot N_P^F(v),$$

$$N_P^F(au) = \prod_i \eta_i(au) = a^n \prod_i \eta_i(u) = a^n \cdot N_P^F(u)$$

Итак,  $T = T_P^F$  - линейная функция на векторном пространстве  $F$  над  $P$ ;  $N = N_P^F$  - мультипликативное однородное отображение степени  $n$ ;  $N|_{F^*}$  - гомоморфизм из  $F^*$  в  $P^*$ .

**П р и м е р 1.** Пусть  $m$  - целое число, свободное от квадратов,  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  - квадратичное поле. Тогда  $u = a + b\sqrt{m}$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ , - общий вид элементов из  $F$  и

$$G = \text{Gal} F/P = \{1, \eta : a + b\sqrt{m} \mapsto a - b\sqrt{m}\}$$

т.е.  $T(a+b\sqrt{m}) = 2a$ ,  $N(a+b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2$ . Имеем полную аналогию с расширением  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ,  $m = -1$ , когда  $N(u) = a^2 + b^2$  - квадрат модуля комплексного числа.

В нашем случае, очевидно,  $T(F) = \mathbb{Q}$ . Информацию о  $N(F^*)$  получить гораздо труднее, поскольку возникает нетривиальный вопрос: для каких рациональных чисел  $r$  уравнение  $x^2 - my^2 = r$  имеет решения в  $\mathbb{Q}$ ?

Имеются две теоремы о  $\text{Ker } N$  и  $\text{Ker } T$ . Наиболее известная из них следующая.

**Т е о р е м а 3** (теорема 90 Д. Гильберта, 1897 г.). Пусть  $F$  - циклическое расширение Галуа поля  $P$ ,  $G = \text{Gal } F/P = \langle \eta \rangle$ ,  $|G| = n$ . Тогда

$$N_P^F(u) = 1 \text{ для } u \in F \iff u = v(\eta(v))^{-1} \text{ для некоторого } v \in F.$$

В одну сторону результат тривиален: если  $u = v(\eta(v))^{-1}$ , то  $N(u) = N(v) \cdot N(\eta(v)^{-1}) = N(v) \cdot N(v)^{-1} = 1$ . Чтобы доказать обратное, мы установим более общий (и более поздний) результат о расширениях Галуа.

**Т е о р е м а 4** (А. Шпайзер). Пусть  $F$  - конечномерное расширение Галуа поля  $P$ ,  $G = \text{Gal } F/P$ . Пусть  $\zeta \mapsto u_\zeta$  - отображение  $G$  в  $F^*$ , удовлетворяющее условию

$$u_{\zeta\mu} = \zeta(u_\mu) u_\zeta \quad \forall \mu, \zeta \in G$$

Тогда найдётся  $0 \neq v \in F$ , для которого

$$u_\mu = v(\mu(v))^{-1} \quad \forall \mu \in G$$

Докажем это. Так как  $u_\mu \neq 0$ , а автоморфизмы  $\mu \in G$  линейно независимы над  $F$ , то существует элемент  $w \in F$ , для которого

$$v = \sum_{\mu \in G} u_\mu \mu(w) \neq 0$$

Тогда при любом  $\zeta \in G$  имеем

$$\begin{aligned} \zeta(v) &= \sum_{\mu} \zeta(u_\mu) (\zeta\mu)(w) = \sum_{\mu} u_{\zeta\mu} u_\zeta^{-1} (\zeta\mu)(w) = \\ &= \left( \sum_{\mu} u_{\zeta\mu} (\zeta\mu)(w) \right) u_\zeta^{-1} = \left( \sum_{\mu} u_\mu \mu(w) \right) u_\zeta^{-1} = v u_\zeta^{-1} \end{aligned}$$

Следовательно,  $u_\zeta = v(\zeta(v))^{-1}$ .

Доказательство теоремы Гильберта. Пусть  $u \in F$ ,  $N(u) = 1$ . Положим

$$u_\eta := u, \quad u_{\eta^i} := u\eta(u)\eta^2(u)\dots\eta^{i-1}(u), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Тогда при  $i + j \leq n$  будем иметь

$$u_{\eta^j} \cdot \eta^j(u_{\eta^i}) = u\eta(u)\dots\eta^{j-1}\eta^j(u)\dots\eta^{i+j-1}(u) = u_{\eta^{i+j}}$$

То же соотношение имеет место при  $i + j > n$ , поскольку  $u_1 = u_{\eta^n} = N(u) = 1$ . Таким образом, выполнено условие теоремы 4 при  $G = \langle \eta \rangle$ . Отсюда вытекает существование элемента  $v$  с нужным свойством  $u = u_\eta = v(\eta(v))^{-1}$ .

Доказанные теоремы имеют аддитивные аналоги.

**Теорема 5 (А. Шпайзер).** Пусть  $F, P, G$  — те же, что и в мультипликативной теореме 4, и пусть  $\mu \mapsto d_\mu$  — отображение  $G \rightarrow F$ , удовлетворяющее условию

$$d_{\zeta\mu} = d_\zeta + \zeta(d_\mu) \quad \forall \zeta, \mu \in G$$

Тогда найдётся  $c \in F$ , для которого

$$d_\mu = c - \mu(c), \quad \mu \in G$$

Доказательство. Мы видели, что существует  $u \in F$  с  $T(u) \neq 0$ . Положим

$$c = T(u)^{-1} \sum_{\mu} d_\mu \mu(u)$$

Тогда

$$\begin{aligned} c - \zeta(c) &= T(u)^{-1} \sum_{\mu} [d_\mu \mu(u) - \zeta(d_\mu) \cdot \zeta \mu(u)] = \\ &= T(u)^{-1} \sum_{\mu} [d_\mu \mu(u) + d_\zeta \cdot \zeta \mu(u) - d_{\zeta\mu} \cdot \zeta \mu(u)] = \\ &= T(u)^{-1} d_\zeta \sum_{\mu} \zeta \mu(u) = d_\zeta T(u)^{-1} \sum_{\sigma} \sigma(u) = d_\zeta T(u)^{-1} T(u) = d_\zeta. \end{aligned}$$

Элемент  $\zeta \in G$  произвольный.

Пусть теперь  $G = \langle \eta \rangle$ ,  $|G| = n$ , и предположим, что  $d \in F$  — элемент, для которого  $T(d) = 0$ . Положим

$$d_\eta := d, \quad d_{\eta^i} := d + \eta(d) + \dots + \eta^{i-1}(d), \quad 1 \leq i \leq n$$

Тогда, как и в случае норм, для теоремы Гильберта имеет место заключение аддитивной теоремы Шпайзера. Действительно,

$$d_1 = d_{\eta^n} = d + \eta(d) + \dots + \eta^{n-1}(d) = T(d) = 0$$

Поэтому для любых  $i, j$  имеем

$$\begin{aligned} d_{\eta^i \eta^j} &= d_{\eta^{i+j}} = d + \eta(d) + \dots + \eta^{i-1}(d) + \eta^i[d + \eta(d) + \dots + \eta^{j-1}(d)] = \\ &= d_{\eta^i} + \eta^i(d_{\eta^j}) \end{aligned}$$

т.е.  $d_{\zeta\mu} = d_\zeta + \zeta(d_\mu) \quad \forall \zeta, \mu \in G$  и согласно теореме 5  $d_\mu = c - \mu(c), \mu \in G$ . Стало быть, справедлива

**Теорема 6 (аддитивная форма теоремы 90 Гильберта).** Пусть  $F/P$  — циклическое расширение степени  $n$  с группой  $\text{Gal} F/P = \langle \eta \rangle$ ,  $d \in F$  — элемент со следом 0. Тогда найдётся  $c \in F$  такой, что  $d = c - \eta(c)$ .

**Н) Циклические расширения.** Применим теперь теорему 90 Гильберта и её аддитивный аналог к простейшему типу расширений.

**Теорема 7.** Пусть  $P$  содержит  $n$  различных корней степени  $n$  из 1. Справедливы следующие утверждения.

Н) Пусть  $F/P$  —  $n$ -мерное циклическое расширение. Тогда  $F = P(u)$ , где  $u^n \in P$ .

Н) Пусть  $X^n - a \in P[X]$  и  $\eta$  — некоторый корень многочлена  $X^n - a$ . Тогда  $P(u)/P$  — циклическое расширение степени  $m$ ,  $m|n$  и  $u^m \in P$ .

Доказательство. 1) Из условия теоремы следует, что характеристика поля  $P$  взаимно проста с  $n$ . Пусть  $\zeta \in P$ ,  $\zeta^n = 1$ ,  $\zeta^i \neq 1$ ,  $i < n$ ,  $\eta$  — образующая группы Галуа. По условию имеем  $\eta^i(\zeta) = \zeta$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , так что  $(N_P^F(\zeta)) = \zeta^n = 1$ . Следовательно, по теореме 3 найдётся  $u \in F$ , для которого  $\zeta = u/\eta(u)$ . В таком случае  $\eta(u) = \zeta^{-1}u$  и  $\eta(u^n) = \eta(u)^n = (\zeta^{-1}u)^n = u^n$ , откуда  $u^n = a \in P$ . Кроме того,  $\eta(u) = \zeta^{-1}u \implies \eta^i(u) = \zeta^{-i}u$ , так что  $\text{Gal } F/P$ -орбита элемента  $u$  содержит  $n$  различных элементов. Таким образом, минимальный многочлен элемента  $u$  над  $P$  имеет степень  $n$  и  $F = P(u)$ .

Н) Обратно, пусть  $a \in P$ ,  $u^n = a$ ,  $\zeta$  — примитивный корень  $n$ -й степени из 1. Так как  $(\zeta^i u)^n = a$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , то все корни многочлена  $X^n - a$  лежат в  $P(u)$ , т.е.  $P(u)$  нормально над  $P$ .

Положим  $G = \text{Gal } P(u)/P$ . Если  $\eta \in G$ , то  $(\eta(u))^n = a$ , откуда  $\eta(u) = \zeta^{i(\eta)}u$ . Без труда проверяется, что отображение  $\eta \mapsto \zeta^{i(\eta)}$  является инъективным гомоморфизмом  $G$  в группу  $\langle \zeta \rangle$ . Но всякая подгруппа циклической группы циклическая, поэтому  $G$  циклическая, и если  $|G| = m$ , то  $m|n$ . Положив  $G = \langle \sigma \rangle$ , мы замечаем, что  $\zeta^{i(\sigma)} = \zeta^{n/m}$  будет примитивным корнем степени  $m$  из 1. Наконец,

$$\sigma(u^m) = (\sigma(u))^m = (\zeta^{n/m}u)^m = u^m$$

так что  $u^m \in P$ .

**Следствие.** Пусть  $a \neq b^m$ , каковы бы ни были  $m | n$ ,  $m \neq 1$ ,  $b \in$

$P$ , и пусть по-прежнему  $\omega^n = 1 \implies \omega \in P$ . Тогда  $G = \text{Gal}(X^n - a)$  — группа порядка  $n$ . Доказательство. Пусть  $u^n - a = 0$ . Тогда  $\prod_{\eta \in G} \eta(u) \in P$ . Но  $\eta(u) = \zeta^{i(\eta)}u$ , а так как все корни степени  $n$  из 1 лежат в  $P$ , то  $\prod_{\eta \in G} \eta(u) = \omega u^{|G|} \in P \implies u^{|G|} \in P$ . Отсюда  $a = u^n = (u^{|G|})^d$ , где  $d = n/|G|$ . По условию (если положить  $b = u^{|G|}$ ) это возможно только при  $d = 1$ , т.е. при  $|G| = n$ .

Фактически мы убедились, что все двучленные уравнения  $X^n - a = 0$ ,  $a \in P$ , при условии  $\zeta \in P$  ( $\zeta^n = 1$ ,  $\zeta^m \neq 1$ ,  $0 < m < n$ ) имеют циклическую группу Галуа. При тех же предположениях верно и обратное утверждение. Более деликатная ситуация затрагивается в следующих двух теоремах.

**Теорема 8.** Всякое  $p$ -мерное циклическое расширение  $F$  поля  $P$  характеристики  $p > 0$  имеет вид  $F = P(c)$ , где  $c^p - c \in P$ .

Доказательство. Замечая, что  $1 \in P$  и  $T_P^F(1) = [F : P] \cdot 1 = p \cdot 1 = 0$ , воспользуемся теоремой 6:  $\eta(c) = c + 1$  для некоторого  $c \in F$ . В таком случае  $\eta^i(c) = c + i$ , т.е.  $\langle \eta \rangle$ -орбита  $\{c, c+1, \dots, c+p-1\}$  состоит из  $p = [F : P]$  элементов. Следовательно,  $F = P(c)$ . Кроме того,

$$\eta(c^p - c) = (\eta(c))^p - \eta(c) = (c+1)^p - (c+1) = c^p - c$$

так что  $c^p - c \in P$ .

Этой теореме можно придать более точную форму.

**Теорема 9 (Артин-Шрайер).** Пусть  $P$  — поле характеристики  $p > 0$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

Н)  $F/P$  — циклическое расширение степени  $p$ , по  $F = P(c)$ , где элемент  $c$  удовлетворяет уравнению  $X^p - X - a$  для некоторого  $a \in P$ .

Н) Обратно: при заданном  $a \in P$  многочлен  $f(X) = X^p - X - a$  либо имеет один корень в  $P$ , и тогда все его корни лежат в  $P$ , либо он неприводим. В последнем случае  $F = P(c)$  — циклическое расширение степени  $p$  над  $P$  для любого корня  $c$ :  $f(c) = 0$ .

Доказательство. Утверждение 1) эквивалентно теореме 8.

Обратно: если  $f(c) = 0$ , то  $f(c + i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p - 1$ , т.е. многочлен  $f(X)$  имеет  $p$  различных корней. Если один корень  $c \in P$ , то и  $c + i \in P$ . Предположим теперь, что  $c \notin P$ , и пусть  $f(X) = g(X)h(X)$ ,  $1 \leq \deg g(X) < p$ . Так как

$$f(X) = \prod_{i=0}^{p-1} (X - c - i)$$

то  $g(X)$  - произведение некоторой части линейных множителей. Пусть  $d = \deg g(X)$ . Коэффициент при  $X^{d-1}$  есть  $-\sum_i (c + i) = -dc + j$ . Но  $d \neq 0$  в  $P$  и, следовательно,  $c \in P$ , поскольку  $g \in P[X]$ , - противоречие. Таким образом,  $f(X)$  неприводим над  $P$ , а все его корни лежат в  $P(c)$ , так что расширение  $P(c)$  нормально над  $P$ . Поскольку  $f(X)$  не имеет кратных корней,  $P(c)$  - расширение Галуа. Существует автоморфизм  $\sigma$  поля  $P(c)$  над  $P$  такой, что  $\sigma(c) = c + 1$ . Образы  $\sigma^i(c) = c + i$ ,  $i = 0, 1, \dots, p - 1$ , различны и, стало быть, группа Галуа состоит из степеней  $\sigma^i$ , т.е. является циклической.

**Н) Критерий разрешимости уравнений в радикалах.** Коэффициенты алгебраических уравнений будем предполагать лежащими в поле  $P$  характеристики нуль. Итак, пусть  $f \in P[X]$ .

Определены и е. Говорят, что расширение  $F/P$  радикально, если оно обладает башней подполей

$$P = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_{r-1} \subset P_r = F$$

где

$$P_i = P_{i-1}(u_i), \quad u_i^{n_i} = a_i \in P_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad n_i \in \mathbb{N}$$

т.е.  $P_i$  получается из  $P_{i-1}$  присоединением некоторого радикала  $\sqrt[n_i]{a_i}$ .

Говорят также, что уравнение  $f(X) = 0$  разрешимо в радикалах над  $P$ , если существует радикальное расширение типа (1), содержащее все корни многочлена  $f$ .

Заметим, что  $F$  содержит нормальное расширение, а именно поле разложения, но не обязано само быть нормальным. Этот недостаток легко исправляется.

**Теорема 10.** Каждое радикальное расширение содержится в некотором нормальном радикальном расширении.

Доказательство проводим индукцией по высоте  $r$  башни (1). Если  $r = 1$  и  $F = P(u)$ ,  $u^n = a$ ,  $a \in P$ , а  $\zeta$  - первообразный корень степени  $n$  из 1, то поле разложения  $P(\zeta, u)$  многочлена  $X^n - a$  как раз и будет нормальным радикальным расширением.

Предполагая, что расширение  $P_{r-1} \supset P$  содержится в нормальном радикальном расширении  $K \supset P$  и  $F = P_{r-1}(u)$ ,  $u^n = a \in P_{r-1}$ , рассмотрим минимальный многочлен  $h(X)$  элемента  $a \in P_{r-1}$  над  $P$ . По определению нормальности многочлен  $h(X)$  над полем  $K$  распадается в произведение линейных множителей:

$$h(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_m), \quad a_1 = a$$

Пусть  $L$  - поле разложения над  $P$  многочлена  $h(X^n)$ . Так как пересечение и композит нормальных расширений всегда нормальны, то композит  $K \cdot L = K(\zeta, u_1, \dots, u_m)$ ,  $u_i^n = a_i$ , также нормален.

Почти столь же очевидна следующая

**Теорема 11.** Группа Галуа  $\text{Gal } F/P$  нормального радикального расширения  $F/P$  разрешима.

Доказательство тво. Без ограничения общности считаем, что  $F$  определено башней (1). Присоединим теперь к полю  $F$  первообразный корень  $\zeta$  степени

$$n = n_1 n_2 \dots n_{r-1} n_r$$

из 1 и рассмотрим башню

$$P \subset P(\zeta) \subset P_1(\zeta) \subset \dots \subset P_{r-1}(\zeta) \subset P_r(\zeta) = F(\zeta)$$

Группа  $\text{Gal}P(\zeta)/P$  абелева, а остальные последовательные расширения в башне (2) по теореме 7 являются циклическими. В силу соответствия Галуа группа  $G = \text{Gal}F(\zeta)/P$  обладает нормальным рядом

$$G \triangleright G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{r-1} \triangleright \{e\}$$

в котором факторгруппа  $G/G_0$  абелева, а остальные последовательные факторгруппы  $G_i/G_{i+1}$  циклические. По теореме 1 из §2 гл. 2 группа  $G$  должна быть разрешимой. Если  $H = \text{Gal}F(\zeta)/F$ , то  $H \triangleleft G$  (поскольку  $F/P$  - нормальное расширение) и  $\text{Gal}F/P \cong G/H$  - также разрешимая группа.

Мы подошли, наконец, к "коронному достижению" Э. Галуа.

**Теорема 12.** Полиномиальное уравнение  $f(x) = 0$  разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда группа  $\text{Gal}(f)$  разрешима.

**Доказательство.** 1) Предположим, что все корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  многочлена  $f(X)$  (нули уравнения  $f(x) = 0$ ) лежат в нормальном радикальном расширении  $F/P$ . Естественное включение

$$P \subset P(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \subset F$$

означает, что группа Галуа уравнения  $f(x) = 0$  является факторгруппой разрешимой (по теореме 11) группы  $\text{Gal} F/P$ . Поэтому она сама разрешима.

**N)** Пусть  $F$  - поле разложения многочлена  $f \in P[X]$ . Предположим, что группа  $G = \text{Gal}F/P$  разрешима и

$$G \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_{k-1} \triangleright G_k = \{e\}$$

**N)** её композиционный ряд. Тогда, как мы знаем, композиционные факторы  $G_i/G_{i+1}$  будут циклическими группами простых порядков. Соответствие Галуа в свою очередь гарантирует существование цепочки подполей

$$P \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{k-1} \subset F_k = F$$

в которой каждое последовательное расширение  $F_{i+1}/F_i$  будет циклическим простой степени.

Присоединим к  $F$  первообразный корень  $\zeta$  степени  $n = |G|$  из 1 и рассмотрим цепочку подполей

$$P \subset P(\zeta) \subset F_1(\zeta) \implies_2 (\zeta) \subset \dots \subset F_{k-1}(\zeta) \subset F_k(\zeta) = F(\zeta)$$

Каждое расширение  $F_{i+1}(\zeta)/F_i(\zeta)$  также будет циклическим простой степени  $p_i$ , делящей  $n$ . По теореме 7 поле  $F_{i+1}(\zeta)$  получается присоединением к  $F_i(\zeta)$  корня некоторого двучленного уравнения  $x^{p_i} - a = 0, a \in F_i(\zeta)$ . Это и означает, что  $F(\zeta)$  - радикальное расширение поля  $P$ , содержащее все корни многочлена  $f(X)$ , т.е. полиномиальное уравнение  $f(x) = 0$  разрешимо в радикалах.

Выше были приведены примеры нормализованных многочленов  $f \in \mathbb{Z}[X]$  любой степени  $n$  с симметрической группой Галуа. По только что доказанной теореме 12 соответствующие уравнения  $f(x) = 0$  неразрешимы в радикалах.

Предположим теперь, что корни многочлена  $f \in P[X]$ ,  $P \in \mathbb{R}$ , вещественны. Можно ли их получить, присоединяя к  $P$  вещественные значения радикалов из вещественных чисел? Уточним постановку вопроса.

Определение. Пусть  $L$  - поле разложения многочлена  $f \in P[X]$ ,  $P \subset L \subset \mathbb{R}$ . Говорят, что уравнение  $f(x) = 0$  разрешимо в вещественных радикалах, если существует поле  $F$ ,  $P \subset L \subset F \subset \mathbb{R}$ , с цепочкой подполей

$$P = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{m-1} \subset F_m = F, \quad F_{i+1} = F_i(\sqrt[p]{a_i})$$

где  $a_i \in F_i$  и  $\sqrt[p]{a_i}$  - вещественное значение радикала. Поле  $L$  в этом случае называется вещественным радикальным расширением поля  $P$ .

Теорема 13. Конечное нормальное расширение  $L/P$ ,  $P \subset L \subset \mathbb{R}$  будет вещественным радикальным в точности тогда, когда его группа Галуа является 2-группой.

Доказательство. 1) Любая конечная 2-группа  $G$  разрешима (см. упр. 2 из §1 гл. 2). Если теперь  $G = \text{Gal} L/P$  и

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = e$$

её композиционный ряд, то  $|G_i/G_{i+1}| = 2$ . Соответствие Галуа даст нам цепочку подполей

$$P = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_{n-1} \subset L_n = L$$

с циклическими степени 2 последовательными расширениями

$$L_{i+1} = L_i(\sqrt[p]{a_i}), \quad a_i \in L_i$$

Это и означает, что  $L/P$  - вещественное радикальное расширение.

Н) Будем исходить теперь из нормального вещественного радикального расширения  $L/P$ ,  $P \subset L \subset F \subset \mathbb{R}$ , где поле  $F$  обладает цепочкой подполей вида (3) с простыми числами  $p_i$ .

Группа Галуа  $G = \text{Gal} L/P$  разрешима, поэтому в цепочке подполей вида (4), отвечающей какому-то композиционному ряду группы  $G$ , последовательные расширения  $L_{i+1}/L_i$  будут циклическими простыми степенями. Без ограничения общности можно считать, что  $L/P$  - циклическое расширение простой степени  $q$  и что  $L \not\subset F_{m-1}$  (в противном случае можно было бы заменить  $F$  на  $F_{m-1}$ ). Тогда композит  $L \cdot F_{m-1}$  является циклическим расширением степени  $q$  над  $F_{m-1}$ . Заменяя  $P$  на  $F_{m-1}$  и  $L$  на  $L \cdot F_{m-1}$  (а потом возвращаясь к прежним обозначениям), мы редуцируем задачу к случаю, когда

$$P \subset L \subset P(\sqrt[p]{a}) \subset \mathbb{R}, \quad a \in P$$

и  $L/P$  - циклическое расширение простой степени  $q$ . Подразумевается, что  $\sqrt[p]{a}$  - вещественное значение радикала простой степени  $p$ . В рассматриваемой ситуации ни один из корней многочлена  $X^p - a$  не лежит в поле  $P \subset \mathbb{R}$ . Но известно (см. упр. 1 из §3), что многочлен  $X^p - a$ , не имеющий корней в поле  $P$ , неприводим над  $P(\zeta)$ ,  $\zeta^p = 1$ . Стало быть,  $[P(\sqrt[p]{a}) : P] = p$ , что возможно лишь при  $q = p$ , и  $L = P(\sqrt[p]{a})$  - расширение Галуа. В таком случае неприводимый многочлен  $X^p - a \in P[X]$  распадается в  $P(\sqrt[p]{a}) \subset \mathbb{R}$  на линейные множители. Так как при нечётном  $p$  не все корни многочлена вещественные, то приходим к выводу, что  $p = 2$ .

## 12.4.6 Rigidity and rationality in finite groups

В этом параграфе теория Галуа напрямую соединяется с теорией характеров.

Эскизность изложения частично компенсируется указанием соответствующей литературы.

### Definitions and formulation of the main theorem.

Пусть  $G$  - конечная группа с нейтральным элементом  $e$ . Зафиксируем какие-то классы сопряжённости  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m$  в  $G$  и положим

$$\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m) = \{(g_1, \dots, g_m) \mid g_i \in \mathcal{K}_i, g_1 g_2 \dots g_m = e\}$$

В  $\tilde{\mathcal{S}}$  выделим подмножество

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m) = \{(g_1, \dots, g_m) \in \tilde{\mathcal{S}} \mid \langle g_1, \dots, g_m \rangle = G\}$$

Очевидно,  $G$  действует сопряжением на  $\tilde{\mathcal{S}}$  и на  $\mathcal{S}$ . Считаем далее  $Z(G) = e$ . В таком случае действие  $G$  на  $\mathcal{S}$  свободно. Действительно, если  $g \in G$  оставляет  $(g_1, \dots, g_m)$  на месте, то  $g$  коммутирует со всеми  $g_i$ , а следовательно, со всеми элементами из  $G$ , поскольку  $\langle g_1, \dots, g_m \rangle = G$ . Но тогда  $g = e$ , поскольку  $Z(G) = e$ .

**О п р е д е л е н и е.** Говорят, что набор  $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$  классов сопряжённости жёсткий, если  $\mathcal{S}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m) \neq \emptyset$  и  $G$  действует на  $\mathcal{S}$  транзитивно, т.е., в силу свободы действия,  $|\mathcal{S}| = |G|$ .

Набор  $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$  называется сильно жёстким, если он жёсткий и  $\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}$  (вообще говоря,  $\mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{S}}$ ).

Таким образом, сильная жёсткость имеет место, если  $|\tilde{\mathcal{S}}| = |\mathcal{S}| = |G|$ . Заметим теперь, что

$$|\tilde{\mathcal{S}}| = N(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$$

равно числу решений  $(g_1^0, \dots, g_m^0)$  уравнения

$$g_1 g_2 \dots g_m = e, \quad g_i \in \mathcal{K}_i$$

Пусть теперь  $\text{Cl}(G) = \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r\}$  - множество всех классов сопряжённости конечной группы  $G$ , а  $n$  - её показатель (или экспонента), т.е. НОК порядков всех элементов группы  $G$ . Группа  $U(Z_n)$  действует на  $G : g \mapsto g^s$ ,  $s \in U(Z_n)$ , и аналогично - на  $\text{Cl}(G)$ . Далее,  $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r\}$  - множество неприводимых комплексных характеров группы  $G$ . Мы знаем, что значения  $\chi_i(g)$  лежат в круговом поле  $\Gamma_n = \mathbb{Q}(\zeta)$ ,  $\zeta^n = 1$ . Следовательно, существует естественное действие группы  $\text{Gal } \Gamma_n / \mathbb{Q} \cong U(Z_n)$  на  $\text{Irr}(G)$ . Действия  $U(Z_n)$  на  $\text{Cl}(G)$  и на  $\text{Irr}(G)$  связаны формулой

$$\sigma_s(\chi)(g) = \chi(g^s)$$

где, как обычно,  $\sigma_s(\zeta) = \zeta^s$ .

**О п р е д е л е н и е.** Класс  $\mathcal{K} \in \text{Cl}(G)$  называется  $\mathbb{Q}$ -рациональным (или просто рациональным), если выполнены следующие эквивалентные свойства:

**N)**  $\mathcal{K}$  остаётся на месте при действии  $U(Z_n)$ ;

2) каждый характер  $\chi \in \text{Irr}(G)$  принимает на  $\mathcal{K}$  значения в  $\mathbb{Q}$  (на самом деле в  $\mathbb{Z}$ ). Семейство  $\{\mathcal{K}_i \mid 1 \leq i \leq m\}$  классов сопряжённости группы  $G$  рационально, если рационален каждый из классов  $\mathcal{K}_i$ .



Условие рациональности означает, что если  $g \in \mathcal{K}$ , то все образующие циклической группы  $\langle g \rangle$  лежат в  $\mathcal{K}$ , т.е. сопряжены с  $g$ . Например, в симметрической группе  $S_n$  каждый класс сопряжённости рационален.

Более общо, пусть  $F$  - любое поле,  $\mathcal{K} = g^G$ ,  $\text{НОД}(|\langle g \rangle|, \text{char } F) = 1$ . Тогда говорят об  $F$ -рациональности  $\mathcal{K}$ , коль скоро  $\chi(g) \in F \ \forall \chi \in \text{Irr}(G)$ , или, эквивалентно, если  $\mathcal{K}^n = \mathcal{K} \ \forall n$  с  $\sigma_n \in \text{Gal } F(\zeta)/F$ .

**Пример 1.** Знакопеременная группа  $A_5$  имеет пять классов сопряжённости элементов порядков 1, 2, 3, 5, 5. Пусть  $5A, 5B$  - два класса сопряжённости порядка 5. Если  $a \in 5A$ , то  $a^{-1} \in 5A$  и  $a^2, a^3 \in 5B$ , так что  $5a, 5B$  не  $\mathbb{Q}$ -рациональны. Отметим, что

$$\chi(5A), \chi(5B) \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(\zeta), \quad \zeta^5 = 1$$

Важность понятий сильной жёсткости и  $\mathbb{Q}$ -рациональности семейства  $\{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m\}$  классов сопряжённости конечной группы  $G$  объясняется следующей фундаментальной теоремой, которую мы вынуждены принять без доказательства.

**Теорема 1** (Г.В. Белый, Дж. Томпсон). Пусть  $G$  - конечная группа с тривиальным центром, обладающая рациональным сильно жёстким семейством. Тогда  $G \cong \text{Gal } F/\mathbb{Q}$  для некоторого расширения Галуа  $F/\mathbb{Q}$ .

Если рациональности нет, то  $\mathbb{Q}$  в теореме заменяется на расширение

$$L = \mathbb{Q}(\text{Irr}(G)) = \mathbb{Q}(\chi(g) | \forall \chi \in \text{Irr}(G); g \in \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m) = \mathbb{Q}(\zeta)$$

Во всех известных случаях групп, близких к простым, для которых установлено свойство сильной жёсткости, семейство  $\{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m\}$  является триплетом, т.е.  $m = 3$ . В этом случае, очевидно,  $G$  - группа с двумя образующими. Теорема 1 делает актуальной задачу: выразить свойство сильной жёсткости на языке теории характеров, т.е. найти явные формулы для числа  $N(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$ . Этим мы и займёмся, после чего рассмотрим примеры.

**N)** Подсчёт решений. Усреднение по группе и лемма Шура (гл. 3, §4) дают

$$\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \Psi(txt^{-1}) = \frac{\chi(x)}{\chi(e)} E$$

( $\chi = \chi_\Psi$  - характер неприводимого представления  $\Psi$  группы  $G$ ). Умножая это соотношение на  $\Psi(y)$  справа и переходя к следу, получим

$$\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \chi(txt^{-1}y) = \frac{\chi(x)\chi(y)}{\chi(e)}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{t_1 \in G} \Psi(t_1 x_1 t_1^{-1} t_2 x_2 t_2^{-1} y) &= \frac{\chi(x_1)}{\chi(e)} \Psi(t_2 x_2 t_2^{-1} y) \\ \frac{1}{|G|^2} \sum_{t_1, t_2 \in G} \Psi(t_1 x_1 t_1^{-1} t_2 x_2 t_2^{-1} y) &= \frac{\chi(x_1)}{\chi(e)} \frac{1}{|G|} \sum_{t_2 \in G} \Psi(t_2 x_2 t_2^{-1} y) = \\ &= \frac{\chi(x_1)\chi(x_2)}{\chi(e)^2} \chi(y). \end{aligned}$$

Очевидная индукция по  $m$  даёт

$$\frac{1}{|G|^m} \sum_{t_1, \dots, t_m \in G} \chi(t_1 x_1 t_1^{-1} \dots t_m x_m t_m^{-1} y) = \frac{\chi(x_1) \dots \chi(x_m)}{\chi(e)^m} \chi(y)$$

Пусть теперь  $\varphi$  - любая центральная функция (функция классов) на  $G$ . Тогда

$$\varphi = \sum_{\chi} c_{\chi} \cdot \chi, \quad c_{\chi} = (\varphi, \chi)_G$$

Используя (2), введём в рассмотрение величину

$$\begin{aligned} I_m(\varphi) &:= \frac{1}{|G|^m} \sum_{t_1, \dots, t_m} \varphi \left( \left( \prod_{i=1}^m t_i x_i t_i^{-1} \right) y \right) = \\ &= \frac{1}{|G|^m} \sum_{\chi} \sum_{t_1, \dots, t_m} c_{\chi} \chi \left( \left( \prod_{i=1}^m t_i x_i t_i^{-1} \right) y \right) = \sum_{\chi} c_{\chi} \frac{\prod_1^m \chi(x_i)}{\chi(e)^m} \chi(y). \end{aligned}$$

Оценим  $I_m(\varphi)$  в случае, когда  $\varphi = \delta$  - функция Дирака:  $\delta(e) = 1$  и  $\delta(g) = 0 \quad \forall g \neq e$ . Очевидно,

$$\delta = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi} \chi(e) \chi$$

(величина  $1/|G|$ , умноженная на характер регулярного представления). Стало быть,  $c_{\chi} = \chi(e)/|G|$ . Если  $x_1, \dots, x_m, y$  - заданные элементы из  $G$ , то

$$I_m(\delta) = \frac{1}{|G|^m} N'_m$$

где  $N'_m = N(x_1, \dots, x_m, y)$  - число решений  $(t_1, \dots, t_m)$  уравнения

$$t_1 x_1 t_1^{-1} \dots t_m x_m t_m^{-1} y = e$$

Таким образом, при помощи (3) находим

$$\begin{aligned} N'_m &= |G|^m I_m(\delta) = |G|^m \sum_{\chi} \frac{\chi(e)}{|G|} \frac{\chi(x_1) \dots \chi(x_m) \chi(y)}{\chi(e)^m} = \\ &= |G|^{m-1} \sum_{\chi} \frac{\chi(x_1) \dots \chi(x_m) \chi(y)}{\chi(e)^{m-1}}. \end{aligned}$$

Полагая  $y = e$ , получаем формулу

$$N_m = N(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) = |G|^{m-1} \sum_{\chi} \frac{\chi(x_1) \dots \chi(x_m)}{\chi(e)^{m-1}}$$

Пусть  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m$  - классы сопряжённости с представителями  $x_1, \dots, x_m$ , и пусть  $c_i$  - порядок централизатора элемента из  $\mathcal{K}_i$ . Тогда, вспоминая об (1), приходим к выражению

$$N(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m) = \frac{N_m}{c_1 \dots c_m}$$

Применяя формулу (4) и замечая, что  $c_i = |G|/|\mathcal{K}_i|$ , получаем следующее утверждение. Теорема 2. Число  $N(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$  определяется формулой

$$N(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m) = \frac{1}{|G|} |\mathcal{K}_1| \dots |\mathcal{K}_m| \sum_{\chi} \frac{\chi(x_1) \dots \chi(x_m)}{\chi(e)^{m-2}}$$

где  $\mathcal{K}_i = x_i^G$  и  $\chi \in \text{Irr}(G)$ .

Последняя теорема имеет разнообразные приложения. Например, её можно использовать для подсчёта числа подгрупп в  $G$ , изоморфных знакопеременной группе  $A_5$ . Действительно,

$$A_5 = \langle x, y, z | x^2 = y^3 = z^5 = e \rangle$$

Задача сводится к нахождению числа решений уравнения  $xyz = e$ , где  $x, y, z$  принадлежат классам сопряжённости показателей 2, 3 и 5 соответственно. То же замечание применимо к  $S_4, A_4, D_n$  с аналогичным заданием образующими и соотношениями.

Жёсткость часто проверяется в два этапа.

N) Вычисляется  $|\tilde{\mathcal{S}}|$  по формуле (5) и таблице характеров группы  $G$ .

N) Вычисляется  $|\tilde{\mathcal{S}} - \mathcal{S}| = |\tilde{\mathcal{S}}| - |\mathcal{S}|$  путём нахождения всех  $m$ -семейств  $\{g_1, \dots, g_m\}$  в  $\tilde{\mathcal{S}}$ , не порождающих  $G$ ; для этого используют знание максимальных подгрупп группы  $G$ .

Предложение 1. Справедливы тождества:

$$i) |\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{K}_1^n, \dots, \mathcal{K}_m^n)| = |\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)|, \quad \bar{n} \in U(Z_n);$$

ii)  $|\mathcal{S}(\mathcal{K}_1^n, \dots, \mathcal{K}_m^n)| = |\mathcal{S}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)|$ ,  $\bar{n} \in U(Z_n)$ . Доказательство. Первое тождество следует из формулы (5), скомбинированной с формулой  $\chi(g^n) = \sigma_n(\chi)(g)$ .

Второе тождество доказывается индукцией по порядку  $|G|$  следующим образом. Для любой подгруппы  $H \subset G$  положим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(H)}(\mathcal{K}_1 \cap H, \dots, \mathcal{K}_m \cap H) = \\ = \{(g_1, \dots, g_m) | g_i \in \mathcal{K}_i \cap H, g_1 \dots g_m = e, \langle g_i, \dots, g_m \rangle = H\}. \end{aligned}$$

Вообще говоря,  $\mathcal{K}_i \cap H$  - не отдельный класс сопряжённости в  $H$ , а объединение некоторого числа таких классов. Формула

$$\tilde{\mathcal{S}} - \mathcal{S}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m) = \bigcup_{H \subset G, H \neq G} \mathcal{S}^{(H)}(\mathcal{K}_1 \cap H, \dots, \mathcal{K}_m \cap H)$$

приводит к индуктивному шагу.

N) Примеры жёсткости. а) Симметрическая группа  $S_n$ . Ясно, что  $S_n (n \geq 3)$  содержит классы сопряжённости  $nA, 2A, \mathcal{K}$ , отвечающие циклам длины  $n, 2, n-1$ . Утверждается, что тройка  $(nA, 2A, \mathcal{K})$  сильно жёсткая.

Действительно, данный  $n$ -цикл  $x \in nA$  задаёт циклическое упорядочение множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , т.е. ориентированный  $n$ -угольник. Композиция этой перестановки порядка  $n$  с транспозицией даёт  $(n-1)$ -цикл ровно тогда, когда две переставляемые вершины стоят рядом. Следовательно, решения уравнения  $xyz = e$  с циклами  $x, y, z$  порядка  $n, 2, n-1$  находятся в биективном соответствии с ориентированными  $n$ -угольниками с одним выделенным ребром. Любые две такие конфигурации могут быть переведены друг в друга одной перестановкой из  $S_n$ . Таким образом,  $|\tilde{\mathcal{S}}| = |G| = n!$ . В свою очередь  $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ , поскольку  $\langle x, y, z \rangle = S_n$ . Как уже отмечалось, в  $S_n$  каждый класс сопряжённости рационален. Таким образом, в соответствии с теоремой 1 существует расширение Галуа  $F/\mathbb{Q}$  с  $\text{Gal } F/\mathbb{Q} \cong S_n$ . Разумеется, для нас это не новость (см. 4), а лишь иллюстрация новых методов.

б) Группа  $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$ . При  $p > 3$  эта группа простая (теорема 4 в §2 гл. 2). Все её комплексные характеры известны, но мы ограничимся замечанием, что  $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$  содержит среди прочих по одному классу сопряжённости элементов порядка 2 и 3:  $2A, 3A$ . Имеется два класса  $pA, pB$  элементов порядка  $p$  с представителями - унитарными матрицами  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , где символ Лежандра  $\left(\frac{\alpha}{p}\right) = -1$ . Сильная жёсткость тройки  $(2A, 3A, pA)$ , а также троек  $(2A, pA, pB)$  при  $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$  и  $(3A, pA, pB)$  при  $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$

проверяется непосредственно. Рациональности здесь, вообще говоря, не ожидается, как показывает рассмотренный ранее пример группы  $A_5 \cong \text{PSL}(2, 5) := \text{PSL}(2, \mathbb{F}_5)$

в) Простая группа  $\text{SL}(2, 8) = \text{SL}(2, \mathbb{F}_8)$  порядка  $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ . Хорошим упражнением служит построение таблицы её неприводимых комплексных характеров:

| $\cdot$  | 1A | 2A | 3A | 7A        | 7B        | 7C        | 9A         | 9B         | 9C         |
|----------|----|----|----|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| $\chi_1$ | 1  | 1  | 1  | 1         | 1         | 1         | 1          | 1          | 1          |
| $\chi_2$ | 7  | -1 | -2 | 0         | 0         | 0         | 1          | 1          | 1          |
| $\chi_3$ | 7  | -1 | 1  | 0         | 0         | 0         | $\alpha$   | $\alpha'$  | $\alpha''$ |
| $\chi_4$ | 7  | -1 | 1  | 0         | 0         | 0         | $\alpha''$ | $\alpha$   | $\alpha'$  |
| $\chi_5$ | 7  | -1 | 1  | 0         | 0         | 0         | $\alpha'$  | $\alpha''$ | $\alpha$   |
| $\chi_6$ | 8  | 0  | -1 | 1         | 1         | 1         | -1         | -1         | -1         |
| $\chi_7$ | 9  | 1  | 0  | $\beta$   | $\beta'$  | $\beta''$ | 0          | 0          | 0          |
| $\chi_8$ | 9  | 1  | 0  | $\beta''$ | $\beta$   | $\beta'$  | 0          | 0          | 0          |
| $\chi_9$ | 9  | 1  | 0  | $\beta'$  | $\beta''$ | $\beta$   | 0          | 0          | 0          |

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= -2 \cos \frac{2\pi}{9}, & \alpha' &= -2 \cos \frac{4\pi}{9}, & \alpha'' &= -2 \cos \frac{8\pi}{9} \\ \beta &= 2 \cos \frac{2\pi}{7}, & \beta' &= 2 \cos \frac{4\pi}{7}, & \beta'' &= 2 \cos \frac{8\pi}{7} \end{aligned}$$

По формуле (5) имеем

$$|\tilde{\mathcal{S}}(9A, 9B, 9C)| = \frac{504^2}{9^3} \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + 0 + 0 + 0\right) = 504 = \text{SL}(2, 8).$$

Чтобы убедиться в жёсткости, достаточно проверить, что любой триплет  $(x, y, z) \in \tilde{\mathcal{S}}$  порождает  $\text{SL}(2, 8)$ . Зададим поле

$$\mathbb{F}_8 = \{0, 1, \lambda^i | 1 \leq i \leq 6\}, \quad \lambda^3 = \lambda + 1$$

Надо помнить, что  $\mathbb{F}_8$  - поле характеристики 2 и  $\mathbb{F}_8^* = \langle \lambda \rangle$ . В качестве элементов тройки возьмём матрицы

$$a = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda + 1 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ \lambda^2 + \lambda + 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что  $a^9 = b^9 = c^9 = e$ ,  $abc = e$ . Степенями матрицы  $d = a^4 b^2 = \text{diag}(\lambda^{-1}, \lambda)$  исчерпываются все диагональные элементы группы  $\text{SL}(2, 8)$ . Далее, получаются унитарные матрицы

$$u = a^2 b^4 a^4 b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = a^{-2} d^{-1} a^2 d^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и сразу же после этого - элемент  $w = u \bar{u} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , играющий ключевую роль в разложении Брюа (см. доказательство теоремы 4 из §2 гл. 2). Осталось получить стандартную борелевскую подгруппу, но детали вычислений мы опустим.

## 12.4.7 Epilogue to Kostrikin's Galois Theory

7 ноября 2011 г. исполнится 200 лет со дня рождения Эвариста Галуа (1811-1832), одного из самых знаменитых математиков XIX столетия. Идеи Галуа проникли к настоящему времени в разные области математики, но и то, что обычно называют классической теорией Галуа, продолжает поражать воображение своим новаторством. Имевшиеся до Галуа разрозненные факты об алгебраических уравнениях были объединены и резко расширены им посредством теории групп - теории, также не

существовавшей в его время. Были лишь отдельные примеры групп и простейшие понятия (у Лагранжа, Гаусса, Коши, Абеля), но отсутствовала даже какая-либо единая терминология. Введённые Галуа понятия разрешимой группы, простой группы, нормальной подгруппы остаются по сей день наиболее употребительными в общей теории групп. Неумолимая логика развития привела Э. Галуа к конечным полям (поля Галуа, частично встречавшиеся у Гаусса) и к группам дробно-линейных преобразований над конечными полями. Он доказал простоту групп  $A_n, n \geq 5$  (знакопеременные группы), и  $\text{PSL}(2, q), q \geq 4$ . Теоремы Галуа о примитивных группах перестановок, о транзитивных группах простой степени и о степенях представлений  $\text{PSL}(2, q)$  в качестве транзитивной группы перестановок можно считать прообразом общих классификационных результатов, полученных спустя полтора столетия. Условия разрешимости в радикалах алгебраических уравнений (с целыми рациональными коэффициентами) простой степени, выраженные на теоретико-групповом языке, отличаются полнотой и изяществом. И всё это было обдуманно и доказано Э. Галуа в возрасте от 16 лет до 21 года. Г. Вейль, сам внесший неоценимый вклад в математику, заметил (см. [8]): "Идеи Галуа, остававшиеся на протяжении нескольких десятилетий книгой за семью печатями, стали впоследствии оказывать всё более и более глубокое влияние на развитие всей математики; эти идеи содержатся в прощальном письме Галуа к другу, написанном им накануне смерти, постигшей его на дурацкой дуэли, когда ему не было ещё 21 года. По новизне и глубине идей, выраженных в этом письме, оно является, вероятно, самым выдающимся творением из всего, что когда-либо было написано рукою человека". Короткая, полная загадок жизнь Э. Галуа с большим тактом и симпатией описана в книге Л. Инфельда [13].

Общая оценка вклада Э. Галуа в математику дана также в замечательном историческом очерке Ф. Клейна [15]. В частности, Клейн пишет: "Без знакомства с "теорией Галуа" трудно оценить всё значение его достижений. Я хотел бы поэтому попробовать наметить в нескольких словах основной замысел этой теории, хотя в столь кратком изложении и нет возможности дать представление о всём её объёме. Прежде чем сделать это, я хотел бы отметить своеобразную роль, которую играет теория Галуа как предмет преподавания в наших университетах. Здесь происходит конфликт, одинаково прискорбный и для обучающихся, и для преподаваемых. Именно, с одной стороны, преподаватели, воодушевлённые исключительной гениальностью открытия и значительностью его глубоких результатов, особенно охотно читают курсы о теории Галуа; с другой стороны, как раз эта область представляет исключительные трудности для понимания среднего начинающего студента. Печальным результатом этого в большинстве случаев является то, что затраченные с особой любовью и воодушевлением усилия преподавателей проходят мимо большинства слушателей, не встречая, за редкими исключениями, никакого понимания. Известную роль в этом играют и особые трудности, которые представляет изложение теории Галуа". Высказанная выше мысль об особом месте теории Галуа пустила довольно глубокие корни, на что обратил внимание крупный теоретико-числовик А. Вейль. В предисловии к русскому переводу своей книги [9] он пишет: "Было время, когда теория Галуа рассматривалась как вещь трудная и абстрактная, предназначенная лишь для специалистов. Более того, я знавал некоторых превосходных математиков моего поколения, которые открыто признавались в своём совершенном невежестве в теории Галуа и, кажется, даже гордились этим. Теперь все хорошо понимают, что это - один из "основных" разделов, с которым каждый серьёзный студент-математик должен познакомиться в первые же годы обучения".

В последние годы большое внимание привлекла обратная задача теории Галуа, удовлетворительное решение которой (пока не существующее) требует далёких выходов в теорию чисел, алгебраическую геометрию и, естественно, в теорию групп, включая

теорию представлений. Кажется, что ситуация, описанная Ф. Клейном, лишь усугубилась. Вместе с тем предмет, стоящий на стыке многих математических дисциплин, должен быть привлекательным для студентов, если на первых порах их внимание будет сосредоточено на элементах теории Галуа, не слишком отягощённой техникой, но достаточно продвинутой для формулировки интересных результатов. Изложение в гл. 5 преследовало именно эти цели. Прямая задача теории Галуа (вычисление группы  $\text{Gal}(f)$  для любого многочлена  $f \in \mathbb{Q}[X]$ ) и обратная задача (построение многочлена с заданной группой Галуа) ещё долго будут предметом серьёзных исследований, не говоря уже о том, что в более полном контексте теория Галуа приобрела общематематическое значение.

## 12.4.8 Introduction to Leng's Galois Theory (??)

(пока только если и буду, то Кострикина читать, не до этой темы)

Galois Extensions

Examples and Applications

Roots from unit

Linear independence of characters

Norm and trace

Cyclic Extensions

Solvable and radical extensions

Kummer's Theory

Equation  $X^n - a = 0$

Galois cohomology

Algebraic independence of homomorphisms

Normal basis theorem

finite field extensions

target fields

galois compliance

## 12.4.9 Other Galois Theory

(другое - тут напишу.)

## 12.5 Clifford algebras

(нужно будет - тут их пропишу)

## 12.6 Unsolved algebraic problems

### 12.6.1 Unsolved classification of finite simple groups

Собственно говоря, эта классическая задача считается решённой. Ответ гласит, что каждая конечная простая группа (естественно, не циклическая простого порядка) изоморфна одной из следующих групп: знакопеременная, группа типа Ли,

спорадическая. Никаких определений мы не даём, чтобы не увязнуть в деталях. Спорадических простых групп имеется всего 26 штук. К ним относится и упомянутый в преамбуле к гл. 2 монстр  $M$  (другое обозначение  $M = F_1$  - в честь первооткрывателей Нортон-Фишера). Общая ситуация прекрасно описана в книге Д. Горенштейна "Конечные простые группы. Введение в их классификацию" (М.: Мир, 1985). Обещанные несколько тысяч страниц доказательства пока не предъявлены, но активная работа в этом направлении ведётся. Если даже серьёзные пробелы не обнаружатся, широкой математической публике это доказательство будет недоступно. Ещё раз хочется сказать, что сила математики - в её единстве, и кто знает, на каком пути и какими средствами будут даны убедительные, легко проверяемые аргументы в пользу выводов, полученных ценой многолетних усилий.

Общее направление исследований по конечным простым группам определила знаменитая теорема Дж. Томпсона и У. Фейта (1962 г.) о разрешимости любой группы нечётного порядка. Доказательство заняло 255 с. журнального текста. В последующих работах нескольких математиков оно приобрело более прозрачную форму (см., например: Bender H., Glauberman G. Local Analysis for the Odd Order Theorem. - Cambridge Univ. Press, 1994), но так и не доведено хотя бы до 100 с. Одна из коварно простых переформулировок задачи заключается в следующем. Допустив существование в данном классе неразрешимой группы, мы должны получить группу  $G$  нечётного порядка, совпадающую со своим коммутантом. Но если  $G = G'$ , то согласно следствию теоремы 7§4 гл. 4 имеет место соотношение

$$|G| \cdot \prod_{i=1}^r K_i = \left( \prod_{i=1}^r |K_i| \right) \sum_{j=1}^r K_j$$

Соотношение (\*), полученное при помощи теории характеров, в случае групп нечётного порядка можно редуцировать по модулю 2 и рассмотреть над полем характеристики 2, где оно приобретает ещё более изящную форму:

$$\prod_{i=1}^r K_i = \sum_{j=1}^r K_j$$

Надо "всего навсего" доказать, что на самом деле соотношения (\*), (\*\*) для групп нечётного порядка никогда не выполняются. Сделать это средствами одной лишь теории характеров невозможно.

## 12.6.2 Regular automorphism.

Как отмечалось в [BA I, гл. 4, §2], группа  $\text{Aut}(G)$  и даже отдельный элемент  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  могут служить источником важных сведений о группе  $G$ . Если

$$a \neq e \Rightarrow \varphi(a) \neq a$$

то  $\varphi$  называется регулярным автоморфизмом. Важная теорема Дж. Томпсона о нильпотентности группы  $G$  с регулярным автоморфизмом простого порядка  $p$  привела к многочисленным следствиям и стимулировала интерес к возможной величине класса нильпотентности  $n$  группы  $G$ . При  $p = 2$  группа  $G$  абелева, а в общем случае доказано (А. Кострикин, В. Крекнин), что  $n = n(p) < p^p$ . На самом же деле гипотеза, идущая от Г. Хигмана, гласит, что

$$n(p) = \frac{(p^2 - 1)}{4}$$

Эта гипотеза верна при  $p = 3, 5$  и как-будто (со ссылкой на компьютерные вычисления) при  $p = 7$ . Хорошо бы подтвердить эти вычисления и улучшить общую оценку. Гораздо более важна другая гипотеза - о разрешимости конечной группы с регулярным автоморфизмом любого порядка. Прямых подходов к её доказательству пока нет.

### 12.6.3 Strange Lie algebra

Существует ли алгебра Ли  $L$  бесконечной размерности, все собственные подалгебры которой одномерны? Если да, то это означало бы, что  $L$  порождается любой парой непропорциональных элементов:

$$\dim\langle a, b \rangle_F = 2 \implies L = \text{Lie}(a, b)$$

Поле  $F$  можно считать произвольным, например, им может быть  $\mathbb{C}$ . В теории групп аналог такой странной алгебры Ли существует: в своё время А.Ю. Ольшанским был построен пример бесконечной  $p$ -группы, все собственные подгруппы которой циклические порядка  $p$  (простое число  $p$  считается достаточно большим).

### 12.6.4 The Burnside Problem

Пусть  $F_2 = Gr(x, y)$  - свободная группа с двумя образующими  $x, y$ , и пусть  $F_2^n$  - её нормальная подгруппа, порождённая  $n$ -ми степенями  $w^n$  всех элементов  $w \in F_2$ . Конечна или бесконечна "свободная" группа Бернсайда  $B(n) = F_2/F_2^n$ ? Для  $n = 2, 3, 4, 6$  ответ положительный, для всех достаточно больших  $n$  ответ отрицательный. Значение  $n = 5$  наименьшее, для которого ответ неизвестен. Частичная переформулировка заключается в следующем. Пусть

$$\begin{aligned}(x, y; 1) &:= (x, y) = xyx^{-1}y^{-1} \\ (x, y; s+1) &:= ((x, y; s), y).\end{aligned}$$

Найдутся ли такие элементы  $w_i(x, y)$  и целое число  $m$ , чтобы в  $F_2$  выполнялось соотношение

$$(x, y; 6) = \prod_{i=1}^m w_i(x, y)^5?$$

Если нет, то группа Бернсайда  $B(5)$  бесконечная; если да, то  $B(5)$  обладала бы интересным свойством энгелевости.

Для ориентировки напомним, что

$$\begin{aligned}(x, y; 1) &= (xy)^2 (y^{-1}x^{-1}y)^2 (y^{-1})^2 \\ (x, y; 2) &= (xyx^{-1}y^{-1}x^{-1})^3 (xyx)^3 (x^{-1}y^{-1})^3.\end{aligned}$$

В  $B(4)$  выполнено соотношение

$$(x, y; 5) = \prod_{i=1}^m w_i(x, y)^4$$

В 1981 г. при помощи ЭВМ Хавас нашёл такое соотношение с  $m = 250$ . Позднее А.В. Корлюков, комбинируя машинные и ручные расчёты, пришёл к соотношению с  $m = 28$ , причём проверка допускается без использования вычислительной техники. Каково наименьшее  $m = m(4)$  и что следует ожидать в интересующем нас случае  $n = 5$ ?



### 12.6.5 Finite groups of polynomial automorphisms

Пусть  $G$  - конечная подгруппа в группе  $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$  всех полиномиальных автоморфизмов. Будет ли  $G$  сопряжена в  $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$  с конечной подгруппой в  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ ? Для  $n = 2$  это так (теорема Гизатуллина-Данилова). При  $n \geq 3$  вопрос остаётся открытым (Furushima Mikio// Thoku Math. J. - 1983. -V. 35, № 3. - P. 415-424).

### 12.6.6 Simply reducible groups

(или  $SR$ -группы - по терминологии Е. Вигнера). Конечная группа  $G$  называется  $SR$ -группой, если

$$\sum_{g \in G} f(g)^3 = \sum_{g \in G} |C_G(g)|^2$$

где

$$f(g) = \text{Card} \{x \in G | x^2 = g\}$$

Коэффициентами разложения тензорного произведения любых двух неприводимых представлений  $SR$ -групп будут лишь нули и единицы, что важно для интерпретации некоторых физических задач (Хамермеш М. Теория групп и её применение к физическим проблемам. М.: Мир, 1966). Класс  $SR$ -групп не пуст, как показывают примеры любой элементарной абелевой 2-группы, обобщённой группы кватернионов  $Q_{2^n}$  и любой диэдральной группы. Дадим кое-какие пояснения. По определению

$$Q_{2^n} = \langle a, b | a^{2^{(n-1)}} = e, \quad b^2 = a^{2^{(n-2)}}, \quad ba^i = a^{-i}b \rangle, \quad n \geq 3.$$

Заметим, что

$$Z(Q_{2^n}) = \{e, a^{2^{(n-2)}}\}$$

При  $n = 3$  получается обычная группа кватернионов. Прямые вычисления в  $G = Q_{2^n}$  показывают, что

$$\begin{aligned} \sum_g f(g)^3 &= (2^{n-1} + 2)^3 + (2^{n-2} - 1) \cdot 2^3 = \\ &= (2^{n-1} - 2)(2^{n-1})^2 + 2(2^n)^2 + 2^{n-1} \cdot 4^2 = \sum_g |C_G(g)|^2 \end{aligned}$$

Аналогично, если  $G = D_{2n+1}$ , то

$$\begin{aligned} \sum_g f(g)^3 &= (2n + 2)^3 + 2n \cdot 1^3 = \\ &= 2^2(2n + 1)^2 + 2n(2n + 1)^2 + (2n + 1)2^2 = \sum_g |C_G(g)|^2 \end{aligned}$$

Если  $G = D_{2n}$ , то

$$\begin{aligned} \sum_g f(g)^3 &= (2n + 2)^3 + (n - 1) \cdot 8 = \\ &= 2(2 \cdot 2n)^2 + (2n - 2)(2n)^2 + 2n \cdot 4^2 = \sum_g |C_G(g)|^2 \end{aligned}$$

Несложно проверяется, что симметрическая группа  $S_4$  является  $SR$ -группой, но  $S_5$  таковой уже не будет. Как выразить в общем принадлежность  $G$  к  $SR$ -классу в терминах структурных свойств самой группы  $G$ ?

## 12.6.7 Inverse Galois problem.

Говорят ещё "обратная задача теории Галуа". Речь идёт о построении расширений Галуа поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  с заданными группами Галуа. Первопроходцем был Д. Гильберт: его теорема о неприводимости утверждает, что достаточно реализовать заданную группу  $G$  в качестве группы Галуа расширения над функциональным полем  $\mathbb{Q}(x)$ . Раз это так, то на сцену выходят методы теории римановых поверхностей и алгебраической геометрии. Следующим поворотным пунктом оказалась замечательная

Теорема (И.Р. Шафаревич, 1954 г.) Любая конечная разрешимая группа реализуется в качестве группы Галуа некоторого нормального расширения  $F/\mathbb{Q}$ . Его метод в основном теоретико-числовой.

Подходом, развитым в последние годы, является метод жёсткости, кратко изложенный в гл. 5 и в значительной мере приспособленный к простым или близким к ним группам. Первым жёсткость, не употребляя этого термина, эффективно использовал Г.В. Белый (Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1979. - Т. 43, № 2. - С. 267-276) для реализации большинства линейных и проективных линейных групп в качестве групп  $\text{Gal}(E/L)$  с абелевым расширением  $L$  поля  $\mathbb{Q}$ . Термины жёсткости и рациональности, с необходимым обоснованием, были введены Дж. Томпсоном в работе (Thompson J.// J. Algebra. - 1984. - V. 89, № 2. - P. 337-499), где он показал, что монстр  $M = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  для некоторого расширения Галуа  $F/\mathbb{Q}$ . Сам монстр  $M$  к тому времени уже прочно вошёл в теорию модулярных форм (благодаря фантастическим свойствам своих комплексных неприводимых характеров) и даже постучался в струнную теорию физиков. Несколько специальных конференций посвящены самому монстру (например: а) Moonshine, the Monster, and Related Topics: Research Conf., June 1994/ Eds Ch. Dong, G. Mason// Contemp. Math. - 1996. - № 193; б) Groups, Difference Sets, and the Monster// Eds K. Harada, L. Solomon et al. - B., N.Y.: de Gruyter, 1996). Свойства рациональной сильной жёсткости подробно обсуждаются в книгах [37 – 39, 41]. Все новые и новые классические простые группы находят реализацию в качестве групп Галуа расширений над  $\mathbb{Q}$ . К сожалению, далеко не все простые группы обладают свойством рациональной жёсткости. Например,  $\text{PSL}(2, 29^2)$  этим свойством не обладает, хотя известно, что эта группа является группой Галуа над  $\mathbb{Q}$ . Более того, группы Сузуки  $\text{Sz}(q)$  порядков

$$q^2(q-1)(q^2+1), \quad q = 2^{2n+1}$$

не обладают свойством рациональной жёсткости и не известно, являются ли они группами Галуа над  $\mathbb{Q}$ , по крайней мере при больших  $n$ . Стоит отметить, что  $\text{Sz}(q)$  занимают особое место в списке простых групп, поскольку только их порядки не делятся на 3.

Прямая и обратная задачи Галуа весьма трудоёмки в том смысле, что вычисление  $\text{Gal}(f)$  для явно заданного многочлена  $f \in \mathbb{Q}[X]$  или, напротив, поиск многочлена с предписанной группой Галуа  $G$  даже при сравнительно небольших  $\deg f$  и  $|G|$  требует больших усилий со стороны человека, вооружённого компьютером. Эта сторона деятельности отражена в книге [37]. Стоит попробовать прямыми вычислениями показать, что

$$\text{Gal}(X^7 - 7X + 3) \cong \text{PSL}(2, 7)$$

Причина трудностей отчасти обусловлена доказанным Ван дер Варденом (1933 г.) фактом, согласно которому "почти все" многочлены степени  $n$  имеют  $S_n$  в качестве своей группы Галуа над  $\mathbb{Q}$ . Обратная задача Галуа имеет более широкую постановку как в известных нам рамках, так и в других математических теориях, например, в дифференциальной теории Галуа, где алгебраическое уравнение  $f(x) = 0$  заменено,

скажем, на обыкновенное дифференциальное уравнение с коэффициентами в  $\mathbb{C}(z)$ . Обстоятельное обсуждение всего круга возникающих здесь проблем дано в докладе на семинаре Бурбаки: Van Der Put M. Recent work on differential Galois theory// Sminaire N. Bourbaki. — June 1998. — Exp. 849.

## 13 Other Topics

(других тем много, нужно будет - буду изучать, сюда допишу. Пока мало что было нужно из того, что тут.)

### 13.1 $E_8$ , the most exceptional group by Garibaldi, Skip

#### Abstract

The five exceptional simple Lie algebras over the complex number are included one within the other as  $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{f}_4 \subset \mathfrak{e}_6 \subset \mathfrak{e}_7 \subset \mathfrak{e}_8$ . The biggest one,  $\mathfrak{e}_8$ , is in many ways the most mysterious. This article surveys what is known about it including many recent results, focusing on the point of view of Lie algebras and algebraic groups over fields.

(see arxiv file if some errors are here from mathpix)

#### 13.1.1 1. Introduction

The Lie algebra  $\mathfrak{e}_8$  or Lie group  $E_8$  was first sighted by a human being sometime in summer or early fall of 1887, by Wilhelm Killing as part of his program to classify the semisimple finite-dimensional Lie algebras over the complex numbers [94, pp. 162-163]. Since then, it has been a source of fascination for mathematicians and others in its role as the largest of the exceptional Lie algebras. (It appears, for example, as part of the fictional Beard-Einstein Conflation in the prize-winning novel Solar [120].) Killing's classification is now considered the core of a typical graduate course on Lie algebras, and the paper containing the key ideas, [104], has

even been called "the greatest mathematical paper of all time"<sup>1</sup>, see [35] and [96]. Killing showed that the simple Lie algebras make up four infinite families together with just five<sup>2</sup> others, called exceptional. They are ordered by inclusion and  $\mathfrak{e}_8$  is the largest of them. When someone says " $E_8$ " today, they might be referring to the simple Lie algebra  $\mathfrak{e}_8$ , an algebraic group or Lie group, a specific rank 8 lattice, or a collection of 240 points in  $\mathbb{R}^8$  (the root system  $E_8$ ). This article gives an introduction to these objects as well as a survey of some of the many results on  $E_8$  that have been discovered since the millennium and indications of the current frontiers.

There are many reasons to be interested in  $E_8$ . Here is a pragmatic one. The famous Hasse-Minkowski Principle for quadratic forms and the Albert-Brauer-Hasse-Noether Theorem for division algebras over number fields can be viewed as special cases of the more general Hasse Principle for semisimple algebraic groups described and proved in [128, Ch. 6]. This is a powerful theorem, which subsumes not just those famous results but also local-global statements for objects that don't have ready descriptions in elementary language. Its proof involves case-by-case considerations, with the case of  $E_8$  being the most difficult, eventually proved by Chernousov in [27], building on work by Harder in [91] and [92]. That  $E_8$  was the most difficult is typical. In the words of [160]: "Exceptional groups, and in particular  $E_8$ , appear to have a more dense and complicated structure than classical ones, making computational

---

Date: Version of May 16, 2016

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 20G41; Secondary 17B25, 20G15.

problems more challenging for them.... Thus  $E_8$  serves as a 'gold standard': to judge the effectiveness of the implementation of a general algorithm, one looks to how it performs for  $E_8$ ."

I have heard this sentiment expressed more strongly as: We understand semisimple algebraic groups only as far as we understand  $E_8$ . If we know some statement for all groups except  $E_8$ , then we do not really know it.

Here is a more whimsical reason to be interested in  $E_8$ : readers who in their youth found quaternions and octonions interesting will naturally gravitate to the exceptional Lie algebras and among them the largest one,  $\mathfrak{e}_8$ . Indeed, one might call  $E_8$  the Monster of Lie theory, because it is the largest of the exceptional groups, just as the Monster is the largest of the sporadic finite simple groups. Another take on this is that "  $E_8$  is the most non-commutative of all simple Lie groups" [116].

Remarks on exceptional Lie algebras. The exceptional <sup>3</sup> Lie algebras mentioned above form a chain  $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{f}_4 \subset \mathfrak{e}_6 \subset \mathfrak{e}_7 \subset \mathfrak{e}_8$ . There are various surveys and

references focusing on some or all of these, such as [8], [56], [1], [99], [106], [63], and [147]. Certainly, the greatest amount of material is available for  $\mathfrak{g}_2$ , corresponding to the octonions, where one can find discussions as accessible as [49]. Moving up the chain, less is available and what exists is somewhat less accessible. This note takes the approach of jumping all the way to  $\mathfrak{e}_8$  at the end, because it is the case with the least existing exposition, or, to say the same thing differently, the most opportunity.

Another feature of exceptional groups is that, by necessity, various ad hoc constructions are often employed in order to study one group or another. These can appear inexplicable at first blush. As much as we can, we will explain how these peculiar construction arise naturally from the general theory of semisimple Lie algebras and groups. See §4 for an illustration of this.

### 13.1.2 2. What is $E_8$ ?

To explain what Killing was doing, suppose you want to classify Lie groups, meaning for the purpose of this section, a smooth complex manifold  $G$  that is also a group and that the two structures are compatible in the sense that multiplication  $G \times G \rightarrow G$  and inversion  $G \rightarrow G$  are smooth maps. The tangent space to  $G$  at the identity,  $\mathfrak{g}$ , is a vector space on which  $G$  acts by conjugation, and this action gives a bilinear map  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  denoted  $(x, y) \mapsto [x, y]$  such that  $[x, x] = 0$  and  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  for all  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ . The vector space  $\mathfrak{g}$  endowed with this "bracket" operation is called the Lie algebra of  $G$ . Certainly, if two Lie groups are isomorphic, then so are their Lie algebras; the converse, or something like it, also holds and is known as "Lie's third theorem".

<sup>1</sup> Any such declaration is obviously made with an intent to provoke. One objection I have heard to this particular nomination is that Killing made a serious mathematical error - made famous by Cartan's quote "Malheureusement les recherches de M. Killing manquent de rigueur, et notamment, en ce qui concerne les groupes qui ne sont pas simples, il fait constamment usage d'un théorème qu'il ne démontre pas dans sa généralité" [23, p. 9] - but this error is from a different paper and is irrelevant to the current discussion. See [94] for details

<sup>2</sup> Since Killing's paper contains so many new and important ideas, produced by someone working in near-isolation, it feels churlish to mention that it actually claims that there are six exceptional ones. Killing failed to notice that two of the ones in his list were isomorphic.

<sup>3</sup> We are following the usual definition of "exceptional", but there are alternatives that are appealing. For example, [42] considers a longer chain of inclusions

$$\mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{sl}_3 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{so}_8 \subset \mathfrak{f}_4 \subset \mathfrak{e}_6 \subset \mathfrak{e}_7 \subset \mathfrak{e}_8$$

such that, at the level of simply connected Lie groups, all of the inclusions are unique up to conjugacy. One could alternatively define all the Lie algebras appearing in that chain to be exceptional.

Consequently, for understanding Lie groups, it is natural to classify the finitedimensional Lie algebras over the complex numbers, which was Killing's goal. Suppose  $L$  is such a thing. Then, among the ideals  $I$  such that the sequence  $I \supseteq [I, I] \supseteq [[I, I], [I, I]] \supseteq \cdots$  eventually reaches zero, there is a unique maximal one, called the radical of  $L$  and denoted  $\text{rad } L$ . The possible such ideals  $\text{rad } L$  are unclassifiable if  $\dim(\text{rad } L)$  is large enough, see [11], so we ignore it; replacing  $L$  by  $L/\text{rad } L$  we may assume that  $\text{rad } L = 0$ . Then  $L$  is a direct sum of simple Lie algebras, which we now describe how to analyze.

The root system. To classify the simple Lie algebras, Killing observed that we can extract from a simple  $L$  a piece of finite combinatorial data called a root system, and he classified the possible root systems. The simple root system called  $E_8$  is a 240 -element subset  $R$  of  $\mathbb{R}^8$ , whose elements are called roots. It consists of the short vectors in the lattice  $Q$  generated by the simple roots

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8), & \alpha_2 &= e_1 + e_2, & \alpha_3 &= -e_1 + e_2 \\ \alpha_4 &= -e_2 + e_3, & \alpha_5 &= -e_3 + e_4, & \alpha_6 &= -e_4 + e_5 \\ \alpha_7 &= -e_5 + e_6, & \alpha_8 &= -e_6 + e_7\end{aligned}$$

where  $e_i$  denotes the  $i$ -th element of an orthonormal basis of  $\mathbb{R}^8$ . This information is encoded in the graph

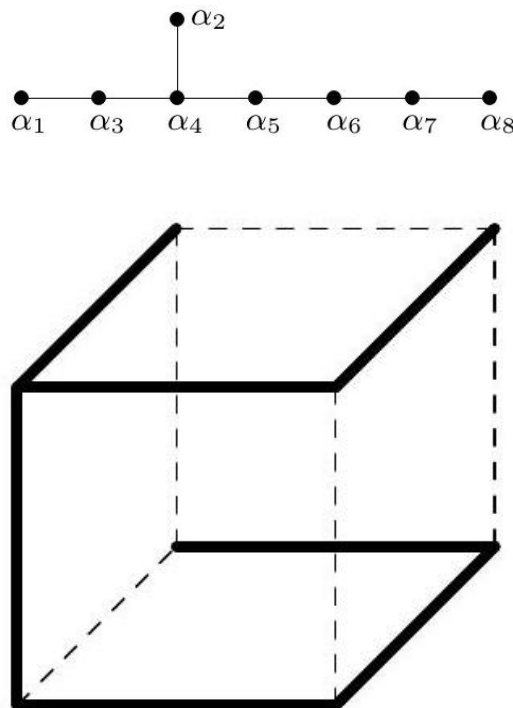


Figure 1. Dynkin diagram of  $E_8$  obtained by deleting 5 edges from a cube in  $\mathbb{R}^3$

where vertices correspond to simple roots, a single bond joining  $\alpha_i$  to  $\alpha_j$  indicates that  $\alpha_i \cdot \alpha_j = -1$ , and no bond indicates that  $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0$ . Such a graph is called a Dynkin diagram, and the root system is commonly described in this language today, but they were not invented for more than 50 years after Killing's paper. The graph determines the root system up to isomorphism. Evidently the particular embedding of  $R$  in  $\mathbb{R}^8$  and the labeling of the simple roots is not at all unique; here we have followed [19]. One could equally well draw it as suggested in [116], with the edges lying on along the edges of a cube as in Figure 1.

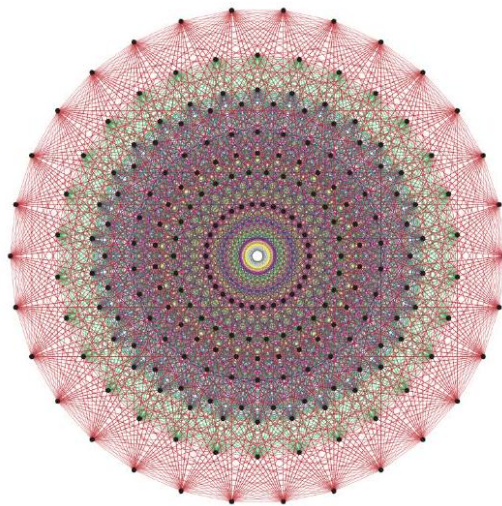


Figure 2.  $E_8$ 's publicity photo, courtesy of J. Stembridge

We can draw a picture of the full set  $R$  by projecting  $\mathbb{R}^8$  onto a well-chosen plane<sup>4</sup>, see Figure 2. In the picture, the 240 roots are the black dots, which lie, 30 each, on 8 concentric circles - this much follows from general theory as in [19, VI.1.11, Prob. 33(iv)]. The edges in the picture join the images of roots that are nearest neighbors. The colors don't have any mathematical significance.

The  $E_8$  lattice. The lattice  $Q$  together with the quadratic form  $v \mapsto \frac{1}{2}\|v\|^2$  is the unique positive-definite, even, unimodular lattice of rank 8. It has been known for a long time that it is the lattice with the densest sphere packing in  $\mathbb{R}^8$ , and the

sphere packing with the highest kissing number [38]. Recently, Viazovska showed that it gives the densest sphere packing in  $\mathbb{R}^8$ , among all possible packings both lattice and non-lattice [162]. At the time of her work, the densest packing was unknown in  $\mathbb{R}^n$  for all  $n \geq 4$ !

The roots  $R$  - the short vectors in  $Q$  - are a 7-design on the unit sphere in  $\mathbb{R}^8$ , i.e., every polynomial on  $\mathbb{R}^8$  of total degree at most 7 has the same average on  $R$  as on the entire sphere, with the minimal number of elements [9]; such a thing is very rare. The theta-series for this lattice,  $\theta(q) = \sum_{v \in Q} q^{\|v\|^2/2}$ , is the 4-th Eisenstein series, which provides a connection with the  $j$ -invariant via the formula  $j(q) = \theta(q)^3/\eta(q)^{24}$ , where  $\eta$  denotes Dedekind's eta-function.<sup>5</sup> For more on this lattice and how it fits into the rest of mathematics, see [38] or [52].

Another view on the lattice is that it is a maximal order in the (real) octonions, as described in [39]. In particular, this turns  $Q$  into a non-associative ring with 240 units, namely the roots  $R$ .

From the root system to the Lie algebra. Starting from  $R \subset \mathbb{R}^8$ , one can write down a basis and multiplication table for the Lie algebra  $\mathfrak{e}_8$  over  $\mathbb{C}$  as in [117] or [77]. (This is a recent development. The old way to do this is via the Chevalley relations as in, for example, [20, §VIII.4.3]. Some signs have to be chosen - see [155], [25], or [60, §2.3] - but the isomorphism class of the resulting algebra does not depend on the choices made. Explicit multiplication tables are written in [24, p. 328] and [161].) In this way, one can make the Lie algebra from the root system.

<sup>4</sup> Precisely: take a Coxeter element  $w$  in the Weyl group of  $R$ . It is unique up to conjugacy and its minimal polynomial has a simple factor  $x^2 - 2\cos(2\pi/h) + 1$ , for  $h = 30$  the Coxeter number for the root system  $E_8$ . That is, there is a unique plane in  $\mathbb{R}^8$  on which the projection of  $w$  has that minimal polynomial, so that  $w$  acts on the plane by rotations by  $2\pi/h$ .



### 13.1.3 3. $E_8$ as an Automorphism Group

To study  $\mathfrak{e}_8$ , then, we can view it as a specific example of a simple Lie algebra described by generators and relations given by the root system. We will exploit this view below. However, that is not what is commonly done for other simple Lie algebras and groups! It is typical to describe the "classical" (meaning not exceptional) Lie algebras and groups not in terms of their root systems, but rather as, for example,  $SL_n$ , the  $n$ -by- $n$  determinant 1 matrices;  $SO_n$ , the  $n$ -by- $n$  orthogonal matrices of determinant 1 ; and  $Sp_{2n}$ , the  $2n$ -by- $2n$  symplectic matrices. Killing explicitly asked, in his 1889 paper, for similar descriptions of the exceptional Lie algebras and groups.

Looking back at the descriptions of the classical groups in the previous paragraph, each of them arises from a faithful irreducible representation  $G \hookrightarrow GL(V)$  where  $\dim V$  is smaller than  $\dim G$ . Using now the classification of irreducible representations of simple Lie algebras, the Weyl dimension formula, and other generalpurpose tools described entirely in terms of root systems (and which post-date Killing and can be found in standard textbooks such as [98]), we find that the smallest faithful irreducible representations of  $\mathfrak{g}_2$ ,  $\mathfrak{f}_4$ ,  $\mathfrak{e}_6$ , and  $\mathfrak{e}_7$  (alternatively, the simply connected Lie groups  $G_2$ ,  $F_4$ ,  $E_6$ , and  $E_7$ ) have dimensions 7, 26, 27, and 56, which are much smaller than the dimensions 14, 52, 78, and 133 of the corresponding algebra. In the years since Killing posed his problem, all of these algebras have found descriptions using the corresponding representation, as we now relate.

The smallest nontrivial representation of  $G_2$ , call it  $V$ , has dimension 7. Calculating with weights, one finds that  $V$  has  $G_2$ -invariant linear maps  $b : V \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$

(a bilinear form, which is symmetric) and  $\times : V \otimes V \rightarrow V$  (product, which is skew-symmetric)<sup>6</sup>, which are unique up to multiplication by an element of  $\mathbb{C}^\times$ . To see this, one decomposes the  $G_2$ -modules  $V^* \otimes V^*$  and  $V^* \otimes V^* \otimes V$  into direct sums of irreducible representations and notes that in each case there is a unique 1-dimensional summand. The subgroup of  $GL(V)$  preserving these two structures is  $G_2$ . Alternatively, we can define a  $G_2$  invariant bilinear form  $t$  and product on  $\mathbb{C} \oplus V$  by setting

$$\begin{aligned} t((x, c), (x', c')) &:= xx' + b(c, c') \quad \text{and} \\ (x, c) \bullet (x', c') &:= (xx' + b(c, c'), xc' + x'c + c \times c') \end{aligned}$$

With these definitions and scaling  $\times$  so that  $b(u \times v, u \times v) = b(u, u)b(v, v) - b(u, v)^2$ ,  $\mathbb{C} \oplus V$  is isomorphic to the complex octonions, a nonassociative algebra - see [49, §10.3] for details - and  $G_2$  is the automorphism group of that algebra, compare [147, §2.3]. Equivalently,  $\mathfrak{g}_2$  is the Lie algebra of  $\mathbb{C}$ -linear derivations of  $\mathbb{C} \oplus V$ .

In a similar way, the smallest nontrivial representation of  $F_4$ , call it  $V$ , has unique  $F_4$ -invariant linear maps  $b : V \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$  (a symmetric bilinear form) and  $\times : V \otimes V \rightarrow V$  (product, which is symmetric). Extending in a similar manner, we find that  $\mathbb{C} \oplus V$  has the structure of an Albert algebra - a type of Jordan algebra - and  $F_4$  is the automorphism group of that algebra, see [32] or [147, §7.2].

The smallest nontrivial representation of  $E_6$ , call it  $V$ , has an  $E_6$ -invariant cubic polynomial  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  that is unique up to multiplication by an element of  $\mathbb{C}^\times$ . The isometry group of  $f$ , i.e., the subgroup of  $g \in GL(V)$  such that  $f \circ g = f$ , is  $E_6$ . This was pointed out in [23], but see [147, §7.3] for a proof.

For  $E_7$ , the smallest nontrivial representation has an  $E_7$ -invariant quartic polynomial whose isometry group is generated by  $E_7$  and the group  $\langle e^{\pi i/2} \rangle$  of fourth roots of unity [61]. That is, it has two connected components, and the connected component of the identity is  $E_7$ .

<sup>6</sup> For connections of the coefficients of  $j(q)^{1/3}$  with dimensions of irreducible representations of  $E_{8,\mathbb{C}}$ , see [95, esp. §4.1]

Answers for  $E_8$ . The same approach, applied to  $E_8$ , is problematic. The smallest nontrivial representation of  $E_8$  has dimension 248; it is the action on its Lie algebra  $\mathfrak{e}_8$ . In this context  $E_8$  is the automorphism group of the Lie algebra  ${}^7\mathfrak{e}_8$ . This is not specific to  $E_8$  - it is a typical property of semisimple Lie algebras, see [148] for a precise statement - and only serves to re-cast problems about the algebras as problems about the group and vice versa.

However, there is a general result that, in the case of  $E_8$ , says that for each faithful irreducible representation  $V$ , there is a homogeneous,  $E_8$ -invariant polynomial  $f$  such that  $E_8$  is the identity component of the stabilizer of  $f$  in  $\mathrm{GL}(V)$ .

In the case of the smallest faithful irreducible representation, there is a degree 8 homogeneous polynomial on the Lie algebra  $\mathfrak{e}_8$  whose automorphism group is generated by  $E_8$  and the eighth roots of unity  $\langle e^{\pi i/4} \rangle$ . (For experts: one takes a degree 8 generator for the Weyl-group-invariant polynomials on a Cartan subalgebra and pulls it back to obtain an  $E_8$ -invariant polynomial on all of  $\mathfrak{e}_8$ . The paper [26] gives a formula for it in terms of invariants of the  $D_8$  subgroup of  $E_8$ .)

The second smallest faithful irreducible representation  $V$  has dimension 3875. Combinatorial calculations with "weights" of the representation show that it has a nonzero,  $E_8$ -invariant symmetric bilinear form  $b$  and trilinear form  $t$ , both of which are unique up to scaling by an element of  $\mathbb{C}^\times$ . These give a commutative and  $E_8$ -invariant "product", i.e., a bilinear map,  $\bullet : V \times V \rightarrow V$  defined by  $t(x, y, z) = b(x, y \bullet z)$ . (Close readers of Chevalley will recognize this construction of a product from [31, §4.2].) The automorphism group of  $(V, \bullet)$  is  $E_8$ , see [70].

These results are recent and have not yet been seriously exploited.

As the automorphism group of a variety. As with other semisimple groups, one can view  $E_8$  as the group of automorphisms of a projective variety on which it acts transitively - a flag variety - see [43] for the general statement. In the case of  $E_8$ , the smallest such variety has dimension 57 (and can be obtained by quotienting out by the maximal parabolic subgroup determined by the highest root [23, p. 152]); see [89] for an alternative treatment.

### 13.1.4 4. Constructing the Lie algebra via Gradings

Earlier, we described constructing the Lie algebra  $\mathfrak{e}_8$  by generators and relations using a Chevalley basis. There are various refinements on this that we now discuss. This situation is quite general and is often applied to study other exceptional groups, so we write in a slightly more general context. Consider an irreducible root system  $R$  with set  $\Delta$  of simple roots, and let  $\mathfrak{g}$  be the Lie algebra generated from this using a Chevalley basis.

Suppose that  $\mathfrak{g}$  has a grading by an abelian group  $\Gamma$ , meaning that as a vector space  $\mathfrak{g}$  is a direct sum of subspaces  $\mathfrak{g}_\gamma$  for  $\gamma \in \Gamma$  and that  $[g_\gamma, g_{\gamma'}] \in \mathfrak{g}_{\gamma+\gamma'}$  for  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ . Then  $\mathfrak{g}_0$  is a Lie subalgebra of  $\mathfrak{g}$  and each  $\mathfrak{g}_\gamma$  is a  $\mathfrak{g}_0$ -module. Roughly speaking, one can typically write down a formula for the bracket on  $\mathfrak{g}$  in terms of the action of  $\mathfrak{g}_0$  on the  $\mathfrak{g}_\gamma$ , see [1, Ch. 6] or [64, §22.4] for discussion. The literature contains a profusion of such constructions, which are sometimes called a " $\mathfrak{g}_0$  construction of  $\mathfrak{g}$ ". (I will give some references below, but it is hopeless to attempt to be comprehensive.)

To produce such a construction of  $\mathfrak{g}$ , then, we should look for gradings of  $\mathfrak{g}$ . These are controlled by subgroups of  $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$  in the following sense. If  $F = \mathbb{C}$  and  $\mathfrak{g}$  has a  $\mathbb{Z}/n$  grading, then the map  $\sum_\gamma y_\gamma \mapsto \sum e^{2\pi i \gamma/n} y_\gamma$  exhibits the  $n$ -th roots of unity  $\mu_n(\mathbb{C}) = \langle e^{2\pi i/n} \rangle$  as a subgroup of  $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$  and conversely every homomorphism  $\mu_n \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$  gives a  $\mathbb{Z}/n$  grading on  $\mathfrak{g}$  by the same formula. We generalize this example somewhat to the language of diagonalizable group schemes as in [44] or [167]. Write  $\Gamma^D$  for the Cartier dual of  $\Gamma$ , the (concrete) group of

<sup>6</sup> The product can be viewed as a 7-dimensional analogue of the usual cross-product in  $\mathbb{R}^3$ , compare for example [49, §10.3].

<sup>7</sup>Or, what is the same, the group of linear transformations preserving both the Killing form  $\kappa : \mathfrak{e}_8 \times \mathfrak{e}_8 \rightarrow \mathbb{C}$  and the alternating trilinear form  $\wedge^3 \mathfrak{e}_8 \rightarrow \mathbb{C}$  given by the formula  $x \wedge y \wedge z \mapsto \kappa(x, [y, z])$ .



homomorphisms from  $\Gamma$  to  $\mathbb{G}_m$ , the algebraic group with  $K$ -points  $K^\times$  for every field  $K$ . In that notation, we have the following folklore classification of gradings:

**Proposition 4.1.** Let  $S$  be a commutative ring and  $\mathfrak{g}$  a finitely generated Lie algebra over  $S$ . Then for each finitely generated abelian group  $\Gamma$ , there is a natural bijection between the set of  $\Gamma$ -gradings on  $\mathfrak{g}$  and the set of morphisms  $\Gamma^D \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  of group schemes over  $S$ .

*Sketch of proof.* The group  $\Gamma$  is naturally identified with the dual  $\text{Hom}(\Gamma^D, \mathbb{G}_m)$ , so given a  $\Gamma$ -grading on  $\mathfrak{g}$ , setting  $t \cdot y = \gamma(t)y$  for  $y \in \mathfrak{g}_\gamma$  and  $t \in \Gamma^D$  defines a homomorphism  $\Gamma^D \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ . Conversely, a homomorphism  $\Gamma^D \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  gives  $\mathfrak{g}$  the structure of a comodule under the coordinate ring of  $\Gamma^D$ , i.e., the group ring

$S[\Gamma]$ , which amounts to an  $S$ -linear map  $\rho : A \rightarrow A \otimes S[\Gamma]$  that is compatible with the Hopf algebra structure on  $S[\Gamma]$ . One checks that  $\mathfrak{g}_\gamma := \{y \in \mathfrak{g} | \rho(y) = y \otimes \gamma\}$  gives a  $\Gamma$ -grading on  $\mathfrak{g}$ .

As is clear from the proof, the hypothesis that  $\mathfrak{g}$  is a Lie algebra is not necessary, and the result applies equally well to other sorts of algebraic structures over  $R$ . One could also replace  $R$  by a base scheme.

**Examples:** gradings by free abelian groups. By the proposition, a grading of  $\mathfrak{g}$  by a free abelian group  $\mathbb{Z}^r$  corresponds to a homomorphism of a rank  $r$  torus  $\mathbb{G}_m^r \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ . The image is connected, so it lies in the identity component of  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ , which is the adjoint group, call it  $G^{\text{ad}}$ , with Lie algebra  $\mathfrak{g}$ . Up to conjugacy, all homomorphisms  $\mathbb{G}_m^r \rightarrow G^{\text{ad}}$  have image in a given maximal torus  $T$ , and we conclude that all gradings of  $\mathfrak{g}$  by  $\mathbb{Z}^r$  are obtained from a rank  $r$  sublattices of  $\text{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ , i.e., the weight lattice for the root system dual to  $R$ . ( $E_8$  is self-dual and so in that case it is the same as  $Q$ .)

A natural grading of this sort is obtained by choosing some  $r$ -element subset  $\Delta'$  of  $\Delta$  and defining the degree of a root vector  $x_\beta$  to be the coefficients  $c_\delta$  of elements of  $\Delta'$  in the expression  $\beta = \sum_{\delta \in \Delta} c_\delta \delta$ . Basic facts concerning this kind of grading can be found in [6] or [133]; most importantly, the  $\mathfrak{g}_\gamma$  are irreducible representations of  $\mathfrak{g}_0$  with an open orbit. This sort of grading on  $\mathfrak{e}_8$  (and  $\mathfrak{e}_7$  and  $\mathfrak{e}_6$ ) with  $r = 2$  was used in [15] to reconstruct the quadrangular algebras studied in [168] for studying the corresponding Moufang polygons.

The simplest example of a grading as in the previous paragraph is to take  $\Delta'$  to be a singleton  $\{\delta'\}$ , in which case one finds a  $\mathbb{Z}$ -grading of  $\mathfrak{g}$  with support  $\{-n, \dots, n\}$  where  $n$  is the coefficient of  $\delta'$  in the highest root. Famously, in the case  $n = 1$ , one finds a 3-term grading in which the  $\pm 1$  components make up a Jordan pair, and one can use the Jordan pair to recover the bracket on  $\mathfrak{g}$ , see for example [125]. But that case does not occur for  $E_8$ , because its highest root is

$$\omega_8 = e_7 + e_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 \quad (4.2)$$

where the smallest coefficient is 2 for  $\delta' = \alpha_1$  or  $\alpha_8$ . Those  $\delta'$  give a 5-term grading, where the  $\pm 1$  components are structurable algebras as in [4] or [3, Th. 4] or a Kantor pair as in [2], depending on your point of view. Starting with a structurable algebra, one can also recover the bracket on  $\mathfrak{g}$ , as was done for  $\mathfrak{e}_8$  in [3, §8].

**Examples:**  $\mathbb{Z}/n$  gradings. By the proposition, a  $\mathbb{Z}/n$  grading on  $\mathfrak{g}$  is given by a homomorphism  $\mu_n \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ . The ones with image in  $G^{\text{ad}}$  (as is necessarily true for  $E_8$ , because  $\text{Aut}(\mathfrak{g}) = G^{\text{ad}}$  in that case) are classified by their Kac coordinates, see [102] or [145], or see [111] for an expository treatment. Therefore in principle one has a list of all of the corresponding gradings.

A popular choice for such a grading is to start by picking a simple root  $\delta' \in \Delta$ , thus obtaining as in the preceding subsection an inclusion  $\iota : \mathbb{G}_m \rightarrow G^{\text{ad}}$  such that, for  $\delta \in \Delta$ , the composition  $\delta\iota : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  is the identity for  $\delta = \delta'$  and trivial otherwise. The desired  $\mathbb{Z}/n$  grading is obtained by composing  $\iota$  with the natural inclusion  $\mu_n \hookrightarrow \mathbb{G}_m$  for  $n$  the coefficient of  $\delta'$  in the highest root. One finds again in this case that each  $\mathfrak{g}_\gamma$  is an irreducible representation

of  $\mathfrak{g}_0$ , see [163]. The identity component of the centralizer of  $C_{G^{\text{ad}}}(\mu_n)$  is semisimple and its Dynkin diagram is obtained by taking the so-called extended Dynkin diagram of  $R$  - obtained by adding the negative of the highest root as a new vertex - and deleting the vertex  $\delta'$  and all edges connected to it. (This is the first step in the iterative procedure described in [16] for calculating the maximal-rank semisimple subgroups of  $G^{\text{ad}}$ . See [19, Ch. VI, §4, Exercise 4] or [111] for treatments in the language of root systems or group schemes, respectively.)

For example, doing this for  $R$  the root system of type  $G_2$  and  $\delta'$  the simple root that is orthogonal to the highest root, one finds  $n = 3$ ,  $C_{G^{\text{ad}}}(\mu_3)$  has identity component  $\text{SL}_3$ , and the  $\pm 1$ -components of  $\mathfrak{g}_2$  are the tautological representation and its dual. The action of  $G_2$  on the octonions, restricted to this  $\mu_3$  subgroup, gives the direct sum decomposition of the octonions known as the Zorn vector matrix construction as in [134].

Example 4.3 ( $D_8 \subset E_8$ ). Doing this with  $E_8$  and  $\delta' = \alpha_1$ , we find  $n = 2$  by (4.2),  $C_{E_8}(\mu_2)$  has identity component  $\text{Spin}_{16}/\mu_2$ , and the 1-component of  $\mathfrak{e}_8$  is the half-spin representation. This grading was surely known to Cartan, and is the method used to construct  $\mathfrak{e}_8$  in [1] and [58].

Example 4.4 ( $A_8 \subset E_8$ ). Doing this with  $E_8$  and  $\delta' = \alpha_2$ , we find  $n = 3$ ,  $C_{E_8}(\mu_3)$  has identity component  $\text{SL}_9/\mu_3$ , and we have

$$\mathfrak{e}_8 \cong \mathfrak{sl}_9 \oplus (\wedge^3 \mathbb{C}^9) \oplus (\wedge^3 \mathbb{C}^9)^*$$

as modules under  $\mathfrak{sl}_9$ . One can use this operation to define the Lie bracket on all of  $\mathfrak{e}_8$ , see for example [62], [64, Exercise 22.21], and [55].

Example 4.5 ( $A_4 \times A_4 \subset E_8$ ). Taking  $\delta' = \alpha_5$ , we find  $n = 5$ , and  $C_{E_8}(\mu_5)$  is isomorphic to  $(\text{SL}_5 \times \text{SL}_5)/\mu_5$ . See [65, §14] or [82, §6] for concrete descriptions of the embedding, or [143, 1.4.2] for how it provides a non-toral elementary abelian subgroup of order  $5^3$ .

Dynkin [48, Table 11] lists 75 different subsystems of  $E_8$  constructed in this way, and each of these gives a way to construct the Lie algebra  $E_8$  from a smaller one. Here is such an example:

Example 4.6 ( $D_4 \times D_4 \subset E_8$ ). There is a subgroup  $\mu_2 \times \mu_2$  of  $E_8$  such that each of the three involutions has centralizer  $\text{Spin}_{16}/\mu_2$  as in Example 4.3, and the centralizer of  $\mu_2 \times \mu_2$  is the quotient of  $\text{Spin}_8 \times \text{Spin}_8$  by a diagonally embedded copy of  $\mu_2 \times \mu_2$ . This gives a grading of  $\mathfrak{e}_8$  by the Klein four-group, with  $(\mathfrak{e}_8)_0 = \mathfrak{so}_8 \times \mathfrak{so}_8$  and the other three homogeneous components being tensor products of an 8-dimensional representation of each of the copies of  $\mathfrak{so}_8$ . The corresponding construction of  $E_8$  is the one described in [166, Ch. IV], [113], or [110].

We have described some large families of gradings, but there are of course others, see for example [51]. One can also construct  $\mathfrak{e}_8$  without using a grading. The famous Tits construction of  $E_8$  is of this type, and we will describe it in detail in §7 below.

### 13.1.5 5. $E_8$ Over Real Number

A Lie algebra  $L$  over the real numbers, i.e., a vector space over  $\mathbb{R}$  with a bracket that satisfies the axioms of a Lie algebra, is said to be of type  $E_8$  if  $L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  is isomorphic to the Lie  $\mathbb{C}$ -algebra  $\mathfrak{e}_8$  studied by Killing. (The notation  $L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  is easy to understand concretely. Fix a basis  $\ell_1, \dots, \ell_n$  for the real vector space  $L$ . Then  $L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  is a complex vector space with basis  $\ell_1, \dots, \ell_n$  and the bracket on  $L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  is defined by  $\left[ \sum_i z_i \ell_i, \sum_j z'_j \ell_j \right] = \sum_i \sum_j z_i z'_j [\ell_i, \ell_j]$  for  $z_i, z'_j \in \mathbb{C}$ .)

Cartan proved in [24] that there are exactly three Lie  $\mathbb{R}$ -algebras of type  $E_8$ . One can reduce the problem of determining the isomorphism class of such algebras to determining the orbits under the Weyl group of elements of order 2 in a maximal torus in the compact real form of  $E_8$ , see [144, §III.4.5]. Given such an involution and the description of  $E_8$  in terms of the Chevalley

relations, one can do calculations, so this is an effective construction. Two of the three  $E_8$  's over  $\mathbb{R}$  have names: split and compact, where the automorphism group of the compact Lie algebra is a real Lie group that is compact. The third one does not have a standard name; we call it intermediate following [142], but others say quaternionic. This is summarized in Table A.

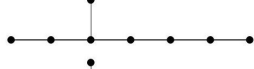
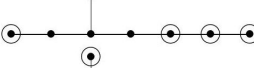
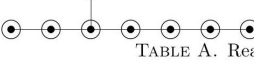
| Tits index<br>or Satake diagram                                                   | name         | signature of<br>Killing form |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|------------------------------|
|  | compact      | -248                         |
|  | intermediate | -24                          |
|  | split        | 8                            |

TABLE A. Real forms of  $E_8$ 

Remarks on the Tits index. The first column of Table A indicates the Tits index of the group as defined in [154, 2.3], which is the Dynkin diagram as in (2.1) - the same for all groups of type  $E_8$  - with the possible addition of circles around some vertices.<sup>8</sup> At this point in the survey we are only concerned with the field  $\mathbb{R}$ , in which special case the Tits index is sometimes called a Satake diagram and one can close the discussion by saying that the circles are drawn around the noncompact simple roots. But the theory surrounding the Tits index of a semisimple algebraic group  $G$  over an arbitrary field  $F$  is much richer and we will use the more general notion later, so let's take a moment to talk about it now. A split torus is a product of copies of  $\mathbb{G}_m$ , the algebraic group with  $K$ -points  $K^\times$  for every field  $K$ . All maximal split tori in  $G$  are conjugate over  $F$ , and the circles in the Tits index amount to precise formulas for the embedding of such a torus in  $G$  via the theory in [17, §6]. One coarse fact is that the dimension of a maximal split torus equals the number of circles in the Tits index.

A basic fact connect with the Tits index is Tits' Witt-type theorem from [154, 2.7] or [146, 16.4.2], which gives a concrete description of the structure of  $G$  in terms of the Tits index and a subgroup corresponding to the uncircled vertices in the diagram. This theorem includes as special cases Wedderburn's theorem that each central simple  $k$ -algebra can be written uniquely as  $M_r(D)$  for  $D$  a central division  $k$ -algebra and  $r \geq 1$ , and Witt's theorem that a nondegenerate quadratic form is an orthogonal sum of a uniquely determined anisotropic nondegenerate quadratic

form and a sum of hyperbolic planes. That is, the Witt-type theorem generalizes and unifies both of those classical results in the same way that the Hasse Principle mentioned in the introduction generalized and unified the Albert-Brauer-Hasse-Noether Theorem and the Hasse-Minkowski Principle.

Physics. Returning now to the discussion of real groups of type  $E_8$ , various such groups play a role in physics. For example, the compact real  $E_8$  appears in string theory - see [87], [45], and [46] - and the split real form appears in supergravity [119].

On the other hand,  $E_8$  does not play any role in the Grand Unified Theories of the kind described in [7] because every finite dimensional representation of every real form of  $E_8$  is real orthogonal and not unitary. And at least one well-publicized approach to unification based on  $E_8$  does not work, as explained in [47].

A magnet detects  $E_8$  symmetry? A few years ago, experimental physicists reported finding "evidence for  $E_8$  symmetry" in a laboratory experiment [34]. (You may have seen descriptions aimed at mathematicians in [107] or [18].) This is yet a different role for  $E_8$  than those mentioned before. The context is as follows. A one-dimensional magnet subjected to an external magnetic field can be described with a quantum one-dimensional Ising model - this is standard

<sup>8</sup> More precisely, the Tits index of a group also includes the action of the absolute Galois group on the Dynkin diagram, but the diagram for  $E_8$  has only the identity automorphism, so this action is trivial.

- and, in the previous millennium and not using  $E_8$ , [170] and [41] made numerical predictions regarding what would happen if the magnet were subjected to a second, orthogonal magnetic field. Some difficulties had to be overcome in order to experimentally test these predictions, namely, producing a large enough crystal with the correct properties (such as containing relatively isolated one-dimensional chains of ions) and producing a magnetic field that was large enough (5 tesla) and tunable. In the intervening years, these obstacles have been overcome, and the paper [34] reports on the resulting experiment.

The measurements were as predicted, and therefore the experiment can be viewed as providing evidence for the theory underlying the predictions.<sup>9</sup> Which raises the question: how does  $E_8$  appear in these predictions? Indeed, looking at the original papers, one finds no use of  $E_8$  in making the predictions (although Zamolodchikov did remark already in [170] that numerical coincidences strongly suggest that  $E_8$  should play a role). Those papers, however, in addition to a handful of unobjectionable non-triviality assumptions, rest on a serious assumption that the perturbed conformal field theory would be an integrable theory. It was later discovered that if one views the original conformal field theory as arising from a compact real Lie algebra via the "coset construction", then the perturbed theory is given by the corresponding affine Toda field theory, see [54], [97], and [50]. In this way, invoking the compact real form of  $E_8$  simplifies the theory by removing an assumption, and therefore any evidence for the theory as a whole - such as that provided by the experiment in [34] - may be viewed as "evidence for  $E_8$  symmetry".

For those wanting further checks on the theory, another experiment to try would be to test the predictions for a thermal perturbation of the tricritical Ising model,

for which the role of  $E_8$  is played instead by  $E_7$ . The unperturbed version has already been realized [151].

### 13.1.6 6. $E_8$ Over an Arbitrary Field

It makes sense to speak of Lie algebras or groups "of type  $E_8$ " over any field. Starting with the  $E_8$  root system and the Chevalley relations as in the previous section, one can put a Lie algebra structure on  $\mathbb{Z}^{248}$ . The isomorphism class of the resulting Lie algebra  $\mathfrak{e}_{8,\mathbb{Z}}$  does not depend on the choice of signs, and in this way one obtains, for every field  $F$ , a Lie  $F$ -algebra  $\mathfrak{e}_{8,F} := \mathfrak{e}_{8,\mathbb{Z}} \otimes F$  called the split  $\mathfrak{e}_8$  over  $F$ . Its automorphism group  $E_{8,F}$  is an algebraic group over  $F$ <sup>10</sup> known as the split group of type  $E_8$  over  $F$ .

Finite fields. For example, if  $F$  is a finite field with  $q$  elements, then the  $F$ -points  $E_{8,F}(F)$  are a finite simple group, normally denoted  $E_8(q)$ . These are enormous groups, whose order is a polynomial in  $q$  with leading term  $q^{248}$ . The smallest such group is  $E_8(2)$ , which has more than  $3 \times 10^{74}$  elements, about  $10^{20}$  times the size of the Monster [37, p. 242]. A special case of the Inverse Galois Problem is to ask: Does  $E_8(q)$  occur as a Galois group over  $\mathbb{Q}$ ? It is known when  $q$  is a prime larger than 5 by [90] and [169].

Groups of type  $E_8$ . More generally, a Lie algebra  $L$  over a field  $F$  is said to have type  $E_8$  or be an  $F$ -form of  $E_8$  if there is a field  $K \supseteq F$  such that  $L \otimes_F K$  is isomorphic to  $L_0 \otimes_{\mathbb{Z}} K$ . A similar definition applies for algebraic groups.

An algebraic group  $G$  of type  $E_8$  over  $F$  is split if it is isomorphic to  $E_{8,F}$ . It is isotropic if it contains a copy of  $\mathbb{G}_m$  (equivalently, if  $\text{Lie}(G)$  has a nontrivial  $\mathbb{Z}$ -grading), and anisotropic otherwise. For  $F = \mathbb{R}$ , there is a unique anisotropic form of  $E_8$ , the compact form, but for other fields  $F$  there may be many, see the examples in §8.

<sup>9</sup> Some skeptics aver that the evidence is weak, in that the confirmed predictions amount to somewhat noisy measurements of two numbers, namely the ratio of the masses of the two heaviest quasi-particles and the ratio of the corresponding intensities. In Bayesian language, the skeptics' estimate of the (probability of) correctness of the underlying theory was only somewhat increased by learning of the experimental results.

Fields over which the split  $E_8$  is the only  $E_8$ . Over some fields  $F$ , the split group  $E_{8,F}$  is the only group of type  $E_8$ . This is true for algebraically closed fields (trivially by [44]). It is also true for finite fields, fields of transcendence degree 1 over an algebraically closed field, and more generally for fields of cohomological dimension at most 1 [149]. Classically it is also known for  $p$ -adic fields and it is also true for every field that is complete with respect to a discrete valuation with residue field of cohomological dimension  $\leq 1$  [21]. It is also true for global fields of prime characteristic, i.e., finite extensions of  $\mathbb{F}_p(t)$  for some  $p$  [93].

It is also true if every finite separable extension of  $F$  has degree a power of some prime  $^{11}p \geq 7$ . This is argued in an elementary way in [156], but can alternatively be viewed as a special case of older and more general arguments underlying the proof of the Hasse Principle, specifically Propositions 6.19, 6.21 on pages 339, 375 of [128]. (Either way, only the case  $p = 7$  is nontrivial, because 7 is the largest prime dividing the order of the Weyl group of  $E_8$ .) The analogous statements for  $p = 2, 3$ , and 5 are false, see Example 8.1 and Theorem 9.1.

Serre's "Conjecture II". A bold conjecture of Serre's from 1962 [137] says that, for every field  $F$  of cohomological dimension  $^{12} \leq 2$ , and  $G$  a simply connected semisimple algebraic group over  $F$ ,  $H^1(F, G) = 0$ . As  $E_{8,F} = \text{Aut}(E_{8,F})$ , by descent  $H^1(F, E_{8,F})$  is identified with the pointed set of groups of type  $E_8$  over  $F$  (with distinguished element  $E_{8,F}$  itself). In this case, Serre's conjecture says: the split group  $E_{8,F}$  is the only form of  $E_8$  over  $F$ . What made this conjecture bold is that it includes totally imaginary number fields and finite extensions of  $\mathbb{F}_p(t)$  as special cases and the conjecture was not proved in these special cases until the 1980s [27] and 1970s [93] respectively. Furthermore, the hypothesis on cohomological dimension is very difficult to make use of; a key breakthrough in its application was the Merkurjev-Suslin Theorem [150, Th. 24.8] connecting it with surjectivity of the reduced norm of a central simple associative algebra.

Despite lots of progress during the past 20 years as in [10], and [78], the conjecture remains open; see [81] for a recent survey. It is known to hold for  $E_8$  if:

- every finite extension of  $k$  has degree a power of  $p$  for some fixed  $p$  by [78, § III.2] for  $p = 2, 3$  (or see [29] or [74, 10.22] for  $p = 3$ ) and by [28] for  $p = 5$  (or see [65, 15.5]). The  $p = 2$  case can also be deduced from properties of Semenov's invariant (see Theorem 9.2) if  $\text{char } F = 0$ .
- $k$  is the function field of a surface over an algebraically closed field, see [40] and [81].

Forms of  $E_8$  over  $\mathbb{Z}$ . One can equally well consider  $\mathbb{Z}$ -forms of  $E_8$  as in [85] or [36]. We don't go into this here, but note that  $E_8$  is unusual in this context in that the number of  $\mathbb{Z}$ -forms of the "compact" real  $E_8$  is at least  $10^4$ , in stark contrast to at most 4 for other simple groups of rank  $\leq 8$ , see [85, Prop. 5.3].

### 13.1.7 7. Tits' Conclusion

Tits gave an explicit construction of Lie algebras which produces  $\mathfrak{e}_8$  as a possible output [153]. Viewing the Lie algebra  $\mathfrak{e}_8$  as constructed from the root system  $E_8$  as in §2, one can see that it contains  $\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{f}_4$  as a subalgebra. It corresponds to an inclusion of groups  $G_2 \times F_4 \hookrightarrow E_8$ . Applying Galois cohomology  $H^1(F, *)$ , we find a map of pointed sets

$$H^1(F, G_2) \times H^1(F, F_4) \rightarrow H^1(F, E_8) \quad (7.1)$$

<sup>10</sup> Meaning it is a smooth variety such that the functor  $\{\text{field extensions of } F\} \rightarrow \text{Sets}$  given by sending  $K \mapsto E_{8,F}(K)$  factors through the category of groups

<sup>11</sup> This sort of field arises naturally when trying to disentangle phenomena related to distinct primes. See for example the discussion in [129, §5].

that is functorial in  $F$ ; we call this Tits' construction. To interpret this, we note that  $E_8$  is its own automorphism group and similarly for  $F_4$  and  $G_2$ . Again, descent tells us that  $H^1(F, E_8)$  is naturally identified with the set of isomorphism classes of algebraic groups (or Lie algebras) of type  $E_8$  over  $F$ , with distinguished element the split group  $E_8$ . The same holds for  $F_4$  and  $G_2$ . Thus the function (7.1) can be viewed as a construction that takes as inputs a group of type  $G_2$  and a group of type  $F_4$  and gives output a group (or Lie algebra) of type  $E_8$ .

Alternatively, viewing  $G_2$  and  $F_4$  as automorphism groups of an octonion and an Albert algebra respectively, Galois descent identifies  $H^1(F, G_2)$  and  $H^1(F, F_4)$  with the sets of isomorphism classes of octonion  $F$ -algebras and Albert  $F$ -algebras

respectively, cf. [106]. From this perspective, the construction takes as input two algebras.

Tits expressed his construction as an explicit description of a Lie algebra  $L$  made from an octonion  $F$ -algebra and an Albert  $F$ -algebra, see [153] or [99] for formulas.

Example 7.2. Let  $G$  be a group of type  $E_8$  obtained from an octonion algebra  $C$  and Albert algebra  $A$  via Tits' construction; we give the formula for the isomorphism class of its Killing form. The algebra  $C$  is specified by a 3-Pfister quadratic form  $\gamma_3$  and  $A$  has  $i$ -Pfister quadratic forms  $\phi_i$  for  $i = 3, 5$ , see [72]. Formulas for the Killing forms on the subgroups  $\text{Aut}(C)$  and  $\text{Aut}(A)$  are given in [72, 27.20], and plugging these into the calculation in [99, p. 117, (144)] gives that the Killing form on  $G$  is

$$\langle 60 \rangle [8 - (4\gamma_3 + 4\phi_3 + \langle 2 \rangle \gamma_3 (\phi_5 - \phi_3))]$$

in the Witt ring of  $k$ , exploiting the notation for elements of the Witt ring from [53].

In case  $F = \mathbb{R}$ , we know that there are two groups of type  $G_2$  or octonion algebras, the compact form (corresponding to the octonion division algebra) and the split form (the split algebra). There are three real groups of type  $F_4$  or Albert  $\mathbb{R}$ -algebras, the compact form (the Albert algebra with no nilpotents), the split form (the split algebra), and a third form we will call "intermediate" (the Albert algebra with nilpotents but not split). The book [99] contains a careful calculation of the Killing form on the Lie algebra of type  $E_8$  produced by this construction for each choice of inputs, and we list the outputs in Table B.

| Form of $E_8$ | Rost<br>invariant<br>$F_4$ | Semenov<br>invariant | inputs to Tits' construction         |                                          |
|---------------|----------------------------|----------------------|--------------------------------------|------------------------------------------|
| $G_2$         |                            |                      |                                      |                                          |
| compact       | 0                          | 1                    | compact                              | compact                                  |
| intermediate  | 1                          | NA                   | split<br>compact<br>split<br>compact | intermediate or compact<br><br><br>split |
| split         | 0                          | 0                    | intermediate                         |                                          |

TABLE B. Real forms of  $E_8$ : cohomological invariants and Tits' construction

One could ask for a description of the Tits index of the  $E_8$  produced by (7.1) in terms of the inputs, e.g., to know whether and how the output group is isotropic. In one direction, the answer is easy: the groups of type  $G_2$  and  $F_4$  used as inputs to the construction are subgroups of the output, and therefore isotropic inputs give isotropic outputs. However, in the analogous question for Tits' construction of groups of type  $F_4$  or  $E_6$ , anisotropic inputs can produce isotropic outputs, see for example [73].

<sup>12</sup> Here cohomological dimension means the supremum of the cohomological  $p$ -dimension as  $p$  varies over all primes. Cohomological  $p$ -dimension is defined via Galois cohomology as in [144] for  $p \neq \text{char } F$  and via Milne-Kato cohomology if  $p = \text{char } F$ . Furthermore, the conjecture only demands this for a finite list of primes depending on the Killing-Cartan type of  $G$ , see [140] or [81] for precise statements. In the case of  $E_8$ , the hypothesis only concerns the primes 2, 3, and 5.



Example 7.3 (Number fields). If  $G$  is a group of type  $E_8$  over a number field  $F$ , then the natural map

$$H^1(F, G) \rightarrow \prod_{\text{real closures } R \text{ of } F} H^1(R, G)$$

is bijective. (This is true more generally for every semisimple simply connected group  $G$  [128, p. 286]. It is the Hasse Principle mentioned in the introduction.)

In particular, if  $F$  has  $r$  real embeddings, then there are  $3^r$  isomorphism classes of groups of type  $E_8$  over  $F$ , all of which are obtained from Tits' construction. Two groups of type  $E_8$  over  $F$  are isomorphic if and only if their Killing forms are isomorphic, because this is so when  $F = \mathbb{R}$ .

### 13.1.8 8. Cohomological invariants; the Rost Invariant

At this point in the survey, we have assembled only a few tools for determining whether or not two groups or Lie algebras of type  $E_8$  over a field  $F$  are isomorphic, or whether they can be obtained as outputs from Tits' construction. Indeed, the only tools we have so far for this are the Tits index and the Killing form. In [156], Tits showed that a "generic" 13 group  $G$  of type  $E_8$  has no reductive subgroups other than rank 8 tori (which necessarily exist); such a group cannot arise from Tits' construction because those groups all have a subgroup of type  $G_2 \times F_4$ . This brings us to the state of knowledge in 1990, as captured in [138].

To address this gap, we will use various invariants in the sense of [72]. Let  $G$  be an algebraic group over a field  $F$ . Let  $A$  be a functor from the category of fields containing  $F$  to abelian groups. An  $A$ -invariant  $f$  of  $G$  is a morphism of functors  $f : H^1(*, G) \rightarrow A(*)$ , i.e., for each field  $K$  containing  $F$ , there is a function  $f_K : H^1(K, G) \rightarrow A(K)$  and for each morphism  $\alpha : K \rightarrow K'$  the diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1(K, G) & \xrightarrow{f_K} & A(K) \\ H^1(\alpha) \downarrow & & \downarrow A(\alpha) \\ H^1(K', G) & \xrightarrow{f_{K'}} & A(K') \end{array}$$

commutes. One goal of the theory of cohomological invariants is to describe all the  $A$ -invariants of  $G$ , for various choices of  $G$  and  $A$ . Some classical examples of invariants in this sense are the Brauer class of central simple algebras (an  $H^2(*, \mathbb{G}_m)$ -invariant of  $\mathrm{PGL}_n$ ) and the Stiefel-Whitney classes or Hasse-Witt invariant of a quadratic form when  $\mathrm{char} F \neq 2$  ( $H^*(*, \mathbb{Z}/2)$ -invariants of an orthogonal group  $O_n$ ).

The addition in  $A(K)$  for each  $K$  gives the structure of an abelian group to the collection of  $A$ -invariants of  $G$ . Every element  $a \in A(F)$  gives a "constant" invariant  $f_a$  that sends every element of  $H^1(K, G)$  to the image of  $a$  in  $A(K)$ , for every  $K$ . An invariant is normalized if the distinguished element of the pointed set  $H^1(F, G)$  is sent to the zero element of  $A(F)$ . Evidently every  $A$ -invariant can be written uniquely as (constant) + (normalized).

The Rost invariant. Considering the case where  $A$  is Galois cohomology with torsion coefficients and  $G$  is a simple and simply connected group, one finds that the group of normalized invariants  $H^1(*, G) \rightarrow H^d(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d-1))$  is zero for  $d = 1$  (because  $G$  is connected [106, 31.15]) and for  $d = 2$  (because  $G$  is simply connected, see [12, Th. 2.4]). For  $d = 3$ , Markus Rost proved that the group is cyclic with a canonical generator  $r_G$ , now known as the Rost invariant, whose basic properties are developed in [72]. (Rost's theorem has recently been extending to

include the case where  $G$  is split reductive, see [122] and [108].) For  $G = G_2, F_4, E_8$ ,  $r_G$  has order 2, 6, 60 respectively.

Example 8.1. Let  $G$  be a versal form of  $E_8$ , defined over some field  $K$ . Then  $r_{E_8}(G)$  has order 60 by [72, p. 150]. For a prime  $p$ , let  $L$  be the separable algebraic extension of  $K$  fixed by a  $p$ -Sylow subgroup of the absolute Galois group of  $K$ , so every finite separable extension of  $L$  has degree a power of  $p$ . If  $p \geq 7$ , then as in §6, the base change  $G_L$  of  $G$  to  $L$  is split. But if  $p < 7$ , then  $p$  divides 60, and  $r_{E_8}(G_L)$  is not zero, so  $G_L$  is not split. (To see that  $r_{E_8}(G_L) \neq 0$ , note that  $H^3(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  is the colimit  $\varinjlim H^3(L_0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  as  $L_0$  runs over finite extensions of  $K$  contained in  $L$ . But if any such  $L_0$  killed  $r_{E_8}(G)$ , a restriction/corestriction argument as in [144, §I.2.4, Prop. 9] would show that  $r_{E_8}(G)$  has order dividing  $[L_0 : K]$ , a contradiction.)

Example 8.2. The composition

$$H^1(F, G_2) \times H^1(F, F_4) \xrightarrow{\text{Tits}} H^1(F, E_8) \xrightarrow{r_{E_8}} H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \quad (8.3)$$

is  $r_{G_2} + r_{F_4}$ , by an argument analogous to that in the proof of [75, Lemma 5.8]. This reduces the computation of the Rost invariant for  $E_8$ 's arising from Tits' construction to the (known, calculable) Rost invariants  $r_{G_2}$  and  $r_{F_4}$ , and therefore gives a formula for all forms of  $E_8$  over  $\mathbb{R}$  or over a number field. We have included these values in Table B. For arbitrary  $F$ , the image of the composition (8.3) belongs to the 6-torsion subgroup,  $H^3(F, \mathbb{Z}/6(2))$ .

Example 8.4. Considering the  $\mathbb{Z}/5$ -grading on  $\mathfrak{e}_8$  from Example 4.5, we find a subgroup  $(\text{SL}_5 \times \text{SL}_5) / \mu_5$  of  $E_8$ , which in turn contains a subgroup  $\mu_5 \times \mu_5 \times \mathbb{Z}/5$ . Applying cohomology gives a map

$$H^1(F, \mu_5) \times H^1(F, \mu_5) \times H^1(F, \mathbb{Z}/5) \rightarrow H^1(F, E_8) \quad (8.5)$$

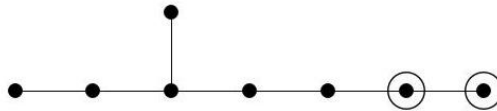
Composing this with  $r_{E_8}$ , we obtain a map

$$H^1(F, \mu_5) \times H^1(F, \mu_5) \times H^1(F, \mathbb{Z}/5) \rightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/5(2))$$

that is, up to sign, the cup product map into  $H^3(F, \mathbb{Z}/5(2))$  [82]. Therefore, if  $H^3(F, \mathbb{Z}/5(2))$  is not zero, it contains a nonzero symbol  $s$ , and from this one can construct a group  $G$  of type  $E_8$  with  $r_{E_8}(G) = s$ . This group  $G$  cannot arise from Tits' construction.

We remark that (8.5) is surjective in the special case where every finite separable extension of  $F$  has degree a power of 5.

Example 8.6. We can focus our attention on the 3-torsion part of the image of  $r_{E_8}$  by considering  $20r_{E_8}$ , which has image in  $H^3(*, \mathbb{Z}/3(2))$ . What is its image? Given a nonzero symbol  $s$  in  $H^3(F, \mathbb{Z}/3(2))$ , there is an Albert division algebra  $A$  constructed by the first Tits construction such that  $r_{F_4}(A) = s$ . The inclusions  $F_4 \subset E_6 \subset E_8$  induce a map  $H^1(F, F_4) \rightarrow H^1(F, E_8)$  such that the image  $G$  of  $A$  has Tits index



and  $r_{E_8}(G) = r_{F_4}(A) = s$ . (Indeed, the uncircled vertices in the Tits index indicate a subgroup of type  $E_6$  that is the group of isometries of the norm on  $A$ .) Conversely, given an  $F$ -form  $G$  of  $E_8$  over any field  $F$  such that  $20r_{E_8}(G)$  is a symbol in  $H^3(F, \mathbb{Z}/3(2))$ , [74] shows that there is a finite extension  $K$  of  $F$  of degree not divisible by 3 such that  $G \times K$  has Tits index (8.7).

<sup>13</sup> Meaning a versal form as defined in [72]. By definition, one can obtain from a given versal form of  $E_8$  every group of type  $E_8$  over every extension of  $F$  by specialization.



Example 8.8. There exists a field  $F$  and an  $F$ -form  $G$  of  $E_8$  such that  $20r_{E_8}(G)$  is not a symbol in  $H^3(F, \mathbb{Z}/3(2))$ , nor does it become a symbol over any finite extension of  $F$  of degree not divisible by 3. (In particular, such a group does not arise from Tits' construction.) To see this, one appeals to the theory of the  $J$  invariant from [127] that there exists such a  $G$  with  $J_3(G) = (1, 1)$ ; [74, Lemma 10.23] shows that such a group has the desired property.

In contrast to the case of 3 and 5 torsion as in the preceding two examples, the 2-primary part of  $r_{E_8}(G)$  may have a longer symbol length and a more subtle relationship with the isotropy of  $G$ . As in Table B, the compact real form has Rost invariant 0, yet is anisotropic. In the other direction, Appendix A. 6 of [65] gives an example of an isotropic group  $G$  of type  $E_8$  over a field  $F$  such that  $r_{E_8}(G)$  belongs to  $H^3(F, \mathbb{Z}/2(2))$ , and  $r_{E_8}(G)$  is not a sum of fewer than three symbols.

Underlying the results used in Examples 8.6 and 8.8 are analyses of the possible decompositions of the Chow motives with  $\mathbb{F}_p$ -coefficients of the flag varieties for a group of type  $E_8$ . This is a way to study the geometry of these varieties despite their lack of rational points in cases of interest, and it has been widely exploited over the last decade for analyzing semisimple groups over general fields, see for example the book [53] for applications to quadratic form theory.

Example 8.9. Suppose  $G$  is a group of type  $E_8$  such that  $r_{E_8}(G)$  has order divisible by 15. (For example, if  $G$  is versal as in Example 8.1.) Then  $G$  has no proper reductive subgroups other than rank 8 tori, by the argument for [68, Th. 9.6]. Essentially, employing the Rost invariant simplifies Tits' proof of the fact about versal groups mentioned at the beginning of this section.

### 13.1.9 9. The kernel of the Rost invariant; Semenov's invariant

The examples in the previous section show that the Rost invariant can be used to distinguish groups of type  $E_8$  from each other and for stating some results about such groups. But it remains a coarse tool. For example: Given a field  $F$ , what are the groups of type  $E_8$  that are in the kernel of the Rost invariant?

One way to approach this question is to simplify the problem by making an assumption about the arithmetic of  $F$ . For example, in §6 we listed several kinds of fields  $F$  over which every  $E_8$  is split; in these cases the answer to the question is trivial. To that list we add the following.

Theorem 9.1 (Chernousov). Suppose that every finite extension of  $F$  has degree a power of  $p$  for  $p = 3$  or  $5$ . Then the kernel of the Rost invariant  $r_{E_8} : H^1(F, E_8) \rightarrow H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$  is zero.

Proof. This combines the main results of [28] and [29]. (Those papers make some hypothesis on char  $F$ , but such an assumption is harmless in view of [74, Prop. 9.3].) For alternative proofs, see [65, Prop. 15.5] for  $p = 5$  and [74, Prop. 10.22] for  $p = 3$ .

As the case  $p \geq 7$  was treated in §6, only  $p = 2$  remains. The conclusion of Theorem 9.1 is false in that case, as can be seen already for  $F = \mathbb{R}$ , where the compact  $E_8$  has Rost invariant zero. Recently, Semenov produced a newer, finer invariant in [136]. Put  $H^1(F, E_8)_{15}$  for the kernel of  $15r_{E_8}$ , a subset of  $H^1(F, E_8)$ .

Theorem 9.2 (Semenov). If char  $F = 0$ , there exists a nonzero invariant

$$s_{E_8} : H^1(*, E_8)_{15} \rightarrow H^5(*, \mathbb{Z}/2)$$

such that  $s_{E_8}(G) = 0$  if and only if  $G$  is split by an odd-degree extension of  $F$ .

For the case  $F = \mathbb{R}$ ,  $s_{E_8}$  is defined only for the split and compact real forms, and it is nonzero on the compact form.

This style of invariant, which is defined only on a kernel of another invariant, is what one finds for example in quadratic form theory. The Rost invariant  $H^1(*, \text{Spin}_n) \rightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/2)$

amounts to the so-called Arason invariant  $e_3$  of quadratic forms. There is an invariant  $e_4$  defined on the kernel of  $e_3$  with values in  $H^4(F, \mathbb{Z}/2)$ , an invariant  $e_5$  defined on the kernel of  $e_4$  with values in  $H^5(F, \mathbb{Z}/2)$ , and so on, see [53, §16].

Example 9.3. Let  $G$  be a group of type  $E_8$  arising from Tits' construction as in Example 7.2. Then  $15r_{E_8}(G) = 0$  if and only if  $\phi_3 = \gamma_3$  in the notation of that example. In that case,  $s_{E_8}(G)$  is the class  $e_5(\phi_5) \in H^5(F, \mathbb{Z}/2)$ , see [76, Th. 3.10].

It is natural to wonder what other cohomological invariants of  $E_8$  may exist.

Question 9.4. [131, p. 1047] Do there exist nonzero invariants mapping  $H^1(*, E_8)$  into  $H^5(*, \mathbb{Z}/3)$  and  $H^9(*, \mathbb{Z}/2)$ ?

The parameters in the question were suggested by the existence of certain nontoral elementary abelian subgroups in  $E_8(\mathbb{C})$ . (Such subgroups are described in [83].)

### 13.1.10 10. Witt Invariants

We introduced the notion of  $A$ -invariant as a tool for distinguishing groups of type  $E_8$ . In the previous two sections we discussed the case where  $A$  was a Galois cohomology group, but one could equally well take  $A$  to be the functor  $W$  that sends a field  $F$  to its Witt group of non-degenerate quadratic forms  $W(F)$  as defined in, for example, [53] or [109]. In this section, for ease of exposition, we assume that  $\text{char } F \neq 2$ . In particular,  $W(F)$  is naturally a ring via the tensor product.

Killing form. For  $G$  an algebraic group, put  $\kappa(G)$  for the Killing form on the Lie algebra of  $G$ . (If  $\text{char } k$  divides 60, then the Killing form is identically zero, and in that case one should define  $\kappa(G)$  to be the reduced Killing quadratic form as defined in [67]. We elide the details here.) The function  $G \mapsto \kappa(G)$  is a morphism of functors  $H^1(*, E_8) \rightarrow W(*)$ , and we define

$$f : H^1(*, E_8) \rightarrow W(*) \quad \text{via} \quad G \mapsto \kappa(G) - \kappa(E_8)$$

to obtain a  $W$ -invariant that sends the distinguished class to 0.

The Witt ring has a natural filtration by powers of the "fundamental" ideal  $I$  generated by even-dimensional quadratic forms. It is natural to ask: What is the largest  $n$  such that  $f(G)$  belongs to  $I^n$ ?

Example 10.1. In case  $G$  arises by Tits' construction, the formula in Example 7.2 shows that  $f(G) \in I^5$ . Concretely we can see this over the real numbers, where the signature defines an isomorphism  $W(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$  that identifies  $I^5$  with  $32\mathbb{Z}$ , and Table A shows that  $f(G) \in \{0, -32, -248\}$ .

The action of the split group  $E_8$  on its Lie algebra  $\mathfrak{e}_8$  is by Lie algebra automorphisms, so it preserves the Killing form  $\kappa(E_8)$ , giving a homomorphism  $E_8 \rightarrow O(\kappa(E_8))$ . As  $E_8$  is simply connected, this lifts to a homomorphism  $E_8 \rightarrow \text{Spin}(\kappa(E_8))$ . By Galois descent, it is clear that the image of a group  $G$  under the map  $H^1(F, E_8) \rightarrow H^1(F, O(\kappa(E_8)))$  is  $\kappa(G)$ , whence  $f(G)$  necessarily belongs to  $I^3$  because the map factors through  $H^1(F, \text{Spin}(\kappa(E_8)))$  [106, p. 437].

In fact, we cannot do better than the exponent in the previous paragraph, because:  $f(G)$  belongs to  $I^4$  iff  $30r_{E_8}(G) = 0$ . To see this, we observe on the one hand that  $f(G)$  belongs to  $I^4$  if and only if  $f(G)$  is in the kernel of the Arason invariant  $e_3 : I^3(*) \rightarrow H^3(*, \mathbb{Z}/2)$  by [123] or [132], i.e., the Rost invariant  $r_{\text{Spin}(\kappa(E_8))}$  vanishes on the image of  $G$ . On the other hand, the map  $E_8 \rightarrow \text{Spin}(\kappa(E_8))$  has Dynkin index 30, so composing it with  $r_{\text{Spin}(\kappa(E_8))}$  gives  $30r_{E_8}$  by [72, p. 122]. This completes the proof of the claim. A versal group  $G$  of type  $E_8$  has  $30r_{E_8}(G) \neq 0$ , so  $f(G) \in I^3 \setminus I^4$ .

Inspired by [139], we may still ask: If  $r_{E_8}(G)$  has odd order, is it necessarily true that  $f(G) \in I^8$ ? If the answer is yes and  $\text{char } F = 0$ , one can ask for more: Does Semenov's invariant  $s(G) \in H^5(F, \mathbb{Z}/2)$  divide  $e_8(f(G)) \in H^8(F, \mathbb{Z}/2)$ ? The answer to both of these

questions is "yes" for groups arising from Tits' construction, by Example 7.2. See [66] for more discussion.

Witt invariants in general. For every field  $K$  containing  $F$ , the ring  $W(K)$  is a  $W(F)$ -algebra with identity element  $q_0$ , and  $W(*)$  is a functor to the category of  $W(F)$ -algebras. Therefore, the collection of invariants  $H^1(*, E_8) \rightarrow W(*)$  is itself a  $W(F)$ -algebra.

Question 10.2. What are the invariants  $H^1(*, E_8) \rightarrow W(*)$ ?

Here is a natural way to construct such invariants. For each dominant weight  $\lambda$  of  $E_8$ , there is a Weyl module  $V(\lambda)$  with highest weight  $\lambda$  defined for  $\mathfrak{e}_{8,\mathbb{Z}}$  as in [101], that has an indivisible,  $E_{8,\mathbb{Z}}$ -invariant quadratic form  $q_{\mathbb{Z}}$  on it, uniquely determined up to sign. Base change to a field  $P$  gives a quadratic form  $q_{\mathbb{Z}} \otimes P$  on  $V(\lambda) \otimes P$  that has a radical, namely the unique maximal proper submodule of  $V(\lambda) \otimes P$ , hence we find a quadratic form on the irreducible quotient of  $V(\lambda) \otimes P$ , call the form  $q_{\lambda,P}$ . Applying  $H^1$ , we obtain a function  $H^1(P, E_8) \rightarrow H^1(P, O(q_{\lambda,P}))$ , and therefore for every group  $G$  of type  $E_8$  over  $P$ , we obtain a corresponding quadratic form we denote by  $q_{\lambda}(G)$ . For example, the "constant" invariant that sends every  $G$  to the 1-dimensional quadratic form  $x \mapsto x^2$  can be viewed as  $q_0$ , and the invariant  $\kappa$  can be viewed as  $q_{\lambda}$  for  $\lambda$  the highest root. Do the  $q_{\lambda}$ , as  $\lambda$  varies over the dominant weights, generate the  $W(F)$ -algebra of invariants  $H^1(*, E_8) \rightarrow W(*)$ ?

### 13.1.11 11. Connection with Division Algebras

Groups of type  $E_8$  are closely related to the smallest open cases of two of the main outstanding problems in the study of (associative) division algebras. To recall the terminology, the center of a division ring  $D$  is a field, call it  $F$ . We say that  $D$  is a division algebra if  $\dim_F D$  is finite, in which case  $\dim_F D$  is a square, and its square root is called the degree of  $D$ . Hamilton's quaternions are an example of such a  $D$  with  $F = \mathbb{R}$  and  $\deg D = 2$ .

One knows that, among all fields  $K$  such that  $F \subset K \subset D$ , the maximal ones always have  $\dim_F K = \deg D$ . In case there exists a maximal  $K$  that is Galois over  $F$  (resp., Galois over  $F$  with cyclic Galois group), one says that  $D$  is a crossed product (resp., is cyclic). For a crossed product, one can write down a basis and multiplication rules in a relatively compact way, and the description is even simpler if  $D$  is cyclic.

Every division algebra  $D$  with  $\deg D = 2$  or  $3$  is known to be cyclic, and the principal open problem in the theory of division algebras is: If  $\deg D = p$  for a prime  $p \geq 5$ , must  $D$  be cyclic? (See [5] for context and discussion.) Philippe Gille showed that this question, for the case  $p = 5$ , can be rephrased as a statement about groups of type  $E_8$ , see [79].

Along with the dimension, another property of a division algebra  $D$  is its period, which is the smallest number  $p$  such that a tensor product of  $p$  copies of  $D$  is isomorphic to a matrix algebra over  $F$ . (It is a basic fact that  $p$  divides  $\deg D$  and that the two numbers have the same prime factors.) Another open problem about division algebras is: Determine whether every division algebra  $F$  of period  $p$  and degree  $p^2$  is a crossed product. For period 2 and degree  $2^2$ , the answer is "yes" and is due to Adrian Albert. (It is also "yes" for period 2 and degree  $2^3$  by Louis Rowen [100].) The smallest open case, then, is where  $p = 3$ , and this is where  $E_8$  may play a role. As in [164], using the  $\mathbb{Z}/3$ -grading on  $\mathfrak{e}_8$  from Example 4.4, we find that  $\mathrm{SL}_9/\mu_3$  acts transitively on certain 4-dimensional subspaces of  $\wedge^3(F^9)$ . This gives a surjection in Galois cohomology  $H^1(F, N) \rightarrow H^1(F, \mathrm{SL}_9/\mu_3)$  for some subgroup  $N$  of  $\mathrm{SL}_9/\mu_3$  and one can hope that analyzing this surjection would give insight into whether algebras of degree 9 and period 3 are crossed products. See [114] for more discussion of this general setup and [65] for examples where similar surjections are exploited.

### 13.1.12 12. Other Recent Results on $E_8$

**Torsion index.** Grothendieck [88] defined an invariant of a compact Lie group  $G$  called the torsion index, which has interpretations for the Chow groups and motivic cohomology of the classifying space of  $BG$  as well as for the étale cohomology of torsors under analogues of  $G$  over arbitrary fields, see [159] for precise statements. Jacques Tits' brief paper [156] contained a proof that the torsion index for the compact  $E_8$  is divisible by  $60 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  and divides  $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$ , and wrote that one could hope ("hypothèse optimiste !") that the correct answer is 60. In [157] and [158], Burt Totaro proved that it is  $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$ .

**Kazhdan-Lusztig-Vogan polynomials.** Some readers will remember a flurry of news coverage in 2007 about a "calculation the size of Manhattan". This referred to the calculation of the Kazhdan-Lusztig-Vogan polynomials for the split real forms of simple Lie algebras, where the final step was for  $\mathfrak{e}_{8,\mathbb{R}}$ . For more on this see [165] and [160]. We have also omitted the related topic of infinite-dimensional unitary representations of  $E_8$ , for constructions of which see example [103], [86], and [22].

**Finite simple subgroups.** We now know which finite simple groups embed in the (infinite) simple group  $E_8(\mathbb{C})$ , or more generally  $E_8(k)$  for  $k$  algebraically closed, see [143], [84], and [33] for surveys. One would like to know also how many conjugacy classes there are for each of these finite subgroups, for which the interesting case of the alternating group on 5 symbols was resolved in [115]. These questions can be viewed as a case of a natural generalization of the classification of the finite simple subgroups of  $\mathrm{SO}(3)$ , which amounts to a classification of the Platonic solids as in [105, Chap. I]. Specifically, the Platonic solids correspond to the embeddings of the

alternating group on 4 or 5 letters,  $\mathrm{PSL}(2, 3)$  and  $\mathrm{PSL}(2, 5)$ , and the symmetric group on 5 letters,  $\mathrm{PGL}(2, 3)$ , in  $\mathrm{SO}(3)$ , and these embeddings are part of a series of embeddings of such subgroups in simple Lie groups including the case of  $E_8(k)$ , see [141] and [143].

**Vanishing of trace forms.** For a representation  $\rho : \mathfrak{e}_{8,F} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  for some  $V$ , the map  $b_\rho : (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(x)\rho(y))$  defines an  $\mathfrak{e}_{8,F}$ -invariant symmetric bilinear form on  $\mathfrak{e}_{8,F}$ . (When  $\rho$  is the adjoint representation,  $b_\rho$  is the Killing form.) In the 1960s, motivated by then-current approaches to studying Lie algebras over fields of prime characteristic, it was an open problem to determine whether  $b_\rho$  is identically zero for all  $\rho$  when  $\mathrm{char} F = 5$ , see [135, p. 48], [13, p. 554], or [14, p. 544]. It is indeed always zero, and for  $\mathrm{char} F = 2, 3$  as well, see [67].

**Essential dimension.** The essential dimension  $\mathrm{ed}(G)$  of an algebraic group  $G$  is a non-negative integer that declares, roughly speaking, the number of parameters needed to specify a  $G$ -torsor, see [130], [129], or [121] for a formal definition and survey of what is known. In the case of  $E_8$ , this equals the number of parameters needed to specify a group of type  $E_8$ . So far, we only know bounds on  $\mathrm{ed}(E_8)$  and the bounds we know are quite weak. Specifically, over  $\mathbb{C}$  we have

$$9 \leq \mathrm{ed}(E_8) \leq 231$$

where the lower bound is from [131] or [30] and the upper bound is from [112] or [69]. The distance between the upper and lower bounds is remarkable. In contrast, for the other simply connected exceptional groups over  $\mathbb{C}$ , one knows by [118] and [114] that

$$\mathrm{ed}(G_2) = 3, \quad 5 \leq \mathrm{ed}(F_4) \leq 7, \quad 4 \leq \mathrm{ed}(E_6) \leq 8, \quad \text{and} \quad 7 \leq \mathrm{ed}(E_7) \leq 11$$

which are all much closer. Determining  $\mathrm{ed}(E_8)$  will require new techniques.

Yet more topics. We have furthermore omitted any discussion of:

- Relations with vertex operator algebras as in [57] and [59].

- The adjoint representation of  $E_8$  is in some sense unique among irreducible representations of simple algebraic groups, in that it is the only non-minuscule standard module that is irreducible in all characteristics, see [71].
- The Kneser-Tits Problem as described in [80]. One of the remaining open cases for  $E_8$  was recently settled in [126], and another was settled in some special cases in [152].
- Affine buildings with residues of type  $E_8$  as in [124].

## 13.2 Systems of equations

(см. например, Аржанцев, И.В. “Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений”, но это большая тема, пока ей не занимался. Теорию, что была тут удалил, потому что все равно нужно все переписывать и пока нет планов это изучать.)

## 13.3 Polynomials

(см. книгу Ленга, Кострикина, пока не до них)

### 13.3.1 The simplest theory of polynomials

хз вообще

**теорема безу**

Теорема о факториальности кольца многочленов. типа что мы и делаем, можно разложить в произведение.

Лемма о линейном представлении наибольшего общего делителя (НОД). а вот эта уже интересная, на самом деле кто бы мог подумать, что такие связки есть. оказывається, это связано с алгоритмом Евклида поиска НОД, когда с остатками работаем.

кстати есть аналогичное утверждение про числа и из него выходят многие способы решения олимпиадных задач на теорию чисел.

**Определение 13.1.** *алгебраически замкнутое поле - оказывается, что тут речь о многочленах. через них можно возвращаться в это поле.*

и типа мы тут начали алгебраически рассуждать, так что основная теорема алгебры:

**Определение 13.2.** *поле комплексных чисел замкнуто. или эквивалентные формулировки.*

### 13.3.2 Free algebras

### 13.3.3 Definition of polynomials

### 13.3.4 Elementary Properties of Polynomials

### 13.3.5 Euclid’s algorithm

### 13.3.6 Fractions

### 13.3.7 Decomposition into prime factors (???)

The unambiguity of decomposition into prime factors of polynomials from several variables (????)

### **13.3.8 Irreducibility criteria**

### **13.3.9 Derivative and Multiple Roots**

### **13.3.10 Symmetric polynomials**

### **13.3.11 Resultant**

## **13.4 Homological algebra**

пока вообще хз

## **13.5 Other English**

### **13.5.1 Euler's totient function**

(if needed, I'll write it here, a special function, never needed it before)



---

## Part VIII

# Applications of Algebra in Physics

## 14 Applications of Lie Algebras in Physics

(мб потом еще из рубакова выпишу для физики полную заготовку)

### 14.1 Physical Applications by Zhou

#### 14.1.1 Isospin by Zhou

We give a historical account of the development of isospin and some of its successes.

- In 1932, the neutron was discovered and found to have a mass very similar to that of the proton. It was immediately proposed that the neutron and proton form a doublet under an  $SU(2)$  symmetry of the strong interaction, called isospin, with the symmetry broken by electromagnetic effects.

- We will refer to both the quantum numbers  $s$  and  $m$  as the 'spin'. Similarly we refer to both  $I$  and  $I_3$  as the isospin.

- In 1935, Yukawa proposed that the nuclear force could be mediated by the exchange of mesons. In 1947, the charged pions  $\pi^\pm$  were discovered which participated in the processes

$$p \rightarrow n + \pi^+, \quad n \rightarrow p + \pi^-$$

Applying isospin addition, the isospin of the charged pions can be either 0 or 1. Since the charged pions have nearly the same mass, we suppose they are part of an isospin triplet, leading to the prediction of a third pion  $\pi^0$  which was found in 1950.

- The Gell-Mann-Nishijima formula is the empirical result

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

where  $Y$  is the hypercharge, an operator lying outside of  $SU(2)$  conserved by strong interactions. For nucleons,  $Y = 1$ , while for pions  $Y = 0$ .

- As an example, the deuteron is a bound state of the proton and neutron, and can be produced in the processes

$$p + p \rightarrow d + \pi^+, \quad p + n \rightarrow d + \pi^0$$

Then the isospin of the deuteron is either 0 or 1. In the case of isospin 1, applying the isospin raising and lowering operators implies the existence of  $p - p$  and  $n - n$  bound states, which are not observed. Hence the deuteron has isospin 0. Since the deuteron has zero orbital angular momentum, it must thus have spin 1 to make the full wavefunction antisymmetric.

- Isospin can also make quantitative predictions. The amplitudes for these two processes are proportional to the Clebsch-Gordan coefficients

$$\left\langle 1, 1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = 1, \quad \left\langle 1, 0 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

respectively. The cross section for the first process is twice as large, as confirmed in 1953.

- As another example, it was found that the cross section for

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$





Next, we introduce the Eightfold Way historically.

- In the early 1950s, a number of new particles were discovered, in particular four pseudoscalar  $K$  mesons. Since the three pions were known, there was a total of seven pseudoscalar mesons, which were proposed to form an irrep (since all particles in an irrep automatically have the same parity). Gell-Mann proposed that the irrep was the  $(1, 1)$  of  $SU(3)$ , thus predicting an eighth particle, the  $\eta^0$ . (There is also another octet containing vector mesons.)

- Part of the confusion was that the  $SU(3)$  symmetry was much more badly broken than isospin; the masses of the  $K$  mesons were over three times the masses of the pions, though they were still significantly lighter than any baryons.

- In addition, experimentalists found an isospin triplet of  $\Sigma$  baryons, an isospin doublet of  $\Xi$  baryons, and an isospin singlet  $\Delta$  baryon, which Gell-Mann proposed fit with the neutron and proton in another  $(1, 1)$  of  $SU(3)$ .

- Finally, a number of short-lived hadron resonances were known, including the four  $N^*$  particles above. They were proposed to form the  $(3, 0)$  of  $SU(3)$ , predicting a tenth resonance, the  $\Omega$ .

- The triality of the  $(m, n)$  irrep of  $SU(3)$  is defined as  $(m - n) \pmod{3}$ . Note that all of the irreps listed above have zero triality. Physically, all of these representations are built from the  $3$  (containing quarks) and the  $\bar{3}$  (containing antiquarks). Thus triality zero ensures that observed mesons and baryons have integer charge and baryon number. Confinement in QCD ensures that all observable free particles have zero triality.

- By restricting to  $SU(2) \subset SU(3)$ , an  $SU(3)$  irrep breaks into isospin irreps, e.g.  $3 \rightarrow 2 + 1$ , so we can recover isospin from the Eightfold Way. The isospin and hypercharge obey

$$I_3 = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 0), \quad Y = \frac{1}{3} \text{diag}(1, 1, -2)$$

so the up and down quark have hypercharge  $1/3$ , and the strange quark has hypercharge  $-2/3$ . Then hypercharge generates a  $U(1)$  subgroup and we can think of restricting  $SU(3)$  to  $SU(2) \times U(1)$ , so that every isospin irrep is labeled by a hypercharge.

- We write  $I_{3Y}$  to indicate an isospin  $I$  irrep with hypercharge  $Y$ . Then we have

$$3 \rightarrow 2_1 + 1_{-2}, \quad 3^* \rightarrow 2_{-1} + 1_2$$

For example, decomposing both sides of  $3 \times 3^* = 8 + 1$  yields

$$8 \rightarrow 3_0 + 1_0 + 2_3 + 2_{-3}$$

which reproduces the structure of the meson and baryon octets. This is experimentally useful, since isospin is a much more accurate symmetry than the  $SU(3)$ .

- Finally, assigning the quarks charges of  $(2/3, -1/3, 2/3)$  and isospin  $(1/2, -1/2, 0)$  recovers the Gell-Mann-Nishijima formula. Physically, a formula like this had to work because electromagnetic interactions preserve isospin and hypercharge, so the electromagnetic field has to couple to some combination of  $I_3$  and  $Y$ , and we call this combination the charge.

### 14.1.3 Roots and Weights for $\mathfrak{su}(3)$ by Zhou

In this section, we investigate the structure of the Lie algebra  $\mathfrak{su}(3)$ .

- The Gell-Mann matrices are

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} & -i \\ & \end{pmatrix}$$

and

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} & & \\ & -i & \\ i & & \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

The pairs  $\lambda_4$  and  $\lambda_5$  are analogous to  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  but act on the first and third column, while the pair  $\lambda_6$  and  $\lambda_7$  does the same on the second and third column. The matrices are normalized so that  $\text{tr } \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}$ .

- For concreteness, we work in the fundamental representation of  $\mathfrak{su}(3)$  using the universal physics normalization convention for the fundamental,

$$T_a = \lambda_a/2, \quad \text{tr } T_a T_b = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

All our results will hold in general, since they depend only on the structure constants of  $\mathfrak{su}(3)$ .

- The Lie algebra contains three copies of the  $\mathfrak{su}(2)$  algebra, defining

$$I_{\pm} = T_1 \pm iT_2, \quad U_{\pm} = T_6 \pm iT_7, \quad V_{\pm} = T_4 \pm iT_5$$

These are the raising and lowering operators for

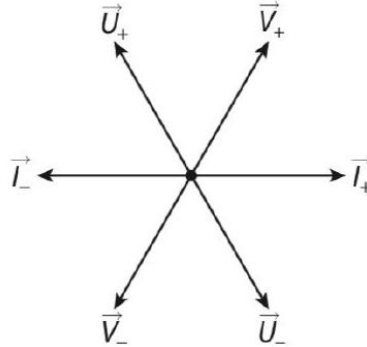
$$[I_+, I_-] = 2I_3, \quad [U_+, U_-] = 2U_3, \quad [V_+, V_-] = 2V_3$$

There are also nontrivial commutators between distinct raising and lowering operators.

- We identify (the  $z$ -component of) isospin with  $T_3$  and hypercharge  $Y$  with  $(2/\sqrt{3})T_8$ . Then the step operators change the isospin and hypercharge by

$$I_{\pm} : \pm(1, 0), \quad U_{\pm} : \pm(-1/2, 1), \quad V_{\pm} : \pm(1/2, 1)$$

These vectors are known as the roots of  $\mathfrak{su}(3)$ .



- The raising and lowering operators have a simple interpretation in the quark model. Here,  $I_+$  replaces a down quark with an up quark,  $U_+$  replaces a strange quark with a down quark, and  $V_+$  replaces a strange quark with an up quark.

- Reverting to the 'mathematical' normalization (i.e.  $T_8$  instead of  $Y$ ), the root vectors are

$$\pm(1, 0), \quad \pm(-1/2, \sqrt{3}/2), \quad \pm(1/2, \sqrt{3}/2).$$

Then all of the roots have equal length, and they form a regular hexagon.

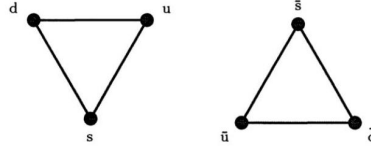
The root diagram gives us some insight into the structure of the Lie algebra and its representations.

- Given a representation, we may simultaneously diagonalize  $T_3$  and  $T_8$ . Then the weights are the set of vectors of eigenvalues. Since the raising and lowering operators modify weights by roots, the weights must form part of a hexagonal lattice.

• The roots give us some commutators for free. For example,  $[U_+, I_-]$  must be proportional to a step operator with root  $U_+ + I_-$ , but there is no such root, so the commutator is zero. Similarly,  $[U_+, I_+]$  must be proportional to  $V_+$ .

• In general, it turns out all irreps of  $\mathfrak{su}(3)$  have weight sets that are hexagons built around an equilateral triangle core, with the degeneracy increasing by one every time we go inward by one hexagonal layer. We'll prove this later with tensor methods.

• The simplest examples are the fundamental representation 3 and the antifundamental representation  $\bar{3}$ , occupied by the quarks and antiquarks.



• Note that the treatment is completely symmetric between  $I, U$ , and  $V$ . Previously, we used isospin and Clebsch-Gordan coefficients to relate cross sections involving particles in the same isospin irrep. Similarly we can use "  $U$ -spin" to relate particles in the same  $U$ -spin irrep.

Note. The Schwinger model. We can get intuition for the algebra for  $\mathfrak{su}(n)$  in general using something like the quark model. First, consider two uncoupled harmonic oscillators of equal frequency, creation operators  $a_i^\dagger$ , and number operators  $N_i$ . Alternatively, these could be the two components of a two-dimensional harmonic oscillator. Then the operators

$$J_+ = a_1^\dagger a_2, \quad J_- = a_2^\dagger a_1, \quad J_3 = N_1 - N_2$$

form an  $\mathfrak{su}(2)$  algebra. The states  $|n, m\rangle$  decompose into  $\mathfrak{su}(2)$  irreps; acting with  $J_-$  on the highest weight vector  $|n, 0\rangle$  gives the  $n + 1$ -dimensional irrep. This is the Schwinger model of angular momentum. We may physically interpret the state  $|n, m\rangle$  as containing  $n + m$  identical spin 1/2 particles, symmetrized, with  $n$  in the spin up state and  $m$  in the spin down state. In the case of isospin, the excitations of the oscillators are up and down quarks, which have isospin  $\pm 1/2$ . More generally, the Schwinger model works for  $\mathfrak{su}(n)$ , where the raising and lowering operators create one of  $n$  particles and destroy another; the quark model is just the case  $n = 3$ .

Next, we apply our results to find mass splittings for the four hadron octets/decuplets.

• We begin with the pseudoscalar meson octet, using the wavefunction technique. First, we construct the meson states in terms of the quark states. For example,

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$$

which means by isospin lowering that

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)$$

We can then infer  $|\eta\rangle$  by orthogonality. None of these manipulations require quarks to actually exist; we can simply think of them at this stage as a useful notational device.

• Continuing, we find the meson wavefunctions fit into a traceless tensor  $\Phi_j^i$  so that

$$\Phi = \begin{pmatrix} \pi^0/\sqrt{2} + \eta/\sqrt{6} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\pi^0/\sqrt{2} + \eta/\sqrt{6} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -2\eta/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Under this notation, we have

$$\Phi_j^i |i\bar{j}\rangle = \pi^0 |\pi^0\rangle + \dots + \eta |\eta\rangle$$

If we wanted to work in more detail, the coefficients of the kets here could be other wavefunctions that account for, e.g. position degrees of freedom.

• In principle we could have parametrized the diagonal in a different way. However, mesons with strange quark content are quite different from those without it, because of the strange quark mass, so the  $\pi^0$  should be split off on its own. Then the  $\eta$  is determined by orthogonality.

• The utility of this notation is that we can write down Lagrangians or Hamiltonians that are  $SU(8)$  scalars by just properly contracting all the indices. We are interested in mass terms which are bilinear in  $\Phi$ , and

$$8 \times 8 = 27 + 10 + 10^* + 8 + 8 + 1$$

One has to be careful because matrix and tensor notation conflict. With tensors, the 1 gives

$$\langle \hat{H}_0 \rangle = \bar{\Phi}_j^i \Phi_i^j$$

where the bar denotes a bra wavefunction. In matrix notation, taking the bar means taking the adjoint, giving

$$\langle \hat{H}_0 \rangle = \Phi_j^\dagger \Phi_i^j = \Phi_i^{*j} \Phi_i^j = \sum_{ij} |\Phi_i^j|^2$$

where, since we're no longer working with tensors, the indices no longer line up. All the masses are the same, as expected. If we worked only with matrices, we could also have constructed the 1 by constructing a valid scalar expression from  $\Phi^\dagger$  and  $\Phi$ , which here would be  $\text{tr } \Phi^\dagger \Phi$ .

• Next, we break  $SU(3)$  while preserving isospin. The situation is simplified because the mesons are each others' antiparticles; since antiparticles have the same mass as the corresponding particles, the perturbing Hamiltonian  $\hat{H}'$  must be symmetric under  $\Phi \rightarrow \Phi^\dagger$ . Thus it must contain one of the symmetric pieces of  $8 \times 8$ , leaving only the 27 and 8.

• We guess the 27 does not contribute. Then the  $\hat{H}'$  wavefunction  $H'$  is in the 8, so it is again a traceless matrix in flavor space, which must commute with isospin and hypercharge. Thus we must have

$$\langle \hat{H}' \rangle = \text{tr} ((\Phi^\dagger \Phi + \Phi \Phi^\dagger) H') = \lambda \text{tr} ((\Phi^\dagger \Phi + \Phi \Phi^\dagger) T^8).$$

Since  $\hat{H}_0$  and  $\hat{H}'$  are described by two parameters and we have three distinct masses (four isospin triplets, but two related by  $\hat{C}$ ), we expect to get one nontrivial relation.

• For convenience, we may shift  $H'$  by the identity so only  $H'_3$  is nonzero. Switching to matrix notation, we have

$$\langle \hat{H}' \rangle \propto \sum_i |\Phi_3^i|^2 + |\Phi_i^3|^2 = |K^-|^2 + |\bar{K}^0|^2 + |K^0|^2 + |K^+|^2 + \frac{4}{3} |\eta|^2$$

from which we conclude

$$4m_K = 3m_\eta + m_\pi$$

This is reasonably accurate, but becomes much more accurate if we square all the masses. This is fair, since both expressions hold to first order in the perturbation, and the squared version can be justified to be more accurate by chiral perturbation theory.

• There's an easier way to come to this conclusion: if the entire Hamiltonian is determined by two parameters, those parameters are essentially the up/down quark mass and the strange quark mass. Then the mass splittings are entirely due to the amount of strange quark content in each meson. This isn't true in general but it's a nice shortcut.

Now we consider the other octets and decuplets, which present more challenges.

• In the vector meson octet, the analogous formula is wrong, because the mesons we observe don't have the naive quark content shown above; mesons with the same quantum numbers can mix, and the isospin singlet  $\omega$  mixes with the  $\phi$  so that two of the physical states are

$$|s\bar{s}\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)$$

This makes sense because the mixing is induced by the  $SU(3)$ -breaking perturbation.

• Given that mixing can happen, we must explain why the  $\eta$  doesn't mix with the  $\eta'$ . This has to do with instanton effects and the axial anomaly, which conspire to make the  $\eta'$  much heavier.

• Next, consider the baryon octet. The reasoning is similar, with

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Sigma^0/\sqrt{2} + \Lambda/\sqrt{6} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\Sigma^0/\sqrt{2} + \Lambda/\sqrt{6} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -2\Lambda/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

The antiparticles sit in a different octet, so we can't use symmetry. Then we have two terms,

$$\langle \hat{H}' \rangle = \lambda_1 \text{tr} \Phi^\dagger \Phi T^8 + \lambda_2 \text{tr} \Phi \Phi^\dagger T^8 \sim \sum_i \lambda_1 |\Phi_3^i|^2 + \lambda_2 |\Phi_i^3|^2$$

Since the Hamiltonian has three terms and there are four masses, we again have a relation,

$$2(m_p + m_\Xi) = 3m_\Lambda + m_\Sigma$$

This is the Gell-Mann-Okubo formula.

• Finally, we consider the baryon decuplet, also called the 'hadron resonances'. Given the above successes we again assume  $H'$  is in an 8. But since  $10 \times \bar{10} \times 8$  has only one factor of 1, there is only one term. It must be proportional to the hypercharge, so the splittings are uniform,

$$m_{\Sigma^*} - m_\Delta = m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = m_\Omega - m_{\Xi^*}$$

This was used by Gell-Mann to predict the mass of the  $\Omega$ .

• Given the quark model, the part of the Hamiltonian that is bilinear in the quarks must be in  $3 \times \bar{3} = 8 + 1$ , justifying the assumption that  $H'$  is in an 8.

• One final example is the computation of the baryon octet magnetic moments. The magnetic moment operator must be proportional to the charge  $Q$ , so it is in 8 by the Gell-Mann-Nishijima formula. Thus there are two allowed terms, so all of the magnetic moments can be written in terms of the proton and neutron magnetic moments.

#### 14.1.4 Grand Unification SU(5), vector leptoquarks and proton decay by Kiselev

Как мы видели при решении задачи 30 на стр. 148, в квинтет определяющего фундаментального представления SU(5)

$$\mathbf{5} \cong v = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \\ \bar{d}_L^{c1} \\ \bar{d}_L^{c2} \\ \bar{d}_L^{c3} \end{pmatrix}$$

входят как левые лептоны, так и левые антикварки. Поэтому преобразования одних состояний квинтета в другие включают в себя изменения собственных значений следующих 4-х эрмитовых операторов:

- электрический заряд,  $Q$ , • слабый изоспин,  $T_3$ , • 2 диагональных матрицы в группе цвета,  $\lambda_3, \lambda_8$ , а токи соответствуют следующему набору:

- 2 заряженных слабых тока, которые соответствуют двум лестничным генераторам подгруппы слабого взаимодействия SU(2), т.е. токи с изменением электрического заряда и проекции слабого изоспина, 2 нейтральных тока, отвечающих генераторам электрического заряда  $Q$  и проекции слабого изоспина  $T_3$  подалгебры Картана, так что эти 4 тока отвечают калибровочным бозонам электрослабой теории: заряженные  $W^\pm$ - и нейтральный  $Z$ -бозоны плюс фотон,

- 8 токов преобразования цвета, которые отвечают калибровочным бозонам квантовой хромодинамики - глюонам, включая два тока нейтральных матриц Гелл-Манна  $\lambda_3$  и  $\lambda_8$ ,

- ток перехода в квинтете от состояния левого нейтрино к левому антикварку  $\bar{d}$  с зарядом  $\frac{1}{3}$  несет электрический заряд, равный изменению заряда между этими состояниями  $Q = Q[\nu] - Q[\bar{d}] = -\frac{1}{3}$ , а также цвет, так как у нейтрино нет цвета, а у антикварка цвет есть; этот ток обозначается как  $X_c^{-\frac{1}{3}}$ , где индексы указывают на заряд и цвет, а преобразование состояний в обратном переходе соответствует току  $X_c^{+\frac{1}{3}}$ , эти токи называются токами лептокварков  $X_c^{\pm\frac{1}{3}}$ , при этом у левого нейтрино есть проекция слабого изоспина верхней компоненты изодублета, а у антикварка  $\bar{d}_L$  изоспин равен нулю, так что лептокварки  $X_c^{\mp\frac{1}{3}}$  несут изоспин, равный  $T_3 = \pm\frac{1}{2}$ ,

- по аналогии с предыдущим пунктом переходу от электрона к  $\bar{d}$ -антикварку соответствует ток  $X_c^{-\frac{4}{3}}$ , а переходу в обратном порядке - ток  $X_c^{+\frac{4}{3}}$ , это токи других лептокварков  $X_c^{\mp\frac{4}{3}}$  с  $T_3 = \mp\frac{1}{2}$ .

В сумме получается 24 тока, как это и должно быть, так как размерность координат группы SU(N) равна  $N_G = N^2 - 1$ , и для SU(5) размерность группового многообразия  $N_G = \dim \mathfrak{G} = 24$ . Считается, что известные нам экспериментально 12 токов электрослабой теории и квантовой хромодинамики наблюдаются при доступных на данный момент энергиях экспериментов, в том числе в распадах за счет слабого взаимодействия, а оставшиеся экзотические токи подавлены из-за того, что симметрия SU(5) имеет масштаб порядка  $10^{16}$  ГэВ, а значит, вероятности обнаружить ее проявления в распадах при низких энергиях сильно подавлены. Это так называемый эффект иерархии масштабов симметрии:

электромагнитные взаимодействия осуществляются за счет тока фотонов, которые являются безмассовыми, так что силы являются дальнедействующими и регистрируются на любых расстояниях (нет порога включения эффектов взаимодействия);

сильные взаимодействия связывают кварки в адронах, и масштаб энергии связи определяется радиусом конфайнмента, что отвечает масштабу порядка 200-300 МэВ; слабые взаимодействия переносятся  $W$ - и  $Z$ -бозонами с массами около 80 и 92 ГэВ, соответственно, так что радиус слабого взаимодействия составляет порядка  $10^{-3}$  Ферми ( $10^{-16}$  см), переносчики-лептокварки имеют масштаб масс порядка  $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$  ГэВ, и, стало быть, вероятности наблюдать связанные с лептокварками эффекты за счет SU(5) при энергиях  $E \sim 1 - 100$  ГэВ подавлены степенями малого отношения  $E/M_{\text{GUT}} < 10^{-14}$ .

Первый вопрос: почему возникает иерархия масштабов? Считается, что это обусловлено вакуумом теории - состоянием с минимальной энергией или плотностью энергии, которое является релятивистски инвариантным решением уравнений движения. Сами уравнения движения являются симметричными относительно группы преобразований состояний SU(5) как следствие того, что и действие тоже является инвариантным относительно группы симметрии. Но вакуумное решение может быть и

не инвариантным относительно группы симметрии действия, если возникают нетривиальные вакуумные поля. В этом случае говорят о спонтанном нарушении симметрии и о том, что возникает иерархия масштабов энергии в вакуумных решениях: компонента вакуумного поля с большим масштабом энергии  $10^{16}$  ГэВ нарушает SU(5), но это нарушение может оставлять остаточную симметрию, например, электрослабую, которая нарушается другой компонентой вакуумного поля с масштабом энергии  $10^2 \text{ ГэВ}$ , так что остается точной только электромагнитная и хромодинамическая симметрия. В итоге, механизм возникновения иерархии масштабов целиком относят к структуре вакуума: именно его свойства и образуют иерархию разных значений пороговых энергий.

Иерархия масштабов сказывается и на зарядах разных взаимодействий: дело в том, что наблюдаемые заряды зависят от того, на каком масштабе мы их измеряем, так как инструментом измерения служит воздействие на систему в процессах с разной длиной волны, а значит, с разной разрешающей способностью у датчика внешнего влияния на систему. В квантовой теории поля такая зависимость описывается в рамках уравнений так называемой ренормгруппы. Важно отметить, что на масштабах измерений выше, чем шкала нарушения симметрии все процессы будут давать единое для всех систем значение зарядов в пропорциях, которые устанавливает исходная симметрия действия, а при меньших масштабах энергии в измерениях заряды в сильных, электромагнитных и слабых взаимодействиях станут зависеть от того, насколько далеко масштабы измерений отстоят от масштаба нарушения симметрий на каждой ступени влияния на характеристики системы разных компонент вакуумных полей.

Второй вопрос: как токи симметрии SU(5) скажутся на свойствах физических систем на масштабах энергий, где лептокварковые калибровочные бозоны выглядят как невероятно тяжелые, а значит, прямое наблюдение этих токов становится катастрофически маловероятным в процессах рассеяния квантовых состояний? Поэтому в ответе на этот вопрос можно так же, как и в случае слабого взаимодействия, исследовать опцию с распадами: распад нейтрона вполне себе происходит, хотя масса нейтрона явно много меньше масштаба масс, которым характеризуется слабое взаимодействие,  $10^2$  ГэВ, и на котором и рассеяние за счет процессов слабого взаимодействия становится детектируемым, и регистрация калибровочных бозонов может быть осуществлена в явном виде, как частиц, которые возникают и распадаются в процессах рассеяния.

Итак, обратим внимание на декуплет состояний

$$\overline{10} \cong \begin{pmatrix} 0 & e_L^+ & -d_L^{c1} & d_L^{c2} & -d_L^{c3} \\ -e_L^+ & 0 & u_L^{c1} & -u_L^{c2} & u_L^{c3} \\ d_L^{c1} & -u_L^{c1} & 0 & \bar{u}_L^{c3} & -\bar{u}_L^{c2} \\ -d_L^{c2} & u_L^{c2} & \bar{u}_L^{c3} & 0 & \bar{u}_L^{c1} \\ d_L^{c3} & -u_L^{c3} & \bar{u}_L^{c2} & -\bar{u}_L^{c1} & 0 \end{pmatrix}$$

Переходы между состояниями этого декуплета происходят под действием все тех же генераторов алгебры Ли  $\mathfrak{su}(5)$ , т.е. за счет тех же токов, что и переходы в квинтете. Стало быть, мы знаем все варианты квантовых переходов.

Сфокусируем свое внимание на том, что в декуплет II.4.104 входят как кварки, так и антикварки, а значит, может происходить переход кварков в антикварки за счет лептокварковых калибровочных бозонов, чего не могло быть в рамках Стандартной модели взаимодействий, которая включает в себя группу электрослабой симметрии  $U_Y(1) \times SU_L(2)$  и цветовую группу  $SU_c(3)$ . Значит, лептокварки могут инициировать процессы распадов, в которых исчезает адронная материя. Эти редкие процессы исчезновения адронной материи станут заметны, если происходит распад состояния,

которое стабильно в рамках Стандартной модели. Обратимся к такому примеру - к протону  $p = (uud)$ .

Рассмотрим двукратное воздействие лептокварковых токов на исходное состояние с барионным числом  $B = 1$  так, чтобы в конечном состоянии  $B = 0$ . Первый вариант включает ток  $u \rightarrow \bar{u}$ , так что имеет место пара преобразований

$$u \rightarrow \bar{u}X_c^{+\frac{4}{3}}, \quad X_c^{+\frac{4}{3}}d \rightarrow e^+$$

где второй  $u$ -кварк в протоне не участвует непосредственно в токах, так что его называют спектатором (spektator), а в итоге имеет место процесс  $p(uud) \rightarrow e^+(u\bar{u})$ . Нейтральное состояние кварк-антикварковой пары ( $\bar{u}$ ) может аннигилировать в фотоны и лептоны, так что протон имеет канал распада на позитрон и легкую нейтральную систему с нулевым барионным числом!

Второй вариант - ток  $d \rightarrow \bar{u}$ , так что имеет место пара преобразований

$$d \rightarrow \bar{u}X_c^{+\frac{1}{3}}, \quad X_c^{+\frac{1}{3}}u \rightarrow e^+$$

и, в итоге, происходит процесс  $p(uud) \rightarrow e^+(u\bar{u})$ .

Наконец, третий независимый вариант - ток  $u \rightarrow e^+$ , так что имеет место пара преобразований

$$u \rightarrow e^+X_c^{-\frac{1}{3}}, \quad X_c^{-\frac{1}{3}}u \rightarrow \bar{d}$$

и, в итоге, происходит процесс  $p(uud) \rightarrow e^+(d\bar{d})$ .

Итак, следует ожидать, что в случае SU(5) симметрии протон нестабилен. И этот вариант необходимо изучить экспериментально: в случае удачи установить время жизни протона путем наблюдения его редкого распада в большом объеме детектора или указать нижний предел на время жизни в целом или на относительную вероятность одного из каналов распада. В настоящее время этот предел [12]

$$\tau_p > 3.6 \cdot 10^{29} \text{ лет.}$$

Впрочем, некоторые модельные оценки, когда вариант моды распада может быть описан теоретически, доводят предел до  $10^{32-34}$  лет.

## 14.2 Relativistic Fields from Algebra

### 14.2.1 8.1 Representations of the Euclidean Group From Algebra by Zhou

In this section we introduce a method for finding the representations of the noncompact Euclidean group, as practice for the more complicated Poincare group.

- The Euclidean group  $E_n$  is the group of linear transformations of  $n$ -dimensional Euclidean space connected to the identity that leave the length of all vectors invariant. It is generated by translations and rotations.

- In the special case of  $E_2$ , a general group element  $g(\mathbf{b}, \theta)$  is a rotation by  $\theta$  followed by a translation by  $\mathbf{b}$ . The multiplication law is

$$g(\mathbf{b}_2, \theta_2) g(\mathbf{b}_1, \theta_1) = g(\theta_1 + \theta_2, R(\theta_2)\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$$

and inverses are given by

$$g(\mathbf{b}, \theta)^{-1} = g(-R(-\theta)\mathbf{b}, -\theta)$$



• Both translations and rotations can be written as linear transformations on  $\mathbb{R}^3$ , where the third component of the vector is always unity,

$$g(\mathbf{b}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & b^1 \\ \sin \theta & \cos \theta & b^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

This allows us to deduce commutation relations from the usual matrix algebra.

• The rotations and translations are generated by

$$J = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} & \\ & i \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} & \\ & -i \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = e^{-i\theta J}, \quad T(\mathbf{b}) = e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{P}}$$

Note that  $P_1$  and  $P_2$  are not Hermitian. The Lie algebra is

$$[P_1, P_2] = 0, \quad [J, P_k] = i\epsilon^{km} P_m$$

where  $\epsilon^{12} = 1$ . Physically, the latter relation states that the translation  $\mathbf{b}$  is a vector; exponentiating it gives

$$e^{-i\theta J} P_k e^{i\theta J} = P_m R(\theta)_{mk}, \quad e^{-i\theta J} T(\mathbf{b}) e^{i\theta J} = T(R(\theta)\mathbf{b})$$

and the latter is just the group multiplication law in another form.

• The translations  $T_2$  form a normal subgroup of  $E_2$ , and  $E_2/T_2$  contains pure rotations, so it is isomorphic to  $SO(2)$ . Since  $E_2$  has an abelian normal subgroup, it is not semi-simple.

• We are interested in unitary representations, but since  $E_2$  is not compact, it has no finitedimensional faithful unitary representations. The non-faithful finite-dimensional unitary irreps are just those of  $SO(2)$ , mapping  $g(\mathbf{b}, \theta)$  to the phase  $e^{im\theta}$ .

Next, we construct the faithful unitary irreps of  $E_2$  with the usual method, starting with a reference vector and applying raising and lowering operators.

• We define the raising and lowering operators

$$P_{\pm} = P_1 \pm iP_2, \quad [P_+, P_-] = 0, \quad [J, P_{\pm}] = \pm P_{\pm}$$

Next, we define the squared momentum operator

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 = P_+ P_- = P_- P_+, \quad [P^2, J] = [P^2, P_{\pm}] = 0$$

Therefore,  $P^2$  is a Casimir operator and has a single eigenvalue for each irrep.

• In a unitary representation,  $J, P_1$ , and  $P_2$  are Hermitian operators; to save space we write the operator associated with a generator with the same symbol. Then  $P_+^\dagger = P_-$ , so  $P^2$  is positive definite. We thus write its eigenvalue as  $p^2 > 0$ .

• Since  $P^2$  and  $J$  commute, we can simultaneously diagonalize the two, with normalized eigenvectors

$$P^2|pm\rangle = p^2|pm\rangle, \quad J|pm\rangle = m|pm\rangle, \quad m \in \mathbb{Z}$$

where the eigenvalues of  $J$  come from our knowledge of the irreps of  $SO(2)$ . In principle there could be multiple vectors in the same irrep with the same  $p^2$  and  $m$ , but we'll see below this isn't the case.

• In the case where  $p^2 = 0$ , we have  $P_{\pm}|0m\rangle = 0$ , so the representation is one-dimensional. This simply reproduces the non-faithful irreps we found above.

• For  $p^2 > 0$ , we take the phase convention

$$|p, m \pm 1\rangle = (\pm i/p) P_{\pm}|pm\rangle$$

Starting with any reference vector  $|pm_0\rangle$ , repeated application of  $P^\pm$  gives all integer values of  $m$  precisely once. The matrix elements are

$$\langle pm'|J|pm\rangle = m\delta_{m'm}, \quad \langle pm'|P_\pm|pm\rangle = \mp ip\delta_{m',m\pm 1}$$

- We claim the representation matrices for finite transformations are

$$D^p(\mathbf{b}, \theta)_{m'm} = e^{i(m-m')\phi} J_{m-m'}(pb) e^{-im\theta}$$

where  $(b, \phi)$  are the polar coordinates of  $\mathbf{b}$  and  $J_n$  is the Bessel function of the first kind. The  $e^{-im\theta}$  factor is from the rotation part. The translation can be decomposed as

$$T(b, \phi) = R(\phi)T(b, 0)R(\phi)^{-1}, \quad \langle pm'|T(b, \phi)|pm\rangle = e^{i(m-m')\phi} \langle pm'|T(b, 0)|pm\rangle$$

Therefore, it suffices to show that

$$\langle pm'|T(b, 0)|pm\rangle = J_{m-m'}(pb).$$

We have  $T(b, 0) = e^{-ibP_1} = e^{-ib(P_+ + P_-)/2}$ . This can be expanded in a double series, which collapses to a single series by orthogonality, giving the defining series for the Bessel function. This is not unexpected; the Bessel function is fundamentally tied to cylindrical symmetry, as the spherical Bessel function is tied to spherical symmetry.

We call the  $|pm\rangle$  basis found above the angular momentum basis. Now we work in the "plane-wave" basis using the method of induced representations.

- This method works for groups with abelian normal subgroups. The idea is to use the generators of this subgroup as a starting point, i.e. working with eigenvectors of  $\mathbf{P}$  instead of  $P^2$  and  $J$ .

- We take the reference vector  $\mathbf{p}_0 = (p, 0)$  and consider a reference ket  $|\mathbf{p}_0\rangle$  with  $\mathbf{P}|\mathbf{p}_0\rangle = \mathbf{p}_0|\mathbf{p}_0\rangle$ . The only operation which yields new kets is the rotation  $R(\theta) = e^{-i\theta J}$ , and we have

$$P_k R(\theta) |\mathbf{p}_0\rangle = R(\theta) (R(\theta)^{-1} P_k R(\theta)) |\mathbf{p}_0\rangle = p_k R(\theta) |\mathbf{p}_0\rangle, \quad p_k = R(\theta)_{k\ell} p_{0\ell}$$

The notation here is overloaded, as  $R(\theta)$  is both an operator on the irrep and a  $3 \times 3$  matrix.

- We see that  $R(\theta) |\mathbf{p}_0\rangle$  is also an eigenvector of  $\mathbf{P}$  with the rotated momentum  $\mathbf{p}$ , so we write

$$|p, \theta\rangle = R(\theta) |\mathbf{p}_0\rangle$$

Since  $R(2\pi) = 1$ , this shows that  $|\mathbf{p}_0\rangle$  is the only vector with eigenvalue  $\mathbf{p}_0$  in the irrep. Thus the set of  $|p, \theta\rangle$  defined above form an irrep of  $E_2$ .

- Stepping back, we used the fact that the translation subgroup is abelian to label states with momentum, and we used its normality to show that rotations take states of definite momentum to other states of definite momentum. Then the rest of the procedure is simply generating all the kets we can to get an irrep. In more general situations, there can be group generators that commute with  $\mathbf{P}$ , yielding multiple kets with the same momentum.

- We choose to normalize the vectors so that

$$\langle p, \theta' | p, \theta \rangle = 2\pi \delta(\theta' - \theta)$$

We don't need to normalize over  $p$ , since  $p$  is fixed in this irrep due to the Casimir operator  $P^2$ .

- Next, we find the relationship between the angular momentum and plane wave basis. Dropping the  $p$  index, consider the state

$$|\tilde{m}\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{im\phi} |\phi\rangle$$

By construction, we have

$$R(\theta)|\tilde{m}\rangle = e^{-im\theta}|\tilde{m}\rangle$$

by shifting the integration variable, so  $|\tilde{m}\rangle$  is proportional to  $|m\rangle$ . To fix the phases, note

$$P_{\pm}|\tilde{m}\rangle = |\tilde{m} \pm 1\rangle, \quad |m\rangle = i^m|\tilde{m}\rangle, \quad \langle\phi|m\rangle = e^{im(\phi+\pi/2)}$$

The inner product allows us to switch between bases both ways, e.g.

$$|\phi\rangle = \sum_m |m\rangle e^{-im(\phi+\pi/2)}$$

- As an application, note that under a translation, we have

$$T(\mathbf{b})|m\rangle = \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{im(\phi+\pi/2)} e^{-ipb \cos(\theta-\phi)} |\phi\rangle$$

where  $\mathbf{b}$  has polar angle  $\theta$ . Then we immediately have

$$\langle m'|T(\mathbf{b})|m\rangle = \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{i(m-m')(\phi+\pi/2)} e^{-ipb \cos(\theta-\phi)} = e^{i(m-m')\theta} \int \frac{d\psi}{2\pi} e^{i(m-m')\psi - ipb \sin \psi}$$

where  $\psi = \pi/2 + \phi - \theta$ , which recovers our earlier result using the integral representation of the Bessel function. We can also show that the position-space wavefunctions  $\langle \mathbf{r}|m\rangle$  are Bessel functions times  $e^{im\theta}$ . (verify) Further investigation recovers many of the standard properties of Bessel functions, such as their differential equation, recursion formulas, and addition theorems.

Note. As we've seen,  $E_2$  is the group contraction of  $SO(3)$  with

$$J_y/R \rightarrow P_x, \quad -J_x/R \rightarrow P_y, \quad J_z \rightarrow J$$

in the limit  $R \rightarrow \infty$ . Then we can recover the representations of  $E_2$  from those of  $SO(3)$ . This sounds strange since the former has infinite-dimensional representations, but note that for the spin  $j$  representation,

$$\langle m'|J_x \pm iJ_y|m\rangle = \delta_{m',m\pm 1} \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}$$

Then when we replace the  $J_i$  with  $P_i$ , the inner product is proportional to  $1/R$ , so the representation is automatically one-dimensional unless  $j$  grows with  $R$ . Specifically, if we pick  $j = pR$ , then

$$\langle m'|P_x \pm iP_y|m\rangle = p\delta_{m',m\pm 1}$$

which exactly matches the  $E_2$  representation with squared momentum  $p^2$ . As an application, it is possible to express Bessel functions in terms of limits of  $d$ -functions.

We now apply the same methods to  $E_3$ .

- The group  $E_3$  is generated by rotations and translations, and the Lie algebra is

$$[P_i, P_j] = 0, \quad [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [P_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}P_k$$

which says that both  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{J}$  are vectors. The translations  $T_3$  form a normal subgroup.

- The general group element can be written with the Euler angle parametrization

$$g = T(\mathbf{b})R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{P}}e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}e^{-i\gamma J_3}$$

Alternatively, since conjugation by rotations rotates a translation vector, we can write

$$g = R(\phi, \theta, 0)T(\mathbf{b}_0)R(\alpha', \beta', \gamma')$$

where  $\mathbf{b}$  has spherical coordinates  $(b, \phi, \theta)$  and  $\mathbf{b}_0$  has spherical coordinates  $(b, 0, 0)$ .

- We can construct three independent rotational scalars,  $P^2$ ,  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$  and  $J^2$ , which are candidates for Casimir operators. We have  $[J^2, \mathbf{P}] \neq 0$ , intuitively because the rotation operators pick out a fixed origin, which is shifted by translations. However,

$$[\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}, P_j] = [J_i, P_j] P_i = -i\epsilon_{ijk} P_k P_i = 0$$

and clearly  $[P^2, \mathbf{P}] = 0$ , so the two Casimir operators are  $P^2$  and  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$ .

- To work in the angular momentum basis, we simultaneously diagonalize  $\{P^2, \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}, J^2, J_z\}$ . To work in the plane wave basis, we simultaneously diagonalize  $\{P^2, \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}, \mathbf{P}\}$ .

- In the plane wave basis, the eigenvalues are  $\{p^2, \lambda p, \mathbf{p}\}$  and we write a ket with these eigenvalues as  $|p, \lambda, \hat{\mathbf{p}}\rangle$  where  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$  and  $\lambda$  is called the helicity.

- As before, we start with the standard vector  $\hat{\mathbf{p}}_0 = \hat{\mathbf{e}}_z$ . Define the little group to be the set of group elements in the quotient group  $E_3/T_3 \cong SO(3)$  that leave the standard vector  $\hat{\mathbf{p}}_0$  invariant. In this case, the little group is  $SO(2)$ , generated by  $R_3(\phi) = e^{-i\phi J_3}$ .

- We can begin by constructing an irrep of the little group, by applying its group operations on the reference ket. Then, as for  $E_2$ , we can use this to construct ("induce") an irrep of  $E_3$  using the rotations outside the little group. (The first step was not necessary for  $E_2$ , because there the little group was trivial.)

- Here, the irreps of the little group are all one-dimensional, and they are indexed by the eigenvalue of  $J_3$ , which must be an integer. Thus the little group irrep is specified by  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . The rest of the  $E_3$  irrep is generated by rotations,

$$|p, \lambda, \hat{\mathbf{p}}\rangle = R(\phi, \theta, 0) |p, \lambda, \hat{\mathbf{p}}_0\rangle, \quad \hat{\mathbf{p}} = (\theta, \phi)$$

Suppressing the  $p$  and  $\lambda$  indices, translations simply act by

$$T(\mathbf{b})|\hat{\mathbf{p}}\rangle = e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{P}}|\hat{\mathbf{p}}\rangle$$

- Rotations are a bit more complex. We have

$$R(\alpha, \beta, \gamma)|\hat{\mathbf{p}}\rangle = R(\alpha, \beta, \gamma)R(\phi, \theta, 0)|\hat{\mathbf{p}}_0\rangle = R(\phi', \theta', \psi)|\hat{\mathbf{p}}_0\rangle$$

where the second equality defines  $\phi', \theta'$ , and  $\psi$ . Then we have

$$R(\alpha, \beta, \gamma)|\hat{\mathbf{p}}\rangle = R(\phi', \theta', 0)R(0, 0, \psi)|\hat{\mathbf{p}}_0\rangle = e^{-i\lambda\psi}|\hat{\mathbf{p}}'\rangle, \quad \hat{\mathbf{p}}' = (\theta', \phi')$$

The point is that  $\hat{\mathbf{p}}$  gets rotated in the obvious way, but with a more subtle extra phase  $e^{-i\lambda\psi}$ , which has already been fixed by the action of the little group on the reference ket.

- We normalize the vectors by

$$\langle \hat{\mathbf{p}}' | \hat{\mathbf{p}} \rangle = 4\pi \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\phi' - \phi)$$

since this cancels the invariant measure  $\sin \theta d\theta d\phi / 4\pi$  on  $SO(3)$ .

- Working in the angular momentum basis, we have vectors  $|p, \lambda, j, m\rangle$  corresponding to eigenvalues  $\{p^2, \lambda p, j(j+1), m\}$  of  $\{P^2, \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}, J^2, J_3\}$ . We can then construct raising and lowering operators  $J_{\pm}$  which raise and lower  $m$ . Since the translations don't commute with  $J^2$ , they

can change  $j$ . It turns out that  $j$  takes on all positive integer values, making the representation infinite-dimensional as expected.

- The radial dependence of the angular momentum basis states takes the form of spherical Bessel functions. (verify) By similar reasoning to  $E_2$ , we can use the group structure of  $E_3$  to recover many of their properties.

## 14.2.2 8.2 Representations of the Poincare Group From Algebra

Finally, we turn to the Poincare group, our original goal. We use the  $(-++)$  metric convention.

- The Poincare group is the analogue of the Euclidean group for Minkowski space. Its elements take the form

$$g(b, \Lambda) = T(b)\Lambda, \quad x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu + b^\mu$$

where  $\Lambda$  is a Lorentz transformation connected to the identity. By similar reasoning to before, the translations form a normal subgroup and the factor group is the Lorentz group. Again, we will overload the notation so that  $\Lambda$  is both a  $4 \times 4$  matrix and an operator.

- A general Lorentz transformation can be written as

$$\Lambda = R(\alpha, \beta, 0)L_3(\xi)R(\phi, \theta, \psi)^{-1}$$

where  $L_3(\xi)$  is a boost of rapidity  $\xi$  along the  $z$ -axis. This is the same idea as before: a boost can be conjugated by rotations to change its direction to the  $z$ -axis.

- To work with the generators, we have to be careful with index placement. An infinitesimal translation by  $\delta b$  is

$$T(\delta b) = I - i\delta b^\mu P_\mu, \quad T(b) = \exp(-ib^\mu P_\mu)$$

The translation generators  $P_\mu$  are related to the physical four-momentum by raising an index, so  $P^0 = -P_0$  and  $P^i = P_i$ . Under the multiplication law,  $P_\mu$  indeed transforms as a covector.

- The Lorentz generators are defined as

$$\Lambda(\delta\omega) = I - \frac{i}{2}\delta\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$$

where  $\delta\omega$  is an antisymmetric tensor that parametrizes the transformation as

$$\delta\omega^{23} \text{ is angle of rotation about } x, \quad \delta\omega^{10} \text{ is boost along } x.$$

In terms of differential operators, we have

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \quad P_\mu = i\partial_\mu$$

There may be extra signs here, depending on the convention.

- The commutation relations are

$$[P_\mu, J_{\lambda\sigma}] = i(P_\lambda\eta_{\mu\sigma} - P_\sigma\eta_{\mu\lambda}), \quad [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(J_{\lambda\nu}\eta_{\mu\sigma} - J_{\sigma\nu}\eta_{\mu\lambda} + J_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} - J_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda})$$

These can be shown using  $5 \times 5$  matrices or by using the differential operators. Intuitively, these results just say that  $P_\mu$  is a vector and  $J_{\mu\nu}$  is a tensor.

Next, we apply the method of induced representations to the Poincare group.

- We use the abelian subgroup of translations, and note there is a Casimir operator

$$C_1 = -P_\mu P^\mu = P_0^2 - P^2$$

We let the value of the operator be  $c_1$ . For a momentum  $p^\mu$ , there are several cases:

trivial:  $c_1 = p^\mu = 0$ , timelike:  $c_1 > 0$ , lightlike:  $c_1 = 0, p^\mu \neq 0$ , spacelike:  $c_1 < 0$ .

In the trivial case, the little group is the Lorentz group, but translations do nothing; this recovers the Lorentz irreps found above. The resulting states represent vacuum states, rather than one-particle states.

• For the timelike case  $c_1 = M^2$ , we choose the standard momentum  $p_t^\mu = (M, \mathbf{0})$ . The little group is  $SO(3)$ , so we write the states with the standard momentum as  $|\mathbf{0}\lambda\rangle$  where

$$P^\mu |\mathbf{0}\lambda\rangle = p_t^\mu |\mathbf{0}\lambda\rangle, \quad J^2 |\mathbf{0}\lambda\rangle = s(s+1) |\mathbf{0}\lambda\rangle, \quad J_3 |\mathbf{0}\lambda\rangle = \lambda |\mathbf{0}\lambda\rangle, \quad \lambda \in \{-s, -s+1, \dots, s\}$$

Here the indices  $M$  and  $s$  are suppressed.

• Next, we construct the rest of the states by applying Lorentz transformations. To do this, we need to pick a conventional Lorentz transformation that maps the reference momentum to any desired momentum  $\mathbf{p}$ . Noting again that a general Lorentz transformation can be written as

$$\Lambda = R(\alpha, \beta, 0) L_3(\xi) R(\phi, \theta, \psi)^{-1} \equiv H(p) R(\phi, \theta, \psi)^{-1}$$

where the rightmost factor does nothing since it is in the little group, we choose to define

$$|p\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle = L_3(\xi) |\mathbf{0}\lambda\rangle, \quad p = M \sinh \xi$$

and therefore

$$|\mathbf{p}\lambda\rangle = R(\alpha, \beta, 0) |p\hat{\mathbf{z}}\lambda\rangle = H(p) |\mathbf{0}\lambda\rangle.$$

The  $|\mathbf{p}\lambda\rangle$  are now a full irrep of the Poincare group, and the equations above simply define, conventionally, how the  $\lambda$  index behaves for nonzero momenta. We would have gotten a different convention if we had used a different choice of "standard Lorentz transformation"  $H(p)$ .

• By the same proof as for  $E_2$ , the  $|\mathbf{p}\lambda\rangle$  states indeed have momentum  $\mathbf{p}$ , in the sense that

$$T(b) |\mathbf{p}\lambda\rangle = e^{-ib^\mu p_\mu} |\mathbf{p}\lambda\rangle$$

To see how the Lorentz transformations act, we argue as for  $E_3$ . We have

$$\Lambda |\mathbf{p}\lambda\rangle = \Lambda H(p) |\mathbf{0}\lambda\rangle = H(\Lambda p) R(\Lambda, p) |\mathbf{0}\lambda\rangle, \quad R(\Lambda, p) = H^{-1}(\Lambda p) \Lambda H(p)$$

The "Wigner rotation"  $R(\Lambda, p)$  maps  $p_t \mapsto p \mapsto \Lambda p \mapsto p_t$ , so it is in the little group.

• On the other hand, we fixed how the little group acts in the very first step, which gives

$$\Lambda |\mathbf{p}\lambda\rangle = D^s(R(\Lambda, p))_{\lambda'\lambda} |\Lambda \mathbf{p}\lambda'\rangle$$

where the  $D^s$  are the spin  $s$  representation matrices, and  $\Lambda \mathbf{p}$  is the spatial part of  $\Lambda p$ . This is the generalization of the extra phase picked up for  $E_3$ .

• "Common sense" would expect that when  $\Lambda$  is a pure rotation, the Wigner rotation  $R(\Lambda, p)$  is precisely that same rotation, for any  $p$ . This is indeed true, as can be checked in a tedious, explicit calculation.

• We now give interpretations for all the parameters above. The irrep is labeled by  $s$  and  $M$ , where  $s$  indicates the spin and  $M$  indicates the mass, as seen from the relativistic dispersion relation. We've just shown that  $\mathbf{p}$  is the spatial momentum, and by the same argument as for

$E_3, \lambda$  may be identified with the helicity, i.e. the eigenvalue of  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}/|\mathbf{p}|$ , when  $|\mathbf{p}| \neq 0$ . The difference is that the helicity is no longer a Casimir invariant, as it can be changed by boosts.

- There is a second Casimir invariant related to the spin  $s$ . As we've seen, it can't be  $J^2$ , since that doesn't commute with translations. Another guess is  $J_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$ , since it's also quadratic in  $J_{\mu\nu}$ , but it doesn't commute with translations either, and moreover isn't simply related to  $s$ .
- Instead, we define the Pauli-Lubanski vector

$$W^\lambda = \epsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} J_{\mu\nu} P_\sigma / 2$$

It has the properties

$$W^\lambda P_\lambda = 0, \quad [W^\lambda, P^\mu] = 0, \quad [W^\lambda, J^{\mu\nu}] = i(W^\mu \eta^{\lambda\nu} - W^\nu \eta^{\mu\lambda}), \quad [W^\lambda, W^\sigma] = i\epsilon^{\lambda\sigma\mu\nu} W_\mu P_\nu$$

The proofs are straightforward, mostly using the antisymmetry of  $\epsilon$ . The second and third properties say  $W^\lambda$  is a translationally invariant four-vector. The second Casimir operator is

$$C_2 = W^\lambda W_\lambda$$

This is because  $C_2$  is a Lorentz scalar, and it is translationally invariant since  $W^\lambda$  is. Also, note that  $W^0$  is  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$ , so  $W^\lambda$  essentially completes the helicity to a four-vector.

- To understand the meaning of  $C_2$ , we return to the timelike case. In the rest frame, i.e. for the states with momentum  $p_t^\mu$ , we may replace  $P_\sigma$  with  $p_{\sigma t}$  to give  $w^\lambda$ , where

$$w^0 = 0, \quad w^i = M J^i$$

so  $C_2$  reduces to  $M^2 J^2$  and hence gives the spin parameter  $s$ . Thus we recover the situation with  $E_2$  and  $E_3$  where the irrep is fully specified by the values of the Casimir operators.

- The previous point shows that in the timelike case, the  $w^\mu$  span the algebra of the little group. This is in fact true in general, and we'll use this to help handle the light-like case below.
- Next, we turn to the light-like case, with standard momentum

$$p_\ell^\mu = (\omega_0, 0, 0, \omega_0)$$

In this case the generators of the little group are

$$w^0 = w_3 = \omega_0 J_3, \quad w_1 = \omega_0 (J_1 + K_2), \quad w_2 = \omega_0 (J_2 - K_1)$$

which have commutation relations

$$[w_1, w_2] = 0, \quad [w_2, J_3] = i w_1, \quad [w_1, J_3] = -i w_2$$

This is exactly the algebra of  $E_2$ , and the little group is indeed  $E_2$ .

- The little group elements here are a little less intuitive. The rotations in  $E_2$  correspond to rotations about the  $x$ -axis. The translations correspond to boosting along the  $y$ -axis and then rotating about the  $z$ -axis (or vice versa), so that the momentum is realigned along  $\hat{\mathbf{x}}$ .
- The infinite-dimensional irreps of  $E_2$  correspond to particles with infinitely many internal states. These strange "continuous spin particles" do not seem to appear in nature.
- There are also one-dimensional irreps indexed by  $\lambda$ , the eigenvalue of  $J_3$ , giving states

$$P^\mu |\mathbf{p}_\ell \lambda\rangle = p_\ell^\mu |\mathbf{p}_\ell \lambda\rangle, \quad J_3 |\mathbf{p}_\ell \lambda\rangle = \lambda |\mathbf{p}_\ell \lambda\rangle, \quad W_1 |\mathbf{p}_\ell \lambda\rangle = W_2 |\mathbf{p}_\ell \lambda\rangle = 0$$

That is, the other little group transformations must do nothing to the states. It turns out that for photons ( $\lambda = \pm 1$ ), at the level of the fields,  $W_1$  and  $W_2$  generate gauge transformations.

- We then construct the states  $|\mathbf{p} \lambda\rangle$  in the same way as before. One can show that

$$T(b)|\mathbf{p}\lambda\rangle = e^{-ib^\mu p_\mu}|\mathbf{p}\lambda\rangle, \quad \Lambda|\mathbf{p}\lambda\rangle = e^{-i\lambda\theta(\Lambda,p)}|\Lambda\mathbf{p}\lambda\rangle$$

where the phase is

$$e^{-i\lambda\theta(\Lambda,p)} = \langle \mathbf{p}_\ell \lambda | H^{-1}(\Lambda p) \Lambda H(p) | \mathbf{p}_\ell \lambda \rangle$$

Unlike the timelike case, the helicity  $\lambda$  is now Poincare invariant.

- CPT symmetry flips  $\lambda$ , so a relativistic theory must have pairs  $\pm\lambda$ . For instance, the photon has  $\lambda = \pm 1$  and the graviton has  $\lambda = \pm 2$ . Sometimes we describe this as "spin 1" and "spin 2", but this is not technically correct, because spin labels  $SO(3)$  irreps, not  $E_2$  irreps.

- For a single helicity, the Wigner rotation only produces a physically irrelevant phase. But for photons and gravitons, whose one-particle states may involve superpositions of helicities, the Wigner rotation may change their relative phase, changing the polarization. For example, for linear photon polarizations, a rotation about the propagation direction rotates the plane of polarization accordingly.

- We can also consider double-valued representations, giving  $\lambda = -1/2$  to describe massless neutrinos and  $\lambda = 1/2$  to describe massless antineutrinos. Note that we only have doublevalued representations, even though the universal cover of  $SO(2)$  is  $\mathbb{R}$ , because it is part of the Lorentz group, which has only a double cover.

- For the spacelike case, taking the standard momentum  $p_s^\mu = (0, 0, 0, Q)$ , we have

$$w^0 = QJ_3, \quad w_1 = QJ_{20} = QK_2, \quad w_2 = QJ_{01} = -QK_1$$

and  $w_3 = 0$ . The little group is thus  $SO(2, 1)$ , which is noncompact.

- Just like  $E_2$ ,  $SO(2, 1)$  thus admits no faithful finite-dimensional unitary representations. However, it turns out that there are no nonfaithful finite-dimensional unitary representations either. For example, setting the noncompact boost generators to zero does not work, because we need to have  $[K_1, K_2] = -iJ_3$ . As in the light-like case, the infinite-dimensional irreps do not seem to appear in nature.

- Finally, if we wish we can normalize the states to be compatible with the Lorentz invariant integration measure,  $d\mathbf{p}/2p^0$ . Then we have, in the spacelike and lightlike cases,

$$\langle \mathbf{p}' \lambda' | \mathbf{p} \lambda \rangle = 2p^0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\lambda}^{\lambda'}$$

Of course, in any case the little group representation is unitary.

### 14.2.3 8.3 Relativistic Field Equations From Algebra

We now connect the transformation properties of fields and particles. We warm up with the case of fields transforming under rotations. Though index placement is not important here, we maintain it since it'll be needed later; for matrices, the upper index is always the first index. For clarity, we always distinguish abstract operators and their representations.

- Under a rotation  $R$ , the position states of a spinless particle in  $\mathbb{R}^3$  transform as

$$|\mathbf{x}\rangle \mapsto U(R)|\mathbf{x}\rangle = |R\mathbf{x}\rangle$$

If the particle had spin  $1/2$ , we would instead have

$$U(R)|\mathbf{x}, \sigma\rangle = D^{1/2}(R)_\sigma^\lambda |R\mathbf{x}, \lambda\rangle$$

where  $D^j(R)$  is the representation matrix for spin  $j$ .

- For spinless particles, wavefunctions are defined by  $\psi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \psi \rangle$ , so  $|\psi'\rangle = U(R)|\psi\rangle$  has wavefunction



$$\psi'(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}).$$

The inverse here can be understood as the usual active/passive inverse. Similarly, for particles with spin, the wavefunction picks up a spin index which also transforms,

$$\psi'^\lambda(\mathbf{x}) = D^{1/2}(R)_\sigma^\lambda \psi^\sigma(R^{-1}\mathbf{x}).$$

This generalizes directly to the wavefunction of a spin  $j$  particle.

• Next, we consider the transformation of observables. The position operator satisfies  $X^i|\mathbf{x}\rangle = x^i|\mathbf{x}\rangle$ , and using the transformation of  $|\mathbf{x}\rangle$  gives

$$U(R)X^iU(R)^{-1} = (R^{-1})^i_j X^j.$$

Using the orthogonality of  $R$ , we have

$$U(R)X_iU(R)^{-1} = X_jR_i^j$$

This is an example of an irreducible tensor operator.

• Finally, we consider second quantized fields, which represent local observables. For a free spin 1/2 field  $\Psi^\sigma(\mathbf{x})$  and a one-particle state  $|\psi\rangle$ , the field is constructed so that

$$\langle 0|\Psi^\sigma(\mathbf{x})|\psi\rangle = \psi^\sigma(\mathbf{x})$$

where  $\psi^\sigma(\mathbf{x})$  is the wavefunction. Fiddling around with the above properties gives

$$U(R)\Psi^\sigma(\mathbf{x})U(R)^{-1} = D^{1/2}(R)_\lambda^\sigma \Psi^\lambda(R\mathbf{x})$$

The factor of  $D^{1/2}$  is the same as for tensor operators, while the position argument is changed since rotating, creating a particle, and then rotating back creates a particle in a different place. A field of general spin behaves similarly.

• We can also try to move the factor of  $D^{1/2}$  to the right. Since  $U(R)$  and  $D^{1/2}(R)$  are unitary,

$$U(R)\Psi^\sigma(\mathbf{x})U(R)^{-1} = \Psi^\lambda(R\mathbf{x})D(R)_\sigma^{*\lambda}.$$

The complex conjugate and index placement is unappealing, but we can remove it by taking the adjoint of both sides. Note that  $D(R)$  is a set of numbers, not an operator on the Hilbert space, so it gets conjugated rather than adjointed, for

$$U(R)\Psi_\sigma^\dagger(\mathbf{x})U(R)^{-1} = \Psi_\lambda^\dagger(R\mathbf{x})D(R)_\sigma^\lambda.$$

In some, but not all cases,  $\Psi$  is Hermitian, so we get the same result as for tensor operators. Next, we move to the relativistic case.

• In general, the Hilbert space carries an infinite-dimensional unitary representation  $U(\Lambda, \mathbf{b})$  of the Poincare group. We identify individual particles with irreps of the Poincare group; this is sensible, as taking a particle and moving it around in some way should keep it the "same" particle. For concreteness, we consider a particle with mass  $m$  and spin  $s$ .

• Equivalently, we could define a one-particle state as a state which can be specified by its fourmomentum, and a list of additional indices with discrete values. This rules out two-particle states because the relative velocity is continuous, but allows us to count the ground state of hydrogen as a one-particle state, i.e. it does not distinguish between elementary and composite particles.

• The set of one-particle states of a given species is hence  $\{|\mathbf{p}\lambda\rangle\}$ , while at the level of the free theory, multiple-particle states can be built from this irrep by the Fock construction. We define creation operators, which satisfy

$$|\mathbf{p}\lambda\rangle = a^\dagger(\mathbf{p}\lambda)|0\rangle$$

Using our previous results, under Lorentz transformations the creation operators obey

$$U(\Lambda)a^\dagger(\mathbf{p}\lambda)U(\Lambda^{-1}) = a^\dagger(\Lambda\mathbf{p}\lambda') D^s(R(\Lambda, p))_\lambda^{\lambda'}$$

Taking the adjoint, the annihilation operators transform as

$$U(\Lambda)a(\mathbf{p}\lambda)U(\Lambda^{-1}) = D^s(R(\Lambda, p)^{-1})_\lambda^\lambda a(\Lambda\mathbf{p}\lambda')$$

Here,  $R(\Lambda, p)$  is as defined earlier, the  $D^s$  are the spin  $s$  representation matrices of  $SO(3)$ , and  $p$  is defined to have spatial part  $\mathbf{p}$ ,  $p^0 > 0$ , and  $p^2 = -m^2$ .

• As in the nonrelativistic case, we may define the wavefunction of a one-particle state by projecting onto the  $|\mathbf{p}\lambda\rangle$  states. Then the wavefunction should transform with a factor of  $D^s$ , but this formalism is not manifestly Lorentz invariant.

• Instead, we prefer to let the wavefunction transform under a finite-dimensional representation of the Lorentz group  $D(\Lambda)$  as

$$\psi'^\alpha(x) = D(\Lambda)_\beta^\alpha \psi^\beta(\Lambda^{-1}x), \quad \langle x\alpha|\psi\rangle = \psi^\alpha(x)$$

where the  $\alpha$  and  $\lambda$  indices are related by mode functions,

$$\langle x\alpha|\mathbf{p}\lambda\rangle = u^\alpha(\mathbf{p}\lambda)e^{ipx}$$

For a fixed value of  $\mathbf{p}$ , the  $u^\alpha(\mathbf{p}\lambda)$  are also called polarizations.

• Switching to the set of states  $|\mathbf{x}\alpha\rangle$  severely enlarges the Hilbert space; it contains particles with the wrong mass, negative energy, and the wrong spin, as a generic Lorentz representation contains multiple spins. Hence we'll have to project out an appropriate subset later.

• Once we have defined wavefunctions, we can define relativistic field operators as

$$\langle 0|\Psi^\alpha(\mathbf{x})|\psi\rangle = \psi^\alpha(\mathbf{x})$$

which by the same proof transform as

$$U(\Lambda)\Psi^\alpha(x)U(\Lambda^{-1}) = D(\Lambda^{-1})_\beta^\alpha \Psi^\beta(\Lambda x)$$

The nomenclature is a bit confusing, as both the states and the observables can be called fields, since they both depend on position. For example, the wavefunction for a Dirac fermion  $\psi^\alpha(x)$  is thought of as a field in first quantization. We will distinguish operator fields by capital letters.

• In other words, the role of the mode functions is to intervene between particle states, which carry momenta and little group indices, and fields, which carry momenta and Lorentz indices.

We restrict to the Poincare irrep using the relativistic wave equations that the field satisfies. These constraints will ensure that the field only creates particles in the desired Poincare irrep.

• The general form of such an equation is

$$\Pi(m, -i\partial)_\beta^\alpha \Psi^\beta(x) = 0$$

which in Fourier space becomes

$$\Pi(m, p)\Phi^\alpha(p) = 0$$

where  $\Phi(p)$  is the Fourier transform of  $\Psi(x)$ , with identical transformation properties. For example, the Klein-Gordon field has  $\Pi(m, p) = p^2 + m^2$ .

- We demand the wave equation be relativistically invariant, so

$$D(\Lambda)\Pi(m, p)D(\Lambda^{-1}) = \Pi(m, \Lambda p).$$

In other words, if  $\Pi(m, p)\Phi^\alpha(p) = 0$ , then  $\Pi(m, \Lambda p)\Phi^\alpha(\Lambda p) = 0$ , so different observers agree on whether the equation of motion is satisfied.

- The equation of motion must impose the mass shell condition

$$(p^2 + m^2)\Phi(p) = 0$$

We then parametrize the on-shell degree of freedom by  $\Phi(p) = \delta(p^2 + m^2)\tilde{\Phi}(p)$ . This ensures that we only get particles with mass  $m$ . The Klein-Gordon equation clearly does this. The Dirac equation does it as well, since the Dirac operator squares to  $p^2 + m^2$ , and additionally prevents an extraneous doubling of the degrees of freedom, since a Dirac spinor field transforms as  $(1/2, 0) + (0, 1/2)$ .

- Note that the mass shell condition has two possible energies for each momentum; that is, it doesn't rule out negative energies. This is related to the prediction of antiparticles in quantum field theory, as discussed in the notes on Quantum Field Theory.

- Finally,  $\Pi(m, p)$  must act like a projection matrix that selects out states with spin  $s$ . This is necessary, for instance, to remove the spin 0 part of a vector field  $A^\mu$  if we wish to use it to describe only a massive spin 1 particle, as discussed below.

- With this setup, the general quantum field solution has the form

$$\Psi^\alpha(x) = \sum_\lambda \int \tilde{d}p b(\mathbf{p}\lambda) u^\alpha(\mathbf{p}\lambda) e^{ipx} + \text{negative energy term}$$

where  $\tilde{d}p$  is the invariant measure and the  $b(\mathbf{p}\lambda)$  are some unknown operators; plugging in the definition of the quantum field shows they are simply the annihilation operators  $a(\mathbf{p}\lambda)$ .

Example. Consider a massive vector field  $V^\mu$ . In this case, the mode functions carry a Lorentz index, and it is conventional to write them as  $\epsilon^\mu_\lambda(\mathbf{p})$ . The option that gives the spin 0 particle is

$$\epsilon^\mu(\mathbf{p}) \propto p^\mu$$

where there is no little group index, since the index has only a single value. Upon plugging this in, we find that  $V^\mu$  has precisely the mode expansion of the derivative of a scalar field,  $\partial^\mu \phi$ . Hence it is much more useful to work with  $\phi$  directly. A "normal" Lagrangian in terms of  $V^\mu$  would be effectively higher in derivatives than one for  $\phi$ , and wouldn't be able to describe interactions such as  $\phi^4$ . One could describe such interactions if we allowed the Lagrangian to depend on  $(1/\partial^\mu)V^\mu$ , but then it would be nonlocal.

The option that gives the spin 1 particle is

$$\epsilon_0(\mathbf{0}) \propto \hat{e}_z, \quad \epsilon_{\pm 1}(\mathbf{0}) \propto \hat{e}_x \pm i\hat{e}_y$$

where the little group index gives the spin along the  $z$ -direction, and the result is extended to nonzero  $\mathbf{p}$  by applying the standard Lorentz transformation, as discussed in the previous section. Notice that these polarization are always orthogonal to  $p^\mu$ ,  $\epsilon^\mu p_\mu = 0$ . At the level of the fields, this corresponds to the constraint  $\partial_\mu V^\mu = 0$ , which follows from the equations of motion.

Note that there are, confusingly, two uses of "spin" above. The spins of the particles are associated with their transformations under the little group  $SO(3)$ , embedded in the Poincare group. In this case, the spin 1 particles are created by the part of the field with  $\partial_\mu V^\mu = 0$ . We can also decompose the field into irreps of spatial rotations, using  $SO(3)$  embedded in the Lorentz group. In this case the spin 0 part is simply  $V^0$ , while the spin 1 part is  $V^i$ . The assignment of spins is in correspondence, but what we mean when we talk about "the spin 1 part of the field" is ambiguous.

Another lesson of this example is that if one is simply given a field-theoretic action, one cannot infer the types of particles present after quantization from the transformation properties of the fields alone. A vector field can end up creating and annihilating either spin 0 or spin 1 particles, depending on the action.

Example. The situation gets more complicated when we take the mass to zero, i.e. when we want to describe a particle with helicity  $\pm 1$ . We need to remove another polarization, but there are no further Lorentz invariant constraints we can impose. If we just start with

$$\epsilon_{\pm 1}(p\hat{\mathbf{z}}) \propto \hat{e}_x \pm i\hat{e}_y$$

then under a little group transformation, we will exit the vector space spanned by the  $\epsilon_{\pm 1}(p\hat{\mathbf{z}})$ . The only way to avoid this problem is to impose a gauge symmetry, regarding distinct polarizations as physically equivalent. This descends to imposing the gauge symmetry  $V^\mu \rightarrow V^\mu + \partial^\mu \alpha$  on the field, which implies that for the Lagrangian to contain an interaction  $V_\mu J^\mu$ , the current  $J^\mu$  must be conserved.

This is the modern way to introduce gauge theories like electromagnetism, but textbooks often present another perspective, which is more historical but somewhat less satisfying. Historically, we figured out Maxwell's equations by experiment, which implies that electromagnetism has a gauge symmetry when written in terms of potentials. The coupling of electromagnetism to matter must respect the gauge symmetry. Thus, textbooks often talk about "introducing" gauge symmetry to a matter sector, with some vague muttering about how this is motivated by "elegance" or "beauty". It isn't! Gauge symmetry is an inconvenience, which is forced on us by the mismatch between the mismatch of degrees of freedom of massless particles and fields.

The same logic for helicity  $\pm 2$  and a rank 2 tensor field  $h_{\mu\nu}$  implies that for direct coupling  $h_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$ , the tensor  $S^{\mu\nu}$  must be conserved, so the only option is the stress-energy tensor  $T^{\mu\nu}$ . For higher helicity, there are no high rank conserved tensors available. One can still write down interactions, but they must involve derivatives, and hence do not produce long-range forces (i.e. forces falling off as  $1/r^2$ ).

Example. A bit more about higher spin fields. Notice that we can also get spin 1 particles from the  $(1, 0)$  or  $(0, 1)$  representations of the Lorentz group, which correspond to self-dual and anti self-dual antisymmetric rank 2 tensors. Typically, this is not useful, for the same reason that it isn't useful to use a vector field  $\partial_\mu \phi$  to create a scalar particle: the field is just the derivative of a vector field that already does the same job,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ . (In the massless case, using  $F_{\mu\nu}$  has the benefit that it is gauge invariant. But we again have the problem that simple interactions in terms of  $F_{\mu\nu}$  can't yield, e.g. long range forces, because they are higher order in derivatives, while the usual interactions in terms of  $A_\mu$  itself would have to be described using nonlocal Lagrangian terms involving inverse derivatives.)

A particle of integer spin  $s$  can be embedded in a field transforming in  $(s/2, s/2)$ , i.e. as a rank  $s$  tensor, where the extraneous degrees of freedom can be removed by symmetrizing the tensor and removing all traces. In order to get particles of half-integer spin, it suffices to add a single spinor index. For example, for spin  $3/2$ , we can use a vector and a Dirac spinor index  $\psi_a^\mu$ , since

$$(1/2, 1/2) \times ((1/2, 0) + (0, 1/2)) = (1/2, 1) + (1, 1/2) + (1/2, 0) + (0, 1/2).$$

This is known as a Rarita-Schwinger field. To remove the last two representations, it suffices to impose  $\gamma_\mu \psi^\mu = 0$ . The first two representations also yield extraneous spin 1/2 particles, which may be removed by imposing  $\partial_\mu \psi^\mu = 0$ . Finally, just like the Dirac field, the Rarita-Schwinger field obeys a first order equation like the Dirac equation, which avoids double counting the degrees of freedom. To describe massless helicity  $\pm 3/2$  particles, one can additionally impose a fermionic gauge symmetry  $\psi_a^\mu \rightarrow \psi_a^\mu + \partial^\mu \epsilon_a$ .

Another approach is to construct everything out of spinor indices from the start. We know that  $(j_1/2, 0)$  is the symmetric traceless part of the  $j_1$ -fold tensor product of  $(1/2, 0)$ . Therefore, the representation  $(j_1/2, j_2/2)$  can be isolated by taking a field with  $j_1$  and  $j_2$  dotted and undotted Weyl spinor indices, with everything symmetrized and traces removed. We didn't do this in our previous examples because we preferred to use vector indices as much as possible, as they are more intuitive. However, depending on the theory, this approach might ultimately be simpler.

Note. The connection between particles and fields sheds some light on spontaneous symmetry breaking. For example, consider two scalar fields related by an  $SO(2)$  symmetry,  $\phi_1 = i[Q, \phi_2]$ , where  $Q$  is Hermitian and  $[Q, H] = 0$ . To convert this into a statement about the corresponding particles, we note that at the level of the annihilation operators, we have  $a_1 = i[Q, a_2]$ . Therefore,

$$|1\rangle = a_1^\dagger |\Omega\rangle = i[Q, a_2^\dagger] |\Omega\rangle = iQ|2\rangle - ia_2^\dagger Q|\Omega\rangle$$

Therefore, as long as the vacuum state is invariant,  $Q|\Omega\rangle = 0$ , the one-particle states  $|1\rangle$  and  $|2\rangle$  are related by the symmetry, and we can conclude, e.g. that they are degenerate. If the symmetry is spontaneously broken,  $Q|\Omega\rangle \neq 0$ , this logic fails. The symmetry still exists, i.e.  $Q$  commutes with the Hamiltonian either way, but it may not yield any useful information about the particles.

It is simple to connect this to the usual way spontaneous symmetry breaking is described. Suppose at least one of the fields gains a vacuum expectation value that is not invariant under the symmetry,  $\langle \Omega | [Q, \phi_i] | \Omega \rangle \neq 0$ . Since  $Q$  is Hermitian, it immediately follows that we must have  $Q|\Omega\rangle \neq 0$ .

In this case, we typically work with fields  $\varphi_i = \phi_i - \langle \Omega | \phi_i | \Omega \rangle$  expanded about the new vacuum. However, the symmetry operator  $Q$  acts nonlinearly on these new fields, which means it does not act on the new operators  $a'_i$  in a simple way.

In summary, particles live in a unitary Poincare irrep, and the states in these irreps correspond to plane wave solutions  $u^\alpha(\mathbf{p}\lambda)e^{ipx}$  for a quantum field, which transforms in a nonunitary Lorentz representation. The field is not strictly necessary, but it allows us to construct theories with locality and causality manifest; the cost is the extra step of converting between particle and field representations with mode functions, as well as the necessity of imposing constraints or gauge symmetries to get the right degrees of freedom in the fields. On the other hand, the on-shell approach to scattering amplitudes proposes to throw away the fields and work with scattering amplitudes directly, precisely to avoid these complications. For much more on these issues, see the notes on Quantum Field Theory.

## 14.2.4 8.4\* Yang-Mills Theory From Algebra

In this section, we construct the Yang-Mills Lagrangian. We warm up with a  $U(1)$  gauge group.

- The gauge potential is  $a_\mu$  with gauge transformations  $a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \alpha$ , and the gauge-invariant field strength is  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ . The Lagrangian is

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$$

For convenience, we define  $A_\mu = -ia_\mu$  and  $F_{\mu\nu} = -if_{\mu\nu}$ . This is useful because the Lie algebra  $\mathfrak{u}(1)$  may be identified with the imaginary axis  $i\mathbb{R}$ , so  $A_\mu$  and  $F_{\mu\nu}$  naturally live in it.

- Now consider adding a complex scalar field  $\phi$  with Lagrangian

$$\mathcal{L}_\phi = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - W(\phi^* \phi)$$

This is invariant under the  $U(1)$  global symmetry

$$\phi \rightarrow g\phi, \quad \phi^* \rightarrow g^{-1}\phi^*, \quad g = e^{i\delta} \in U(1)$$

Now we consider an infinitesimal global symmetry  $g = \exp(\epsilon X) \approx 1 + \epsilon X$ , where  $X \in \mathfrak{u}(1)$  is a pure imaginary number. Then we have

$$\delta_X \phi = \epsilon X \phi, \quad \delta_X \phi^* = -\epsilon X \phi^*, \quad \delta_X \mathcal{L}_\phi = 0$$

To gauge the symmetry, we promote  $g$  to  $g(x)$ .

- The Lagrangian is not invariant under the gauged symmetry because

$$\delta_X (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta_X \phi = \epsilon \partial_\mu (X \phi) = \epsilon (\phi \partial_\mu X + X \partial_\mu \phi)$$

We get an extra term that does not cancel out.

- We restore gauge invariance by promoting the partial derivative to a covariant derivative,

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$$

We let the gauge field also transform as  $\delta_X A_\mu = -\epsilon \partial_\mu X$ . Then direct calculation gives

$$\delta_X (D_\mu \phi) = \epsilon X D_\mu \phi$$

Then by the same logic as in the global case,  $\delta_X \mathcal{L}_\phi = 0$  as desired.

We have constructed the theory of scalar QED above. We now consider a general Lie group  $G$ .

- For simplicity, we consider a set of scalar fields  $\phi$  which transform in some representation  $D$  of  $G$ , with representation space  $V \cong \mathbb{C}^N$ . We begin with the Lagrangian

$$\mathcal{L}_\phi = (\partial_\mu \phi, \partial^\mu \phi) - W((\phi, \phi))$$

where we use the standard inner product on  $\mathbb{C}^N$ .

- Assuming that  $D$  is a unitary representation,  $\mathcal{L}_\phi$  is invariant under the global symmetry

$$\phi \rightarrow D(g)\phi, \quad D(g)^\dagger = D(g)^{-1}$$

which is infinitesimally

$$D(g) = \exp(\epsilon R(X)) \approx 1 + \epsilon R(X), \quad R(X)^\dagger = -R(X), \quad \delta_X \phi = \epsilon R(X)\phi$$

where  $R(X)$  is the representation of  $\mathfrak{g}$  corresponding to  $D$ .

- Next, we gauge the symmetry by allowing  $X$  to depend on  $x$  and using the covariant derivative

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + R(A_\mu) \phi$$

where  $A_\mu$  is a  $\mathfrak{g}$ -valued vector field, which transforms as

$$\delta_X A_\mu = -\epsilon D_\mu X = -\epsilon \partial_\mu X - \epsilon [A_\mu, X]$$

where the second term is new; it is the Lie bracket, which vanished in the  $\mathfrak{u}(1)$  case.

- By direct calculation, we may verify

$$\delta_X (D_\mu \phi) = \epsilon R(X) D_\mu \phi$$

where we use the fact that  $R$  is linear, so it commutes with derivatives, and that  $R$  is a representation, so  $R([X, A_\mu]) = [R(X), R(A_\mu)]$ . Then we have

$$\delta_X [(D_\mu \phi, D^\mu \phi)] = \epsilon ((R(X) D_\mu \phi, D^\mu \phi) + (D_\mu \phi, R(X) D^\mu \phi)) = 0$$

since  $R(X)$  is anti-Hermitian.

- Next, we need a kinetic term for the gauge field. We define the field strength

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \in \mathfrak{g}.$$

Then by direct calculation, we have

$$\delta_X F_{\mu\nu} = \epsilon [X, F_{\mu\nu}]$$

where we use standard properties and the Jacobi identity.

- We then use the Killing form to define a kinetic term,

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{g^2} \kappa(F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu})$$

This term is gauge-invariant by the invariance of the Killing form,

$$\delta_X \mathcal{L}_A \propto \kappa([X, F_{\mu\nu}], F^{\mu\nu}) + \kappa(F_{\mu\nu}, [X, F^{\mu\nu}]) = 0.$$

- To get a sensible theory, we need the Killing form to be negative definite, i.e. that  $\mathfrak{g}$  is of compact type; this also requires  $\mathfrak{g}$  to be simple. That is, we can choose a basis of  $\mathfrak{g}$  where

$$\kappa^{ab} = \kappa(T^a, T^b) = -\kappa \delta^{ab}, \quad \kappa > 0$$

so that in components,

$$\mathcal{L}_A = -\frac{\kappa}{g^2} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a}, \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu a} T^a$$

- In summary, a gauge theory is specified by a simple compact gauge group  $G$ , where  $A_\mu \in \mathfrak{g}$  (i.e. the gauge field transforms in the adjoint representation), and a set of matter fields that transform in representations of  $\mathfrak{g}$ . In nature, the matter fields are always fermions that transform in the fundamental representation.

Note. Some more explicit expressions in the case where  $G$  is a matrix Lie group, so that  $A_\mu \in \mathfrak{g}$  and  $g \in G$  are matrices. The gauge field transforms as

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = g A_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g) g^{-1}$$

which yields the same  $\delta_X A_\mu$  by letting  $g = \exp(\epsilon X)$ .

A field in the fundamental representation transforms as  $\phi \rightarrow g\phi$ , so its covariant derivative is simply  $D_\mu^F \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi$ . On the other hand, a matrix-valued field in the adjoint representation transforms as  $\phi \rightarrow g\phi g^{-1}$ , so its covariant derivative is  $D_\mu^A \psi = \partial_\mu \psi + [A_\mu, \psi]$ . These are both special cases of our general expression above.

The field strength tensor is the commutator of covariant derivatives,

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu^A, D_\nu^A]$$

as can be checked by acting with both sides on  $\psi$ . Directly expanding shows that this matches our earlier definition. Moreover,  $F_{\mu\nu}$  itself transforms in the adjoint representation, which implies that  $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$  is gauge invariant. This is equivalent to what we found earlier, since  $\text{tr}(XY)$  and  $\kappa(X, Y)$  are proportional for a simple Lie algebra.

Note. For reference, the one-loop running of the Yang-Mills coupling  $g$  at one-loop is

$$\frac{d\alpha}{d\log\mu^2} = \frac{b\alpha^2}{4\pi}, \quad \alpha = \frac{g^2}{4\pi}$$

where

$$b = -\frac{11}{3}C_2(G) + \sum_F \frac{4}{3}T(F) + \sum_S \frac{1}{3}T(S)$$

where the terms are due to the gauge bosons, Dirac fermions, and complex scalars. We are using the physics normalization convention, which implies

$$C_2(SU(N)) = N, \quad T(\text{fund}) = \frac{1}{2}$$

In the case of  $G = U(1)$ , we have

$$C_2(U(1)) = 0, \quad T(\text{charge } q) = q^2.$$

If Weyl or Majorana fermions are present, they contribute with a coefficient of  $2/3$  because they're half a Dirac fermion, while real scalars contribute with a coefficient of  $1/6$ .

### 14.2.5 8.5 Grand Unification by Zhou

We begin with a brief review of the gauge groups and matter content of the Standard Model.

- The Standard Model has gauge group  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . The gauge bosons in each of these factors carry color, weak isospin, and hypercharge  $Y$ . The fermions transform in representations of this group; we will indicate representations of  $SU(3)$  and  $SU(2)$  by their dimensions are usual, and representations of  $U(1)$  by half their hypercharge,  $Y/2$ .

- The structure is the same in each generation, so we focus on the first, containing the quarks  $u$  and  $d$ , the electron  $e^-$ , and the neutrino  $\nu_e$ . The quarks and electron are Dirac fermions, so they contain left-handed and right-handed Weyl fermions, while the massless neutrino is only left-handed.

- The left-handed quarks transform in  $(3, 2, 1/6)$ . Counting quarks of different colors as different particles, there are six; the weak force exchanges the up and down quarks.

- The right-handed up quarks transform in  $(3, 1, 2/3)$ .

- The right-handed down quarks transform in  $(3, 1, -1/3)$ .

- The left-handed leptons transform in  $(1, 2, -1/2)$ .

- The right-handed electron transforms in  $(1, 1, -1)$ . It has to transform trivially under  $SU(2)$  since there's nothing left; there is no right-handed neutrino.

- All of the antiparticles transform in the corresponding conjugate representation.

- To build a grand unified theory, we would like to combine these representations together. Since gauge transformations commute with Lorentz transformations, they can only work within one Lorentz irrep, so it is convenient to only work with left-handed Weyl spinors. Since the conjugate of a left-handed Weyl spinor is a right-handed Weyl spinor, we have



$u$  and  $d$  quarks:  $(3, 2, 1/6)$ ,  $u^c$  quark:  $(\bar{3}, 1, -2/3)$ ,  $d^c$  quark:  $(\bar{3}, 1, 1/3)$

and

$e$  and  $\nu_e$  leptons:  $(1, 2, -1/2)$ ,  $e^c$  lepton :  $(1, 1, 1)$

where the  $c$  superscript denotes charge conjugation, so  $u^c$  is an anti-up quark.

- The  $SU(2) \times U(1)$  symmetry is spontaneously broken down to the  $U(1)$  of electromagnetism; the photon is a mixture of the  $U(1)$  generator and one of the  $SU(2)$  generators, say the third. The explicit relation is given by a modern version of the Gell-Mann-Nishijima formula,

$$Q = T^3 + \frac{1}{2}Y$$

Using this relation, we can reverse engineer the values of  $Y$  above, where  $T^3$  is the third generator of  $SU(2)_L$ . The  $Y$  here is totally different from the hypercharge in the Gell-Mann-Nishijima formula,  $Q = I^3 + Y/2$  where  $I^3$  is the third component of isospin, and was normalized so the two formulas look the same.

- The naive Dirac mass terms don't work, because left-handed and right-handed quarks and electrons transform differently under  $SU(2)$ . The resolution is to introduce a new complex scalar field  $\varphi$  transforming in  $(1, 2, -1/2)$ , called the Higgs field; the hypercharge is chosen so that  $\varphi$  times the Dirac mass term is allowed.

- As a result, the Higgs field contains two uncharged particles, a particle with charge  $+1$ , and a particle with charge  $-1$ . During symmetry breaking, three of these particles combine with the broken  $SU(2)$  and  $U(1)$  gauge bosons to produce the  $W^\pm$  and  $Z$ , while the remaining degree of freedom acquires a vev, becoming 'the' Higgs field.

We now turn to grand unification under  $SU(5)$ , first proposed by Georgi and Glashow in 1972.

- One clue that the Standard Model gauge group should be part of a larger one is that the hypercharges of the 15 Weyl fields above add up to zero. This is what we would expect if hypercharge were one of the generators of a larger gauge group, as it should be traceless.

- The smallest group that contains the Standard Model gauge group is  $SU(5)$ , generated by traceless anti-Hermitian  $5 \times 5$  matrices. We identify  $SU(3)$  with generators in the upper-left  $3 \times 3$  block,  $SU(2)$  with generators in the bottom-right  $2 \times 2$  block, and  $U(1)$  with generator

$$\frac{1}{2}Y = \text{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1/2, 1/2)$$

There are 12 more gauge bosons, which we'll get back to later.

- First, consider the fundamental representation  $\psi^\mu$  of  $SU(5)$ . This irrep decomposes as

$$5 \rightarrow (3, 1, -1/3) + (1, 2, 1/2)$$

which implies that

$$\bar{5} \rightarrow (\bar{3}, 1, 1/3) + (1, 2, -1/2)$$

This perfectly accommodates the anti-down quark and the leptons.

- The remaining 10 particles fit into the antisymmetric tensor representation  $\psi^{\mu\nu}$ . To understand this representation, it's easiest to break the symmetry first; then we want the antisymmetric part of  $(3, 1, -1/3) + (1, 2, 1/2)$  times itself. We have

$$(3, 1, -1/3) \times (3, 1, -1/3) = (\bar{3}, 1, -2/3) + (6, 1, -1/3)$$

and

$$(3, 1, -1/3) \times (1, 2, 1/2) = (3, 2, 1/6), \quad (1, 2, 1/2) \times (1, 2, 1/2) = (1, 1, 1) + (1, 3, 1)$$

Taking the antisymmetric part eliminates the  $(6, 1, -1/3)$  and  $(1, 3, 1)$ . It also ensures we only get one copy of  $(3, 2, 1/6)$  though we would naively have two. Then

$$10 \rightarrow (\bar{3}, 1, -2/3) + (3, 2, 1/6) + (1, 1, 1)$$

which is exactly the anti-up quark, the quarks, and the anti-electron.

- Therefore, the matter content of the Standard Model fits into the  $\bar{5} + 10$  of  $SU(5)$ . Taking the reasoning in reverse, this explains many features of the Standard Model; it forces charge to be quantized, and it ensures the proton and electron charge are exactly opposite.

Next, we give a brief taste of dynamics in the  $SU(5)$  GUT.

- We write mass terms using the  $\psi_\mu$  and  $\psi^{\mu\nu}$  fields. We let

$$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad i = 4, 5.$$

There are spinor indices everywhere, which we suppress. In terms of the usual particles,  $\psi_\alpha = \bar{d}$ ,  $\psi_i = (\nu, e)$ ,  $\psi^{\alpha\beta} = \bar{u}$ ,  $\psi^{\alpha i} = (d, u)$ , and  $\psi^{ij} = \bar{e}$ .

- In terms of representations, we can write a Dirac mass term for the up quark if  $u^c(Cu)$  contains a singlet, where  $C$  is charge conjugation. But we run into the same problem as in the Standard Model: it's impossible to do this. Instead we introduce a Higgs field  $\varphi^\mu$  transforming in the 5, with symmetry breaking so that  $\varphi^4$  acquires a vev, and mass term

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\tau} \psi^{\mu\nu} C \psi^{\rho\sigma} \varphi^\tau \rightarrow \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma 4} \psi^{\mu\nu} C \psi^{\rho\sigma} \varphi^4 \sim \psi^{12} C \psi^{35} + \text{permutations} \sim u^c C u$$

We choose  $\varphi^4$  to have the vev since it is electrically neutral.

- For the down quark and electron, we introduce the mass term

$$\psi_\mu C \psi^{\mu\nu} \varphi_\nu \rightarrow \psi_\mu C \psi^{\mu 4} \sim d^c C d + e^c C e$$

with no mass term for the neutrino since  $\psi^{44} = 0$ , as desired.

- The gauge bosons are in the adjoint representation and hence can be written as components of a traceless tensor  $A_\nu^\mu$ . Then the 12 gauge bosons we haven't accounted for, called the  $X$  and  $Y$  bosons, mix quarks and leptons because they exist in the same  $SU(5)$  irrep. (Specifically, the  $X$  and  $Y$  mix among themselves under  $SU(3)_C$ , which is why we distinguish them.)

- For example, we have

$$\psi^{\alpha 4} = d, \quad A_\alpha^5 \psi^{\alpha 4} \sim \psi^{54} = e^+$$

Similarly, we can convert an up quark into an anti-up quark,

$$\psi^{5\alpha} = u, \quad A_\alpha^5 \psi^{5\alpha} \sim \psi^{\alpha\beta} = u^c$$

Therefore, proton decay can occur by emission and reabsorption of an  $A_\alpha^5$  boson,

$$p = u + u + d \rightarrow u^c + e^+ + d = \pi^0 + e^+.$$

This process occurs very slowly due to high mass of the  $A_\alpha^5$ , at the GUT scale.

- Proton decay can also be described below the GUT scale by an effective field theory. In the Standard Model, we have the accidental global symmetries of quark rotation and lepton rotation, yielding conservation of baryon and lepton number  $B$  and  $L$ . Then to add proton decay, we simply write down terms that don't obey these global symmetries.

- Since we are far below the GUT scale, any terms we add should be scalars under the Standard Model gauge group. Then a  $qqq$  term is unacceptable since it has nonzero hypercharge, but a dimension 6  $qqq\ell$  term turns out to be allowed. This term describes proton decay, and we can relate its rate to the rates of other exotic processes just as we did for isospin.

- We notice that in the proton decay process,  $B$  and  $L$  change, but  $B - L$  is conserved. To see why, note that there are only two mass terms but three irreps in play. Therefore we can construct a global symmetry of the Lagrangian, i.e. a conserved quantity  $X$ . We have

$$X(10) + X(10) + X(5_\varphi) = X(\bar{5}) + X(10) + X(\bar{5}_\varphi) = 0$$

which implies

$$X(10) = 1, \quad X(5_\varphi) = -2, \quad X(5^*) = -3$$

However, this symmetry is broken by the Higgs vev,  $\varphi_4$ . Note that  $\varphi_4$  has hypercharge  $Y/2 = -1/2$  and  $X = 2$ , with some sign flips since the index is lowered. Then neither  $X$  nor  $Y$  is conserved, but  $X + 4(Y/2) = B - L$  is. In more general GUTs,  $B - L$  might be violated.

- At the unification scale  $M_{\text{GUT}} \approx 2 \times 10^{16} \text{GeV}$ , we have  $\alpha(\mu) \approx 1/25$ , so the theory remains perturbative. Note that for comparison, the reduced Planck mass is about  $2 \times 10^{18} \text{GeV}$ , so we can hopefully ignore quantum gravity effects at the GUT scale.

- We expect the most common proton decay mode to be  $p \rightarrow \pi^0 e^+$ , and a rough estimate of the decay rate is

$$\Gamma \sim \frac{g(M_{\text{GUT}})^4}{M_{\text{GUT}}^4} m_p^5$$

where the prefactor is due to the two vertices and the  $X/Y$  gauge boson propagator squared, and the  $m_p^5$  factor is the phase space factor. This is raised to the fifth power by dimensional analysis, and  $m_\pi$  and  $m_e$  don't enter because they are much smaller than  $m_p$ . Numerically,

$$\tau_{p \rightarrow \pi^0 e^+} \sim 10^{31} \text{ years.}$$

Note. Electroweak unification is not the same as grand unification! Grand unification combines three forces into one simple gauge group, where they necessarily have one coupling constant. The electroweak theory instead describes the breaking of  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  to  $U(1)_{\text{EM}}$ . Since the unbroken group is a product group, there are still two independent coupling constants above the electroweak scale. The feature they have in common is a Higgs symmetry breaking.

Note. More about picking the Higgs fields irreps for giving mass to matter. Given a left-handed particle field in a representation  $R$  and a left-handed antiparticle field in a representation  $R'$ , we can write a Higgs Yukawa coupling if the Higgs field irrep or its conjugate is in  $R \otimes R'$ .

Using a notation where, e.g.  $[m, n]$  stands for a Young tableau with a column of  $m$  and a column of  $n$ , for the down quark and lepton we have

$$\bar{5} \times 10 = [4] \times [2] = [1] + [4, 2] = 5 + 45$$

while for the up quark we have

$$10 \times 10 = [2] \times [2] = [4] + [3, 1] + [2, 2] = \bar{5} + \bar{45} + \bar{50}$$

For simplicity, we'd like to minimize the number of distinct Higgs fields, so we need to take either 5 or 45. We'd like our Higgs to contain the Standard Model Higgs which breaks  $SU(2) \times U(1)$  to  $U(1)$ . Both 5 and 45 work for this purpose, and we took 5 above for simplicity.

The  $SU(5)$  GUT comes with a variety of complications.

- Though the strong, weak, and electromagnetic coupling constants do get close at a high energy scale, they don't converge exactly. However, the agreement is significantly improved by adding superpartners. This agreement has had a strong historical impression on the community, with some calling it the best BSM prediction ever made.

- Experiments such as Super-K have placed a stringent upper bound on the proton decay rate of  $\tau \gtrsim 2 \times 10^{34}$  years, beyond what would be natural for the  $SU(5)$  GUT. These experiments work by taking a large tank of water and looking for the gamma rays produced in the decay.

- We need two Higgs fields. The first is in the adjoint and acquires the vev  $\text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$ , breaking  $SU(5)$  to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  and giving mass to the extra gauge bosons. The fermion masses come from the second Higgs field  $\varphi^\mu$  as discussed above.

- Our mass term sets  $m_d = m_e$  at the GUT scale. This is modified by RG flow, which gives

$$\frac{m_b}{m_\tau} \approx \frac{m_s}{m_\mu} \approx \frac{m_d}{m_e} \approx 3$$

This is acceptably accurate for the last two generations, but totally wrong for the first generation. One can fix this by adding a third Higgs field, but this starts to make the theory complicated.

- Since the GUT scale is so high, the hierarchy problem remains, due to the distance between the GUT scale and the electroweak scale. There is nothing that protects the SM Higgs from getting mass corrections up to the GUT scale.

- This question is sharpened by looking more closely at the Higgs sector. The SM Higgs is contained in a 5, which also contains a color-triplet Higgs. This color-triplet can mediate proton decay, so it must be very heavy, near the GUT scale. A light color-triplet Higgs would also ruin gauge coupling unification. So we need a mechanism to make the Higgs doublet very light and simultaneously make the Higgs triplet very heavy. This doesn't hold even at tree level, since the vev of the 24 Higgs field generically makes both parts of the 5 Higgs field heavy, and moreover the separation is not stable under radiative corrections. This is the doublet-triplet splitting problem.

- There is no explanation for the family structure of the SM. More complicated GUT models can account for this, but in all cases the fact that there are three generations seems to be put in "by hand", in the sense that similar, equally elegant theories could have four or five generations. The number of new heavy particles also tends to explode.

- One could quibble about the proton decay measurement. For example, the neutron decays, but becomes stable in atoms because of its nuclear environment; however, this is very unlikely for the proton because its decay is strongly kinematically allowed. Another way out is to note that the matching of leptons to quarks in each generation is in principle arbitrary, so if the  $e^+$  were not in the same generation of  $u$  and  $d$  quarks, the decay would be suppressed. However, this would make the relations between lepton and quark masses within each generation extremely far off, which would have to be explained.

Note. The basic  $SU(5)$  GUT was invented in 1973, and supersymmetric GUTs burst onto the scene in the 1980s, leading to a flurry of thousands of papers. (See this lecture for a fascinating account of the early history.) There was a bewildering array of grand unified theories produced. The simplest next example is  $SO(10)$ . Here, an entire generation of the Standard Model can be placed in a single irrep 16, which decomposes as

$$16 \rightarrow 10 + \bar{5} + 1$$

under  $SU(5)$ . The singlet 1 may be interpreted as a right-handed sterile neutrino. Somewhat more complicated is  $E_6$ , where we can fit a generation into the representation 27. This is the smallest representation, and decomposes as

$$27 \rightarrow 16 + 10 + 1$$

under  $SO(10)$ . The 10 and 1 must be given a high mass by symmetry breaking to match experiment. In the case of  $E_6$ , the simplest possible Higgs representation is the adjoint 78. Furthermore, using extended Dynkin diagrams, we can see that  $SU(3) \times SU(3) \times SU(3) \subseteq E_6$ , so another theory can be constructed with gauge group  $SU(3)^3$ . In this theory, called "trinification", each Standard Model gauge group comes out of one  $SU(3)$  factor. While the gauge group is not simple, it shares many properties with other grand unified theories.

In the early 2000s, as excitement for the LHC built up, model building using group theory reached its apex. In addition to the mundane  $SU(5)$ ,  $SO(10)$ , and  $E_6$  SUSY GUTs, there were left-right symmetric models, Pati-Salam models (featuring lepton number as the "fourth color"), flipped  $SU(5)$ , supergravity theories, and family unification models, augmented with a wide variety of Higgs sectors (possibly composite), supersymmetry breaking mechanisms, extra dimensions, orbifolds, and branes. These sharp tools were used to address many subtle problems which are unknown among students today, such as the LEP paradox, the  $\mu$  problem, the doublet-triplet splitting problem, and even the "gluino sucks" problem.

The products of this golden age had one thing in common: a belief that it was possible to guess every particle that existed, reaching the end of physics in a single paper. When the LHC turned on,

## 14.2.6 Interactions as Transformations of States by Kiselev (???)

Преобразование базисных состояний в рамках мультиплета неприводимого представления при действии генераторов алгебры Ли в физике называют термином «ток». В этом смысле наблюдаемое изменение квантовых состояний называют проявлением взаимодействия, что эквивалентно введению лестничных генераторов групповых преобразований в некотором представлении алгебры Ли. На примере слабого взаимодействия в разделе 3.5, 3 Главы 2 мы видели, что бета-распад нейтрона есть проявление слабого взаимодействия кварков, которое при более детальном рассмотрении экспериментальных данных соответствует заряженным токам в группе  $SU_L(2)$ , т.е. преобразованиям при действии на квантовые состояния базиса фундаментального представления генераторами алгебры  $\mathfrak{su}(2)$ . Однако, повышающие и понижающие генераторы не исчерпывают весь набор генераторов алгебры  $\mathfrak{su}(2)$ , так как в него входят и генераторы из подалгебры Картана, которые не изменяют квантовые числа состояния <sup>62</sup>, поскольку базис состояний построен из совместных собственных векторов полного набора наблюдаемых величин, включающего в себя генераторы подалгебры Картана.

---

<sup>62</sup> Напомним, что квантовыми числами называются номера базисных квантовых состояний, которые взаимнооднозначно связаны с наборами собственных значений операторов полного набора наблюдаемых. Поэтому часто квантовые числа отождествляют с самим набором собственных значений операторов полного набора наблюдаемых. Особо выделяют случай, когда базисные состояния маркируются не номером, а непрерывной величиной, например импульсом. Тогда вместо термина «квантовое число» используют термин «спектральный параметр».

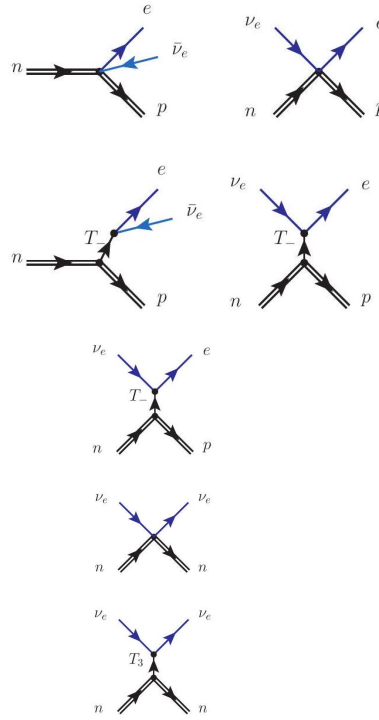


Рис. 2.12: В верхнем ряду распад нейтрона, рассеяние нейтрино на нейтронах за счет слабых заряженных и нейтральных токов, в нижнем - те же процессы, в которых символически указаны генераторы алгебры  $\mathfrak{su}(2)$ , которые отвечают преобразованию состояний слабых изодублетов.

На примере слабого взаимодействия это значит, что левое нейтрино как верхняя компонента слабого изодублета, т.е. как базисное состояние неприводимого представления для группы слабых взаимодействий при действии понижающего генератора переходит в состояние левого электрона, а при действии генератором подалгебры Картана переходит само в себя, так как генератор подалгебры Картана не изменяет базисное квантовое состояние. По введенной нами терминологии отождествления математического понятия генератора с физическим понятием тока это означает, что генератору подалгебры Картана соответствует нейтральный слабый ток - ток без изменения квантовых чисел базисного состояния. В самой общей формулировке алгебра Ли с необходимостью приводит к выводу о существовании нейтральных токов, в частности, нейтральных токов слабого взаимодействия. Этот ток не может совпадать с нейтральным током электромагнитного взаимодействия, так как электромагнитный ток - это ток отличных от нуля электрических зарядов, а электрический заряд нейтрино равен нулю. Значит, если в природе наблюдаются слабые заряженные токи, например, при распаде нейтрона, когда одно базисное состояние слабого изодублета переходит в другое состояние изодублета (распад  $d$ -кварка в  $u$ -кварк) или при рассеянии нейтрино на нейтроне, когда состояние нейтрино переходит в состояние электрона, а нейтрон - в протон, то групповой характер описания слабых токов предсказывает процессы со слабым нейтральным током, когда, например, слабое взаимодействие нейтрино на нейтронах вещества приводит не только к появлению в конечном состоянии заряженных лептонов (электронов), но и к регистрации процессов рассеяния, когда в конечном состоянии наблюдаются все те же нейтрино! Распад нейтрона и процессы рассеяния за счет слабого взаимодействия проиллюстрированы на рис. 2.12

После экспериментального открытия слабых нейтральных токов в процессах с рассеянием нейтрино на веществе Вайнберг, Салам и Глэшоу были удостоены Нобелевской премии за предсказание этих токов в модели электрослабого взаимодействия лептонов и кварков.

Значения корневых векторов алгебры Ли, так как корни по построению представляют из себя разность собственных значений генераторов подалгебры Картана на элементах базиса мультиплета представления алгебры Ли, отождествляют с квантовыми числами заряженных токов, в то время как нейтральные токи отвечают нулевым изменениям весов. Отсюда следует, что слабый заряженный ток несет слабый изоспин  $T_3 = \pm 1$ , что отвечает разности проекций изоспина у верхних и нижних компоненты изодублета, что совпадает значениями координаты  $T_3$  для положительного и отрицательного корневых векторов, а  $T_3 = 0$  соответствует нейтральному току. Это, между прочим, значит, что и сами токи, раз они имеют три компоненты изоспина, несут слабый заряд, отвечающий изоспину  $T = 1$ .

Простая картина слабых токов несколько усложнена Природой, так как кроме слабых имеют место и электромагнитные взаимодействия. В частности, правый электрон, например, не обладает слабым взаимодействием, но имеет электрический заряд. Наличие дополнительного вида взаимодействия с другими зарядами, т.е. наличие другого типа преобразований состояний означает, что необходимо ввести дополнительную группу, отвечающую таким преобразованиям состояний, а поскольку электрический заряд не меняется при электромагнитных преобразованиях состояний, в дополнительной группе есть только нулевые корни, так что в группе есть только один оператор подалгебры Картана, которые называют гиперзарядом электрослабого взаимодействия. Поэтому выход из ситуации - это введение группы  $U(1)$  с гиперзарядом  $Y$ , который может отличаться от электрического заряда только нормировочным множителем и сдвигом в случае, если он относится к частицам, которые наряду с электромагнитным взаимодействием обладают еще и взаимодействием со слабыми нейтральными токами, так что структура электрослабой теории задается прямым произведением  $U_Y \times SU_L(2)$ , где имеется 2 типа нейтральных токов: слабый и электромагнитный.

Преобразования составных квантовых состояний, построенных как тензорные произведения фундаментальных представлений, выводятся из свойств фундаментальных представлений.

Гипотеза калибровочных взаимодействий базируется на предположении о том, что присоединенному представлению алгебры Ли, т.е. токам ставится в соответствие существование мультиплета новых, не являющихся составными, состояний квантов калибровочного поля, которое по отношению к группе поворотов координат в пространстве-времени Минковского является векторным. Напомним, что в присоединенном представлении веса состояний совпадают с корневыми векторами, если к таким состояниям добавить состояния с нулевыми весами, как это и должно быть для генераторов подалгебры Картана (см. раздел 2.4. 2 Главы 2). Поэтому все квантовые числа по группе Ли для преобразований, которые не затрагивают пространство-время, у базисных состояний калибровочного поля совпадают как с квантовыми числами токов в группе Ли, так и с квантовыми числами присоединенного представления этой группы. Важно подчеркнуть, что присоединенное представление можно построить как неприводимое представление в тензорном произведении фундаментальных представлений группы, как это имеет место в составных моделях. Но в калибровочной гипотезе постулируют, что присоединенное представление рассматривается не как составное из фундаментальных, а как самостоятельное пространство совершенно независимых состояний калибровочного поля. Поэтому постулат о существовании калибровочных состояний не зависит от того, какими по спину состояниями укомплектованы фундаментальные представления алгебры Ли, фермионами или бозонами. Такие новые состояния в присоединенном представлении несут квантовые числа токов в алгебре Ли, и поэтому их называют переносчиками калибровочного взаимодействия или калибровочными бозонами.

Из калибровочной гипотезы следует, что калибровочными бозонами электрослабой теории являются заряженные  $W^\pm$ -бозоны и пара нейтральных токов:  $Z$ -бозоны и  $A$ -бозоны (фотоны). Поэтому процессы на рис. 2.12 с заряженными токами отвечают распространению  $W^\pm$ , а нейтральный слабый ток распространению  $Z$ -бозона.

Важно подчеркнуть, что, поскольку калибровочные бозоны слабого взаимодействия обладают изоспином  $T = 1$ , т.е. несут слабый заряд, они также взаимодействуют друг с другом за счет слабого взаимодействия: лестничные генераторы алгебры Ли изменяют собственные значения генераторов подалгебры Картана на базисе состояний и в присоединенном представлении, а нейтральный ток переводит базисные состояния в самих себя. Это называют самодействием калибровочных частиц. Пространственновременную структуру калибровочных взаимодействий рассматривают в рамках группы непрерывных изометрий пространства-времени Минковского.

Группа квантовой хромодинамики  $SU_c(3)$  описывает 8 калибровочных векторных частиц, которые называют глюонами. Глюоны также обладают самодействием, что в общем случае обусловлено, как мы теперь понимаем, неабелевым характером группы калибровочной симметрии.

## 14.3 Symmetries of Elliptical Orbits According to Kiselev

(вдаль унесу потом, это вряд ли нужно, пока тут)

### 14.3.1 1. Symmetry in the Hydrogen Atom

Сохраняющийся вектор от центра кулоновского потенциала до второго фокуса эллипса финитной орбиты, связь длины вектора с эксцентриситетом. Связь генераторов симметрии со скобками Пуассона физических величин, отвечающих собственным значениям этих генераторов на полях амплитуды вероятности траектории, пример скобок Пуассона для момента импульса, скобки Пуассона вектора Рунге-Ленца-Лапласа и  $SO(4)$  симметрия финитных кулоновских орбит. Связь значений инвариантов Казимира из условия плоского движения, вычисление квадратичного оператора Казимира в терминах энергии, импульса, координат и орбитального момента частицы, главное квантовое число, орбитальное квантовое число и степень вырождения уровней энергии атома водорода.

#### 1.1 Runge-Lenz-Laplace vector

Для кулоновского потенциала притяжения или в задаче Кеплера движение происходит по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр потенциала 1. Орбита замкнута, а значит, эллипс сохраняет свое положение со временем. Это свойство является нетривиальным, поскольку оно позволяет воспользоваться свойствами эллипса и построить дополнительный интеграл движения.

В самом деле, используем тот факт, что любой луч, посланный из фокуса эллипса, после зеркального отражения от кривой эллипса пройдет через второй фокус и сумма длин луча от фокуса до кривой эллипса  $r$  до отражения и от кривой до второго фокуса  $r'$  после отражения - это постоянная величина  $r + r' = 2a$ , где  $a$  - длина той полуоси эллипса, на линии которого расположены фокусы (см. рис. 3.1. в дальнейшем мы полагаем, что центр потенциала расположен в правом фокусе). Поскольку определяющая линию зеркального отражения касательная к эллипсу в точке траектории параллельна импульсу, разложим радиус-вектор частицы на ортогональную к импульсу часть  $\mathbf{r}_\perp$  и параллельный импульсу вклад  $\mathbf{r}_\parallel$  :



$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{p^2}, \quad \mathbf{r}_\parallel = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{p^2}$$

После зеркального отражения поперечная часть сменит знак, а продольный вклад не изменится, т.е.

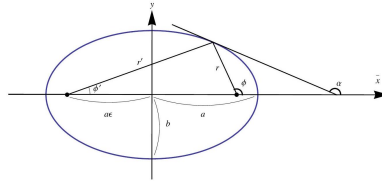


Рис. 3.1: Эллипс: фокусы обозначены точками, показаны касательная под углом  $\alpha$ , полуоси  $a$  и  $b$ , расстояние сдвига фокуса от центра эллипса  $a\epsilon$ , а также полярные углы в фокусах  $\phi$  и  $\phi'$ . мы получим вектор той же длины  $r$

$$\mathbf{r}'' = -\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp$$

Значит, согласно свойствам эллипса единичный вектор, полученный при отражении радиус-вектора, исходящего из правого фокуса в точку на траектории,

$$\frac{\mathbf{r}''}{r}$$

направлен от точки на траектории во второй, левый фокус эллипса. Значит, если умножить этот единичный вектор на величину  $2a - r$  и получить вектор

$$\mathbf{r}' = (2a - r) \frac{\mathbf{r}''}{r} = \frac{2a - r}{r} (\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp)$$

то сумма длин  $r + r' = 2a$ , как это должно быть для суммы длин от точки на траектории до двух фокусов эллипса, и, следовательно, вектор  $\mathbf{r}'$  в точности соединяет точку на траектории со вторым фокусом эллипса. Поэтому суммарный вектор

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' = \mathbf{r} \frac{2a}{r} + 2\mathbf{r}_\perp \left(1 - \frac{2a}{r}\right)$$

соединяет правый фокус эллипса с левым (см. рис. 3.1) и поэтому имеет длину  $2a\epsilon$ . Безразмерный вектор

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2a} (\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}_\perp}{a} \left(1 - \frac{2a}{r}\right)$$

называют вектором Рунге-Ленца-Лапласа. Он сохраняется при движении в поле притяжения кулоновского типа.

Покажем, что вектор Рунге-Ленца-Лапласа выражается через переменные фазового пространства задачи. Для этого проведем преобразования, заметив, что

$$\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} = \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = p^2 \mathbf{r} - \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = p^2 \mathbf{r}_\perp$$

Кроме того, в кулоновском поле притяжения с зарядом  $Q = -|Z|e$

<sup>1</sup> В данной главе при рассмотрении параметров движения в кулоновском поле притяжения и в потенциале изотропного гармонического осциллятора мы полагаем, что читатель уже довольно подробно изучил траектории в этих двух случаях, например, в объеме, который представлен в книге [1]. Поэтому ли пользуемся такими знаниями, формулируя некоторые положения как известную данность.

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} \Rightarrow \mathbf{p}^2 = -2m|E| \left(1 - \frac{|Z|e^2}{|E|r}\right)$$

так как  $E = -|E| < 0$ , и полуось

$$a = \frac{|Z|e^2}{2|E|}$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_\perp = -\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{a}{|Z|e^2 m} \left(1 - \frac{2a}{r}\right)^{-1}$$

В итоге, сохраняющийся вектор Рунге-Ленца-Лапласа принимает стандартный вид

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{1}{|Z|e^2 m}$$

Согласно связи параметров эллипса, по которому движется частица в кулоновском поле притяжения (см. рис. 3.1), длина вектора  $\mathcal{B}$  задается эксцентриситетом  $\epsilon$ , поскольку расстояние между фокусами эллипса равно  $2a\epsilon$ , а  $|\mathcal{B}| = |\mathbf{r} + \mathbf{r}'|/(2a) = 2a\epsilon/(2a)$ :

$$\mathcal{B}^2 = \epsilon^2 = 1 - \frac{2m|E|}{Z^2 e^4 m^2} \ell^2$$

В рамках классической механики сохраняющиеся величины являются генераторами канонических преобразований координат и импульсов гамильтоновой системы, при которых действие физической системы остается инвариантом. В свою очередь инвариантность действия физической системы согласно теореме Нётер отвечает сохранению наблюдаемых величин, которые совпадают с теми, которые мы определили в качестве генераторов преобразований. Таким образом, имеет место симметрия действия физической системы, при которой экстремуму действия отвечает целое семейство траекторий системы. Важно установить, какая алгебра Ли связана с такими преобразованиями симметрии. Если это удастся сделать, то теория представлений групп Ли позволит определить характеристики физической системы, которые следуют из ее симметрии.

## 1.2 Poisson brackets and symmetry SO(4)

Опишем, как величины классической механики связаны с операторами, которые действуют в пространстве квантовых состояний, а затем покажем, что соотношения гамильтоновой механики для сохраняющихся классических величин связаны с группой симметрии квантовых состояний, а именно, установим алгебру и группу Ли, отвечающую сохранению момента количества движения и вектора Рунге-Ленца-Лапласа в задаче о замкнутых орбитах финитного движения в кулоновской задаче притяжения. Тогда групповые характеристики неприводимых представлений группы позволят нам вычислить инварианты Казимира и установить их связь с физической наблюдаемой - энергией движения. Поэтому дискретный спектр собственных значений операторов Казимира определит и дискретный спектр квантовых состояний в задаче об атоме водорода.

Генераторы группы трансляций  $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$  и поворотов  $\hat{\mathbf{l}} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ , действующие на поля и  $\Psi$ -функции квантовых состояний, связаны с импульсом и моментом импульса:

$$\hbar \hat{\mathbf{k}} = -i\hbar \nabla \mapsto \hat{\mathbf{p}}, \quad \hbar \hat{\mathbf{l}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \mapsto \hat{\boldsymbol{\ell}}$$

с помощью постоянной Планка с чертой (см. изложение фейнмановской формулировки механики в книге [1, которому следуем в этой главе). В частности, действие этих операторов на амплитуду вероятности траектории с заданным импульсом

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \right\}$$

дают как раз значения этих наблюдаемых:

$$-i\hbar \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \Psi_{\mathbf{p}}, \quad -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\ell} \Psi_{\mathbf{p}}$$

в силу уравнений Гамильтона-Якоби и связи амплитуды с действием

$$S = -i\hbar \ln \Psi$$

Подчеркнем, что амплитуда вероятности обнаружить частицу с определенным значением импульса  $\mathbf{p}$  в точке с координатами  $\mathbf{r}$ , т.е.  $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$  - это волна де Бройля, так что собственное значение оператора импульса  $\hat{\mathbf{p}}$  и оператора момента количества движения  $\hat{\boldsymbol{\ell}}$  принимают вещественные значения благодаря тому, что в их определение, как генераторов преобразований, включена мнимая единица.

Дирак обратил внимание на то, что скобки Пуассона физических величин  $F$  и  $G$ , которые определены в фазовом пространстве гамильтоновой механики <sup>2</sup> и являются генераторами канонических преобразований, совпадающих с групповыми преобразованиями, действующими в пространстве полей и  $\Psi$ -функций, с генераторами  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$ , связаны с коммутаторами соответствующих этим величинам генераторов  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  простым соотношением

$$i\hbar \{F, G\}_P = [\hat{F}, \hat{G}], \quad \text{если} \quad \hbar \hat{f} \mapsto F, \quad \hbar \hat{g} \mapsto G.$$

В самом деле, добавляя сюда еще и соответствие для координат  $\hat{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{r}$ , найдем, что

$$\{r^\alpha, p_\beta\}_P = \delta_\beta^\alpha, \quad [\hat{r}^\alpha, -i\hbar \nabla_\beta] \Psi = i\delta_\beta^\alpha \Psi, \quad \forall \Psi \Rightarrow [\hat{r}^\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar \delta_\beta^\alpha$$

Пользуясь декартовыми координатами, в которых можно отождествить верхние, контравариантные и нижние, ковариантные индексы тензорных величин, вычислим скобки Пуассона для момента количества движения

$$\begin{aligned} \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_P &= \{\epsilon_{\alpha\mu\nu} r_\mu p_\nu, \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} p_{\nu'}\}_P = \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{r_\mu p_\nu, r_{\mu'} p_{\nu'}\}_P = \\ &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} \left\{ \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial r_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial p_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial r_\gamma} \right\} = \\ &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{ \delta_{\mu\gamma} p_\nu r_{\mu'} \delta_{\nu'\gamma} - r_\mu \delta_{\nu\gamma} \delta_{\mu'\gamma} p_{\nu'} \} = \\ &= \epsilon_{\alpha\gamma\nu} \epsilon_{\beta\mu'\gamma} p_\nu r_{\mu'} - \epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\nu'} r_\mu p_{\nu'} = \\ &= -\delta_{\alpha\beta} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + r_\alpha p_\beta + \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r_\beta p_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} r_{\alpha'} p_{\beta'} = \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \end{aligned}$$

$$\{F, G\}_P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial r^\alpha}$$

что можно сравнить с коммутатором генераторов группы поворотов

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{l}_\gamma \quad \text{или} \quad [\ell_\alpha, \ell_\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma.$$

<sup>2</sup> В качестве напоминания приведем определение скобки Пуассона для  $F = F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  и  $G = G(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ :

Другими словами, вычисляя скобки Пуассона физических величин, мы определяем коммутационные соотношения для генераторов преобразований, связанных с этими наблюдаемыми, на полях амплитуд вероятности траекторий, в то время как коммутаторы генераторов задают группу Ли непрерывных преобразований в системе. Более того, если рассматривать сохраняющиеся величины в качестве генераторов бесконечно малых канонических преобразований, то эти преобразования отвечают симметрии физической системы.

Например, в центрально симметричном потенциале сохраняется момент количества движения  $\ell$ , а скобки Пуассона компонент вектора  $l$  отвечают коммутаторам группы поворотов, т.е. группа генераторов является группой симметрии системы, если наблюдаемые, отвечающие этим генераторам, сохраняются.

Найдем скобки Пуассона для сохраняющихся векторов в кулоновском поле притяжения, т.е. для момента импульса и вектора Рунге-Ленца-Лапласа. Эти скобки будут определять алгебру генераторов группы симметрии этой системы. Вектор Рунге-Ленца-Лапласа перепишем в виде, симметризованном относительно перестановок местами физических величин, скобки Пуассона которых не равны нулю  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{p} \times \ell - \ell \times \mathbf{p}) \frac{1}{|Z|e^2 m},$$

поскольку

$$\{p_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma$$

Тогда

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{B}_\gamma$$

так как  $\mathcal{B}$  - вектор, и при поворотах он имеет стандартный коммутатор с генераторами поворотов.

Задача 35. Вычислите скобки Пуассона  $\{\mathcal{B}_\alpha, \ell_\beta\}_P$  и  $\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_P$

Прямые вычисления устанавливают, что

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_P = -2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma \frac{E}{|Z|^2 e^4 m}$$

где

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} = \text{const.}$$

в силу закона сохранения энергии. Значит, если ввести векторы

$$\mathbf{u} = \mathcal{B} \sqrt{ma|Z|e^2}$$

то их скобки Пуассона

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \{u_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma$$

Введем вектора

$$\mathbf{j}^{(\pm)} = \frac{1}{2}(\ell \pm \mathbf{u})$$

для которых имеют место скобки Пуассона

$$\left\{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(+)}\right\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(+)}, \quad \left\{j_\alpha^{(-)}, j_\beta^{(-)}\right\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(-)}, \quad \left\{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(-)}\right\}_P = 0$$

что при свертке с полностью антисимметричным символом Леви-Чивиты и дает выражение

$$(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\beta \ell_\gamma \mapsto \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} (p_\beta \ell_\gamma + \ell_\gamma p_\beta) = (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{p})_\alpha$$

Это означает, что соответствующие им генераторы реализуют алгебру симметрии  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ , которая изоморфна алгебре  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ , так как  $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$ .

Покажем, что алгебра генераторов отвечает алгебре группы поворотов 4-мерного евклидова пространства  $SO(4)$ . В пространстве размерности больше трех естественно описывать поворот не в терминах оси поворота, ортогональной плоскости, в которой происходит поворот, как это наглядно вводится в трехмерном пространстве, а в терминах самой плоскости поворота, когда маркером генератора поворота выступает не индекс оси поворота, а две оси в плоскости, например, повороту от оси  $x$  к оси  $y$  в плоскости  $(x, y)$  соответствует генератор  $\ell_{xy}$ . Итак, сначала обратимся к алгебре поворотов в 3-мерном евклидовом пространстве, которую сформулируем в терминах тензора поворотов

$$l_{\alpha\beta} = r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha, \quad l_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{\overline{1, 3}\}$$

в точном соответствии с описанной процедурой: генератор поворота вокруг оси  $z$  - это генератор поворота от оси  $x$  к оси  $y$ ,  $\ell_{xy} = \epsilon_{xyz} \ell_z = \ell_z$ .

Скобка Пуассона генераторов  $l_{\alpha\beta}$  легко вычисляется

$$\{l_{\alpha\beta}, l_{\alpha'\beta'}\}_P = g_{\alpha\alpha'} l_{\beta\beta'} + g_{\beta\beta'} l_{\alpha\alpha'} - g_{\alpha\beta'} l_{\beta\alpha'} - g_{\beta\alpha'} l_{\alpha\beta},$$

где  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  - метрика евклидова пространства в декартовых координатах. Скобки Пуассона в виде (III.1.12) эквивалентны стандартным скобкам Пуассона орбитального момента  $\ell$  [см. (III.1.5)]. Теперь легко записать обобщение генераторов поворотов на случай 4-мерного евклидова пространства:

$$l_{\mu\nu} = r_\mu p_\nu - r_\nu p_\mu, \quad \{\mu, \nu\} \in \{\overline{1, 4}\}$$

с такими же выражениями для скобок Пуассона:

$$\{l_{\mu\nu}, l_{\mu'\nu'}\}_P = g_{\mu\mu'} l_{\nu\nu'} + g_{\nu\nu'} l_{\mu\mu'} - g_{\mu\nu'} l_{\nu\mu'} - g_{\nu\mu'} l_{\mu\nu}$$

Если ввести в трехмерном подпространстве те же величины  $l_{\alpha\beta}$ , что эквивалентно  $\ell_\gamma$ , и в дополнение к ним трехмерный вектор  $u_\alpha = l_{\alpha 4}$ , то из (III.1.14) нетрудно получить скобки Пуассона в виде

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma$$

что совпадает с выражениями (III.1.5) и (III.1.10), которые были получены чуть выше для орбитального момента и вектора Рунге-Ленца-Лапласа в задаче финитного движения в кулоновском потенциале, а значит, построенная алгебра генераторов симметрии в задаче

<sup>3</sup> При переходе от классических величин к операторам необходимо сопоставлять составным физическим величинам операторы с исключительно вещественными собственными значениями, т.е. эрмитово самосопряженные операторы. В данном случае это легко достигается простой перестановкой величин, скобка Пуассона которых отлична от нуля:

$$p_\beta \ell_\gamma \mapsto \frac{1}{2} (p_\beta \ell_\gamma + \ell_\gamma p_\beta)$$

о финитных траекториях в кулоновском поле притяжения - это алгебра группы  $SO(4)$ , группы поворотов в шести плоскостях 4-мерного евклидова пространства.

Итак, вырождение финитного движения в кулоновском потенциале в виде замкнутости любой орбиты отвечает группе симметрии  $SO(4)$ .

### 1.3 Representations of the algebra $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ и уровни атома водорода

Замкнутые траектории движения в кулоновском поле притяжения, которые отвечают финитному движению, реализуют не все представления этой группы, а только те из них, что отвечают  $\left(\hat{j}^{(+)}\right)^2 = \left(\hat{j}^{(-)}\right)^2$ , поскольку движение - плоское, а значит,  $\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{u} = 0$  и  $(\boldsymbol{\ell} \pm \mathbf{u})^2 = \ell^2 + u^2$ . Покажем, что собственные значения операторов Казимира группы симметрии, которые ограничены допустимыми дискретными значениями, задают энергию на траектории, а значит, и энергия принимает дискретный набор значений, который называют спектром энергии.

Переход к представлению алгебры генераторов, т.е. к матрицам в векторном пространстве представления, осуществляется, прежде всего, путем введения операторов, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям, полученным из скобок Пуассона. В случае финитного движения в кулоновском поле притяжения речь идет о (III.1.11) и, следовательно, о коммутаторах

$$\left[\hat{j}_\alpha^{(+)}, \hat{j}_\beta^{(+)}\right] = i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{j}_\gamma^{(+)}, \quad \left[\hat{j}_\alpha^{(-)}, \hat{j}_\beta^{(-)}\right] = i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{j}_\gamma^{(-)}, \quad \left[\hat{j}_\alpha^{(+)}\hat{j}_\beta^{(-)}\right] = 0$$

Спектр собственных значений для полного набора наблюдаемых  $\hat{\mathbf{j}}^2$  и  $\hat{j}_z$  в алгебре  $\mathfrak{su}(2)$  нам хорошо известен:

$$\hat{j}^2 = \hbar^2 j(j+1), \quad \hat{j}_z = \hbar m, \quad m \in \{\overline{-j}, j\}$$

При этом, как мы уже подчеркнули, для нашего случая реализуются только представления

$$\left(\hat{j}^{(+)}\right)^2 = \left(\hat{j}^{(-)}\right)^2 = \hbar^2 j(j+1), \quad j = \frac{1}{2}k, \quad k \in \{0, \mathbb{N}\}$$

С другой стороны, эти собственные значения определяются в терминах операторов, в которые входит собственное значение энергии финитного движения, что в квантовой случае отвечает уровням энергии связанных состояний. В самом деле, запишем оператор  $\hat{\mathcal{B}}$  в виде

$$\hat{\mathcal{B}} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\boldsymbol{\ell}} - \hat{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{|Z|e^2m} = \frac{\mathbf{r}}{r} - (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\boldsymbol{\ell}} - i\hbar\hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{|Z|e^2m},$$

где мы воспользовались значением коммутатора импульса с моментом

$$\left[\hat{p}_\gamma, \hat{\ell}_\beta\right] = i\hbar\epsilon_{\beta\gamma\alpha_1}\hat{p}_{\alpha_1}$$

и связью

$$(\hat{\boldsymbol{\ell}} \times \hat{\mathbf{p}})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\ell}_\beta\hat{p}_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\hat{p}_\gamma\hat{\ell}_\beta + i\hbar\epsilon_{\beta\gamma\alpha_1}\hat{p}_{\alpha_1}\right) = -(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\boldsymbol{\ell}})_\alpha + 2i\hbar\hat{p}_\alpha$$

При вычислении квадрата оператора  $\hat{\mathcal{B}}$  возникнут отличные от классических вклады. Поэтому аккуратно учтем все члены. Например,

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\boldsymbol{\ell}})^2 = \hat{p}_\alpha\hat{\ell}_\beta\hat{p}_\alpha\hat{\ell}_\beta - \hat{p}_\alpha\hat{\ell}_\beta\hat{p}_\beta\hat{\ell}_\alpha = \hat{p}_\alpha\hat{\ell}_\beta\hat{p}_\alpha\hat{\ell}_\beta$$

поскольку  $\hat{\ell}_\beta \hat{p}_\beta = \hat{\ell} \cdot \hat{\mathbf{p}} = 0$  (движение в плоскости, ортогональной орбитальному моменту). Далее,

$$\hat{p}_\alpha \hat{\ell}_\beta \hat{p}_\alpha \hat{\ell}_\beta = \hat{\mathbf{p}}^2 \hat{\ell}^2 + \hat{p}_\alpha i\hbar \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \hat{p}_\gamma \hat{\ell}_\beta = \hat{\mathbf{p}}^2 \hat{\ell}^2$$

и мы приходим к классическому выражению. Однако, перекрестный член со смешанным произведением

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) = (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{p}} + (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\ell} = (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

содержит вклады

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{p}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{p}_\alpha \left( \hat{p}_\gamma \hat{\ell}_\beta + i\hbar \epsilon_{\beta\gamma\alpha_1} \hat{p}_{\alpha_1} \right) = 2i\hbar \hat{\mathbf{p}}^2.$$

Следовательно,

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell} - i\hbar \hat{\mathbf{p}})^2 = \hat{\mathbf{p}}^2 \hat{\ell}^2 + \hbar^2 \hat{\mathbf{p}}^2$$

Аналогично можно найти, что

$$\frac{1}{r}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{r} = \frac{2}{r}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{1}{r}(-i\hbar)(\nabla \cdot \mathbf{r}) - i\hbar(\mathbf{r} \cdot \nabla) \frac{1}{r} = \frac{2}{r}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}) - 2i\hbar \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) + (\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\ell}) \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r}(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\ell} + \{-\hat{\ell} \times \hat{\mathbf{p}} + 2i\hbar \hat{\mathbf{p}}\} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \hat{\ell}^2 + i\hbar \frac{2}{r}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{4\hbar^2}{r}.$$

Приводя подобные слагаемые, находим

$$\hat{\mathcal{B}}^2 = 1 + \frac{2}{Z^2 e^4 m} \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} \right) \hat{\ell}^2 + \frac{\hbar^2}{Z^2 e^4 m^2} \left( \hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{2|Z|e^2 m}{r} \right) = 1 + \frac{2E}{Z^2 e^4 m} \hat{\ell}^2 + \frac{2\hbar^2 E}{Z^2 e^4 m}.$$

В (III.1.18) можно выделить классический и квантовый вклады в явном виде по наличию фактора  $\hbar^2$ . В итоге мы вычислили квадрат оператора

$$\hat{\mathbf{u}}^2 = \hat{\mathcal{B}}^2 \frac{Z^2 e^4 m}{2|E|} = \frac{Z^2 e^4 m}{2|E|} - \hat{\ell}^2 - \hbar^2$$

а значит,

$$\frac{1}{4}(\hat{\ell}^2 + \hat{\mathbf{u}}^2) = \frac{1}{4} \left( \frac{Z^2 e^4 m}{2|E|} - \hbar^2 \right).$$

Но поскольку

$$\hbar^2 j(j+1) = \frac{1}{4}(\hat{\ell}^2 + \hat{\mathbf{u}}^2)$$

находим, что

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m}{2\hbar^2} \frac{1}{(2j+1)^2}$$

Введем главное квантовое число  $n = 2j + 1$  и постоянную тонкой структуры

$$\alpha_{\text{em}} = \frac{e^2}{\hbar c}$$

где  $c$  - скорость света, так что спектр водородоподобного атома с ядром, которое имеет заряд  $-Z$  в единицах заряда электрона, задается формулой

$$E = -\frac{Z^2}{2n^2}mc^2\alpha_{\text{em}}^2$$

Выражение (III.1.21) было получено Вольфгангом Паули в рамках матричной квантовой механики и опубликовано за 10 дней до выхода в свет статьи Эрвина Шредингера с тем же результатом, полученным уже в волновой механике из уравнения Шрёдингера.

Мы показали, что спектр энергии в атоме водорода может быть установлен в результате рассмотрения группы симметрии финитного движения в кулоновском поле притяжения.

Укажем также допустимые значения орбитального момента. Поскольку

$$\hat{\ell} = \hat{j}^{(+)} + \hat{j}^{(-)}$$

орбитальный момент вычисляется как сумма двух моментов. Поэтому орбитальный момент может принимать значения в пределах  $4^4$

$$\ell \in [|j^{(+)} - j^{(-)}|, j^{(+)} + j^{(-)}]$$

с шагом, равным единице,  $\Delta\ell/\hbar = 1$ . Но так как реализуются только представления с  $j^{(+)} = j^{(-)} = \hbar j$ , а  $2j = n - 1$ , находим, что

$$\frac{1}{\hbar}\ell \in [0, n - 1], \quad \frac{1}{\hbar}\Delta\ell = 1.$$

При этом, энергия уровней зависит только от главного квантового числа, и следовательно, можно вычислить вырождение уровня энергии по проекциям орбитального момента как сумму арифметической прогрессии для  $2\ell + 1$  возможных проекций при заданном  $\ell$ ,

$$K = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = \frac{1}{2}n(1 + 2(n - 1) + 1) = n^2$$

Интересно, что такой групповой вывод спектра атома водорода поднимает вопрос о природе пространства представлений группы симметрии. На этот вопрос дал ответ Э.Шредингер, а именно, он установил соответствие матричной квантовой механики и волновой механики: матричные представления действуют в гильбертовом пространстве квантовых состояний, которые можно описывать и волновыми функциями. До появления волновой механики авторы матричной квантовой механики Вернер Гейзенберг, Макс Борн и Паскуаль Йордан обратились к Давиду Гильберту с вопросом, в каких обстоятельствах могут появляться матрицы операторов, на что Гильберт сказал, что для этого нужно иметь волновое уравнение, имеющее дискретный базис решений, которые и будут определять действие операторов в подобном базисе. Такой ответ однако поставил в тупик создателей матричной механики, поскольку они полагали, что квантовые скачки с уровня на уровень, которые наблюдались экспериментально в виде спектров излучения и поглощения в парах водорода и других газов, никак не могут описываться непрерывным волновым уравнением. Как видим, недоверие к опыту Гильберта лишило их возможности найти решение вопроса о пространстве представлений матричной механики. Подчеркнем, что и сам создатель волновой квантовой механики Э.Шредингер весьма скептически относился к описанию квантовых скачков своим волновым уравнением, в чем находил поддержку у таких титанов квантовой физики как Макс Планк и Альберт Эйнштейн. Только идея Макса Борна о



том, что волновое уравнение описывает не материальное поле, а амплитуду вероятности обнаружить физическую систему в квантовом состоянии, позволяет разрешить логические проблемы волнового уравнения в квантовой механике, но именно эту интерпретацию не принимали ни Шредингер, ни Планк, ни Эйнштейн, что весьма удручало Нильса Бора.

### 14.3.2 Isotropic harmonic oscillator in 3D

#### Abstract

Эволюция изотропного гармонического осциллятора в терминах комплексных векторов в фазовом пространстве, группа  $SU(3)$  как матричная группа инвариантности эволюции трехмерных фазовых векторов, матрицы Гелл-Манна. Сохранение полуосей эллипса и тензор второго ранга, разложение тензора на синглет, вектор и квинтет по группе поворотов, разложение тензора на синглет и октет по группе  $SU(3)$ . Переход от скобок Пуассона к коммутаторам наблюдаемых, вычисление квадратичного инварианта Казимира и спектр энергии изотропного осциллятора, число состояний и невырожденность вакуума, действие амплитуды колебаний на состояние с наименьшей энергией, ограничение на неприводимые представления группы симметрии изотропного осциллятора в пространстве, содержащем вакуум, четность главного квантового числа и допустимые значения орбитального момента в неприводимом представлении.

#### 2.1 Complex amplitude of oscillations and group $SU(3)$

При рассмотрении изотропного гармонического осциллятора с собственной частотой  $\omega$  удобно ввести комплексные векторы (3-столбцы)

$$\mathbf{A} = m\omega\mathbf{r} + i\mathbf{p}$$

Уравнения движения для этих векторов с учетом силы  $\mathbf{F} = -\nabla(m\omega^2\mathbf{r}^2/2) = -m\omega^2\mathbf{r}$  могут быть выведены из уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

Они принимают вид  
и легко интегрируются

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m\omega\frac{\mathbf{p}}{m} - im\omega^2\mathbf{r} = -i\omega\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}(t) = e^{-i\omega t}\mathbf{A}_0$$

При этом введение величины как 3-строки

$$\mathbf{A}^\dagger = m\omega\mathbf{r} - i\mathbf{p}$$

позволяет записать гамильтониан в виде

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}$$

откуда сразу видно, что он инвариантен относительно матричной группы преобразований трехмерных комплексных векторов-столбцов, которые сохраняют длину вектора:

<sup>4</sup> Решите эту простую задачу самостоятельно методом построения схем Юнга в группе  $SU(2)$ .

$$\mathbf{A}' = U \cdot \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}')^\dagger \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A}^\dagger U^\dagger \cdot U \mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A},$$

откуда

$$U^\dagger \cdot U = \mathbb{1}$$

Такие матрицы называются унитарными. Взяв детерминант (III.2.6, найдем, что

$$(\det U)^* \det U = 1$$

Среди группы преобразований можно выделить элементарный сдвиг фазы всех компонент вектора  $\mathbf{A}$ , что, согласно (III.2.2, отвечает просто смене начала отсчета времени, а значит, соответствует сдвигу по времени и закону сохранения энергии. Поэтому, если нас интересует дополнительная симметрия, мы можем исключить изменение этой общей фазы в матрице  $U$ , потребовав

$$\det U = 1$$

Итак, мы имеем симметрию унитарных преобразований трехмерных комплексных векторов со специальным условием единичного детерминанта матриц, что обозначают символом группы  $SU(3)$ .

Проиллюстрируем ситуацию на более простом примере группы  $SU(2)$ . Элементы группы  $SU(2)$  при действии в пространстве двумерных спиноров записываются в виде

$$g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\}$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  - матрицы Паули, которые являются эрмитовыми и бесследовыми, а  $\boldsymbol{\phi}$  - вещественные параметры группы, углы поворота. Эрмитовость матриц Паули следует из требования унитарности  $g^\dagger \cdot g = \mathbb{1}$ . Бесследовость матриц Паули является следствием специального условия

$$\det g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\} = 1$$

Число параметров группы  $SU(3)$ ,  $u^a$ , в полной аналогии с рассуждениями для группы  $SU(2)$  определяется числом эрмитовых, бесследовых матриц  $3 \times 3$ , которое равно 8. Базис таких матриц можно выбирать в виде матриц Гелл-Манна  $\lambda^a$ ,  $a \in \{1, 8\}$ , так что

$$U = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u} \right\}$$

причем

$$\text{tr} \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}$$

так же, как у матриц Паули.

В явном виде матрицы Гелл-Манна включают в себя прямые аналоги недиагональных матриц  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  по парам индексов 3-мерного вектора  $A_\alpha$  (в декартовых координатах евклидова пространства не делаем различия между верхними и нижними индексами): по индексам 1 и 2

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

по индексам 1 и 3

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

по индексам 2 и 3

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

а также диагональные матрицы:

аналог  $\sigma_3$  в индексах 1 и 2

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

вместо аналога  $\sigma_3$  в индексах 2 и 3 необходимо ввести диагональную эрмитову матрицу с нулевым следом, которая удовлетворяет условию ортонормированности (III.2.8), так что единственным решением такой задачи является диагональная матрица

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Как и следовало ожидать, лишь две матрицы являются диагональными, т.е. имеют совместный базис собственных векторов, так что ранг группы  $SU(3)$  равен двум, а значит, старший вектор всякого неприводимого представления характеризуется двумя независимыми числами, которые, стало быть, определяют и два независимых оператора Казимира: однородные полинома по генераторам, коммутирующие со всеми генераторами группы. Собственные значения генераторов подалгебры Картана принимают значения из допустимого дискретного набора вещественных чисел, который фиксирован для каждого неприводимого представления группы. Отметим, что по аналогии с матрицами спина можно построить три повышающих и три эрмитово сопряженных к повышающим понижающих матрицы из недиагональных матриц Гелл-Манна.

Коммутационные соотношения для генераторов группы  $SU(3)$  можно получить, вычислив структурные константы в выражениях

$$\left[ \frac{1}{2}\lambda^a, \frac{1}{2}\lambda^b \right] = if^{abc} \frac{1}{2}\lambda^c$$

Константы  $f^{abc}$  приводятся в справочниках.

Итак, преобразование симметрии изотропного гармонического осциллятора в терминах векторов  $\mathbf{A}$ :

$$A'_\beta = U_{\beta\alpha} A_\alpha, \quad U \in SU(3).$$

Это означает, что  $A_\alpha$  - это триплет 3 по  $SU(3)$ , а  $A_\alpha^\dagger$  - антитриплет  $\bar{3}$  по  $SU(3)$ , что заметно упрощает понимание последующих построений.

## 2.2 Fradkin tensor

Все финитные траектории изотропного гармонического осциллятора замкнуты. Траектория движения - эллипс, но в отличие от кулоновского случая, центр притяжения находится не в фокусе, а в центре эллипса. Это значит, что с помощью радиус-вектора и импульса невозможно построить характерный для эллипса вектор, например, соединяющий фокус с фокусом, так как положение обоих фокусов от центра зеркально симметрично. Этот эллипс можно описать направлениями и длинами его полуосей. Однако, опять же, направления по отношению к центру притяжения можно менять на противоположные, от этого эллипс не изменится. Итак у нас есть пара характерных векторов полуосей на плоскости, ортогональной моменту импульса, но направления этих векторов можно менять на противоположные по отношению к центру. Такая ситуация с возможностью смены направления векторов имеет место, если эти векторы собственные для некоторой матрицы. Поскольку эти собственные векторы должны сохраняться при движении, должна сохраняться и сама матрица. Значит, необходимо построить не сохраняющийся вектор, а сохраняющийся тензор второго ранга.

Это можно легко сделать в терминах векторов  $\mathbf{A}$ : построим величину

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha}^{\dagger} A_{\beta}$$

которая является тензором как по группе поворотов, так и по группе  $SU(3)$ , причем в силу уравнений движения  $A_{\alpha}(t) = e^{-i\omega t} A_{\alpha}(0)$  и  $A_{\alpha}^{\dagger}(t) = e^{i\omega t} A_{\alpha}^{\dagger}(0)$  значение тензора не зависит от времени, он сохраняется. При этом по построению в виде тензорного произведения триплета на антитриплет в группе  $SU(3)$   $F_{\alpha\beta} \mapsto \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$  по  $SU(3)$ . След тензора - синглет, т.е. инвариант группы  $SU(3)$ :

$$\text{tr } F = F_{\alpha\alpha} = 2mE.$$

Распишем  $F_{\alpha\beta}$ , выделив антисимметричный вклад

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \{F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}\} = im\omega \{r_{\alpha} p_{\beta} - r_{\beta} p_{\alpha}\} = im\omega \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_{\gamma},$$

и симметричный бесследовый вклад - тензор Фрадкина:

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \{F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}\} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} 2mE = p_{\alpha} p_{\beta} + m^2 \omega^2 r_{\alpha} r_{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} 2mE,$$

так что

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} 2mE + a_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta},$$

и мы получили разложение тензора по неприводимым представлениям группы поворотов  $SO(3)$ :

$$SO(3) : \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{5}$$

где указаны размерности базиса собственных векторов для каждого неприводимого представления. В этом разложении на неприводимые тензоры синглет отвечает сохраняющейся энергии, триплет - сохраняющемуся вектору момента импульса. Для того чтобы прояснить физический смысл квинтета, найдем собственные значения и собственные векторы симметричного тензора Фрадкина

$$S_{\alpha\beta} = p_{\alpha} p_{\beta} + m^2 \omega^2 r_{\alpha} r_{\beta}.$$

Заметим сначала, что поскольку движение плоское

$$S_{\alpha\beta}\ell_\beta = 0$$

т.е. тензор является поперечным. Выберем направление момента импульса в качестве оси  $z : \ell \parallel z$ . Тогда тензор Фрадкина вырождается в тензор на плоскости  $(x, y)$ : все его компоненты с индексом  $z$  обращаются в нуль,

$$S_{\alpha\beta} \mapsto \Sigma = \begin{pmatrix} p_x p_x + m^2 \omega^2 x^2 & p_y p_x + m^2 \omega^2 xy \\ p_y p_x + m^2 \omega^2 xy & p_y p_y + m^2 \omega^2 y^2 \end{pmatrix}$$

Поскольку

$$\det(\Sigma - \lambda) = \lambda^2 - \lambda (\mathbf{p}^2 + m^2 \omega^2 \mathbf{r}^2) + m^2 \omega^2 (xp_y - yp_x)^2 = \lambda^2 - 2mE\lambda + m^2 \omega^2 \ell^2 = 0$$

собственные значения этой матрицы

$$\lambda_{\pm} = mE \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \ell^2}{E^2}} \right) \Rightarrow \lambda_+ = \frac{\ell^2}{a^2}, \quad \lambda_- = \frac{\ell^2}{b^2}$$

где  $a$  и  $b$  - полуоси эллипса по направлениям  $x$  и  $y$ , соответственно. Тогда собственные векторы можно найти, используя сохранение матрицы  $\Sigma$  по времени. А именно, если выбрать момент времени, когда  $y = 0, p_x = 0, p_y = p, x = a, \ell = ap$ , т.е. выбрать эллипс с полуосями по  $x$  и  $y$ , то

$$\Sigma = \begin{pmatrix} m^2 \omega^2 a^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Sigma - \lambda_+ = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а также в силу  $\ell = abm\omega$

$$\Sigma - \lambda_- = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

откуда

$$\mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В итоге, собственные векторы тензора Фрадкина направлены по полуосям траектории вращения - эллипса, а их собственные значения задают обратные квадраты длин полуосей.

Теперь рассмотрим тензор  $F$  в отношении неприводимых представлений группы  $SU(3)$ . Вектор  $A_\alpha$  реализует 3-мерное неприводимое представление, но, в отличие от группы  $SO(3)$  или  $SU(2)$ , для которых комплексно сопряженные представления эквивалентны:  $(2s+1)^* \cong (2s+1)$ , - в группе  $SU(3)$  комплексно сопряженные представления не всегда эквивалентны исходному, например,  $3^* = \bar{3} \not\cong 3$ , т.е. вектор  $A_\beta^\dagger$  реализует независимое представление  $5^5$  При этом разложение по неприводимым представлениям выглядит следующим образом:

$$SU(3) : \quad \bar{3} \otimes 3 = 1 \oplus 8$$

т.е. тензор  $F$  раскладывается на синглет и октет относительно преобразований группы  $SU(3)$ . Очевидно, что синглет, т.е. инвариант, пропорционален единичной матрице, и это

след тензора, т.е. фактически энергия. Что же касается октета, то его можно представить в виде 8-мерного вектора в пространстве параметров группы:

$$F^a = \frac{1}{4m\omega} \lambda_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}.$$

Поскольку матрицы Гелл-Манна бесследовые, след тензора  $F$  не дает вклада в вектор  $F^a$ . Введенный вектор имеет размерность момента импульса, т.е. действия.

Вычисление скобок Пуассона дает

$$\{F^a, F^b\}_P = f^{abc} F^c$$

а значит, сохраняющиеся генераторы, соответствующие  $F^a$ , действительно реализуют октетное представление генераторов группы  $SU(3)$ .

Задача 36. Вычислите скобки Пуассона  $\{F^a, F^b\}_P$ .

Итак, вырождение финитного движения изотропного гармонического осциллятора в виде замкнутости орбиты отвечает группе симметрии  $SU(3)$ .

### 2.3 Views $\mathfrak{su}(3)$ для 3D-осциллятора

Не все представления группы  $SU(3)$  реализуются траекториями движения, поскольку траектория является плоской:  $\ell_\alpha s_{\alpha\beta} \equiv 0$ . Это условие отвечает старшему вектору, одно из квантовых чисел которого в терминах собственных значений двух диагональных генераторов равно нулю. Итак, докажем, что состояния изотропного гармонического 3-мерного осциллятора принадлежат исключительно представлениям типа  $T^{(n,0)}$  или  $T^{(0,n)}$ .

Перейдем к деталям. Прежде всего вычисленные скобки Пуассона для  $F^a$  задают коммутаторы соответствующих операторов

$$[\hat{F}^a, \hat{F}^b] = i\hbar f^{abc} \hat{F}^c$$

так что введем генераторы  $SU(3)$ -симметрии

$$\Gamma_a = \frac{1}{\hbar} \hat{F}^a = \frac{1}{4m\hbar\omega} \hat{A}_\alpha^\dagger \lambda_{\alpha\beta}^a \hat{A}_\beta$$

которые уже удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям группы  $SU(3)$ . Здесь мы, конечно, имеем в виду отождествление  $\hat{\mathbf{p}}^\dagger = \hat{\mathbf{p}}$ .

Затем вычислим квадратичный оператор Казимира - инвариант

$$C_2 = \Gamma_a \Gamma_a$$

используя коммутационные соотношения для ключевых операторов  $\hat{A}_\alpha = m\omega r_\alpha + i\hat{p}_\alpha$ , а именно,

$$[\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\beta] = [\hat{A}_\alpha^\dagger, \hat{A}_\beta^\dagger] = \pm i m\omega ([r_\alpha, \hat{p}_\beta] + [\hat{p}_\alpha, r_\beta]) \equiv 0$$

в силу  $[r_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$ , а также

$$[\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\beta^\dagger] = -i m\omega ([r_\alpha, \hat{p}_\beta] - [\hat{p}_\alpha, r_\beta]) = 2im\hbar\omega\delta_{\alpha\beta}$$

Тогда

$$16m^2\hbar^2\omega^2 C_2 = \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta^\dagger \lambda_{\alpha\beta}^a \lambda_{\alpha'\beta'}^a = \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_{\beta'}^\dagger \left( 2\delta_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\alpha'} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} \right)$$

<sup>5</sup> Мы знаем, что речь идет о двух фундаментальных представлениях группы  $SU(3)$ , которые являются комплексно сопряженными, а именно,  $T^{(1,0)}$  и  $T^{(0,1)}$ .

где мы воспользовались тождеством Фирца для матриц Гелл-Манна (II.4.46). Отсюда

$$16m^2\hbar^2\omega^2 C_2 = 2\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta \hat{A}_\beta^\dagger \hat{A}_\alpha - \frac{2}{3} \left( \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha \right)^2$$

Далее,

$$\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta \hat{A}_\beta^\dagger \hat{A}_\alpha = \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta \left( \hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta^\dagger - 2im\hbar\omega\delta_{\alpha\beta} \right) = \left( \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha \right) \hat{A}_\beta \hat{A}_\beta^\dagger - 2im\hbar\omega \left( \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha \right) = \left( \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha \right) \left( \hat{A}_\beta^\dagger \hat{A}_\beta + 4im\hbar\omega \right)$$

Суммируя, найдем

$$16m^2\hbar^2\omega^2 C_2 = \frac{4}{3} \left( \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha \right)^2 + 8im\hbar\omega \left( \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha \right)$$

Величина  $\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha$  связана с энергией

$$\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha = m^2\omega^2 r^2 + \hat{p}^2 + im\omega \{ \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} \} = 2mE - 3m\hbar\omega$$

Значит, квадратичный инвариант Казимира принимает значения

$$C_2 = \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{3} \left( E - \frac{3}{2}\hbar\omega \right)^2 + \frac{1}{\hbar} \left( E - \frac{3}{2}\hbar\omega \right)$$

что следует сравнить с допустимыми значениями этого инварианта для представления  $T^{(\tilde{n},n)}$  согласно (II.4.57)

$$C_2 = \frac{1}{3} (n^2 + \tilde{n}^2 + n\tilde{n}) + n + \tilde{n}$$

Но это значит, что либо  $\tilde{n} = 0$ , либо  $n = 0$ , а спектр является эквидистантным и зависит от единственного квантового числа,

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{3}{2} \right)$$

так что множество всех состояний с заданной энергией можно обозначить символом  $|n\rangle$ . Состояние с минимальной энергией - вакуум  $|0\rangle$ . В вакууме по общей формуле для неприводимых представлений, скажем,  $T^{(0,n)}$  группы  $SU(3)$  число состояний

$$k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

и, стало быть, вакуум, в котором  $n = 0$ , описывается единственным состоянием  $|0\rangle$ , и

$$\left( E_{\text{vac}} - \frac{3}{2}\hbar\omega \right) |0\rangle = \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha |0\rangle = 0$$

Отсюда следует, что

$$\langle 0 | \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha | 0 \rangle = 0$$

а значит, норма вектора  $|\psi_\alpha\rangle \equiv \hat{A}_\alpha |0\rangle$  тождественно равна нулю, что возможно только в случае, если сам вектор равен нулю, поскольку  $\langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle = \langle 0 | \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\alpha | 0 \rangle$ , откуда

$$\hat{A}_\alpha |0\rangle \equiv 0$$

Это нетривиальное (простое и важное) тождество позволяет однозначно определить неприводимые представления в пространстве, содержащем  $|0\rangle$ , а также допустимые значения орбитального момента в этих представлениях.

В самом деле, в пространстве с вакуумом  $|0\rangle$  представления  $T^{(n,0)}$  исключены, поскольку они получаются действием на вакуум симметричными по перестановкам индексов произведением коммутирующих друг с другом триплетных операторов  $\hat{A}_\alpha$  (см. (III.2.12)), что, конечно, дает тождественный нуль.

Симметризованные бесследовые произведения вида

$$\hat{A}_\alpha^\dagger \hat{A}_\beta + \hat{A}_\beta \hat{A}_\alpha^\dagger - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (\hat{A}_\gamma^\dagger \hat{A}_\gamma + \hat{A}_\gamma \hat{A}_\gamma^\dagger)$$

которые могли бы давать вклад в  $T^{(1,1)}$  при действии на  $|0\rangle$ , например, тоже исключены: с помощью коммутационных соотношений триплетные операторы можно разместить справа, что занулит состояние, а разница, которая возникнет при такой коммутации является синглетом, и в силу нулевого следа также не даст вклада.

Значит, остаются только представления  $T^{(0,n)}$ , которые получаются действием симметризованных по индексам произведений антитриплетных операторов  $\hat{A}_\alpha^\dagger$ , что, конечно, согласуется с вычислением квадратичного инварианта Казимира, которое мы провели выше.

В этой же логике становится совершенно ясно, что представления  $T^{(n,0)}$  описывают ровно те же состояния в сопряженном пространстве, которое содержит сопряженный вакуум  $\langle 0|$ .

Условие плоского движения  $\hat{\ell}_\alpha \hat{A}_\alpha^\dagger = \hat{A}_\alpha^\dagger \hat{\ell}_\alpha = 0$  выполняется для представлений  $T^{(0,n)}$ , поскольку антитриплетные операторы коммутируют, так что оператор с нужным индексом может перемещен влево и его свертка с орбитальным моментом даст нуль.

Наконец установим допустимые значения орбитального момента в представлении  $T^{(0,n)}$ . Для этого подчеркнем, что  $\hat{A}_\alpha^\dagger$  - это не только триплет в группе  $SU(3)$ , но и триплет в группе  $SO(3)$ . Но тогда симметризованные по индексам произведения этих операторов, что необходимо для неприводимости представления  $T^{(0,n)}$ , одновременно включают в себя только представления, симметризованные и в группе  $SO(3)$ , а это означает, что при четном  $n$  допустимы только четные значения орбитального момента  $\ell$  от 0 до  $n$ , а при нечетном  $n$  - только нечетные значения  $\ell$  от 1 до  $n$ .

Факт совпадения четности главного квантового числа  $n$  с четностью допустимых значений орбитального квантового числа имеет вполне ясный физический смысл: гамильтониан и генераторы группы симметрии  $SU(3)$  инвариантны относительно зеркальной инверсии пространства  $\mathbf{r} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\mathbf{r}$ . Отсюда следует, что неприводимое представление группы  $SU(3)$  имеет вполне определенное значение  $P$ -четности. Операторы  $\hat{A}_\alpha^\dagger$  меняют знак при зеркальной инверсии пространства, так что представление  $T^{(0,n)}$  имеет  $P$ -четность, равную  $(-1)^n$ , а значит, допустимы только такие значения орбитального момента,  $P$  четность которых также равна  $(-1)^n$ . Из приведенных выше рассуждений о том, что  $\hat{A}_\alpha^\dagger$  - это не только триплет в группе  $SU(3)$ , но и триплет в группе  $SO(3)$ , сразу следует, что четность состояний с орбитальным моментом  $\ell$  равна  $(-1)^\ell$ . А это значит, что четности  $n$  и  $\ell$  совпадают.

Для примера, при  $n = 2$  представление группы поворотов, симметризованное по индексам двух операторов  $\hat{A}_\alpha^\dagger$  отвечает диаграмме Юнга в группе  $SU(2)$ , алгебра которой изоморфна алгебре  $\mathfrak{so}(3)$ :

$$SU(2): \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \square\square \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline \end{array} = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array}$$

в сумме с переставленными индикаторами  $a$ :

$$SU(2): \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline \end{array} \otimes \square\square = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \right) \otimes \square = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array}.$$



В этих выражениях необходимо учесть смену знака у синглета, прежде чем его вычеркнуть:

$$a = -a,$$

так что последние члены в точности сокращаются, поскольку для симметризованной строки

$$a\Box = \Box a,$$

и в симметризованном тензорном произведении остаются только первый член - квинтет ( $\ell = 2$ ) и второй член - синглет ( $\ell = 0$ ).

Из этого примера ясно, что парные клетки с индикатором необходимо присоединять только парами в одну из строк! А это и означает, что инкремент по орбитальному моменту равен  $\Delta\ell = \pm 2$ , а максимальный  $\ell$  всегда совпадает с  $n$ .

Наконец вычислим размерность представления  $T^{(0,n)}$ , суммируя число проекций  $2\ell + 1$  для всех допустимых значений  $\ell$  при заданном  $n$ . Для четных  $n$  сумма членов арифметической прогрессии

$$k = \sum_{\ell=2k, k=0}^{k=n/2} (2\ell + 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) (1 + 2n + 1) = \frac{1}{2} (n + 1)(n + 2).$$

Для нечетных  $n$  получим тот же результат

$$k = \sum_{\ell=2k+1, k=0}^{k=(n-1)/2} (2\ell + 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{n-1}{2} + 1 \right) (3 + 2n + 1) = \frac{1}{2} (n + 1)(n + 2).$$

Итак, мы убедились, что из группы симметрии изотропного гармонического осциллятора реализуются не все представления, а только состояния  $T^{(0,n)}$ , причем в этом представлении присутствуют все состояния с орбитальным моментом  $\ell \leq n$  той же четности, что и  $n$ .

## 14.4 Magnetic moments of baryons in the quark model

### 14.4.1 1. Tensor product of two irreducible representations of a group of turns

#### Abstract

Задача сложения моментов вращения двух подсистем как разложение тензорного произведения в сумму по неприводимым представлениям группы  $SU(2)$ , схемы Юнга и базис представлений суммарного момента вращения, сложение двух спинов  $1/2$ , коэффициенты Клебша-Гордана и условия отбора по проекции и суммарному моменту вращения, пример сложения моментов вращения триплета и дублета, общая схема построения базиса состояний неприводимого представления суммы двух моментов вращения. Отличие неприводимого тензорного оператора от мультиплета неприводимого представления, матричный элемент неприводимого тензорного оператора и приведенный матричный элемент, теорема Вигнера-Эккарта, правила отбора матричных элементов и правило запрета.

### 1.1 Addition of two moments of motion

Пусть физическая система составлена из подсистем  $A$  и  $B$ , так что квантовые состояния системы - это произведения квантовых состояний этих подсистем, свойства которых по отношению к преобразованиям группы поворотов заданы так, что квантовые состояния подсистем - это неприводимые представления, которые допускают как целые, так и полуцелые значения момента количества движения. Это значит, что мы имеем дело с неприводимыми представлениями группы  $SU(2)$  (см. Главу (2, 3), а квантовые состояния системы - это представления тензорного произведения состояний двух подсистем. Тензорное произведение может быть разложено в прямую сумму подпространств неприводимых представлений группы  $SU(2)$ . Для записи этих неприводимых представлений и их тензорных произведений мы можем использовать схемы Юнга для группы  $SU(2)$ , которые в случае неприводимого представления с моментом вращения, равным  $j$ , представляют собой строку из клеток длиной  $2j$ , т.е. клетки расположены в линию по горизонтали

(!!! вставлю картинку!!)

а синглет - это столбец из двух клеток

Каждую клетку схемы Юнга можно считать соответствующей вектору пространства состояний фундаментального представления группы  $SU(2)$ , т.е. спинору с  $j = \frac{1}{2}$ . И если мы строим базис неприводимого представления пространства, соответствующего рассматриваемой схеме Юнга, то в дираковских обозначениях каждой клетке соответствует одно из базисных состояний фундаментального представления:  $|+\rangle$  или  $|-\rangle$ . Клетки схемы Юнга, т.е. элементы базиса фундаментального представления, в строке симметризованы по номеру фундаментального представления, а клетки в столбце в случае синглета - антисимметризованы. В случае синглета это значит, что ортонормированные базисные состояния фундаментального представления  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$  с проекциями момента вращения на ось  $z$ , равными соответственно  $+\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$ , при антисимметризации по номерам фундаментальных представлений в тензорном произведении

(!!! вставлю картинку!!)

дают следующие варианты

$$\begin{aligned} |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]} - |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]} &= 0 \\ |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} - |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}, \\ |-\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} - |-\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} &= 0. \end{aligned}$$

В итоге единственная отличная от нулевого вектора пространства состояний комбинация - это состояние с суммарным моментом вращения  $j = 0$  и проекцией на ось  $z$ , равной  $^1m = 0$ ,

$$\square = |0, 0\rangle \equiv (|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} - |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

где нормировочный множитель  $1/\sqrt{2}$  мы выбрали так, чтобы состояние было нормировано на единицу. Собственное значение оператора из подалгебры Картана, в данном случае это оператор проекции момента вращения  $j_z^\otimes$ , который действует на тензорном произведении, задается как сумма собственных значений того же оператора подалгебры Картана на собственных состояниях фундаментальных сомножителей в

<sup>1</sup> Читатель самостоятельно может убедиться, что действие повышающего и понижающего операторов, заданных на тензорном произведении, на состояние IV.1.1 приводит к нулю:  $\hat{j}_\pm^\otimes|0, 0\rangle = 0$ , а это значит, что проекция момента вращения равна своему максимальному и минимальному значениям, равному нулю, т.е. и сам момент вращения равен нулю.

тензорном произведении. Поэтому у синглета проекция момента вращения равна нулю, как это и должно быть у состояния с  $j = 0$ .

Для примера и для понимания общей схемы описания решения задачи о сложении моментов вращения рассмотрим две подсистемы с моментом вращения  $j^A = j^B = \frac{1}{2}$  и разложим на неприводимые представления тензорное произведение двух этих дублетов по группе  $SU(2)$ :

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \square \otimes \square = \square \oplus \square = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$$

Три ортонормированных базисных состояния триплета, построенного из состояний фундаментальных представлений, согласно схеме Юнга (две клетки в одну линию по горизонтали) получаются симметризацией всех возможных произведений базисных состояний фундаментального представления:

$$\begin{aligned} |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]} &= |1, +1\rangle \\ (|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} &= |1, 0\rangle, \\ |-\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]} &= |1, -1\rangle \end{aligned}$$

Заметим, что кет-вектора правой стороны равенств промаркированы квантовыми числами оператора Казимира и единственного оператора подалгебры Картана, которые действуют уже на тензорном произведении пространств двух исходных фундаментальных представлений. В записи (IV.1.1) и (IV.1.2) мы установили соответствие базисных состояний неприводимых представлений, составляющих прямую сумму, с суперпозициями произведений исходных базисных состояний в тензорном произведении. Такой переход от исходного базиса тензорного произведения к базису состояний в прямой сумме называют разложением по Клебшу-Гордану, а сами коэффициенты разложения называются коэффициентами Клебша-Гордана. В общем случае эта запись имеет вид

$$|j, m\rangle = \sum_{m^A, m^B} C_{j^A m^A, j^B m^B}^{jm} |j^A, m^A\rangle |j^B, m^B\rangle$$

Коэффициенты Клебша-Гордана  $C_{j^A m^A, j^B m^B}^{jm}$  отличны от нуля, только при

$$m = m^A + m^B$$

и еще при одном условии на значения  $j$ , которое мы установим чуть позже. Ясно также, что число базисных состояний в прямой сумме пространств представлений системы не может измениться и оно равно  $(2j^A + 1)(2j^B + 1)$ .

Поскольку генератор групповых преобразований, который действует на тензорном произведении неприводимых представлений, в математическом определении является прямой суммой тензорных произведений единичных операторов с генератором, который действует на один из тензорных множителей, а в физическом понимании разложение тензорного произведения на сумму неприводимых представлений является задачей сложения моментов количества движения подсистем, то в результате находится суммарный момент вращения для каждого члена в прямой сумме неприводимых представлений. Решение этой задачи позволяет установить свойства базиса составной системы по отношению к действию группы  $SU(2)$ : мы выделяем классы базисных состояний, составляющие пространства с определенным суммарным моментом количества движения.

В рассмотренном примере сложения двух спинов, равных  $\frac{1}{2}$ , суммарный момент вращения триплета равен единице, а синглета - нулю. Заметим, что суммарный момент

вращения, который обозначается как  $j$ , является индексом собственного значения квадратичного оператора Казимира, который на любом неприводимом представлении пропорционален единичному оператору. Поэтому разложение тензорного произведения неприводимых представлений в прямую сумму естественно и неизбежно, если мы говорим о сумме неприводимых составляющих этого тензорного произведения.

Проведем сложение моментов вращения  $j^A = 1$  и  $j^B = \frac{1}{2}$ . В методе схем Юнга получим следующее разложение на неприводимые представления (физически: на мультиплеты состояний, собственных для оператора суммарного квадрата момента вращения) тензорного произведения триплета и дублета:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{2} = \square \otimes \square = \square \oplus \square\square = \square \oplus \square\square = \mathbf{2} \oplus \mathbf{4}.$$

Это значит, что суммарные значения момента вращения равны  $j = \frac{1}{2}$  и  $j = \frac{3}{2}$ . Остается вопрос о вычислении коэффициентов Клебша-Гордана. При  $j = \frac{3}{2}$  решение находится просто, так как схема Юнга указывает на симметричность по перестановкам номеров фундаментальных представлений, а состояние старшего веса

$$\left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} = |1, +1\rangle|+\rangle_{[3]},$$

где мы учли полученные ранее формулы для состояний  $|1, m\rangle$  в виде результата тензорного произведения двух фундаментальных представлений под номерами [1] и [2].

Базисное состояние  $\left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle$  можно получить, либо действуя понижающим оператором

$$j_-^{\otimes} = j_- \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes j_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes j_1$$

на состояние старшего веса в виде тензорного произведения (IV.1.5)

$$\left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]}$$

с учетом того, что  $j_-|+\rangle = |-\rangle$  и стандартного соотношения

$$j_-^{\otimes}|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle \Rightarrow j_-^{\otimes}\left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{3}\left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle,$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= (|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= |1, 0\rangle|+\rangle_{[3]} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + |1, +1\rangle|-\rangle_{[3]} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

либо симметризуя по перестановкам номеров фундаментальных представлений выражение

$$|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]}$$

с учетом нормировки получающейся суперпозиции состояний на единицу. Два оставшихся состояния квартета получают последовательным действием тензорного понижающего оператора. Выражения для базисных состояний с отрицательными значениями проекции суммарного момента вращения можно получить в данном случае также сменой знака всех проекций у уже полученных состояний базиса с положительной проекцией суммарного момента вращения (IV.1.5) и (IV.1.6), однако так бывает не

всегда<sup>2</sup> В этом смысле действие понижающего оператора предпочтительно при вычислениях для физических приложений, так как это согласует фазы состояний в мультиплете.

Базисные состояния с суммарным моментом вращения  $j = 1/2$  по рассматриваемой схеме Юнга после расстановки номеров фундаментальных представлений, т.е. номеров клеток

(!!! вставляю картинку!!)

симметричны по перестановкам состояний фундаментальных представлений с первыми двумя номерами и антисимметричны по перестановкам состояний третьего фундаментального представления с каждым из состояний с первыми двумя номерами. Например, стартуя с состояния

$$|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]}$$

при его симметризации по перестановкам  $[1] \leftrightarrow [2]$  получим<sup>3</sup>

$$|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + \\ + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]}.$$

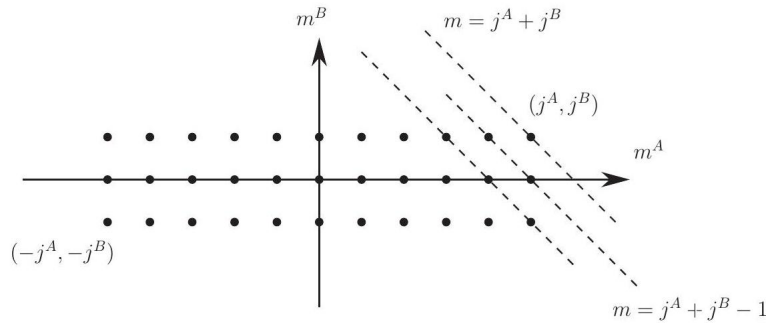


Рис. 4.1: Весовая диаграмма значений на плоскости  $(m^A, m^B)$  с характерными линиями постоянной суммы проекций момента вращения  $m = m^A + m^B$

Антисимметризация этой суперпозиции по перестановкам  $[1] \leftrightarrow [3]$  и  $[2] \leftrightarrow [3]$  приводит к выражению

$$|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]} + \\ + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + \quad - \quad |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]} + \\ + |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - |-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + = +|+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}, \\ + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - |+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}$$

так что учет подобных членов и условие нормировки состояния на единицу дают

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = (|-\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} + |+\rangle_{[1]}|-\rangle_{[2]}|+\rangle_{[3]} - 2|+\rangle_{[1]}|+\rangle_{[2]}|-\rangle_{[3]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \\ = |1, 0\rangle|+\rangle_{[3]} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - |1, +1\rangle|-\rangle_{[3]} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

<sup>2</sup> Имеется в виду то, что фазы базисных состояний неприводимого представления согласованы с фазами, которые возникают при переходе от состояния старшего веса к другим состояниям неприводимого представления при действии понижающим оператором, а простая смена проекций момента вращения в исходных состояниях сомножителей в тензорном произведении может привести к состояниям суммарного момента с другими фазами, например, в виде общего множителя, равного -1

<sup>3</sup>Здесь мы специально пишем сумму в виде столбца, для того чтобы последующая антисимметризация по перестановкам  $[1] \leftrightarrow [3]$  и  $[2] \leftrightarrow [3]$  стала более наглядной.

Сформулируем общие положения для вычисления суммарного момента количества движения составной системы для случая двух подсистем.

С помощью схем Юнга тензорное произведение двух неприводимых представлений с моментами вращения  $j^A$  и  $j^B \leq j^A$  раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений,

$$\underbrace{\square \cdots \square}_{2j^A} \otimes \underbrace{\square \cdots \square}_{2j^B} = \bigoplus_{p=0}^{2j^B} \underbrace{\square \cdots \square}_p \underbrace{\square \cdots \square}_{2(j^A+j^B)-2p}.$$

В этой прямой сумме IV.1.8 суммарный момент вращения в неприводимом представлении группы  $SU(2)$  - это число одинарных клеток, умноженных на  $1/2$ ,

$$2j = 2(j^A + j^B) - 2p$$

а  $2p$  клеток, образующих  $p$  столбцов, которые описывают синглеты, т.е. множители, инвариантные относительно группы  $SU(2)$ , можно просто вычеркнуть при таком подсчете. Это значит, что суммарный момент вращения  $j$  принимает значения

$$0 \leq j^A - j^B \leq j \leq j^A + j^B, \quad \text{с шагом } \Delta j = 1.$$

Шаг между суммарными значениями момента вращения равен единице, так как синглет образован на схеме Юнга двумя клетками в столбце, так что длина строки может уменьшаться и увеличиваться только по две клетки за один шаг в прямой сумме (IV.1.8).

Условия (IV.1.4) и (IV.1.9) называются правилами отбора: они определяют допустимую область квантовых чисел  $m$  и  $j$ , в которой коэффициенты Клебша-Гордана могут быть отличны от нуля; а в противном случае эти коэффициенты заведомо обращаются в нуль.

Построение базиса квантовых состояний с заданным суммарным значением момента вращения системы в общем случае проводится по следующей схеме:

- сначала строится состояние старшего веса для максимального суммарного момента вращения

$$j = j_{\max} = j^A + j^B$$

т.е.  $|j_{\max}, j_{\max}\rangle = |j^A, j^A\rangle |j^B, j^B\rangle \equiv |j^A, j^A; j^B, j^B\rangle$ , которое имеет максимально допустимые значения проекций моментов подсистем  $m^A = j^A$  и  $m^B = j^B$ , а затем действием тензорного понижающего оператора  $j_-^\otimes$  вычисляются все базисные состояния с этим значением суммарного  $j$ ;

- состояние  $|j_{\max}, j_{\max} - 1\rangle$  с проекцией суммарного момента вращения, равной  $m = j^A + j^B - 1$  является суперпозицией двух состояний исходного базиса  $|j^A, j^A - 1; j^B, j^B\rangle$  и  $|j^A, j^A; j^B, j^B - 1\rangle$ , а это значит, что из этих же исходных базисных состояний необходимо построить ортогональную этому состоянию суперпозицию, которая отвечает базисному состоянию с суммарным моментом вращения  $j_{\max} - 1 = j^A + j^B - 1$  и тем же значением проекции, т.е. состояние старшего веса  $|j_{\max} - 1, j_{\max} - 1\rangle$  мультиплета с  $j = j_{\max} - 1$ , и затем с помощью понижающего оператора  $j_-^\otimes$  построить все базисные состояния этого представления; • алгоритм предыдущего пункта необходимо повторить при уменьшении значения проекции суммарного момента вращения на единицу с той лишь разницей, что с каждым шагом по уменьшению значения проекции момента вращения количество базисных состояний, т.е. размерность подпространства с заданной проекцией суммарного момента вращения возрастает на единицу, пока эта проекция не дойдет до значения  $|j^A - j^B| - 1$  (см. рис. 4.1), так что построенные на предыдущем шаге состояния суммарного момента вращения

с рассматриваемой на этом шаге проекцией необходимо дополнить состоянием старшего веса с суммарным моментом, который равен рассматриваемой проекции момента вращения; • каждый получаемый набор состояний с определенным значением момента вращения и есть базис составляющего прямую сумму неприводимого представления, так как значение момента вращения является индексом собственного значения квадратичного оператора Казимира, идентифицирующее неприводимое представление.

Все шаги этой схемы мы описали выше на конкретных простых примерах сложения двух моментов вращения. Ясно также, что схема является алгоритмической, так что ее можно оформить в виде компьютерной программы для вычисления коэффициентов Клебша-Гордана. Поэтому в справочной литературе можно найти таблицы значений коэффициентов Клебша-Гордана для случаев, когда исходные моменты вращения подсистем  $j^A$  и  $j^B$  принимают небольшие ограниченные значения.

## 1.2 Irreducible tensor operators and Wigner-Eckart theorem

Рассмотрим оператор, который переводит состояние одного неприводимого представления в состояние другого неприводимого представления на простейшем примере, когда синглет по группе поворотов  $|0, 0\rangle$  переходит под действием оператора  $T_m^j$  в состояние с моментом вращения  $j$  так, что <sup>4</sup>

$$|0, 0\rangle \xrightarrow{T_m^{(j)}} |j, m\rangle \cdot \tilde{T}$$

где  $\tilde{T}$  - это инвариант группы поворотов, например, число, которое не зависит от значения проекции  $m$ , а в общем случае оператор, который действует на квантовые состояния, зависящие от собственных значений инвариантных наблюдаемых <sup>5</sup> Такой тензорный оператор можно записать в терминах кет- и бра-векторов состояний в виде, который называют стандартным представлением,

$$\hat{T}_m^{(j)} = |j, m\rangle \cdot \tilde{T} \cdot \langle 0, 0|$$

Поскольку при поворотах состояния неприводимого представления преобразуются как

$$\hat{R}|j, m\rangle = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} |j, m'\rangle, \quad \hat{R}|0, 0\rangle = |0, 0\rangle,$$

где  $\mathcal{R}_{mm'}^{(j)}$  - это матрица групповых преобразований, которая имеет размер  $(2j+1) \times (2j+1)$ , и мы подразумеваем суммирование по повторяющемуся индексу  $m'$ , то оператор  $\hat{T}_m^{(j)}$  преобразуется как

$$\hat{R} \cdot \hat{T}_m^{(j)} \cdot \hat{R}^\dagger = \hat{R} \cdot |j, m\rangle \cdot \tilde{T} \cdot \langle 0, 0| \hat{R}^\dagger = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} |j, m'\rangle \cdot \tilde{T} \cdot (\hat{R}|0, 0\rangle)^\dagger = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} |j, m'\rangle \cdot \tilde{T} \cdot \langle 0, 0|,$$

так что в итоге

$$\hat{R} \cdot \hat{T}_m^{(j)} \cdot \hat{R}^\dagger = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \hat{T}_{m'}^{(j)}$$

Это свойство преобразований оператора при поворотах имеет место, только если  $\tilde{T}$  является инвариантом группы поворотов и не зависит от  $m$ . В противном случае матричный закон (IV.1.12, идентичный закону преобразования состояний неприводимого

<sup>4</sup> В этой записи мы не указываем квантовые числа состояния, которые являются инвариантами группы поворотов, т.е. не зависят от действия на состояния операторов группы поворотов.

<sup>5</sup> Например, координатная волновая функция может быть умножена на квадрат длины  $r^2$ , который является инвариантом группы поворотов.

представления группы поворотов не имел бы места. Принято записывать матричный элемент  $\langle j, m | \hat{T}_m^{(j)} | 0, \rangle = \tilde{T}$  в виде

$$\langle j, m | \hat{T}_m^{(j)} | 0, \rangle = \frac{\langle j || \hat{T}^{(j)} || 0 \rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

где числитель называют приведенным матричным элементом, имея в виду, что его значение не зависит от значений проекций моментов у состояний и у самого тензорного оператора.

Коммутаторы тензорного оператора с моментом вращения легко вычисляются по известному результату действия компонент момента вращения на кет- и бра-состояния:

$$\begin{aligned} [j_z, \hat{T}_m^{(j)}] &= m \hat{T}_m^{(j)} \\ [j_{\pm}, \hat{T}_m^{(j)}] &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \hat{T}_{m \pm 1}^{(j)} \end{aligned}$$

Соотношения IV.1.12 и IV.1.13 - закон преобразования и следующие из него коммутационные соотношения - говорят о том, что набор линейных операторов  $\hat{T}_m^{(j)}$  реализует неприводимое представление группы SU(2): коммутаторы задают линейное преобразование в стандартном базисе, аналогичном базису Картана-Вейля присоединенного представления, а преобразование компонент оператора  $\hat{T}_m^{(j)}$  это линейные преобразования в  $(2j+1)$ -мерном пространстве неприводимого представления.

Дадим теперь общее определение неприводимого тензорного оператора, опираясь на свойства, которые мы получили при рассмотрении примера  $2 \frac{6}{6}$

Компоненты неприводимого тензорного оператора  $\hat{T}_m^{(j)}$  образуют неприводимое представление группы SU(2) и в стандартном представлении характеризуются базисом, который помечается значением проекции  $m$  момента количества движения  $j$ , так что при действии элемента группы  $\hat{R}$  стандартные компоненты неприводимого тензорного оператора  $\hat{T}_m^{(j)}$  преобразуются так же, как и все другие неприводимые представления с тем же значением момента,

$$\hat{R}(\hat{T}_m^{(j)}) = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \hat{T}_{m'}^{(j)}$$

где  $\mathcal{R}_{mm'}^{(j)}$  - это та же матрица размером  $(2j+1) \times (2j+1)$ , что и при групповых преобразованиях в пространстве неприводимого представления квантовых состояний:

$$\hat{R}(|j, m\rangle) = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} |j, m'\rangle$$

Несмотря на идентичное определение закона преобразования при действии операторов поворотов на неприводимый тензорный оператор в стандартном представлении  $\hat{T}_m^{(j)}$  в IV.1.14 и на базисное состояние неприводимого представления  $|j, m\rangle$  в IV.1.15 есть существенное различие в свойствах этих объектов, которое связано с наличием у базисных состояний собственных значений наблюдаемых, инвариантных относительно действия операторов поворотов. Разница между квантовыми состояниями  $|j, m\rangle$  с определенным значением момента вращения и его проекции и неприводимым тензорным оператором  $\hat{T}_m^{(j)}$  заключается в том, что умножение состояния  $|j, m\rangle$  на состояние  $|J, M\rangle$  является тензорным произведением состояний, которое раскладывается в прямую сумму по состояниям с определенными значениями суммарного момента вращения так, что базисные состояния суммарного момента вращения раскладываются в сумму тензорного произведения состояний исходных моментов вращения с коэффициентами Клебша-Гордана, в то время как действие неприводимого тензорного оператора  $\hat{T}_m^{(j)}$  на квантовое состояние  $|J, M\rangle$  не сводится к тензорному произведению по



группе поворотов как умножение одного неприводимого представления на состояние другого неприводимого представления с определенным значением момента вращения, так как оператор включает в себя еще и инвариантный оператор типа  $\tilde{T}$ , т.е. преобразование, которое затрагивает инвариантные квантовые числа состояния, не имеющие отношения к универсальной накрывающей группы поворотов, в которой возможны полупелые значения момента вращения, т.е. к группе  $SU(2)$ . Мы уже упоминали пример такого инвариантного оператора: если  $\tilde{T}$  - это длина радиус-вектора  $r$ , а состояние - это координатная волновая функция, то умножение этой волновой функции на инвариант  $r$  не изменяет свойства волновой функции относительно группы поворотов, но это умножение не сводится к какому-либо коэффициенту Клебша-Гордона, т.е. к умножению на число. Это значит, что у квантового состояния полный набор наблюдаемых определяет базис  $|J, M, A\rangle$ , где мультииндекс  $A$  маркирует собственные значения наблюдаемых, которые остаются инвариантными при действии группы  $SU(2)$ . Допустимые значения  $A$  не зависят от проекции момента вращения  $M$ , но могут зависеть от инварианта группы  $SU(2)$ , т.е. от  $J$ . Поэтому в тензорном произведении  $|J, M, A\rangle \otimes |J', M', A'\rangle$ , которое определяет свойства преобразований квантовых состояний составной системы, построенной из подсистем  $A$  и  $A'$ , разложение в прямую сумму неприводимых представлений суммарного момента вращения не зависит от инвариантов  $A$  и  $A'$ , как мы это и рассматривали в предыдущем параграфе. Поэтому коэффициенты Клебша-Гордана не зависят от  $A$  и  $A'$ , и эти инварианты не указываются в выражениях для коэффициентов Клебша-Гордана.

Действие же неприводимого тензорного оператора на состояние с определенным моментом вращения  $J$  и его проекцией  $M$  приводит к суперпозиции состояний, где могут изменяться квантовые числа инвариантов  $A$ :

$$\hat{T}_m^{(j)}|J, M, A\rangle = \sum_{J', M', A'} C_{JMA}^{j m} (J', M', A') |J', M', A'\rangle$$

Тем не менее, зададимся вопросом о том, что можно сказать о преобразованиях элементом группы поворотов результата действия неприводимого тензорного оператора на квантовое состояние с определенными значениями момента вращения и его проекции, т.е. о вычислении

$$\hat{R} \left( \hat{T}_m^{(j)} |J, M, A\rangle \right)$$

Поскольку в пространстве квантовых состояний действуют линейные операторы, которые переводят суперпозицию квантовых состояний в суперпозицию образов квантовых состояний с теми же коэффициентами, а элемент группы имеет обратный, рассматриваемое действие обычно формально записывают в виде

$$\hat{R} \left( \hat{T}_{m'}^{(j)} |J, M, A\rangle \right) = \hat{R} \left( \hat{T}_{m'}^{(j)} \hat{R}^{-1} \hat{R} |J, M, A\rangle \right) = \left( \hat{R} \hat{T}_{m'}^{(j)} \hat{R}^{-1} \right) (\hat{R} |J, M, A\rangle)$$

Оператор группового преобразования определяют так, чтобы он сохранял нормировку квантовых состояний. Это значит, что  $\hat{R}$  - это унитарный оператор и  $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^\dagger$ . В итоге, формально записывают, что

$$\hat{R} \left( \hat{T}_m^{(j)} \right) = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \hat{T}_{m'}^{(j)} \equiv \hat{R} \hat{T}_{m'}^{(j)} \hat{R}^\dagger$$

<sup>6</sup> Подчеркнем, что стандартное представление неприводимого тензорного оператора в виде IV.1.10, рассмотренное нами в примере, когда оператор действовал исключительно на состояния  $|0, 0\rangle$ , справедливо только в подпространстве этих скалярных состояний, а стандартное представление неприводимого тензорного оператора в общем виде на пространстве состояний  $|J, M\rangle$  фактически выводится нами исходя из свойств преобразования этих операторов и формулируется как теорема Вигнера-Экарта.

Так как неприводимый тензорный оператор может изменять значения инвариантных квантовых чисел  $A$ , то результат действия элемента группы

$$\hat{R} \left( \hat{T}_{m'}^{(j)} |J, M, A\rangle \right)$$

обладает ровно теми же свойствами по отношению к группе  $SU(2)$ , что и тензорное произведение неприводимых представлений с моментами вращения  $j$  и  $J$

$$\begin{aligned} \hat{R}(|j, m\rangle \otimes |J, M\rangle) &= \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \mathcal{R}_{MM''}^{(J)} |j, m\rangle \otimes |J, M''\rangle = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \mathcal{R}_{MM''}^{(J)} |j, m'; J, M''\rangle \Rightarrow \\ \langle J', M' | (\hat{R}(|j, m\rangle \otimes |J, M\rangle)) &= \left( \hat{R} |J', M'\rangle \right)^\dagger (|j, m\rangle \otimes |J, M\rangle) = \\ &= \left( \mathcal{R}_{M'\tilde{M}}^{(J')} \right)^* \langle J', \tilde{M} | j, m; J, M \rangle = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \mathcal{R}_{MM''}^{(J)} \langle J', M' | j, m'; J, M'' \rangle, \end{aligned}$$

где матричный элемент выражается через коэффициенты Клебша-Гордона при суммировании моментов вращения  $j$  и  $J$ ,

$$\langle J', M' | j, m; J, M \rangle = (\langle j, m; J, M | J', M' \rangle)^\dagger = \left( C_{jm, JM}^{J'M'} \right)^*,$$

с той лишь разницей, что

$$\begin{aligned} \hat{R} \left( \hat{T}_m^{(j)} |J, M, A\rangle \right) &= \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \mathcal{R}_{MM''}^{(J)} \left( \hat{T}_{m'}^{(j)} |J, M'', A\rangle \right) \Rightarrow \\ \langle J', M' | \left( \hat{R} \left( \hat{T}_m^{(j)} |J, M, A\rangle \right) \right) &= \left( \hat{R} |J', M'\rangle \right)^\dagger \left( \hat{T}_m^{(j)} |J, M, A\rangle \right) = \\ &= \left( \mathcal{R}_{M'\tilde{M}}^{(J')} \right)^* \langle J', \tilde{M} | \hat{T}_m^{(j)} | J, M, A \rangle = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \mathcal{R}_{MM''}^{(J)} \langle J', M' | \hat{T}_{m'}^{(j)} | J, M'', A \rangle. \end{aligned}$$

Комплексное сопряжение последней строчки в формуле (IV.1.16) говорит о том, что коэффициенты Клебша-Гордана - это числа  $\langle j, m; J, M | J', M' \rangle$ , которые преобразуются как базисные элементы неприводимого представления с моментом вращения  $J'$  и выражаются в виде комплексного сопряжения тензорного произведения представлений с моментами вращения  $j$  и  $J$ :

$$\mathcal{R}_{M'\tilde{M}}^{(J')} \langle j, m; J, M | J', M' \rangle = \left( \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \mathcal{R}_{MM''}^{(J)} \right)^* \langle j, m'; J, M'' | J', M' \rangle$$

а комплексное сопряжение последней строчки в формуле IV.1.17 говорит о том, что матричные элементы

$$\left( \langle J', M' | \left( \hat{T}_m^{(j)} |J, M, A\rangle \right) \right)^\dagger$$

• это числа, которые преобразуются как базисные элементы неприводимого представления с моментом вращения  $J'$  и выражаются в виде комплексного сопряжения тензорного произведения представлений с моментами вращения  $j$  и  $J$

$$\mathcal{R}_{M'\tilde{M}}^{(J')} \left( \langle J', M' | \left( \hat{T}_m^{(j)} |J, M, A\rangle \right) \right)^\dagger = \left( \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \mathcal{R}_{MM''}^{(J)} \right)^* \left( \langle J', M' | \left( \hat{T}_{m'}^{(j)} |J, M'', A\rangle \right) \right)^\dagger$$

а в силу линейности соотношений (IV.1.18) и IV.1.19 это значит, что имеет место изоморфизм базисов двух неприводимых представлений, так что базисные элементы этих представлений могут отличаться лишь на постоянный множитель. Это утверждение можно записать в виде формулы

$$\langle J', M' | \left( \hat{T}_m^{(j)} | J, M, A \right) \rangle = \langle J', M' | j, m; J, M \rangle K(J', j, J, A)$$

где

$$\langle J', M' | j, m; J, M \rangle = \left( C_{jm, JM}^{J'M'} \right)^\dagger$$

это комплексно сопряженные коэффициенты Клебша-Гордана при переходе к базису состояний с суммарным моментом вращения  $J'$  от базиса в тензорном произведении подсистем с моментами вращения  $j$  и  $J$ , а инвариантный множитель обычно записывают в виде

$$K(J', j, J, A) = \frac{\langle J' || T^{(j)} || J \rangle}{\sqrt{2J' + 1}}$$

и называют приведенным матричным элементом, который не зависит от значений проекций моментов вращения, а квадрат приведенного матричного элемента как бы усредняется по числу базисных состояний с суммарным моментом вращения  $J'$ :

$$|K(J', j, J, A)|^2 = \frac{|\langle J' || T^{(j)} || J \rangle|^2}{2J' + 1}$$

Формула (IV.1.20) называется теоремой Вигнера-Эккарта для матричного элемента неприводимого тензорного оператора.

Правила отбора для этого матричного элемента, т.е. условия, при которых матричный элемент может быть отличен от нуля, совпадают с правилами отбора для коэффициентов Клебша-Гордана. Эти правила отбора обычно записывают таким образом:

- Правила отбора по проекции момента вращения. Так как  $M' = m + M$ , и  $-j \leq m \leq j$ , то

$$\Delta M = |M' - M| \leq j.$$

- Правила отбора по моменту вращения. Поскольку  $|J - j| \leq J' \leq J + j$ , то при  $J \geq j$  имеет место ограничение  $J - j \leq J' \leq J + j$ , откуда  $J' - J \leq j$  и  $J - J' \leq j$ , а значит, независимо от знака разности  $J' - J$

$$|J' - J| \equiv \Delta J \leq j$$

- Правила запрета. При  $J \leq j$  имеет место ограничение  $j - J \leq J' \leq J + j$ , откуда, во-первых, при  $J' \geq J$  получится, что

$$0 \leq J' - J \leq j$$

а при  $J' \leq J$

$$\begin{cases} 0 \leq J - J', \\ J' \leq J + j, \\ J \leq j, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq J - J' \leq 2J - j, \\ J \leq j, \end{cases} \Rightarrow 0 \leq J - J' \leq j,$$

т.е. правило отбора по моменту вращения не изменяется:  $\Delta J \leq j$ , а во-вторых, имеет место условие

$$j \leq J + J'$$

очевидно справедливое и при  $J \geq j$  тоже, а значит, запрещены отличные от нуля матричные элементы при

$$j > J + J'.$$

В частности, если  $J' = J = 0$ , то при  $j \geq 1$  равны нулю все матричные элементы  $\langle 0, 0, A | \hat{T}_m^{(j)} | 0, 0, A' \rangle$ , и в этом случае говорят, что запрещены переходы  $0 \rightarrow 0'$ .

Теорема Вигнера-Эккарта говорит о том, что неприводимый тензорный оператор представим в виде

$$\hat{T}_m^{(j)} = \sum_{J, M, J', M'} \frac{\langle J' || T^{(j)} || J \rangle}{\sqrt{2J' + 1}} |J' M'\rangle \langle J', M' | j, m; J, M \rangle \langle J, M |$$

Можно записать преобразование состояния  $|J, M\rangle$  в тензорное произведение  $|j, m\rangle \otimes |J, M\rangle$  как действие неприводимого тензорного оператора, у которого все «усредненные» приведенные матричные элементы равны единице:

$$|J, M\rangle \xrightarrow{\hat{T}_m^{(j)}} |j, m\rangle \otimes |J, M\rangle = |j, m; J, M\rangle,$$

$$\hat{T}_m^{(j)} = \sum_{J, M, J', M'} |J' M'\rangle \langle J', M' | j, m; J, M \rangle \left\langle J, M \right| = \sum_{J, M} \left| j, m; J, M \right\rangle \langle J, M|.$$

Для примера, как было показано в [1], в декартовых координатах симметричные тензоры ранга  $l$  с нулевым следом по любой паре индексов отвечают неприводимым представлениям с моментом вращения  $j = l$ . В этом же учебном пособии построена схема перехода от декартовых координат к стандартному представлению для неприводимого тензора, которое определяется в виде суперпозиции компонент тензора в декартовых координатах. Так, вектор электрического дипольного момента - это неприводимый тензор с моментом вращения  $j = 1$  и тремя независимыми компонентами, а тензор квадрупольного момента - это неприводимый тензор с  $j = 2$  и пятью независимыми компонентами.

## 14.4.2 2. Magnetic moments of the three quark system

Проблема магнитных моментов барионов и гиперонов, спинные состояния дикварков в барионе, спинное состояние бариона. Оператор магнитного момента протона как сумма операторов кварков составной модели, действие операторов на спинные состояния, сравнение с экспериментальными данными магнитных моментов протона, нейтрона и  $\Sigma^\pm$ -гиперонов в рамках составной модели.

### 2.1 Spin function of baryons in the ground state

Вычислим магнитные моменты нескольких барионов в кварковой модели. Дело в том, что магнитные моменты точечных частиц пропорциональны спину частицы и ее заряду, так что, если считать, что барионы со спином  $\frac{1}{2}$  - это элементарные частицы, подчиняющиеся уравнению Дирака, то у нейтрона как у частицы Дирака с нулевым электрическим зарядом магнитный момент должен быть равен нулю, а у протона - нуклонному магнетону (см. учебник [10])

$$\mu_p \mapsto \frac{e}{2m_p c} g \hbar s_p = \frac{e \hbar}{2m_p c} \equiv \mu_N$$

где  $s_p = \frac{1}{2}$  - это спин протона,  $g$ -фактор в ведущем приближении равен 2, а его малые отклонения от этого значения вычисляются в квантовой теории поля при учете

флуктуаций квантовых полей в виде так называемых петлевых поправок. Эксперимент [12] катастрофически расходится с этими ожиданиями

$$\mu_p \approx 2.79\mu_N, \quad \mu_n \approx -1.91\mu_N.$$

Модель, в которой барионы состоят из кварков, даже в нерелятивистском приближении дает хорошее согласие с экспериментальными данными.

Согласно кварковой модели барионы составлены из трех кварков, которые связаны сильным взаимодействием, причем кварки - это квантовые состояния, которые обладают спином  $\frac{1}{2}$  и цветом группы  $SU_c(3)$  так, что цветовая волновая функция является антисимметричной по перестановке цветов кварков. В основном состоянии пространственная волновая функция кварков симметрична по перестановке координат кварков. Значит, если в барионе присутствуют тождественные кварки, для которых имеет место статистика Ферми-Дирака и волновая функция должна быть антисимметрична по перестановке координат, цвета и спина тождественных кварков, то в основном состоянии спиновая волновая функция двух тождественных кварков должна быть только симметрична по перестановке их спинов, а это, как мы выяснили с помощью схем Юнга, отвечает суммарному спину, равному единице.

Рассмотрим протон, составленный из кварков (uud). Спиновая функция дикварка, составленного из двух тождественных *u*-кварков, (uu) соответствует спину дикварка, равному единице, а спин протона равен  $\frac{1}{2}$ . Это значит, что при рассмотрении тензорного произведения триплетта группы  $SU(2)$ , который описывает дикварк (uu), и дублета, который описывает *d*-кварк, в прямой сумме нужно выделить неприводимое представление со спином  $\frac{1}{2}$ . Эта задача была полностью рассмотрена нами в этой главе, раздел 1.1, 1

Итак, спиновое состояние протона с проекцией спина  $+\frac{1}{2}$  задается базисным состоянием

$$| \text{proton} , +\frac{1}{2} \rangle = |1, 0\rangle_{(uu)} |+\rangle_d \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - |1, +1\rangle_{(uu)} |-\rangle_d \cdot \sqrt{\frac{2}{3}},$$

(см. формулу (IV.1.7). Согласно IV.1.2

$$|1, 0\rangle_{(uu)} = (|+\rangle_{[1]} |-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |1, +1\rangle_{(uu)} = |+\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]}.$$

Спиновое состояние протона позволяет теперь вычислить его магнитный момент.

## 2.2 Magnetic dipole moments of the proton, neutron and strange hyperons

Магнитный момент протона вычисляется как среднее значение суммы операторов магнитных моментов кварков, составляющих протон. Рассчитаем для спинового состояния протона (IV.2.1) среднее значение оператора проекции магнитного момента кварков на ось *z*, считая, что кварковые состояния отвечают дираковским частицам с  $g = 2$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_p &= \sum_q \mu_z^q = \mu_z^{[1]} \otimes \mathbb{1}^{[2]} \otimes \mathbb{1}^d + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \mu_z^{[2]} \otimes \mathbb{1}^d + \mathbb{1}^{[1]} \otimes \mathbb{1}^{[2]} \otimes \mu_z^d = \\ &= Q_u \frac{e\hbar}{2m_u c} g (s_z^{[1]} \otimes \mathbb{1}^{[2]} \otimes \mathbb{1}^d) + Q_u \frac{e\hbar}{2m_u c} g (\mathbb{1}^{[1]} \otimes s_z^{[2]} \otimes \mathbb{1}^d) + Q_d \frac{e\hbar}{2m_d c} g (\mathbb{1}^{[1]} \otimes \mathbb{1}^{[2]} \otimes s_z^d), \end{aligned}$$

причем

$$Q_u = +\frac{2}{3}, \quad Q_d = -\frac{1}{3}.$$

Так как массы  $u$  - и  $d$ -кварков как квантовых состояний в протоне мало отличаются,  $m_u \approx m_d \approx m_q \sim 330$  МэВ, можно ввести магнетон легкого кварка

$$\mu_q = \frac{e\hbar}{2m_q c}$$

Вычислим действие оператора магнитного момента протона на обе компоненты спинового состояния протона (IV.2.1):

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_p |1, 0\rangle_{(uu)} |+\rangle_d &= \left\{ Q_u \mu_q g \left( s_z^{[1]} + s_z^{[2]} \right) + Q_d \mu_q g s_z^d \right\} (|+\rangle_{[1]} |-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |+\rangle_d = \\ &= \left\{ Q_u \mu_q g \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + Q_d \mu_q g \frac{1}{2} \right\} (|+\rangle_{[1]} |-\rangle_{[2]} + |-\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |+\rangle_d = \\ &= Q_d \mu_q |1, 0\rangle_{(uu)} |+\rangle_d \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_p |1, +1\rangle_{(uu)} |-\rangle_d &= \left\{ Q_u \mu_q g \left( s_z^{[1]} + s_z^{[2]} \right) + Q_d \mu_q g s_z^d \right\} |+\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]} |-\rangle_d = \\ &= \left\{ Q_u \mu_q g \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + Q_d \mu_q g \left( -\frac{1}{2} \right) \right\} |+\rangle_{[1]} |+\rangle_{[2]} |-\rangle_d = \\ &= (2Q_u - Q_d) \mu_q |1, +1\rangle_{(uu)} |-\rangle_d \end{aligned}$$

Величину магнитного момента можно вычислить как среднее значение оператора (IV.2.1), в котором указаны амплитуды рассмотренных нами в (IV.2.3) и (IV.2.4) ортонормированных спиновых состояний кварков:

$$\mu_p = \left\langle \text{proton}, +\frac{1}{2} \left| \hat{\mu}_p \right| \text{proton}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} \cdot \mu_q Q_d + \frac{2}{3} \cdot \mu_q (2Q_u - Q_d) = \mu_q \left( \frac{4}{3} \cdot Q_u - \frac{1}{3} \cdot Q_d \right) = \mu_q = \mu_N \frac{m_N}{m_q}$$

Если пренебречь энергией связи кварковых состояний в протоне и положить, что масса кварка в 3 раза меньше массы нуклона, то  $\mu_p \approx 3\mu_N$ . Эта очень грубая оценка уже близка к экспериментальной величине и превышает ее только на величину менее 10%. Если же считать, что масса кварка  $m_q \approx 330$  МэВ и принять массу нуклона равной  $m_N \approx 940$  МэВ,

$$\mu_p \approx 2.85\mu_N$$

что отличается от эксперимента только на 5%. И такой обнадеживающий результат достигается в довольно простых предположениях о связи кварков в протоне и  $g$ -факторе, который считается равным двум так, как это имеет место для дираковской частицы в нерелятивистском приближении!

Аналогичные формулы для нейтрона ( $ddu$ ) дают

$$\mu_n = \left\langle \text{neutron}, +\frac{1}{2} \left| \hat{\mu}_n \right| \text{neutron}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \mu_q \left( \frac{4}{3} \cdot Q_d - \frac{1}{3} \cdot Q_u \right) = -\frac{2}{3} \cdot \mu_q = -\frac{2}{3} \cdot \mu_N \frac{m_N}{m_q} = -\frac{2}{3} \mu_p.$$

При тех же значениях масс кварков и нуклона получаем

$$\mu_n \approx -1.9\mu_N.$$

Можно сравнить отношение моментов, найденное в эксперименте [12] и в составной кварковой модели (quark model [QM]):

$$\left. \frac{\mu_n}{\mu_p} \right|_{\text{exp}} \approx 0.68, \quad \left. \frac{\mu_n}{\mu_p} \right|_{\text{QM}} \approx 0.67$$

Разность этих значений составляет менее 3%.

Прямое обобщение рассмотренного вывода можно провести на случай странных гиперонов  $\Sigma^+ = (uus)$  и  $\Sigma^- = (dds)$ , если учесть еще и то, что масса состояния странного кварка существенно больше масс состояний легких кварков 7,  $m_s \approx 480$  МэВ. Тогда

$$\mu_{\Sigma^+} = \left\langle \Sigma^+, +\frac{1}{2} \left| \hat{\mu}_{\Sigma^+} \right| \Sigma^+, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} \cdot \mu_s Q_s + \frac{2}{3} \cdot (\mu_q 2Q_u - \mu_s Q_s) = \frac{4}{3} \cdot \mu_q Q_u - \frac{1}{3} \cdot \mu_s Q_s.$$

Численное значение нужно сравнить с экспериментальным [12]:

$$\mu_{\Sigma^+}|_{\text{QM}} \approx 2.75\mu_N, \quad \mu_{\Sigma^+}|_{\text{exp}} \approx 2.46\mu_N.$$

Для  $\Sigma^- = (dds)$

$$\mu_{\Sigma^-} = \left\langle \Sigma^-, +\frac{1}{2} \left| \hat{\mu}_{\Sigma^-} \right| \Sigma^-, +\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} \cdot \mu_s Q_s + \frac{2}{3} \cdot (\mu_q 2Q_d - \mu_s Q_s) = \frac{4}{3} \cdot \mu_q Q_d - \frac{1}{3} \cdot \mu_s Q_s$$

Численно

$$\mu_{\Sigma^-}|_{\text{QM}} \approx -1.05\mu_N, \quad \mu_{\Sigma^-}|_{\text{exp}} \approx -1.16\mu_N.$$

Как видим, точность предсказания для странных гиперонов близка к 10%, что указывает на то, что простая кварковая модель дает верные представления об основных состояниях барионов и гиперонов в предположении, что  $g$ -факторы кварковых состояний мало отличаются от значения, равного двум.

Гипероны с двумя странными кварками  $\Xi^0 = (ssu)$  и  $\Xi^- = (ssd)$ , обладающие спином  $\frac{1}{2}$ , в составной кварковой модели имеют магнитные моменты близкие к экспериментальным [12] с точностью уже порядка 20%:

$$\begin{aligned} \mu_{\Xi^0}|_{\text{QM}} &= \frac{4}{3} \cdot \mu_s Q_s - \frac{1}{3} \cdot \mu_u Q_u \approx -1.50\mu_N, & \mu_{\Xi^0}|_{\text{exp}} &\approx -1.25\mu_N, \\ \mu_{\Xi^-}|_{\text{QM}} &= \frac{4}{3} \cdot \mu_s Q_s - \frac{1}{3} \cdot \mu_d Q_d \approx -0.55\mu_N, & \mu_{\Xi^-}|_{\text{exp}} &\approx -0.65\mu_N. \end{aligned}$$

Как видим, точность расчетов в составной кварковой модели снижается при увеличении числа странных кварков в барионе.

Отметим также, что магнитные моменты нейтральных барионов октета группы  $SU_f(3)$  со спином  $\frac{1}{2}$ , которые несут нулевое значение проекции изоспина и состоят из кварков  $(uds)$ , могут быть вычислены, исходя из предположений о изоспиновой симметрии  $SU(2)$  для кварковых ароматов  $u$  и  $d$  в сильных взаимодействиях, которые определяют динамику образования связанных состояний кварков. Как видим, кварковый состав этих барионов исключает использование статистики Ферми-Дирака для тождественных кварков. Однако можно использовать тот факт, что в сильных взаимодействиях неотличимы компоненты изодублета, т.е. кварки  $u$  и  $d$ . Например, гиперон  $\Lambda$  обладает изоспином, равным нулю, так что его волновая функция имеет вид изосинглета

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (u^{[1]}d^{[2]} - u^{[2]}d^{[1]})$$

где верхние индексы включают в себя метки спиновых состояний кварков, т.е. проекции спина на ось  $z$ , равные  $\pm\frac{1}{2}$ . Следовательно, спиновая функция этого дикварка

<sup>7</sup> Разность масс легких и странного кварков можно оценить по разности масс протона и странного гиперона, которая составляет приблизительно 150 МэВ. Поскольку странный гиперон тяжелее протона, в численных оценках полагают, что странный кварк тяжелее легких на 150 МэВ.

с нулевым изоспином отвечает и спину, равному нулю. Магнитный момент такого дикварка равен нулю. Таким образом магнитный момент  $\Lambda$ -гиперона равен магнитному моменту  $s$ -кварка:

$$\mu_{\Lambda}|_{\text{QM}} = \mu_s Q_s \approx -0.65\mu_N, \quad \mu_{\Lambda}|_{\text{exp}} \approx -0.61\mu_N$$

Гиперон  $\Sigma^0 = (uds)$  обладает изоспином  $T = 1$ , но нулевым значением проекции изоспина  $T_3 = 0$ . Поэтому волновая функция дикварка имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (u^{[1]}d^{[2]} + u^{[2]}d^{[1]})$$

а это значит, что спина дикварка ( $ud$ ) равен единице, а проекция спина в данном случае равна нулю. Для случая, когда спин дикварка равен единице можно воспользоваться выкладками, аналогичными тем, что мы использовали при вычислении магнитных моментов протона и нейтрона, но с соответствующей заменой ароматов кварков, а значит и их зарядов. В итоге найдем

$$\mu_{\Sigma^0}|_{\text{QM}} = -\frac{1}{3} \cdot \mu_s Q_s + \frac{2}{3} \cdot \mu_q (Q_u + Q_d) \approx 0.85\mu_N$$

что, впрочем, не с чем сравнить, поскольку экспериментально измерить этот магнитный момент методически затруднительно (см. обзор по теме магнитных моментов барионов в разделе [12], который посвящен составной кварковой модели).

В англоязычной литературе составная модель адронов называется constituent quark model. Недостатком этой модели является то, что она никак не вникает в динамику образования связанных состояний кварков.

## 14.5 Algebra in condensed matter

### 14.5.1 Cartan classification of Hamiltonians: the 10-fold way by Foster

This material is reviewed in (e.g.) [1,2], which detail the classification of (strong, "symmetry-protected") topological insulators and superconductors in arbitrary spatial dimensions. These references clarified and expanded the connection between equivalence classes of bulk topological band structures on one hand, and robust surface state theories with anomalous local symmetries on the other. For a different approach that gives the same results, see [3]. Like bulk topological band structures, surface state theories also form equivalence classes, since these are immune to the most detrimental effects of quenched disorder (topological protection from Anderson localization) [1, 2, 4].

## 6.1 Random matrix theory and Cartan's classification: overview and modern applications

There are various situations in quantum physics where it makes sense to study an ensemble of Hamiltonians, instead of one particular Hamiltonian.<sup>1</sup> The simplest version applies to a system with a finite  $N$ -dimensional Hilbert space, such that the Hamiltonian  $\hat{h}$  is an  $N \times N$  Hermitian matrix. In random matrix theory, one studies ensemble-averaged properties of such matrices, such as the density of states and correlation functions between eigenvalues.

<sup>1</sup> Предлагаем читателю самостоятельно проделать это упражнение по той же схеме, что мы описали в этом разделе. При этом необходимо учесть, что усреднение приведет к скалярному произведению ортогональных дикварковых состояний.



Random matrix theory [5,6] was originally invented to study highly excited levels in complex nuclei. The idea was that many particles interact with each other in a confined volume, leading to an effectively random Hamiltonian constrained only by key symmetries. These should be symmetries unrelated to the Poincaré group of spacetime translations, boosts, and rotations, since all of these are broken if we consider the "effective single particle" Hamiltonian seen by a typical nucleon interacting with many others. Much later the same ideas were applied to irregularly shaped quantum dots formed in solids. A quantum dot is a meso- or nanoscopic "artificial atom" with an irregular boundary that can trap a single electron, such that the corresponding classical problem would exhibit conservative chaotic dynamics (point particle moving in a chaotic billiard).

Cartan showed that  $N \times N$  random Hermitian matrices can be divided into 10 symmetry classes. Each class views a particular Hamiltonian  $\hat{h}$  as either (1) an element of a Lie algebra (typically in the defining representation), or (2) an element of a Lie algebra coset representation. A coset is just a Lie algebra with some subalgebra removed. Different classes are realized by imposing different discrete symmetries that hold for every member of the class (such as time-reversal symmetry). These are imposed on the otherwise random form of  $\hat{h}$ . The 10 classes correspond to a special set of highly symmetric manifolds, the Riemannian symmetric spaces.

In fact, this "10-fold way" classification system has recently found much wider application in condensed matter physics. It can be used to classify "dirty" quantum solids, wherein electrons scatter randomly off of different types of quenched disorder such as impurities, vacancies, grain boundaries, etc. It turns out that many properties of such systems are independent of the details of disorder, and depend only on the spatial dimensionality  $d$  and the symmetry class [7].<sup>2</sup>

The 10-fold way is also useful for classifying topological band structures [1, 2, 4]. Here one considers a  $d$ -dimensional clean (= perfectly crystalline) non-interacting or mean-field model of electrons in a solid. If the system is fully gapped (i.e.  $M \in \{1, 2, 3, \dots\}$  bands are completely filled at zero temperature, with all others completely empty), then it turns out that the system can exhibit nontrivial topology with interesting physical implications. Such systems are called (strong) topological insulators and superconductors, and are predicted to host  $(d - 1)$ -dimensional surface states with remarkable properties [4, 8]. The latter circulate along the  $(d - 1)$  dimensional physical boundary of the bulk  $d$ -dimensional material sample. Why is the classification useful here? The answer is precisely because these systems are topological. It means that key properties such as the existence of surface states hold for an equivalence class of band structures, wherein you can move around the details of the energy bands in any fashion so long as you do not (1) close the energy gap or (2) break a defining symmetry.

In what follows, we will discuss only the classification scheme itself, seeing how it arises in concrete examples. We will not pursue calculations in random matrix theory, disordered and/or topological quantum phases. One of the most interesting directions is the connection between bulk topology and the physics of topological surface states in the presence of surface perturbations, such as quenched disorder and interactions. But that's another story...

## 6.2 Spinless fermions

### 6.2.1 Hamiltonian

Consider a tight-binding model of spinless, non-interacting fermions hopping on a lattice in  $d$  dimensions. This can be written generically through the second-quantized Hamiltonian

---

<sup>1</sup> Note this is different from the usual ergodic hypothesis for thermodynamics, where one averages over states for a fixed Hamiltonian.

$$\hat{H} = \sum_{ij} \left[ t_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2} \Delta_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger + \frac{1}{2} \Delta_{ij}^\dagger c_i c_j \right] \quad (6.2.1)$$

Here  $c_i$  and  $c_i^\dagger$  are fermion annihilation and creation operators satisfying canonical anticommutation relations

$$c_i c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i = \delta_{ij} \quad (6.2.2)$$

Let us assume that the lattice has a finite number of  $N$  sites. Then  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . The  $N \times N$  "hopping" matrix  $t_{ij}$  is Hermitian ( $\hat{t}^\dagger = \hat{t}$ ), and encodes how electrons "tunnel" from site to site on the lattice. It can be translationally invariant in a clean system, or random in a dirty one. Typically we would let  $t_{ij}$  connect only sites that are within some fixed spatial radius, e.g. up to nearest-neighbor or next-nearest-neighbor hopping, but it is not necessary to specify this here. The anomalous terms proportional to  $\hat{\Delta}$  and  $\hat{\Delta}^\dagger$  arise in the mean-field description of superconductors, where  $\Delta_{ij}$  is the superconducting gap parameter. It can also be translationally invariant or not. A normal metal or insulator has  $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}^\dagger = 0$ .

It will prove useful to rewrite Eq. (6.2.1) in a more compact way. Let us introduce the "Majorana" spinor

$$\chi \equiv \begin{bmatrix} c \\ (c^\dagger)^\top \end{bmatrix} \Rightarrow \chi_{i,\sigma} = \begin{cases} c_i, & \sigma = 1 \\ c_i^\dagger, & \sigma = 2 \end{cases} \quad (6.2.3)$$

We collect all of the annihilation and creation operators and stack them in a single  $2N$ -component column vector; the result is  $\chi$ . It carries two different types of indices: a site index  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , and a "particle-hole" index  $\sigma \in \{1, 2\}$ , such that  $\sigma = 1$  ( $\sigma = 2$ ) corresponds to an annihilation (creation) operator. In the first equality of Eq. (6.2.3), we have suppressed the site index. In this case, we view  $c$  ( $c^\dagger$ ) as a column (row) vector in the ordered list of lattice sites. The symbol  $(c^\dagger)^\top$  means to take the row vector  $[c_1^\dagger \ c_2^\dagger \ \dots \ c_N^\dagger]$  and transpose it to get a column, so that  $\chi$  is a stack of two column vectors.

We introduce a set of block  $2N \times 2N$  Pauli matrices acting on particle-hole space,

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{1}_N \\ \hat{1}_N & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i\hat{1}_N \\ i\hat{1}_N & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} \hat{1}_N & 0 \\ 0 & -\hat{1}_N \end{bmatrix} \quad (6.2.4)$$

Then, we note that

$$\chi^\dagger = [c^\dagger \ c^\top] = \chi^\top \hat{\sigma}_1 \quad (6.2.5)$$

Thus  $\chi^\dagger$  is not independent of  $\chi$ ; for this reason we refer to  $\chi$  as a "Majorana" fermion field.  
<sup>3</sup> Eq. (6.2.1) can then be rewritten as

$$H = \frac{1}{2} \chi^\top \hat{M}_P \hat{h} \chi, \quad \hat{M}_P = \hat{\sigma}_1, \quad \hat{h} = \begin{bmatrix} \hat{t} & \hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^\dagger & -\hat{t}^\top \end{bmatrix} \quad (6.2.6)$$

The matrix  $\hat{h} = \hat{h}^\dagger$  is the effective single-particle Hamiltonian; for a superconductor ( $\hat{\Delta} \neq 0$ ), this is the Bogoliubov-de Gennes Hamiltonian.

---

<sup>2</sup> We emphasize however that for an extended system in  $d$  spatial dimensions, most physical properties do not obtain from random matrix theory. The latter is useful for calculating ensemble-averaged observables in systems that are effectively "zero dimensional," such as a nucleus. Only the 10-fold classification scheme is useful for  $d > 0$ ; physical properties need to be computed using other tools. For systems that are Anderson delocalized, these tools nevertheless always have a strongly Lie algebraic character, e.g. matrix non-linear sigma models [7], affine Lie current algebras, effective replica or graded supersymmetric Hamiltonians via transfer matrix, etc.

### 6.2.2 Symmetries

The next step is to define symmetry conditions for  $\hat{h}$ . Since we wish to apply the classification scheme of random matrix theory, we exclude spatial symmetries like translations and rotations. Alternatively, we can imagine that these are explicitly broken by the presence of impurities or other forms of quenched disorder. What other symmetries can  $\hat{h}$  possess? In fact, there is one symmetry that is "automatic:" particle-hole symmetry. Consider the following manipulation, wherein we anticommute the  $\chi$  fields on the left and right-hand sides of  $H$  in Eq. (6.2.6):

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \chi_i \left[ \hat{M}_P \right]_{ij} [\hat{h}]_{jk} \chi_k \\
 &= -\frac{1}{2} \chi_k \left[ \hat{h}^\top \right]_{kj} \left[ \hat{M}_P^\top \right]_{ji} \chi_i + (\text{const.}) \\
 &= -\frac{1}{2} \chi^\top \hat{M}_P \hat{M}_P \hat{h}^\top \hat{M}_P^\top \chi \\
 &= \frac{1}{2} \chi^\top \hat{M}_P \left( -\hat{M}_P \hat{h}^\top \hat{M}_P \right) \chi
 \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Going from the first to second lines in this equation, we pick up an additive constant (const.) due to the non-trivial anticommutator Eq. (6.2.2); we drop this term in the following because it plays no role in the argument. To get the final equality, we have used the facts that  $\hat{M}_P^2 = \hat{1}_{2N}$  and  $\hat{M}_P^\top = \hat{M}_P$ . We see that without loss of generality, we can take  $\hat{h}$  to satisfy

$$-\hat{M}_P \hat{h}^\top \hat{M}_P = \hat{h}, \quad \hat{M}_P = \begin{cases} +\hat{M}_P^\top, & P^2 = +1 \\ -\hat{M}_P^\top, & P^2 = -1 \end{cases} \quad \text{particle-hole symmetry } P; P^2 = \pm 1 \tag{6.2.8}$$

The notation  $P^2 = +1$  ( $P^2 = -1$ ) is used for the case of symmetric  $\hat{M}_P$  (antisymmetric  $\hat{M}_P$ ); these are unitarily inequivalent (cannot be interchanged by a basis transformation).<sup>4</sup> In our case,  $\hat{M}_P = \hat{\sigma}_1 = \hat{M}_P^\top$  (symmetric). Physically, this "particle-hole" symmetry<sup>5</sup> appears because the anomalous terms in Eq. (6.2.1) satisfy (e.g.)

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta_{ij} c_j^\dagger c_i^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{ij} (-\Delta_{ji}) c_i^\dagger c_j^\dagger \tag{6.2.9}$$

wherein we first anticommute the two creation operators, and then relabel the summation indices. As a result,

$$\hat{\Delta} = -\hat{\Delta}^\top \tag{6.2.10}$$

<sup>3</sup> The term "Majorana fermion" strictly speaking should apply only to a spinor field  $\chi$  in a Lorentz covariant quantum field theory, wherein  $\chi$  satisfies a condition as in Eq. (6.2.5). Here we are abusing high energy field theorist nomenclature to apply the terminology to a lattice model. In either case, these are just ordinary fermions satisfying a reality condition. There is something else that frequently gets called a "Majorana fermion," but is really a Majorana zero mode bound to a topological defect. These objects aren't fermions at all, since they satisfy non-abelian braiding statistics, and might be useful for topological quantum computation [9].

<sup>4</sup> The notational motivation for  $P^2 = \pm 1$  and  $T^2 = \pm 1$  obtains by considering the action of two successive particle-hole or time-reversal transformations on a fermion field operator in second quantization. The field must return to itself after two applications of the symmetry transformation, up to an overall sign. This sign determines the "square" of the symmetry operation.

<sup>5</sup> In high-energy physics, particle-hole symmetry is referred to as "charge conjugation" symmetry and denoted by  $C$ , in order to distinguish it from parity

i.e. the pairing gap must be an antisymmetric function of space. This is the well-known constraint that spinless fermions can only pair in odd angular momentum channels ( $p$ -wave,  $f$ -wave, etc.).

- Exercise: Verify that Eq. (6.2.8) implies Eq. (6.2.10). What happens if we take a more general  $\Delta_{ij}$  that does not satisfy Eq. (6.2.10)?

Another important symmetry condition is time-reversal invariance. For our spinless lattice fermions in Eq. (6.2.1), time-reversal can be encoded as the transformation

$$c_i \rightarrow c_i, \quad c_j^\dagger \rightarrow c_j^\dagger, \quad i \rightarrow -i \quad (6.2.11)$$

What this means is that the creation and annihilation operators are left unchanged, <sup>6</sup> but all complex-valued parameters in the model Eq. (6.2.1) are complex conjugated. The transformation law for  $\chi$  [Eq. (6.2.3)] is also trivial,

$$\chi \rightarrow \chi, \quad \chi^\dagger \rightarrow \chi^\dagger, \quad i \rightarrow -i \quad (6.2.12)$$

leading via Eq. (6.2.6) to

$$\hat{M}_T \hat{h}^* \hat{M}_T = \hat{h}, \quad \hat{M}_T = \begin{cases} +\hat{M}_T^\top, & T^2 = +1 \\ -\hat{M}_T^\top, & T^2 = -1 \end{cases} \quad \text{time-reversal symmetry } T; T^2 = \pm 1 \quad (6.2.13)$$

In our case,

$$\hat{M}_T = \hat{1}_{2N} = \hat{M}_T^\top \quad (6.2.14)$$

The antisymmetric case arises for spin- 1/2 fermions, as we shall see below.

Finally, we can define a third possible symmetry, which is the product of time-reversal and particle-hole. Combining Eqs. (6.2.8) and (6.2.13) gives chiral (sometimes called "sublattice" [1, 2]) symmetry,

$$-\hat{M}_S \hat{h} \hat{M}_S = \hat{h}, \quad \hat{M}_S = \hat{M}_S^\dagger = \hat{M}_S^{-1} \quad \text{chiral symmetry } S \quad (6.2.15)$$

In our case

$$\hat{M}_S = \hat{\sigma}_1 \quad (6.2.16)$$

As suggested by Eqs. (6.2.8) and (6.2.13), for each of time-reversal and particle-hole symmetries, there are two inequivalent types. These are distinguished by the symmetry or antisymmetry of the conjugating matrices  $\hat{M}_{P,T} = \pm \hat{M}_{P,T}^\top$ . The chiral symmetry  $S$  is simply present or not, and is always present if both  $P$  and  $T$  are.

The complete Cartan classification is formed by taking all possible combinations of  $T$ ,  $P$ , and  $S$ : each of  $\mathcal{O} \in \{T, P\}$  is absent, present with  $\mathcal{O}^2 = +1$ , or present with  $\mathcal{O}^2 = -1$ . That gives 9 possibilities. The final possibility has neither  $T$  nor  $P$ , but does possess chiral symmetry  $S$ . The classes are listed in Table 1, along with example theoretical and or experimental realizations in two- and three-dimensional condensed matter systems.

- A word of caution: Although the set of  $\{T, P, S\}$  exhausts the possibilities, it is not always true that  $T$  and  $P$  correspond to the physical symmetries for a given model. In particular, we will see that if there is an additional continuous symmetry present, it can change the character of the effective form of  $T$  or  $P$  used in the classification Table 1. In fact, if there is a continuous symmetry, one should first block diagonalize  $\hat{h}$  using that symmetry, and then reconsider the classification for the irreducible blocks. Nevertheless, we can realize all possible classes by considering spinless and spin- 1/2 Hamiltonians with different physical symmetries.

### 6.2.3 Examples of Spinless fermions

#### 6.2.3.1 Spinless superconductor without time-reversal invariance: Class $D$

Consider a system with Hamiltonian  $H$  [Eq. (6.2.1)] and no physical symmetries. You might expect this to correspond to a metal with broken time-reversal symmetry ("unitary class", see below), but this is not the case. Recall that any  $H$  cast in the form of the Bogoliubov-de Gennes equation in Eq. (6.2.6) is automatically invariant under  $P$ , Eq. (6.2.8) with  $\hat{M}_P = \hat{\sigma}_1$ . Physically, a superconductor has less symmetry than a metal, because it lacks  $U(1)$  electric charge symmetry; the latter is broken spontaneously. If there are no other symmetries, then we can only impose Eq. (6.2.8); explicitly,

$$-\hat{\sigma}_1 \hat{h}^\top \hat{\sigma}_1 = \hat{h}, \quad P^2 = 1 \text{ particle-hole symmetry.} \quad (6.2.17)$$

Now,  $\hat{h}$  is a  $2N \times 2N$  Hermitian matrix. It can therefore be expressed as a linear combination of Hermitian generators for the group  $U(2N)$ , acting on vectors in the defining  $2N$  representation. We write this as

$$\hat{h} \in \mathfrak{u}(2N)$$

since  $\hat{h}$  is an element of the Lie algebra. Using Eqs. (2A.2.2) and (2A.2.3) from module 2A, Eq. (6.2.17) implies that

$$\hat{h} \in \mathfrak{so}(2N), \quad \text{spinless superconductor with } P^2 = +1, \text{ broken time-reversal: class } D. \quad (6.2.18)$$

In other words,  $\hat{h}$  is formed from a subset of  $\mathfrak{u}(2N)$  generators, and these are precisely the generators of the subgroup  $\mathfrak{so}(2N)$ . In the Cartan classification, this is an example of class  $D$ , since  $D_n$  corresponds to the Lie algebra  $\mathfrak{so}(2N)$  [Eq. (5.2.12)].

#### 6.2.3.2 Spinless time-reversal invariant superconductor: Class BDI

We can also consider a time-reversal invariant spinless superconductor. Then we must also enforce Eq. (6.2.13),

$$\hat{h}^\top = \hat{h}, \quad T^2 = 1 \text{ time-reversal symmetry} \quad (6.2.19)$$

Consider the complementary condition

$$-\hat{h}^\top = \hat{h} \quad (6.2.20)$$

If we were to enforce particle-hole [Eq. (6.2.17)] and the "anti-time-reversal symmetry" in Eq. (6.2.20), then we would have

$$\begin{aligned} -\hat{h}^\top &= \hat{h} \\ \hat{\sigma}_1 \hat{h} \hat{\sigma}_1 &= \hat{h} \end{aligned} \quad (6.2.21a)$$

We can make a change of basis using  $\hat{h}' \equiv \hat{U}^\dagger \hat{h} \hat{U}$ , where  $\hat{U} = (1/\sqrt{2})(\hat{1}_{2N} - i\hat{\sigma}_2)$ , leading to

---

<sup>6</sup> Note that Eq. (6.2.11) encodes the transformation in second quantization on the operators and parameters. It is not a transformation on wavefunctions. A wavefunction  $\psi$  has to be complex-conjugated under a time-reversal transformation, but an annihilation operator  $c_i$  does not become a creation operator. There is a symmetry operation that exchanges creation and annihilation operations; this is in fact the second-quantized version of particle-hole symmetry [Eq. (6.2.8)]

$$-\hat{h}'^\top = \hat{h}' \quad (6.2.22a)$$

$$\hat{\sigma}_3 \hat{h}' \hat{\sigma}_3 = \hat{h}' \quad (6.2.22b)$$

- Exercise: Verify Eq. (6.2.22).

Eq. (6.2.22) implies that we can make the  $\sigma$ -space decomposition

$$\hat{h}' = \begin{bmatrix} \hat{h}_N^{(1)} & 0 \\ 0 & \hat{h}_N^{(2)} \end{bmatrix}, \quad [\hat{h}_N^{(i)}]^\top = -\hat{h}_N^{(i)} (i \in \{1, 2\}) \quad (6.2.23)$$

Since the  $N \times N$  matrices  $\hat{h}_N^{(1)}$  and  $\hat{h}_N^{(2)}$  appear in separate blocks of  $\hat{h}'$ , they represent independent, mutually commuting algebras. Moreover, each satisfies an orthogonal condition. Enforcing particle-hole [Eq. (6.2.17)] and "anti-time-reversal symmetry" [Eq. (6.2.20)] would therefore give  $\hat{h} \in \text{so}(N) \times \text{so}(N)$ . But this isn't what we want: we want to enforce time-reversal symmetry Eq. (6.2.19). We therefore conclude that

$$\hat{h} \in \text{so}(2N)/\text{so}(N) \times \text{so}(N), \quad \text{spinless superconductor with } T^2 = +1, P^2 = +1 : \text{ class } BDI \quad (6.2.24)$$

Here the quotient notation  $g/h$  for Lie algebras  $g$  and  $h \in g$  means the subset (coset) of  $g$  generators that are not in the subalgebra  $h$ . The Cartan label for this class is *BDI*. The corresponding manifold  $\text{SO}(2N)/\text{SO}(N) \times \text{SO}(N)$  is also known as the orthogonal Grassmannian.

### 6.2.3.3 Metal with broken time-reversal symmetry: "Unitary" class *A*

Next we consider a metal, Eqs. (6.2.1) and (6.2.6) with  $\hat{\Delta} = 0$ . In this case  $\hat{h}$  is block diagonal in  $\sigma$ -space. Equivalently, we can say that  $\hat{h}$  commutes with the generator of  $\text{U}(1)$  electric charge rotation. An electric charge rotation is

$$c_i \rightarrow \exp(i\theta)c_i, \quad c_i^\dagger \rightarrow \exp(-i\theta)c_i^\dagger, \quad \Rightarrow \quad \chi \rightarrow \exp(i\theta\hat{\sigma}_3)\chi \quad (6.2.25)$$

so that invariance of Eq. (6.2.6) requires that

$$\hat{\sigma}_3 \hat{h} \hat{\sigma}_3 = \hat{h}, \quad \text{electric U}(1) \text{ invariance.} \quad (6.2.26)$$

Formally, we can determine the structure of  $\hat{h}$  by combining the built-in particle-hole condition Eq. (6.2.17) with electric  $\text{U}(1)$  invariance Eq. (6.2.26). The latter implies the block decomposition

$$\hat{h} = \begin{bmatrix} \hat{h}_N^{(1)} & 0 \\ 0 & \hat{h}_N^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.2.27)$$

By itself, this would imply  $\hat{h} \in \mathfrak{u}(N) \times \mathfrak{u}(N)$ . Imposing Eq. (6.2.17) constrains

$$-[\hat{h}_N^{(2)}]^\top = \hat{h}_N^{(1)} \quad (6.2.28)$$

which implies that the blocks are not independent. Since there is no further constraint on  $\hat{h}_N^{(1)}$ , we conclude that

$$\hat{h} \in \mathfrak{u}(N), \quad \text{metal with broken } T: \text{ class } A \quad (6.2.29)$$

Again the Cartan notation comes from the classification of Lie algebras, since  $A_n = \mathfrak{su}(n+1)$ .

Here we have an example of the warning given at the end of Sec. 6.2.2: the combination of the discrete  $P$  symmetry with continuous  $U(1)$  symmetry effectively gives a subblock Hamiltonian with no  $T$ ,  $P$ , or  $S$  symmetry. Class  $A$  is also called the "unitary" class, and is one of the original three random matrix classes investigated a half-century ago by Wigner and Dyson. (The others are the "orthogonal"  $AI$  and "symplectic"  $AII$  classes, described below; see also Table 1). The additional 7 classes in Table 1 were only systematically introduced into condensed matter physics in the 90s by Altland and Zirnbauer [7].

#### 6.2.3.4 Spinless metal with time-reversal symmetry: "Orthogonal" class $AI$

Finally, we consider the combination of  $P$ ,  $T$ , and electric  $U(1)$  symmetry. As shown above,  $P$  and electric  $U(1)$  give  $\hat{h} \in \mathfrak{u}(N)$ . The "anti-time-reversal" invariance in Eq. (6.2.20) would give  $\hat{h} \in \mathfrak{so}(N)$ . Therefore

$$\hat{h} \in \mathfrak{u}(N)/\mathfrak{so}(N), \quad \text{spinless metal with } T^2 = +1 : \text{ class } AI \quad (6.2.30)$$

This is the "orthogonal" Wigner-Dyson class, c.f. Table 1.

### 6.3 Spin-1/2 fermions

#### 6.3.1 Hamiltonian

We can also consider spin-1/2 fermions. The Bogoliubov-de Gennes Hamiltonian is

$$\hat{H} = \sum_{ij} \left[ t_{ijs'j'} c_{i,s}^\dagger c_{j,s'} + \frac{1}{2} \Delta_{ijs'j'} c_{i,s}^\dagger c_{j,s'}^\dagger + \frac{1}{2} \Delta_{ijs'j'}^\dagger c_{i,s} c_{j,s'} \right] \quad (6.3.1)$$

Here  $s, s' \in \{\uparrow, \downarrow\}$  denote the spin-1/2 state along the  $z$ -axis in spin space. The hopping  $\hat{t}$  and pairing  $\hat{\Delta}$  amplitudes are now matrices in both position and spin space. Spin-dependent hopping arises with spin-orbit coupling, while spin-triplet pairing can break spin  $SU(2)$  symmetry in  $\Delta_{ijs'j'}$ . Again we re-express this using a "Majorana" field that collects all degrees of freedom,

$$\chi \equiv \begin{bmatrix} c \\ i\hat{s}_2 (c^\dagger)^\top \end{bmatrix} \Rightarrow \chi_{i,\sigma,s} = \begin{cases} c_{i,s}, & \sigma = 1 \\ i[\hat{s}_2]_{s,s'} c_{i,s'}^\dagger, & \sigma = 2 \end{cases}$$

Here  $\hat{s}_2$  is the antisymmetric Pauli matrix acting in spin space. Recall that  $i\hat{s}_2$  serves as a "metric" for the  $s = 1/2$  representation of  $SU(2)$ , see Sec. 1.5 in module 1. It means that under a spin  $SU(2)$  transformation,  $\chi$  defined in Eq. (6.3.2) transforms like  $c$ :

$$c \rightarrow \exp\left(-i\frac{\hat{\mathbf{s}}}{2} \cdot \boldsymbol{\theta}\right) c \Rightarrow \chi \rightarrow \exp\left(-i\frac{\hat{\mathbf{s}}}{2} \cdot \boldsymbol{\theta}\right) \chi \quad (6.3.3)$$

- Exercise: Verify the  $\chi$ -field spin  $SU(2)$  transformation in Eq. (6.3.3).

We note that

$$\chi^\dagger = \begin{bmatrix} c^\dagger & -ic^\top \hat{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^\top & -ic^\dagger \hat{s}_2 \end{bmatrix} \hat{s}_2 \hat{\sigma}_2 = \chi^\top \hat{s}_2 \hat{\sigma}_2 \quad (6.3.4)$$

The Hamiltonian can be written as

$$H = \frac{1}{2} \chi^\top \hat{M}_P \hat{h} \chi, \quad \hat{M}_P = \hat{\sigma}_2 \hat{s}_2, \quad \hat{h} = \begin{bmatrix} \hat{t} & -i\hat{\Delta} \hat{s}_2 \\ i\hat{s}_2 \hat{\Delta}^\dagger & -\hat{s}_2 \hat{t}^\top \hat{s}_2 \end{bmatrix} \quad (6.3.5)$$

The key symmetry conditions are

1.  $P$  in Eq. (6.2.8) with

$$\hat{M}_P = \hat{\sigma}_2 \hat{s}_2 = \hat{M}_P^\top, \quad P^2 = +1 \text{ particle-hole "symmetry."} \quad (6.3.6)$$

2.  $T$  in Eq. (6.2.13) with

$$\hat{M}_T = \hat{s}_2, \quad T^2 = -1 \text{ time-reversal symmetry} \quad (6.3.7)$$

This arises due to the Kramers degeneracy of states related by time-reversal in a spin- 1/2 system. Time-reversal is encoded in the transformation

$$c \rightarrow i\hat{s}_2 c, \quad c^\dagger \rightarrow c^\dagger(-i)\hat{s}_2, \quad i \rightarrow -i \quad (6.3.8)$$

We can also define a chiral condition from the product of  $P$  and  $T$ , but we don't need this in the examples that follow.

### 6.3.2 1. Examples

#### 6.3.2.1 Spin-1/2 superconductor with no physical symmetries: Class $D$

We again consider a superconductor with no physical symmetries. Apriori,

$$\hat{h} \in \mathfrak{u}(4N)$$

where  $4N$  arises from the direct product of  $N$  lattice, 2 particle-hole, and 2 spin degrees of freedom. Imposing the automatic particle-hole condition in Eqs. (6.2.8) and (6.3.6) gives

$$\hat{h} \in \mathfrak{so}(4N), \quad \text{spin- 1/2 superconductor with } P^2 = +1, \text{ broken time-reversal, and spin-orbit coupling:} \quad (6.3.9)$$

This is the same class as the spinless case without physical symmetries, Eq. (6.2.18).

#### 6.3.2.2 Spin-1/2 superconductor with time-reversal symmetry and spin-orbit coupling: Class $DIII$

If we add time-reversal symmetry to the class  $D$  superconductor, we get the additional constraint implied by Eqs. (6.2.13) and (6.3.7). The "anti-time-reversal" condition would be

$$-\hat{s}_2 \hat{h}^\top \hat{s}_2 = \hat{h} \quad (6.3.10)$$

Combining this with particle-hole [Eqs. (6.2.8) and (6.3.6)] would give the additional constraint

$$\hat{\sigma}_2 \hat{h} \hat{\sigma}_2 = \hat{h} \quad (6.3.11)$$

Using a basis transformation  $\hat{h}' \equiv \hat{U}^\dagger \hat{h} \hat{U}$ ,  $\hat{U} = (1/\sqrt{2})(\hat{1}_{4N} + i\hat{\sigma}_1)$ , Eqs. (6.3.10) and (6.3.11) become

$$-\hat{s}_2 \hat{\sigma}_1 \hat{h}'^\top \hat{s}_2 \hat{\sigma}_1 = \hat{h}' \quad (6.3.12a)$$

$$\hat{\sigma}_3 \hat{h}' \hat{\sigma}_3 = \hat{h}' \quad (6.3.12b)$$

These imply the  $\sigma$ -space decomposition



$$\hat{h}' = \begin{bmatrix} \hat{h}_{2N}^{(1)} & 0 \\ 0 & \hat{h}_{2N}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad -\hat{s}_2 \left[ \hat{h}_{2N}^{(2)} \right]^\top \hat{s}_2 = \hat{h}_{2N}^{(1)} \quad (6.3.13)$$

The latter condition implies  $\hat{h}_{2N}^{(2)}$  is not independent. Since there are no constraints on  $\hat{h}_{2N}^{(1)}$ , we would conclude  $\hat{h} \in u(2N)$ . For the opposite case of time-reversal and particle-hole, we get

$$\hat{h} \in \text{so}(4N)/u(2N), \quad \text{spin-1/2 superconductor with } T^2 = -1, P^2 = +1, \text{ and spin-orbit coupling: class D} \quad (6.3.14)$$

Thus fermion quasiparticles in a spin-1/2 superconductor with time-reversal invariance and spin-orbit coupling [no spin SU(2) symmetry] belong to class DIII. Class DIII is realized by the 3D topological superfluid  $^3\text{HeB}$ , see Table 1 and Refs. [1,2,4,10]. Note that the matrix structure of this class is different from that of the spinless, time-reversal invariant superconductor (Sec. 6.2.3.2), owing to the  $T^2 = -1$  version of time-reversal in the case of DIII.

### 6.3.2.3 Spin-1/2 metal with time-reversal invariance and spin-orbit coupling: "Symplectic" class AII

Next, we consider a metal with time-reversal symmetry and no spin SU(2) symmetry. We can view this as a restriction of class DIII, where we impose charge U(1) invariance:

$$\hat{\sigma}_3 \hat{h} \hat{\sigma}_3 = \hat{h} \quad (6.3.15)$$

Adding  $P$  and "anti-time-reversal" conditions gives Eqs. (6.3.10) and (6.3.11). The combination of Eqs. (6.3.15) and (6.3.11) imply that  $\hat{h}$  is an identity matrix in  $\sigma$ -space, i.e.  $\hat{h} \in u(2N)$ . Adding Eq. (6.3.10) would restrict

$$\hat{h} \in \text{sp}(2N) \quad (6.3.16)$$

where we have used Eq. (2A.3.4) in module 2A. The combination of electric U(1) [Eq. (6.3.15)] and  $P$  [Eqs. (6.2.8) and (6.3.6)] alone implies

$$\hat{h} = \begin{bmatrix} \hat{h}_{2N}^{(1)} & 0 \\ 0 & \hat{h}_{2N}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad -\hat{s}_2 \left[ \hat{h}_{2N}^{(2)} \right]^\top \hat{s}_2 = \hat{h}_{2N}^{(1)} \quad (6.3.17)$$

so that  $\hat{h} \in u(2N)$ . Quotienting out Eq. (6.3.16) finally gives

$$\hat{h} \in u(2N)/\text{sp}(2N), \quad \text{spin- 1/2 metal with } T^2 = -1 \text{ and spin-orbit coupling: class AII.} \quad (6.3.18)$$

This is the "symplectic" Wigner-Dyson class, c.f. Table 1. The recently-discovered  $\mathbb{Z}_2$  topological insulators [8] in 2D and 3D reside in class AII.

### 6.3.2.4 Spin-1/2 metal with time-reversal invariance and spin SU(2) symmetry: "Orthogonal" class AI

Finally, we consider a metal with electric U(1) invariance, time-reversal symmetry, and spin SU(2) symmetry. The physical symmetries are

$$\hat{s}_2 \hat{h}^\top \hat{s}_2 = \hat{h}, \quad T^2 = -1 \text{ time-reversal invariance} \quad (6.3.19a)$$

$$\hat{\sigma}_3 \hat{h} \hat{\sigma}_3 = \hat{h}, \quad \text{electric } U(1) \text{ invariance} \quad (6.3.19b)$$

$$-\hat{s}_2 \hat{\sigma}_2 \hat{h}^\top \hat{s}_2 \hat{\sigma}_2 = \hat{h}, \quad P^2 = +1 \text{ particle-hole (automatic)} \quad (6.3.19c)$$

$$\hat{s}_i \hat{h} \hat{s}_i = \hat{h}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{spin } SU(2) \text{ invariance.}$$

Apriori  $\hat{h} \in u(4N)$ , but the last spin  $SU(2)$  condition implies it must be proportional to the identity in spin space. We can then replace the above conditions with

$$\hat{h}^\top = \hat{h}, \quad \text{effective } T^2 = +1 \text{ time-reversal invariance} \quad (6.3.20a)$$

$$\hat{\sigma}_3 \hat{h} \hat{\sigma}_3 = \hat{h}, \quad \text{electric } U(1) \text{ invariance} \quad (6.3.20b)$$

$$-\hat{\sigma}_2 \hat{h}^\top \hat{\sigma}_2 = \hat{h}, \quad \text{effective } P^2 = -1 \text{ particle-hole (automatic).}$$

Here we see an example wherein the physical  $T$  and  $P$  are replaced with different effective  $T$  and  $P$ , after imposing spin  $SU(2)$  symmetry. In fact the  $P$  symmetry can be eliminated by further exploiting the electric  $U(1)$  invariance; these conditions imply that

$$\hat{h} = \begin{bmatrix} \hat{h}_N^{(1)} & 0 \\ 0 & \hat{h}_N^{(2)} \end{bmatrix}, \quad -[\hat{h}_N^{(2)}]^\top = \hat{h}_N^{(1)} \quad (6.3.21)$$

leading to  $\hat{h} \in u(N)$ . Finally, we remove the subalgebra associated to the "anti-time-reversal" condition  $-\hat{h}^\top = \hat{h}$ , leading to

$$\hat{h} \in u(N)/so(N), \quad \text{spin- } 1/2 \text{ metal with } T^2 = -1 \text{ and spin } SU(2) \text{ symmetry: class } AI \quad (6.3.22)$$

In this case, the spinless (Sec. 6.2.3.4) and spinful classes for time-reversal invariant metals are identical, so long as spin  $SU(2)$  symmetry is imposed in the latter case. This is not true for superconductors, however. The generic class for spinless time-reversal invariant superconductors is class  $BDI$  [Eq. (6.2.24)]. A spin-1/2 time-reversal invariant superconductor with spin  $SU(2)$  symmetry instead resides in class  $CI$ , see Table 1.

- Exercise: Demonstrate that a spin  $SU(2)$  invariant superconductor without time-reversal symmetry (neglecting Zeeman effects) has

$$\hat{h} \in sp(2N) \quad (6.3.23)$$

while a spin  $SU(2)$  invariant superconductor with physical time-reversal symmetry [Eqs. (6.2.13) and (6.3.7)] has

$$\hat{h} \in sp(2N)/u(N) \quad (6.3.24)$$

Verify that these correspond to classes  $C$  and  $CI$  in Table 1, with the prescribed effective versions of  $T$  and/or  $P$ .

## 6.4 The Cartan classification

Table 1: The "10-fold way:" the random matrix classification of Hamiltonians. The Cartan designation for the Riemannian symmetric space AI, DIII, etc. is given in the first column. Example realizations from condensed matter physics are listed in the second. These consist of two- or three-dimensional phases in non-interacting or mean field fermion models, or real (interacting) experimental systems in the same class. Here "SC" abbreviates superconductor. Real experimental systems are highlighted in blue. The defining discrete symmetries are listed next:  $T$  (time-reversal),  $P$  (particle-hole), and  $S$  (chiral or "sublattice"). As emphasized in the text, these are not necessarily the microscopic symmetries, if the system has an additional continuous symmetry. The matrix structure is listed in the penultimate column. The final column asks whether a gapped, strong topological phase (insulator or superconductor) can be realized in this class in three spatial dimensions.

| Class            | Example                                                                                                                                                    | $T$ | $P$ | $S$ | Structure                     | Strong top. phase in 3D? |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-------------------------------|--------------------------|
| A "Unitary"      | Metal with broken $T$ due to (e.g.) magnetic impurities, or magnetic field: 2D integer quantum Hall effect                                                 | 0   | 0   | 0   | $u(N)$                        | no                       |
| $D$              | SC with broken $T$ ; 2D topological p+ip SC: $5/2$ state in fractional quantum Hall effect (?); superfluid $^3\text{HeA}$ ; 2D thermal quantum Hall effect | 0   | 1   | 0   | $so(2N)$                      | no                       |
| $C$              | SC with broken $T$ and spin $su(2)$ symmetry; 2D spin quantum Hall effect                                                                                  | 0   | -1  | 0   | $sp(2N)$                      | no                       |
| AI "Orthogonal"  | Metal with $T$ and spin $su(2)$ symmetry: 3D P-doped Si, 2D Si MOSFET MIT                                                                                  | 1   | 0   | 0   | $u(N)/so(N)$                  | no                       |
| $BDI$            | Orthogonal metal with chiral symmetry; spinless p-wave SC with $T$                                                                                         | 1   | 1   | 1   | $so(2N)/so(N) \times so(N)$   | no                       |
| $CI$             | SC with $T$ and spin $su(2)$ symmetry: 2D high- $T_c$ cuprate SCs, 3D topological SC                                                                       | 1   | -1  | 1   | $sp(2N)/u(N)$                 | yes                      |
| AII "Symplectic" | Metal with $T$ and spin-orbit coupling; $\mathbb{Z}_2$ topological insulators in 2D, 3D                                                                    | -1  | 0   | 0   | $u(2N)/sp(2N)$                | yes                      |
| $DIII$           | SC with $T$ and spin-orbit coupling: 3D topological SC, superfluid $^3\text{HeB}$                                                                          | -1  | 1   | 1   | $so(2N)/u(N)$                 | yes                      |
| $CII$            | Symplectic metal with chiral symmetry                                                                                                                      | -1  | -1  | 1   | $sp(4N)/sp(2N) \times sp(2N)$ | yes                      |
| $AIII$           | Unitary metal with chiral symmetry; SC with $T$ and spin $U(1)$ symmetry (e.g. p-wave); 3D topological SC                                                  | 0   | 0   | 1   | $u(2N)/u(N) \times u(N)$      | yes                      |

# 15 Lie algebra for particle physics by H. Georgi

## 15.1 Finite Groups

We will begin with an introduction to finite group theory. This is not intended to be a self-contained treatment of this enormous and beautiful subject. We will concentrate on a few simple facts that are useful in understanding the compact Lie algebras. We will introduce a lot of definitions, sometimes proving things, but often relying on the reader to prove them.

### 15.1.1 1.1 Groups and representations

A Group,  $G$ , is a set with a rule for assigning to every (ordered) pair of elements, a third element, satisfying:

(1.A.1) If  $f, g \in G$  then  $h = fg \in G$ .

(1.A.2) For  $f, g, h \in G$ ,  $f(gh) = (fg)h$ .

(1.A.3) There is an identity element,  $e$ , such that for all  $f \in G$ ,  $ef = fe = f$ .

(1.A.4) Every element  $f \in G$  has an inverse,  $f^{-1}$ , such that  $ff^{-1} = f^{-1}f = e$ .

Thus a group is a multiplication table specifying  $g_1g_2 \forall g_1, g_2 \in G$ . If the group elements are discrete, we can write the multiplication table in the form

| $\backslash$ | $e$      | $g_1$    | $g_2$    | $\cdots$ |
|--------------|----------|----------|----------|----------|
| $e$          | $e$      | $g_1$    | $g_2$    | $\cdots$ |
| $g_1$        | $g_1$    | $g_1g_1$ | $g_1g_2$ | $\cdots$ |
| $g_2$        | $g_2$    | $g_2g_1$ | $g_2g_2$ | $\cdots$ |
| $\vdots$     | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

A Representation of  $G$  is a mapping,  $D$  of the elements of  $G$  onto a set of linear operators with the following properties:

1.B.  $1D(e) = 1$ , where 1 is the identity operator in the space on which the linear operators act.

1.B.  $2D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2)$ , in other words the group multiplication law is mapped onto the natural multiplication in the linear space on which the linear operators act.

### 15.1.2 1.2 Example - $Z_3$

A group is finite if it has a finite number of elements. Otherwise it is infinite. The number of elements in a finite group  $G$  is called the order of  $G$ . Here is a finite group of order 3.

|     | $e$ | $a$ | $b$ |
|-----|-----|-----|-----|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $e$ | $a$ |

This is  $Z_3$ , the cyclic group of order 3. Notice that every row and column of the multiplication table contains each element of the group exactly once. This must be the case because the inverse exists.

An Abelian group is one in which the multiplication law is commutative

$$g_1g_2 = g_2g_1 \quad (1.3)$$

Evidently,  $Z_3$  is Abelian.

The following is a representation of  $Z_3$

$$D(e) = 1, \quad D(a) = e^{2\pi i/3}, \quad D(b) = e^{4\pi i/3} \quad (1.4)$$

The dimension of a representation is the dimension of the space on which it acts - the representation (1.4) is 1 dimensional.

### 15.1.3 1.3 The regular representation

Here's another representation of  $Z_3$

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$D(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

This representation was constructed directly from the multiplication table by the following trick. Take the group elements themselves to form an orthonormal basis for a vector space,  $|e\rangle$ ,  $|a\rangle$ , and  $|b\rangle$ . Now define

$$D(g_1)|g_2\rangle = |g_1g_2\rangle \quad (1.6)$$

The reader should show that this is a representation. It is called the regular representation. Evidently, the dimension of the regular representation is the order of the group. The matrices of (1.5) are then constructed as follows.

$$|e_1\rangle \equiv |e\rangle, \quad |e_2\rangle \equiv |a\rangle, \quad |e_3\rangle \equiv |b\rangle \quad (1.7)$$

$$[D(g)]_{ij} = \langle e_i | D(g) | e_j \rangle \quad (1.8)$$

The matrices are the matrix elements of the linear operators. (1.8) is a simple, but very general and very important way of going back and forth from operators to matrices. This works for any representation, not just the regular representation. We will use it constantly. The basic idea here is just the insertion of a complete set of intermediate states. The matrix corresponding to a product of operators is the matrix product of the matrices corresponding to the operators -

$$\begin{aligned} [D(g_1g_2)]_{ij} &= [D(g_1)D(g_2)]_{ij} \\ &= \langle e_i | D(g_1)D(g_2) | e_j \rangle \\ &= \sum_k \langle e_i | D(g_1) | e_k \rangle \langle e_k | D(g_2) | e_j \rangle \\ &= \sum_k [D(g_1)]_{ik} [D(g_2)]_{kj} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Note that the construction of the regular representation is completely general for any finite group. For any finite group, we can define a vector space in which the basis vectors are labeled by the group elements. Then (1.6) defines the regular representation. We will see the regular representation of various groups in this chapter.

### 15.1.4 1.4 Irreducible representations

What makes the idea of group representations so powerful is the fact that they live in linear spaces. And the wonderful thing about linear spaces is we are free to choose to represent the states in a more convenient way by making a linear transformation. As long as the transformation is invertible, the new states are just as good as the old. Such a transformation on the states produces a similarity transformation on the linear operators, so that we can always make a new representation of the form

$$D(g) \rightarrow D'(g) = S^{-1}D(g)S \quad (1.10)$$

Because of the form of the similarity transformation, the new set of operators has the same multiplication rules as the old one, so  $D'$  is a representation if  $D$  is.  $D'$  and  $D$  are said to be equivalent representations because they differ just by a trivial choice of basis.

Unitary operators ( $O$  such that  $O^\dagger = O^{-1}$ ) are particularly important. A representation is unitary if all the  $D(g)$ s are unitary. Both the representations we have discussed so far are unitary. It will turn out that all representations of finite groups are equivalent to unitary representations (we'll prove this later it is easy and neat).

A representation is reducible if it has an invariant subspace, which means that the action of any  $D(g)$  on any vector in the subspace is still in the subspace. In terms of a projection operator  $P$  onto the subspace this condition can be written as

$$PD(g)P = D(g)P \forall g \in G \quad (1.11)$$

For example, the regular representation of  $Z_3$  (1.5) has an invariant subspace projected on by

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

because  $D(g)P = P \forall g$ . The restriction of the representation to the invariant subspace is itself a representation. In this case, it is the trivial representation for which  $D(g) = 1$  (the trivial representation,  $D(g) = 1$ , is always a representation - every group has one).

A representation is irreducible if it is not reducible.

A representation is completely reducible if it is equivalent to a representation whose matrix elements have the following form:

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

where  $D_j(g)$  is irreducible  $\forall j$ . This is called block diagonal form.

A representation in block diagonal form is said to be the direct sum of the subrepresentations,  $D_j(g)$ ,

$$D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \quad (1.14)$$

In transforming a representation to block diagonal form, we are decomposing the original representation into a direct sum of its irreducible components. Thus another way of defining complete reducibility is to say that a completely reducible representation can be decomposed into a direct sum of irreducible representations. This is an important idea. We will use it often.

We will show later that any representation of a finite group is completely reducible. For example, for (1.5), take

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

where

$$\omega = e^{2\pi i/3} \quad (1.16)$$

then

$$D'(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

$$D'(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

### 15.1.5 1.5 Transformation groups

There is a natural multiplication law for transformations of a physical system. If  $g_1$  and  $g_2$  are two transformations,  $g_1 g_2$  means first do  $g_2$  and then do  $g_1$ .

Note that it is purely convention whether we define our composition law to be right to left, as we have done, or left to right. Either gives a perfectly consistent definition of a transformation group.

If this transformation is a symmetry of a quantum mechanical system, then the transformation takes the Hilbert space into an equivalent one. Then for each group element  $g$ , there is a unitary operator  $D(g)$  that maps the Hilbert space into an equivalent one. These unitary operators form a representation of the transformation group because the transformed quantum states represent the transformed physical system. Thus for any set of symmetries, there is a representation of the symmetry group on the Hilbert space - we say that the Hilbert space transforms according to some representation of the group. Furthermore, because the transformed states have the same energy as the originals,  $D(g)$  commutes with the Hamiltonian,  $[D(g), H] = 0$ . As we will see in more detail later, this means that we can always choose the energy eigenstates to transform like irreducible representations of the group. It is useful to think about this in a simple example.

### 15.1.6 1.6 Application: parity in quantum mechanics

Parity is the operation of reflection in a mirror. Reflecting twice gets you back to where you started. If  $p$  is a group element representing the parity reflection, this means that  $p^2 = e$ . Thus this is a transformation that together with the identity transformation (that is, doing nothing) forms a very simple group, with the following multiplication law:

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
|     | $e$ | $p$ |
| $e$ | $e$ | $p$ |
| $p$ | $p$ | $e$ |

This group is called  $Z_2$ . For this group there are only two irreducible representations, the trivial one in which  $D(p) = 1$  and one in which  $D(e) = 1$  and  $D(p) = -1$ . Any representation is completely reducible. In particular, that means that the Hilbert space of any parity invariant system can be decomposed into states that behave like irreducible representations, that is on which  $D(p)$  is either 1 or -1. Furthermore, because  $D(p)$  commutes with the Hamiltonian,  $D(p)$  and  $H$  can be simultaneously diagonalized. That is we can assign each energy eigenstate a definite value of  $D(p)$ . The energy eigenstates on which  $D(p) = 1$  are said to transform according to the trivial representation. Those on which  $D(p) = -1$  transform according to the other representation. This should be familiar from nonrelativistic quantum mechanics in one dimension. There you know that a particle in a potential that is symmetric about  $x = 0$  has energy eigenfunctions that are either symmetric under  $x \rightarrow -x$  (corresponding to the trivial representation), or antisymmetric (the representation with  $D(p) = -1$ ).

### 15.1.7 1.7 Example: $S_3$

The permutation group (or symmetric group) on 3 objects, called  $S_3$  where

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 3) & a_2 &= (3, 2, 1) \\ a_3 &= (1, 2) & a_4 &= (2, 3) & a_5 &= (3, 1) \end{aligned} \quad (1.19)$$

The notation means that  $a_1$  is a cyclic permutation of the things in positions 1, 2 and 3;  $a_2$  is the inverse, anticyclic permutation;  $a_3$  interchanges the objects in positions 1 and 2; and so on. The multiplication law is then determined by the transformation rule that  $g_1 g_2$  means first do  $g_2$  and then do  $g_1$ . It is

| 1     | $e$   | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e$   | $e$   | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $e$   | $a_5$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $e$   | $a_1$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_3$ |
| $a_3$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $e$   | $a_1$ | $a_2$ |
| $a_4$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_3$ | $a_2$ | $e$   | $a_1$ |
| $a_5$ | $a_5$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_2$ | $e$   |

We could equally well define it to mean first do  $g_1$  and then do  $g_2$ . These two rules define different multiplication tables, but they are related to one another by simple relabeling of the elements, so they give the same group. There is another possibility of confusion here between whether we are permuting the objects in positions 1,2 and 3, or simply treating 1,2 and 3 as names for the three objects. Again these two give different multiplication tables, but only up to trivial renamings. The first is a little more physical, so we will use that. The permutation group is an another example of a transformation group on a physical system.

$S_3$  is non-Abelian because the group multiplication law is not commutative. We will see that it is the lack of commutativity that makes group theory so interesting.

Here is a unitary irreducible representation of  $S_3$

$$\begin{aligned}
 D(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
 D(a_2) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D(a_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 D(a_4) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D(a_5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

The interesting thing is that the irreducible unitary representation is more than 1 dimensional. It is necessary that at least some of the representations of a non-Abelian group must be matrices rather than numbers. Only matrices can reproduce the non-Abelian multiplication law. Not all the operators in the representation can be diagonalized simultaneously. It is this that is responsible for a lot of the power of the theory of group representations.

### 15.1.8 1.8 Example: addition of integers

The integers form an infinite group under addition.

$$xy = x + y \tag{1.22}$$

This is rather unimaginatively called the additive group of the integers. Since this group is infinite, we can't write down the multiplication table, but the rule above specifies it completely.

Here is a representation:

$$D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$



This representation is reducible, but you can show that it is not completely reducible and it is not equivalent to a unitary representation. It is reducible because

$$D(x)P = P \quad (1.24)$$

where

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

However,

$$D(x)(I - P) \neq (I - P) \quad (1.26)$$

so it is not completely reducible.

The additive group of the integers is infinite, because, obviously, there are an infinite number of integers. For a finite group, all reducible representations are completely reducible, because all representations are equivalent to unitary representations.

### 15.1.9 1.9 Useful theorems

Theorem 1.1 Every representation of a finite group is equivalent to a unitary representation.

Proof: Suppose  $D(g)$  is a representation of a finite group  $G$ . Construct the operator

$$S = \sum_{g \in G} D(g)^\dagger D(g) \quad (1.27)$$

$S$  is hermitian and positive semidefinite. Thus it can be diagonalized and its eigenvalues are non-negative:

$$S = U^{-1} d U \quad (1.28)$$

where  $d$  is diagonal

$$d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

where  $d_j \geq 0 \forall j$ . Because of the group property, all of the  $d_j$  s are actually positive. Proof - suppose one of the  $d_j$  s is zero. Then there is a vector  $\lambda$  such that  $S\lambda = 0$ . But then

$$\lambda^\dagger S \lambda = 0 = \sum_{g \in G} \|D(g)\lambda\|^2 \quad (1.30)$$

Thus  $D(g)\lambda$  must vanish for all  $g$ , which is impossible, since  $D(e) = 1$ . Therefore, we can construct a square-root of  $S$  that is hermitian and invertible

$$X = S^{1/2} \equiv U^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{d_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U \quad (1.31)$$

$X$  is invertible, because none of the  $d_j$  s are zero. We can now define

$$D'(g) = X D(g) X^{-1} \quad (1.32)$$

Now, somewhat amazingly, this representation is unitary!

$$D'(g)^\dagger D'(g) = X^{-1} D(g)^\dagger S D(g) X^{-1} \quad (1.33)$$

but

$$\begin{aligned} D(g)^\dagger S D(g) &= D(g)^\dagger \left( \sum_{h \in G} D(h)^\dagger D(h) \right) D(g) \\ &= \sum_{h \in G} D(hg)^\dagger D(hg) \\ &= \sum_{h \in G} D(h)^\dagger D(h) = S = X^2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

where the last line follows because  $hg$  runs over all elements of  $G$  when  $h$  does. QED.

We saw in the representation (1.23) of the additive group of the integers an example of a reducible but not completely reducible representation. The way it works is that there is a  $P$  that projects onto an invariant subspace, but  $(1 - P)$  does not. This is impossible for a unitary representation, and thus representations of finite groups are always completely reducible. Let's prove it.

**Theorem 1.2** Every representation of a finite group is completely reducible.

**Proof:** By the previous theorem, it is sufficient to consider unitary representations. If the representation is irreducible, we are finished because it is already in block diagonal form. If it is reducible, then  $\exists$  a projector  $P$  such that  $PD(g)P = D(g)P \forall g \in G$ . This is the condition that  $P$  be an invariant subspace. Taking the adjoint gives  $PD(g)^\dagger P = PD(g)^\dagger \forall g \in G$ . But because  $D(g)$  is unitary,  $D(g)^\dagger = D(g)^{-1} = D(g^{-1})$  and thus since  $g^{-1}$  runs over all  $G$  when  $g$  does,  $PD(g)P = PD(g) \forall g \in G$ . But this implies that  $(1 - P)D(g)(1 - P) = D(g)(1 - P) \forall g \in G$  and thus  $1 - P$  projects onto an invariant subspace. Thus we can keep going by induction and eventually completely reduce the representation.

### 15.1.10 1.10 Subgroups

A group  $H$  whose elements are all elements of a group  $G$  is called a subgroup of  $G$ . The identity, and the group  $G$  are trivial subgroups of  $G$ . But many groups have nontrivial subgroups (which just means some subgroup other than  $G$  or  $e$ ) as well. For example, the permutation group,  $S_3$ , has a  $Z_3$  subgroup formed by the elements  $\{e, a_1, a_2\}$ .

We can use a subgroup to divide up the elements of the group into subsets called cosets. A right-coset of the subgroup  $H$  in the group  $G$  is a set of elements formed by the action of the elements of  $H$  on the left on a given element of  $G$ , that is all elements of the form  $Hg$  for some fixed  $g$ . You can define left-cosets as well.

For example,  $\{a_3, a_4, a_5\}$  is a coset of  $Z_3$  in  $S_3$  in (1.20) above. The number of elements in each coset is the order of  $H$ . Every element of  $G$  must belong to one and only one coset. Thus for finite groups, the order of a subgroup  $H$  must be a factor of order of  $G$ . It is also sometimes useful to think about the coset-space,  $G/H$  defined by regarding each coset as a single element of the space.

A subgroup  $H$  of  $G$  is called an invariant or normal subgroup if for every  $g \in G$

$$gH = Hg \quad (1.35)$$

which is (we hope) an obvious short-hand for the following: for every  $g \in G$  and  $h_1 \in H$  there exists an  $h_2 \in H$  such that  $h_1g = gh_2$ , or  $gh_2g^{-1} = h_1$ . The trivial subgroups  $e$  and  $G$  are invariant for any group. It is less obvious but also true of the subgroup  $Z_3$  of  $S_3$  in (1.20) (you

can see this by direct computation or notice that the elements of  $Z_3$  are those permutations that involve an even number of interchanges). However, the set  $\{e, a_4\}$  is a subgroup of  $G$  which is not invariant.  $a_5\{e, a_4\} = \{a_5, a_1\}$  while  $\{e, a_4\}a_5 = \{a_5, a_2\}$ .

If  $H$  is invariant, then we can regard the coset space as a group. The multiplication law in  $G$  gives the natural multiplication law on the cosets,  $Hg$ :

$$(Hg_1)(Hg_2) = (Hg_1Hg_1^{-1})(g_1g_2) \quad (1.36)$$

But if  $H$  is invariant  $Hg_1Hg_1^{-1} = H$ , so the product of elements in two cosets is in the coset represented by the product of the elements. In this case, the coset space,  $G/H$ , is called the factor group of  $G$  by  $H$ .

What is the factor group  $S_3/Z_3$ ? The answer is  $Z_2$ .

The center of a group  $G$  is the set of all elements of  $G$  that commute with all elements of  $G$ . The center is always an Abelian, invariant subgroup of  $G$ . However, it may be trivial, consisting only of the identity, or of the whole group.

There is one other concept, related to the idea of an invariant subgroup, that will be useful. Notice that the condition for a subgroup to be invariant can be rewritten as

$$gHg^{-1} = H \forall g \in G \quad (1.37)$$

This suggests that we consider sets rather than subgroups satisfying same condition.

$$g^{-1}Sg = S \forall g \in G \quad (1.38)$$

Such sets are called conjugacy classes. We will see later that there is a one-to-one correspondence between them and irreducible representations. A subgroup that is a union of conjugacy classes is invariant.

### Example -

The conjugacy classes of  $S_3$  are  $\{e\}$ ,  $\{a_1, a_2\}$  and  $\{a_3, a_4, a_5\}$ .

The mapping

$$G \rightarrow gGg^{-1} \quad (1.39)$$

for a fixed  $g$  is also interesting. It is called an inner automorphism. An isomorphism is a one-to-one mapping of one group onto another that preserves the multiplication law. An automorphism is a one-to-one mapping of a group onto itself that preserves the multiplication law. It is easy to see that (1.39) is an automorphism. Because  $g^{-1}g_1gg^{-1}g_2g = g^{-1}g_1g_2g$ , it preserves the multiplication law. Since  $g^{-1}g_1g = g^{-1}g_2g \Rightarrow g_1 = g_2$ , it is one to one. An automorphism of the form (1.39) where  $g$  is a group element is called an inner automorphism). An outer automorphism is one that cannot be written as  $g^{-1}Gg$  for any group element  $g$ .

### 15.1.11 1.11 Schur's lemma

Theorem 1.3 If  $D_1(g)A = AD_2(g)\forall g \in G$  where  $D_1$  and  $D_2$  are inequivalent, irreducible representations, then  $A = 0$ .

Proof: This is part of Schur's lemma. First suppose that there is a vector  $|\mu\rangle$  such that  $A|\mu\rangle = 0$ . Then there is a non-zero projector,  $P$ , onto the subspace that annihilates  $A$  on the right. But this subspace is invariant with respect to the representation  $D_2$ , because

$$AD_2(g)P = D_1(g)AP = 0 \forall g \in G \quad (1.40)$$

But because  $D_2$  is irreducible,  $P$  must project onto the whole space, and  $A$  must vanish. If  $A$  annihilates one state, it must annihilate them all. A similar argument shows that  $A$  vanishes if there is a  $\langle \nu |$  which annihilates  $A$ . If no vector annihilates  $A$  on either side, then it must be an invertible square matrix. It must be square, because, for example, if the number of rows were larger than the number of columns, then the rows could not be a complete set of states, and there would be a vector that annihilates  $A$  on the right. A square matrix is invertible unless its determinant vanishes. But if the determinant vanishes, then the set of homogeneous linear equations

$$A|\mu\rangle = 0 \quad (1.41)$$

has a nontrivial solution, which again means that there is a vector that annihilates  $A$ . But if  $A$  is square and invertible, then

$$A^{-1}D_1(g)A = D_2(g)\forall g \in G \quad (1.42)$$

so  $D_1$  and  $D_2$  are equivalent, contrary to assumption. QED.

The more important half of Schur's lemma applies to the situation where  $D_1$  and  $D_2$  above are equivalent representations. In this case, we might as well take  $D_1 = D_2 = D$ , because we can do so by a simple change of basis. The other half of Schur's lemma is the following.

**Theorem 1.4** If  $D(g)A = AD(g)\forall g \in G$  where  $D$  is a finite dimensional irreducible representation, then  $A \propto I$ .

In words, if a matrix commutes with all the elements of a finite dimensional irreducible representation, it is proportional to the identity.

**Proof:** Note that here the restriction to a finite dimensional representation is important. We use the fact that any finite dimensional matrix has at least one eigenvalue, because the characteristic equation  $\det(A - \lambda I) = 0$  has at least one root, and then we can solve the homogeneous linear equations for the components of the eigenvector  $|\mu\rangle$ . But then  $D(g)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)D(g)\forall g \in G$  and  $(A - \lambda I)|\mu\rangle = 0$ . Thus the same argument we used in the proof of the previous theorem implies  $(A - \lambda I) = 0$ . QED.

A consequence of Schur's lemma is that the form of the basis states of an irreducible representation are essentially unique. We can rewrite theorem 1.4 as the statement

$$A^{-1}D(g)A = D(g)\forall g \in G \Rightarrow A \propto I \quad (1.43)$$

for any irreducible representation  $D$ . This means once the form of  $D$  is fixed, there is no further freedom to make nontrivial similarity transformations on the states. The only unitary transformation you can make is to multiply all the states by the same phase factor.

In quantum mechanics, Schur's lemma has very strong consequences for the matrix elements of any operator,  $O$ , corresponding to an observable that is invariant under the symmetry transformations. This is because the matrix elements  $\langle a, j, x | O | b, k, y \rangle$  behave like the  $A$  operator in (1.40). To see this,

let's consider the complete reduction of the Hilbert space in more detail. The symmetry group gets mapped into a unitary representation

$$g \rightarrow D(g)\forall g \in G \quad (1.44)$$

where  $D$  is the (in general very reducible) unitary representation of  $G$  that acts on the entire Hilbert space of the quantum mechanical system. But if the representation is completely reducible, we know that we can choose a basis in which  $D$  has block diagonal form with each block corresponding to some unitary irreducible representation of  $G$ . We can write the orthonormal basis states as

$$|a, j, x\rangle \quad (1.45)$$

satisfying

$$\langle a, j, x | b, k, y \rangle = \delta_{ab} \delta_{jk} \delta_{xy} \quad (1.46)$$

where  $a$  labels the irreducible representation,  $j = 1$  to  $n_a$  labels the state within the representation, and  $x$  represents whatever other physical parameters there are.

Implicit in this treatment is an important assumption that we will almost always make without talking about it. We assume that have chosen a basis in which all occurrences of each irreducible representation  $a$ , is described by the same set of unitary representation matrices,  $D_a(g)$ . In other words, for each irreducible representation, we choose a canonical form, and use it exclusively

In this special basis, the matrix elements of  $D(g)$  are

$$\langle a, j, x | D(g) | b, k, y \rangle = \delta_{ab} \delta_{xy} [D_a(g)]_{jk} \quad (1.47)$$

This is just a rewriting of (1.13) with explicit indices rather than as a matrix. We can now check that our treatment makes sense by writing the representation  $D$  in this basis by inserting a complete set of intermediate states on both sides:

$$I = \sum_{a,j,x} |a, j, x\rangle \langle a, j, x| \quad (1.48)$$

Then we can write

$$\begin{aligned} D(g) &= \sum_{a,j,x} |a, j, x\rangle \left\langle a, j, x \left| D(g) \sum_{b,k,y} |b, k, y\rangle \langle b, k, y| \right. \right. \\ &= \sum_{\substack{a,j,x \\ b,k,y}} |a, j, x\rangle \delta_{ab} \delta_{xy} [D_a(g)]_{jk} \langle b, k, y| \\ &= \sum_{a,j,k,x} |a, j, x\rangle [D_a(g)]_{jk} \langle a, k, x| \end{aligned} \quad (1.49)$$

This is another way of writing a representation that is in block diagonal form. Note that if a particular irreducible representation appears only once in  $D$ , then we don't actually need the  $x$  variable to label its states. But typically, in the full quantum mechanical Hilbert space, each irreducible representation will appear many times, and then the physical  $x$  variable distinguish states that have the same symmetry properties, but different physics. The important fact, however, is that the dependence on the physics in (1.47) is rather trivial - only that the states are orthonormal - all the group theory is independent of  $x$  and  $y$ .

Under the symmetry transformation, since the states transform like

$$|\mu\rangle \rightarrow D(g)|\mu\rangle \quad \langle\mu| \rightarrow \langle\mu|D(g)^\dagger \quad (1.50)$$

operators transform like

$$O \rightarrow D(g)OD(g)^\dagger \quad (1.51)$$

in order that all matrix element remain unchanged. Thus an invariant observable satisfies

$$O \rightarrow D(g)OD(g)^\dagger = O \quad (1.52)$$

which implies that  $O$  commutes with  $D(g)$

$$[O, D(g)] = 0 \forall g \in G \quad (1.53)$$

Then we can constrain the matrix element

$$\langle a, j, x | O | b, k, y \rangle \quad (1.54)$$

by arguing as follows:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle a, j, x | [O, D(g)] | b, k, y \rangle \\ &= \sum_{k'} \langle a, j, x | O | b, k', y \rangle \langle b, k', y | D(g) | b, k, y \rangle \\ &\quad - \sum_{j'} \langle a, j, x | D(g) | a, j', x \rangle \langle a, j', x | O | b, k, y \rangle \end{aligned} \quad (1.55)$$

Now we use (1.47), which exhibits the fact that the matrix elements of  $D(g)$  have only trivial dependence on the physics, to write

$$\begin{aligned} 0 &= \langle a, j, x | [O, D(g)] | b, k, y \rangle \\ &= \sum_{k'} \langle a, j, x | O | b, k', y \rangle [D_b(g)]_{k'k} \\ &\quad - \sum_{j'} [D_a(g)]_{jj'} \langle a, j', x | O | b, k, y \rangle \end{aligned} \quad (1.56)$$

Thus the matrix element (1.54) satisfies the hypotheses of Schur's lemma. It must vanish if  $a \neq b$ . It must be proportional to the identity (in indices, that is  $\delta_{jk}$ ) for  $a = b$ . However, the symmetry doesn't tell us anything about the dependence on the physical parameters,  $x$  and  $y$ . Thus we can write

$$\langle a, j, x | O | b, k, y \rangle = f_a(x, y) \delta_{ab} \delta_{jk} \quad (1.57)$$

The importance of this is that the physics is all contained in the function  $f_a(x, y)$  - all the dependence on the group theory labels is completely fixed by the symmetry. As we will see, this can be very powerful. This is a simple example of the Wigner-Eckart theorem, which we will discuss in much more generality later.

### 15.1.12 1.12 \* Orthogonality relations

The same kind of summation over the group elements that we used in the proof of theorem 1.1, can be used together with Schur's lemma to show some more remarkable properties of the irreducible representations. Consider the following linear operator (written as a "dyadic")

$$A_{j\ell}^{ab} \equiv \sum_{g \in G} D_a(g^{-1}) |a, j\rangle \langle b, \ell| D_b(g) \quad (1.58)$$

where  $D_a$  and  $D_b$  are finite dimensional irreducible representations of  $G$ . Now look at

$$D_a(g_1)A_{j\ell}^{ab} = \sum_{g \in G} D_a(g_1) D_a(g^{-1}) |a, j\rangle \langle b, \ell| D_b(g) \quad (1.59)$$

$$= \sum_{g \in G} D_a(g_1 g^{-1}) |a, j\rangle \langle b, \ell| D_b(g) \quad (1.60)$$

$$= \sum_{g \in G} D_a((gg_1^{-1})^{-1}) |a, j\rangle \langle b, \ell| D_b(g) \quad (1.61)$$

Now let  $g' = gg_1^{-1}$

$$= \sum_{g' \in G} D_a(g'^{-1}) |a, j\rangle \langle b, \ell| D_b(g' g_1) \quad (1.62)$$

$$= \sum_{g' \in G} D_a(g'^{-1}) |a, j\rangle \langle b, \ell| D_b(g') D_b(g_1) = A_{j\ell}^{ab} D_b(g_1) \quad (1.63)$$

Now Schur's lemma (theorems 1.3 and 1.4) implies  $A_{j\ell}^{ab} = 0$  if  $D_a$  and  $D_b$  are different, and further that if they are the same (remember that we have chosen a canonical form for each representation so equivalent representations are written in exactly the same way)  $A_{j\ell}^{ab} \propto I$ . Thus we can write

$$A_{j\ell}^{ab} \equiv \sum_{g \in G} D_a(g^{-1}) |a, j\rangle \langle b, \ell| D_b(g) = \delta_{ab} \lambda_{j\ell}^a I \quad (1.64)$$

To compute  $\lambda_{j\ell}^a$ , compute the trace of  $A_{j\ell}^{ab}$  (in the Hilbert space, not the indices) in two different ways. We can write

$$\text{Tr } A_{j\ell}^{ab} = \delta_{ab} \text{Tr } (\lambda_{j\ell}^a I) = \delta_{ab} \lambda_{j\ell}^a \text{Tr } I = \delta_{ab} \lambda_{j\ell}^a n_a \quad (1.65)$$

where  $n_a$  is the dimension of  $D_a$ . But we can also use the cyclic property of the trace and the fact that  $A_{jk}^{ab} \propto \delta_{ab}$  to write

$$\text{Tr } A_{j\ell}^{ab} = \delta_{ab} \sum_{g \in G} \langle a, \ell | D_a(g) D_a(g^{-1}) | a, j \rangle = N \delta_{ab} \delta_{j\ell} \quad (1.66)$$

where  $N$  is the order of the group. Thus  $\lambda_{j\ell}^a = N \delta_{j\ell} / n_a$  and we have shown

$$\sum_{g \in G} D_a(g^{-1}) |a, j\rangle \langle b, \ell| D_b(g) = \frac{N}{n_a} \delta_{ab} \delta_{j\ell} I \quad (1.67)$$

Taking the matrix elements of these relations yields orthogonality relations for the matrix elements of irreducible representations.

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} [D_a(g^{-1})]_{kj} [D_b(g)]_{\ell m} = \delta_{ab} \delta_{j\ell} \delta_{km} \quad (1.68)$$

For unitary irreducible representations, we can write

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} [D_a(g)]_{jk}^* [D_b(g)]_{\ell m} = \delta_{ab} \delta_{j\ell} \delta_{km} \quad (1.69)$$

so that with proper normalization, the matrix elements of the inequivalent unitary irreducible representations

$$\sqrt{\frac{n_a}{N}} [D_a(g)]_{jk} \quad (1.70)$$

are orthonormal functions of the group elements,  $g$ . Because the matrix elements are orthonormal, they must be linearly independent. We can also show that they are a complete set of functions of  $g$ , in the sense that an arbitrary function of  $g$  can be expanded in them. An arbitrary function of  $g$  can be written in terms of a bra vector in the space on which the regular representation acts:

$$F(g) = \langle F|g\rangle = \langle F|D_R(g)|e\rangle \quad (1.71)$$

where

$$\langle F| = \sum_{g' \in G} F(g') \langle g'| \quad (1.72)$$

and  $D_R$  is the regular representation. Thus an arbitrary  $F(g)$  can be written as a linear combination of the matrix elements of the regular representation.

$$F(g) = \sum_{g' \in G} F(g') \langle g'|D_R(g)|e\rangle = \sum_{g' \in G} F(g') [D_R(g)]_{g'e} \quad (1.73)$$

But since  $D_R$  is completely reducible, this can be rewritten as a linear combination of the matrix elements of the irreducible representations. Note that while this shows that the matrix elements of the inequivalent irreducible representations are complete, it doesn't tell us how to actually find what they are. The orthogonality relations are the same. They are useful only once we actually know explicitly what the representation look like. Putting these results together, we have proved

**Theorem 1.5** The matrix elements of the unitary, irreducible representations of  $G$  are a complete orthonormal set for the vector space of the regular representation, or alternatively, for functions of  $g \in G$ .

An immediate corollary is a result that is rather amazing:

$$N = \sum_i n_i^2 \quad (1.74)$$

- the order of the group  $N$  is the sum of the squares of the dimensions of the irreducible representations  $n_i$  just because this is the number of components of the matrix elements of the irreducible representations. You can check that this works for all the examples we have seen.

Example: Fourier series - cyclic group  $Z_N$  with elements  $a_j$  for  $j = 0$  to  $N - 1$  (with  $a_0 = e$ )

$$a_j a_k = a_{(j+k) \bmod N} \quad (1.75)$$

The irreducible representations of  $Z_N$  are

$$D_n(a_j) = e^{2\pi i n j / N} \quad (1.76)$$

all 1-dimensional. <sup>1</sup> Thus (1.69) gives

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i n' j / N} e^{2\pi i n j / N} = \delta_{n'n} \quad (1.77)$$

which is the fundamental relation for Fourier series.



### 15.1.13 1.13 Characters

The characters  $\chi_D(g)$  of a group representation  $D$  are the traces of the linear operators of the representation or their matrix elements:

$$\chi_D(g) \equiv \text{Tr } D(g) = \sum_i [D(g)]_{ii} \quad (1.78)$$

The advantage of the characters is that because of the cyclic property of the trace  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ , they are unchanged by similarity transformations, thus all equivalent representations have the same characters. The characters are also different for each inequivalent irreducible representation,  $D_a$  - in fact, they are orthonormal up to an overall factor of  $N$  - to see this just sum (1.69) over  $j = k$  and  $\ell = m$

$$\sum_{\substack{g \in G \\ \ell=k}} \frac{1}{N} [D_a(g)]_{jk}^* [D_b(g)]_{\ell m} = \sum_{\substack{j=k \\ \ell=m}} \frac{1}{n_a} \delta_{ab} \delta_{j\ell} \delta_{km} = \delta_{ab}$$

or

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_{D_b}(g) = \delta_{ab} \quad (1.79)$$

Since the characters of different irreducible representations are orthogonal, they are different. The characters are constant on conjugacy classes because

$$\text{Tr } D(g^{-1}g_1g) = \text{Tr } (D(g^{-1}) D(g_1) D(g)) = \text{Tr } D(g_1) \quad (1.80)$$

It is less obvious, but also true that the characters are a complete basis for functions that are constant on the conjugacy classes and we can see this by explicit calculation. Suppose that  $F(g_1)$  is such a function. We already know

that  $F(g_1)$  can be expanded in terms of the matrix elements of the irreducible representations -

$$F(g_1) = \sum_{a,j,k} c_{jk}^a [D_a(g_1)]_{jk} \quad (1.81)$$

but since  $F$  is constant on conjugacy classes, we can write it as

$$F(g_1) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} F(g^{-1}g_1g) = \frac{1}{N} \sum_{a,j,k} c_{jk}^a [D_a(g^{-1}g_1g)]_{jk} \quad (1.82)$$

and thus

$$F(g_1) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{a,j,k \\ g,k,m}} c_{jk}^a [D_a(g^{-1})]_{j\ell} [D_a(g_1)]_{\ell m} [D_a(g)]_{mk} \quad (1.83)$$

But now we can do the sum over  $g$  explicitly using the orthogonality relation, (1.68).

$$F(g_1) = \sum_{\substack{a,j,k \\ \ell,m}} \frac{1}{n_a} c_{jk}^a [D_a(g_1)]_{\ell m} \delta_{jk} \delta_{\ell m} \quad (1.84)$$

or

---

<sup>1</sup> We will prove below that Abelian finite groups have only 1-dimensional irreducible representations.

$$F(g_1) = \sum_{a,j,\ell} \frac{1}{n_a} c_{jj}^a [D_a(g_1)]_{\ell\ell} = \sum_{a,j} \frac{1}{n_a} c_{jj}^a \chi_a(g_1) \quad (1.85)$$

This was straightforward to get from the orthogonality relation, but it has an important consequence. The characters,  $\chi_a(g)$ , of the independent irreducible representations form a complete, orthonormal basis set for the functions that are constant on conjugacy classes. Thus the number of irreducible representations is equal to the number of conjugacy classes. We will use this frequently.

This also implies that there is an orthogonality condition for a sum over representations. To see this, label the conjugacy classes by an integer  $\alpha$ , and let  $k_\alpha$  be the number of elements in the conjugacy class. Then define the matrix  $V$  with matrix elements

$$V_{\alpha a} = \sqrt{\frac{k_\alpha}{N}} \chi_{D_a}(g_\alpha) \quad (1.86)$$

where  $g_\alpha$  is the conjugacy class  $\alpha$ . Then the orthogonality relation (1.79) can be written as  $V^\dagger V = 1$ . But  $V$  is a square matrix, so it is unitary, and thus we also have  $VV^\dagger = 1$ , or

$$\sum_a \chi_{D_a}(g_\alpha)^* \chi_{D_a}(g_\beta) = \frac{N}{k_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.87)$$

Consequences: Let  $D$  be any representation (not necessarily irreducible). In its completely reduced form, it will contain each of the irreducible representations some integer number of times,  $m_a$ . We can compute  $m_a$  simply by using the orthogonality relation for the characters (1.79)

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* \chi_D(g) = m_a^D \quad (1.88)$$

The point is that  $D$  is a direct sum

$$\sum_a \overbrace{D_a \oplus \cdots \oplus D_a}^{m_a^D \text{ times}} \quad (1.89)$$

For example, consider the regular representation. It's characters are

$$\chi_R(e) = N \quad \chi_R(g) = 0 \text{ for } g \neq e \quad (1.90)$$

Thus

$$m_a^R = \chi_a(e) = n_a \quad (1.91)$$

Each irreducible representation appears in the regular representation a number of times equal to its dimension. Note that this is consistent with (1.74). Note also that  $m_a$  is uniquely determined, independent of the basis.

Example: Back to  $S_3$  once more. Let's determine the characters without thinking about the 2-dimensional representation explicitly, but knowing the conjugacy classes,  $\{e\}$ ,  $\{a_1, a_2\}$  and  $\{a_3, a_4, a_5\}$ . It is easiest to start with the one representation we know every group has - the trivial representation,  $D_0$  for which  $D_0(g) = 1$  for all  $g$ . This representation has characters  $\chi_0(g) = 1$ . Note that this is properly normalized. It follows from the condition  $\sum n_a^2 = N$  that the other two representations have dimensions 1 and 2. It is almost equally easy to write down the characters for the other 1dimensional representation. In general, when there is an invariant subgroup  $H$  of  $G$ , there are representations of  $G$  that are constant on  $H$ , forming a

representation of the factor group,  $G/H$ . In this case, the factor group is  $Z_2$ , with nontrivial representation 1 for  $H = \{e, a_1, a_2\}$  and -1 for  $\{a_3, a_4, a_5\}$ . We know that for the 2 dimensional representation,  $\chi_3(e) = n_3 = 2$ , thus so far the character table looks like

|   | $e$ | $a_1$<br>$a_2$ | $a_4$<br>$a_5$ |
|---|-----|----------------|----------------|
| 0 | 1   | 1              | 1              |
| 1 | 1   | 1              | -1             |
| 2 | 2   | ?              | ?              |

But then we can fill in the last two entries using orthogonality. We could actually have just used orthogonality without even knowing about the second representation, but using the  $Z_2$  makes the algebra trivial.

|   | $e$ | $a_1$<br>$a_2$ | $a_3$<br>$a_5$<br>$a_5$ |
|---|-----|----------------|-------------------------|
| 0 | 1   | 1              | 1                       |
| 1 | 1   | 1              | -1                      |
| 2 | 2   | -1             | 0                       |

We can use the characters not just to find out how many irreducible representations appear in a particular reducible one, but actually to explicitly decompose the reducible representation into its irreducible components. It is easy to see that if  $D$  is an arbitrary representation, the sum

$$P_a = \frac{n_a}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* D(g) \quad (1.94)$$

is a projection operator onto the subspace that transforms under the representation  $a$ . To see this, note that if we set  $j = k$  and sum in the orthogonality relation (1.69), we find

$$\frac{n_a}{N} \sum_{g \in G} \chi_{D_a}(g)^* [D_b(g)]_{\ell m} = \delta_{ab} \delta_{\ell m} \quad (1.95)$$

Thus when  $D$  is written in block diagonal form, the sum in (1.95) gives 1 on the subspaces that transform like  $D_a$  and 0 on all the rest - thus it is the projection operator as promised. The point, however, is that (1.94) gives us the projection operator in the original basis. We did not have to know how to transform to block diagonal form. An example may help to clarify this.

### Example $S_3$ again

Here's a three dimensional representation of  $S_3$

$$\begin{aligned} D_3(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D_3(a_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ D_3(a_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & D_3(a_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D_3(a_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & D_3(a_5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.96)$$

More precisely, as usual when we write down a set of matrices to represent linear operators, these are matrices which have the same matrix elements that is

$$[D_3(g)]_{jk} = \langle j | D_3 | k \rangle \quad (1.97)$$

One could use a different symbol to represent the operators and the matrices, but its always easy to figure out which is which from the context. The important point is that the way this acts on the states,  $|j\rangle$  is by matrix multiplication on the right, because we can insert a complete set of intermediate states

$$D_3(g)|j\rangle = \sum_k |k\rangle \langle k | D_3(g) | j \rangle = \sum_k |k\rangle [D_3(g)]_{kj} \quad (1.98)$$

This particular representation is an important one because it is the defining representation for the group - it actually implements the permutations on the states. For example

$$\begin{aligned} D_3(a_1) |1\rangle &= \sum_k |k\rangle [D_3(a_1)]_{k1} = |2\rangle \\ D_3(a_1) |2\rangle &= \sum_k |k\rangle [D_3(a_1)]_{k2} = |3\rangle \\ D_3(a_1) |3\rangle &= \sum_k |k\rangle [D_3(a_1)]_{k3} = |1\rangle \end{aligned} \quad (1.99)$$

thus this implements the cyclic transformation  $(1, 2, 3)$ , or  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .

Now if we construct the projection operators, we find

$$P_0 = \frac{1}{6} \left( D_3(e) + \sum_{j=1}^5 D_3(a_j) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

$$P_1 = \frac{1}{6} \left( D_3(e) + \sum_{j=1}^2 D_3(a_j) - \sum_{j=3}^5 D_3(a_j) \right) = 0 \quad (1.101)$$

$$P_2 = \frac{2}{6} \left( 2D_3(e) - \sum_{j=1}^2 D_3(a_j) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

This makes good sense.  $P_0$  projects onto the invariant combination  $(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)/\sqrt{3}$ , which transforms trivially, while  $P_2$  projects onto the two dimensional subspace spanned by the differences of pairs of components,  $|1\rangle - |2\rangle$ , etc, which transforms according to  $D_3$ .

This constructions shows that the representation  $D_3$  decomposes into a direct sum of the irreducible representations,

$$D_3 = D_0 \oplus D_2 \quad (1.103)$$

### 15.1.14 1.14 Eigenstates

In quantum mechanics, we are often interested in the eigenstates of an invariant hermitian operator, in particular the Hamiltonian,  $H$ . We can always take these eigenstates to transform according to irreducible representations of the symmetry group. To prove this, note that we can divide up the Hilbert space into subspaces with different eigenvalues of  $H$ . Each subspace

furnishes a representation of the symmetry group because  $D(g)$ , the group representation on the full Hilbert space, cannot change the  $H$  eigenvalue (because  $[D(g), H] = 0$ ). But then we can completely reduce the representation in each subspace.

A related fact is that if some irreducible representation appears only once in the Hilbert space, then the states in that representation must be eigenstates of  $H$  (and any other invariant operator). This is true because  $H|a, j, x\rangle$  must be in the same irreducible representation, thus

$$H|a, j, x\rangle = \sum_y c_y |a, j, y\rangle \quad (1.104)$$

and if  $x$  and  $y$  take only one value, then  $|a, j, x\rangle$  is an eigenstate.

This is sufficiently important to say again in the form of a theorem:

**Theorem 1.6** If a hermitian operator,  $H$ , commutes with all the elements,  $D(g)$ , of a representation of the group  $G$ , then you can choose the eigenstates of  $H$  to transform according to irreducible representations of  $G$ . If an irreducible representation appears only once in the Hilbert space, every state in the irreducible representation is an eigenstate of  $H$  with the same eigenvalue.

Notice that for Abelian groups, this procedure of choosing the  $H$  eigenstates to transform under irreducible representations is analogous to simultaneously diagonalizing  $H$  and  $D(g)$ . For example, for the group  $Z_2$  associated with parity, it is the statement that we can always choose the  $H$  eigenstates to be either symmetric or antisymmetric.

In the case of parity, the linear operator representing parity is hermitian, so we know that it can be diagonalized. But in general, while we have shown that operators representing finite group elements can be chosen to be unitary, they will not be hermitian. Nevertheless, we can show that for an Abelian group that commutes with the  $H$ , the group elements can simultaneously diagonalized along with  $H$ . The reason is the following theorem:

**Theorem 1.7** All of the irreducible representations of a finite Abelian group are 1-dimensional.

One proof of this follows from our discussion of conjugacy classes and from (1.74). For an Abelian group, conjugation does nothing, because  $gg'g^{-1} = g'$  for all  $g$  and  $g'$ . Therefore, each element is in a conjugacy class all by itself. Because there is one irreducible representation for each conjugacy class, the number of irreducible representations is equal to the order of the group. Then the only way to satisfy (1.74) is to have all of the  $n_i$  s equal to one. This proves the theorem, and it means that decomposing a representation of an Abelian group into its irreducible representations amounts to just diagonalizing all the representation matrices for all the group elements.

For a non-Abelian group, we cannot simultaneously diagonalize all of the  $D(g)$ s, but the procedure of completely reducing the representation on each subspace of constant  $H$  is the next best thing.

A classical problem which is quite analogous to the problem of diagonalizing the Hamiltonian in quantum mechanics is the problem of finding the normal modes of small oscillations of a mechanical system about a point of stable equilibrium. Here, the square of the angular frequency is the eigenvalue of the  $M^{-1}K$  matrix and the normal modes are the eigenvectors of  $M^{-1}K$ . In the next three sections, we will work out an example.

### 15.1.15 1.15 Tensor products

We have seen that we can take reducible representations apart into direct sums of smaller representations. We can also put representations together into larger representations. Suppose that  $D_1$  is an  $m$  dimensional representation acting on a space with basis vectors  $|j\rangle$  for  $j = 1$  to  $m$  and  $D_2$  is an  $n$  dimensional representation acting on a space with basis vectors  $|x\rangle$  for  $x = 1$  to  $n$ . We can make an  $m \times n$  dimensional space called the tensor product space by taking basis

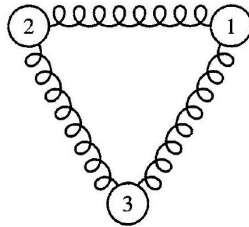
vectors labeled by both  $j$  and  $x$  in an ordered pair  $|j, x\rangle$ . Then when  $j$  goes from 1 to  $m$  and  $x$  goes from 1 to  $n$ , the ordered pair  $(j, x)$  runs over  $m \times n$  different combinations. On this large space, we can define a new representation called the tensor product representation  $D_1 \otimes D_2$  by multiplying the two smaller representations. More precisely, the matrix elements of  $D_{D_1 \otimes D_2}(g)$  are products of those of  $D_1(g)$  and  $D_2(g)$ :

$$\langle j, x | D_{D_1 \otimes D_2}(g) | k, y \rangle \equiv \langle j | D_1(g) | k \rangle \langle x | D_2(g) | y \rangle \quad (1.105)$$

It is easy to see that this defines a representation of  $G$ . In general, however, it will not be an irreducible representation. One of our favorite pastimes in what follows will be to decompose reducible tensor product representations into irreducible representations.

### 15.1.16 1.16 Example of tensor products

Consider the following physics problem. Three blocks are connected by springs in a triangle as shown



Suppose that these are free to slide on a frictionless surface. What can we say about the normal modes of this system. The point is that there is an  $S_3$  symmetry of the system, and we can learn a lot about the system by using the symmetry and applying theorem 1.6. The system has 6 degrees of freedom, described by the  $x$  and  $y$  coordinates of the three blocks:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \quad (1.107)$$

This has the structure of a tensor product - the 6 dimensional space is a product of a 3 dimensional space of the blocks, and the 2 dimensional space of the  $x$  and  $y$  coordinates. We can think of these coordinates as having two indices. It is three two dimensional vectors,  $\vec{r}_i$ , each of the vector indices has two components. So we can write the components as  $r_{j\mu}$  where  $j$  labels the mass and runs from 1 to 3 and  $\mu$  labels the  $x$  or  $y$  component and runs from 1 to 2, with the connection

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{21} & r_{22} & r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

The 3 dimensional space transforms under  $S_3$  by the representation  $D_3$ . The 2 dimensional space transforms by the representation  $D_2$  below:

$$\begin{aligned} D_2(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ D_2(a_2) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D_2(a_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D_2(a_4) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D_2(a_5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.109)$$

This is the same as (1.21). Then, using (1.105), the 6 dimensional representation of the coordinates is simply the product of these two representations:

$$[D_6(g)]_{j\mu k\nu} = [D_3(g)]_{jk} [D_2(g)]_{\mu\nu} \quad (1.110)$$

Thus, for example,

$$D_6(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.111)$$

This has the structure of 3 copies of  $D_2(a_1)$  in place of the 1's in  $D_3(a_1)$ . The other generators are similar in structure.

Because the system has the  $S_3$  symmetry, the normal modes of the system must transform under definite irreducible representations of the symmetry. Thus if we construct the projectors onto these representations, we will have gone some way towards finding the normal modes. In particular, if an irreducible representation appears only once, it must be a normal mode by theorem 1.6. If a representation appears more than once, then we need some additional information to determine the modes.

We can easily determine how many times each irreducible representation appears in  $D_6$  by finding the characters of  $D_6$  and using the orthogonality relations. To find the characters of  $D_6$ , we use an important general result. The character of the tensor product of two representations is the product of the characters of the factors. This follows immediately from the definition of the tensor product and the trace.

$$\chi_{D_1 \times D_2} = \chi_{D_1} \chi_{D_2} \quad (1.112)$$

So in this case,

$$\begin{aligned} \chi_6(g) &= \sum_{j\mu} [D_6(g)]_{j\mu j\mu} \\ &= [D_3(g)]_{jj} [D_2(g)]_{\mu\mu} = \chi_3(g) \chi_2(g) \end{aligned} \quad (1.113)$$

so that the product is as shown in the table below:

|       | $e$ | $a_1$<br>$a_2$ | $a_3$<br>$a_5$ |
|-------|-----|----------------|----------------|
| $D_3$ | 3   | 0              | 1              |
| $D_2$ | 2   | -1             | 0              |
| $D_6$ | 6   | 0              | 0              |

This is the same as the characters of the regular representation, thus this representation is equivalent to the regular representation, and contains  $D_0$  and  $D_1$  once and  $D_2$  twice.

Note that (1.113) is an example of a simple but important general relation, which we might as well dignify by calling it a theorem -

**Theorem 1.8** The characters of a tensor product representation are the products of the characters of the factors.

With these tools, we can use group theory to find the normal modes of the system.

### 15.1.17 1.17 \* Finding the normal modes

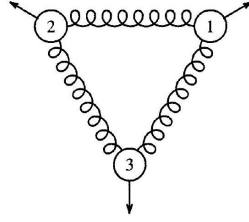
The projectors onto  $D_0$  and  $D_1$  will be 1 dimensional.  
 $P_0$  is

$$P_0 = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \chi_0(g)^* D_6(g)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.115)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

corresponding to the motion



the so-called "breathing mode" in which the triangle grows and shrinks while retaining its shape.

$P_1$  is

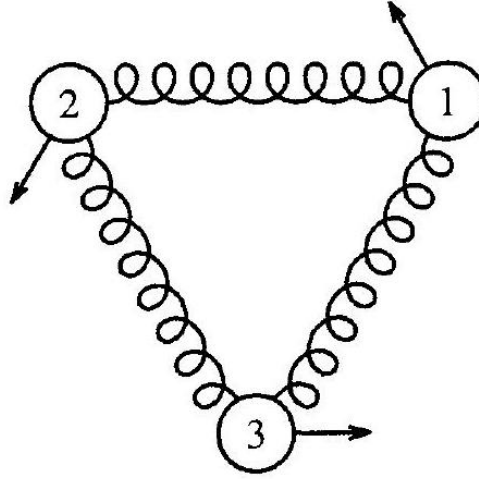
$$P_1 = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \chi_1(g)^* D_6(g)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.118)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

corresponding to the motion





the mode in which the triangle rotates - this is a normal mode with zero frequency because there is no restoring force.

Notice, again, that we found these two normal modes without putting in any physics at all except the symmetry!

Finally,  $P_2$  is

$$P_2 = \frac{2}{6} \sum_{g \in G} \chi_2(g)^* D_6(g)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

As expected, this is a rank 4 projection operator ( $\text{Tr } P_2 = 4$ ). We need some dynamical information. Fortunately, two modes are easy to get - translations of the whole triangle.

Translations in the  $x$  direction, for example, are projected by

$$T_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.122)$$

and those in the  $y$  direction by

$$T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.123)$$

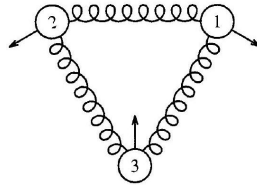
So the nontrivial modes are projected by

$$P_2 - T_x - T_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.124)$$

To see what the corresponding modes look like, act with this on the vector  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  to get

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.125)$$

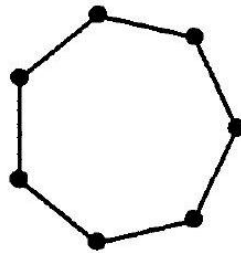
corresponding to the motion



Then rotating by  $2\pi/3$  gives a linearly independent mode.

### 15.1.18 1.18 \* Symmetries of $2n + 1$ -gons

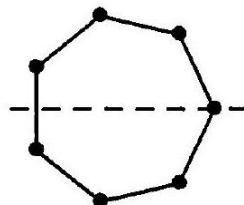
This is a nice simple example of a transformation group for which we can work out the characters (and actually the whole set of irreducible representations) easily. Consider a regular polygon with  $2n + 1$  vertices, like the 7-gon shown below.



The group of symmetries of the  $2n + 1$ -gon consists of the identity, the  $2n$  rotations by  $\frac{\pm 2\pi j}{2n+1}$  for  $j = 1$  to  $n$ ,

$$\text{rotations by } \frac{\pm 2\pi j}{2n+1} \text{ for } j = 1 \text{ to } n \quad (1.128)$$

and the  $2n + 1$  reflections about lines through the center and a vertex, as show below:  
reflections about lines through center and vertex



Thus the order of the group of symmetries is  $N = 2 \times (2n + 1)$ .

There are  $n + 2$  conjugacy classes:

1 - the identity,  $e$ ;

2 - the  $2n + 1$  reflections;

3 to  $n + 2$  - the rotations by  $\frac{22\pi j}{2n+1}$  for  $j = 1$  to  $n$  - each value of  $j$  is a separate conjugacy class.

The way this works is that the reflections are all in the same conjugacy class because by conjugating with rotations, you can get from any one reflection to any other. The rotations are unchanged by conjugation by rotations, but a conjugation by a reflection changes the sign of the rotation, so there is a  $\pm$  pair in each conjugacy class.

Furthermore, the  $n$  conjugacy classes of rotations are equivalent under cyclic permutations and relabeling of the vertices, as shown below:

The characters look like

| $e$ | $r$ | $j = 1$                      | $j = 2$                      | $\dots$ | $j = n$                       |
|-----|-----|------------------------------|------------------------------|---------|-------------------------------|
| 1   | 1   | 1                            | 1                            | $\dots$ | 1                             |
| 1   | -1  | 1                            | 1                            | $\dots$ | 1                             |
| 2   | 0   | $2 \cos \frac{2\pi m}{2n+1}$ | $2 \cos \frac{4\pi m}{2n+1}$ | $\dots$ | $2 \cos \frac{2n\pi m}{2n+1}$ |

In the last line, the different values of  $m$  give the characters of the  $n$  different 2-dimensional representations.

### 15.1.19 1.19 Permutation group on $n$ objects

Any element of the permutation group on  $n$  objects, called  $S_n$ , can be written in term of cycles, where a cycle is a cyclic permutation of a subset. We will use a notation that makes use of this, where each cycle is written as a set of numbers in parentheses, indicating the set of things that are cyclicly permuted. For example:

(1) means  $x_1 \rightarrow x_1$

(1372) means  $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_7 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$

Each element of  $S_n$  involves each integer from 1 to  $n$  in exactly one cycle.

Examples:

The identity element looks like  $e = (1)(2) \dots (n)$  -  $n$  1-cycles - there is only one of these.

An interchange of two elements looks like  $(12)(3) \dots (n)$  - a 2-cycle and  $n - 2$  1-cycles - there are  $n(n - 1)/2$  of these -  $(j_1 j_2)(j_3) \dots (j_n)$ .

An arbitrary element has  $k_j$   $j$ -cycles, where

$$\sum_{j=1}^n j k_j = n \quad (1.134)$$

For example, the permutation  $(123)(456)(78)(9)$  has two 3-cycles, 1 2-cycle and a 1-cycle, so  $k_1 = k_2 = 1$  and  $k_3 = 2$ .

There is an simple (but reducible)  $n$  dimensional representation of  $S_n$  called the defining representation where the "objects" being permuted are just the basis vectors of an  $n$  dimensional vector space,

$$|1\rangle, |2\rangle, \dots |n\rangle \quad (1.135)$$

If the permutation takes  $x_j$  to  $x_k$ , the corresponding representation operator  $D$  takes  $|j\rangle$  to  $|k\rangle$ , so that

$$D|j\rangle = |k\rangle \quad (1.136)$$

and thus

$$\langle \ell | D | j \rangle = \delta_{k\ell} \quad (1.137)$$

Each matrix in the representation has a single 1 in each row and column.

### 15.1.20 1.20 Conjugacy classes

The conjugacy classes are just the cycle structure, that is they can be labeled by the integers  $k_j$ . For example, all interchanges are in the same conjugacy class - it is enough to check that the inner automorphism  $gg_1g^{-1}$  doesn't change the cycle structure of  $g_1$  when  $g$  is an interchange, because we can build up any permutation from interchanges. Let us see how this works in some examples. In particular, we will see that conjugating an arbitrary permutation by the interchange  $(12)(3)\dots$  just interchanges 1 and 2 without changing the cycle structure

Examples -  $(12)(3)(4) \bullet (1)(23)(4) \bullet (12)(3)(4)$  (note that an interchange is its own inverse)

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

If 1 and 2 are in different cycles, they just get interchanged by conjugation by  $(12)$ , as promised.

The same thing happens when 1 and 2 are in the same cycle. For example

|                     |              |
|---------------------|--------------|
|                     | $(12)(3)(4)$ |
|                     | $(123)(4)$   |
| $\downarrow$<br>312 | $(12)(3)(4)$ |
|                     | $(213)(4)$   |

Again, in the same cycle this time, 1 and 2 just get interchanged.

Another way of seeing this is to notice that the conjugation is analogous to a similarity transformation. In fact, in the defining,  $n$  dimensional representation of (1.135) the conjugation by the interchange  $(12)$  is just a change of basis that switches  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ . Then it is clear that conjugation

does not change the cycle structure, but simply interchanges what the permutation does to 1 and 2. Since we can put interchanges together to form an arbitrary permutation, and since by repeated conjugations by interchanges, we can get from any ordering of the integers in the given cycle structure to any other, the conjugacy classes must consist of all possible permutations with a particular cycle structure.

Now let us count the number of group elements in each conjugacy class. Suppose a conjugacy class consists of permutations of the form of  $k_1$  1 cycles,  $k_2$  2-cycles, etc, satisfying (1.134). The number of different permutations in the conjugacy class is

$$\frac{n!}{\prod_j j^{k_j} k_j!} \quad (1.141)$$

because each permutation of number 1 to  $n$  gives a permutation in the class, but cyclic order doesn't matter within a cycle

$(123)$  is the same as  $(231)$

and order doesn't matter at all between cycles of the same length

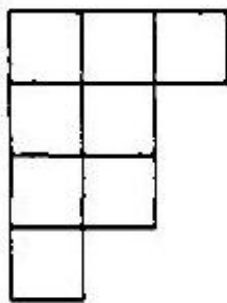
$(12)(34)$  is the same as  $(34)(12)$

### 15.1.21 1.21 Young tableaux

It is useful to represent each  $j$ -cycle by a column of boxes of length  $j$ , topjustified and arranged in order of decreasing  $j$  as you go to the right. The total number of boxes is  $n$ . Here is an example:



is four 1-cycles in  $S_4$  - that is the identity element - always a conjugacy class all by itself. Here's another:



is a 4-cycle, a 3-cycle and a 1-cycle in  $S_8$ . These collections of boxes are called Young tableaux. Each different tableaux represents a different conjugacy class, and therefore the tableaux are in one-to-one correspondence with the irreducible representations.

### 15.1.22 1.22 Example - our old friend $S_3$

The conjugacy classes are



with numbers of elements

$$\frac{3!}{3!} = 1 \quad \frac{3!}{2} = 3 \quad \frac{3!}{3} = 2 \quad (1.147)$$

### 15.1.23 1.23 Another example: $-S_4$

with numbers of elements

$$\frac{4!}{4!} = 1 \quad \frac{4!}{4} = 6 \quad \frac{4!}{8} = 3 \quad \frac{4!}{3} = 8 \quad \frac{4!}{4} = 6 \quad (1.149)$$

The characters of  $S_4$  look like this (with the conjugacy classes which label the columns in the same order as in (1.148)):

conjugacy classes

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| 1 | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 3 | 1  | -1 | 0  | -1 |
| 2 | 0  | 2  | -1 | 0  |
| 3 | -1 | -1 | 0  | 1  |
| 1 | -1 | 1  | 1  | -1 |

The first row represents the trivial representation.

### 15.1.24 1.24\* Young tableaux and representations of $S_n$

We have seen that a Young tableau with  $n$  boxes is associated with an irreducible representation of  $S_n$ . We can actually use the tableau to explicitly construct the irreducible representation by identifying an appropriate subspace of the regular representation of  $S_n$ .

To see what the irreducible representation is, we begin by putting the integers from 1 to  $n$  in the boxes of the tableau in all possible ways. There are  $n!$  ways to do this. We then identify each assignment of integers 1 to  $n$  to the boxes with a state in the regular representation of  $S_n$  by defining a standard ordering, say from left to right and then top down (like reading words on a page) to translate from integers in the boxes to a state associated with a particular permutation. So for example

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 7 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow |6532174\rangle$$

where  $|6532174\rangle$  is the state corresponding to the permutation

$$1234567 \rightarrow 6532174 \quad (1.152)$$

Now each of the  $n!$  assignment of boxes to the tableau describes one of the  $n!$  states of the regular representation.

Next, for a particular tableau, symmetrize the corresponding state in the numbers in each row, and antisymmetrize in the numbers in each column. For example

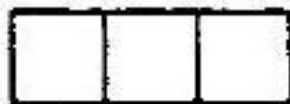
$$1]2 \rightarrow |12\rangle + |21\rangle \quad (1.153)$$

and

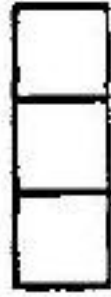
$$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] \rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle \quad (1.154)$$

Now the set of states constructed in this way spans some subspace of the regular representation. We can construct the states explicitly, and we know how permutations act on these states. That the subspace constructed in this way is a representation of  $S_n$ , because a permutation just corresponds to starting with a different assignment of numbers to the tableau, so acting with the permutation on any state in the subspace gives another state in the subspace. In fact, this representation is irreducible, and is the irreducible representation we say is associated with the Young tableau.

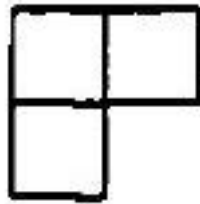
Consider the example of  $S_3$ . The tableau



gives completely symmetrized states, and so is associated with a one dimensional subspace that transforms under the trivial representation. The tableau



gives completely antisymmetrized states, and so, again is associated with a one dimensional subspace, this time transforming under the representation in which interchanges are represented by -1. Finally



gives the following states:

$$\frac{1}{3} \rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle \quad (1.158)$$

$$\frac{3}{3} \rightarrow |321\rangle + |231\rangle - |123\rangle - |213\rangle \quad (1.159)$$

$$\frac{2}{1} \rightarrow |231\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle \quad (1.160)$$

$$[13 \ 3 \ (?) \rightarrow |132\rangle + |312\rangle - |231\rangle - |321\rangle \quad (1.161)$$

$$[3] \ 1 \ [ \rightarrow |312\rangle + |132\rangle - |213\rangle - |123\rangle \quad (1.162)$$

$$[2] \quad (1.163)$$

Note that interchanging two numbers in the same column of a tableau just changes the sign of the state. This is generally true. Furthermore, you can see explicitly that the sum of three states related by cyclic permutations vanishes. Thus the subspace is two dimensional and transforms under the two dimensional irreducible representation of  $S_3$ .

It turns out that the dimension of the representation constructed in this way is

$$\frac{n!}{H} \quad (1.164)$$

where the quantity  $H$  is the "hooks" factor for the Young tableau, computed as follows. A hook is a line passing vertically up through the bottom of some column of boxes, making a right hand turn in some box and passing out through the row of boxes. There is one hook for each box. Call the number of boxes the hook passes through  $h$ . Then  $H$  is the product of the  $h$  s for all hooks. We will come back to hooks when we discuss the application of Young tableaux to the representations of  $SU(N)$  in chapter *XIII*.

This procedure for constructing the irreducible representations of  $S_n$  is entirely mechanical (if somewhat tedious) and can be used to construct all the representations of  $S_n$  from the Young tableaux with  $n$  boxes.

We could say much more about finite groups and their representations, but our primary subject is continuous groups, so we will leave finite groups for now. We will see, however, that the representations of the permutation groups play an important role in the representations of continuous groups. So we will come back to  $S_n$  now and again.

### Problems

1.A. Find the multiplication table for a group with three elements and prove that it is unique.

1.B. Find all essentially different possible multiplication tables for groups with four elements (which cannot be related by renaming elements).

1.C. Show that the representation (1.135) of the permutation group is reducible.

1.D. Suppose that  $D_1$  and  $D_2$  are equivalent, irreducible representations of a finite group  $G$ , such that

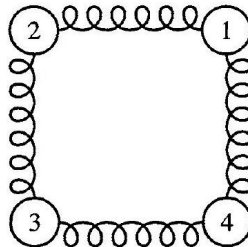
$$D_2(g) = S D_1(g) S^{-1} \quad \forall g \in G$$

What can you say about an operator  $A$  that satisfies

$$A D_1(g) = D_2(g) A \quad \forall g \in G?$$

1.E. Find the group of all the discrete rotations that leave a regular tetrahedron invariant by labeling the four vertices and considering the rotations as permutations on the four vertices. This defines a four dimensional representation of a group. Find the conjugacy classes and the characters of the irreducible representations of this group.

\*1.F. Analyze the normal modes of the system of four blocks sliding on a frictionless plane, connected by springs as shown below:



just as we did for the triangle, but using the 8 -element symmetry group of the square. Assume that the springs are rigidly attached to the masses (rather than pivoted, for example), so that the square has some rigidity.

Chapter 2

## 15.2 Lie Groups

Suppose our group elements  $g \in G$  depend smoothly on a set of continuous parameters -

$$g(\alpha) \tag{2.1}$$

What we mean by smooth is that there is some notion of closeness on the group such that if two elements are "close together" in the space of the group elements, the parameters that describe them are also close together.

### 15.2.1 2.1 Generators

Since the identity is an important element in the group, it is useful to parameterize the elements (at least those close to the identity element) in such a way that  $\alpha = 0$  corresponds



to the identity element. Thus we assume that in some neighborhood of the identity, the group elements can be described by a function of  $N$  real parameters,  $\alpha_a$  for  $a = 1$  to  $N$ , such that

$$g(\alpha)|_{\alpha=0} = e \quad (2.2)$$

Then if we find a representation of the group, the linear operators of the representation will be parameterized the same way, and

$$D(\alpha)|_{\alpha=0} = 1 \quad (2.3)$$

Then in some neighborhood of the identity element, we can Taylor expand  $D(\alpha)$ , and if we are close enough, just keep the first term:

$$D(d\alpha) = 1 + id\alpha_a X_a + \cdots \quad (2.4)$$

where we have called the parameter  $d\alpha$  to remind you that it is infinitesimal. In (2.4), a sum over repeated indices is understood (the "Einstein summation convention") and

$$X_a \equiv -i \frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha) \Big|_{\alpha=0} \quad (2.5)$$

The  $X_a$  for  $a = 1$  to  $N$  are called the generators of the group. If the parameterization is parsimonious (that is - all the parameters are actually needed to distinguish different group elements), the  $X_a$  will be independent. The  $i$  is included in the definition (2.5) so that if the representation is unitary, the  $X_a$  will be hermitian operators.

Sophus Lie showed how the generators can actually be defined in the abstract group without mentioning representations at all. As a result of his work, groups of this kind are called Lie groups. I am not going to talk about them this way because I am more interested in representations than in groups, but it is a beautiful theoretical construction that you may want to look up if you haven't seen it.

As we go away from the identity, there is enormous freedom to parameterize the group elements in different ways, but we may as well choose our parameterization so that the group multiplication law and thus the multiplication law for the representation operators in the Hilbert space looks nice. In particular, we can go away from the identity in some fixed direction by simply raising an infinitesimal group element

$$D(d\alpha) = 1 + id\alpha_a X_a \quad (2.6)$$

to some large power. Because of the group property, this always gives another group element. This suggests defining the representation of the group elements for finite  $\alpha$  as

$$D(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + i\alpha_a X_a/k)^k = e^{i\alpha_a X_a} \quad (2.7)$$

In the limit, this must go to the representation of a group element because  $1 + i\alpha_a X_a/k$  becomes the representation of a group element in (2.4) as  $k$  becomes large. This defines a particular parameterization of the representations (sometimes called the exponential parameterization), and thus of the group multiplication law itself. In particular, this means that we can write the group elements (at least in some neighborhood of  $e$ ) in terms of the generators. That's nice, because unlike the group elements, the generators form a vector space. They can be added together and multiplied by real numbers. In fact, we will often use the term generator to refer to any element in the real linear space spanned by the  $X_a$  s.

## 15.2.2 2.2 Lie algebras

Now in any particular direction, the group multiplication law is uncomplicated. There is a one parameter family of group elements of the form

$$U(\lambda) = e^{i\lambda\alpha_a X_a} \quad (2.8)$$

and the group multiplication law is simply

$$U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (2.9)$$

However, if we multiply group elements generated by two different linear combinations of generators, things are not so easy. In general,

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} \neq e^{i(\alpha_a + \beta_a) X_a} \quad (2.10)$$

On the other hand, because the exponentials form a representation of the group (at least if we are close to the identity), it must be true that the product is some exponential of a generator,

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\delta_a X_a} \quad (2.11)$$

for some  $\delta$ . And because everything is smooth, we can find  $\delta_a$  by expanding both sides and equating appropriate powers of  $\alpha$  and  $\beta$ . When we do this, something interesting happens. We find that it only works if the generators form an algebra under commutation (or a commutator algebra). To see this, let's actually do it to leading nontrivial order. We can write

$$i\delta_a X_a = \ln(1 + e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1) \quad (2.12)$$

I will now expand this, keeping terms up to second order in the parameters  $\alpha$  and  $\beta$ , using the Taylor expansion of  $\ln(1 + K)$  where

$$\begin{aligned} K &= e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1 \\ &= \left(1 + i\alpha_a X_a - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 + \dots\right) \\ &\quad \left(1 + i\beta_b X_b - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \dots\right) - 1 \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b \\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

This gives

$$\begin{aligned} i\delta_a X_a &= K - \frac{1}{2}K^2 + \dots \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b \\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha_a X_a + \beta_b X_b)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Now here is the point. The higher order terms in (2.14) are trying to cancel. If the  $X$  s were numbers, they would cancel, because the product of the exponentials is the exponential

of the sum of the exponents. They fail to cancel only because the  $X$  s are linear operators, and don't commute with one another. Thus the extra terms beyond  $i\alpha_a X_a + i\beta_a X_a$  in (2.14) are proportional to the commutator. Sure enough, explicit calculation in (2.14) gives

$$\begin{aligned} i\delta_a X_a &= K - \frac{1}{2}K^2 + \cdots \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_a X_a \\ &\quad - \frac{1}{2}[\alpha_a X_a, \beta_b X_b] + \cdots \end{aligned} \quad (2.15)$$

We obtained (2.15) using only the group property and smoothness, which allowed us to use the Taylor expansion. From (2.15) we can calculate  $\delta_a$ , again in an expansion in  $\alpha$  and  $\beta$ . We conclude that

$$[\alpha_a X_a, \beta_b X_b] = -2i(\delta_c - \alpha_c - \beta_c)X_c + \cdots \equiv i\gamma_c X_c \quad (2.16)$$

where the  $i$  is put in to make  $\gamma$  real and the  $\cdots$  represent terms that have more than two factors of  $\alpha$  or  $\beta$ . Since (2.16) must be true for all  $\alpha$  and  $\beta$ , we must have

$$\gamma_c = \alpha_a \beta_b f_{abc} \quad (2.17)$$

for some constants  $f_{abc}$ , thus

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \quad (2.18)$$

where

$$f_{abc} = -f_{bac} \quad (2.19)$$

because  $[A, B] = -[B, A]$ . Note that we can now write

$$\delta_a = \alpha_a + \beta_a - \frac{1}{2}\gamma_a + \cdots \quad (2.20)$$

so that if  $\gamma$  and the higher terms vanish, we would restore the equality in (2.10).

(2.18) is what is meant by the statement that the generators form an algebra under commutation. We have just shown that this follows from the group properties for Lie groups, because the Lie group elements depend smoothly on the parameters. The commutator in the algebra plays a role similar to the multiplication law for the group.

Now you might worry that if we keep expanding (2.12) beyond second order, we would need additional conditions to make sure that the group multiplication law is maintained. The remarkable thing is that we don't. The commutator relation (2.18) is enough. In fact, if you know the constants,  $f_{abc}$ , you can reconstruct  $\delta$  as accurately as you like for any  $\alpha$  and  $\beta$  in some finite neighborhood of the origin! Thus the  $f_{abc}$  are tremendously important - they summarize virtually the entire group multiplication law. The  $f_{abc}$  are called the structure constants of the group. They can be computed in any nontrivial representation, that is unless the  $X_a$  vanish.

The commutator relation (2.18) is called the Lie algebra of the group. The Lie algebra is completely determined by the structure constants. Each group representation gives a representation of the algebra in an obvious way, and the structure constants are the same for all representations because they are fixed just by the group multiplication law and smoothness. Equivalence, reducibility and irreducibility can be transferred from the group to the algebra with no change.

Note that if there is any unitary representation of the algebra, then the  $f_{abc}$  s are real, because if we take the adjoint of the commutator relation for hermitian  $X$  s, we get

$$\begin{aligned}
[X_a, X_b]^\dagger &= -if_{abc}^* X_c \\
&= [X_b, X_a] = if_{bac} X_c = -if_{abc} X_c
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

Since we are interested in groups which have unitary representations, we will just assume that the  $f_{abc}$  are real.

### 15.2.3 2.3 The Jacobi identity

The matrix generators also satisfy the following identity:

$$[X_a, [X_b, X_c]] + \text{cyclic permutations} = 0 \tag{2.22}$$

called the Jacobi identity, which you can check by just expanding out the commutators. <sup>1</sup>

The Jacobi identity can be written in a different way that is sometimes easier to use and is also instructive:

$$[X_a, [X_b, X_c]] = [[X_a, X_b], X_c] + [X_b, [X_a, X_c]] \tag{2.23}$$

This is a generalization of the product rule for commutation:

$$[X_a, X_b X_c] = [X_a, X_b] X_c + X_b [X_a, X_c] \tag{2.24}$$

The Jacobi identity is rather trivial for the Lie algebras with only finite dimensional representations that we will study in this book. But it is worth noting that in Lie's more general treatment, it makes sense in situations in which the product of generators is not even well defined.

### 15.2.4 2.4 The adjoint representation

The structure constants themselves generate a representation of the algebra called the adjoint representation. If we use the algebra(2.18), we can compute

$$\begin{aligned}
&[X_a, [X_b, X_c]] \\
&= if_{bcd} [X_a, X_d] \\
&= -f_{bcd} f_{ade} X_e
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

so (because the  $X_a$  are independent), 2.22) implies

$$f_{bcd} f_{ade} + f_{abd} f_{cde} + f_{cad} f_{bde} = 0 \tag{2.26}$$

Defining a set of matrices  $T_a$

$$[T_a]_{bc} \equiv -if_{abc} \tag{2.27}$$

then (2.26) can be rewritten as

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c \tag{2.28}$$

Thus the structure constants themselves furnish a representation of the algebra. This is called the adjoint representation. The dimension of a representation is the dimension of the linear space on which it acts (just as for a

finite group). The dimension of the adjoint representation is just the number of independent generators, which is the number of real parameters required to describe a group element. Note that since the  $f_{abc}$ s are real, the generators of the adjoint representation are pure imaginary.

We would like to have a convenient scalar product on the linear space of the generators in the adjoint representation, (2.27), to turn it into a vector space. A good one is the trace in the adjoint representation

$$\text{Ir}(T_a T_b) \quad (2.29)$$

This is a real symmetric matrix. We will next show that we can put it into a very simple canonical form. We can change its form by making a linear transformation on the  $X_a$ , which in turn, induces a linear transformation on the structure constants. Suppose

$$X_a \rightarrow X'_a = L_{ab} X_b \quad (2.30)$$

then

$$\begin{aligned} [X'_a, X'_b] &= i L_{ad} L_{be} f_{dec} X_c \\ &= i L_{ad} L_{be} f_{deg} L_{gh}^{-1} L_{hc} X_c \\ &= i L_{ad} L_{be} f_{deg} L_{gc}^{-1} X'_c \end{aligned} \quad (2.31)$$

so <sup>2</sup>

$$f_{abc} \rightarrow f'_{abc} = L_{ad} L_{be} f_{deg} L_{gc}^{-1} \quad (2.32)$$

If we then define a new  $T_a$  s with the transformed  $f$  s,

$$[T_a]_{bc} \rightarrow [T'_a]_{bc} = L_{ad} L_{be} [T_d]_{eg} L_{gc}^{-1} \quad (2.33)$$

or

$$[T_a] \rightarrow [T'_a] = L_{ad} L [T_d] L^{-1} \quad (2.34)$$

In other words, a linear transformation on the  $X_a$  s induces a linear transformation on the  $T_a$  s which involves both a similarity transformation and the same linear transformation on the  $a$  index that labels the generator. But in the trace the similarity transformation doesn't matter, so

$$\text{Tr}(T_a T_b) \rightarrow \text{Tr}(T'_a T'_b) = L_{ac} L_{bd} \text{Tr}(T_c T_d) \quad (2.35)$$

Thus we can diagonalize the trace by choosing an appropriate  $L$  (here we only need an orthogonal matrix). Suppose we have done this (and dropped the primes), so that

$$\text{Tr}(T_a T_b) = k^a \delta_{ab} \text{ no sum} \quad (2.36)$$

---

<sup>1</sup> The Jacobi identity is really more subtle than this. We could have proved it directly in the abstract group, where the generators are not linear operators on a Hilbert space. Then the algebra involves a "Lie product" which is not necessarily a commutator, but nevertheless satisfies the Jacobi identity.

<sup>2</sup> Because of the  $L^{-1}$  in (2.32), it would be make sense to treat the third index in  $f_{abc}$  differently, and write it as an upper index -  $f_{ab}^c$ . We will not bother to do this because we are going to move very quickly to a restricted set of groups and basis sets in which  $\text{Tr}(T_a T_b) \propto \delta_{ab}$ . Then only orthogonal transformation on the  $X_a$  s are allowed,  $L^{-1} = L^T$ , so that all three indices are treated in the same way.

We still have the freedom to rescale the generators (by making a diagonal  $L$  transformation), so for example, we could choose all the non-zero  $k^a$  s to have absolute value 1. But, we cannot change the sign of the  $k^a$  s (because  $L$  appears squared in the transformation (2.35)).

For now, we will assume that the  $k^a$ s are positive. This defines the class of algebras that we study in this book. They are called the compact Lie algebras. We will come back briefly below to algebras in which some are zero.<sup>3</sup> And we will take

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \lambda \delta_{ab} \quad (2.37)$$

for some convenient positive  $\lambda$ . In this basis, the structure constants are completely antisymmetric, because we can write

$$f_{abc} = -i\lambda^{-1} \text{Tr}([T_a, T_b] T_c) \quad (2.38)$$

which is completely antisymmetric because of the cyclic property of the trace.

$$\begin{aligned} \text{Tr}([T_a, T_b] T_c) &= (T_a T_b T_c - T_b T_a T_c) \\ &= (T_b T_c T_a - T_c T_b T_a) = \text{Tr}([T_b, T_c] T_a) \end{aligned} \quad (2.39)$$

which implies

$$f_{abc} = f_{bca} \quad (2.40)$$

Taken together, (2.19) and (2.40) imply the complete antisymmetry of  $f_{abc}$

$$\begin{aligned} f_{abc} &= f_{bca} = f_{cab} \\ &= -f_{bac} = -f_{acb} = -f_{cba} \end{aligned} \quad (2.41)$$

In this basis, the adjoint representation is unitary, because the  $T_a$  are imaginary and antisymmetric, and therefore hermitian.

## 15.2.5 2.5 Simple algebras and groups

An invariant subalgebra is some set of generators which goes into itself under commutation with any element of the algebra. That is, if  $X$  is any generator in the invariant subalgebra and  $Y$  is any generator in the whole algebra,  $[Y, X]$  is a generator in the invariant subalgebra. When exponentiated, an invariant subalgebra generates an invariant subgroup. To see this note that

$$h = e^{iX}, \quad g = e^{iY} \quad (2.42)$$

$$g^{-1} h g = e^{iX'} \quad (2.43)$$

where

$$X' = e^{-iY} X e^{iY} = X - i[Y, X] - \frac{1}{2}[Y, [Y, X]] + \dots \quad (2.44)$$

Note that the easy way to see this is to consider

---

<sup>3</sup> Algebras in which some of the  $k_a$ s are negative have no nontrivial finite dimensional unitary representations. This does not mean that they are not interesting (the Lorentz group is one such), but we will not discuss them.

$$X'(\epsilon) = e^{-i\epsilon Y} X e^{i\epsilon Y} \quad (2.45)$$

then Taylor expand in  $\epsilon$  and set  $\epsilon = 1$ . Each derivative brings another commutator. Evidently, each of the terms in  $X'$  is in the subalgebra, and thus  $e^{iX'}$  is in the subgroup, which is therefore invariant.

The whole algebra and 0 are trivial invariant subalgebras. An algebra which has no non-trivial invariant subalgebra is called simple. A simple algebra generates a simple group.

The adjoint representation of a simple Lie algebra satisfying (2.37) is irreducible. To see this, assume the contrary. Then there is an invariant subspace in the adjoint representation. But the states of the adjoint representation correspond to generators, so this means that we can find a basis in which the invariant subspace is spanned by some subset of the generators,  $T_r$  for  $r = 1$  to  $K$ . Call the rest of the generators  $T_x$  for  $x = K + 1$  to  $N$ . Then because the  $r$ s span an invariant subspace, we must have

$$[T_a]_{xr} = -if_{axr} = 0 \quad (2.46)$$

for all  $a, x$  and  $r$ . Because of the complete antisymmetry of the structure constants, this means that all components of  $f$  that have two  $r$ s and one  $x$  or two  $x$ s and one  $r$  vanish. But that means that the nonzero structures constants involve either three  $r$ s or three  $x$ s, and thus the algebra falls apart into two nontrivial invariant subalgebras, and is not simple. Thus the adjoint representation of a simple Lie algebra satisfying (2.37) is irreducible.

We will often find it useful to discuss special Abelian invariant subalgebras consisting of a single generator which commutes with all the generators of the group (or of some subgroup we are interested in). We will call such an algebra a  $U(1)$  factor of the group.  $U(1)$  is the group of phase transformations.  $U(1)$  factors do not appear in the structure constants at all. These Abelian invariant subalgebras correspond to directions in the space of generators for which  $k_a = 0$  in (2.36). If  $X_a$  is a  $U(1)$  generator,  $f_{abc} = 0$  for all  $b$  and  $c$ . That also means that the corresponding  $k^a$  is zero, so the trace scalar product does not give a norm on the space. The structure constants do not tell us anything about the  $U(1)$  subalgebras.

Algebras without Abelian invariant subalgebras are called semisimple. They are built, as we will see, by putting simple algebras together. In these algebras, every generator has a non-zero commutator with some other generator. Because of the cyclic property of the structure constants, (2.38), this also implies that every generator is a linear combination of commutators of generators. In such a case, the structure constants carry a great deal of information. We will use them to determine the entire structure of the algebra and its representations. From here on, unless explicitly stated, we will discuss semisimple algebras, and we will deal with representations by unitary operators.

## 15.2.6 2.6 States and operators

The generators of a representation (like the elements of the representations they generate) can be thought of as either linear operators or matrices, just as we saw when we were discussing representations of finite groups -

$$X_a|i\rangle = |j\rangle \langle j|X_a|i\rangle = |j\rangle [X_a]_{ji} \quad (2.47)$$

with the sum on  $j$  understood. As in (1.98), the states form row vectors and the matrix representing a linear operator acts on the right.

In the Hilbert space on which the representation acts, the group elements can be thought of as transformations on the states. The group element  $e^{i\alpha_a X_a}$  maps or transforms the kets as follows:

$$|i\rangle \rightarrow |i'\rangle = e^{i\alpha_a X_a} |i\rangle \quad (2.48)$$

Taking the adjoint shows that the corresponding bras transform as

$$\langle i| \rightarrow \langle i'| = \langle i| e^{-i\alpha_a X_a} \quad (2.49)$$

The ket obtained by acting on  $|i\rangle$  with an operator  $O$  is a sum of kets, and therefore must also transform as in (2.48).

$$\begin{aligned} O|i\rangle &\rightarrow e^{i\alpha_a X_a} O|i\rangle \\ &= e^{i\alpha_a X_a} O e^{-i\alpha_a X_a} e^{i\alpha_a X_a} |i\rangle = O' |i'\rangle \end{aligned} \quad (2.50)$$

This implies that any operator  $O$  transforms as follows:

$$O \rightarrow O' = e^{i\alpha_a X_a} O e^{-i\alpha_a X_a} \quad (2.51)$$

The transformation leaves all matrix elements invariant.

The action of the algebra on these objects is related to the change in the state of operator under an infinitesimal transformation.

$$-i\delta|i\rangle = -i((1 + i\alpha_a X_a)|i\rangle - |i\rangle) = \alpha_a X_a |i\rangle \quad (2.52)$$

$$-i\delta\langle i| = -\langle i| \alpha_a X_a \quad (2.53)$$

$$-i\delta O = [\alpha_a X_a, O] \quad (2.54)$$

Thus, corresponding to the action of the generator  $X_a$  on a ket

$$X_a |i\rangle \quad (2.55)$$

is  $-X_a$  acting on a bra <sup>4</sup>

$$-\langle i| X_a \quad (2.56)$$

and the commutator of  $X_a$  with an operator

$$[X_a, O] \quad (2.57)$$

Then the invariance of a matrix element  $\langle i|O|i\rangle$  is expressed by the fact,

$$\langle i|O(X_a|i\rangle) + \langle i|[X_a, O]|i\rangle - (\langle i|X_a)O|i\rangle = 0 \quad (2.58)$$

## 15.2.7 2.7 Fun with exponentials

Consider the exponential

$$e^{i\alpha_a X_a} \quad (2.59)$$

where  $X_a$  is a representation matrix. We can always define the exponential as a power series,

---

<sup>4</sup> The argument above can be summarized by saying that the minus signs in (2.56) and in the commutator in (2.57) come ultimately from the unitarity of the transformation, (2.48).



$$e^{i\alpha_a X_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha_a X_a)^n}{n!} \quad (2.60)$$

However, it is useful to develop some rules for dealing with these things without expanding, like our simple rules for exponentials of commuting numbers. We have already seen that the multiplication law is not as simple as just adding the exponents. You might guess that the calculus is also more complicated. In particular,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} \neq iX_b e^{i\alpha_a X_a} \quad (2.61)$$

However, it is true that

$$\frac{d}{ds} e^{is\alpha_a X_a} = i\alpha_b X_b e^{is\alpha_a X_a} = i e^{is\alpha_a X_a} \alpha_b X_b \quad (2.62)$$

because  $\alpha_a X_a$  commutes with itself. This is very important, because you can often use it to derive other useful results. It is also true that

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} \right|_{\alpha=0} = iX_b \quad (2.63)$$

because this can be shown directly from the expansion. It is occasionally useful to have a general expression for the derivative. Besides, it is a beautiful formula, so I will write it down and tell you how to derive it. The formula is

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} = \int_0^1 ds e^{is\alpha_a X_a} (iX_b) e^{i(1-s)\alpha_a X_a} \quad (2.64)$$

I love this relation because it is so nontrivial, yet so easy to remember. The integral just expresses the fact that the derivative may act anywhere "inside" the exponential, so the result is the average of all the places where the derivative can act. One way of deriving this is to define the exponential as a limit as in (2.7).

$$e^{i\alpha_a X_a} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + i\alpha_a X_a/k)^k \quad (2.65)$$

and differentiate both sides - the result (2.64) is then just an exercise in defining an integral as a limit of a sum. Another way of doing it is to expand both sides and use the famous integral

$$\int_0^1 ds s^m (1-s)^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \quad (2.66)$$

We will see other properties of exponentials of matrices as we go along.

## Problems

2.A. Find all components of the matrix  $e^{i\alpha A}$  where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.B. If  $[A, B] = B$ , calculate

$$e^{i\alpha A} B e^{-i\alpha A}$$

2.C. Carry out the expansion of  $\delta_c$  in (2.11) and (2.12) to third order in  $\alpha$  and  $\beta$  (one order beyond what is discussed in the text).

Chapter 3

### 15.3 SU(2)

The  $SU(2)$  algebra is familiar.<sup>1</sup>

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l \quad (3.1)$$

This is the simplest of the compact Lie algebras because  $\epsilon_{ijk}$  for  $i, j, k = 1$  to  $3$  is the simplest possible completely antisymmetric object with three indices. (3.1) is equivalent (in units in which  $\hbar = 1$ ) to the angular momentum algebra that you studied in quantum mechanics. In fact we will only do two things differently here. One is to label the generators by 1, 2 and 3 instead of  $x, y$  and  $z$ . This is obviously a great step forward. More important is the fact that we will not make any use of the operator  $J_a J_a$ . Initially, this will make the analysis slightly more complicated, but it will start us on a path that generalizes beautifully to all the other compact Lie algebras.

#### 15.4 3.1 $J_3$ eigenstates

Our ultimate goal is to completely reduce the Hilbert space of the world to block diagonal form. To start the process, let us think about some finite space, of dimension  $N$ , and assume that it transforms under some irreducible representation of the algebra. Then we can see what the form of the algebra tells us about the representation. Clearly, we want to diagonalize as many of the elements of the algebra as we can. In this case, since nothing commutes with anything else, we can only diagonalize one element, which we may as well take to be  $J_3$ . When we have done that, we pick out the states with the highest value of  $J_3$  (we can always do that because we have assumed that the space is finite dimensional). Call the highest value of  $J_3$   $j$ . Then we have a set of states

$$J_3|j, \alpha\rangle = j|j, \alpha\rangle \quad (3.2)$$

where  $\alpha$  is another label, only necessary if there is more than one state of highest  $J_3$  (of course, you know that we really don't need  $\alpha$  because the highest state is unique, but we haven't shown that yet, so we will keep it). We can also always choose the states so that

$$\langle j, \alpha | j, \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.3)$$

#### 15.4.1 3.2 Raising and lowering operators

Now, just as in introductory quantum mechanics, we define raising and lowering operators,

$$J^\pm = (J_1 \pm iJ_2) / \sqrt{2} \quad (3.4)$$

satisfying

---

<sup>1</sup> We will see below why the name  $SU(2)$  is appropriate.

$$[J_3, J^\pm] = \pm J^\pm \quad (3.5)$$

$$[J^+, J^-] = J_3 \quad (3.6)$$

so they raise and lower the value of  $J_3$  on the states. If

$$J_3|m\rangle = m|m\rangle \quad (3.7)$$

then

$$J_3 J^\pm|m\rangle = J^\pm J_3|m\rangle \pm J^\pm|m\rangle = (m \pm 1)J^\pm|m\rangle \quad (3.8)$$

The key idea is that we can use the raising and lowering operators to construct the irreducible representations and to completely reduce reducible representations. This idea is very simple for  $SU(2)$ , but it is very useful to see how it works in this simple case before we generalize it to an arbitrary compact Lie algebra.

There is no state with  $J_3 = j + 1$  because we have assumed that  $j$  is the highest value of  $J_3$ . Thus it must be that

$$J^+|j, \alpha\rangle = 0 \forall \alpha \quad (3.9)$$

because any non-zero states would have  $J_3 = j + 1$ . The states obtained by acting with the lowering operator have  $J_3 = j - 1$ , so it makes sense to define

$$J^-|j, \alpha\rangle \equiv N_j(\alpha)|j - 1, \alpha\rangle \quad (3.10)$$

where  $N_j(\alpha)$  is a normalization factor. But we easily see that states with different  $\alpha$  are orthogonal, because

$$\begin{aligned} & N_j(\beta)^* N_j(\alpha) \langle j - 1, \beta | j - 1, \alpha \rangle \\ &= \langle j, \beta | J^+ J^- | j, \alpha \rangle \\ &= \langle j, \beta | [J^+, J^-] | j, \alpha \rangle \\ &= \langle j, \beta | J_3 | j, \alpha \rangle \\ &= j \langle j, \beta | j, \alpha \rangle = j \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Thus we can choose the states  $|j - 1, \alpha\rangle$  to be orthonormal by choosing

$$N_j(\alpha) = \sqrt{j} \equiv N_j \quad (3.12)$$

Then in addition to (3.10), we have

$$\begin{aligned} J^+|j - 1, \alpha\rangle &= \frac{1}{N_j} J^+ J^- |j, \alpha\rangle \\ &= \frac{1}{N_j} [J^+, J^-] |j, \alpha\rangle \\ &= \frac{j}{N_j} |j, \alpha\rangle = N_j |j, \alpha\rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

The point is that because of the algebra, we can define the states so that the raising and lowering operators act without changing  $\alpha$ . That is why the parameter  $\alpha$  is eventually going

to go away. Now an analogous argument shows that there are orthonormal states  $|j - 2, \alpha\rangle$  satisfying

$$\begin{aligned} J^-|j - 1, \alpha\rangle &= N_{j-1}|j - 2, \alpha\rangle \\ J^+|j - 2, \alpha\rangle &= N_{j-1}|j - 1, \alpha\rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

Continuing the process, we find a whole tower of orthonormal states,  $|j - k, \alpha\rangle$  satisfying

$$\begin{aligned} J^-|j - k, \alpha\rangle &= N_{j-k}|j - k - 1, \alpha\rangle \\ J^+|j - k - 1, \alpha\rangle &= N_{j-k}|j - k, \alpha\rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

The  $N$  s can be chosen to be real, and because of the algebra, they satisfy

$$\begin{aligned} N_{j-k}^2 &= \langle j - k, \alpha | J^+ J^- | j - k, \alpha \rangle \\ &= \langle j - k, \alpha | [J^+, J^-] | j - k, \alpha \rangle \\ &\quad + \langle j - k, \alpha | J^- J^+ | j - k, \alpha \rangle \\ &= N_{j-k+1}^2 + j - k \end{aligned} \quad (3.16)$$

This is a recursion relation for the  $N$  s which is easy to solve by starting with  $N_j$ :

$$\begin{aligned} N_j^2 &= j \\ N_{j-1}^2 - N_j^2 &= j - 1 \\ \frac{N_{j-k}^2 - N_{j-k+1}^2}{N_{j-k}^2} &= (k + 1)j - k(k + 1)/2 \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)(2j - k) \end{aligned} \quad (3.17)$$

or setting  $k = j - m$

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j + m)(j - m + 1)} \quad (3.18)$$

Because the representation is finite dimensional (by assumption - we haven't proved this) there must be some maximum number of lowering operators,  $\ell$ , that we can apply to  $|j, \alpha\rangle$ . We must eventually come to some  $m = j - \ell$  such that applying any more lowering operators gives 0. Then  $\ell$  is a non-negative integer specifying the number of times we can lower the states with highest  $J_3$ . Another lowering operator annihilates the state -

$$J^-|j - \ell, \alpha\rangle = 0 \quad (3.19)$$

But then the norm of  $J^-|j - \ell, \alpha\rangle$  must vanish, which means that

$$N_{j-\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2j - \ell)(\ell + 1)} = 0 \quad (3.20)$$

the factor  $\ell + 1$  cannot vanish, thus we must have

$$\ell = 2j \quad (3.21)$$

Thus

$$j = \frac{\ell}{2} \quad \text{for some integer } \ell \quad (3.22)$$

Now we can get rid of  $\alpha$ . It is now clear that the space breaks up into subspaces that are invariant under the algebra, one for each value of  $\alpha$ , because the generators do not change  $\alpha$ . Thus from our original assumption of irreducibility, there must be only one  $\alpha$  value, so we can drop the  $\alpha$  entirely.

Furthermore, there can be no other states, or the subspace we just constructed would be nontrivial (and invariant). Thus we have learned how the generators act on all the finite dimensional irreducible representations. In fact, though we won't prove it, there are no others - that is all representations are finite dimensional, so we know all of them.

### 15.4.2 3.3 The standard notation

We can now switch to the standard notation in which we label the states of the irreducible representations by the highest  $J_3$  value in the representation and the  $J_3$  value: <sup>2</sup>

$$|j, m\rangle \quad (3.23)$$

and the matrix elements of the generators are determined by the matrix elements of  $J_3$  and the raising and lowering operators,  $J^{\pm}$ .<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \langle j, m' | J_3 | j, m \rangle &= m \delta_{m'm} \\ \langle j, m' | J^+ | j, m \rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)/2} \delta_{m',m+1} \\ \langle j, m' | J^- | j, m \rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)/2} \delta_{m',m-1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

These matrix elements define the spin  $j$  representation of the  $SU(2)$  algebra:

$$[J_a^j]_{k\ell} = \langle j, j+1-k | J_a | j, j+1-\ell \rangle \quad (3.25)$$

Here we have written the matrix elements in the conventional language where the rows and columns are labeled from 1 to  $2j+1$ . In this case, it is often convenient to label the rows and columns directly by their  $m$  values, which are just  $j+1-\ell$  and  $j+1-k$  above in (3.25). In this notation, (3.25) would read

$$[J_a^j]_{m'm} = \langle j, m' | J_a | j, m \rangle \quad (3.26)$$

where  $m$  and  $m'$  run from  $j$  to  $-j$  in steps of -1. We will use these interchangeably - choosing whichever is most convenient for the problem at hand.

For example, for  $1/2$ , this gives the spin  $1/2$  representation

$$\begin{aligned} J_1^{1/2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_1 \\ J_2^{1/2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_2 \\ J_3^{1/2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3 \end{aligned} \quad (3.27)$$

where the  $\sigma$  s are the Pauli matrices.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

satisfying

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i\epsilon_{abc} \sigma_c \quad (3.29)$$

The spin 1/2 representation is the simplest representation of  $SU(2)$ . It is called the "defining" representation of  $SU(2)$ , and is responsible for the name  $SU$ , which is an acronym for "Special Unitary". Exponentiating the generators of the spin 1/2 representation to get the representation of finite group elements gives matrices of the form

$$e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2} \quad (3.30)$$

which are the most general  $2 \times 2$  unitary matrices with determinant 1. The "special", in Special Unitary means that the determinant is 1, rather than an arbitrary complex number of absolute value 1.

All the other irreducible representations can be constructed similarly. For example, the spin 1 representation looks like

$$\begin{aligned} J_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ J_2^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ J_3^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

while the spin 3/2 representation is

$$\begin{aligned} J_1^{3/2} &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ J_2^{3/2} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}i & 0 \end{pmatrix} \\ J_3^{3/2} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

The construction of the irreducible representations above generalizes to any compact Lie algebra, as we will see. The  $J_3$  values are called weights, and the analysis we have just done is called the highest weight construction because it starts with the unique highest weight of the representation. Note that the same construction provides a systematic procedure for bringing an arbitrary finite dimensional representation into block diagonal form. The procedure is as follows:

1. Diagonalize  $J_3$ .
2. Find the states with the highest  $J_3$  value,  $j$ .
3. For each such state, explicitly construct the states of the irreducible spin  $j$  representation by applying the lowering operator to the states with highest  $J_3$ .
4. Now set aside the subspace spanned by these representations, which is now in canonical form, and concentrate on the subspace orthogonal to it.
5. Take these remaining states, go to step 2 and start again with the states with next highest  $J_3$  value.

The end result will be the construction of a basis for the Hilbert space of the form

$$|j, m, \alpha\rangle \quad (3.34)$$

where  $m$  and  $j$  refer to the  $J_3$  value and the representation as usual (as in (3.23)) and  $\alpha$  refers to all the other observables that can be diagonalized to characterize the state. These satisfy

$$\langle j', m', \alpha' | j, m, \alpha \rangle = \delta_{m'm} \delta_{j'j} \delta_{\alpha'\alpha} \quad (3.35)$$

The Kronecker  $\delta$  s are automatic consequences of our construction. They are also required by Schur's lemma, because the matrix elements satisfy

$$\begin{aligned} \langle j', m', \alpha' | J_a | j, m, \alpha \rangle \\ &= \left[ J_a^{j'} \right]_{m'm''} \langle j', m'', \alpha' | j, m, \alpha \rangle \\ &= \langle j', m', \alpha' | j, m'', \alpha \rangle \left[ J_a^j \right]_{m''m} \end{aligned} \quad (3.36)$$

because we can insert a complete set of intermediate states on either side of  $J_a$ . Thus  $\langle j', m', \alpha' | j, m, \alpha \rangle$  commutes with all the elements of an irreducible representation, and is either 0 if  $j \neq j'$  or proportional to the identity,  $\delta_{m'm}$  if  $j = j'$ .

### 15.4.3 3.4 Tensor products

You have probably all used the highest weight scheme, possibly without knowing it, to do what in introductory quantum mechanics is called addition of angular momentum. This occurs when we form a tensor product of two sets of states which transform under the group.<sup>4</sup> This happens, in turn, whenever a system responds to the group transformation in more than one way. The classic example of this is a particle that carries both spin and orbital angular momentum. In this case, the system can be described in a space that you can think of as built of a product of two different kinds of kets.

$$|i, x\rangle \equiv |i\rangle |x\rangle \quad (3.37)$$

where the first states,  $|i\rangle$  transforms under representation  $D_1$  of the group and the second,  $|x\rangle$ , under  $D_2$ . Then the product, called the tensor product,

transforms as follows:

$$\begin{aligned} D(g)|i, x\rangle &= |j, y\rangle [D_{1\otimes 2}(g)]_{jyix} \\ &= |j\rangle |y\rangle [D_1(g)]_{ji} [D_2(g)]_{yx} \\ &= \left(|j\rangle [D_1(g)]_{ji}\right) \left(|y\rangle [D_2(g)]_{yx}\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

In other words, the two kets are just transforming independently under their own representations. If we look at this near the identity, for infinitesimal  $\alpha_a$ ,

$$\begin{aligned} &(1 + i\alpha_a J_a) |i, x\rangle \\ &= |j, y\rangle \langle j, y | (1 + i\alpha_a J_a) |i, x\rangle \\ &= |j, y\rangle \left( \delta_{ji} \delta_{yx} + i\alpha_a [J_a^{1\otimes 2}(g)]_{jyix} \right) \\ &= |j, y\rangle \left( \delta_{ji} + i\alpha_a [J_a^1]_{ji} \right) \left( \delta_{yx} + i\alpha_a [J_a^2]_{yx} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Thus identifying first powers of  $\alpha_a$

$$[J_a^{1\otimes 2}(g)]_{jyix} = [J_a^1]_{ji} \delta_{yx} + \delta_{ji} [J_a^2]_{yx} \quad (3.40)$$

When we multiply the representations, the generators add, in the sense shown in (3.40). This is what happens with addition of angular momenta. We will often write (3.40) simply as

$$J_a^{1\otimes 2} = J_a^1 + J_a^2 \quad (3.41)$$

leaving you to figure out from the context where the indices go, and ignoring the  $\delta$ -functions which, after all, are just identity operators on the appropriate space. In fact, you can think of this in terms of the action of the generators as follows:

$$J_a(|j\rangle|x\rangle) = (J_a|j\rangle)|x\rangle + |j\rangle(J_a|x\rangle) \quad (3.42)$$

### 15.4.4 3.5 $J_3$ values add

This is particularly simple for the generator  $J_3$  because we work in a basis in which  $J_3$  is diagonal. Thus the  $J_3$  values of tensor product states are just the sums of the  $J_3$  values of the factors:

$$J_3(|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle) = (m_1 + m_2) (|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle) \quad (3.43)$$

This is what we would expect, classically, for addition of angular momentum, of course. But in quantum mechanics, we can only make it work for one component. We can, however, use this in the highest weight construction, (3.33).

Consider, for example, the tensor product of a spin 1/2 and spin 1 representation. The highest weight procedure (3.33) is what you would use to decompose the product space into irreducible representations. Let's do it explicitly. There is a unique highest weight state,



$$|3/2, 3/2\rangle = |1/2, 1/2\rangle|1, 1\rangle \quad (3.44)$$

We can now construct the rest of the spin 3/2 states by applying lowering operators to both sides. For example using (3.42)

$$\begin{aligned} J^-|3/2, 3/2\rangle &= J^- (|1/2, 1/2\rangle|1, 1\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|1/2, -1/2\rangle|1, 1\rangle + |1/2, 1/2\rangle|1, 0\rangle \end{aligned} \quad (3.45)$$

or

$$|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, -1/2\rangle|1, 1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, 0\rangle \quad (3.46)$$

Continuing the process gives

$$\begin{aligned} |3/2, -1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, -1/2\rangle|1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, -1\rangle \\ |3/2, -3/2\rangle &= |1/2, -1/2\rangle|1, -1\rangle \end{aligned} \quad (3.47)$$

Then the remaining states are orthogonal to these -

$$\sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, -1/2\rangle|1, 1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, 0\rangle \quad (3.48)$$

and

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, -1/2\rangle|1, 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, -1\rangle \quad (3.49)$$

applying the highest weight scheme to this reduced space gives

$$\begin{aligned} |1/2, 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, -1/2\rangle|1, 1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, 0\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\{1/2, -1/2\rangle|1, 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, -1\rangle \end{aligned} \quad (3.50)$$

In this case, we have used up all the states, so the process terminates. Note that the signs of the spin 1/2 states were not determined when we found the states orthogonal to the spin 3/2 states, but that the relative sign is fixed because the  $J_3 = \pm 1/2$  states are related by the raising and lowering operators.

## Problems

3.A. Use the highest weight decomposition, (3.33), to show that

$$\{j\} \otimes \{s\} = \sum_{\oplus \ell=|s-j|}^{s+j} \{\ell\}$$

where the  $\oplus$  in the summation just means that the sum is a direct sum, and  $\{k\}$  denotes the spin  $k$  representation of  $SU(2)$ . To do this problem, you do not need to construct the precise linear combinations of states that appear in each irreducible representation, but you must at least show how the counting of states goes at each stage of the highest weight decomposition.

### 3.B. Calculate

$$e^{i\vec{r}\cdot\vec{\sigma}}$$

where  $\vec{\sigma}$  are the Pauli matrices. Hint: write  $\vec{r} = |\vec{r}|\hat{r}$ .

3.C. Show explicitly that the spin 1 representation obtained by the highest weight procedure with  $j = 1$  is equivalent to the adjoint representation, with  $f_{abc} = \epsilon_{abc}$  by finding the similarity transformation that implements the equivalence.

3.D. Suppose that  $[\sigma_a]_{ij}$  and  $[\eta_a]_{xy}$  are Pauli matrices in two different two dimensional spaces. In the four dimensional tensor product space, define the basis

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |i=1\rangle|x=1\rangle & |2\rangle &= |i=1\rangle|x=2\rangle \\ |3\rangle &= |i=2\rangle|x=1\rangle & |4\rangle &= |i=2\rangle|x=2\rangle \end{aligned}$$

Write out the matrix elements of  $\sigma_2 \otimes \eta_1$  in this basis.

3.E. We will often abbreviate the tensor product notation by leaving out the indices and the identity matrices. This makes for a very compact notation, but you must keep your wits about you to stay in the right space. In the example of problem 3.D, we could write:

$$\begin{aligned} [\sigma_a]_{ij} [\eta_b]_{xy} &\text{ as } \sigma_a \eta_b \\ [\sigma_a]_{ij} \delta_{xy} &\text{ as } \sigma_a \\ \delta_{ij} [\eta_b]_{xy} &\text{ as } \eta_b \\ \delta_{ij} \delta_{xy} &\text{ as } 1 \end{aligned}$$

So for example,  $(\sigma_1)(\sigma_2\eta_1) = i\sigma_3\eta_1$  and  $(\sigma_1\eta_2)(\sigma_1\eta_3) = i\eta_1$ .

To get some practice with this notation, calculate

- (a)  $[\sigma_a, \sigma_b\eta_c]$ ,
- (b)  $\text{Tr}(\sigma_a \{\eta_b, \sigma_c\eta_d\})$ ,
- (c)  $[\sigma_1\eta_1, \sigma_2\eta_2]$ .

where  $\sigma_a$  and  $\eta_a$  are independent sets of Pauli matrices and  $\{A, B\} = AB + BA$  is the "anticommutator."

Chapter 4

## 15.5 Tensor Operators

A tensor operator is a set of operators that transforms under commutation with the generators of some Lie algebra like an irreducible representation of the algebra. In this chapter, we will define and discuss tensor operators for the  $SU(2)$  algebra discussed in chapter 3. A tensor operator transforming under the spin- $s$  representation of  $SU(2)$  consists of a set of operators,  $O_\ell^s$  for  $\ell = 1$  to  $2s + 1$  (or  $-s$  to  $s$ ), such that

$$[J_a, O_\ell^s] = O_m^s [J_a^s]_{m\ell} \quad (4.1)$$

It is true, though we have not proved it, that every irreducible representation is finite dimensional and equivalent to one of the representations that we found with the highest weight construction. We can always choose all tensor operators for  $SU(2)$  to have this form.

### 15.5.1 4.1 Orbital angular momentum

Here is an example - a particle in a spherically symmetric potential. If the particle has no spin, then  $J_a$  is the orbital angular momentum operator,

$$J_a = L_a = \epsilon_{abc} r_b p_c \quad (4.2)$$

The position vector is related to a tensor operator because it transforms under the adjoint representation

$$\begin{aligned} [J_a, r_b] &= \epsilon_{acd} [r_c p_d, r_b] = -i\epsilon_{acd} r_c \delta_{bd} \\ &= -i\epsilon_{acb} r_c = r_c [J_a^{\text{adj}}]_{cb} \end{aligned} \quad (4.3)$$

where  $J^{\text{adj}}$  is the adjoint representation, and we know from problem 3.C that this representation is equivalent to the standard spin 1 representation from the highest weight procedure.

### 15.5.2 4.2 Using tensor operators

Note that the transformation of the position operator in (4.3) does not have quite the right form, because the representation matrices  $J_a^{\text{adj}}$  are not the standard form. The first step in using tensor operators is to choose the operator basis so that the conventional spin  $s$  representation appears in the commutation relation (4.1). This is not absolutely necessary, but it makes things easier, as we will see. We will discuss this process in general, and then see how it works for  $r_a$ .

Suppose that we are given a set of operators,  $\Omega_x$  for  $x = 1$  to  $2s+1$  that transforms according a representation  $D$  that is equivalent to the spin- $s$  representation of  $SU(2)$ :

$$[J_a, \Omega_x] = \Omega_y [J_a^D]_{yx} \quad (4.4)$$

Since by assumption,  $D$  is equivalent to the spin- $s$  representation, we can find a matrix  $S$  such that

$$S J_a^D S^{-1} = J_a^s \quad (4.5)$$

or in terms of matrix elements

$$[S]_{\ell x} [J_a^D]_{xy} [S^{-1}]_{y\ell'} = [J_a^s]_{\ell\ell'} \quad (4.6)$$

Then we define a new set of operators

$$O_\ell^s = \Omega_y [S^{-1}]_{y\ell} \quad \text{for } \ell = -s \text{ to } s \quad (4.7)$$

Now  $O_\ell^s$  satisfies

$$\begin{aligned} [J_a, O_\ell^s] &= [J_a, \Omega_y] [S^{-1}]_{y\ell} \\ &= \Omega_z [J_a^D]_{zy} [S^{-1}]_{y\ell} \\ &= \Omega_z [S^{-1}]_{z\ell'} [S]_{\ell'z'} [J_a^D]_{z'y} [S^{-1}]_{y\ell} \\ &= O_{\ell'}^s [J_a^s]_{\ell'\ell} \end{aligned} \quad (4.8)$$

which is what we want. Notice that (4.8) is particularly simple for  $J_3$ , because in our standard basis in which the indices  $\ell$  label the  $J_3$  value,  $J_3^1$ , (or  $J_3^s$  for any  $s$ ) is a diagonal matrix

$$[J_3^s]_{\ell'\ell} = \ell \delta_{\ell\ell'} \quad \text{for } \ell, \ell' = -s \text{ to } s \quad (4.9)$$

Thus

$$[J_3, O_\ell^s] = O_\ell^s [J_3]_{\ell'\ell} = \ell O_\ell^s \quad (4.10)$$

In practice, it is usually not necessary to find the matrix  $S$  explicitly. If we can find any linear combination of the  $\Omega_x$  which has a definite value of  $J_3$  (that means that it is proportional to its commutator with  $J_3$ ), we can take that to be a component of  $O^s$ , and then build up all the other  $O^s$  components by applying raising and lowering operators.

For the position operator it is easiest to start by finding the operator  $r_0$ . Since  $[J_3, r_3] = 0$ , we know that  $r_3$  has  $J_3 = 0$  and therefore that  $r_3 \propto r_0$ . Thus we can take

$$r_0 = r_3 \quad (4.11)$$

Then the commutation relations for the spin 1 raising and lowering operators give the rest

$$\begin{aligned} [J^\pm, r_0] &= r_{\pm 1} \\ &= \mp (r_1 \pm ir_2) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

### 15.5.3 4.3 The Wigner-Eckart theorem

The interesting thing about tensor operators is how the product  $O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle$  transforms.

$$\begin{aligned} J_a O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle &= [J_a, O_\ell^s] |j, m, \alpha\rangle + O_\ell^s J_a |j, m, \alpha\rangle \\ &= O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle [J_a^s]_{\ell'\ell} + O_\ell^s |j, m', \alpha\rangle [J_a^j]_{m'm} \end{aligned} \quad (4.13)$$

This is the transformation law for a tensor product of spin  $s$  and spin  $j$ ,  $s \otimes j$ . Because we are using the standard basis for the states and operators in which  $J_3$  is diagonal, this is particularly simple for the generator  $J_3$ , for which (4.13) becomes

$$J_3 O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle = (\ell + m) O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle \quad (4.14)$$

The  $J_3$  value of the product of a tensor operator with a state is just the sum of the  $J_3$  values of the operator and the state.

The remarkable thing about this is that the product of the tensor operator and the ket behaves under the algebra just like the tensor product of two kets. Thus we can decompose it into irreducible representations in exactly the same way, using the highest weight procedure. That is, we note that  $O_\ell^s |j, j, \alpha\rangle$  with  $J_3 = j + s$  is the highest weight state. We can lower it to construct the rest of the spin  $j + s$  representation. Then we can find the linear combination of  $J_3 = j + s - 1$  states that is the highest weight of the spin  $j + s - 1$  representation, and lower it to get the entire representation, and so on. In this way, we find explicit representations for the states of the irreducible components of the tensor product in terms of linear combinations of the  $O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle$ . You probably know, and have shown explicitly in problem 3.A, that in this decomposition, each representation from  $j + s$  to  $|j - s|$  appears exactly once. We can write the result of the highest weight analysis as follows:

$$\sum_{\ell} O_\ell^s |j, M - \ell, \alpha\rangle \langle s, j, \ell, M - \ell | J, M \rangle = k_J |J, M\rangle \quad (4.15)$$

Here  $|J, M\rangle$  is a normalized state that transforms like the  $J_3 = M$  component of the spin  $J$  representation and  $k_J$  is an unknown constant for each  $J$  (but does not depend on  $M$ ). The

coefficients  $\langle s, j, \ell, M - \ell | J, M \rangle$  are determined by the highest weight construction, and can be evaluated from the tensor product of kets, where all the normalizations are known and the constants  $k_J$  are equal to 1:

$$\sum_{\ell} |s, \ell\rangle |j, M - \ell\rangle \langle s, j, \ell, M - \ell | J, M \rangle = |J, M\rangle \quad (4.16)$$

One way to prove <sup>1</sup> that the coefficients can be taken to be the same in (4.15) and (4.16) is to notice that in both cases,  $J^+ |J, J\rangle$  must vanish and that this condition determines the coefficients  $\langle s, j, \ell, J - \ell | J, J \rangle$  up to a multiplicative constant. Since the transformation properties of  $O_{\ell}^s |j, m\rangle$  and  $|s, \ell\rangle |j, m\rangle$  are identical, the coefficients must be proportional. The only difference is the factor of  $k_J$  in (4.15).

We can invert (4.15) and express the original product states as linear combinations of the states with definite total spin  $J$ .

$$O_{\ell}^s |j, m, \alpha\rangle = \sum_{J=|j-s|}^{j+s} \langle J, \ell + m | s, j, \ell, m \rangle k_J |J, \ell + m\rangle \quad (4.17)$$

<sup>1</sup>This is probably obvious, but as we will emphasize below, the operators are different

because we do not have a scalar product for them.

The coefficients  $\langle J, M | s, j, \ell, M - \ell \rangle$  are thus entirely determined by the algebra, up to some choices of the phases of the states. Once we have a convention for fixing these phases, we can make tables of these coefficients once and for all, and be done with it. The notation  $\langle J, \ell + m | s, j, \ell, m \rangle$  just means the coefficient of  $|J, \ell + m\rangle$  in the product  $|s, \ell\rangle |j, m\rangle$ . These are called Clebsch-Gordan coefficients.

The Clebsch-Gordan coefficients are all group theory. The physics comes in when we reexpress the  $|J, \ell + m\rangle$  in terms of the Hilbert space basis states  $|J, \ell + m, \beta\rangle$ —

$$k_J |J, \ell + m\rangle = \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} |J, \ell + m, \beta\rangle \quad (4.18)$$

We have absorbed the unknown coefficients  $k_J$  into the equally unknown coefficients  $k_{\alpha\beta}$ . These depend on  $\alpha, j, O^s$  and  $s$ , because the original products do, and on  $\beta$  and  $J$ , of course. But they do not depend at all on  $\ell$  or  $m$ . We only need to know the coefficients for one value of  $\ell + m$ . The  $k_{\alpha\beta}$  are called reduced matrix elements and denoted

$$k_{\alpha\beta} = \langle J, \beta | O^s | j, \alpha \rangle \quad (4.19)$$

Putting all this together, we get the Wigner-Eckart theorem for matrix elements of tensor operators:

$$\begin{aligned} \langle J, m', \beta | O_{\ell}^s | j, m, \alpha \rangle \\ = \delta_{m', \ell+m} \langle J, \ell + m | s, j, \ell, m \rangle \cdot \langle J, \beta | O^s | j, \alpha \rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

If we know any non-zero matrix element of a tensor operator between states of some given  $J, \beta$  and  $j, \alpha$ , we can compute all the others using the algebra. This sounds pretty amazing, but all that is really going on is that we can use the raising and lowering operators to go up and down within representations using pure group theory. Thus by clever use of the raising and lowering operators, we can compute any matrix element from another. The Wigner-Eckart theorem just expresses this formally.

### 15.5.4 4.4 Example

Suppose

$$\langle 1/2, 1/2, \alpha | r_3 | 1/2, 1/2, \beta \rangle = A \quad (4.21)$$

Find

$$\langle 1/2, 1/2, \alpha | r_1 | 1/2, -1/2, \beta \rangle = ? \quad (4.22)$$

First, since  $r_0 = r_3$ ,

$$\langle 1/2, 1/2, \alpha | r_0 | 1/2, 1/2, \beta \rangle = A \quad (4.23)$$

Then we know from (4.12) that

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-r_{+1} + r_{-1}) \quad (4.24)$$

Thus

$$\begin{aligned} & \langle 1/2, 1/2, \alpha | r_1 | 1/2, -1/2, \beta \rangle \\ &= \left\langle 1/2, 1/2, \alpha \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (-r_{+1} + r_{-1}) \right| 1/2, -1/2, \beta \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1/2, 1/2, \alpha | r_{+1} | 1/2, -1/2, \beta \rangle \end{aligned} \quad (4.25)$$

Now we could plug this into the formula, and you could find the ClebschGordan coefficients in a table. But I'll be honest with you. I can never remember what the definitions in the formula are long enough to use it. Instead, I try to understand what the formula means, and I suggest that you do the same. We could also just use what we have already done, decomposing  $1/2 \otimes 1$  into irreducible representations. For example, we know from the highest weight construction that

$$|3/2, 3/2\rangle \equiv r_{+1} |1/2, 1/2, \beta\rangle \quad (4.26)$$

is a  $3/2, 3/2$  state because it is the highest weight state that we can get as a product of an  $r_\ell$  operator acting on an  $|1/2, m\rangle$  state. Then we can get the corresponding  $|3/2, 1/2\rangle$  state in the same representation by acting with the lowering operator  $J^-$

$$\begin{aligned} |3/2, 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} J^- |3/2, 3/2\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} r_0 |1/2, 1/2, \beta\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} r_{+1} |1/2, -1/2, \beta\rangle \end{aligned} \quad (4.27)$$

But we know that this spin-  $3/2$  state has zero matrix element with any spin  $1/2$  state, and thus

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 1/2, 1/2, \alpha | 3/2, 1/2 \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \langle 1/2, 1/2, \alpha | r_0 | 1/2, 1/2, \beta \rangle \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{3}} \langle 1/2, 1/2, \alpha | r_{+1} | 1/2, -1/2, \beta \rangle \end{aligned} \quad (4.28)$$

so

$$\begin{aligned}
& \langle 1/2, 1/2, \alpha | r_{+1} | 1/2, -1/2, \beta \rangle \\
&= -\sqrt{2} \langle 1/2, 1/2, \alpha | r_0 | 1/2, 1/2, \beta \rangle \\
&= -\sqrt{2}A
\end{aligned} \tag{4.29}$$

so

$$\langle 1/2, 1/2, \alpha | r_1 | 1/2, -1/2, \beta \rangle = A \tag{4.30}$$

Although we did not need it here, we can also conclude that

$$|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}r_0|1/2, 1/2, \alpha\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}r_{+1}|1/2, -1/2, \alpha\rangle \tag{4.31}$$

is a  $1/2, 1/2$  state. This statement is actually a little subtle, and shows the power of the algebra. When we did this analysis for the tensor product of  $j = 1$  and  $j = 1/2$  states, we used the fact that the  $|1/2, 1/2\rangle$  must be orthogonal to the  $|3/2, 1/2\rangle$  states to find the form of the  $|1/2, 1/2\rangle$  state. We cannot do this here, because we do not know from the symmetry alone how to determine the norms of the states

$$r_\ell|1/2, m\rangle \tag{4.32}$$

However, we know from the analysis with the states and the fact that the transformation of these objects is analogous that

$$J^+|1/2, 1/2\rangle = 0 \tag{4.33}$$

Thus it is a  $1/2, 1/2$  state because it is the highest weight state in the representation. We will return to this issue later.

There are several ways of approaching such questions. Here is another way. Consider the matrix elements

$$\langle 1/2, m, \alpha | r_a | 1/2, m', \beta \rangle \tag{4.34}$$

The Wigner-Eckart theorem implies that these matrix elements are all proportional to a single parameter, the  $k_{\alpha\beta}$ . Furthermore, this result is a consequence of the algebra alone. Any operator that has the same commutation relations with  $J_a$  will have matrix elements proportional to  $r_a$ . But  $J_a$  itself has the same commutation relations. Thus the matrix elements of  $r_a$  are proportional to those of  $J_a$ . This is only helpful if the matrix elements of  $J_a$  are not zero (if they are all zero, the Wigner-Eckart theorem is trivially satisfied). In this case, they are not (at least if  $\alpha = \beta$ )

$$\langle 1/2, m, \alpha | J_a | 1/2, m', \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2} [\sigma_a]_{mm'} \tag{4.35}$$

Thus

$$\langle 1/2, m, \alpha | r_a | 1/2, m', \beta \rangle \propto [\sigma_a]_{mm'} \tag{4.36}$$

This gives the same result.

### 15.5.5 4.5 \* Making tensor operators

If often happens that you come upon a set of operators which transforms under commutation with the generators like a reducible representation of the algebra

$$[J_a, \Omega_x] = \Omega_y [J_a^D]_{yx} \quad (4.37)$$

where  $D$  is reducible. In this case, some work is required to turn these into tensor operators, but the work is essentially just the familiar highest weight construction again. The first step is to make linear combinations of the  $\Omega_x$  operators that have definite  $J_3$  values

$$[J_3, O_{m,\alpha}] = m O_{m,\alpha} \quad (4.38)$$

This is always possible because  $D$  can be decomposed into irreducible representations that have this property. Then we can apply the highest weight procedure and conclude that the operators, with the highest weight,  $O_{j,\alpha}$  are components of a tensor operator with spin  $j$ , one for each  $\alpha$ . If there are any operators with weight  $j - 1/2$ ,  $O_{j-1/2,\beta}$ , they will be components of tensor operators with spin  $j - 1/2$ . However, things can get subtle at the next level. To find the tensor operators with spin  $j - 1$ , you must find linear combinations of the operators with weight  $j - 1$  which have vanishing commutator with  $J^+$  — then they correspond to the highest weights of the spin  $j - 1$  reps

$$[J^+, O_{j-1,\gamma}] \quad (4.39)$$

The point is, if you get the operators in a random basis, you have nothing like a scalar product, so you cannot simply find the operators that are "orthogonal" to the ones you have already assigned to representations. I hope that an example will make this clearer. Consider seven operators,  $a_{\pm 1}, b_{\pm 1}$  and  $a_0, b_0$  and  $c_0$ , with the following commutation relations with the generators:

$$\begin{aligned} [J_3, a_{+1}] &= a_{+1} & [J_3, b_{+1}] &= b_{+1} \\ [J_3, a_0] &= [J_3, b_0] = [J_3, c_0] &= 0 \\ [J_3, a_{-1}] &= -a_{-1} & [J_3, b_{-1}] &= -b_{-1} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} [J^+, a_{+1}] &= [J^+, b_{+1}] = 0 \\ [J^+, a_0] &= a_{+1} & [J^+, b_0] &= b_{+1} & [J^+, c_0] &= a_{+1} - b_{+1} \\ [J^+, a_{-1}] &= c_0 & [J^+, b_{-1}] &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0 - 3c_0) \\ [J^-, a_{+1}] &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) & [J^-, b_{+1}] &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0 - c_0) \\ [J^-, a_0] &= 2a_{-1} + b_{-1} & [J^-, b_0] &= a_{-1} + b_{-1} & [J^-, c_0] &= a_{-1} \\ [J^-, a_{-1}] &= [J^-, b_{-1}] = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} [J^-, a_{+1}] &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) & [J^-, b_{+1}] &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0 - c_0) \\ [J^-, a_0] &= 2a_{-1} + b_{-1} & [J^-, b_0] &= a_{-1} + b_{-1} & [J^-, c_0] &= a_{-1} \\ [J^-, a_{-1}] &= [J^-, b_{-1}] = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

To construct the tensor operators, we start with the highest weight states, and define

$$A_{+1} = a_{+1} \quad B_{+1} = b_{+1} \quad (4.43)$$

Then we construct the rest of the components by applying the lowering operators

$$A_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) \quad B_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 - c_0) \quad (4.44)$$

and



$$A_{-1} = 2a_{-1} + b_{-1} \quad B_{-1} = a_{-1} + b_{-1} \quad (4.45)$$

You can check that the raising operators now just move us back up within the representations.

Now there is one operator left, so it must be a spin 0 representation. But which one is it? It must be the linear combination that has vanishing commutator with  $J^\pm$ - therefore it is

$$C_0 = a_0 - b_0 - c_0 \quad (4.46)$$

Let me emphasize again that we went through this analysis explicitly to show the differences between dealing with states and dealing with tensor operators. Had this been a set of seven states transforming similarly under the algebra, we could have constructed the singlet state by simply finding the linear combination of  $J_3 = 0$  states orthogonal to the  $J_3 = 0$  states in the triplets. Here we do not have this crutch, but we can still find the singlet operator directly from the commutation relations. We could do the same thing for states, of course, but it is usually easier for states to use the nice properties of the scalar product.

## 15.5.6 4.6 Products of operators

One of the reasons that tensor operators are important is that a product of two tensor operators,  $O_{m_1}^{s_1}$  and  $O_{m_2}^{s_2}$  in the spin  $s_1$  and spin  $s_2$  representations, transforms under the tensor product representation,  $s_1 \otimes s_2$  because

$$\begin{aligned} [J_a, O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2}] &= [J_a, O_{m_1}^{s_1}] O_{m_2}^{s_2} + O_{m_1}^{s_1} [J_a, O_{m_2}^{s_2}] \\ &= O_{m_1'}^{s_1} O_{m_2}^{s_2} [X_a^{s_1}]_{m_1' m_1} + O_{m_1}^{s_1} O_{m_2'}^{s_2} [X_a^{s_2}]_{m_2' m_2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Thus the product can be decomposed into tensor operators using the highest weight procedure.

Note that as usual, things are particularly simple for the generator  $J_3$ . (4.47) implies

$$[J_3, O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2}] = (m_1 + m_2) O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2} \quad (4.48)$$

The  $J_3$  value of the product of two tensor operators is just the sum of the  $J_3$  values of the two operators in the product.

### Problems

4.A. Consider an operator  $O_x$ , for  $x = 1$  to  $2$ , transforming according to the spin  $1/2$  representation as follows:

$$[J_a, O_x] = O_y [\sigma_a]_{yx} / 2$$

where  $\sigma_a$  are the Pauli matrices. Given

$$\langle 3/2, -1/2, \alpha | O_1 | 1, -1, \beta \rangle = A$$

find

$$\langle 3/2, -3/2, \alpha | O_2 | 1, -1, \beta \rangle$$

4.B. The operator  $(r_{+1})^2$  satisfies

$$[L^+, (r+1)^2] = 0$$

It is therefore the  $O_{+2}$  component of a spin 2 tensor operator. Construct the other components,  $O_m$ . Note that the product of tensor operators transforms like the tensor product of their representations. What is the connection of this with the spherical harmonics,  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ ? Hint: let  $r_1 = \sin \theta \cos \phi$ ,  $r_2 = \sin \theta \sin \phi$ , and  $r_3 = \cos \theta$ . Can you generalize this construction to arbitrary  $\ell$  and explain what is going on?

### 15.5.7 4.C. Find

$$e^{i\alpha_a X_a^1}$$

where the  $X_a^1$  are given by (3.31) Hint: There is a trick that makes this one easy. Write

$$\alpha_a X_a^1 = \alpha \hat{\alpha}_a X_a^1$$

where

$$\alpha = \sqrt{\alpha_a \alpha_a}, \quad \hat{\alpha}_a \hat{\alpha}_a = 1$$

You know that  $\hat{\alpha}_a X_a^1$  has eigenvalues  $\pm 1$  and 0, just like  $X_3^1$  (because all directions are equivalent). Thus  $(\hat{\alpha}_a X_a^1)^2$  is a projection operator and

$$(\hat{\alpha}_a X_a^1)^3 = (\hat{\alpha}_a X_a^1)$$

You should be able to use this to manipulate the expansion of the exponential and get an explicit expression for  $e^{i\alpha_a X_a^1}$ .

Chapter 5

## 15.6 Isospin

The idea of isospin arose in nuclear physics in the early thirties. Heisenberg introduced a notation in which the proton and neutron were treated as two components of a nucleon doublet

$$N \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

He did this originally because he was trying to think about the forces between nucleons in nuclei, and it was mathematically convenient to write things in this notation. In fact, his first ideas about this were totally wrong - he really didn't have the right idea about the relation between the proton and the neutron. He was thinking of the neutron as a sort of tightly bound state of proton and electron, and imagined that forces between nucleons could arise by exchange of electrons. In this way you could get a force between proton and neutron by letting the electron shuttle back and forth - in analogy with an  $H_2^+$  ion, and a force between neutron and neutron - an analogy with a neutral  $H_2$  molecule. But no force between proton and proton.

### 15.6.1 5.1 Charge independence

It was soon realized that the model was crazy, and the force had to be charge independent - the same between  $pp$ ,  $pn$  and  $nn$  to account for the pattern of nuclei that were observed. But while his model was crazy, he had put the  $p$  and  $n$  together in a doublet, and he had used the

Pauli matrices to describe their interactions. Various people soon realized that charge independence would be automatic if there were really a conserved "spin" that acted on the doublet of  $p$  and  $n$  just as ordinary spin acts on the two  $J_3$  components of a spin-  $1/2$  representation. Some people called this "isobaric spin",

which made sense, because isobars are nuclei with the same total number of baryons,<sup>1</sup> protons plus neutrons, and thus the transformations could move from one isobar to another. Unfortunately, Wigner called it isotopic spin and that name stuck. This name makes no sense at all because the isotopes have the same number of protons and different numbers of neutrons, so eventually, the "topic" got dropped, and it is now called isospin.

### 15.6.2 5.2 Creation operators

Isospin really gets interesting in particle physics, where particles are routinely created and destroyed. The natural language for describing this dynamics is based on creation and annihilation operators (and this language is very useful for nuclear physics, as we will see). For example, for the nucleon doublet in (5.1), we can write

$$\begin{aligned} |p, \alpha\rangle &= a_{N, \frac{1}{2}, \alpha}^\dagger |0\rangle \\ |n, \alpha\rangle &= a_{N, -\frac{1}{2}, \alpha}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (5.2)$$

where the

$$a_{N, \pm \frac{1}{2}, \alpha}^\dagger \quad (5.3)$$

are creation operators for proton ( $+\frac{1}{2}$ ) and neutron ( $-\frac{1}{2}$ ) respectively in the state  $\alpha$ , and  $|0\rangle$  is the vacuum state - the state with no particles in it. The  $N$  stands for nucleon, and it is important to give it a name because we will soon discuss creation operators for other particles as well. The creation operators are not hermitian. Their adjoints are annihilation operators,

$$a_{N, \pm \frac{1}{2}, \alpha} \quad (5.4)$$

These operators annihilate a proton (or a neutron) if they can find one, and otherwise annihilate the state, so they satisfy

$$a_{N, \pm \frac{1}{2}, \alpha} |0\rangle = 0 \quad (5.5)$$

The whole notation assumes that the symmetry that rotates proton into neutron is at least approximately correct. If the proton and the neutron were not in some sense similar, it wouldn't make any sense to talk about them being in the same state.

Because the  $p$  and  $n$  are fermions, their creation and annihilation operators satisfy anticommutation relations:

$$\begin{aligned} \{a_{N, m, \alpha}, a_{N, m', \beta}^\dagger\} &= \delta_{mm'} \delta_{\alpha\beta} \\ \{a_{N, m, \alpha}^\dagger, a_{N, m', \beta}^\dagger\} &= \{a_{N, m, \alpha}, a_{N, m', \beta}\} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

With creation and annihilation operators, we can make multiparticle states by simply applying more than one creation operator to the vacuum state. For example

---

<sup>1</sup> Baryons are particles like protons and neutrons. More generally, the baryon number is one third the number of quarks. Because, as we will discuss in more detail later, the proton and the neutron are each made of three quarks, each has baryon number 1.

$$\overbrace{a_{N,\frac{1}{2},\alpha_1}^\dagger \cdots a_{N,\frac{1}{2},\alpha_n}^\dagger}^{n \text{ proton creation operators}} |0\rangle \\ \propto |n \text{ protons}; \alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$$

produces an  $n$  proton state, with the protons in states,  $\alpha_1$  through  $\alpha_n$ . The anticommutation relation implies that the state is completely antisymmetric in the labels of the particles. This guarantees that the state vanishes if any two of the  $\alpha$ s are the same. It means (among other things) that the Pauli exclusion principle is automatically satisfied. What is nice about the creation and annihilation operators is that we can construct states with both protons and neutrons in the same way. For example,

$$\overbrace{a_{N,m_1,\alpha_1}^\dagger \cdots a_{N,m_n,\alpha_n}^\dagger}^{n \text{ nucleon creation operators}} |0\rangle |n \text{ nucleon}; m_1, \alpha_1; \dots; m_n, \alpha_n\rangle$$

is an  $n$  nucleon state, with the nucleons in states described by the  $m$  variable (which tells you whether it is a proton or a neutron) and the  $\alpha$  label, which tells you what state the nucleon is in. Now the anticommutation relation implies that the state is completely antisymmetric under exchange of the pairs of labels,  $m$  and  $\alpha$ .

$$|n \text{ nucleon}; m_1, \alpha_1; m_2, \alpha_2 \cdots; m_n, \alpha_n\rangle \\ = -|n \text{ nucleon}; m_2, \alpha_2; m_1, \alpha_1; \cdots; m_n, \alpha_n\rangle \quad (5.9)$$

If you haven't seen this before, it should bother you. It is one thing to assume that the proton creation operators anticommute, because two protons really cannot be in the same state. But why should proton and neutron creation operators anticommute? This principle is called the "generalized exclusion principle." Why should it be true? This is an important question, and we will come back to it below. For now, however, we will just see how the creation and annihilation operators behave in some examples.

### 15.6.3 5.3 Number operators

We can make operators that count the number of protons and neutrons by putting creation and annihilation operators together (the summation convention is assumed):

$$\begin{aligned} a_{N,+\frac{1}{2},\alpha}^\dagger a_{N,+\frac{1}{2},\alpha} & \text{ counts protons} \\ a_{N,-\frac{1}{2},\alpha}^\dagger a_{N,-\frac{1}{2},\alpha} & \text{ counts neutrons} \\ a_{N,m,\alpha}^\dagger a_{N,m,\alpha} & \text{ counts nucleons} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Acting on any state with  $N_p$  protons and  $N_n$  neutrons, these operators have eigenvalues  $N_p$ ,  $N_n$  and  $N_p + N_n$  respectively. This works because of (5.5) and the fact that for a generic pair of creation and annihilation operators

$$[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \quad (5.11)$$

Notice that the number operators in (5.10) are summed over all the possible quantum states of the proton and neutron, labeled by  $\alpha$ . If we did not sum over  $\alpha$ , the operators would just count the number of protons or neutrons or both in the state  $\alpha$ . We could get fancy and devise more restricted number operators where we sum over some  $\alpha$  and not others, but we won't talk further about such things. The total number operators, summed over all  $\alpha$ , will be particularly useful.

### 15.6.4 5.4 Isospin generators

For the one-particle states, we know how the generators of isospin symmetry should act, in analogy with the spin generators:

$$T_a |m, \alpha\rangle = |m', \alpha\rangle [J_a^{1/2}]_{m'm} = \frac{1}{2} |m', \alpha\rangle [\sigma_a]_{m'm} \quad (5.12)$$

Or in terms of creation operators

$$T_a a_{N,m,\alpha}^\dagger |0\rangle = a_{N,m',\alpha}^\dagger |0\rangle [J_a^{1/2}]_{m'm} = \frac{1}{2} a_{N,m',\alpha}^\dagger |0\rangle [\sigma_a]_{m'm} \quad (5.13)$$

Furthermore, the state with no particles should transform like the trivial representation -

$$T_a |0\rangle = 0 \quad (5.14)$$

Thus we will get the right transformation properties for the one particle states if the creation operators transform like a tensor operator in the spin 1/2 representation under isospin:

$$[T_a, a_{N,m,\alpha}^\dagger] = a_{N,m',\alpha}^\dagger [J_a^{1/2}]_{m'm} = \frac{1}{2} a_{N,m',\alpha}^\dagger [\sigma_a]_{m'm} \quad (5.15)$$

It is easy to check that the following form for  $T_a$  does the trick:

$$\begin{aligned} T_a &= a_{N,m',\alpha}^\dagger [J_a^{1/2}]_{m'm} a_{N,m,\alpha} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} a_{N,m',\alpha}^\dagger [\sigma_a]_{m'm} a_{N,m,\alpha} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} a_{N,\alpha}^\dagger \sigma_a a_{N,\alpha} + \cdots \end{aligned} \quad (5.16)$$

where  $\cdots$  commutes with the nucleon creations and annihilation operators (and also annihilates  $|0\rangle$ ). The last line is written in matrix form, where we think of the annihilation operators as column vectors and the creation operators as row vectors. Let us check that (5.16) has the right commutation relations with the creation operators so that (5.15) is satisfied.

$$\begin{aligned} &[T_a, a_{N,m,\alpha}^\dagger] \\ &= [a_{N,m',\beta}^\dagger [J_a^{1/2}]_{m'm''} a_{N,m'',\beta}, a_{N,m,\alpha}^\dagger] \\ &= a_{N,m',\beta}^\dagger [J_a^{1/2}]_{m'm''} \left\{ a_{N,m'',\beta}, a_{N,m,\alpha}^\dagger \right\} \\ &\quad - \left\{ a_{N,m',\beta}^\dagger, a_{N,m,\alpha}^\dagger \right\} [J_a^{1/2}]_{m'm''} a_{N,m'',\beta} \\ &= a_{N,m',\alpha}^\dagger [J_a^{1/2}]_{m'm} \end{aligned} \quad (5.17)$$

The advantage of thinking about the generators in this way is that we now immediately see how multiparticle states transform. Since the multiparticle states are built by applying more tensor (creation) operators to the vacuum state, the multiparticle states transform like tensor products - not a surprising result, but not entirely trivial either.

### 15.6.5 5.5 Symmetry of tensor products

We pause here to discuss an important fact about the combination of spin states (either ordinary spin or isospin). We will use it in the next section to discuss the deuteron. The result is this: when the tensor product of two identical spin  $1/2$  representations is decomposed into irreducible representations,

the spin 1 representation appears symmetrically, while the spin 0 appears antisymmetrically. To see what this means, suppose that the spin  $1/2$  states are

$$|1/2, \pm 1/2, \alpha\rangle \quad (5.18)$$

where  $\alpha$  indicates whatever other parameters are required to describe the state. Now consider the highest weight state in the tensor product. This is the spin 1 combination of two identical  $J_3 = 1/2$  states, and is thus symmetric in the exchange of the other labels:

$$|1, 1\rangle = |1/2, 1/2, \alpha\rangle|1/2, 1/2, \beta\rangle = |1/2, 1/2, \beta\rangle|1/2, 1/2, \alpha\rangle \quad (5.19)$$

The lowering operators that produce the other states in the spin 1 representation preserve this symmetry because they act in the same way on the two spin  $1/2$  states.

$$\begin{aligned} |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2, -1/2, \alpha\rangle|1/2, 1/2, \beta\rangle \\ &\quad + |1/2, 1/2, \alpha\rangle|1/2, -1/2, \beta\rangle) \\ |1, -1\rangle &= |1/2, -1/2, \alpha\rangle|1/2, -1/2, \beta\rangle \end{aligned} \quad (5.20)$$

Then the orthogonal spin 0 state is antisymmetric in the exchange of  $\alpha$  and  $\beta$ :

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2, -1/2, \alpha\rangle|1/2, 1/2, \beta\rangle \\ &\quad - |1/2, 1/2, \alpha\rangle|1/2, -1/2, \beta\rangle) \end{aligned} \quad (5.21)$$

### 15.6.6 5.6 The deuteron

The nucleons have spin  $1/2$  as well as isospin  $1/2$ , so the  $\alpha$  in the nucleon creation operator actually contains a  $J_3$  label, in addition to whatever other parameters are required to determine the state.

As a simple example of the transformation of a multiparticle state, consider a state of two nucleons in an  $s$ -wave - a zero angular momentum state. Then the total angular momentum of the state is simply the spin angular momentum, the sum of the two nucleon spins. Furthermore, in an  $s$ -wave state, the wave function is symmetrical in the exchange of the position variables of the two nucleons. Then because the two-particle wave function is proportional to the product of two anticommuting creation operators acting on the vacuum state, it is antisymmetric under the simultaneous exchange of the isospin and spin labels of the two nucleons - if the spin representation is

symmetric, the isospin representation must be antisymmetric, and vice versa. When combined with the results of the previous section, this has physical consequences. The only allowed states are those with isospin 1 and spin 0 or with isospin 0 and spin 1. The deuteron is an isospin 0 combination, and has spin 1, as expected.

### 15.6.7 5.7 Superselection rules

It appears, in this argument, that we have assigned some fundamental physical significance to the anticommutation of the creation operators for protons and neutrons. As I mentioned above, this seems suspect, because in fact, the proton and neutron are not identical particles. What we actually know directly from the Pauli exclusion principle is that the creation operator,  $a_\alpha^\dagger$  for any state of a particle obeying Fermi-Dirac statistics satisfies

$$(a_\alpha^\dagger)^2 = 0 \quad (5.22)$$

If we have another creation operator for the same particle in another state,  $a_\beta^\dagger$ , we can form the combination  $a_\alpha^\dagger + a_\beta^\dagger$ , which when acting on the vacuum creates the particle in the state  $\alpha + \beta$  (with the wrong normalization). Thus the exclusion principle also implies

$$(a_\alpha^\dagger + a_\beta^\dagger)^2 = 0 \quad (5.23)$$

and thus

$$\{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} = 0 \quad (5.24)$$

This argument is formally correct, but it doesn't really make much physical sense if  $a_\alpha^\dagger$  and  $a_\beta^\dagger$  create states of different particles, because it doesn't really make sense to superpose the states - this superposition is forbidden by a superselection rule. A superselection rule is a funny concept. It is the statement that you never need to think about superposing states with different values of an exactly conserved quantum number because those states must be orthogonal. Anything you can derive by such a superposition must also be derivable in some other way that does not involve the "forbidden" superposition. Thus as you see, the superposition is not so much forbidden as it is irrelevant. In this case, it is possible to show that one can choose the creation operators to anticommute without running into inconsistencies, but there is a much stronger argument. The anticommutation is required by the fact that the creation operators transform like tensor operators. Let's see how this implies the stated result for the two nucleon system.

Call the creation operators for the baryons  $a_{\pm\pm}^\dagger$  (dropping the  $N$  for brevity) where the first sign is the sign of the third component of isospin and the second is the sign of third component of spin. Since  $(a_{++}^\dagger)^2 = 0$ , there is no two nucleon state with  $T_3 = 1$  and  $J_3 = 1$ . But this means that there is no state with isospin 1 and spin 1, since the highest weight state would have to have  $T_3 = 1$  and  $J_3 = 1$ . In terms of creation operators, for example

$$\left[ T^-, (a_{++}^\dagger)^2 \right] = \{a_{-+}^\dagger, a_{++}^\dagger\} = 0 \quad (5.25)$$

Similar arguments show that the operators must anticommute whenever they have one common index and the others are different.

The argument for operators that have no index in common is a little more subtle. First compute

$$\left[ J^-, \left[ T^-, (a_{++}^\dagger)^2 \right] \right] = \{a_{--}^\dagger, a_{++}^\dagger\} + \{a_{-+}^\dagger, a_{+-}^\dagger\} = 0 \quad (5.26)$$

But the two terms in the sum must separately vanish because they are physically distinguishable. There cannot be a relation like (5.26) unless the two operators

$$\{a_{--}^\dagger, a_{++}^\dagger\} |0\rangle \quad (5.27)$$

and

$$\left\{a_{-+}^\dagger, a_{+-}^\dagger\right\} |0\rangle \quad (5.28)$$

separately vanish, because these two operators, if they did not vanish, would do physically distinguishable things - the creation of a proton with spin up and a neutron with spin down is not the same as the creation of proton with spin down and a neutron with spin up. Thus the operators (5.27) and (5.28) must separately vanish. Thus, not only does the isospin 1, spin 1 state (5.26) vanish but so also does the isospin 0, spin 0 state

$$\left\{a_{--}^\dagger, a_{++}^\dagger\right\} |0\rangle - \left\{a_{-+}^\dagger, a_{+-}^\dagger\right\} |0\rangle \quad (5.29)$$

### 15.6.8 5.8 Other particles

When isospin was introduced, the only known particles that carried it were the proton and neutron, and the nuclei built out of them. But as particle physicists explored further, at higher energies, new particles appeared that are not built out of nucleons. The first of these were the pions, three spinless bosons (that is obeying Bose-Einstein, rather than Fermi-Dirac statistics) with

charges  $Q = +1, 0$  and  $-1$ , and  $T_3 = Q$ , forming an isospin triplet. <sup>2</sup> The creation and annihilation operators for the pions can be written as

$$a_{\pi,m,\alpha}^\dagger, \quad a_{\pi,m,\alpha} \quad \text{for } m = -1 \text{ to } 1 \quad (5.30)$$

They satisfy commutation, rather than anticommutation relations

$$\begin{aligned} [a_{\pi,m,\alpha}, a_{\pi,m',\beta}^\dagger] &= \delta_{mm'} \delta_{\alpha\beta} \\ [a_{\pi,m,\alpha}^\dagger, a_{\pi,m',\beta}^\dagger] &= [a_{\pi,m,\alpha}, a_{\pi,m',\beta}] = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

so that the particle states will be completely symmetric. They also commute with nucleon creation and annihilation operators.

The isospin generators look like

$$T_a = a_{\pi,m,\alpha}^\dagger [J_a^1]_{mm'} a_{\pi,m',\alpha} + \cdots \quad (5.32)$$

where as in (5.16) the  $\cdots$  refers to the contributions of other particles (like nucleons). Again, then the creation operators are tensor operators.

There are many many other particles like the nucleons and the pions that participate in the strong interactions and carry isospin. The formalism of creation and annihilation operators gives us a nice way of writing the generators of isospin that acts on all these particles. The complete form of the isospin generators is

$$T_a = \sum_{\substack{\text{particles } x \\ \text{states } \alpha \\ T_3 \text{ values } m, m'}} a_{x,m,\alpha}^\dagger [J_a^{j_x}]_{mm'} a_{x,m',\alpha} \quad (5.33)$$

where  $a_{x,m,\alpha}^\dagger$  and  $a_{x,m',\alpha}$  are creation and annihilation operators for  $x$ -type particles satisfying commutation or anticommutation relations depending on whether they are bosons or fermions,



$$\begin{aligned} \left[ a_{x,m,\alpha}, a_{x',m',\beta}^\dagger \right]_{\pm} &= \delta_{mm'} \delta_{\alpha\beta} \delta_{xx'} \\ \left[ a_{x,m,\alpha}^\dagger, a_{x',m',\beta}^\dagger \right]_{\pm} &= [a_{x,m,\alpha}, a_{x',m',\beta}]_{\pm} = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

The rule for the  $\pm$  (+ for anticommutator, - for commutator) is that the anticommutator is used when both  $x$  and  $x'$  are fermions, otherwise the commutator is used. The  $j_x$  in (5.33) is the isospin of the  $x$  particles.

### 15.6.9 5.9 Approximate isospin symmetry

Isospin is an approximate symmetry. What this means in general is that the Hamiltonian can be written as

$$H = H_0 + \Delta H \quad (5.35)$$

where  $H_0$  commutes with the symmetry generators and  $\Delta H$  does not, but in some sense  $\Delta H$  is small compared to  $H_0$ . It is traditional to say in the case of isospin that the "strong" interactions are isospin symmetric while the weak and electromagnetic interactions are not, and so take  $H_0 = H_S$  and  $\Delta H = H_{EM} + H_W$  where  $H_S, H_{EM}$  and  $H_W$  are the contributions to the Hamiltonian describing the strong interactions (including the kinetic energy), the electromagnetic interactions, and the weak interactions, respectively. From our modern perspective, this division is a bit misleading for two reasons. Firstly, the division between electromagnetic and weak interactions is not so obvious because of the partial unification of the two forces. Secondly, part of the isospin violating interaction arises from the difference in mass between the  $u$  and  $d$  quarks which is actually part of the kinetic energy. It seems to be purely accidental that this effect is roughly the same size as the effect of the electromagnetic interactions. But this accident was important historically, because it made it easy to understand isospin as an approximate symmetry. There are so many such accidents in particle physics that it makes one wonder whether there is something more going on. At any rate, we will simply lump all isospin violation into  $\Delta H$ . The group theory doesn't care about the dynamics anyway, as long as the symmetry structure is properly taken into account.

### 15.6.10 5.10 Perturbation theory

The way (5.35) is used is in perturbation theory. The states are classified into eigenstates of the zeroth order, isospin symmetric part of the Hamiltonian,  $H_0$ . Sometimes, just  $H_0$  is good enough to approximate the physics of interest. If not, one must treat the effects of  $\Delta H$  as perturbations. In the scattering of strongly interacting particles, for example, the weak and electromagnetic interactions can often be ignored. Thus in pion-nucleon scattering, all the different possible charge states have either isospin  $1/2$  or  $3/2$  (because  $1 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2$ ), so this scattering process can be described approximately by only two amplitudes.

The mathematics here is exactly the same as that which appears in the decomposition of a spin- $1/2$  state with an orbital angular momentum 1 into

---

<sup>2</sup> When these particles were discovered, it was not completely obvious that they were not built out of nucleons and their antiparticles. When very little was known about the strong interactions, it was possible to imagine, for example, that the  $\pi^+$  was a bound state of a proton and an antineutron. This has all the right quantum numbers - even the isospin is right. It just turns out that this model of the pion is wrong. Group theory can never tell you this kind of thing. You need real dynamical information about the strong interactions.

states with total angular momentum  $3/2$  and  $1/2$ . The state with one pion and one nucleon can be described as a tensor product of an isospin  $1/2$  nucleon state with an isospin 1 pion state, just as the state with both spin and orbital angular momentum can be described as a tensor product, having both spin and angular momentum indices.

### Problems

5.A. Suppose that in some process, a pair of pions is produced in a state with zero relative orbital angular momentum. What total isospin values are possible for this state?

5.B. Show that the operators defined in (5.33) have the commutation relations of isospin generators.

5.C.  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^0$  and  $\Delta^-$  are isospin  $3/2$  particles ( $T_3 = 3/2, 1/2, -1/2$  and  $-3/2$  respectively) with baryon number 1. They are produced by strong interactions in  $\pi$ -nucleon collisions. Compare the probability of producing  $\Delta^{++}$  in  $\pi^+P \rightarrow \Delta^{++}$  with the probability of producing  $\Delta^0$  in  $\pi^-P \rightarrow \Delta^0$ .

Chapter 6

## 15.7 Roots and Weights

Now we are going to generalize the analysis of the representations of the  $SU(2)$  algebra to an arbitrary simple Lie algebra. The idea is simple. First, we do what we always try to do in quantum mechanics - find the largest possible set of commuting hermitian observables and use their eigenvalues to label the states. In this case, our observables will be the largest set of hermitian generators we can find that commute with one another, and can therefore be simultaneously diagonalized. Their eigenvalues will be the analog of  $J_3$ . The rest of the generators will be analogous to the raising and lowering operators in  $SU(2)$ . We will find that every raising operator corresponds to an  $SU(2)$  subgroup of the Lie algebra, and then we can use what we know about  $SU(2)$  to learn about the larger algebra.

### 15.7.1 6.1 Weights

We want the largest possible set of commuting hermitian generators because we want to diagonalize as much as possible. A subset of commuting hermitian generators which is as large as possible is called a Cartan subalgebra. It will turn out that the Cartan subalgebra is essentially unique, in that any one we choose will give the same results.

In a particular irreducible representation,  $D$ , there will be a number of hermitian generators,  $H_i$  for  $i = 1$  to  $m$ , corresponding to the elements of the Cartan Subalgebra called the Cartan generators satisfying

$$H_i = H_i^\dagger, \quad \text{and} \quad [H_i, H_j] = 0 \quad (6.1)$$

The Cartan generators form a linear space. Thus we can choose a basis in which they satisfy

$$\text{Tr}(H_i H_j) = k_D \delta_{ij} \text{ for } i, j = 1 \text{ to } m \quad (6.2)$$

where  $k$  is some constant that depends on the representation and on the normalization of the generators. The integer  $m$ , the number of independent Cartan generators, is called the rank of the algebra.

Of course, the point is that the Cartan generators can be simultaneously diagonalized. After diagonalization of the Cartan generators, the states of the representation  $D$  can be written as  $|\mu, x, D\rangle$  where

$$H_i |\mu, x, D\rangle = \mu_i |\mu, x, D\rangle \quad (6.3)$$

and  $x$  is any other label that is necessary to specify the state.

The eigenvalues  $\mu_i$  are called weights. They are real, because they are eigenvalues of hermitian operators. The  $m$ -component vector with components  $\mu_i$  is the weight vector. We will often use a vector notation in which

$$\alpha \cdot \mu \equiv \alpha_i \mu_i \quad \text{and} \quad \alpha^2 \equiv \alpha_i \alpha_i \quad (6.4)$$

## 15.7.2 6.2 More on the adjoint representation

The adjoint representation, defined by (2.27), is particularly important. Because the rows and columns of the matrices defined by (2.27) are labeled by the same index that labels the generators, the states of the adjoint representation correspond to the generators themselves. We will denote the state in the adjoint representation corresponding to an arbitrary generator  $X_a$  as

$$|X_a\rangle \quad (6.5)$$

Linear combinations of these states correspond to linear combinations of the generators -

$$\alpha |X_a\rangle + \beta |X_b\rangle = |\alpha X_a + \beta X_b\rangle \quad (6.6)$$

A convenient scalar product on this space is the following: <sup>1</sup>

$$\langle X_a | X_b \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr} (X_a^\dagger X_b) \quad (6.7)$$

( $\lambda$  is what we called  $k_D$  for the adjoint representation - see (2.37)). Now using (6.6) and (2.27), we can compute the action of a generator on a state, as follows:

$$\begin{aligned} X_a |X_b\rangle &= |X_c\rangle \langle X_c | X_a | X_b \rangle = |X_c\rangle [T_a]_{cb} = -if_{acb} |X_c\rangle \\ &= if_{abc} |X_c\rangle = |if_{abc} X_c\rangle = |[X_a, X_b]\rangle \end{aligned} \quad (6.8)$$

## 15.7.3 6.3 Roots

The roots are the weights of the adjoint representation. Because  $[H_i, H_j] = 0$ , the states corresponding to the Cartan generators have zero weight vectors

$$H_i |H_j\rangle = |[H_i, H_j]\rangle = 0 \quad (6.9)$$

Furthermore, all states in the adjoint representation with zero weight vectors correspond to Cartan generators. Because of (6.2), the Cartan states are orthonormal,

$$\langle H_i | H_j \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr} (H_i H_j) = \delta_{ij} \quad (6.10)$$

The other states of the adjoint representation, those not corresponding to the Cartan generators, have non-zero weight vectors,  $\alpha$ , with components  $\alpha_i$ ,

<sup>1</sup> We need the dagger because we will be led to consider complex linear combinations of the generators, analogous to the raising and lowering operators for  $SU(2)$ .

$$H_i |E_\alpha\rangle = \alpha_i |E_\alpha\rangle \quad (6.11)$$

which means that the corresponding generators satisfy

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (6.12)$$

It will turn out (and we will prove it below) that for the adjoint representation, the non-zero weights uniquely specify the corresponding states, so there is no need for another parameter (like  $x$  in (6.3) in the arbitrary representation  $D$ ). Like the  $SU(2)$  raising and lowering operators, the  $E_\alpha$  are not hermitian. They cannot be hermitian because we can take the adjoint of (6.12) and get

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha_i E_\alpha^\dagger \quad (6.13)$$

thus we can take

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha} \quad (6.14)$$

This should remind you of the raising and lowering operators  $J^+$  and  $J^-$  in  $SU(2)$ .

States corresponding to different weights must be orthogonal, because they have different eigenvalues of at least one of the Cartan generators. Thus we can choose the normalization of the states in the adjoint representation (that is, the generators) so that

$$\langle E_\alpha | E_\beta \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr} (E_\alpha^\dagger E_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \left( = \prod_i \delta_{\alpha_i \beta_i} \right) \quad (6.15)$$

The weights  $\alpha_i$  are called roots, and the special weight vector  $\alpha$  with components  $\alpha_i$  is a root vector.

### 15.7.4 6.4 Raising and lowering

- The  $E_{\pm\alpha}$  are raising and lowering operators for the weights, because the state  $E_{\pm\alpha}|\mu, D\rangle$  has weight  $\mu \pm \alpha$  -

$$H_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle = [H_i, E_{\pm\alpha}] |\mu, D\rangle + E_{\pm\alpha} H_i |\mu, D\rangle = (\mu \pm \alpha)_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle \quad (6.16)$$

At this point, we have no notion of positivity, so it doesn't make sense to ask which is raising and which is lowering. But we will introduce this later.

Equation (6.16) is true for any representation, but it is particularly important for the adjoint representation. To see why, consider the state  $E_\alpha |E_{-\alpha}\rangle$ . This has weight  $\alpha - \alpha = 0$ , thus it is a linear combination of states corresponding to Cartan generators. This in turn implies that  $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$  is a linear combination of Cartan generators:

$$E_\alpha |E_{-\alpha}\rangle = \beta_i |H_i\rangle = |\beta_i H_i\rangle = |\beta \cdot H\rangle = |[E_\alpha, E_{-\alpha}]\rangle \quad (6.17)$$

But we can actually compute  $\beta$ —

$$\begin{aligned} \beta_i &= \langle H_i | E_\alpha | E_{-\alpha} \rangle \\ &= \lambda^{-1} \text{Tr} (H_i [E_\alpha, E_{-\alpha}]) && \text{this follows from (6.8)} \\ &= \lambda^{-1} \text{Tr} (E_{-\alpha} [H_i, E_\alpha]) && \text{from the cyclic property of Tr} \\ &= \lambda^{-1} \alpha_i \text{Tr} (E_{-\alpha} E_\alpha) && \text{from (6.12)} \\ &= \alpha_i && \text{from (6.15).} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Thus

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H \quad (6.19)$$

This should remind you of the  $SU(2)$  commutation relation  $[J^+, J^-] = J_3$ . It is this analogy that we will exploit to learn about the compact Lie groups and their representations.

### 15.7.5 6.5 Lots of $SU(2)$ s

For each non-zero pair of root vectors,  $\pm\alpha$ , there is an  $SU(2)$  subalgebra of the group, with generators

$$\begin{aligned} E^\pm &\equiv |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} \\ E_3 &\equiv |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H \end{aligned} \quad (6.20)$$

To see this, note that

$$\begin{aligned} [E_3, E^\pm] &= |\alpha|^{-3} [\alpha \cdot H, E_{\pm\alpha}] \\ &= |\alpha|^{-3} \alpha \cdot (\pm\alpha) E_{\pm\alpha} = \pm |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} = \pm E^\pm \end{aligned} \quad (6.21)$$

and from (6.19)

$$\begin{aligned} [E^+, E^-] &= |\alpha|^{-2} [E_\alpha, E_{-\alpha}] \\ &= |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H = E_3 \end{aligned} \quad (6.22)$$

We know on general grounds that the states of each irreducible representation of the full algebra can be decomposed into irreducible representations of any one of these  $SU(2)$  subalgebras, and we already know everything about the irreducible representations of  $SU(2)$ . This puts very strong constraints on the nature of the roots. For example, we can now easily prove that the root vectors correspond to unique generators. Suppose the contrary, so that there are two generators,  $E_\alpha$  and  $E'_\alpha$ . We can choose linear combinations of these two so that they are orthogonal in the adjoint representation (I will use the same names for the two generators, assuming that I chose them to be orthogonal from the beginning, just to avoid useless notation) - thus we can write

$$\langle E_\alpha | E'_\alpha \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr} (E_\alpha^\dagger E'_\alpha) = \lambda^{-1} \text{Tr} (E_{-\alpha} E'_\alpha) = 0 \quad (6.23)$$

Consider the behavior of the state  $|E'_\alpha\rangle$  under the action of the  $SU(2)$  subalgebra (6.20).  $E^- |E'_\alpha\rangle$  has zero weight vector, and thus it is a linear combination of Cartan states. But

$$\begin{aligned} \langle H_i | E^- | E'_\alpha \rangle &= \lambda^{-1} \text{Tr} (H_i [E^-, E'_\alpha]) \\ &= -\lambda^{-1} \text{Tr} (E^- [H_i, E'_\alpha]) \\ &= -\alpha_i \lambda^{-1} \text{Tr} (E'_\alpha E^-) = 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

for all  $i$ , and thus the coefficient of every Cartan state in  $E^- |E'_\alpha\rangle$  vanishes, and therefore

$$E^- |E'_\alpha\rangle = 0 \quad (6.25)$$

But we also have

$$E_3 |E'_\alpha\rangle = |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H |E'_\alpha\rangle = |E'_\alpha\rangle \quad (6.26)$$

Equations (6.25) and (6.26) are inconsistent, because (6.25) implies that  $|E'_\alpha\rangle$  is the lowest  $J_3$  state in an  $SU(2)$  representation, and (6.26) implies that it has  $J_3 = 1$ . But the lowest  $J_3$  state of an  $SU(2)$  representation cannot have positive  $J_3$  - the  $J_3$  value is always  $-j$  for a non-negative half integer  $j$ . Thus  $E'_\alpha$  cannot exist, and we have shown, as promised, that  $|E_\alpha\rangle$  is uniquely specified by  $\alpha$  - no other labels are required.

In fact, if  $\alpha$  is a root, then no non-zero multiple of  $\alpha$  (except  $-\alpha$ ) is a root. To see this, note that the three states  $|E_3\rangle$  and  $|E^\pm\rangle$  form a spin 1 representation of the algebra (6.20), because they form the adjoint representation. Now suppose  $k\alpha$  a root for  $k \neq \pm 1$ . Clearly,  $k$  must be a half-integer, because the  $E_3$  value of the corresponding state must be a half integer. But if  $k$  is an integer not equal to  $\pm 1$ , the state is part of a representation that contains another state with root  $\alpha$ , which is impossible, by the argument we just gave. And if  $k$  is half an odd integer, then there is a state with root  $\alpha/2$ , and we can repeat the argument using the  $SU(2)$  associated with that generator and get a contradiction in the same way.

### 15.7.6 6.6 Watch carefully - this is important!

More generally, for any weight  $\mu$  of a representation  $D$ , the  $E_3$  value is

$$E_3 |\mu, x, D\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} |\mu, x, D\rangle \quad (6.27)$$

Because the  $E_3$  values must be integers or half integers,

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} \text{ is an integer.} \quad (6.28)$$

The general state  $|\mu, x, D\rangle$  can always be written as a linear combination of states transforming according to definite representations of the  $SU(2)$  defined by (6.20). Suppose that the highest spin state that appears in the linear combination is  $j$ . Then there is some non-negative integer  $p$  such that

$$(E^+)^p |\mu, x, D\rangle \neq 0 \quad (6.29)$$

with weight  $\mu + p\alpha$  is the highest  $E_3$  state of the  $SU(2)$  spin  $j$  representation, so that

$$(E^+)^{p+1} |\mu, x, D\rangle = 0 \quad (6.30)$$

The  $E_3$  value of the state (6.29) is

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j \quad (6.31)$$

Likewise, there is some non-negative integer  $q$  such that

$$(E^-)^q |\mu, x, D\rangle \neq 0 \quad (6.32)$$

with weight  $\mu - q\alpha$  is the lowest  $E_3$  state of the  $SU(2)$  spin  $j$  representation, so that

$$(E^-)^{q+1} |\mu, x, D\rangle = 0 \quad (6.33)$$

and the  $E_3$  value of the state (6.32) is

$$\frac{\alpha \cdot (\mu - q\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j \quad (6.34)$$

Adding (6.31) and (6.34) gives

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p - q = 0 \quad (6.35)$$

or

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q) \quad (6.36)$$

We will refer to (6.36) as the "master formula". The relations (6.31), (6.34) and (6.36) are the basic relations that lead to a geometrical classification of all the compact Lie groups. They don't look like much, but when we augment them with some geometrical intuition, we can exploit them to great effect, as you will see.

Here is a simple first step. Applying (6.36) to the roots gives a particularly strong constraint, because we can apply it twice for any pair of distinct roots,  $\alpha$  and  $\beta$ . Defining the  $SU(2)$  algebra with  $E_\alpha$  gives

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q) \quad (6.37)$$

Defining the  $SU(2)$  algebra with  $E_\beta$  gives

$$\frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = -\frac{1}{2}(p' - q') \quad (6.38)$$

Multiplying these gives a remarkable formula for the angle  $\theta_{\alpha\beta}$  between the roots  $\alpha$  and  $\beta$ :

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(p - q)(p' - q')}{4} \quad (6.39)$$

What is remarkable about this is that  $(p - q)(p' - q')$  must be an integer, so (because it must be non-negative) there are only four interesting possibilities (up to complements) for angles between roots!

|                    |                           |        |
|--------------------|---------------------------|--------|
| $(p - q)(p' - q')$ | $\theta_{\alpha\beta}$    |        |
| 0                  | $90^\circ$                |        |
| 1                  | $60^\circ$ or $120^\circ$ | (6.40) |
| 2                  | $45^\circ$ or $135^\circ$ |        |
| 3                  | $30^\circ$ or $150^\circ$ |        |

The possibility  $(p - q)(p' - q') = 4$ , corresponds to  $0^\circ$  or  $180^\circ$  - neither is interesting.  $0^\circ$  is already ruled out by our theorem on uniqueness.  $180^\circ$  is trivial because roots always come in pairs with opposite signs, both in the same  $SU(2)$  subgroup.

## Problems

6.A. Show that  $[E_\alpha, E_\beta]$  must be proportional to  $E_{\alpha+\beta}$ . What happens if  $\alpha + \beta$  is not a root?

6.B. Suppose that the raising lowering operators of some Lie algebra satisfy

$$[E_\alpha, E_\beta] = N E_{\alpha+\beta}$$

for some nonzero  $N$ . Calculate

$$[E_\alpha, E_{-\alpha-\beta}]$$

6.C. Consider the simple Lie algebra formed by the ten matrices:

$$\sigma_a \quad \sigma_a \tau_1 \quad \sigma_a \tau_3 \quad \tau_2$$

for  $a = 1$  to  $3$  where  $\sigma_a$  and  $\tau_a$  are Pauli matrices in orthogonal spaces (see problem 3.E). Take  $H_1 = \sigma_3$  and  $H_2 = \sigma_3 \tau_3$  as the Cartan subalgebra. Find (a) the weights of the four dimensional representation generated by these matrices, and

(b) the weights of the adjoint representation.

Hint: Although you have enough information to do the problem after reading this chapter, it may be easier after you have seen the example of  $SU(3)$  worked out in the next chapter.

Chapter 7

## 15.8 $SU(3)$

After  $SU(2)$  the most important algebra in particle physics is  $SU(3)$ . Maybe it is more important. I'm not sure.  $SU(3)$  is the group of  $3 \times 3$  unitary matrices with determinant 1 (again, as in (3.30), the  $U$  stands for "unitary" and the  $S$  stands for "special", which means determinant 1).

### 15.8.1 7.1 The Gell-Mann matrices

$SU(3)$  is generated by the  $3 \times 3$  hermitian, traceless matrices. There are various ways of seeing that the tracelessness constraint is what gives determinant 1. If we exponentiate the hermitian generators to get unitary matrices

$$U(\alpha) = e^{i\alpha_a X_a}$$

we can compute the determinant in any basis. In particular, if we diagonalize  $\alpha_a X_a$ ,

$$V \alpha_a X_a V^{-1} = D \quad (7.2)$$

where  $D$  is diagonal, we have

$$\det(U(\alpha)) = \det(e^{iD}) = \prod_j e^{i[D]_{jj}} = e^{i \text{Tr } D} = e^{i \text{Tr } \alpha_a X_a} \quad (7.3)$$

Thus if  $\text{Tr } \alpha_a X_a = 0$ , the determinant is 1.

The standard basis for the hermitian  $3 \times 3$  matrices in the physics literature is in terms of a generalization of the Pauli matrices, called the Gell-Mann matrices:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.4)$$



These are generalizations of the Pauli matrices in the sense that the first three Gell-Mann matrices contain the Pauli matrices acting on a subspace:

$$\lambda_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } a = 1 \text{ to } 3 \quad (7.5)$$

You can imagine that we could go on and construct  $4 \times 4$  matrices that contain these  $3 \times 3$  matrices in the same way, and so on.

The  $SU(3)$  generators are conventionally defined by

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a \quad (7.6)$$

and they satisfy

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (7.7)$$

Clearly,  $T_a$  for  $a = 1$  to  $3$  generate an  $SU(2)$  subgroup of  $SU(3)$ . This is sometimes called the isospin subgroup, for reasons that will become apparent when we discuss  $SU(3)$  as an approximate symmetry of the strong interactions - where this subgroup is in fact Heisenberg's isospin. It is convenient to put  $T_3$  in the Cartan subalgebra. There is one generator,  $T_8$ , that commutes with  $T_3$ , so we put it in the Cartan subalgebra as well, and take

$$H_1 = T_3 \quad H_2 = T_8 \quad (7.8)$$

## 15.8.2 7.2 Weights and roots of $SU(3)$

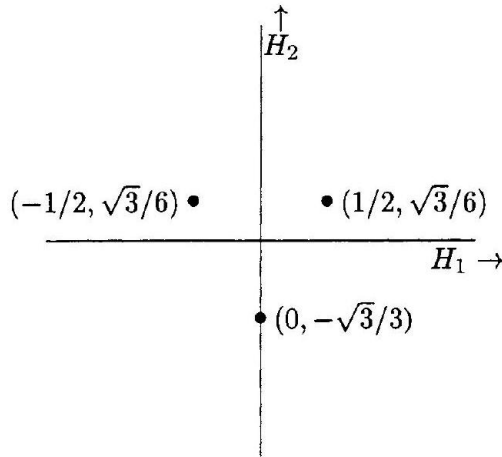
The weights of this representation are easy to find because  $T_3$  and  $T_8$  are already diagonal

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

The eigenvectors, and associated weights are

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow (1/2, \sqrt{3}/6) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow (-1/2, \sqrt{3}/6) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\rightarrow (0, -\sqrt{3}/3) \end{aligned} \quad (7.10)$$

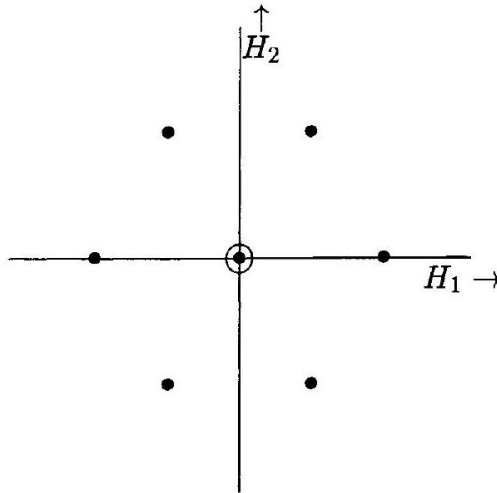
These vectors, plotted in a plane, form the vertices of an equilateral triangle



The roots are going to be differences of weights, because the corresponding generators must take us from one weight to another. It is not hard to see that the corresponding generators are those that have only one off-diagonal entry:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 \pm iT_2) &= E_{\pm 1,0} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (T_4 \pm iT_5) &= E_{\pm 1/2, \pm \sqrt{3}/2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (T_6 \pm iT_7) &= E_{\mp 1/2, \pm \sqrt{3}/2} \end{aligned} \tag{7.12}$$

where the  $\pm$  signs are correlated. The roots form a regular hexagon, plotted here along with the two elements of the Cartan subalgebra in the center:



### Problems

7.A. Calculate  $f_{147}$  and  $f_{458}$  in  $SU(3)$ .

7.B. Show that  $T_1, T_2$  and  $T_3$  generate an  $SU(2)$  subalgebra of  $SU(3)$ . Every representation of  $SU(3)$  must also be a representation of the subalgebra. However, the irreducible representations of  $SU(3)$  are not necessarily irreducible under the subalgebra. How does the representation generated by the Gell-Mann matrices transform under this subalgebra. That is, reduce, if necessary, the three dimensional representation into representations which are

irreducible under the subalgebra and state which irreducible representations appear in the reduction. Then answer the same question for the adjoint representation of  $SU(3)$ .

7.C. Show that  $\lambda_2, \lambda_5$  and  $\lambda_7$  generate an  $SU(2)$  subalgebra of  $SU(3)$ . Every representation of  $SU(3)$  must also be a representation of the subalgebra. However, the irreducible representations of  $SU(3)$  are not necessarily irreducible under the subalgebra. How does the representation generated by the Gell-Mann matrices transform under this subalgebra. That is, reduce, if necessary, the three dimensional representation into representations which are irreducible under the subalgebra and state which irreducible representations appear in the reduction. Then answer the same question for the adjoint representation of  $SU(3)$ .

Chapter 8

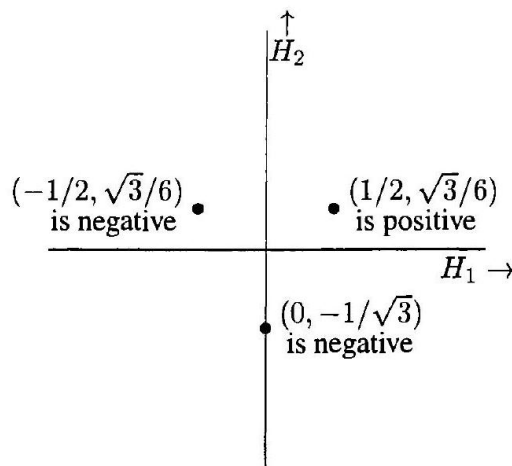
## 15.9 Simple Roots

What we need to complete the analogy between  $SU(2)$  and an arbitrary simple Lie algebra is a notion of positivity for the weights. Then we can discuss things like raising and lowering operators, and the "highest weight" in a meaningful way. What we want is a definition that ensures that every nonzero weight is either positive or negative, and that if  $\mu$  is positive,  $-\mu$  is negative and vice versa.

### 15.9.1 8.1 Positive weights

It is easy to find such a scheme - indeed, in a multi-dimensional space, there are an infinite number. In some arbitrary basis for the Cartan subalgebra, the components,  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , of the weight are fixed. We will say that the weight is positive if its first non-zero component is positive and that the weight is negative if its first non-zero component is negative. While this depends on the arbitrary basis, it does have the properties we want. Eventually, we will see that the results will not depend on the basis, but for now, we will just fix it and forget it.

For example, in  $SU(3)$ , the 3 dimensional defining representation looks like this:



The weight  $(0, -1/\sqrt{3})$  is negative because its first component is zero so the sign is determined by the sign of the second component.

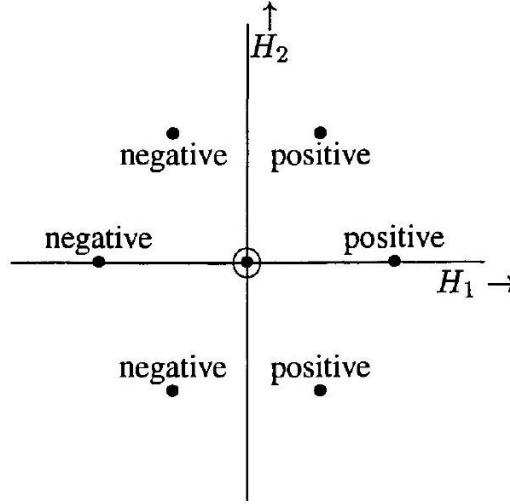
With this definition, we can define an ordering in the obvious way:

$$\mu > \nu \text{ if } \mu - \nu \text{ is positive}$$

This allows us to talk about the highest weight in a representation.

In the adjoint representation, the positive roots correspond to raising operators and the negative roots to lowering operators. The highest weight of any representation has the property that we cannot raise it, so that all generators corresponding to positive roots must annihilate the corresponding state.

In the  $SU(3)$  adjoint representation, in our usual basis, the positive roots are on the right and the negative on the left, as shown below:



### 15.9.2 8.2 Simple roots

But we don't want to check all the roots if we don't have to. Clearly, some of the positive roots can be built out of others. So it makes sense to define simple roots as positive roots that cannot be written as a sum of other positive roots. We will then see that if a weight is annihilated by the generators of all the simple roots, it is the highest weight of an irreducible representation. Furthermore, from the geometry of the simple roots, it is possible to reconstruct the whole algebra. The logic of this is fun and worth understanding in detail. 1 - If  $\alpha$  and  $\beta$  are different simple roots, then  $\alpha - \beta$  is not a root. This is true because one of them, say  $\beta$ , is larger, so that  $\beta - \alpha$  is positive. But then  $\beta$  is the sum of two positive roots,  $\alpha$  and  $\beta - \alpha$ .

2 - Because  $\alpha - \beta$  is not a root

$$E_{-\alpha} |E_{\beta}\rangle = E_{-\beta} |E_{\alpha}\rangle = 0 \quad (8.4)$$

Then in the master formula (6.36)

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q)$$

the integer  $q$  is zero. Similarly in

$$\frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = -\frac{1}{2}(p' - q')$$

the integer  $q'$  is zero. Thus

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{p}{2} \quad \frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = -\frac{p'}{2} \quad (8.5)$$

Knowing the integers  $p$  and  $p'$  for each simple root is equivalent to knowing the angles between the simple roots, and their relative lengths because

$$\cos \theta_{\alpha\beta} = -\frac{\sqrt{pp'}}{2} \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{p}{p'} \quad (8.6)$$

3 - The angle between any pair of simple roots satisfies

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \quad (8.7)$$

The first inequality follows from (8.6) because the cosine is less than or equal to zero. The second inequality follows because all the roots are positive. Simple multidimensional geometry then implies that the simple roots are linearly independent. Here's a proof - consider a linear combination of the simple roots,

$$\gamma = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \alpha \quad (8.8)$$

If all the coefficients have the same sign, then clearly,  $\gamma$  cannot vanish unless all the coefficients vanish, because the  $\alpha$  are all positive vectors. But if there are some coefficients of each sign, we can write

$$\gamma = \mu - \nu \quad (8.9)$$

where  $\mu$  and  $\nu$  are strictly positive vectors,

$$\mu = \sum_{x_{\alpha} > 0} x_{\alpha} \alpha \quad \nu = - \sum_{x_{\alpha} < 0} x_{\alpha} \alpha \quad (8.10)$$

But the norm of  $\gamma$  cannot vanish because

$$(\mu - \nu)^2 = \mu^2 + \nu^2 - 2(\mu \cdot \nu) \geq \mu^2 + \nu^2 > 0 \quad (8.11)$$

where the last inequality follows from the fact  $(\alpha \cdot \beta) \leq 0$  for any pair of simple roots, (8.6). Thus no linear combination of the simple roots can vanish and they are linearly independent.

4 - Any positive root  $\phi$  can be written as a linear combination of simple roots with non-negative integer coefficients,  $k_{\alpha}$

$$\phi = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \alpha \quad (8.12)$$

This is just logic. If  $\phi$  is simple, this is true. If not, we can split it into two positive roots and try again.

5 - The simple roots are not only linearly independent, they are complete, so the number of simple roots is equal to  $m$ , the rank of the algebra, the number of Cartan generators. If this were not true, then there would be some vector  $\xi$  orthogonal to all the simple roots, and therefore orthogonal to all the roots. But then

$$[\xi \cdot H, E_{\phi}] = 0 \quad \text{for all roots } \phi \quad (8.13)$$

Since  $\xi \cdot H$  also commutes with the other Cartan generators, it commutes with all the generators and the algebra is not simple, contrary to assumption.

6 - Finally, we are in a position to construct the whole algebra from the simple roots. For now, we will simply show how to determine all the roots. We will find easier ways of doing this later, and also discuss how to construct the actual algebra.

We know that all the positive roots have the form

$$\phi_k = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \alpha \quad (8.14)$$

for non-negative integers,  $k_\alpha$ , where the integer  $k$  is

$$k = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \quad (8.15)$$

If we can determine which  $\phi_k$  are roots, we will have determined the roots in terms of the simple roots. It is straightforward to do this inductively, using the master formula.

All the  $\phi_1$  's are roots because these are just the simple roots themselves. Suppose now we have determined the roots for  $k \leq \ell$ . Then we look at

$$E_{\alpha} |\phi_{\ell}\rangle \quad (8.16)$$

for all  $\alpha$ , which gives roots of the form  $\phi_{\ell+1}$ . We can compute

$$\frac{2\alpha \cdot \phi_{\ell}}{\alpha^2} = -(p - q) \quad (8.17)$$

But we will always know  $q$ , because we will know the history of how  $\phi_{\ell}$  got built up by the action of the raising operators from smaller  $k$ . Thus we can determine  $p$ . If  $p > 0$ , then  $\phi_{\ell} + \alpha$  is a root.

Let's illustrate this inductive procedure for  $\ell = 1$ . In this case, we always start with a simple root,  $\phi_1 = \beta$  where  $\beta$  is a simple root. All the  $q$  s are zero so

$$\frac{2\alpha \cdot \phi_1}{\alpha^2} = \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -p \quad (8.18)$$

Thus if  $\alpha \cdot \beta = 0$ , then  $p = 0$  and  $\alpha + \beta$  is not a root. Otherwise  $p > 0$  and  $\alpha + \beta$  is a root.

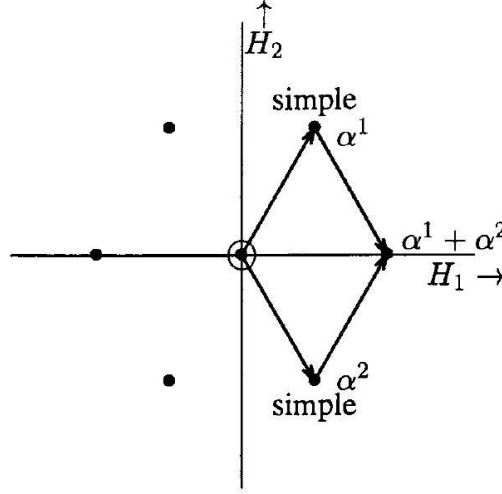
The only way this procedure could fail to find a root is if there exists some positive root  $\phi_{\ell+1}$  which is not the sum of a root  $\phi_{\ell}$  and some simple root. This is impossible, because if there were such a  $\phi_{\ell+1}$ , it would be annihilated by all the  $E_{-\alpha}$  (because  $E_{-\alpha} |\phi_{\ell+1}\rangle$  if non-zero would be a  $\phi_{\ell}$  state and we could apply  $E_{\alpha}$  to it and get  $|\phi_{\ell+1}\rangle$  back). Thus  $|\phi_{\ell+1}\rangle$  would have to transform like the lowest weight state of all the  $SU(2)$  subalgebras associated with the simple roots, which requires that the  $E_3$  values  $\alpha \cdot \phi_{\ell+1}/\alpha^2 \leq 0$  for all  $\alpha$ . But then

$$\phi_{\ell+1}^2 = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \alpha \cdot \phi_{\ell+1} \leq 0 \quad (8.19)$$

which is a contradiction. Thus we always find all the roots  $\phi_{\ell+1}$  by acting on all the  $\phi_{\ell}$  with all the simple roots. For  $SU(3)$ , for example, the positive root  $(1, 0)$  is the sum of the other two, which are the simple roots

$$\alpha^1 = (1/2, \sqrt{3}/2) \quad \alpha^2 = (1/2, -\sqrt{3}/2) \quad (8.20)$$

as shown



We have

$$\alpha^{1^2} = \alpha^{2^2} = 1 \quad \alpha^1 \cdot \alpha^2 = -1/2 \quad (8.22)$$

thus

$$\frac{2\alpha^1 \cdot \alpha^2}{\alpha^{1^2}} = \frac{2\alpha^1 \cdot \alpha^2}{\alpha^2} = -1 \quad (8.23)$$

and thus  $p = 1$  for both  $\alpha^1$  acting on  $|\alpha^2\rangle$ , and vice versa. Thus  $\alpha^1 + \alpha^2$  is a root, but  $2\alpha^1 + \alpha^2$  and  $\alpha^1 + 2\alpha^2$  are not.

### 15.9.3 8.3 Constructing the algebra

The procedure outlined above can give us more than a listing of the roots. We can actually construct the entire algebra from the simple roots. Let us go back to the derivation of the master formula, where we found in (6.31) and (6.34)

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j \quad \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j \quad (8.24)$$

This follows because a state  $|\mu\rangle$  with weight  $\mu$  in any irreducible representation must have some component that transforms under the largest spin representation of the  $SU(2)$  algebra associated with  $\alpha$ , generated by (from (6.20))

$$\begin{aligned} E^\pm &\equiv |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} \\ E_3 &\equiv |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H \end{aligned} \quad (8.25)$$

This largest spin is the  $j$  in (8.24). In general,  $|\mu\rangle$  may also have lower spin components, but  $j$  is the highest one. It must be there so that  $(E^+)^p |\mu\rangle$  transforms like a  $|j, j\rangle$  state, which is non-zero, but annihilated by another  $E^+$ , and  $(E^-)^m |\mu\rangle$  transforms like a  $|j, -j\rangle$  state, annihilated by another  $E^-$ . Adding these two relations gives the master equation. But subtracting them gives

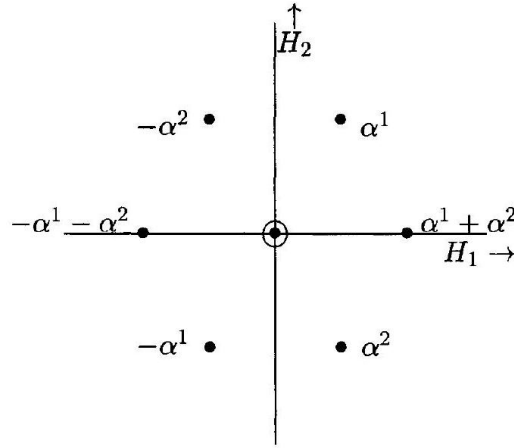
$$p + q = 2j \quad (8.26)$$

Thus if we know  $p$  and  $q$ , we know the highest spin representation that overlaps with the weight state.

If  $\mu$  is a root in the adjoint representation, the situation is even simpler. Because we have already shown that each root appears only once in the adjoint representation, if we know  $p$  and  $q$ , and therefore  $j$  for a root  $\beta$  under the action of the  $SU(2)$  associated with a simple root  $\alpha$ , we can conclude that  $|\beta\rangle$  is the state with  $E_3 = \alpha \cdot \beta / \alpha^2$  in the spin  $j$  representation,

$$|\beta\rangle = |j, \alpha \cdot \beta / \alpha^2\rangle \quad (8.27)$$

It is completely determined up to a phase. Thus we also know exactly how  $E^\pm$  acts, up to phases. Let's see how this enables us to construct the algebra in the example of  $SU(3)$ . The root diagram looks like this:



where

$$\begin{aligned} \alpha^{1^2} = \alpha^{2^2} = 1 \quad \alpha^1 \cdot \alpha^2 = -1/2 \\ \frac{\alpha^1 \cdot \alpha^2}{\alpha^{1^2}} = \frac{\alpha^1 \cdot \alpha^2}{\alpha^{2^2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

We already know that  $p = 1$  and  $q = 0$  for both  $\alpha^1$  acting on  $|\alpha^2\rangle$ , and vice versa. We already know how the Cartan generators commute with everything. So we just need the commutation relations of the raising and lowering operators. Let's begin by explicitly constructing the raising operator,  $E_{\alpha^1+\alpha^2}$ . Since  $p + q = 1$ , we have  $j = 1/2$  and therefore, if we look at the  $\alpha^1$  raising operator

$$\begin{aligned} E^+ |E_{\alpha^2}\rangle &= |\alpha^1|^{-1} E_{\alpha^1} |E_{\alpha^2}\rangle \\ &= E_{\alpha^1} |E_{\alpha^2}\rangle = |[E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]\rangle \\ &= E_{\alpha^1} |1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \eta |E_{\alpha^1+\alpha^2}\rangle \end{aligned} \quad (8.29)$$

where  $\eta$  is a phase. This may need some explanation. The  $|E_{\alpha^2}\rangle$  state is properly normalized, by assumption, and it corresponds to the  $|1/2, -1/2\rangle$  state under the  $\alpha^1 SU(2)$  (the  $E_3$  value is  $\alpha^1 \cdot \alpha^2 / \alpha^{1^2} = -1/2$ ). Acting on it with the raising operator  $E^+$  tells us what the correctly normalized  $|1/2, 1/2\rangle$  state is. But this, up to a phase, which we called  $\eta$ , must be the properly normalized state  $|E_{\alpha^1+\alpha^2}\rangle$ . Putting all this together, and choosing  $\eta = 1$  by convention, we have

$$|E_{\alpha^1+\alpha^2}\rangle = \sqrt{2} |[E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]\rangle \quad (8.30)$$

and thus



$$E_{\alpha^1+\alpha^2} = \sqrt{2} [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}] \quad (8.31)$$

Now that we have expressed the other positive root as a commutator of the simple roots, we can compute any commutator just using the Jacobi identity. For example

$$\begin{aligned} & [E_{-\alpha^1}, E_{\alpha^1+\alpha^2}] \\ &= \sqrt{2} [E_{-\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]] \\ &= \sqrt{2} [[E_{-\alpha^1}, E_{\alpha^1}], E_{\alpha^2}] \\ &= \sqrt{2} [-\alpha^1 \cdot H, E_{\alpha^2}] \\ &= -\sqrt{2} \alpha^1 \cdot \alpha^2 E_{\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{\alpha^2} \end{aligned} \quad (8.32)$$

We already knew this, because we are just moving back down the  $SU(2)$  representation. Here's another, slightly more interesting:

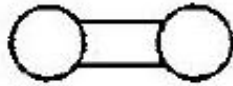
$$\begin{aligned} & [E_{-\alpha^2}, E_{\alpha^1+\alpha^2}] \\ &= \sqrt{2} [E_{-\alpha^2}, [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]] \\ &= \sqrt{2} [E_{\alpha^1}, [E_{-\alpha^2}, E_{\alpha^2}]] \\ &= \sqrt{2} [E_{\alpha^1}, -\alpha^2 \cdot H] \\ &= \sqrt{2} [\alpha^2 \cdot H, E_{\alpha^1}] \\ &= \sqrt{2} \alpha^1 \cdot \alpha^2 E_{\alpha^1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_{\alpha^1} \end{aligned} \quad (8.33)$$

The interesting thing here is the phase - which is determined to be a - sign.

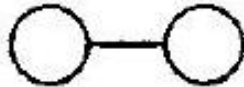
### 15.9.4 8.4 Dynkin diagrams

A Dynkin diagram is a short-hand notation for writing down the simple roots. Each simple root is indicated by an open circle. Pairs of circles are connected by lines, depending on the angle between the pair of roots to which the circles correspond, as follows:

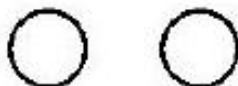
(2) if the angle is  $150^\circ$



if the angle is  $135^\circ$



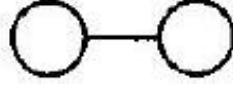
if the angle is  $120^\circ$



if the angle is  $90^\circ$

The Dynkin diagram determines all the angles between pairs of simple roots. This doesn't quite fix the roots, because there may be more than one choice for the relative lengths. We will come back to that later.

is the diagram for  $SU(2)$



is the diagram for  $SU(3)$

### 15.9.5 8.5 Example: $G_2$

Suppose that an algebra has simple roots

$$\alpha^1 = (0, 1) \quad \alpha^2 = (\sqrt{3}/2, -3/2) \quad (8.36)$$

This is an allowed pairing, because

$$\begin{aligned} \alpha^{12} &= 1 & \alpha^{22} &= 3 \\ \alpha^1 \cdot \alpha^2 &= -3/2 \\ \frac{2\alpha^1 \cdot \alpha^2}{\alpha^{12}} &= -3 & \frac{2\alpha^1 \cdot \alpha^2}{\alpha^{22}} &= -1 \end{aligned} \quad (8.37)$$

The angle between the two roots is determined by

$$\cos \theta_{\alpha^1 \alpha^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta_{\alpha^1 \alpha^2} = 150^\circ \quad (8.38)$$

Thus this corresponds to the Dynkin diagram



This algebra is called  $G_2$ .

### 15.9.6 8.6 The roots of $G_2$

For  $E_{\alpha^1}$  acting on  $|\alpha^2\rangle$  we have  $p = 3$ . For  $E_{\alpha^2}$  acting on  $|\alpha^1\rangle$  we have  $p = 1$ . Thus

$$\alpha^1 + \alpha^2 \quad 2\alpha^1 + \alpha^2 \quad \text{and} \quad 3\alpha^1 + \alpha^2 \quad (8.39)$$

are all roots but

$$\alpha^1 + 2\alpha^2 \quad \text{and} \quad 4\alpha^1 + \alpha^2 \quad (8.40)$$

are not. In terms of  $\phi_k$  in (8.14) we have

$$\phi_2 = \alpha^1 + \alpha^2 \quad \phi_3 = 2\alpha^1 + \alpha^2 \quad \phi_4 = 3\alpha^1 + \alpha^2 \quad (8.41)$$

We know that the  $\phi_2$  state is unique from the general properties of simple roots. The  $\phi_3$  state is unique because  $\alpha^1 + 2\alpha^2$ , the only other state that could be obtained by acting on  $\phi_2$ ,

is not a root. To see whether there is another  $\phi_4$  state, we must check whether  $2\alpha^1 + 2\alpha^2$  is a root, that is, whether it can be obtained by acting on  $\phi_3$  with a simple root, which must be  $\alpha^2$ .

$$\frac{2\alpha^2 \cdot (2\alpha^1 + \alpha^2)}{\alpha^2} = \frac{-6 + 6}{3} = 0 = -(p - q) \quad (8.42)$$

But  $q = 0$  because  $2\alpha^1$  is not a root, and thus  $p = 0$ , so  $2\alpha^1 + 2\alpha^2$  is not a root. Actually, we could have come to this conclusion more simply by noting that  $2\alpha^1 + 2\alpha^2 = 2(\alpha^1 + \alpha^2)$  which is twice the root  $\alpha^1 + \alpha^2$ , but we proved in the discussion after (6.26) that no multiple of a root can be a root.

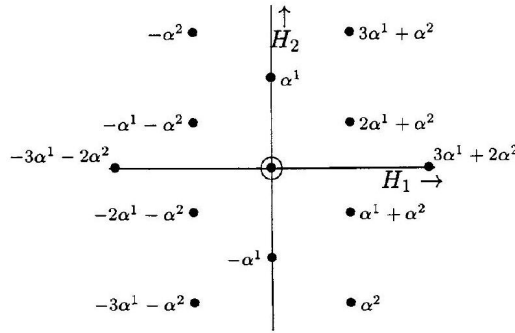
Now to get the  $\phi_5$  states, note that we already know that  $4\alpha^1 + \alpha^2$  is not a root, so we need only check  $3\alpha^1 + 2\alpha^2$ .

$$\frac{2\alpha^2 \cdot (3\alpha^1 + \alpha^2)}{\alpha^2} = \frac{-9 + 6}{3} = -1 = -(p - q) \quad (8.43)$$

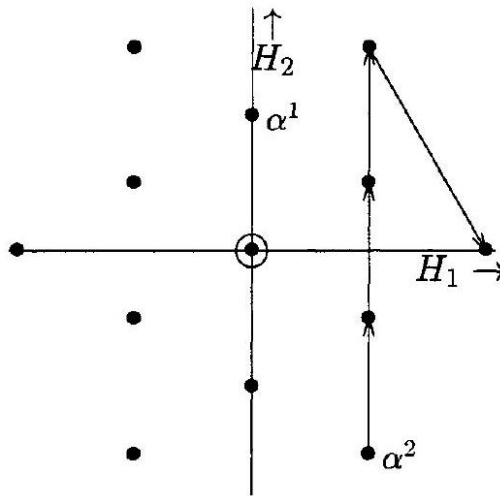
Again,  $q = 0$ , thus  $p = 1$  and  $\phi_5 = 3\alpha^1 + 2\alpha^2$  is a root. Because  $p = 1$ , we also know that  $3\alpha^1 + 3\alpha^2$  is not a root, so to check for  $\phi_6$ , we need only look at  $4\alpha^1 + 2\alpha^2$ .

$$\frac{2\alpha^1 \cdot (3\alpha^1 + 2\alpha^2)}{\alpha^{1^2}} = \frac{6 - 6}{1} = 0 = -(p - q) \quad (8.44)$$

$q = 0$  because  $2\alpha^1 + 2\alpha^2$  is not a root, so we are finished (again, we could have just used the fact that  $2\alpha^1 + \alpha^2$  is a root to see that  $4\alpha^1 + 2\alpha^2$  is not), and the roots look like this:



What we did can be summarized in the following diagram:



### 15.9.7 8.7 The Cartan matrix

There is a useful way of keeping track of the integers  $p^i$  and  $q^i$  associated with the action of a simple root  $\alpha^i$  on a state  $|\phi\rangle$  for a positive root  $\phi$  that eliminates the need for tedious geometrical calculations. The idea is to label the roots directly by their  $q^i - p^i$  values. The  $q^i - p^i$  of any weight,  $\mu$ , is simply twice its  $E_3$  value, where  $E_3$  is the Cartan generator of the  $SU(2)$  associated with the simple root  $\alpha^i$ , because

$$2E_3|\mu\rangle = \frac{2H \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}}|\mu\rangle = \frac{2\mu \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}}|\mu\rangle = (q^i - p^i)|\mu\rangle \quad (8.47)$$

Because the  $\alpha^i$  are complete and linearly independent, the  $q^i - p^i$  values for the weights contain the same information as the values of the components of the weight vector, so we can use them to label the weights. The advantage of doing so is that it will make very transparent the structure of the representations under the  $SU(2)$  s generated by the simple roots.

Since a positive root,  $\phi$ , can be written as  $\phi = \sum_j k_j \alpha^j$ , the master formula can be written as

$$\begin{aligned} q^i - p^i &= \frac{2\phi \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}} \\ &= \sum_j k_j \frac{2\alpha^j \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}} \\ &= \sum_j k_j A_{ji} \end{aligned} \quad (8.48)$$

where  $A$  is the Cartan matrix

$$A_{ji} \equiv \frac{2\alpha^j \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}} \quad (8.49)$$

The matrix element  $A_{ji}$  is the  $q - p$  value for the simple root  $\alpha^i$  acting on the state  $|\alpha^j\rangle$ , twice the  $E_3$  value, thus all the entries of  $A$  are integers. The diagonal entries are all equal to 2. This is obvious from the definition, and also from the fact that the simple roots have  $E_3 = 1$  because the  $SU(2)$  generators themselves transform like the adjoint, spin 1 representation. The off-diagonal entries, all 0, -1, -2 or -3, record the angles between simple roots and their relative lengths - the same information as the Dynkin diagram, and they tell us how the simple roots fit into representations of the  $SU(2)$  s associated with the other simple roots. It is easy to see that the Cartan matrix is invertible because the  $\alpha^j$  are complete and linearly independent. Note that the  $j$  th row of the Cartan matrix consists of the  $q_i - p_i$  values of the simple root  $\alpha^j$ .

For  $SU(3)$ , the Cartan matrix looks like

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

For the  $G_2$  algebra we have just analyzed, it looks like

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.51)$$

### 15.9.8 8.8 Finding all the roots

We now show how to use the Cartan matrix to simplify the procedure of building up all the roots from the simple roots. When we go from  $\phi$  to  $\phi + \alpha^j$  by the action of the raising operator  $E_{\alpha^j}$ , this just changes  $k_j$  to  $k_j + 1$ , and thus  $q^i - p^i$  to  $q^i - p^i + A_{ji}$ .

$$\begin{aligned} k_j &\rightarrow k_j + 1 \\ q^i - p^i &\rightarrow q^i - p^i + A_{ji} \end{aligned} \quad (8.52)$$

If we think of the  $q^i - p^i$  as the elements of a row vector, this is equivalent to simply adding the  $j$  th row of the Cartan matrix, which is just the vector  $q - p$  associated with the simple root  $\alpha^j$ . This allows us to streamline the process of computing the roots. We will describe the procedure and illustrate it first for  $SU(3)$ . Start with the simple roots in the  $q - p$  notation. We will put each in a rectangular box, and arrange them on a horizontal line, which represents the  $k = 1$  layer of positive roots - that is the simple roots.

$$k = 1 \quad 2 - 1 \quad -12 \quad \alpha^1, \alpha^2 \quad (8.53)$$

It is convenient to put a box with  $m$  zeros, representing the Cartan generators, on a line below, representing the  $k = 0$  layer.

$$\begin{aligned} k = 1 &\quad -2 - 1 \quad -12 \quad \alpha^1, \alpha^2 \\ k = 0 &\quad 0 \quad 0 \quad H_i \end{aligned} \quad (8.54)$$

Now for each element of each box we know the  $q^i$  value. For the  $i$  th element of  $\alpha^i$ ,  $q^i = 2$ , because the root is part of the  $SU(2)$  spin 1 representation consisting of  $E_{\pm\alpha^i}$  and  $\alpha^i \cdot H$ . For all the other elements,  $q^j = 0$ , because  $\alpha^i - \alpha^j$  is not a root.

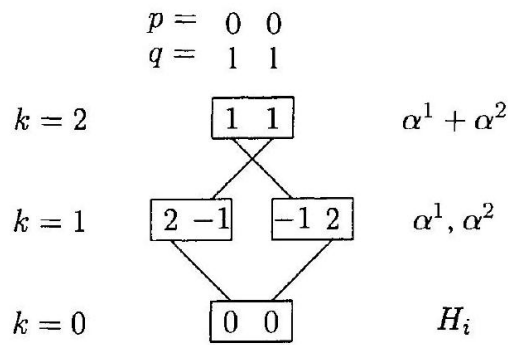
$$\begin{aligned} q = 2 &\quad 0 \quad 0 \quad 2 \\ k = 1 &\quad -2 - 1 \quad -12 \quad \alpha^1, \alpha^2 \\ k = 0 &\quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{aligned} \quad (8.55)$$

Thus we can compute the corresponding  $p^i$ .

$$\begin{aligned} &0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ k = 1 &\quad -2 - 1 \quad -12 \quad \alpha^1, \alpha^2 \\ k = 0 &\quad 0 \quad 0 \quad H_i \end{aligned} \quad (8.56)$$

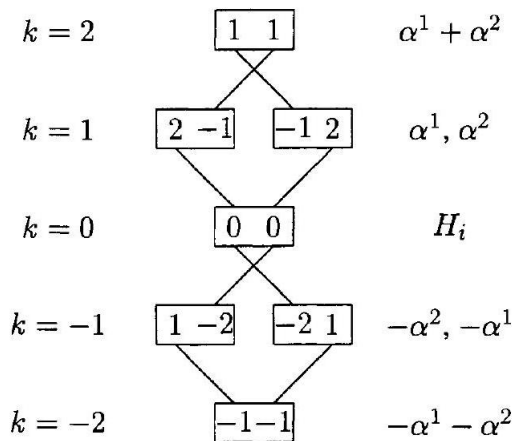
Since the  $i$  th element of  $\alpha^i$  is 2 (because it is a diagonal element of  $A$ ), the corresponding  $p^i$  is zero (of course, since  $2\alpha^i$  is not a root). For all the others,  $p$  is just minus the entry. For each non-zero  $p$ , we draw a line from the simple root to a new root with  $k = 2$ , on a horizontal line above the  $k = 1$  line, obtained by adding the appropriate simple root. The line starts above the appropriate entry, so you can keep track of which root got added automatically. You can also draw such lines from the  $k = 0$  layer to the  $k = 1$  layer, and the lines for each root will have a different angle. You then try to put the boxes on the  $k = 2$  layer so that the lines associated with each root

have the same angle they did between the 0 and 1 layer. These lines represent the action of the  $SU(2)$  raising and lowering operators.



The procedure is now easy to iterate, because everything you need to know to go from  $k = \ell$  to  $k = \ell + 1$  is there in your diagram. At each stage, you compute  $p$  by subtracting the element of the vector from the corresponding  $q$ . For  $SU(3)$ , the procedure terminates at  $k = 2$ , because all the  $p$  s are zero.

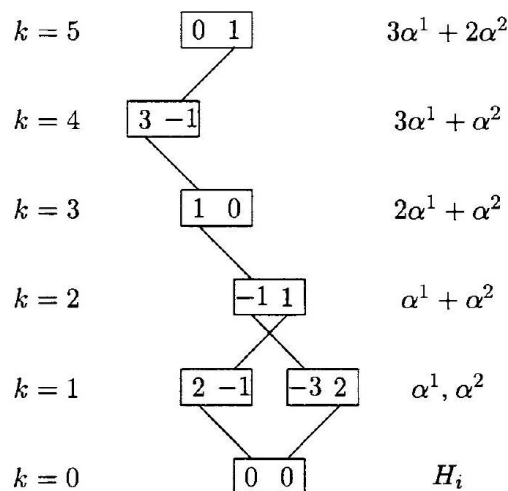
Clearly, we could have continued this diagram farther down and shown the negative roots in the same way.



### 15.9.9 8.9 The $SU(2)$ s

The transformation properties of the roots under the two  $SU(2)$ s should be obvious from (8.58). In fact, instead of thinking about  $p$  and  $q$ , we can just see how each  $E_3$  value fits into an  $SU(2)$  representation. Then the process terminates as soon as all the  $SU(2)$  representations are completed. This is equivalent to actually computing the  $p$  s and  $q$  s, because we got the master formula by thinking about this  $SU(2)$  structure anyway, but it is much faster and easier.

Let us illustrate this with the diagram for  $G_2$ :



The argument in terms of the  $SU(2)$  structure goes as follows. We know that the simple roots  $\alpha^1 = 2 - 1$  and  $\alpha^2 = -32$  are the highest weights of spin 1 representations for their respective  $SU(2)$ s.  $2 - 1$  must be the bottom of a doublet under  $\alpha^2$ , because of the -1, and -32 is the bottom of a spin 3/2 quartet under  $\alpha^1$  because of the -3. So we just follow these up to the end, making sure that each root fits happily into representations under all the  $SU(2)$  s. -11 is fine because it is the top of the  $\alpha^2$  doublet and in the  $\alpha^1$  quartet. 10 is fine because it is an  $\alpha^2$  singlet and in the  $\alpha^1$  quartet.  $3 - 1$  finishes the  $\alpha^1$  quartet and starts a new  $\alpha^2$  doublet. And finally, 01 finishes the  $\alpha^2$  doublet and is an  $\alpha^1$  singlet, so it doesn't start anything new, and the process terminates.

### 15.9.10 8.10 Constructing the $G_2$ algebra

We will do another example of this procedure later. Now let's stay with  $G_2$  and construct the algebra. The two relevant raising operators are

$$E_1^+ = E_{\alpha^1} \quad E_2^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} E_{\alpha^2} \quad (8.60)$$

Start with the  $|E_{\alpha^2}\rangle$  state. We know, because  $p = 3$  and  $q = 0$  or by looking at the roots in (8.59) that it is the lowest weight state in a spin 3/2 representation of the  $\alpha^1 SU(2)$ . Call it

$$|E_{\alpha^2}\rangle = |3/2, -3/2, 1\rangle \quad (8.61)$$

Then applying the  $\alpha^1$  raising operator

$$\begin{aligned} & |[E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]\rangle \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} |3/2, -1/2, 1\rangle \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} |E_{\alpha^1 + \alpha^2}\rangle \end{aligned} \quad (8.62)$$

The last line is a definition, in that it involves a phase choice, but the construction using the raising operator guarantees that we have the normalization right. Applying the raising operator again gives

$$\begin{aligned} & |[E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]]\rangle \\ &= 2\sqrt{\frac{3}{2}} |3/2, 1/2, 1\rangle \\ &= \sqrt{6} |E_{2\alpha^1 + \alpha^2}\rangle \end{aligned} \quad (8.63)$$

and a third time gives

$$\begin{aligned} & |[E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]]]\rangle \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{6} |3/2, 3/2, 1\rangle \\ &= 3 |E_{3\alpha^1 + \alpha^2}\rangle \\ &= 3 |1/2, -1/2, 2\rangle \end{aligned} \quad (8.64)$$

where we have written the last line because this is also the lowest weight state of spin  $1/2$  representation of the  $\alpha^2 SU(2)$ . Then applying the  $\alpha^2$  raising operator gives

$$\begin{aligned} & |[E_{\alpha^2}, [E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]]]]\rangle \\ &= 3\sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, 1/2, 2\rangle \\ &= \frac{9}{\sqrt{6}} |E_{3\alpha^1+2\alpha^2}\rangle \end{aligned} \quad (8.65)$$

Putting this all together, we have expressions for all the positive roots in terms of the generators associated with the simple roots:

$$\begin{aligned} E_{\alpha^1+\alpha^2} &= \sqrt{\frac{2}{3}} [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}] \\ E_{2\alpha^1+\alpha^2} &= \sqrt{\frac{1}{6}} [E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]] \\ E_{3\alpha^1+\alpha^2} &= \frac{1}{3} [E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]]] \\ E_{3\alpha^1+2\alpha^2} &= \frac{\sqrt{6}}{9} [E_{\alpha^2}, [E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]]]] \end{aligned} \quad (8.66)$$

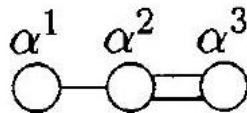
This is enough to determine all the commutation relations by just repeatedly using the Jacobi identity. For example, let's check that the  $\alpha^1$  lowering operator acts as we expect. For example

$$\begin{aligned} & [E_{-\alpha^1}, E_{\alpha^1+\alpha^2}] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} [E_{-\alpha^1}, [E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}]] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} [[E_{-\alpha^1}, E_{\alpha^1}], E_{\alpha^2}] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3}} [\alpha \cdot H, E_{\alpha^2}] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \alpha^1 \cdot \alpha^2 E_{\alpha^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} E_{\alpha^2} \end{aligned} \quad (8.67)$$

This is what we expect for a lowering operator acting on  $|3/2, -1/2\rangle$  state. The other relations can be found similarly. The general form involves some multiple commutator of negative simple root generators with a multiple commutator of positive simple root generators. When these are rearranged using the Jacobi identity, the positive and negative generators always eat one another in pairs, so that in the end you get one of the positive root states, or one of the negative root states or a Cartan generator, so the algebra closes.

### 15.9.11 8.11 Another example: the algebra $C_3$

Let's look at the algebra corresponding to the following Dynkin diagram





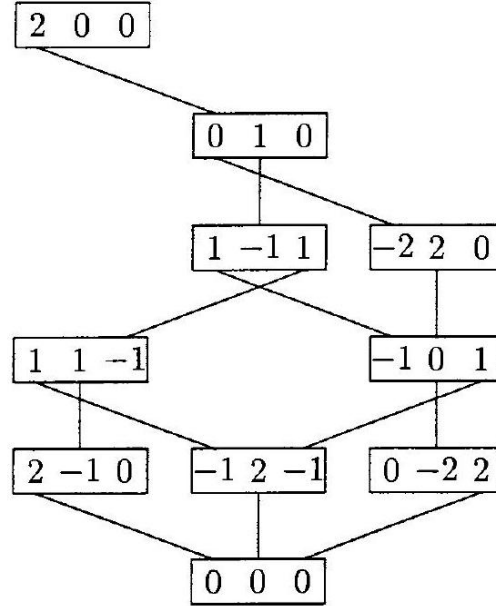
where

$$\alpha^{1^2} = \alpha^{2^2} = 1 \quad \alpha^{3^2} = 2 \quad (8.69)$$

The Cartan matrix is

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.70)$$

Then the construction of the positive roots goes as follows: <sup>1</sup>



This algebra is called  $C_3$ . It is part of four infinite families of simple compact Lie algebras, called the classical groups. We will discuss them all later.

### 15.9.12 8.12 Fundamental weights

Suppose that the simple roots of some simple Lie algebra are  $\alpha^j$  for  $j = 1$  to  $m$ . The highest weight,  $\mu$ , of an arbitrary irreducible representation,  $D$  has the property that  $\mu + \phi$  is not a weight for any positive root,  $\phi$ . From the preceding discussion, it is clearly sufficient that  $\mu + \alpha^j$  not be a weight in the representation for any  $j$ , because then

$$E_{\alpha^j} |\mu\rangle = 0 \quad \forall j \quad (8.72)$$

which implies that all positive roots annihilate the state, because any positive root can be expressed as a multiple commutator of simple roots. We will see soon that this is an if and only if statement, because an entire irreducible

representation can be constructed by applying lowering operators to any state with this property. So if (8.72) is true, then  $\mu$  is the highest weight of an irreducible representation. This means that for every  $E_{\alpha^j}$  acting on  $|\mu\rangle$ ,  $p = 0$ , and thus

$$\frac{2\alpha^j \cdot \mu}{\alpha^j} = \ell^j \quad (8.73)$$

<sup>1</sup> Here, because the group is rank 3, we are projecting a three dimensional root space onto two dimensions - for groups of higher rank, these diagrams can get quite busy.

where the  $\ell^j$  are non-negative integers. Because the  $\alpha^j$  are linearly independent, the integers  $\ell^j$  completely determine  $\mu$ . Every set of  $\ell^j$  gives a  $\mu$  which is the highest weight of some irreducible representation.

Thus the irreducible representations of a rank  $m$  simple Lie algebra can be labeled by a set of  $m$  non-negative integers,  $\ell^j$ . These integers are sometimes called the Dynkin coefficients.

It is useful to consider the weight vectors,  $\mu^j$ , satisfying

$$\frac{2\alpha^j \cdot \mu^k}{\alpha^j \cdot \alpha^j} = \delta_{jk} \quad (8.74)$$

Every highest weight,  $\mu$ , can be uniquely written as

$$\mu = \sum_{j=1}^m \ell^j \mu^j \quad (8.75)$$

We can therefore build the representation with highest weight  $\mu$  by constructing a tensor product of  $\ell^1$  representation of highest weight  $\mu^1$ ,  $\ell^2$  with highest weight  $\mu^2$ , and so on. This representation will generally be reducible, but we can always then pick out the representation  $\mu$  by applying lowering operators to  $|\mu\rangle$ .

The vectors  $\mu^j$  are called the fundamental weights and the  $m$  irreducible representations that have these as highest weights are called the fundamental representations. We will sometimes denote them by  $D^j$ . Remember that the superscripts are just labels. The vectors also have vector indices. It's potentially confusing because both run from 1 to  $m$ .

There is more to say about the Dynkin coefficients. Since the fundamental weights form a complete set, we can expand any weight of any representation in terms of them, as in (8.75). Then we can run the argument backwards and get (8.73) which implies that for a general  $\mu$ ,

$$\ell^j = q^j - p^j \quad (8.76)$$

that is  $\ell^j$  is the  $q^j - p^j$  value for the simple root  $\alpha^j$ . Thus the matrix elements of the vectors we were manipulating in constructing the positive roots of various algebras were just the Dynkin coefficients of the roots (though of course, for a general weight or root, the Dynkin coefficients will not necessarily be positive). In particular, the highest box in the construction is just the highest weight in the adjoint representation. The rows of the Cartan matrix are the Dynkin coefficients of the simple roots. Later, we will use a similar analysis to discuss arbitrary representations.

### 15.9.13 8.13 The trace of a generator

This is a good place to prove a theorem that we will see often in examples, and that will play a crucial role in the discussion of unification of forces:

**Theorem 8.9** The trace of any generator of any representation of a compact simple Lie group is zero.

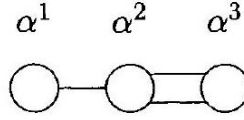
**Proof:** It suffices to prove this in the standard basis that we have developed in chapter 6 and this chapter, because the trace is invariant under similarity transformations. In the weight basis, every generator is a linear combination of Cartan generators and raising and lowering operators. The trace of raising or lowering operators is zero because they have no diagonal elements. The Cartan generators can be written as linear combinations of  $\vec{\alpha}^i \cdot \vec{H}$ , because the simple roots,  $\vec{\alpha}^i$ , are complete. But each  $\vec{\alpha}^i \cdot \vec{H}$  is proportional to the generator of an  $SU(2)$  subalgebra and its trace is zero because every  $SU(2)$  representation is symmetrical about 0 - the spin runs from  $-j$  to  $j$ . Thus the Cartan generators have zero trace and the theorem is proved.

## Problems

8.A. Find the simple roots and fundamental weights and the Dynkin diagram for the algebra discussed in problem (6.C).

8.B. Consider the algebra generated by  $\sigma_a$  and  $\sigma_a \eta_1$  where  $\sigma_a$  and  $\eta_a$  are independent Pauli matrices. Show that this algebra generates a group which is semisimple but not simple. Nevertheless, you can define simple roots. What does the Dynkin diagram look like?

8.C. Consider the algebra corresponding to the following Dynkin diagram



where

$$\alpha^{1^2} = \alpha^{2^2} = 2 \quad \alpha^{3^2} = 1$$

Note that this is similar to  $C_3$  in (8.68), but the lengths (and relative lengths) are different. Find the Cartan matrix and find the Dynkin coefficients of all of the positive roots, using the diagrammatic construction described in this chapter. Don't forget to put the lines in the right place - this will make it harder to get confused.

Chapter 9

## 15.10 More $SU(3)$

In this chapter, we study other irreducible representations of  $SU(3)$  and in the process, learn some useful general things about the irreducible representations of Lie algebras.

### 15.10.1 9.1 Fundamental representations of $SU(3)$

Label the  $SU(3)$  simple roots as

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= (1/2, \sqrt{3}/2) \\ \alpha^2 &= (1/2, -\sqrt{3}/2) \end{aligned} \tag{9.1}$$

Then we find the  $\mu^i$ , the highest weights of the fundamental representations, by requiring that  $\mu^i \cdot \alpha^j = 0$  if  $i \neq j$

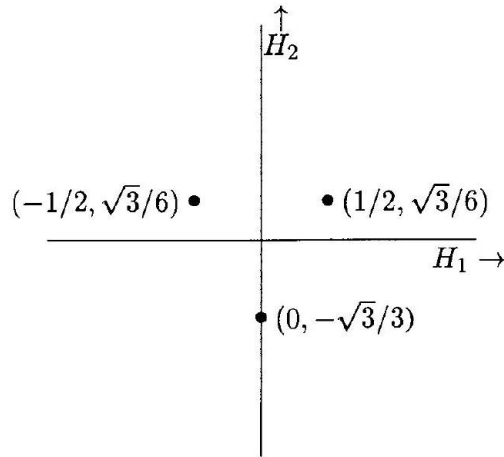
$$\begin{aligned} \mu^i &= (a^i, b^i) \\ \mu^i \cdot \alpha^j &= (a^i \mp \sqrt{3}b^i) / 2 \\ \Rightarrow a^i &= \pm \sqrt{3}b^i \end{aligned} \tag{9.2}$$

and then normalizing to satisfy (8.74) which gives

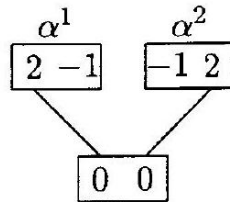
$$\begin{aligned} \mu^1 &= (1/2, \sqrt{3}/6) \\ \mu^2 &= (1/2, -\sqrt{3}/6) \end{aligned} \tag{9.3}$$

$\mu^1$  is the highest weight of the defining representation generated by the GellMann matrices

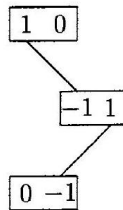
-



We can also write it in the  $q - p$  notation. In fact, we can use the properties of the lowering operators in the  $q - p$  notation to construct all weights by working down from the highest weight.  $\mu^1$  is associated with the vector  $(1, 0)$ , and in the graphical notation in which the simple roots look like



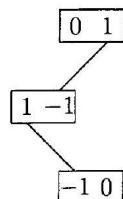
it looks like this



The highest weight is the top of an  $\alpha^1$  doublet. Subtracting  $\alpha^1$  gives  $10 - 2 - 1 = -11$ , thus because the second entry is a 1, and there is no state above it in the  $\alpha^2$  direction, it is the top of an  $\alpha^2$  doublet. Subtracting  $\alpha^2$  gives  $-11 - -12 = 0 - 1$ , so the series terminates and the weights are

$$\mu^1 \quad \mu^1 - \alpha^1 \quad \mu^1 - \alpha^1 - \alpha^2 \quad (9.6)$$

There are many ways of obtaining the representation  $\mu^2$ , or  $(0, 1)$ . The most straightforward way to construct it from scratch is to use the  $q - p$  notation, starting with the highest weight, and working downwards in the  $SU(2)$  representations:



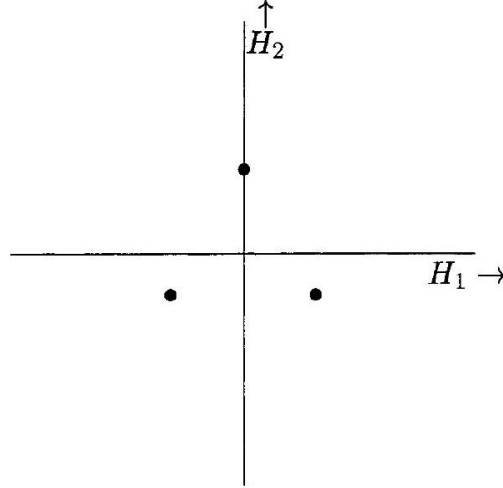
so the weights are

$$\mu^2 \quad \mu^2 - \alpha^2 \quad \mu^2 - \alpha^2 - \alpha^1 \quad (9.8)$$

or

$$(1/2, -\sqrt{3}/6) \quad (0, \sqrt{3}/3) \quad (-1/2, -\sqrt{3}/6) \quad (9.9)$$

so in the  $H_i$  plane, these look like



## 15.10.2 9.2 Constructing the states

Do all of these weights correspond to unique states so that the representation is 3 dimensional? We strongly suspect so, since that was the case for the  $(1, 0)$  representation, and these two are clearly closely related. But we would like to be able to answer the question in general, so let's see how we might answer it for a general representation. Suppose we have an irreducible representation

with highest weight  $\mu$ . Then there will be one or more states,  $|\mu\rangle$ , and all the states in the representation can clearly be written in the form

$$E_{\phi_1} E_{\phi_2} \cdots E_{\phi_n} |\mu\rangle \quad (9.11)$$

where the  $\phi_i$  are any roots. But any such state with a positive  $\phi$  can be dropped, because if a positive  $\phi$  appears, we can move it to the right using the commutation relations until it acts on  $|\mu\rangle$ , which give zero. So we can take all the  $\phi_i$  in (9.11) to be negative.

But since every negative root is a sum over the simple roots with nonpositive integer coefficients, we can take only states of the form

$$E_{-\alpha^{\beta_1}} E_{-\alpha^{\beta_2}} \cdots E_{-\alpha^{\beta_n}} |\mu\rangle \quad (9.12)$$

where  $\alpha^{\beta_i}$  are simple roots without losing any of the states.

Now it is clear if it wasn't before that the highest weight state is unique. If there were two states with the highest weight, the representation would break up into two independent sets of the form (9.12) above, and it would not be irreducible.

In addition, any state that can be obtained in only one way by the action of simple lowering operators on  $|\mu\rangle$  is unique. This shows that all the states in the  $(0, 1)$  representation are unique.

This technique of starting with the highest weight state and building the other states by the action of lowering operators actually allows us to build the representation explicitly. We can

compute the norms of the states (see problem 9.A) and the action of the raising and lowering operators on the states is built in by construction. We will not actually use this to build the representation matrices, because there are usually easier ways, but we could do it if we wanted to. The point is that all we need to do to construct the representation explicitly is to understand the structure of the space spanned by the kets in (9.12).

The first thing to notice is that two states produced by a different set of  $E_{-\alpha_j}$  in (9.12) are orthogonal. This is clear because the linear independence of the  $\alpha^j$  s implies that the two states have different weights. But then they are orthogonal because they are eigenstates of the hermitian Cartan generators with different eigenvalues.

The norm of any state can be easily computed using the commutation relations of the simple root generators. The norm has the form

$$\langle \mu | E_{\alpha^{\beta_n}} \cdots E_{\alpha^{\beta_2}} E_{\alpha^{\beta_1}} E_{-\alpha^{\beta_1}} E_{-\alpha^{\beta_2}} \cdots E_{-\alpha^{\beta_n}} | \mu \rangle \quad (9.13)$$

The raising operators, starting with  $E_{\alpha^{\beta_1}}$  can be successively moved to the right until they annihilate  $|\mu\rangle$ . On the way, they commute with the lowering operators, unless the roots are a positive and negative pair, in which case the commutator is a linear combination of Cartan generators, which can be evaluated in terms of  $\mu$  and the  $\alpha^{\beta_j}$  s, leaving a matrix element with one less raising and lowering operator. This is a tedious, but completely systematic procedure - you can easily write a recursive program to do it explicitly.

If two states in (9.12) have the same set of  $\beta_j$  s but in a different order, then they have the same weight. In this case, we must compute their norms and matrix elements to understand the structure of the space. The matrix elements can be calculated in the same way as the norm in (9.13) because they have a similar structure:

$$\langle \mu | E_{\alpha^{\gamma_n}} \cdots E_{\alpha^{\gamma_2}} E_{\alpha^{\gamma_1}} E_{-\alpha^{\beta_1}} E_{-\alpha^{\beta_2}} \cdots E_{-\alpha^{\beta_n}} | \mu \rangle$$

where  $\gamma_j$  and  $\beta_j$  are two lists of the same set of integers but in a different order. Again, simply moving the raising operators to the right gives a completely systematic way of computing the matrix element.

Once you have the norms and the matrix elements, you can construct an orthonormal basis in the Hilbert space using the Gram-Schmidt procedure. For example, suppose that one weight space involves two states of the form (9.12),  $|A\rangle$  and  $|B\rangle$ . Then if

$$\langle A|B\rangle \cdot \langle B|A\rangle = \langle A|A\rangle \cdot \langle B|B\rangle \quad (9.15)$$

the two states are linearly dependent, and there is a single basis state that we can take to be

$$\frac{|A\rangle}{\sqrt{\langle A|A\rangle}} \quad (9.16)$$

While if

$$\langle A|B\rangle \cdot \langle B|A\rangle \neq \langle A|A\rangle \cdot \langle B|B\rangle \quad (9.17)$$

then the two states are linearly independent and we can choose an orthonormal basis of the form

$$\begin{aligned} & \frac{|A\rangle}{\sqrt{\langle A|A\rangle}} \text{ and} \\ & \frac{|B\rangle\langle A|A\rangle - |A\rangle\langle A|B\rangle}{\sqrt{(\langle A|A\rangle) \cdot (\langle A|B\rangle \cdot \langle B|A\rangle - \langle A|A\rangle \cdot \langle B|B\rangle)}} \end{aligned} \quad (9.18)$$

An orthonormal basis is all you need to complete the construction of the space. Again, I want to emphasize that while this procedure is tedious and boring, it is completely systematic. You could program your computer to do it, and thus construct any representation completely from the highest weight and the simple roots.

### 15.10.3 9.3 The Weyl group

We could also have shown that the states in the  $\mu^2$  representation are not degenerate by understanding the obvious symmetry of the representations. The symmetry arises because there is an  $SU(2)$  associated with each root direction, and all  $SU(2)$  representations are symmetrical under the reflection  $E_3 \rightarrow -E_3$ . In particular, if  $\mu$  is a weight, and  $E_3 = \alpha \cdot H/\alpha^2$  is the  $E_3$  associated with the root  $\alpha$ , then

$$E_3|\mu\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2}|\mu\rangle \quad (9.19)$$

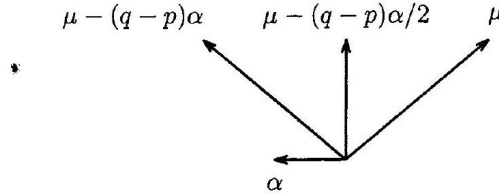
and the reflection symmetry implies that  $\mu - (q - p)\alpha$  (where  $(q - p) = 2(\alpha \cdot \mu/\alpha^2)$ ) is a weight with the opposite  $E_3$  value

$$E_3|\mu - (q - p)\alpha\rangle = -\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2}|\mu - (q - p)\alpha\rangle \quad (9.20)$$

Note that the vector average of  $\mu$  and its reflection,  $\mu - (q - p)\alpha$ , is  $\mu - (q - p)\alpha/2$  which is in the hyperplane perpendicular to  $\alpha$ , because

$$\alpha \cdot (\mu - (q - p)\alpha/2) = \alpha \cdot \mu - (q - p)\alpha^2/2 = 0 \quad (9.21)$$

as illustrated below:

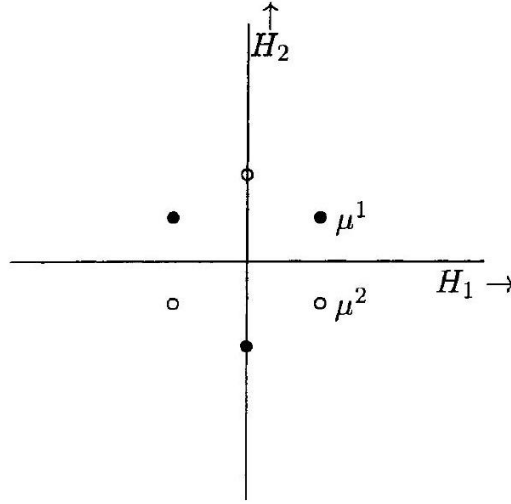


All such reflections for all roots are transformations on the weight space that leave the roots unchanged. We can obtain additional transformations that leave the roots unchanged by combining two or more such reflections.<sup>1</sup> The set of all transformations obtained in this way forms a transformation group called the Weyl group of the algebra. The individual reflections are called Weyl reflections. The Weyl group is a simple way of understanding the hexagonal and triangular structures that appear in  $SU(3)$  representations.

### 15.10.4 9.4 Complex conjugation

Notice that the weights of the second fundamental representation are just the negatives of the weights of the first.

<sup>1</sup> For example, in  $SU(3)$ , if you first reflect in the plane perpendicular to  $\alpha^1$  and then in the plane perpendicular to  $\alpha^2$ , the result is a rotation by  $120^\circ$ .

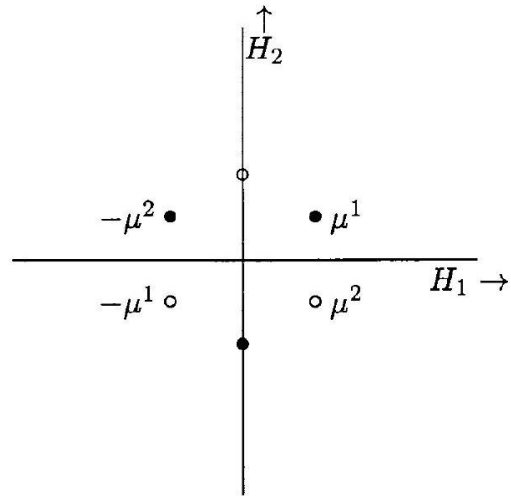


This means that the two representations are related by complex conjugation. If  $T_a$  are the generators of some representation,  $D$ , of some Lie Algebra, the objects  $-T_a^*$  have the same commutation relations (because the structure constants are real) -

$$\begin{aligned} ([T_a, T_b])^* &= (if_{abc}T_c)^* \\ [T_a^*, T_b^*] &= -if_{abc}T_c^* \\ [-T_a^*, -T_b^*] &= if_{abc}(-T_c^*) \end{aligned} \quad (9.24)$$

It is called the complex conjugate of the representation  $D$ , and is sometimes denoted by  $\bar{D}$ .  $D$  is said to be a real representation if it is equivalent to its complex conjugate. If not, it is a complex representation. The Cartan generators of the complex conjugate representation are  $-H_i^*$ . Because  $H_i$  is hermitian,  $H_i^*$  has the same eigenvalues as  $H_i$ . Thus if  $\mu$  is a weight in  $D$ ,  $-\mu$  is a weight in  $\bar{D}$ . In particular, the highest weight of  $\bar{D}$  is minus the lowest weight of  $D$ .

Obviously, in  $SU(3)$ , the representation  $(0, 1)$  is the complex conjugate of  $(1, 0)$ . The lowest weight of  $(1, 0)$  is  $-\mu^2$ , the negative of the highest weight of  $(0, 1)$  and vice versa.



There are various different notations used in the physics literature for the  $SU(3)$  representations. Sometimes, you will see the Dynkin coefficients  $(q_1, q_2)$ . This is always a unique labeling. But a common shorthand notation, which is not too confusing for small representations is to



give their dimension and to distinguish between a representation and its complex conjugate with a bar, so that (for example),

$$(1, 0) \equiv 3 \quad (0, 1) \equiv \bar{3} \quad (9.26)$$

In general, the complex conjugate of  $(n, m)$  is  $(m, n)$ . This is clear if you think about the highest and lowest weights. Because the lowest weight of  $(1, 0)$  is minus the highest weight of  $(0, 1)$ , and vice versa, we have

$$\begin{array}{lll} (n, m) & \text{has highest weight} & n\mu^1 + m\mu^2 \\ (n, m) & \text{has lowest weight} & -n\mu^2 - m\mu^1 \\ \Rightarrow & & \\ (m, n) & \text{has highest weight} & n\mu^2 + m\mu^1 \end{array} \quad (9.27)$$

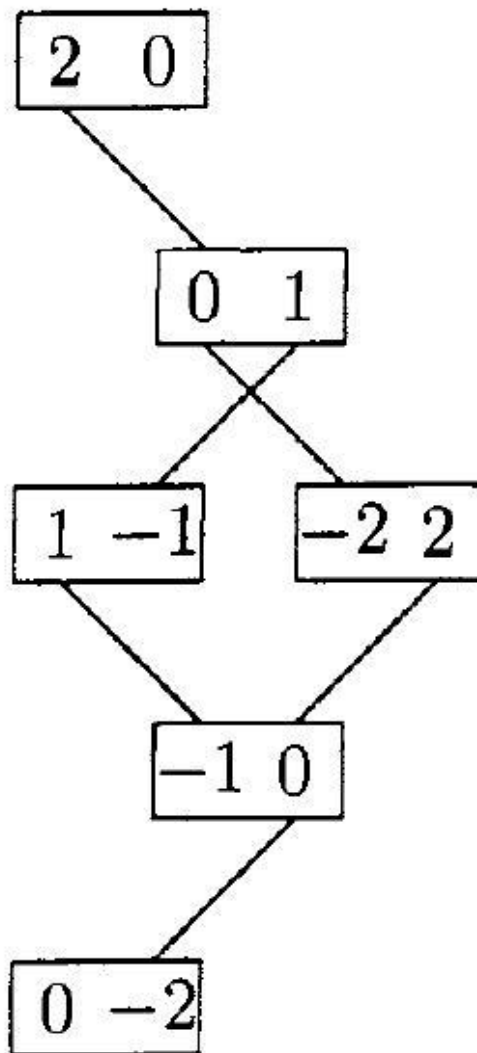
Representations of the form  $(n, n)$  are real.

### 15.10.5 9.5 Examples of other representations

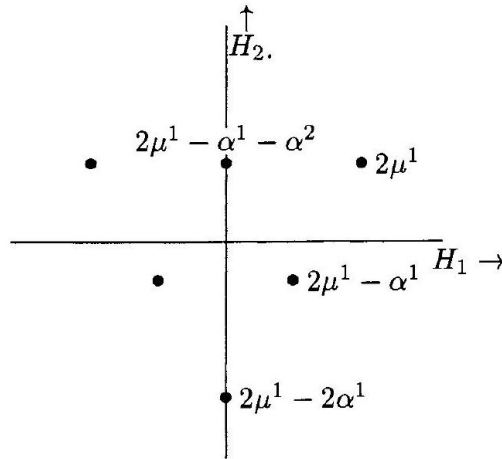
Consider the representation  $(2, 0)$ . It has highest weight

$$2\mu^1 = (1, 1/\sqrt{3}) \quad (9.28)$$

In the  $q - p$  notation, of (9.4) and (9.5) it looks like this



or in the Cartan space



All the weights correspond to unique states.  $2\mu^1 - \alpha^1$ ,  $2\mu^1 - 2\alpha^1$  and  $2\mu^1 - \alpha^1 - \alpha^2$  are reached by unique paths from the highest weight, and the others are related to these by Weyl reflections. Thus this is a 6-dimension representation -  $(2, 0) \equiv 6$ . It is evidently complex. Its complex conjugate,  $(0, 2) \equiv \bar{6}$  is inverted in the origin in the Cartan plane, and reflected about a vertical line in the  $q - p$  picture:

Now consider the representation  $(1, 1)$ . Note that

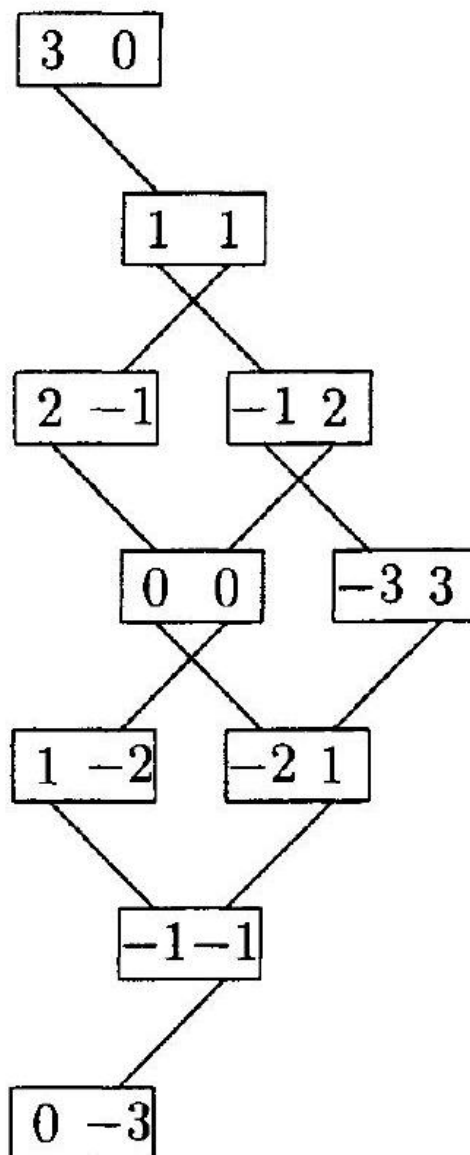
$$\mu^1 + \mu^2 = \alpha^1 + \alpha^2 \quad (9.33)$$

but  $\alpha^1 + \alpha^2$  is the highest weight of the adjoint representation (8.58) We know that the zero weight is doubly degenerate - corresponding to the two states of the Cartan subalgebra. The two ways of getting to zero from the highest weights give different states. You can show that

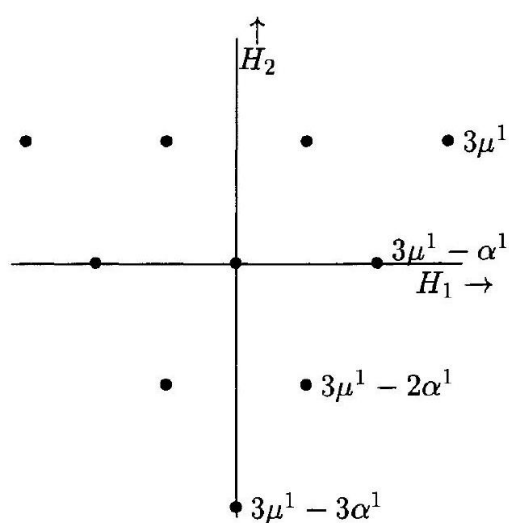
$$E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} |\mu^1 + \mu^2\rangle \neq E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |\mu^1 + \mu^2\rangle \quad (9.34)$$

You will do this in problem (9.A).

Now look at  $(3, 0)$ , with highest weight  $3\mu^1$



The weight diagram is



All the states are obviously unique except the state in the center. But it turns out to be unique also. The two vectors

$$\begin{aligned} E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \\ E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \end{aligned} \quad (9.37)$$

are linearly dependent, because we can write

$$\begin{aligned} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \\ &= [E_{-\alpha^2}, E_{-\alpha^1}] E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \\ &+ E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \\ &= E_{-\alpha^1} [E_{-\alpha^2}, E_{-\alpha^1}] |3\mu^1\rangle \\ &+ E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \\ &= E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \\ &+ E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \\ &= 2E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \end{aligned} \quad (9.38)$$

where the second step follows because  $-2\alpha^1 - \alpha^2$  is not a root, and thus

$$[[E_{-\alpha^2}, E_{-\alpha^1}], E_{-\alpha^1}] = 0 \quad (9.39)$$

and the second to last because  $3\mu^1 - \alpha^2$  is not a root, and thus

$$[E_{-\alpha^2}, E_{-\alpha^1}] |3\mu^1\rangle = E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |3\mu^1\rangle \quad (9.40)$$

Thus this is a ten dimensional representation. It is sometimes called just the 10. Its complex conjugate, the  $(0, 3)$  representation, is the  $\bar{10}$ .

## Problems

9.A. If  $|\mu\rangle$  is the state of the highest weight ( $\mu = \mu^1 + \mu^2$ ) of the adjoint representation of  $SU(3)$ , show that the states

$$|A\rangle = E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} |\mu\rangle$$

and

$$|B\rangle = E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |\mu\rangle$$

are linearly independent. Hint: Calculate the matrix elements  $\langle A|A\rangle$ ,  $\langle A|B\rangle$ , and  $\langle B|B\rangle$ . Show that  $|A\rangle$  and  $|B\rangle$  are linearly dependent if and only if

$$\langle A|A\rangle\langle B|B\rangle = \langle A|B\rangle\langle B|A\rangle$$

9.B. Consider the following matrices defined in the six dimensional tensor product space of the  $SU(3)\lambda_a$  matrices and the Pauli matrices  $\sigma_a$ :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\lambda_a\sigma_2 \text{ for } a = 1, 3, 4, 6 \text{ and } 8 \\ &\frac{1}{2}\lambda_a \text{ for } a = 2, 5 \text{ and } 7 \end{aligned}$$

Show that these generate a reducible representation and reduce it.

9.C. Decompose the tensor product of  $3 \times 3$  using highest weight techniques.

Chapter 10

## 15.11 Tensor Methods

Tensors are great tools for doing practical calculations in  $SU(3)$  and in many other groups as well. As you will see, the idea of tensors is closely related to the idea of a wave function in quantum mechanics.

### 15.11.1 10.1 lower and upper indices

The idea starts by labeling the states of the 3 as

$$\begin{aligned} |1/2, \sqrt{3}/6\rangle &\equiv |1\rangle \\ |-1/2, \sqrt{3}/6\rangle &\equiv |2\rangle \\ |0, -1/\sqrt{3}\rangle &\equiv |3\rangle \end{aligned} \quad (10.1)$$

The 1, 2 and 3 are to remind you of the fact that the eigenvectors of the  $H_1$  and  $H_2$  matrices corresponding to these weights are vectors with a single non-zero entry in the first, second and third position. We have also written the indices below the line for a reason that will become clear shortly.

If we define a set of matrices with one upper and one lower index, as follows

$$[T_a]_j^i = \frac{1}{2} [\lambda_a]_{ij} \quad (10.2)$$

then the triplet of states,  $|_i\rangle$ , transforms under the algebra as

$$T_a |_i\rangle = |_j\rangle [T_a]_i^j \quad (10.3)$$

The important thing to notice is that the sum over  $j$  involves one upper and one lower index.

Label the states of the  $\bar{3}$  as

$$\begin{aligned} |-1/2, -\sqrt{3}/6\rangle &\equiv |^1\rangle \\ |1/2, -\sqrt{3}/6\rangle &\equiv |^2\rangle \\ |0, 1/\sqrt{3}\rangle &\equiv |^3\rangle \end{aligned} \quad (10.4)$$

Then

$$T_a |^i\rangle = -|^j\rangle [T_a]_j^i \quad (10.5)$$

This is true because the  $\bar{3}$  is the complex conjugate representation, generated by

$$-[T_a^*]^j_i = -[T_a^T]^j_i = -[T_a]_i^j \quad (10.6)$$

Now I can define, as usual, a state in the tensor product of  $n\bar{3}$  s and  $m\bar{3}$  s.

$$\left| \begin{smallmatrix} i_1 \cdots i_m \\ j_1 \cdots j_n \end{smallmatrix} \right\rangle = |^{i_1}\rangle \cdots |^{i_m}\rangle |_{j_1}\rangle \cdots |_{j_n}\rangle \quad (10.7)$$

It transforms as

$$\begin{aligned}
 T_a |_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \rangle &= \sum_{\ell=1}^n |_{j_1 \dots j_{\ell-1} k j_{\ell+1} \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \rangle [T_a]_{j_\ell}^k \\
 &\quad - \sum_{\ell=1}^m |_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_{\ell-1} k i_{\ell+1} \dots i_m} \rangle [T_a]_k^{i_\ell}
 \end{aligned} \tag{10.8}$$

This distinction between upper and lower indices is useful because  $SU(3)$  has two different kinds of 3-dimensional representations - the 3 and  $\bar{3}$ . We need some way to distinguish them. Raising and lowering the indices is just a handy notational device.

### 15.11.2 10.2 Tensor components and wave functions

Now consider an arbitrary state in this tensor product space

$$|v\rangle = |_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \rangle v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$$

$v$  is called a tensor. A tensor is just a "wave-function", because we can find  $v$  by taking the matrix element of  $|v\rangle$  with the tensor product state.

$$v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = \langle_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} | v \rangle \tag{10.10}$$

The correspondence here is exactly like the relation between the space wave function of a particle in quantum mechanics and the state describing the particle in the Hilbert space.

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle \tag{10.11}$$

The tensor  $v$  is characterized by its tensor components,  $v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$ . Now we can think of the action of the generators on  $|v\rangle$  as an action on the tensor components, as follows:

$$T_a |v\rangle = |T_a v\rangle \tag{10.12}$$

where

$$\begin{aligned}
 T_a v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} &= \sum_{\ell=1}^n [T_a]_k^{j_\ell} v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots k \dots j_n} \\
 &\quad - \sum_{\ell=1}^m [T_a]_{i_\ell}^k v_{i_1 \dots k \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}
 \end{aligned} \tag{10.13}$$

This defines the action of the generators on an arbitrary tensor!

### 15.11.3 10.3 Irreducible representations and symmetry

We can now use the highest weight procedure to pick out the states in the tensor product corresponding to the irreducible representation  $(n, m)$ . Because  $|_1\rangle$  is the highest weight of the  $(1, 0)$  representation, and  $|^2\rangle$  is the highest weight of the  $(0, 1)$  representation, the state with highest weight in  $(n, m)$  is

$$\begin{vmatrix} 222 \dots \\ 111 \dots \end{vmatrix} \quad (10.14)$$

It corresponds to the tensor  $v_H$  with components

$$v_H^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_m} = N \delta_{j_1 1} \dots \delta_{j_n 1} \delta_{i_1 2} \dots \delta_{i_m 2}$$

Now we can construct all the states in  $(n, m)$  by acting on the tensor  $v_H$  with lowering operators. The important point is that  $v_H$  has two properties that are preserved by the transformation  $v_H \rightarrow T_a v_H$ .

1.  $v_H$  is symmetric in the upper indices, and symmetric in the lower indices.
2.  $v_H$  satisfies

$$\delta_{j_1}^{i_1} v_H^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_m} = 0$$

The first is preserved because the generators act the same way on all the upper indices and the same way on all the lower indices. The second is preserved because of the minus sign in (10.13) and the tracelessness of the  $T_a$  s. All the states in  $(n, m)$  therefore correspond to tensors of this form, symmetric in both upper and lower indices, and traceless (which just means that it satisfies (10.16) which is a generalization of the condition of tracelessness for a matrix). It turns out that the correspondence also goes the other way. Every such tensor gives a state in  $(n, m)$ .

### 15.11.4 10.4 Invariant tensors

The  $\delta_{j_1}^{i_1}$  is called an invariant tensor. An invariant tensor is one that does not change under an  $SU(3)$  transformation. The change in a tensor is proportional to the action of some linear combination of generators on it, but

$$[T_a \delta]_j^i = [T_a]_k^i \delta_j^k - [T_a]_j^k \delta_k^i = [T_a]_j^i - [T_a]_j^i = 0 \quad (10.17)$$

thus  $\delta_{j_1}^{i_1}$  doesn't change under any  $SU(3)$  transformation. There are two other invariant tensors in  $SU(3)$  - the completely antisymmetric tensors,  $\epsilon^{ijk}$  and  $\epsilon_{ijk}$ . These are invariant because of the tracelessness of  $T_a$ . Consider

$$[T_a \epsilon]^{ijk} = [T_a]_\ell^i \epsilon^{\ell jk} + [T_a]_\ell^j \epsilon^{i \ell k} + [T_a]_\ell^k \epsilon^{ij \ell} \quad (10.18)$$

This is completely antisymmetric, so we can look at the 123 component -

$$\begin{aligned} [T_a \epsilon]^{123} &= [T_a]_\ell^1 \epsilon^{\ell 23} + [T_a]_\ell^2 \epsilon^{1 \ell 3} + [T_a]_\ell^3 \epsilon^{12 \ell} \\ &= [T_a]_1^1 \epsilon^{123} + [T_a]_2^2 \epsilon^{123} + [T_a]_3^3 \epsilon^{123} = 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

Thus  $\epsilon^{ijk}$  is invariant.

### 15.11.5 10.5 Clebsch-Gordan decomposition

We can use tensors to decompose tensor products explicitly. Suppose that  $u$  is a tensor with  $n$  upper indices and  $m$  lower indices, and  $v$  is a tensor with  $p$  upper indices and  $q$  lower indices. Then it follows from the definition of a tensor that the product,  $u \otimes v$  defined by the product of the tensor components

$$[u \otimes v]_{j_1 \dots j_m j'_1 \dots j'_q}^{i_1 \dots i_n i'_1 \dots i'_p} = u_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} v_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} \quad (10.20)$$

is the tensor that describes the tensor product state  $|u\rangle \otimes |v\rangle$ . Thus we can analyze tensor products by manipulating tensors - the wave-functions of the corresponding states. The general strategy for doing these decompositions is to make irreducible representations out of the product of tensors, and then express the original product as a sum of terms proportional to various irreducible combinations. The advantage of this procedure is that we are directly manipulating wave functions, which is often what we want to know about.

Consider, for example,  $3 \otimes 3$ . If we have two 3 s,  $u^i$  and  $v^j$ , we can write the product as

$$u^i v^j = \frac{1}{2} (u^i v^j + u^j v^i) + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{k\ell m} u^\ell v^m \quad (10.21)$$

The first term,

$$\frac{1}{2} (u^i v^j + u^j v^i) \quad (10.22)$$

transforms like a 6. This contains the highest weight state  $u^1 v^1$ . We have added the  $u^j v^i$  term to make it completely symmetric in the two upper indices, and thus irreducible. The lower index object

$$\epsilon_{k\ell m} u^\ell v^m \quad (10.23)$$

having only one lower index, transforms like a  $\bar{3}$ . Thus we have explicitly decomposed the tensor product into a sum of 6 and a  $\bar{3}$ . Not only does this show that

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \quad (10.24)$$

or

$$(1, 0) \otimes (1, 0) = (2, 0) \oplus (0, 1) \quad (10.25)$$

it shows us how to actually build wave functions with the required symmetry properties. Later, we will see how this makes some kinds of calculations easy.

Note also how as in (10.23) whenever a tensor with more than one upper index is not completely symmetric, we can trade two upper indices for one lower index using the  $\epsilon$  tensor.

Next, let's look at  $3 \otimes \bar{3}$ , a product of  $u^i$  (a 3) and  $v_j$  (a  $\bar{3}$ ). We can write

$$u^i v_j = \left( u^i v_j - \frac{1}{3} \delta_j^i u^k v_k \right) + \frac{1}{3} \delta_j^i u^k v_k \quad (10.26)$$

The first term in parentheses is traceless, and transforms like the 8, while the tensor with no indices,  $u^k v_k$ , transforms like the trivial representation, (0, 0), or 1. Thus

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (10.27)$$

or

$$(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0) \quad (10.28)$$



Notice the role of the invariant tensor,  $\delta_j^i$ . One way of understanding why only traceless tensors are irreducible is that if a tensor is not traceless, the  $\delta$  tensor can be used to construct a non-zero tensor with fewer indices, and thus explicitly reduce it.

One more example  $-u^i$  (a 3) times  $v_k^j$  (an 8).

$$\begin{aligned} u^i v_k^j = & \\ \frac{1}{2} \left( u^i v_k^j + u^j v_k^i - \frac{1}{4} \delta_k^i u^\ell v_\ell^j - \frac{1}{4} \delta_k^j u^\ell v_\ell^i \right) & \quad (10.29) \\ + \frac{1}{4} \epsilon^{ij\ell} (\epsilon_{\ell mn} u^m v_k^n + \epsilon_{kmn} u^m v_\ell^n) & \\ + \frac{1}{8} (3\delta_k^i u^\ell v_\ell^j - \delta_k^j u^\ell v_\ell^i) & \end{aligned}$$

where the first term on the right hand side is a (2,1) (or 15 - it's 15 dimensional), the second term is a  $\bar{6}$ , and the last is a 3.

$$3 \otimes 8 = 15 \oplus \bar{6} \oplus 3 \quad (10.30)$$

or

$$(1,0) \otimes (1,1) = (2,1) \oplus (0,2) \oplus (1,0) \quad (10.31)$$

### 15.11.6 10.6 Triality

Notice that  $(n - m) \bmod 3$  is conserved in these tensor product decompositions. This is true because the invariant tensors all have  $(n - m) \bmod 3 = 0$ , so there is no way to change this quantity. It is called triality.

### 15.11.7 10.7 Matrix elements and operators

The bra state  $\langle v|$  is

$$\langle v| = v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} * \langle i_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} | \quad (10.32)$$

The bra transforms under the algebra with an extra minus sign. For example, the triplet  $\langle i|$  transforms as

$$-\langle i| T_a = -\langle i| T_a |j\rangle \langle j| = -[T_a]_j^i \langle j| \quad (10.33)$$

In words, this says that the bra with a lower index transforms as if it had an upper index. This is because of the complex conjugation involved in going from a bra to a ket. Similarly, the bra with an upper index transforms as if it has a lower index. This suggests that we define the tensor corresponding to a bra state with the upper and lower indices interchanged so that the contraction of indices works in (10.33). Thus we say that the tensor components of the bra tensor  $\langle v|$  are

$$\bar{v}_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \equiv v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} * \quad (10.34)$$

so that (10.32) becomes

$$\langle v| = \bar{v}_{j_1 \dots j_n \dots i_m}^{i_1} \langle j_1 \dots j_n \dots \quad (10.35)$$

Then when the state  $\langle v|$  is transformed by  $-\langle v| T_a$ , the tensor  $\bar{v}$  is transformed by  $T_a \bar{v}$ .

For example, consider the matrix element

$$\begin{aligned}
 \langle u|v \rangle &= \bar{u}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{k_1 \dots k_m} v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} \left\langle \left\langle \ell_1 \dots \ell_n k_1 \dots k_m \right|_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \right\rangle \\
 &= \bar{u}_{\ell_1 \dots \ell_n}^{k_1 \dots k_m} v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_m}^{i_m} \delta_{j_1}^{\ell_1} \dots \delta_{j_n}^{\ell_n} \\
 &= \bar{u}_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}
 \end{aligned} \tag{10.36}$$

The indices are all repeated and summed over (contracted for short), which they must be because the matrix element is invariant.

### 15.11.8 10.8 Normalization

A corollary to (10.36) is that if the state  $|v\rangle$  is normalized, satisfying  $\langle v|v\rangle = 1$ , then the tensor components must satisfy a normalization condition

$$\sum_{\substack{i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n}} |v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}|^2 = 1 \tag{10.37}$$

For example, the tensor  $v_H$  in (10.15) satisfies (10.37), because only a single term contributes in the sum. But a tensor of the form

$$N (2\delta_1^j \delta_k^1 - \delta_2^j \delta_k^2 - \delta_3^j \delta_k^3) \tag{10.38}$$

describes a state with norm

$$|N|^2 \sum_{j,k} (2\delta_1^j \delta_k^1 - \delta_2^j \delta_k^2 - \delta_3^j \delta_k^3)^2 = |N|^2 \left( \overbrace{4}^{j=k=1} + \overbrace{1}^{j=k=2} + \overbrace{1}^{j=k=3} \right) = 6|N|^2$$

### 15.11.9 10.9 Tensor operators

We can extend the concept of tensors to include the coefficients of tensor operators in an obvious way. For example, if a set of operators,  $O$ , transform according to the  $(n, m)$  representation of  $SU(3)$ , we can form the general linear combination

$$W = w_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} O_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \tag{10.40}$$

then if  $W$  transforms by commutation with the generators, the coefficients,  $w_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$ , transform like  $(n, m)$ , (10.13).

### 15.11.10 10.10 The dimension of $(n, m)$

A very simple application of tensor methods is the calculation of the dimension of the irreducible representation  $(n, m)$ . The dimension of the representation is the number of independent components in the tensor. We know that the tensor has  $n$  upper and  $m$  lower indices, and is separately symmetric in each. The number of independent components of a object symmetric in  $n$  indices each of which run from 1 to 3 is equal to the number of way of separating  $n$  identical objects with two identical partitions - which is

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)!}{n!2!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \tag{10.41}$$

Thus if there were no other constraint, the number of independent coefficients would be

$$B(n, m) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \frac{(m+2)(m+1)}{2} \quad (10.42)$$

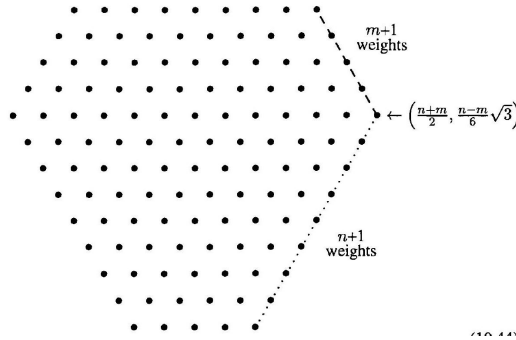
However, the tensor is also required to be traceless. This says that the object we get by taking the trace vanishes, and it is symmetric in  $n-1$  upper indices and  $m-1$  lower indices. Thus this imposes  $B(n-1, m-1)$  constraints, so the total is

$$\begin{aligned} D(n, m) &= B(n, m) - B(n-1, m-1) \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \frac{(m+2)(m+1)}{2} \\ &\quad - \frac{(n+1)n}{2} \frac{(m+1)m}{2} \\ &= \frac{(n+1)(m+1)[(n+2)(m+2) - nm]}{4} \\ &= \frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2} \end{aligned} \quad (10.43)$$

You can check that this formula works for the small irreducible representations that we have discussed.

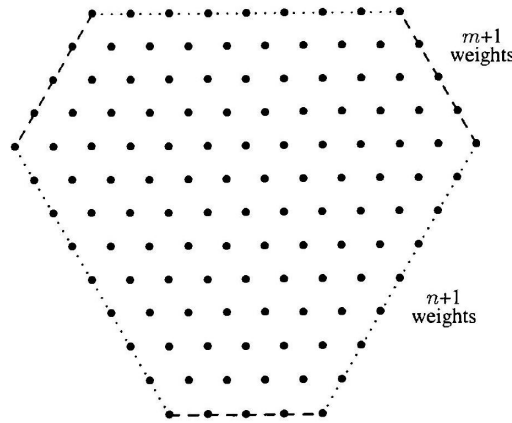
### 15.11.11 10.11 \* The weights of $(n, m)$

We can now put together various pieces of what we know about the irreducible representation  $(n, m)$  of  $SU(3)$ . A general irreducible representation of  $SU(3)$ ,  $(n, m)$ , has the form of a hexagon, illustrated below for  $n = 8$  and  $m = 4$ .



The highest weight is marked with the arrow. The weights along the dotted line can be reached from the highest weight by repeated application of the lowering operator  $E_{-\alpha^1}$ . Thus counting the highest weight, there are  $n+1$  weights along the dotted side of the hexagon. The weights along the dashed line can be reached from the highest weight by repeated application of the lowering operator  $E_{-\alpha^2}$ . Thus counting the highest weight, there are  $m+1$  weights along the dashed side of the hexagon. If either  $n$  or  $m$  is 0, the hexagon degenerates into a triangle.

The Weyl reflection symmetries guarantee that the hexagon is symmetrical. Thus the three dashed sides are equivalent in the diagram below, as are the three dotted sides.

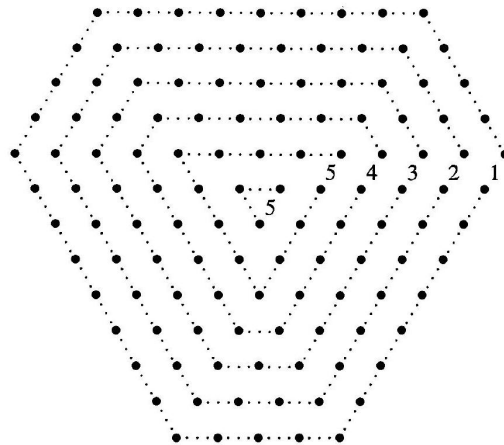


The dashed and dotted sides together make up an outer layer of weights, all of which correspond to unique states in the irreducible representation because they are equivalent by Weyl reflection to states that can be reached uniquely by simple lowering operators from the highest weight. Obviously, we can define a next layer of weights by considering the hexagon immediately inside this one, and we can continue this process until each weight is assigned to a "layer".

We will now show how to prove the following result:

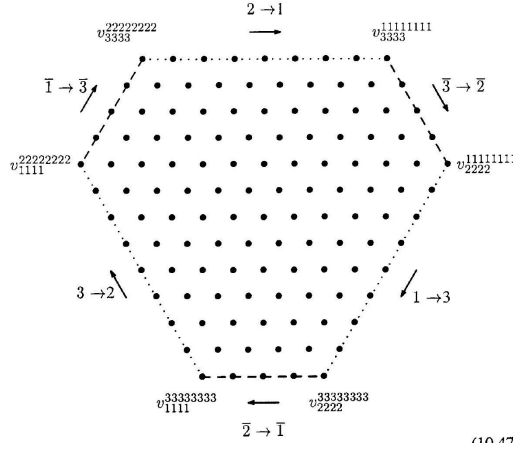
**Theorem 10.10** As you go in from one layer to the next, the degeneracy of the weight space for states in the layer increases by one each time, until you get to a triangular layer. From then on, the degeneracy remains constant.

Theorem 10.10 implies that the degeneracies of the layers in our example are as shown in the following figure.



We will prove theorem 10.10 by counting the independent components of the tensors which represent these states. So we must first understand in detail how to go from weights to tensor components. We begin by considering tensors without the constraint of tracelessness. Such a tensor is simply the most general object completely symmetric in its upper and lower indices. We will then use the strategy of the previous section (on the dimension of  $(n, m)$ ) to deal with the trace constraint. The advantage of this, as we saw above, is that it is easy to count the independent states because the tensor components are completely determined by the number of upper and lower components of each value. Now consider a tensor symmetric in  $n$  upper indices and in  $m$  lower indices. This corresponds to a reducible  $SU(3)$  representation, but it contains the general irreducible representation  $(n, m)$  that we wish to study. The weight diagram for this reducible representation will be the same as (10.44), but the degeneracies of the states corresponding to each weight may be different (and larger). The outer layer, however, is nondegenerate even for this more general tensor, because it contains no tensor components

which have the same value of any upper and lower index, so there is no trace constraint. As we go around this outer layer, along each side, one index changes to another as illustrated in the following figure (where  $\bar{j}$  indicates a lower  $j$  index).



To deal with the inner layers, we first need to understand the connection between the tensor components and the weights. Consider a particular component of the general tensor with  $n$  upper and  $m$  lower indices. We will assume, for convenience that  $n \geq m$  (as is the case for the example in the figures). This is not a serious restriction, because if it is not true for a representation, then it is true for the complex conjugate representation obtained by changing the signs of all the weights (with all degeneracies remaining unchanged). Thus if we understand the representations for  $n \geq m$ , we actually understand them all. Define  $z(j)$  to be the number of upper components with the value  $j$ , and  $\bar{z}(j)$  to be the number of lower components with the value  $j$ . Thus for example, for the highest weight of our tensor,  $z(1) = n$ ,  $\bar{z}(2) = m$ , and the others are all zero. Note that the three quantities

$$z(1) - \bar{z}(1), \quad z(2) - \bar{z}(2), \quad z(3) - \bar{z}(3) \quad (10.48)$$

are determined by the weight associated with the component and the value of  $n - m$ . By straightforward calculation, the 1-component of the weight vector satisfies

$$\mu_1 = \frac{1}{2}[z(1) - \bar{z}(1)] - \frac{1}{2}[z(2) - \bar{z}(2)] \quad (10.49)$$

The 2-component of the weight vector satisfies

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}[z(1) - \bar{z}(1)] + \frac{\sqrt{3}}{6}[z(2) - \bar{z}(2)] - \frac{\sqrt{3}}{3}[z(3) - \bar{z}(3)] \quad (10.50)$$

And  $n - m$  satisfies

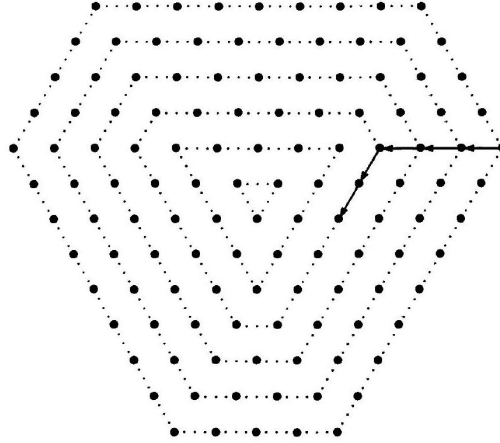
$$n - m = [z(1) - \bar{z}(1)] + [z(2) - \bar{z}(2)] + [z(3) - \bar{z}(3)] \quad (10.51)$$

Thus

$$\begin{aligned} z(1) - \bar{z}(1) &= \frac{1}{6} [6\mu_1 + 2\sqrt{3}\mu_2 + 2(n - m)] \\ z(2) - \bar{z}(2) &= \frac{1}{6} [-6\mu_1 + 2\sqrt{3}\mu_2 + 2(n - m)] \\ z(3) - \bar{z}(3) &= \frac{1}{3} [(n - m) - 2\sqrt{3}\mu_2] \end{aligned} \quad (10.52)$$

Actually, rather than using (10.52), it will be easier just to follow what is happening to the  $z(j) - \bar{z}(j)$  by thinking about what happens to the indices as you move around the weight diagram, but the important point is that these differences of upper and lower indices are all fixed.

Now suppose that we move into the  $k$ -th inner layer by taking  $k$  steps to the left. Assume that  $k < m$  so we are still in a hexagonal layer (the number of weights along the upper-right-hand edge of the layer decreases by one for each increase in  $k$ , thus  $k = m$  is the corner of the first triangular layer - we will come back to this later). Then take  $j$  steps down to a weight on the  $k$ -th inner layer, as shown below (for  $k = 3$  and  $j = 2$ ):



As we move in horizontally, in each step either  $1 \rightarrow 2$ , or  $\bar{2} \rightarrow \bar{1}$ , or  $1 \rightarrow 3$  and  $\bar{2} \rightarrow \bar{3}$  (see (10.47), and thus  $z(1) - \bar{z}(1)$  is decreased by one and  $z(2) - \bar{z}(2)$  is increased by one. Similarly, as we go down the  $k$ th layer, at each step  $z(1) - \bar{z}(1)$  is decreased by one and  $z(3) - \bar{z}(3)$  is increased by one. And thus

$$\begin{aligned} z(1) - \bar{z}(1) &= n - k - j \\ z(2) - \bar{z}(2) &= -(m - k) \\ z(3) - \bar{z}(3) &= j \end{aligned} \tag{10.54}$$

Now we can count the number of components. (10.54) implies that the tensor component can be written with

$$n - k - j \text{ } 1 \text{ s, } m - k \text{ } \bar{2} \text{ s, } j \text{ } 3 \text{ s, and } k \text{ } j - \bar{j} \text{ pairs, where} \tag{10.55}$$

$j$  is 1, 2 or 3.

The  $j - \bar{j}$  pairs do not contribute to the  $z(j) - \bar{z}(j)$  values - they do not affect the weight, but they give different independent tensor components. Thus the number of ways we can get this weight is the number of different ways we can choose these  $k$  pairs, which is

$$\binom{k+2}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} \tag{10.56}$$

Note that it only depends on  $k$  - that is it only depends on the layer, not on where we are in the layer. It is easy to see that this is also true for the weights above the horizontal. The argument is similar and we leave it as an exercise for the reader. (10.56) is the number of independent components for the general tensor with  $n$  upper and  $m$  lower components. The number of components in the traceless tensor is this minus the number of independent

components of the same weight in the trace. The trace is a general tensor with  $n - 1$  upper and  $m - 1$  lower indices. It's highest weight is one step to the left of the highest weight of  $(n, m)$ . From the highest weight of this tensor, it takes only  $k - 1$  steps to get to the same weight. Thus the number of components of the trace is (10.56) for  $k \rightarrow k - 1$ , and the number of independent components of the traceless tensor is

$$\binom{k+2}{2} - \binom{k+1}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} - \frac{(k+1)k}{2} = k + 1 \quad (10.57)$$

This simply implies that the degeneracy increases by one each time we move in a layer, in agreement with theorem 10.10.

This analysis remains valid in to  $k = m$ . But when  $k > m$ , that is after the first triangular layer, (10.55) doesn't make sense because the number of  $\bar{2}$  s cannot be negative. Instead, the component must look like

$$n - k - j \text{ 1 s, } k - m \text{ 2 s, } j \text{ 3 s, and } mj - \bar{j} \text{ pairs,} \quad (10.58)$$

where  $j$  is 1, 2 or 3.

Thus from this layer on,  $m$  plays the role of  $k$ , and the degeneracy remains at  $m + 1$  the rest of the way in. This completes the proof of theorem 10.10.

### 15.11.12 10.12 Generalization of Wigner-Eckart

Consider a matrix element of a tensor operator between tensor states

$$\langle u | W | v \rangle \quad (10.59)$$

This is really a shorthand for a very large number of possible matrix elements, because each representation may have many independent components (the number being just the dimension of the representation). Suppose that the representations of  $v, u$  and  $W$  are irreducible. Then we expect that the symmetry will ensure that there are relations among the various possible matrix elements. For example, if these were  $SU(2)$  tensor operators, we know that all the matrix elements would be determined in terms of a single number. To determine the consequences of the symmetry in this case, we imagine decomposing the state  $W|v\rangle$  into irreducible representations. Then we

know there can be no contribution to the matrix element except from representations that transform under the same irreducible representation as  $u$ . This follows from Shur's lemma. Also because of Shur's lemma, the contribution from each appearance of the representation of  $u$  is determined by a single unknown number, because the matrix element is proportional to the identity in the space of the  $u$  representation. Thus there will be one (and only one) unknown constant in the matrix element for each time the representation of  $u$  appears in the tensor product  $W \otimes v$ . However, there is an important difference between this and the case of  $SU(2)$ . Here  $u$  may appear more than once in the decomposition of  $W|v\rangle$ .

Tensor analysis will make it relatively easy to write an expression for the matrix element, (10.59), that automatically incorporates all of the constraints that follow from the symmetry. Because of (10.9), (10.35), and (10.40), the matrix element will be proportional to the tensor components of  $|v\rangle$

$$v_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \quad (10.60)$$

and of  $W$

$$W_{\ell_1 \dots \ell_b}^{k_1 \dots k_a} \quad (10.61)$$

and proportional to the conjugate components of  $\langle u|$

$$\bar{u}_{j'_1 \dots j'_{m'}}^{i'_1 \dots i'_{n'}} \quad (10.62)$$

The entire matrix element must be invariant. Which means that the answer for the matrix element must have all the indices either contracted with each other or with invariant tensors (that is  $\delta$ s and  $\epsilon$ S). Another way to say the same thing is that the matrix element

$$\left\langle \begin{matrix} i'_1 \dots i'_{n'} \\ j'_1 \dots j'_{m'} \end{matrix} \middle| O_{\ell_1 \dots \ell_b}^{k_1 \dots k_a} \middle| \begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ i_1 \dots i_n \end{matrix} \right\rangle \quad (10.63)$$

$$= \Gamma_{i_1 \dots i_n k_1 \dots k_a i'_1 \dots i'_{n'}}^{\ell_1 \dots \ell_b j_1 \dots j_m j'_1 \dots j'_{m'}}$$

must itself be an invariant tensor - a sum of terms made of  $\delta$ s and  $\epsilon$ S.

Here is an example that will be of some interest later. Suppose that  $u, W$  and  $v$  are all 8 s. This is particularly easy to analyze, because  $\bar{u}, W$  and  $v$  can all be thought of as matrices, with the upper index referring to the row, and the lower index to the column. Then, for example,

$$W_j^i v_k^j = [Wv]_k^i \quad (10.64)$$

Now a term with all indices contracted is one in which the matrices are combined into a number by matrix multiplication, and taking traces. There are precisely two such terms:

$$\text{Tr}(\bar{u}Wv) \text{ and } \text{Tr}(\bar{u}vW) \quad (10.65)$$

There are two terms because the tensor product  $8 \otimes 8$  contains 8 twice. Thus in this case the matrix element is

$$\lambda_1 \text{Tr}(\bar{u}Wv) + \lambda_2 \text{Tr}(\bar{u}vW) \quad (10.66)$$

where  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are constants that must be fixed by the physics, rather than the group theory (like the reduced matrix elements in the Wigner-Eckart theorem for  $SU(2)$ ). This means that all  $8^3 = 512$  matrix elements are determined in terms of these two parameters! Furthermore, we know how all the matrix elements are related simply by matrix multiplication, without any fancy tables or whatnot.

Here's another example - suppose  $u$  and  $v$  are 10 s, and  $W$  is an 8. The matrix element will be proportional to the tensor components of  $|v\rangle$

$$v^{i_1 i_2 i_3} \quad (10.67)$$

and of  $W$

$$W_\ell^k \quad (10.68)$$

and proportional to the conjugate components of  $\langle u|$

$$\bar{u}_{j_1 j_2 j_3} \quad (10.69)$$

In this case, it is easy to see that there is only one way to put the indices together (because of the total symmetry of  $\bar{u}$  and  $v$ )



$$\bar{u}_{i_1 i_2 k} W_\ell^k v^{i_1 i_2 \ell} \quad (10.70)$$

Thus the matrix element is determined by a single reduced matrix element

$$\langle u | W | v \rangle = \lambda_1 \bar{u}_{i_1 i_2 k} W_\ell^k v^{i_1 i_2 \ell} \quad (10.71)$$

### 15.11.13 10.13 \* Tensors for $SU(2)$

You may be wondering why we have spent so much time on the description of tensors for  $SU(3)$ , while we barely mentioned them for  $SU(2)$ . The answer to this question is really more history and sociology than it is math or physics. The description of irreducible  $SU(2)$  representations in terms of tensors is simply not used very much, perhaps because it is not needed. Everyone knows how to deal with the  $SU(2)$  irreducible representations in other ways. Nevertheless, tensor analysis is useful for  $SU(2)$ , and it may be instructive to see how it works.

Tensor analysis for  $SU(2)$  is even simpler than for  $SU(3)$  because there is only one fundamental representation for  $SU(2)$  - the doublet. Thus we can look only at tensors with upper indices, and there is no trace constraint. The  $\epsilon$  symbol now has two indices, rather than three in  $SU(3)$ . So while we could use the invariant  $\epsilon$  tensor to lower two upper indices in  $SU(3)$ , in  $SU(2)$ , the  $\epsilon$  just eats two upper indices completely. This implies that the irreducible representations correspond to completely symmetric tensors, because if a tensor with  $n$  indices is not completely symmetric, then we can get a non-zero tensor with  $n - 2$  indices by contracting two indices with  $\epsilon$ , and that would reduce the representation. Obviously, the completely symmetric tensor with  $n$  indices corresponds to the irreducible spin- $n/2$  representation, because the highest weight state, in which all the indices are 1, has  $J_3 = n/2$ .

Because the  $SU(2)$  irreducible representations correspond to such simple tensors, we can write them down explicitly. Consider the tensor with  $2s$  indices, corresponding to the spin- $s$  representation, and let us pick out the component with  $J_3 = m$ . Because each 1 index carries  $J_3 = 1/2$  and each 2 index carries  $J_3 = -1/2$ , the  $J_3 = m$  state must correspond to a tensor with  $s + m$  1s and  $s - m$  2s. Let us define the tensor

$$v_{s,m}^{j_1 \dots j_{2s}} \quad (10.72)$$

to be a completely symmetric tensor which is equal to 1 if  $s + m$  indices are 1 and zero otherwise. There are

$$\binom{2s}{s+m} = \frac{(2s)!}{(s+m)!(s-m)!} \quad (10.73)$$

ways to pick the  $s + m$  1s out of the  $2s$  indices. Thus  $v_{s,m}$  is a sum of  $\binom{2s}{s+m}$  terms. For example,

$$v_{3/2,1/2}^{j_1 j_2 j_3} = \delta_1^{j_1} \delta_1^{j_2} \delta_2^{j_3} + \delta_1^{j_1} \delta_2^{j_2} \delta_1^{j_3} + \delta_2^{j_1} \delta_1^{j_2} \delta_1^{j_3} \quad (10.74)$$

The state  $|v_{s,m}\rangle$  is not properly normalized. The squared norm gets a contribution 1 from each of the  $\binom{2s}{s+m}$  terms in (10.72). Thus the properly normalized state is

$$|s, m\rangle = \left( \binom{2s}{s+m} \right)^{-1/2} |v_{s,m}\rangle \quad (10.75)$$

It is easy to check that this definition behaves properly under the  $SU(2)$  raising and lowering operators. We will next illustrate its use.

### 15.11.14 10.14 \* Clebsch-Gordan coefficients from tensors

Consider the product

$$v_{s_1, m_1}^{i_1 \dots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2, m_2}^{j_1 \dots j_{2s_2}} \quad (10.76)$$

From the general properties of tensors, we know that it transforms like a component in the tensor product of  $s_1$  and  $s_2$ . The corresponding normalized state is easy to write down, because (10.76) is simply a product:

$$|s_1, s_2, m_1, m_2\rangle = \left( \begin{matrix} 2s_1 \\ s_1 + m_1 \end{matrix} \right)^{-1/2} \left( \begin{matrix} 2s_2 \\ s_2 + m_2 \end{matrix} \right)^{-1/2} |v_{s_1, m_1} \cdot v_{s_2, m_2}\rangle \quad (10.77)$$

The tensor product (10.76) lives in the space of tensors which are symmetric in the  $2s_1 i$  indices and separately symmetric in the  $2s_2 j$  indices. What we would like to do is to decompose this tensor product space into subspaces that transform irreducibly under  $SU(2)$ . We can do this by combining tensors corresponding to the various spin states in  $s_1 \otimes s_2$  with invariant tensors to produce tensors with the appropriate symmetry properties.

The simplest example of this is spin  $s_1 + s_2$ . We know that we can write the states of spin  $s_1 + s_2$  in terms of a completely symmetric tensor with  $2s_1 + 2s_2$  indices,

$$|s_1 + s_2, m_1 + m_2\rangle = \left( \begin{matrix} 2s_1 + 2s_2 \\ s_1 + s_2 + m_1 + m_2 \end{matrix} \right)^{-1/2} |v_{s_1 + s_2, m_1 + m_2}\rangle \quad (10.78)$$

Since  $v_{s_1 + s_2, m_1 + m_2}$  is completely symmetric, it is symmetric in its first  $2s_1$  and its last  $2s_2$  indices, and is thus in the same space as the tensor product, (10.76). The scalar product of the two states, (10.77) and (10.78) is the answer to the question "What is the amplitude to find the state of spin  $s_1 + s_2$  in the tensor product state?" In other words, it is the Clebsch-Gordan coefficient,

$$\langle s_1 + s_2, m_1 + m_2 | s_1, s_2, m_1, m_2 \rangle \quad (10.79)$$

But we can also easily calculate the matrix element directly from the definitions because

$$\begin{aligned} & \langle v_{s_1 + s_2, m_1 + m_2} | v_{s_1, m_1} \cdot v_{s_2, m_2} \rangle \\ &= \sum_{\substack{i_1 \dots i_{2s_1} \\ j_1 \dots j_{2s_2}}} \left( v_{s_1 + s_2, m_1 + m_2} \right)^* v_{s_1, m_1}^{i_1 \dots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2, m_2}^{j_1 \dots j_{2s_2}} \end{aligned} \quad (10.80)$$

The complex conjugation is unnecessary, because the tensors are real. The sum looks formidable, but actually it is easy to do. Each configuration of 1s and 2s for the tensors on the right-hand-side will correspond to some configuration for  $v_{2s_1 + 2s_2}$ , which contains all possible configurations with the right total number of 1s and 2s. Thus the sum in (10.80) gives

$$\left( \begin{matrix} 2s_1 \\ s_1 + m_1 \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 2s_2 \\ s_2 + m_2 \end{matrix} \right) \quad (10.81)$$

and the result for the Clebsch-Gordan coefficient is

$$\begin{aligned} & \langle s_1 + s_2, m_1 + m_2 | s_1, s_2, m_1, m_2 \rangle \\ &= \left( \begin{matrix} 2s_1 \\ s_1 + m_1 \end{matrix} \right)^{1/2} \left( \begin{matrix} 2s_2 \\ s_2 + m_2 \end{matrix} \right)^{1/2} \left( \begin{matrix} 2s_1 + 2s_2 \\ s_1 + s_2 + m_1 + m_2 \end{matrix} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (10.82)$$

You can check in special cases that this is right using raising and lowering operators, but tensors gave us the general result rather easily.

**15.11.15 10.15\*Spin  $s_1 + s_2 - 1$** 

The component of the tensor product, (10.77), in spin  $s_1 + s_2 - 1$  will be proportional to the tensor  $v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}$ . To compute the Clebsch-Gordan coefficient, we must find the normalized state proportional to this tensor in the space of the tensor product tensor, (10.76). That is, we must construct a tensor proportional to  $v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}$ , but with  $2s_1 + 2s_2$  indices and symmetric in the first  $2s_1$  indices, and the last  $2s_2$  indices. To add two indices, we need the invariant tensor  $\epsilon^{ij}$ . Thus we can form the tensor

$$\epsilon^{i_1 j_1} v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}^{i_2 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}} \quad (10.83)$$

Now we have to symmetrize in the  $i$  indices and symmetrize in the  $j$  indices. Let us call the symmetrized tensor

$$\mathcal{V}_{s_1+s_2-1, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}}$$

Each term in  $\mathcal{V}$  has a single  $\epsilon^{i_r j_s}$  multiplied by  $v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}$  with all the other indices. There are  $4s_1 s_2$  terms in  $\mathcal{V}$ , corresponding to the  $2s_1$  possible values of  $r$  and the  $2s_2$  values of  $s$ .

The tensor  $\mathcal{V}$  is not properly normalized. Call the normalization factor  $N$ . Then the Clebsch-Gordan coefficient is

$$\begin{aligned} & \langle s_1 + s_2 - 1, m_1 + m_2 | s_1, s_2, m_1, m_2 \rangle \\ &= N \binom{2s_1}{s_1 + m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2 + m_2}^{-1/2} \\ & \sum_{\substack{i_1 \dots i_{2s_1} \\ j_1 \dots j_{2s_2}}} \left( \mathcal{V}_{s_1+s_2-1, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}} \right)^* v_{s_1, m_1}^{i_1 \dots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2, m_2}^{j_1 \dots j_{2s_2}} \end{aligned} \quad (10.85)$$

The sum in (10.85) is easy to simplify because each of the  $4s_1 s_2$  terms in  $\mathcal{V}$  gives the same result. This is true because these terms were constructed by symmetrizing in the  $i$  and  $j$  indices, but the tensor product is already symmetric in the  $i$  and  $j$  indices. And as before, the complex conjugation is irrelevant. Thus we can rewrite (10.85) as

$$\begin{aligned} & \langle s_1 + s_2 - 1, m_1 + m_2 | s_1, s_2, m_1, m_2 \rangle \\ &= N \binom{2s_1}{s_1 + m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2 + m_2}^{-1/2} 4s_1 s_2 \\ & \sum_{\substack{i_1 \dots i_{2s_1} \\ j_1 \dots j_{2s_2}}} \epsilon^{i_1 j_1} \cdot v_{s_1+s_2-j_2, m_1+m_2}^{i_2 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}} \cdot v_{s_1, m_1}^{i_1 \dots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2, m_2}^{j_1 \dots j_{2s_2}} \\ &= N \binom{2s_1}{s_1 + m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2 + m_2}^{-1/2} 4s_1 s_2 \\ & \cdot \left[ \binom{2s_1 - 1}{s_1 + m_1 - 1} \binom{2s_2 - 1}{s_2 + m_2} - \binom{2s_1 - 1}{s_1 + m_1} \binom{2s_2 - 1}{s_2 + m_2 - 1} \right] \end{aligned} \quad (10.86)$$

where the last line follows by simply expanding the two non-zero values of  $\epsilon^{i_1 j_1}$  in the sum to get

$$\sum_{\substack{i_2 \cdots i_{2s_1} \\ j_2 \cdots j_{2s_2}}} v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}^{i_2 \cdots i_2 j_2 \cdots j_{2s_2}} \cdot \left( v_{s_1, m_1}^{1i_2 \cdots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2, m_2}^{2j_2 \cdots j_{2s_2}} - v_{s_1, m_1}^{2i_2 \cdots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2, m_2}^{1j_2 \cdots j_{2s_2}} \right) \quad (10.87)$$

To calculate  $N$  in (10.85), note that we can expand one of the  $\mathcal{V}$  s, and each of the terms will give the same result because of the symmetry of the remaining  $\mathcal{V}$ , so

$$\begin{aligned} 1/N^2 &= \sum_{\substack{i_1 \cdots i_{2s_1} \\ j_1 \cdots j_{2s_2}}} \left| \mathcal{V}_{s_1+s_2-1, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \cdots i_{2s_1} j_1 \cdots j_{2s_2}} \right|^2 \\ &= 4s_1 s_2 \sum_{\substack{i_1 \cdots i_{2s_1} \\ j_1 \cdots j_{2s_2}}} \epsilon^{i_1 j_1} v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}^{i_2 \cdots i_{2s_1} j_2 \cdots j_{2s_2}} \mathcal{V}_{s_1+s_2-1, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \cdots i_{2s_1} j_1 \cdots j_{2s_2}} \end{aligned} \quad (10.88)$$

Now we can do the sum over  $i_1$  and  $j_1$  in (10.88) by expanding  $\mathcal{V}$ . What makes this doable is the fact that

$$\sum_{i_1, j_1} \epsilon^{i_1 j_1} \mathcal{V}_{s_1+s_2-1, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \cdots i_{2s_1} j_1 \cdots j_{2s_2}} = C v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}^{i_2 \cdots i_{2s_1} j_2 \cdots j_{2s_2}} \quad (10.89)$$

for some constant  $C$ , so that

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1 \cdots i_{2s_1}} \epsilon^{i_1 j_1} v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}^{i_2 \cdots i_{2s_1} j_2 \cdots j_{2s_2}} \mathcal{V}_{s_1+s_2-1, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \cdots i_{2s_1} j_1 \cdots j_{2s_2}} \\ &= C \sum_{\substack{i_2 \cdots i_{2s_1} \\ j_2 \cdots j_{2s_2}}} \left| v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}^{j_1 \cdots j_2 \cdots s_2 j_2 j_2 \cdots j_{2s_2}} \right|^2 = C \binom{2s_1 + 2s_2 - 2}{s_1 + s_2 - 1 + m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (10.90)$$

To compute  $C$ , note that the term in  $\mathcal{V}$  proportional to  $\epsilon^{i_1 j_1}$  gives a factor of 2 because

$$\sum_{i_1, j_1} |\epsilon^{i_1 j_1}|^2 = 2 \quad (10.91)$$

The terms proportional to  $\epsilon^{i_1 j_m}$  for  $m \neq 1$  give 1 each because

$$\sum_{i_1} \epsilon^{i_1 j_1} \epsilon^{i_1 j_m} = \delta^{j_1 j_m} \quad (10.92)$$

The sum over  $j_1$  then simply reproduces  $v_{s_1+s_2-1, m_1+m_2}^{i_2 \cdots i_{2s_1} j_2 \cdots j_{2s_2}}$ . Since there are  $2s_2 - 1$  possible values for  $j_m$ , such terms give  $2s_2 - 1$  total contribution to  $C$ . The terms proportional to  $\epsilon^{i_m j_1}$  for  $m \neq 1$  contribute another  $2s_1 - 1$ . The other terms contribute nothing. Thus  $C = (2 + 2s_1 - 1 + 2s_2 - 1) = 2s_1 + 2s_2$ , and

$$1/N^2 = 4s_1 s_2 (2s_1 + 2s_2) \binom{2s_1 + 2s_2 - 2}{s_1 + s_2 - 1 + m_1 + m_2} \quad (10.93)$$

and putting all this together gives

$$\begin{aligned} &\langle s_1 + s_2 - 1, m_1 + m_2 | s_1, s_2, m_1, m_2 \rangle \\ &= \binom{2s_1}{s_1 + m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2 + m_2}^{-1/2} \\ &\cdot \left( \binom{2s_1 + 2s_2 - 2}{s_1 + s_2 - 1 + m_1 + m_2} \right)^{-1/2} \left( \frac{2s_1 s_2}{\binom{s_1 + s_2}{2s_1 - 1} \binom{s_2 + m_2}{s_1 + m_1}} \right)^{1/2} \\ &\cdot \left[ \binom{s_1 + s_2 - 1 + m_1 + m_2}{s_1 + m_1 - 1} \binom{2s_2 - 1}{s_2 + m_2} - \binom{s_1 + s_2}{2s_1 - 1} \binom{2s_2 - 1}{s_2 + m_2 - 1} \right] \end{aligned}$$

**15.11.16 10.16\* Spin  $s_1 + s_2 - k$** 

The analysis of the general case is similar to that in the previous section. The total spin can be written as  $s_1 + s_2 - k$  for  $k$  between 0 and  $|s_1 - s_2|$ . The component of the tensor product, (10.77), in spin  $s_1 + s_2 - k$  is proportional to the tensor  $v_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}$ . To compute the Clebsch-Gordan coefficient, we must find the normalized state proportional to this tensor in the space of the tensor product tensor, (10.76), so we must construct a tensor proportional to  $v_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}$ , but with  $2s_1 + 2s_2$  indices and symmetric in the first  $2s_1$  indices, and the last  $2s_2$  indices. For this, we need  $k$  invariant tensors  $\epsilon^{ij}$  to form the tensor

$$\epsilon^{i_1 j_1} \dots \epsilon^{i_k j_k} v_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \quad (10.95)$$

Now we symmetrize in the  $i$  indices and symmetrize in the  $j$  indices. The symmetrized tensor is

$$\mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}} \quad (10.96)$$

Each term in  $\mathcal{V}$  has  $k\epsilon^{ij s_j s_i}$  multiplied by  $v_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}$  with the other indices. We can count the number of terms in  $\mathcal{V}$  as follows. The  $i$  index in the first  $\epsilon$  can have any of  $2s_1$  values, and the  $k$  index any of  $2s_2$  values. Then the  $i$  index in the second  $\epsilon$  can have any of  $2s_1 - 1$  values, and the  $k$  index any of  $2s_2 - 1$  values. And so on for  $k$  terms. However, this overcounts by a factor of  $k!$ , because the order of the  $\epsilon$ s doesn't matter. Thus the number of terms is

$$\mu \equiv \frac{(2s_1)!}{(2s_1 - k)!} \frac{(2s_2)!}{(2s_2 - k)!} \frac{1}{k!} \quad (10.97)$$

Again, let  $N$  be the normalization factor required to properly normalize the tensor  $\mathcal{V}$ . Then the Clebsch-Gordan coefficient is

$$\begin{aligned} & \langle s_1 + s_2 - k, m_1 + m_2 | s_1, s_2, m_1, m_2 \rangle \\ &= N \binom{2s_1}{s_1 + m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2 + m_2}^{-1/2} \\ & \sum_{\substack{i_1 \dots i_{2s_1} \\ j_1 \dots j_{2s_2}}} (\mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \dots i_{2s_1}})^* v_{s_1, m_1}^{i_1 \dots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2, m_2}^{j_1 \dots j_{2s_2}} \end{aligned} \quad (10.98)$$

As above, the sum in (10.98) can be simplified because each of the  $\mu$  terms in  $\mathcal{V}$  gives the same result. The complex conjugation is irrelevant as usual.

Thus we can rewrite (10.98) as

$$\begin{aligned} & \langle s_1 + s_2 - k, m_1 + m_2 | s_1, s_2, m_1, m_2 \rangle \\ &= N \binom{2s_1}{s_1 + m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2 + m_2}^{-1/2} \mu \\ & \sum_{\substack{i_1 \dots i_{2s_1} \\ j_1 \dots j_{2s_2}}} \epsilon^{i_1 j_1} \dots \epsilon^{i_k j_k} \cdot v_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \cdot v_{s_1, m_1}^{i_1 \dots i_{2s_1}} \cdot v_{s_2, m_2}^{j_1 \dots j_{2s_2}} \\ &= N \binom{2s_1}{s_1 + m_1}^{-1/2} \binom{2s_2}{s_2 + m_2}^{-1/2} \mu \\ & \cdot \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell \binom{k}{\ell} \binom{2s_1 - k}{s_1 + m_1 - k + \ell} \binom{2s_2 - k}{s_2 + m_2 - \ell} \end{aligned} \quad (10.99)$$

where in the last line we have expanded all the  $\epsilon$ s.

To calculate  $N$  in (10.98), note that

$$\begin{aligned} 1/N^2 &= \sum_{\substack{i_1 \dots i_{2s_1} \\ j_1 \dots j_{2s_2}}} \left| \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}} \right|^2 \\ &= \mu \epsilon^{i_1 j_1} \dots \epsilon_k^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \mathcal{N}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}} \end{aligned} \quad (10.100)$$

Now, again, we can do the sum over  $i_1$  and  $j_1$  by expanding  $\mathcal{V}$ . The result will be proportional to  $\mathcal{V}$  with two fewer indices

$$\sum_{i_1, j_1} \epsilon^{i_1 j_1} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}} = C \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-1, 2s_2-1}^{i_2 \dots i_{2s_1} j_2 \dots j_{2s_2}} \quad (10.101)$$

because the sum over  $i_1$  and  $j_1$  doesn't affect the symmetry in the other indices. We can find the coefficient  $C$  in (10.101) by picking out all contributions to any single term in the expansion of the right-hand-side, for example,

$$\epsilon^{i_2 j_2} \dots \epsilon_k^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \quad (10.102)$$

We will now look at all terms in  $\mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}$  that contribute to the particular term (10.102) in  $\mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-1, 2s_2-1}$  and find their contributions to the coefficient  $C$ .

The term

$$\epsilon^{i_1 j_1} \epsilon^{i_2 j_2} \dots \epsilon_k^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \quad (10.103)$$

contributes 2.

Each of the  $2s_2 - k$  terms of the form

$$\epsilon^{i_1 j_m} \epsilon^{i_2 j_2} \dots \epsilon_k^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_1 j_{k+1} \dots j_{m-1} j_1 j_{m+1} \dots j_{2s_2}} \quad (10.104)$$

for  $m > k$  contributes 1.

Each of the  $2s_1 - k$  terms of the form

$$\epsilon^{i_m j_1} \epsilon^{i_2 j_2} \dots \epsilon_k^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{m-1} i_1 i_{m+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \quad (10.105)$$

for  $m > k$  contributes 1.

Each of the  $k - 1$  terms of the form

$$\epsilon^{i_1 j_m} \epsilon^{i_m j_1} \epsilon^{i_2 j_2} \dots \epsilon^{i_{m-1} j_{m-1}} \epsilon^{i_{m+1} j_{m+1}} \dots \epsilon_k^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{s_2} j_{k+1} \dots j_2} \quad (10.106)$$

for  $2 \leq m \leq k$  contributes 1.

Putting all this together gives  $C = (2s_1 + 2s_2 - k + 1)$  and thus

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1, j_1} \epsilon^{i_1 j_1} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}} \\ &= (2s_1 + 2s_2 - k + 1) \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-1, 2s_2-1}^{i_2 \dots i_{2s_1} j_2 \dots j_{2s_2}} \end{aligned} \quad (10.107)$$

Now we iterate the procedure, and do the sum over  $i_2$  and  $j_2$  in the same way, then  $i_3$  and  $j_3$  and so on. In general

$$\sum_{i_{p+1}, j_{p+1}} \epsilon^{i_{p+1} j_{p+1}} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-p, 2s_2-p}^{i_{p+1} \dots i_{2s_1} j_{p+1} \dots j_2} \quad (10.108)$$

$$= C_p \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-p-1, 2s_2-p-1}^{i_{p+2} \dots i_{2s_1}} j_{p+2} \dots j_{s_2}$$

where  $C_0 = C$  and

$$\mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-k, 2s_2-k}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{s_2}} = \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \quad (10.109)$$

As we did before for  $C_0$ , to calculate  $C_p$ , we can look at all contributions to a single term in the expansion of the right-hand-side, for example,

$$\epsilon^{i_{p+2} j_{p+2}} \dots \epsilon^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_2} \quad (10.110)$$

We will now look at all terms in  $\mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-p, 2s_2-p}$  that contribute to the particular term (10.110) in  $\mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1-p-1, 2s_2-p-1}$  and find their contributions to the coefficient  $C_p$ . The term

$$\epsilon^{i_{p+1} j_{p+1}} \epsilon^{i_{p+2} j_{p+2}} \dots \epsilon^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \quad (10.111)$$

contributes 2.

Each of the  $2s_2 - k$  terms of the form

$$\epsilon^{i_{p+1} j_m} \epsilon^{i_{p+2} j_{p+2}} \dots \epsilon^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{m-1} j_{p+1} j_{m+1} \dots j_{2s_2}} \quad (10.112)$$

for  $m > k$  contributes 1.

Each of the  $2s_1 - k$  terms of the form

$$\epsilon^{i_m j_{p+1}} \epsilon^{i_{p+2} j_{p+2}} \dots \epsilon^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{m-1} i_{p+1} i_{m+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \quad (10.113)$$

for  $m > k$  contributes 1.

Each of the  $k - p - 1$  terms of the form

$$\epsilon^{i_{p+1} j_m} \epsilon^{i_m j_{p+1}} \epsilon^{i_{p+2} j_{p+2}} \dots \epsilon^{i_{m-1} j_{m-1}} \epsilon^{i_{m+1} j_{m+1}} \dots \epsilon^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_1 j_2 \dots j_2} \quad (10.114)$$

for  $2 \leq m \leq k$  contributes 1.

Thus

$$C_p = 2s_1 + 2s_2 - k - p + 1 \quad (10.115)$$

and

$$\sum_{\substack{i_1 \dots i_{2s_1} \\ j_1 \dots j_{2s_2}}} \epsilon^{i_1 j_1} \dots \epsilon^{i_k j_k} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2, 2s_1, 2s_2}^{i_1 \dots i_{2s_1} j_1 \dots j_{2s_2}}$$

$$= \left( \prod_{p=0}^{k-1} C_p \right) \sum_{\substack{i_{k+1} \dots i_{2s_1} \\ j_{k+1} \dots j_{2s_2}}} \left| \mathcal{V}_{s_1+s_2-k, m_1+m_2}^{i_{k+1} \dots i_{2s_1} j_{k+1} \dots j_{2s_2}} \right|^2$$

$$= \frac{(2s_1 + 2s_2 - k + 1)!}{(2s_1 + 2s_2 - 2k + 1)!} \binom{2s_1 + 2s_2 - 2k}{s_1 + s_2 + k + m_1 + m_2} \quad (10.116)$$

and

$$1/N^2 = \mu \frac{(2s_1 + 2s_2 - k + 1)!}{(2s_1 + 2s_2 - 2k + 1)!} \binom{2s_1 + 2s_2 - 2}{s_1 + s_2 - 1 + m_1 + m_2} \quad (10.117)$$

Now we have all the pieces, and can put them together into the Clebsch-Gordan coefficient for  $|s_1 + s_2 - k, m_1 + m_2\rangle$  in  $|s_1, m_1\rangle \times |s_2, m_2\rangle$ ,

$$\begin{aligned} & \langle s_1 + s_2 - k, m_1 + m_2 | s_1, s_2, m_1, m_2 \rangle \\ &= \left[ \binom{2s_1 + 2s_2 - 2k}{s_1 + s_2 + m_1 + m_2 - k} \binom{2s_1}{s_1 + m_1} \binom{2s_2}{s_2 + m_2} \right]^{-1/2} \\ & \quad \cdot \left( \frac{(2s_1)!(2s_2)!}{k!} \right)^{1/2} \left( \frac{(2s_1 + 2s_2 - 2k + 1)!}{(2s_1 + 2s_2 - k + 1)!} \right)^{1/2} \\ &= \left[ \binom{2s_1 - k}{s_1 + s_2 + m_1 + m_2 - k} \binom{2s_2 - k}{s_2 + m_2 - \ell} \right] \\ & \quad \cdot \left[ \binom{2s_1}{s_1 + m_1} \binom{2s_2}{s_2 + m_2} \right]^{-1/2} \left( -1 s_2^\ell \binom{k}{k} \right)^{1/2} \left[ \binom{2s_1 + 2s_2 - k + 1}{k} \right]^{-1/2} \\ & \quad \cdot \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell \binom{k}{\ell} \binom{2s_1 - k}{s_1 + m_1 - k + \ell} \binom{2s_2 - k}{s_2 + m_2 - \ell} \end{aligned}$$

This relation is a bit complicated for humans to use, but it is easy to code it into a computer program that computes arbitrary Clebsch-Gordan coefficients, and it is nice example of the power of tensor methods.

## Problems

10.A. Decompose the product of tensor components  $u^i v^{jk}$  where  $v^{jk} = v^{kj}$  transforms like a 6 of  $SU(3)$ .

10.B. Find the matrix elements  $\langle u | T_a | v \rangle$  where  $T_a$  are the  $SU(3)$  generators and  $|u\rangle$  and  $|v\rangle$  are tensors in the adjoint representation of  $SU(3)$  with components  $u_j^i$  and  $v_j^i$ . Write the result in terms of the tensor components and the  $\lambda_a$  matrices of (7.4).

10.C. In the 6 of  $SU(3)$ , for each weight find the corresponding tensor component  $v^{ij}$ .

## \*10.D.

a. Use the  $SU(2)$  tensor methods described in this chapter to redo problem V.C.

b. Check equation (10.86) by using the highest weight procedure to find the state  $|3/2, 1/2\rangle$  in the tensor product of spin 3/2 states and spin 1 states and compare with the result from (10.86) for the Clebsch-Gordan coefficient

$$\langle 3/2, 1, 3/2, 1/2 | 1, 3/2, 0, 1/2 \rangle$$

\*10.E. Consider  $\pi P$  scattering, ignoring isospin breaking. There are three easily accessible processes (because it is hard to make  $\pi^0$  beams or neutron targets):

$$\begin{aligned} \pi^+ p &\rightarrow \pi^+ p \text{ with amplitude } A_{+p} = \langle \pi^+ p | H_I | \pi^+ p \rangle \\ \pi^- p &\rightarrow \pi^- p \text{ with amplitude } A_{-p} = \langle \pi^- p | H_I | \pi^- p \rangle \\ \pi^- p &\rightarrow \pi^0 n \text{ with amplitude } A_{0n} = \langle \pi^0 n | H_I | \pi^- p \rangle \end{aligned} \quad (1)$$



where  $H_I$  is the interaction Hamiltonian, which is approximately  $SU(3)$  invariant. If we describe the pion and nucleon wave functions in terms of  $SU(2)$  tensors,  $\pi^{jk} = \pi^{kj}$  for the pions and  $N^j$  for the nucleons, we can write the most general amplitude for this process as follows:

$$\langle \pi N | H_I | \pi N \rangle = A_1 \bar{\pi}_{jk} \bar{N}_\ell \pi^{jk} N^\ell + A_2 \bar{\pi}_{jk} \bar{N}_\ell \pi^{j\ell} N^k \quad (2)$$

a. Use (2) and the techniques described in the notes on tensor analysis for  $SU(2)$  to write the three scattering amplitudes in (1) in terms of  $A_1$  and  $A_2$  and find the relation among the three amplitudes in (1).

b. The scattering amplitudes in (1) can also be written in terms of  $I = 3/2$  and  $I = 1/2$  amplitudes by decomposing the  $\pi N$  states into irreducible  $I = 3/2$  and  $I = 1/2$  representations and using Schur's lemma. Find these amplitudes in terms of  $A_1$  and  $A_2$ .

Chapter 11

## 15.12 Hypercharge and Strangeness

Let's now go back to the 1950s to the discovery of strange particles. By this time, isospin was well established as an approximate symmetry of the strong interactions, broken by the weak and electromagnetic interactions. Experimenters began to notice a strange new class of particles which were produced in pairs in scattering of strongly interacting particles, and decayed much more slowly back into ordinary particles. It was eventually realized that a lot of the physics could be understood if there were an additive quantum number, called strangeness that was conserved by the strong (and electromagnetic) interactions, but not by weak interactions. Call it  $S$ . Particles which carry a non-zero value of  $S$  are called strange particles.

### 15.12.1 11.1 The eight-fold way

The lightest strange particles are the  $K$  mesons, an isospin doublet with  $S = 1$

$$\begin{aligned} K^+ &\text{ with } I_3 = 1/2 \\ K^0 &\text{ with } I_3 = -1/2 \end{aligned} \quad (11.1)$$

and their antiparticles with  $S = -1$

$$\begin{aligned} \bar{K}^0 &\text{ with } I_3 = 1/2 \\ K^- &\text{ with } I_3 = -1/2 \end{aligned} \quad (11.2)$$

Like the  $\pi$ s, the  $K$  s have spin zero and baryon number zero.

There are also strange baryons, particles with baryon number +1. With  $S = -1$  there is an isotriplet (that is an isospin 1 representation)

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &\text{ with } I_3 = 1 \\ \Sigma^0 &\text{ with } I_3 = 0 \\ \Sigma^- &\text{ with } I_3 = -1 \end{aligned} \quad (11.3)$$

and an isosinglet (isospin 0)

$$\Lambda \text{ with } I_3 = 0 \quad (11.4)$$

With  $S = -2$  there is an isodoublet (isospin 1/2)

$$\begin{array}{ll} \Xi^0 & \text{with } I_3 = 1/2 \\ \Xi^- & \text{with } I_3 = -1/2 \end{array} \quad (11.5)$$

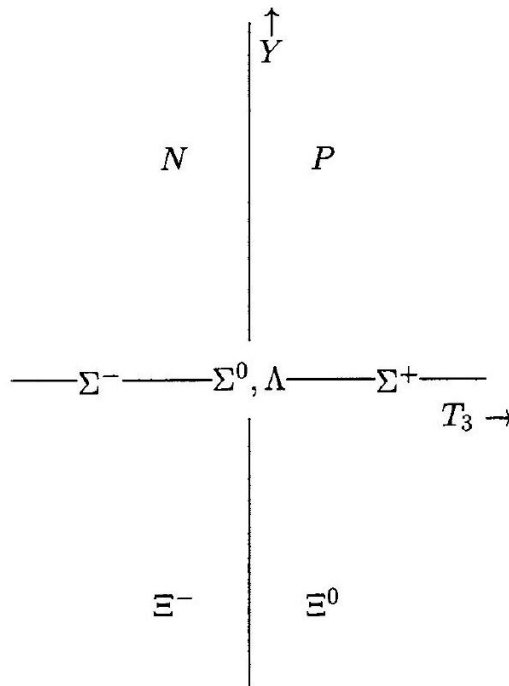
All of these particles satisfy

$$Q = T_3 + Y/2 \quad (11.6)$$

where  $Q$  is the electric charge in units of the proton charge,  $T_3$  is the third component of isospin, and  $Y$  is a quantum number called hypercharge, defined by

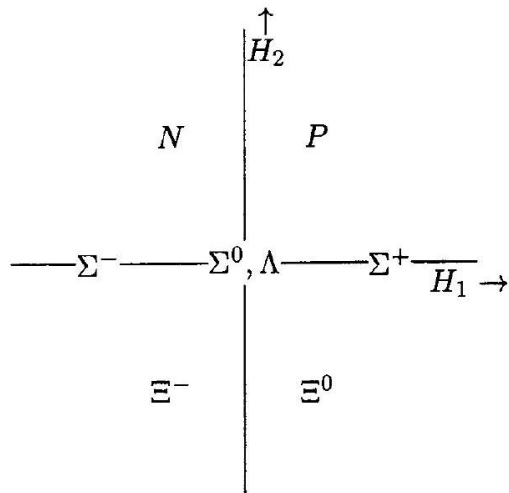
$$Y = B + S \quad (11.7)$$

If we plot  $T_3$  versus  $Y$  for the baryons, we get a plot that suggests the 8 dimensional adjoint representation of  $SU(3)$ :

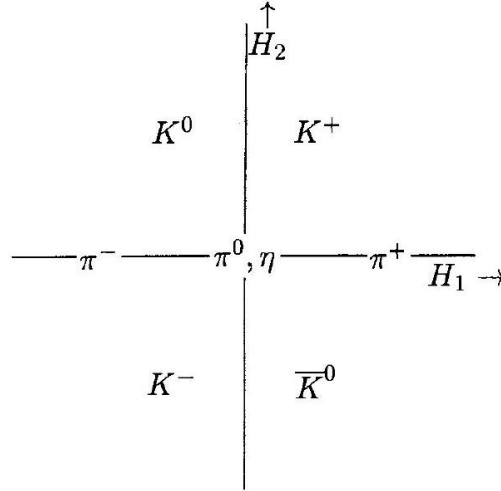


To make the hexagon regular, we can choose

$$H_1 = T_3 \quad H_2 = \sqrt{3}Y/2 \quad (11.9)$$



Something similar works for the light spin 0 mesons if we add the somewhat heavier  $\eta$  meson that was not discovered when  $SU(3)$  was first discussed.



It turns out that the  $SU(3)$  symmetry suggested by these plots is not a symmetry of what were thought of as the strong interactions in the early 1960. But then Gell-Mann realized that you could imagine dividing the strong interactions into two parts:

very strong interactions, invariant under and  $SU(3)$  symmetry under which the light baryons and mesons transform like 8 s and;

medium strong interactions, which break  $SU(3)$ , but conserve isospin generated by  $T_1, T_2$  and  $T_3$ , and hypercharge generated by  $2T_8/\sqrt{3}$ .

Then he showed that  $SU(3)$  symmetry could be used in perturbation theory, like isospin, to understand a lot about the strong interactions.

### 15.12.2 11.2 The Gell-Mann Okubo formula

$SU(3)$  is much more than just taxonomy. Consider the baryon masses. We can write the baryon states as

$$B_j^i |^j_i\rangle \quad (11.13)$$

where  $B_j^i$  is a tensor (wave function) that labels the particular baryon we are interested in. For example, the proton state corresponds to

$$B_j^i = \delta_{i1}\delta_{j3} \quad (11.14)$$

We can survey all the states at once by writing the following matrix:

$$B_j^i = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & P \\ \Sigma^- & \frac{-\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & N \\ \Xi^- & \Xi^0 & \frac{-2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}_{ij} \quad (11.15)$$

Now

$$B_j^i |^j_i\rangle = P|P\rangle + N|N\rangle + \dots \quad (11.16)$$

The entries of the matrix are convenient labels for keeping track of the states —  $P$  is the proton wave function,  $\Lambda$  is the  $\Lambda$  wave function, and so on.

If  $SU(3)$  were an exact symmetry, all the particles of the octet would have the same mass. Because it is broken, the masses will be different. But if, as Gell-Mann assumed in (11.12), the  $SU(3)$  conserving very strong interactions are much more important than the  $SU(3)$  breaking medium strong interactions, the differences between different particle masses within the representations, the mass splittings, should be small compared to the average mass. Explicitly, the mass is the energy of a particle state at rest, so we want to calculate the matrix element of the Hamiltonian between the various single particle states. We will ignore the weak and electromagnetic interactions for now. The weak interactions give a negligible contribution to masses. The electromagnetic interactions are more interesting, because while their effect is small, it is significant because it violates isospin symmetry. We will come back to this later. Then the matrix element we want is

$$\langle B | H_S | B \rangle = \langle B | H_{VS} | B \rangle + \langle B | H_{MS} | B \rangle \quad (11.17)$$

where  $H_{VS}$  commutes with the  $SU(3)$  generators and  $H_{MS}$  commutes with the isospin and hypercharge generators, but not with the others. The first term contributes a common mass to each particle in the  $SU(3)$  representation. In general, we cannot say anything very interesting about the second term. However, there is reason to believe that  $H_{MS}$  transforms like the 8 component of an octet of  $SU(3)$ . Actually, when Gell-Mann first did the calculation, he didn't have any reason to believe this. But it is the simplest possibility consistent with the isospin and hypercharge conservation assumed in (11.12). The point is that we know the strong interaction Hamiltonian commutes with the isospin and hypercharge generators. Thus it must be made up of tensor operators that have components with  $I = 0$  and  $Y = 0$ . The 8 is the smallest nontrivial representation that has a state with  $I = Y = 0$ . The  $I = Y = 0$  state corresponds to the generator  $T_8$ . So Gell-Mann just assumed that  $H_{MS}$  transformed like the  $T_8$  component of an 8 in order to be able to use the Wigner-Eckart theorem to get a result. In particular, he assumed

$$H_{MS} = [T_8]_j^i O_i^j \quad (11.18)$$

where  $O$  is a tensor operator transforming like an 8 under  $SU(3)$ ,

$$[T_a, O_i^j] = O_k^j [T_a]_i^k - O_i^k [T_a]_k^j \quad (11.19)$$

In (11.18) we are using the matrix element  $[T_8]_j^i$  as a tensor component to pick out the component of the operator that commutes with  $\vec{I}$  and  $Y$ .

Now we can use tensor methods to compute the matrix element

$$\langle B | H_{MS} | B \rangle \quad (11.20)$$

This is a calculation we have already done. The two independent  $SU(3)$  invariant combinations of the tensor coefficients are

$$\begin{aligned} \bar{B}_j^i [T_8]_k^j B_i^k &= \text{Tr} (B^\dagger T_8 B) \\ \bar{B}_j^i B_k^j [T_8]_i^k &= \text{Tr} (B^\dagger B T_8) \end{aligned} \quad (11.21)$$

where we have used the fact that in matrix notation,

$$\bar{B} \rightarrow B^\dagger = B^{*T} \quad (11.22)$$

because  $\bar{B}$  involves complex conjugation and interchanging of upper and lower indices, which is equivalent to transposition.

Thus purely from  $SU(3)$  symmetry and the assumption that  $H_{MS}$  is a component of an octet we know that

$$\begin{aligned}
& \langle B | H_{MS} | B \rangle \\
&= X \operatorname{Tr} (B^\dagger B T_8) + Y \operatorname{Tr} (B^\dagger T_8 B) \\
&= X \left( [B^\dagger B]_1^1 + [B^\dagger B]_2^2 - 2 [B^\dagger B]_3^3 \right) / \sqrt{12} \\
&+ Y \left( [BB^\dagger]_1^1 + [BB^\dagger]_2^2 - 2 [BB^\dagger]_3^3 \right) / \sqrt{12}
\end{aligned} \tag{11.23}$$

So we need to compute the diagonal elements of  $B^\dagger B$  and  $BB^\dagger$

$$\begin{aligned}
[B^\dagger B]_{11} &= \left| \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 + |\Sigma^-|^2 + |\Xi^-|^2 \\
[B^\dagger B]_{22} &= |\Sigma^+|^2 + \left| \frac{-\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 + |\Xi^0|^2 \\
[B^\dagger B]_{33} &= |p|^2 + |n|^2 + \left| \frac{-2\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 \\
[BB^\dagger]_{11} &= \left| \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 + |\Sigma^+|^2 + |p|^2 \\
[BB^\dagger]_{22} &= |\Sigma^-|^2 + \left| \frac{-\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 + |n|^2 \\
[BB^\dagger]_{33} &= |\Xi^-|^2 + |\Xi^0|^2 + \left| \frac{-2\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2
\end{aligned} \tag{11.24}$$

Thus

$$\begin{aligned}
& \langle B | H_{MS} | B \rangle \\
&= X (|\Sigma|^2 + |\Xi|^2 - |\Lambda|^2 - 2|N|^2) / \sqrt{12} \\
&+ Y (|\Sigma|^2 + |N|^2 - |\Lambda|^2 - 2|\Xi|^2) / \sqrt{12}
\end{aligned} \tag{11.25}$$

where we sum over particle types in each isospin representation. Now it is easy to find the contribution to each particle mass by picking out the right tensor coefficient. Adding the common mass  $M_0$  from the very strong interactions, we have

$$\begin{aligned}
M_N &= M_0 - 2X/\sqrt{12} + Y/\sqrt{12} \\
M_\Sigma &= M_0 + X/\sqrt{12} + Y/\sqrt{12} \\
M_\Lambda &= M_0 - X/\sqrt{12} - Y/\sqrt{12} \\
M_\Xi &= M_0 + X/\sqrt{12} - 2Y/\sqrt{12}
\end{aligned} \tag{11.26}$$

Thus we have expressed the four masses in terms of three parameters. We know nothing (from the symmetry) about the values of  $M_0$ ,  $X$ , and  $Y$ , but we can eliminate these dynamical quantities and get one relation that follows purely from the symmetry -

$$2(M_N + M_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma \tag{11.27}$$

This is the Gell-Mann-Okubo formula. And it works very well. For example, it implies

$$M_\Lambda = \frac{1}{3} (2(M_N + M_\Xi) - M_\Sigma) \quad (11.28)$$

Putting in (in MeV)

$$M_N = 940 \quad M_\Sigma = 1190 \quad M_\Xi = 1320 \quad (11.29)$$

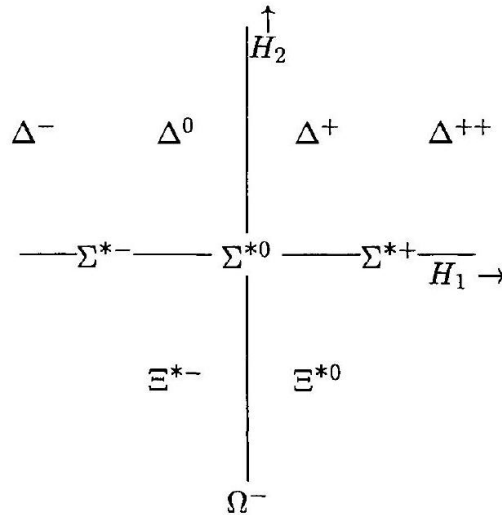
gives

$$M_\Lambda = 1110 \quad (\text{exp. } 1115) \quad (11.30)$$

compared to the experimental value of 1115, the difference is less than 1%. Considering that isospin breaking is bigger than this, it is much better than we have any right to expect.

### 15.12.3 11.3 Hadron resonances

Particles like the baryons and mesons that participate in the strong interactions are generically called hadrons. The baryons and mesons that we have discussed are the lightest hadrons. But there are also an enormous number of excited states of these light states that can be produced in particle collisions but decay back into the light states so quickly that they appear only as enhancements in the scattering cross-section. The first hadron resonance to be discovered was the  $\Delta$ , which shows up as a very large enhancement in the  $\pi P$  scattering cross-section at about 1230 MeV for angular momentum 3/2. The resonance appears in all the charge states, from +2 to -1, so this is a spin 3/2, isospin 3/2 state. It is part of a 10 of  $SU(3)$ . All the other states in the 10 have now been observed.



When Gell-Mann first discussed  $SU(3)$ , the  $\Omega^-$  had not yet been observed. Gell-Mann was able to predict not only its existence, but also its mass. Let us repeat his calculation.

Again, we assume that  $H_{MS}$  transforms like the 8 components of an octet, and compute

$$\langle B^* | H_{MS} | B^* \rangle \quad (11.32)$$

where we have called the decuplet wavefunction  $B^*$  and

$$|B^*\rangle = B^{*jkl} |_{jkl}\rangle \quad (11.33)$$

is the general decuplet state. We have already done the tensor analysis, and in this case, we can immediately write down the result just by thinking. Since there is only one reduced

matrix element, the matrix elements of all octet operators are proportional (component by component). Thus the matrix element we want is proportional to the matrix element of the generator,  $T_8$ , and thus to the hypercharge,  $Y$ . This means that we predict equal spacing for the isospin representations

$$M_{\Sigma^*} - M_{\Delta} = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*} \quad (11.34)$$

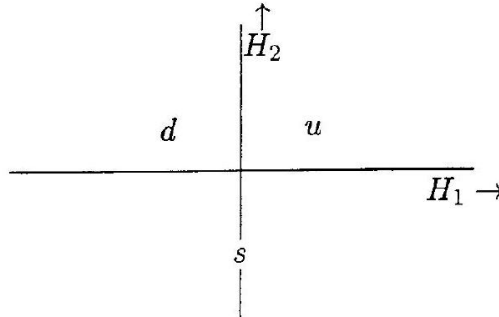
Experimentally, in MeV,

$$M_{\Delta} = 1230 \quad M_{\Sigma^*} = 1385 \quad M_{\Xi^*} = 1530 \quad (11.35)$$

The spacings are nearly equal, and the average is about 150, thus we expect the  $\Omega^-$  at about 1680. Gell-Mann was even able to predict the fate of the  $\Omega^-$ . With the predicted mass, it could not decay into two lighter particles conserving strangeness and baryon number. The lightest pair of particles with baryon number 1 and strangeness -3 is the  $K^-$  and  $\Xi^0$  (or  $\bar{K}^0$  and  $\Xi^-$ ) with a total mass of about 1815. Thus Gell-Mann predicted that the  $\Omega^-$  would look not like a resonance, but like a weakly decaying particle, decaying into states with strangeness -2,  $\Xi\pi$  and  $\Lambda K^-$ . Sure enough, the  $\Omega^-$  was seen (first in bubble chamber photographs) with a mass of 1672 MeV. This was very convincing evidence that  $SU(3)$  is a good approximate symmetry of the strong interactions.

## 15.12.4 11.4 Quarks

Today, this may seem rather trivial, because we now know that all of these strongly interacting particles are built out of the three light quarks,  $u, d$  and  $s$ , transforming like the 3 of  $SU(3)$ .



The baryons can be built of three quarks because

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (11.37)$$

To see this, note that  $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$ , so

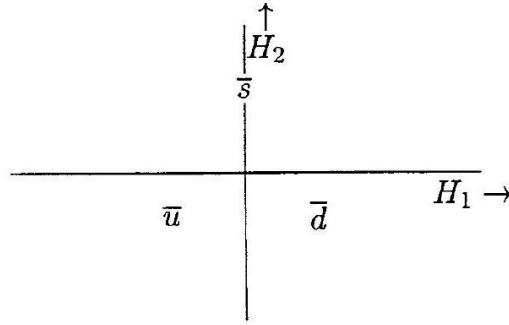
$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3) \quad (11.38)$$

and  $6 \otimes 3$  looks like

$$\begin{aligned} u^{ij}v^k &= \frac{1}{3} (u^{ij}v^k + u^{ik}v^j + u^{kj}v^i) \\ &+ \frac{1}{3} (\epsilon^{ik\ell} \epsilon_{\ell mn} u^{mj}v^n + \epsilon^{jk\ell} \epsilon_{\ell mn} u^{im}v^n) \end{aligned} \quad (11.39)$$

which is  $10 \oplus 8$ . Thus both the 10 and the 8 of baryons that we have already seen can be built out of 3 quarks (the 1 also appears, in higher angular momentum states).

The corresponding antiquarks transform like a  $\bar{3}$



The mesons are built out of quark plus antiquark. Since  $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ , this is either an octet like the  $\pi, K, \eta$  states we have already seen, or a singlet, like the  $\eta'$  (actually, because of the medium strong interactions, the  $\eta$  and  $\eta'$  mix slightly).

The quarks have spin  $1/2$ , and as we will see later, carry another property, color, that is essential for the understanding of the strong interactions. They also have baryon number  $1/3$  because three quarks are required to make a baryon. The  $u$  and  $d$  quarks have zero strangeness, and thus their hypercharge is  $1/3$ . The  $s$  quark has strangeness  $-1$ , and  $Y = -2/3$ . For the quarks, the electric charge is

$$\begin{aligned}
 Q &= T_3 + Y/2 \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{11.41}$$

Quarks were originally introduced as a mathematical device, a shorthand for doing  $SU(3)$  calculations. Today, though we know that quarks are real and we have a detailed understanding of many aspects of the strong interactions. Still, however, there is much that we cannot calculate. We are often forced to fall back on symmetry arguments.

I can't resist doing one more example of an  $SU(3)$  relation from the early days. The octet of spin  $1/2$  baryons have magnetic moments. Unlike the electron magnetic moment, however, the baryon moments cannot be calculated just from their masses and quantum electrodynamics. They depend on the internal structure of the particles. But we can use  $SU(3)$  to say a lot about them. The crucial observation is that the operator that describes the magnetic moment, whatever it is, must be proportional to  $Q$ , the electric charge of the quarks. It is therefore an  $SU(3)$  octet operator, and we can use the Wigner-Eckart theorem. We expect

$$\mu(B) = \alpha \text{Tr}(BB^\dagger Q) + \beta \text{Tr}(B^\dagger BQ) \tag{11.42}$$

Thus we expect 6 relations among the 8 magnetic moments (there is actually a 9 th, because it is a transition magnetic moment that is responsible for the electromagnetic decay,  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda\gamma$ ). In fact, all the magnetic moments can be calculated in terms of  $\mu(P)$  and  $\mu(N)$ . These predictions were first worked out by Sidney Coleman and Shelly Glashow in 1961.

## Problems

11.A. What would the Gell-Mann-Okubo argument tell you about the masses of particles transforming like a 6 of  $SU(3)$ ?



11.B. Compare the probability for  $\Delta^+$  production in  $\pi^0 P \rightarrow \Delta^+$  with the probability for  $\Sigma^{*0}$  production in  $K^- P \rightarrow \Sigma^{*0}$ , assuming  $SU(3)$  symmetry of the  $S$ -matrix.

11.C. Use the  $SU(3)$  argument discussed in the chapter to repeat the calculation of Coleman and Glashow, predicting all the spin 1/2 baryon magnetic moments in terms of  $\mu(P)$  and  $\mu(N)$ .

Chapter 12

## 15.13 Young Tableaux

We discussed Young tableaux in connection with the irreducible representations of the symmetric groups. We will now see that they are useful for dealing with irreducible representations of Lie groups. We will begin by discussing this for  $SU(3)$ , but the real advantage is that it generalizes to  $SU(n)$ .

### 15.13.1 12.1 Raising the indices

The crucial observation is that the  $\bar{3}$  representation is an antisymmetric combination of two 3 s, so we really do not need the second fundamental representation to construct higher representations. We can write an arbitrary representation as a tensor product of 3 s with appropriate symmetry. In fact, as we have seen, Young tableaux correspond to irreducible representations of the permutation group, and the connection with the irreducible representations of  $SU(3)$  (and  $SU(N)$ , as we will see later) is that the irreducible representations of  $SU(3)$  transform irreducibly under permutation of the labels of the indices.

Consider a general representation,  $(n, m)$ . It is a tensor (in the old language) with components

$$A_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \quad (12.1)$$

separately symmetric in upper and lower indices, and traceless. We can raise all the lower indices with  $\epsilon$  tensors to get

$$\begin{aligned} a^{i_1 \dots i_n k_1 \ell_1 \dots k_m \ell_m} \\ = \epsilon^{j_1 k_1 \ell_1} \dots \epsilon^{j_m k_m \ell_m} A_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Clearly, it is antisymmetric in each pair,  $k_i \leftrightarrow \ell_i$ , and symmetric in the exchange of pairs  $k_i, \ell_i \leftrightarrow k_j, \ell_j$ .

Now for each such tensor, we can associate a Young tableau:

|          |         |          |       |         |       |
|----------|---------|----------|-------|---------|-------|
| $k_1$    | $\dots$ | $k_m$    | $i_1$ | $\dots$ | $i_n$ |
| $\ell_1$ | $\dots$ | $\ell_m$ |       |         |       |

What we would like to do is to find a rule that associates with the Young tableau the specific symmetry of the tensor (12.2). We can do that by thinking about the highest weight of the representation,  $(n, m)$ . Because the lowering operators preserve the symmetry, if we find the symmetry of the tensor components describing the highest weight, all the states will have that symmetry. The highest weight is associated with the components in which all the  $i$  are 1, and all the  $k, \ell$  pairs are 1,3. All of these can be obtained by antisymmetrizing the  $k, \ell$  pairs from the component in which all the  $k$  s are 1, and all the  $\ell$  s are 3. But this one component is symmetric under arbitrary permutations of the  $i$  s and  $k$  s, and separately symmetric under permutations of the  $\ell$  s. Thus we will obtain a tensor with the right symmetry if we start with an arbitrary tensor with  $n + 2m$  components, and first symmetrize all the  $i$  and  $k$  s, and separately the

$\ell$ s, and then antisymmetrize in every  $k, \ell$  pair. In the Young tableau language, this is very easy to state. We first symmetrize in the components in the rows, then antisymmetrize in the components in the columns. The result is symmetric in the  $i$  s and in the  $k, \ell$  pairs as (12.2) must be. But it also has a property that is the analog of tracelessness. Because we have raised the indices with  $\epsilon$ s, the condition of tracelessness becomes

$$\epsilon_{i_1 k_1 \ell_1} a^{i_1 \dots i_n k_1 \ell_1 \dots k_m \ell_m} = 0 \quad (12.4)$$

This vanishes for a tensor with the symmetry properties just described because of the symmetrization of the components in the rows.

Thus a Young tableau like the one above is a rule for symmetrizing a tensor to project out a specific irreducible representation. For example, if  $a^{j_1 j_2 k_1}$  is a general tensor with three upper indices, but no special symmetry property, the Young diagram

$$\begin{array}{|c|c|} \hline j_1 & j_2 \\ \hline k_1 & \\ \hline \end{array} \quad (12.5)$$

produces the tensor

$$\begin{aligned} & a^{j_1 j_2 k_1} + a^{j_2 j_1 k_1} \\ & - a^{k_1 j_2 j_1} - a^{j_2 k_1 j_1} \end{aligned} \quad (12.6)$$

which transforms according to the  $(1, 1)$  (or adjoint) representation.

We can generalize the concept to Young tableau with more rows. The general rule is the same. Put indices in the boxes. Symmetrize in the indices in the rows. Then antisymmetrize in the indices in the columns.

In  $SU(3)$ , the tensors corresponding to Young tableaux with more than three boxes in any column vanish because no tensor can be completely antisymmetric in four or more indices which take on only three values. Any column with three boxes corresponds to a factor of  $\epsilon$  in the three indices -

$$\epsilon^{ijk} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline k \\ \hline \end{array}$$

So tableaux of the form

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & \dots & & k_1 & \dots & k_m & i_1 & \dots & i_n \\ \hline & \dots & & \ell_1 & \dots & \ell_m & & & \\ \hline & \dots & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

describe the same representation as (12.3).

### 15.13.2 12.2 Clebsch-Gordan decomposition

We can now give, without proof, an algorithm for the Clebsch-Gordan decomposition of a tensor product. To decompose the tensor product of irreducible representations  $\alpha$  and  $\beta$  corresponding to tableaux  $A$  and  $B$ , you build onto  $A$  using the boxes of  $B$  in the following way. Begin by putting  $a$  s in the top row of  $B$  and  $b$  s in the second row. Take the boxes from the top row of  $B$  and put them on  $A$ , building to the right and/or down, to form legal tableau (that is collections of boxes in which the numbers of boxes in the rows are not increasing as you go down, and the numbers of boxes in the columns are not increasing as you go the right), with no two  $a$  s in the same column. Then take the second row and add the boxes to each of the resulting tableau to form legal tableaux with one further condition. Reading along the rows from right to left from the top row down to the bottom row, the number of  $a$  s must be greater than or equal to the number of  $b$ . This avoids double counting. The tableaux produced by this construction correspond to the irreducible representations in  $\alpha \otimes \beta$ .

Examples:

$$\begin{aligned} \square \otimes \square a &= \square a \\ 3 \otimes 3 &= 6 \oplus \bar{3} \end{aligned} \tag{12.9}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1$$

It is less trivial to do this one the other way.

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & b \\ \hline \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}$$

*(Note: In the original image, the first and third tableaux on the right are crossed out with a diagonal line.)*

The tableaux that are crossed out do not satisfy the constraint that the number of  $a$  s is greater than or equal to the number of  $b$  s. Needless to say, it is easier to do it the other way, because you have fewer boxes to move around.

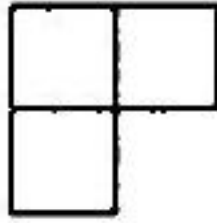
Sometimes the tableaux that are produced in the first stage are useless, because there is no possible second state. Here's an example:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

*(Note: In the original image, the first and second tableaux on the right are crossed out with a diagonal line.)*

Of course we would actually never do it this way. This is the decomposition of  $\bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{6} \oplus 3$ . This is just the complex conjugate of  $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$  which we have already done, and which was much easier because it involved fewer boxes. That's a useful lesson.

Finally, here is a useful example which illustrates all of the rules  $-8 \otimes 8$



$$\otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array}$$

or

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & b & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & b & \\ \hline \end{array}$$

27

$\oplus$

$\bar{10}$

8

8

1

This analysis not only illustrates all the rules, it suggests one possible systematic way of ordering the calculation, in this case by putting things as far to the right as possible to start with, and then working to the left. It is important to have some such rule for your own calculations, so that you don't miss possibilities.

### 15.13.3 12.3 $SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1)$

Young tableaux can do many other useful things for us. One that we can already explore in  $SU(3)$  is to help us understand how a representation of  $SU(3)$  decomposes into representations of its subgroups. An example of this which has some phenomenological importance is the decomposition of  $SU(3)$  representations into their representations of  $SU(2) \times U(1)$ , and particularly, of isospin and hypercharge ( $T_8$ , remember, is just  $\sqrt{3}Y/2$ ).

The three components of the defining representation, the 3, decompose into a doublet with hypercharge  $1/3$  and a singlet with hypercharge  $-2/3$ . In general, consider a Young tableau with  $n$  boxes and look at the components in which  $j$  indices transform like doublets and  $n - j$  transform like singlets. The total hypercharge will be

$$\frac{j}{3} - \frac{2(n-j)}{3} = -\frac{2n}{3} + j \quad (12.15)$$

We will denote the  $n - j$  singlet components by a Young tableau of  $n - j$  boxes in one row. This is the only valid Young tableau that we can build for these, because they all have the same index, and thus cannot appear in the same column.

The  $SU(2)$  representations that these components transform under will be some subset of the representations that can be built out of  $j$  boxes. Now here is the point. To determine whether a given  $SU(2)$  representations,  $\alpha$ , actually appears, what we do is to compute the

tensor product of  $\alpha$  with the  $n - j$  horizontal boxes. Then the number of times the original representation of  $SU(3)$  appears in the tensor product is the number of times  $\alpha$  appears in the decomposition. We will give a justification of this procedure later, when we generalize it. But now let us work out some examples. We will use a notation in which we refer to the  $SU(2)$  representation by their dimension, and put a subscript to indicate the hypercharge. Thus  $(2I + 1)_y$  stands for an isospin  $I$  representation with hypercharge  $y$ .

First consider the 6. The result is illustrated in the following figure (where the  $\square$  represents the trivial tableau, with no boxes).

$$\square \rightarrow \quad (12.16)$$

$$\begin{aligned} (\square \cdot) & \quad 3_{2/3} \\ (\square \square) & \quad 2_{-1/3} \\ (\cdot \square \square) & \quad 1_{-4/3} \end{aligned}$$

Each representation appears once.

Now look at the  $\bar{3}$ . The answer here is obvious, because this is the complex conjugate of the 3. but let us see what it looks like in this language.

$$\square \rightarrow \quad (12.17)$$

$$\begin{aligned} (\square \cdot) & \quad 1_{2/3} \\ (\square \quad \square) & \quad 2_{-1/3} \end{aligned}$$

Again, each representation appears once. Note that we cannot have a column of boxes on the right hand side of the ordered pairs, because this would represent an antisymmetric combination of states with only one index, which vanishes.

Next consider the adjoint representation, where we already know the answer.

Each representation appears once.

Now let's do a less trivial one, for the 27 -

$3_2$

$$\left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} \quad \square \right)$$

$2_1$

$$\left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \quad \square \right)$$

$4_1$

Again, each representation appears once.

**Problems**

12.A. Find  $(2, 1) \otimes (2, 1)$ . Can you determine which representations appear antisymmetrically in the tensor product, and which appear symmetrically.

12.B. Find  $10 \otimes 8$ .

12.C. For any Lie group, the tensor product of the adjoint representation with any arbitrary nontrivial representation  $D$  must contain  $D$  (think about the action of the generators on the states of  $D$  and see if you can figure out why this is so). In particular, you know that for any nontrivial  $SU(3)$  representation  $D$ ,  $D \otimes 8$  must contain  $D$ . How can you see this using Young Tableaux?

Chapter 13

**15.14  $SU(N)$** 

We now want to generalize the discussion of the last few chapters to  $SU(N)$ , the group of special unitary  $N \times N$  matrices, generated by the hermitian, traceless,  $N \times N$  matrices.

**15.14.1 13.1 Generalized Gell-Mann matrices**

There are a couple of different useful bases for the  $SU(N)$  generators. We will start with a generalization of the Gell-Mann matrices, in which we build up from the  $SU(N)$  to  $SU(N+1)$  generators one step at a time. We will normalize (as in  $SU(2)$  and  $SU(3)$ )

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (13.1)$$

The generators of the raising and lowering operators, we can take to have a single non-zero off-diagonal element,  $1/\sqrt{2}$ . The group is rank  $N-1$ , because there are  $N-1$  independent traceless diagonal real matrices. We can choose the  $N-1$  Cartan generators as follows

$$[H_m]_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}} \left( \sum_{k=1}^m \delta_{ik} \delta_{jk} - m \delta_{i,m+1} \delta_{j,m+1} \right) \quad (13.2)$$

For example

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & H_2 &= \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ H_3 &= \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.3)$$

and so on.

Altogether, there are  $N^2-1$  independent traceless hermitian matrices. These  $N^2-1$  matrices generate the  $N$  dimensional defining representation of  $SU(N)$ , which we will sometimes call the  $N$ . The weights are  $N-1$  dimensional vectors,

$$[\nu^j]_m = [H_m]_{jj} = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}} \left( \sum_{k=1}^m \delta_{jk} - m \delta_{j,m+1} \right) \quad (13.4)$$

These satisfy,

$$\begin{aligned}
\nu_j^2 &= \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} \left( \sum_{k=1}^m \delta_{jk} - m\delta_{j,m+1} \right)^2 \\
&= \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} \left( \sum_{k=1}^m \delta_{jk} + m^2\delta_{j,m+1} \right) \\
&= \sum_{m=j}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} + \frac{(j-1)^2}{2j(j-1)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=j}^{N-1} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{(m+1)} \right) + \frac{(j-1)}{2j} \\
&= \frac{1}{2j} - \frac{1}{2N} + \frac{j-1}{2j} = \frac{N-1}{2N}
\end{aligned} \tag{13.5}$$

and for  $i < j$ ,

$$\begin{aligned}
\nu^i \cdot \nu^j &= \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} \left( \sum_{k=1}^m \delta_{ik} - m\delta_{i,m+1} \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{k=1}^m \delta_{jk} - m\delta_{j,m+1} \right) \\
&= \sum_{m=j}^{N-1} \frac{1}{2m(m+1)} - \frac{(j-1)}{2j(j-1)} \\
&= \frac{1}{2j} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2N}
\end{aligned} \tag{13.6}$$

The weights all have the same length, and the angles between any two distinct weights are equal -

$$|\nu^i|^2 = \frac{N-1}{2N} \quad \nu^i \cdot \nu^j = -\frac{1}{2N} \text{ for } i \neq j \tag{13.7}$$

or

$$\nu^i \cdot \nu^j = -\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\delta_{ij} \tag{13.8}$$

Thus the weights form a regular figure in  $N-1$  dimensional space, the  $N-1$  simplex. Explicitly, the weights look like

$$\begin{aligned}
\nu^1 &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2(N-1)N}} \right) \\
\nu^2 &= \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2(N-1)N}} \right) \\
\nu^3 &= \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2(N-1)N}} \right) \\
&\dots \\
\nu^{m+1} &= \left( 0, 0, \dots, -\frac{m}{\sqrt{2m(m+1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2(N-1)N}} \right) \\
&\dots \\
\nu^N &= \left( 0, 0, \dots, 0, \dots, -\frac{N-1}{\sqrt{2(N-1)N}} \right)
\end{aligned} \tag{13.9}$$

For convenience, we will choose a backwards convention for positivity -a positive weight is one in which the LAST non-zero component is positive. With this definition, the weights satisfy

$$\nu^1 > \nu^2 > \dots > \nu^{N-1} > \nu^N \tag{13.10}$$

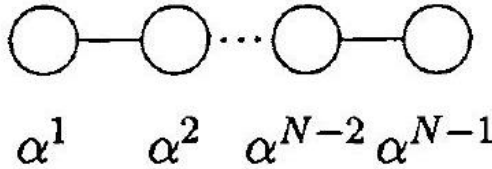
The  $E$ s take us from one weight to another, so the roots are differences of weights,  $\nu^i - \nu^j$  for  $i \neq j$ . The positive roots are  $\nu^i - \nu^j$  for  $i < j$ . The simple roots are

$$\alpha^i = \nu^i - \nu^{i+1} \text{ for } i = 1 \text{ to } N-1 \tag{13.11}$$

The roots all have length 1. They satisfy using (13.8)

$$\begin{aligned}
\alpha^i \cdot \alpha^j &= \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j+1}) \\
&= \delta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{i,j\pm 1}
\end{aligned} \tag{13.12}$$

so the Dynkin diagram is



The fundamental weights are

$$\mu^j = \sum_{k=1}^j \nu^k \tag{13.14}$$

It is easy to check using (13.7) that these satisfy

$$\frac{2\alpha^i \cdot \mu^j}{\alpha^{i2}} = \delta_{ij} \tag{13.15}$$

because the term proportional to  $\frac{1}{2N}$  in (13.8) cancels because the simple root is a difference of fundamental weights. Thus  $\mu^1$  is the highest weight of the defining representation.



### 15.14.2 13.2 $SU(N)$ tensors

As in  $SU(3)$ , we can associate states with tensors,

$$|\nu^i\rangle \rightarrow |i\rangle \quad (13.16)$$

then we can build up arbitrary representations as tensor products.

Consider, for example, the antisymmetric combination of  $m$  defining representations. The states are

$$A^{[i_1 \cdots i_m]} |i_1 \cdots i_m\rangle \quad (13.17)$$

where  $A^{[i_1 \cdots i_m]}$  is completely antisymmetric. This set of states forms an irreducible representation, because of the antisymmetry. Because of the antisymmetry, no two indices can take on the same value. Thus the highest weight in this set of states arises when one of the indices is 1, another is 2, and so on. That means that the highest weight is the fundamental weight  $\mu^m$

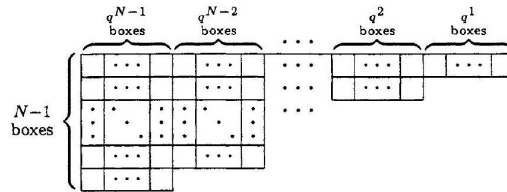
$$\sum_{k=1}^m \nu^k = \mu^m \quad (13.18)$$

Thus this representation is the fundamental representation  $D^m$ .

The highest weight of any irreducible representation can be written in terms of the Dynkin coefficients,  $q^k$ , as

$$\mu = \sum_k q_k \mu^k \quad (13.19)$$

The  $q^k$  s are non-negative integers. The tensor associated with this representation has, for each  $k$  from 1 to  $N-1$ ,  $q_k$  sets of  $k$  indices that are antisymmetric within each set. A simple generalization of the argument as for  $SU(3)$  shows that symmetry of this tensor can be obtained from the following Young tableau, with  $q^k$  columns of  $k$  boxes



This gives a tensor of the right form for the same reason as it did in  $SU(3)$ . The highest weight state has a term in which the top row is all 1 s, the second is all 2 s, the third is all 3 s, etc. Thus the tensor we want is obtained by first symmetrizing in the indices in the rows, and then antisymmetrizing in the indices in the columns. This is exactly the symmetrization condition that we used at the end of chapter I to construct the irreducible representations of the permutation groups. Thus the irreducible representations of  $SU(N)$  with  $m$  indices are associated with the irreducible representations of  $S_m$ .

As in  $SU(3)$ , tableaux with more than  $N$  boxes in any column correspond to tensors which vanish identically. Any columns with  $N$  boxes contribute a factor of the completely antisymmetric tensor with  $N$  indices (which we will again call  $\epsilon$ ). Tableaux which are the same except for columns with  $N$  boxes correspond to the same irreducible representation.

We will sometimes denote the representation corresponding to a Young tableau by giving the number of boxes in each column of the tableau, a series of non-increasing integers,  $[\ell_1, \ell_2, \dots]$ . In this notation,  $D^j$  is  $[j]$ .

For example the adjoint representation, in  $SU(N)$  as in  $SU(3)$ , corresponds to a tensor with one upper and one lower index. To get it into the standard form of a tensor, we must raise the lower index with an  $N$  component  $\epsilon$ . Thus the adjoint is  $[N - 1, 1]$ .

Clebsch-Gordan decomposition works the same way as for  $SU(3)$ , except that now we need  $c$ s for the third row of the tableau,  $d$ s for the fourth, etc. Along with the condition that reading along the rows from right to left from the top row down to the bottom row, the number of  $a$ s must be greater than or equal to the number of  $b$ s which is greater than or equal to the number of  $c$ s, etc.

For example,

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline a \\ \hline \end{array}$$

$$[2] \otimes [1] = [2, 1] \oplus [3]$$

or

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a & \\ \hline b & \\ \hline c & \\ \hline d & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline & c \\ \hline & d \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline & c \\ \hline & d \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline & c \\ \hline & d \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array}$$

$$[4] \otimes [4] = [4, 4] \oplus [5, 3] \oplus [6, 2] \oplus [7, 1] \oplus [8]$$

Notice that it is the rule about number of  $a$ s being greater than or equal to the number of  $b$ s and so on, that prevents us from having more than one of any of these representations. Of course, if  $N$  is less than eight, some of the tableaux in the last example will give vanishing tensors, while others will

have columns of  $N$  boxes that can be eliminated without changing the representation.

Note, in general, in the Clebsch-Gordan decomposition process that the only time boxes can disappear is when columns of  $N$  boxes are removed. Thus each tableau in the decomposition of a tableau with  $j$  boxes  $\otimes$  a tableau with  $k$  boxes will have a number of boxes equal to  $j + k$  modulo  $N$ . This is the analog of the conservation of triality in  $SU(3)$ . The quantity  $j + k \bmod N$  in  $SU(N)$  is sometimes denoted by the linguistic barbarism  $N$ -ality.

### 15.14.3 13.3 Dimensions

For most of the small representations that we will need, it is easy to work out the dimension. For example, the dimension of  $[j]$  is

$$\binom{N}{j} = \frac{N!}{j!(N-j)!} \quad (13.23)$$

The dimensions of the two-column representations can be worked out using the Clebsch-Gordan series. For example, from  $[1] \otimes [2] = [2, 1] \oplus [3]$ , we can find the dimension of  $[2, 1]$ .

$$\binom{N}{2} \times \binom{N}{1} - \binom{N}{3} = \frac{N(N+1)(N-1)}{3} \quad (13.24)$$

There is, however, a simple rule for obtaining the dimensions of any representation from its tableau. It is called the factors over hooks rule. It is a special case of Weyl's character formula.

It works as follows. Put an  $N$  in the upper left hand corner of the tableau. Then put factors in all the other boxes, by adding 1 each time you move to the right, and subtracting 1 each time you move down. The product of all these factors is  $F$ . A hook is a line passing vertically up through the bottom of some column of boxes, making a right hand turn in some box and passing out through the row of boxes. There is one hook for each box. Call the number of boxes the hook passes through  $h$ . Then if  $H$  is the product of the  $h$  s for all hooks (the same factor we used in (1.164), the dimension of the representation is

$$F/H \quad (13.25)$$

For example, for  $[2, 1]$ , the factors are

$$\begin{array}{|c|c|} \hline N & N+1 \\ \hline N-1 & \\ \hline \end{array} \quad F = N(N+1)(N-1)$$

The hooks are

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{hook} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{hook} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{hook} \\ \hline \end{array} \\ h = 3 & h = 1 & h = 1 \end{array}$$

so  $H = 3$ . Thus

$$\frac{F}{H} = \frac{N(N+1)(N-1)}{3} \quad (13.28)$$

in agreement with (13.24).

#### 15.14.4 13.4 Complex representations

Most of the representations of  $SU(N)$  are complex. For example, the lowest weight of the defining representation is  $\nu^N$ . But we know because the Cartan generators are traceless that

$$\sum_{j=1}^N \nu^j = 0 \quad (13.29)$$

and thus

$$\nu^N = -\sum_{j=1}^{N-1} \nu^j = -\mu^{N-1} \quad (13.30)$$

Thus  $[1]$  is complex, and its complex conjugate is  $D^{N-1}$  or  $[N-1]$ ,

$$\overline{[1]} = [N-1] \quad (13.31)$$

Similarly, the lowest weight of  $[m]$  is the sum of the  $m$  smallest  $\nu^i$

$$\sum_{j=N-m+1}^N \nu^j = -\sum_{j=1}^{N-m} \nu^j = -\mu^{N-m} \quad (13.32)$$

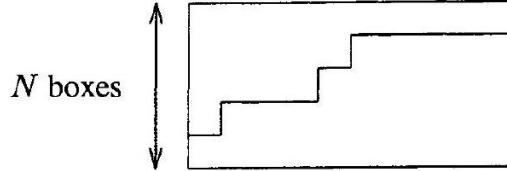
and thus

$$\overline{[m]} = [N - m] \quad (13.33)$$

In general, the complex conjugate of a representation is

$$\overline{[\ell_1, \dots, \ell_n]} = [N - \ell_n, \dots, N - \ell_1] \quad (13.34)$$

Thus the tableau corresponding to a representation and its complex conjugate fit together into a rectangle  $N$  boxes high, as shown below:



### 15.14.5 13.5 $SU(N) \otimes SU(M) \in SU(N + M)$

Now we can generalize the discussion of  $SU(2) \times U(1) \in SU(3)$  from the last chapter. Consider the  $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1)$  subgroup of  $SU(N + M)$  in which the  $SU(N)$  acts on the first  $N$  indices and the  $SU(M)$  acts on the last  $M$  indices. Both of these subgroups commute with a  $U(1)$  which we can take to be  $M$  on the first  $N$  indices and  $-N$  on the last  $M$  (note that it is traceless).

$$\square = (\square \cdot)_M \oplus (\cdot \square)_{-N} \quad (13.36)$$

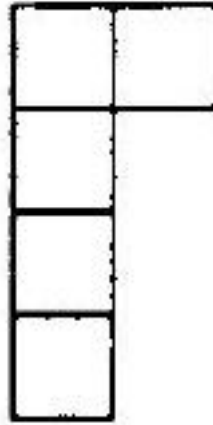
We would like to determine how an arbitrary irreducible representation of  $SU(N + M)$  decomposes into irreducible representations of  $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1)$ . Suppose that we have an  $SU(N + M)$  representation with  $n + m$  boxes. To compute the number of times that the product of an  $SU(N)$  representation  $A$  with  $n$  boxes and a  $SU(M)$  representation  $B$  with  $m$  boxes appears in the  $SU(N + M)$  representation when we restrict  $n$  indices to be from 1 to  $N$  and  $m$  to be from  $N + 1$  to  $N + M$ , we relax that condition and let all the indices run over all  $N + M$  values, and find the tensor product  $A \otimes B$  of the two representations (as representations of  $SU(N + M)$ ). Then the number of times that the pair  $(A, B)$  appears in the decomposition is equal to the number of times the original  $SU(N + M)$  representation appears in the tensor product  $A \otimes B$ . Note also that the  $U(1)$  charge of the representation is  $nM - mN$ .

Notice that if we take  $M = 1$ , the  $SU(M)$  group disappears, because there is no algebra  $SU(1)$  - it has no generators. However, the construction described above still works. This is what we used in the previous chapter to do the decomposition of  $SU(3)$  representations under the  $SU(2) \times U(1)$  subgroup in (12.18) and (12.19).

Let us do the example  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \in SU(5)$ , where the defining representation is

$$\begin{aligned} \square & \\ &= (\square \cdot)_2 \quad (3, 1)_2 \\ &\oplus (\bullet \square)_{-3} \quad (1, 2)_{-3} \end{aligned} \quad (13.37)$$

Then the adjoint representation, which we showed above was  $[N - 1, 1]$ , is



$$= (\square)_5 \quad (3, 2)_5$$

$$\oplus \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)_0 \quad (1, 3)_0$$

$$\oplus (\square\square)_0 \quad (1, 1)_0$$

$$\oplus \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)_0 \quad (8, 1)_0$$

$$\oplus (\square\square\square)_{-5} (\bar{3}, 2)_{-5}$$

### Problems

13.A. Show that the  $SU(n)$  algebra has an  $SU(n-1)$  subalgebra. How do the fundamental representations of  $SU(n)$  decompose into  $SU(n-1)$  representations?

13.B. Find  $[3] \otimes [1]$  in  $SU(5)$ . Check that the dimensions work out.

13.C. Find  $[3, 1] \otimes [2, 1]$

13.D. Under the subalgebra  $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1) \in SU(N+M)$ , where the defining representation  $N+M$  transforms as  $([1], [0])_M \oplus ([0], [1])_{-N}$  (in the  $[\ell_1, \dots]$  notation where the  $\ell$  s are the number of boxes in the columns of the Young tableaux, and where the first bracket indicates the  $SU(N)$  representation and the second the  $SU(M)$ ), how do the fundamental representations of  $SU(N+M)$  transform? How about the adjoint representation?

13.E. Find  $[2] \otimes [1, 1]$  in  $SU(N)$ , and use the factors over hooks rule to check that the dimensions work out for arbitrary  $N$ .

Chapter 14

## 15.15 3-D Harmonic Oscillator

This is an important chapter, but not because the three dimensional harmonic oscillator is a particularly important physical system. It is, however, a beautiful illustration of how  $SU(N)$  symmetries arise in quantum mechanics.

### 15.15.1 14.1 Raising and lowering operators

The Hamiltonian (here as elsewhere we have set  $\hbar = 1$ ) is

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \vec{r}^2 \\ &= \omega \left( a_k^\dagger a_k + 3/2 \right) \end{aligned} \quad (14.1)$$

where

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (m\omega r_k + ip_k) \\ a_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (m\omega r_k - ip_k) \end{aligned} \quad (14.2)$$

for  $k = 1$  to  $3$ . The  $a_k$  and  $a_k^\dagger$  are lowering and raising operators satisfying the commutation relations of annihilation and creation operators for bosons,

$$\begin{aligned} [a_k, a_\ell^\dagger] &= \delta_{k\ell} \\ [a_k, a_\ell] &= [a_k^\dagger, a_\ell^\dagger] = 0 \\ [a_k^\dagger a_k, a_\ell^\dagger] &= a_\ell^\dagger \\ [a_k^\dagger a_k, a_\ell] &= -a_\ell \end{aligned} \quad (14.3)$$

If the ground state is  $|0\rangle$ , satisfying

$$a_k |0\rangle = 0 \quad (14.4)$$

then the energy eigenstates are

$$a_{k_1}^\dagger \cdots a_{k_n}^\dagger |0\rangle \quad (14.5)$$

with energy

$$\omega(n + 3/2) \quad (14.6)$$

The degeneracy of these states is interesting - it is the number of symmetric combinations of the  $n$  indices,  $k_1 \cdots k_n$ , which is

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (14.7)$$

Just the dimension of the  $(n, 0)$  representation of  $SU(3)$ . This suggests that the model has an  $SU(3)$  symmetry.

It is not hard to find the  $SU(3)$  explicitly, because the raising and lowering operators are completely analogous mathematically to creation and annihilation operators for bosons. And we know how to form  $SU(3)$  generators out of creation and annihilation operators. This guess turns out to be right. The generators of the  $SU(3)$  symmetry on the Hilbert space are

$$Q_a = a_k^\dagger [T_a]_{k\ell} a_\ell \quad (14.8)$$

where  $T_a = \lambda_a/2$  are the Gell-Mann matrices. You have already shown that these satisfy the commutation relations of  $SU(3)$  in problem (5.B), and you can check that

$$[Q_a, H] = 0 \quad (14.9)$$

so that the energy eigenstates form representations of  $SU(3)$ . Also,

$$Q_a|0\rangle = 0 \quad (14.10)$$

so that the ground state is an  $SU(3)$  singlet.

Just like the creation and annihilation operators, the raising and lowering operators form tensor operators under the  $SU(3)$ ,

$$[Q_a, a_k^\dagger] = a_\ell^\dagger [T_a]_{\ell k} \quad (14.11)$$

thus  $a_k^\dagger$  transforms like a 3. The lowering operator,  $a_k$ , transforms like a  $\bar{3}$ ,

$$\begin{aligned} [Q_a, a_k] &= -[T_a]_{k\ell} a_\ell \\ &= -a_\ell [T_a^T]_{\ell k} = -a_\ell [T_a^*]_{\ell k} \end{aligned} \quad (14.12)$$

Because all the states in the Hilbert space can be obtained by the action of the raising operators on  $|0\rangle$ , the Hilbert space decomposes into  $(n, 0)$  representations. No other representations appear.

### 15.15.2 14.2 Angular momentum

Something interesting has happened here. The  $SU(3)$  symmetry is nontrivial. It implies that states with different angular momenta are exactly degenerate. Angular momentum is a subgroup of  $SU(3)$  generated by (see problem 14.C)

$$L_3 = 2Q_2, \quad L_1 = 2Q_7, \quad L_2 = -2Q_5 \quad (14.13)$$

But for  $n > 1$ , the degenerate states in level  $n$  consist of more than one angular momentum. For example, the  $n = 2$  states transform like a 6 of the  $SU(3)$ , which under angular momentum transforms like  $5 + 1$ . Thus at this level, the symmetry guarantees a degeneracy that does not follow from rotation invariance alone. But notice that we didn't have to do anything to impose this  $SU(3)$  symmetry. We just imposed rotation invariance, and then the  $SU(3)$  symmetry popped out, because of the linearity of the Harmonic oscillator force law. Nonlinear, anharmonic effects would spoil the  $SU(3)$  symmetry. For example, a term in the potential like  $(\vec{x}^2)^2$  would conserve angular momentum, but break the  $SU(3)$ .

This example can be extended to  $SU(N)$  if you let the number of dimensions be larger or smaller. The dimensions, in this case, just give you more indices for your raising and lowering operator. For the harmonic oscillator, this looks pretty silly, since we live in three dimensions. But in a relativistic theory when we describe the Hamiltonian in terms of creation and annihilation operators, it is perfectly natural. The first approximation to the Hamiltonian of any system of  $N$  different types of particles with the same mass will be proportional to the total number operator,  $a_k^\dagger a_k$  where the sum over  $k$  runs from 1 to  $N$ , just because the energy of the  $m$  particle state will be  $m$  times the energy of a one particle state. This has an  $SU(N)$  symmetry. Of course, interactions and other effects that treat the particles differently may break the symmetry.

### 15.15.3 14.3 A more complicated example

It is very instructive to consider a slightly more complicated model in which all representations of  $SU(3)$  appear in the Hilbert space. Consider the following two-particle Hamiltonian:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{\omega_1}{2} (\vec{p}^2 + \vec{r}^2) + \frac{\omega_2}{2} (\vec{P}^2 + \vec{R}^2) \\
 & + \Delta \left[ (\vec{r} \cdot \vec{R} - \vec{p} \cdot \vec{P})^2 + (\vec{r} \cdot \vec{P} + \vec{R} \cdot \vec{p})^2 \right. \\
 & \left. - \vec{r}^2 - \vec{p}^2 - \vec{R}^2 - \vec{P}^2 \right]
 \end{aligned} \tag{14.14}$$

where the  $\vec{R}$  and  $\vec{P}$  are an independent set of coordinates and momenta. This describes two harmonic oscillators, in units with  $m_1\omega_1 = m_2\omega_2 = 1$ , coupled in what appears to be a complicated way. But in fact, it is carefully constructed to be simple in terms of raising and lowering operators. Defining

$$\begin{aligned}
 \vec{a}^\dagger &= (\vec{r} - i\vec{p})/\sqrt{2}, \vec{a} = (\vec{r} + i\vec{p})/\sqrt{2} \\
 \vec{b}^\dagger &= (\vec{R} - i\vec{P})/\sqrt{2}, \vec{b} = (\vec{R} + i\vec{P})/\sqrt{2}
 \end{aligned} \tag{14.15}$$

then the Hamiltonian becomes

$$\begin{aligned}
 H = & \omega_1 \left( a_k^\dagger a_k + 3/2 \right) + \omega_2 \left( b_k^\dagger b_k + 3/2 \right) \\
 & + 4\Delta \left( a_k^\dagger b_k^\dagger \right) (a_\ell b_\ell)
 \end{aligned} \tag{14.16}$$

The point of this is the form of the interaction term proportional to  $\Delta$ , and in particular, the way the indices of the raising and lowering operators are contracted. It is constructed to commute with the operators (see problem 14.D)

$$Q_\alpha = a_k^\dagger [T_\alpha]_{k\ell} a_\ell - b_k^\dagger [T_\alpha^*]_{k\ell} b_\ell \tag{14.17}$$

These have the commutation relations of  $SU(3)$ , so the theory has an  $SU(3)$  symmetry with the  $a^\dagger$  transforming like a 3, as in the simple three dimensional harmonic oscillator, but with the  $b^\dagger$  transforming as a  $\bar{3}$ . Because we now have raising operators that transform like  $\bar{3}$  s as well as 3 s, we can construct states which transform like arbitrary  $SU(3)$  representations.

To see what the states look like, note that  $H$  also commutes with the number operators,

$$N_a = a_k^\dagger a_k \quad \text{and} \quad N_b = b_k^\dagger b_k \tag{14.18}$$

Thus the energy eigenstates have definite numbers of  $a^\dagger$ s and  $b^\dagger$ s, and transform under irreducible representations of  $SU(3)$ . They look like

$$\begin{aligned}
 & |(n, m), K\rangle \\
 & \equiv \left( a_{i_1}^\dagger \cdots a_{i_n}^\dagger b_{j_1}^\dagger \cdots b_{j_m}^\dagger - \text{traces} \right) \\
 & \cdot \left( \vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger \right)^K |0\rangle
 \end{aligned} \tag{14.19}$$

transforming like the  $(n, m)$  of  $SU(3)$ . For example, the octet states look like



$$\left(a_k^\dagger b_\ell^\dagger - \frac{1}{3}\delta_{k\ell}(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)\right)(\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^K |0\rangle \quad (14.20)$$

The indices of the  $a^\dagger$  s act like lower  $SU(3)$  indices while the indices of the  $b^\dagger$  s act like upper indices. The irreducible representations must be traceless in a pair of an  $a^\dagger$  index and a  $b^\dagger$  index.

It is straightforward to calculate the energy eigenvalues. Because of the  $SU(3)$  symmetry, we can look at any state in an irreducible representation, and in particular, at the highest weight states

$$|(n, m), K\rangle = (a_1^\dagger)^n (b_3^\dagger)^m (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^K |0\rangle \quad (14.21)$$

The first two terms in  $H$  just count  $a^\dagger$  s and  $b^\dagger$  s. The nontrivial term is the interaction term proportional to  $\Delta$ . But because we know that the state is an eigenstate, we can just do it.

$$\begin{aligned} & (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)(\vec{a} \cdot \vec{b})|(n, m), K\rangle \\ &= (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger) \left[ \vec{a} \cdot \vec{b}, (a_1^\dagger)^n \right] (b_3^\dagger)^m (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^K |0\rangle \quad (a) \\ &+ (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger) (a_1^\dagger)^n \left[ \vec{a} \cdot \vec{b}, (b_3^\dagger)^m \right] (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^K |0\rangle \quad (b) \\ &+ (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger) (a_1^\dagger)^n (b_3^\dagger)^m \left[ a_k, \left[ b_k, (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^K \right] \right] |0\rangle \quad (c) \end{aligned}$$

(a) is

$$\begin{aligned} & (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger) \left[ \vec{a} \cdot \vec{b}, (a_1^\dagger)^n \right] (b_3^\dagger)^m (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^K |0\rangle \\ &= n (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger) (a_1^\dagger)^{n-1} b_1 (b_3^\dagger)^m (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^K |0\rangle \\ &= n (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger) (a_1^\dagger)^{n-1} (b_3^\dagger)^m \left[ b_1, (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^K \right] |0\rangle \\ &= nK|(n, m), K\rangle \end{aligned} \quad (14.22)$$

(b) works the same way, and gives

$$mK|(n, m), K\rangle \quad (14.23)$$

(c) is

$$\begin{aligned} & (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger) (a_1^\dagger)^n (b_3^\dagger)^m \left[ a_k, \left[ b_k, (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^K \right] \right] |0\rangle \\ &= (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger) (a_1^\dagger)^n (b_3^\dagger)^m \left[ a_k, K a_k^\dagger (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^{K-1} \right] |0\rangle \\ &= K (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger) (a_1^\dagger)^n (b_3^\dagger)^m \left( \left[ a_k, a_k^\dagger \right] (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^{K-1} \right. \\ &\quad \left. + a_k^\dagger \left[ a_k, (\vec{a}^\dagger \cdot \vec{b}^\dagger)^{K-1} \right] \right) |0\rangle \\ &= K(K+2)|(n, m), K\rangle \end{aligned} \quad (14.24)$$

Thus the energy eigenvalue is

$$\omega_1 \left( n + K + \frac{3}{2} \right) + \omega_2 \left( m + K + \frac{3}{2} \right) + 4\Delta K(n + m + K + 2) \quad (14.25)$$

The physics of this model is not very interesting. However, as an example of how symmetries arise, it is very instructive. There is a very useful way of thinking about what goes on here. For a moment, think of the interaction term, proportional to  $\Delta$ , as a perturbation on the harmonic oscillator terms. In the absence of the  $\Delta$  term, the theory has a larger symmetry  $SU(3) \times SU(3)$  (and some  $U(1)$  s, but we will concentrate on the non-Abelian symmetries) - separate  $SU(3)$  symmetries on the  $a^\dagger$  and  $b^\dagger$  variables. The interaction terms couples the  $a$  s and  $b$  s together and breaks the independent  $SU(3)$  symmetries down the single  $SU(3)$  that treats the interaction terms as a singlet, because  $a_k b_k$  and  $a_k^\dagger b_k^\dagger$  are singlets under the  $SU(3)$  symmetry. It is often useful to organize the symmetry structure of the theory in such a structured way.

### Problems

14.A. Show that the operators

$$O_{ij}^k = a_i^\dagger a_j^\dagger a_k - \frac{1}{4} \left( \delta_{ik} a_\ell^\dagger a_j^\dagger a_\ell + \delta_{jk} a_\ell^\dagger a_i^\dagger a_\ell \right)$$

transform like a tensor operator in the  $(2, 1)$  representation.

14.B. Calculate the non-zero matrix elements of the operator  $O_{11}^3$  (where  $O_{ij}^k$  is defined in 14.A) between states of the form

$$a_i^\dagger \left( a_\ell^\dagger b_\ell^\dagger \right) |0\rangle$$

and

$$a_j^\dagger a_k^\dagger \left( a_\ell^\dagger b_\ell^\dagger \right) |0\rangle$$

14.C. Show that (14.13) generates the standard angular momentum,

$$\vec{r} \times \vec{p}$$

14.D. Show that

$$[Q_\alpha, a_k b_k] = 0$$

Chapter 15

## 15.16 $SU(6)$ and the Quark Model

In the spectrum of low-lying baryons, the octet with spin  $1/2$  and the decuplet with spin  $3/2$  are not very far apart in mass. Typical splittings between the octet and decuplet states are not so different from splittings within the  $SU(3)$  representations. Noticing this, in the 60 's, many physicists played with the idea of embedding  $SU(3)$  in some larger symmetry group that would connect the two representations. Because the baryons in the 8 and 10 have different spins, the larger group cannot commute with angular momentum. You might expect this to cause problems, because it means mixing up internal symmetries and spacetime symmetries, and indeed it does. But the problems do not show up until you try to make the theory relativistic. We will discuss some of this, and possible resolutions, later.

### 15.16.1 15.1 Including the spin

The obvious way to extend the  $SU(3)$  symmetry group is to include in the quark states the quark spin as well as the quark type. This suggests that we think about a 6 dimensional tensor product space in which the states have an  $SU(3)$  index, and a spin index -

$$(|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle)(|1/2\rangle, |-1/2\rangle) \quad (15.1)$$

The corresponding symmetry group is an  $SU(6)$  symmetry that acts on this six dimensional tensor product space. We can write the generators as products of  $3 \times 3$  matrices in the  $SU(3)$  space (though not necessarily traceless) and  $2 \times 2$  matrices in spin space (again, not necessarily traceless). In particular, the generators include the  $SU(3)$  generators

$$\frac{1}{2}\lambda_a \quad (15.2)$$

with the identity in spin space understood, and the spin generators

$$\frac{1}{2}\sigma_j \quad (15.3)$$

with the identity in the  $SU(3)$  space understood. That is, this  $SU(6)$  has an  $SU(3)$  subalgebra under which the 6 transforms like two 3 s, and it has an  $SU(2)$  subalgebra under which the 6 transforms like 32 s. The  $SU(3)$  and  $SU(2)$  algebras commute with one another. We say that the  $SU(6)$  has an  $SU(3) \times SU(2)$  subgroup under which the 6 transforms like a  $(3, 2)$ . The other  $SU(6)$  generators are the products

$$\frac{1}{2}\lambda_a\sigma_j \quad (15.4)$$

The total number of generators is then  $8 + 3 + 24 = 35$ , which, sure enough, is the number of independent, hermitian, traceless  $6 \times 6$  matrices.

The low-lying baryons, consisting of three quarks, transform like the 56 dimensional representation of  $SU(6)$ , the completely symmetric combination of 36 s. Let's pause to understand how such a representation transforms.

### 15.16.2 15.2 $SU(N) \times SU(M) \in SU(NM)$

The general situation is  $SU(N) \times SU(M) \in SU(NM)$ . It arises only for  $SU(k)$  where  $k$  is not a prime, and thus this embedding does not show up in  $SU(2)$  or  $SU(3)$ . The idea is to always exploit the idea of a tensor product space. For  $SU(NM)$ , the defining representation has  $NM$  indices, and we can therefore describe it in a tensor product space, replacing the  $NM$  indices by an ordered pair of indices,  $i, x$  where  $i$  runs from 1 to  $N$  and  $x$  runs from 1 to  $M$ . Then the matrices

$$[T_a^N]_{ij} \delta_{xy} \quad \text{and} \quad \delta_{ij} [T_a^M]_{xy} \quad (15.5)$$

are hermitian and traceless (remember that in a tensor product space, taking the trace means contracting both types of indices) and generate  $SU(N)$  and  $SU(M)$ , respectively.

Under the  $SU(N) \times SU(M)$  subalgebra generated by these matrices, the  $NM$  transforms like  $(N, M)$  (or equivalently,  $([1], [1])$  - that is there are  $M$  copies of the  $N$  of  $SU(N)$  which transform into one another under the  $SU(M)$  - or vice versa, whichever you like). The reason that this is useful is that very often our creation operators have more than one index like the  $SU(3)$  indices and spin indices in the quark states

of  $SU(6)$ . Then this kind of tensor product is the natural place for them, and such  $SU(NM)$  symmetries arise quite naturally.

Now we can ask the decomposition question. Given a representation of  $SU(NM)$ , how does it transform under  $SU(N) \times SU(M)$ ?

In particular, suppose we have a representation  $D$ , of  $SU(NM)$  corresponding to some Young tableau with  $K$  boxes. In a tensor language,  $D$  is a tensor with  $K$   $SU(N)$  indices and  $K$   $SU(M)$  indices. Thus because of  $N$ -ality and  $M$ -ality, if the decomposition contains the representation  $(D_1, D_2)$  where  $D_1$  is an  $SU(N)$  representation with  $K_1$  boxes and  $D_2$  is an  $SU(M)$  representation with  $K_2$  boxes, then

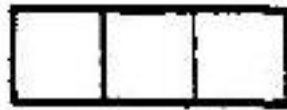
$$K = K_1 \bmod N = K_2 \bmod M \quad (15.6)$$

To go further, it is again easiest to argue backwards. First, add columns of  $N$  boxes to  $D_1$  and columns of  $M$  boxes to  $D_2$  if necessary to bring both up to a total of  $K$  boxes. Now what the decomposition means is that we can write the tensor described by a  $D$  tableau with  $(i, x)$  pairs in each box as a linear combination of products of tensors with  $i$  indices in the  $D_1$  tableau and  $x$  indices in the  $D_2$  tableau.

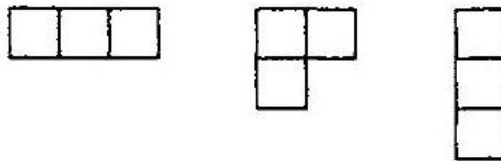
Now the idea is simple. Both the  $D_1$  and  $D_2$  tableaux have definite symmetry properties under permutations of the  $k$  indices. They are associated with irreducible representations of the symmetric group  $S_k$ . The question then is whether the product has any component that had the symmetry of  $D$ . If so, then  $(D_1, D_2)$  will appear in the decomposition of  $D$ .

Of course, this doesn't quite solve the problem, because we must still understand whether the tensor product of two irreducible representations of  $S_k$  contains a third. We won't try to solve this problem in general. But we will be able to tell in some special cases.

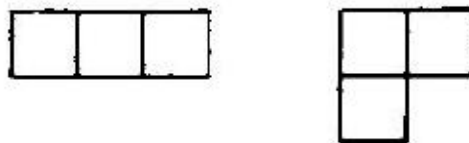
For the 56 of  $SU(6)$ , this analysis is simple. The Young tableau associated with the 56 is



which corresponds to the trivial representation of  $S_3$ . There are three possible irreducible representations of  $SU(3)$  with three boxes:



And there are two possible irreducible representations of  $SU(2)$  with three boxes:



The  $SU(3) \times SU(2)$  representations in the 56 are then those ordered pairs of  $SU(3)$  and  $SU(2)$  representations for which the trivial representation of  $S_3$  appears in the tensor product of the  $S_3$  representations of their Young tableaux. For example, the representation

$$(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array})$$

appears, because the completely symmetric representation is contained in its tensor product with itself. This corresponds to the 10 of  $SU(3)$  with spin  $3/2$ . The other possibility is

$$(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array})$$

The tensor product of these two  $S_3$  representations contains the trivial representation (as we will see explicitly) because any pair of  $SU(3)$  and  $SU(2)$  indices transforms the same way under any permutation, the product contains the representation which is unchanged by the permutation. This representation corresponds to the 8 of  $SU(3)$  with spin  $1/2$ . Thus the 56 includes precisely the low-lying baryon states.

### 15.16.3 15.3 The baryon states

Let's look explicitly at these states. The decuplet states are particularly simple because they are separately symmetric in the  $SU(3)$  and  $SU(2)$  indices. For example, indicating the  $\pm 1/2$  spin states by  $|\pm\rangle$

$$\begin{aligned} |\Delta^{++}, 3/2\rangle &= |uuu\rangle |++\rangle \\ |\Delta^+, 1/2\rangle &= \frac{1}{3}(|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle) \\ &\cdot (|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle) \\ |\Sigma^{*0}, 1/2\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{6} \\ &\cdot (|uds\rangle + |dus\rangle + |sud\rangle + |sdu\rangle + |dsu\rangle + |usd\rangle) \\ &\cdot (|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle) \end{aligned} \tag{15.12}$$

The octet states are more complicated because they are antisymmetric in one pair of spins and quark labels (because of the columns in the Young tableau). To get a completely symmetric state, you can multiply the two and then add cyclic permutations. For example

$$\begin{aligned} |\Lambda, 1/2\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &\{(|uds\rangle - |dus\rangle)(|+-+\rangle - |-++\rangle) \\ &+ (|sud\rangle - |sdu\rangle)(|++-\rangle - |+-+\rangle) \\ &+ (|dsu\rangle - |usd\rangle)(|-++\rangle - |++-\rangle)\} \end{aligned} \tag{15.13}$$

In this notation, the quark label and spin states are correlated. The first quark label goes with the first spin states, and so on. The way this  $\Lambda$  state works is that if you interchange both spin and quark labels of any pair, one of these three terms is unchanged, while the other two get interchanged. Note the normalization of the state. It is often more convenient to construct

these states by multiplying an  $SU(3)$  state that is symmetric in some pair of indices, like  $|uud\rangle$  which is symmetric in the first two, by a spin state which is symmetric in the same pair, but with total spin  $1/2$ . Then again, adding cyclic permutations gives a totally symmetric state. For example,

$$\begin{aligned}
 |P, 1/2\rangle = & \frac{\sqrt{2}}{6} \\
 & \{ |uud\rangle(2|++-\rangle - |+-+\rangle - |-++\rangle) \\
 & + |udu\rangle(2|+-+\rangle - |-++\rangle - |++-\rangle) \\
 & + |duu\rangle(2|-++\rangle - |++-\rangle - |+-+\rangle) \}
 \end{aligned} \tag{15.14}$$

In the first term, for example, the  $|+-+\rangle$  state and the  $|-++\rangle$  state must have the same coefficient for symmetry under interchange of the first two quarks, but the  $|++-\rangle$  state is automatically symmetric, so it can have a different coefficient. We have chosen the coefficients so that the sum vanishes, which guarantees that the state will be orthogonal to the symmetric spin  $3/2$  state. This can never give a decuplet state. If the  $SU(3)$  state is completely symmetric, the sum over cyclic permutations gives zero rather than a nontrivial state. Again, note that if you interchange both spin and quark labels of any pair, one of these three terms is unchanged, while the other two get interchanged.

#### 15.16.4 15.4 Magnetic moments

Let us now see what  $SU(6)$  symmetry has to say about the magnetic moments of the baryons. To determine the  $SU(6)$  properties of the quarks, note that if a quark is a point particle like the electron, its magnetic moment is approximately

$$\frac{e}{2m} Q \vec{\sigma} \tag{15.15}$$

where  $m$  is the quark mass and  $eQ$  is the quark charge. This looks like an  $SU(6)$  generator, so we infer that the magnetic moment operator transforms like the 35 dimensional adjoint representation.

We are interested in the matrix elements

But  $35 \otimes 56$  is

Because there is a unique 56 in the decomposition, we know that the matrix elements are determined by a single reduced matrix element. Therefore, we can compute the magnetic moments up to an overall constant by looking at the matrix element of any operator that transforms like the correct component of a 35. In particular, we can use the  $SU(6)$  generators themselves, and conclude

$$\mu_{56} \propto \langle 56 | Q \vec{\sigma} | 56 \rangle \tag{15.18}$$

We can use this relation to compute the ratio of the proton to neutron magnetic moments, which was not determined by the Coleman-Glashow analysis. If we compute the matrix element between states with the same  $\sigma_3$  value, then only the  $Q\sigma_3$  matrix element is not zero, so we can compute that. We do this just by applying the tensor-product rule:

$$\begin{aligned}
Q\sigma_3|P, 1/2\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{6} \\
&\cdot \left\{ \frac{2}{3}|ud\rangle(2|+-\rangle - |+ -\rangle + |- ++\rangle) \right. \\
&+ \frac{2}{3}|ud\rangle(2|+-\rangle + |+ -\rangle - |- ++\rangle) \\
&- \frac{1}{3}|ud\rangle(-2|+-\rangle - |+ -\rangle - |- ++\rangle) \\
&\left. + \text{cyclic permutations} \right\}
\end{aligned} \tag{15.19}$$

Thus

$$\begin{aligned}
\langle P, 1/2 | Q\sigma_3 | P, 1/2 \rangle & \\
= 3 \frac{2}{36} \left( \frac{2}{3}(4+1-1) + \frac{2}{3}(4-1+1) - \frac{1}{3}(-4+1+1) \right) &= 1
\end{aligned} \tag{15.20}$$

The matrix element between neutron states can be obtained by simply interchanging the  $u$  s and the  $d$  s in this calculation, which means interchanging the  $2/3$  and  $-1/3$  factors -

$$\begin{aligned}
\langle N, 1/2 | Q\sigma_3 | N, 1/2 \rangle & \\
= 3 \frac{2}{36} \left( -\frac{1}{3}(4+1-1) - \frac{1}{3}(4-1+1) + \frac{2}{3}(-4+1+1) \right) &= -\frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{15.21}$$

So we expect

$$\frac{\mu_P}{\mu_N} = -\frac{3}{2} \tag{15.22}$$

Experimentally, in nuclear magnetons (units of  $e/2m_P$ )

$$\begin{aligned}
\mu_P &= 2.79 \quad \mu_N = -1.91 \\
\frac{\mu_P}{\mu_N} &= -1.46
\end{aligned} \tag{15.23}$$

So it works, but the logic is rather indirect. From the quark model, we extracted only the  $SU(6)$  transformation law of the magnetic moment operator. We then used the Wigner-Eckart theorem to show that we can calculate the ratio by looking at the corresponding matrix elements of an  $SU(6)$  generator.

We can get the result more easily by simply assuming that the quarks actually exist as nonrelativistic constituents, and that the baryons really are bound states of three quarks in an angular momentum zero state. Then the magnetic moment of the baryon is simply the sum of the magnetic moments of the quarks. The magnetic moment of a quark (by analogy with an electron) is  $\frac{Qe}{2m}$  in the direction of the spin where  $m$  is the quark mass, thus it can be written

$$\frac{e}{2m} Q \vec{\sigma} \tag{15.24}$$

Therefore in the tensor product language, the sum of the quark magnetic moments is

$$\frac{e}{2m} \sum_{\text{quarks}} Q \vec{\sigma} \quad (15.25)$$

The proton magnetic moment is  $\frac{e}{2m_P} \mu_P$  where  $m_P$  is the proton mass and  $\mu_P$  is the magnetic moment measured in "nuclear magnetons". Thus

$$\frac{e}{2m_P} \mu_P = \frac{e}{2m} \langle P | Q \vec{\sigma} | P \rangle / \langle P | \vec{\sigma} | P \rangle = \frac{e}{2m} \quad (15.26)$$

which is exactly what we computed in the  $SU(6)$  argument, but with one additional bit of information - we know the scale. If we assume that the quark mass is about 1/3 the proton mass, we have

$$\mu_P = \frac{m_P}{m} = 3 \quad (15.27)$$

This is not bad!

The quark model is thus not only simpler, it is more predictive. It also gives a reasonable account of some  $SU(3)$  breaking effect in the baryon magnetic moments. For example, the Coleman-Glashow prediction for the  $\Lambda$  magnetic moment is

$$\mu_\Lambda = -\frac{1}{3} \mu_P = -.93 \quad (15.28)$$

You can see this directly in  $SU(6)$  by computing

$$\langle \Lambda, 1/2 | Q \sigma_3 | \Lambda, 1/2 \rangle = -\frac{1}{3} \quad (15.29)$$

But experimentally

$$\mu_\Lambda \approx -.61 \quad (15.30)$$

which is significantly different. The quark model gives

$$\frac{e}{2m_p} \mu_\Lambda = \sum_{\text{quarks}} \frac{e}{2m_{\text{quark}}} Q \sigma_3 \quad (15.31)$$

In the matrix element, only the  $s$  quark actually contributes in the  $\Lambda$ , (15.13), because the  $u$  and  $d$  spins are combined into a spin zero state. Thus we predict

$$\mu_\Lambda = -\frac{1}{3} \frac{m}{m_s} \quad (15.32)$$

In the quark model, we expect the  $s$  quark to be heavier than the  $u$  and  $d$  quarks to account for the larger mass of hadrons containing the  $s$  quark. For example, if we assume (very roughly)  $m_\Lambda \approx m_s + 2m$  and  $m_P \approx 3m$ , then

$$m_s \approx \frac{3m_\Lambda - 2m_P}{3} \approx 490 \text{ MeV} \quad (15.33)$$

so

$$\mu_\Lambda \approx -.64 \quad (15.34)$$

which is a bit better.



## Problems

15.A. Find the  $SU(6)$  (i.e. quark model) wave functions for all the spin 1/2 baryons except  $P, N$  and  $\Lambda$  (which were discussed in the text).

15.B. Use the wave functions you found in (15.A) to calculate the magnetic moments,

a. in the  $SU(6)$  limit, calculating the ratios to  $\mu_P$ ;

b. in the quark model, put in  $SU(3)$  symmetry breaking by including  $m_s \neq m_{u,d}$ .

15.C. Show that the  $|\Lambda, 1/2\rangle$  state, (15.13), is an isospin singlet.

Chapter 16

## 15.17 Color

There are some things wrong with the simple quark model discussed in the previous chapter. The first is that the connection between spin and statistics is wrong for these quarks. The quarks must have spin 1/2 in order to produce the spin 1/2 and 3/2 baryons. Thus we would expect them to obey Fermi-Dirac statistics, and we would expect the ground state of the three quark system to be an  $s$ -wave, completely symmetric under the exchange of the position labels of the three quarks. This would lead to an  $SU(6)$  representation completely antisymmetric in the  $SU(6)$  indices of the three quarks - which is a  $[3]$  or a 20 which transforms under  $SU(3) \times SU(2)$  as  $([2, 1], [2, 1]) \oplus ([3], [1, 1, 1])$  or  $(8, 2) \oplus (1, 4)$  which is not what we want.

The second difficulty is that we need some explanation of why only the  $\bar{q}q$  and  $qqq$  combinations seem to exist. This would certainly not be explained by any simple attractive force between quarks.

Finally, there is now a tremendous amount of evidence from studies of high energy QCD that the quarks carry an attribute which we call color. Quarks come in three colors, and the colors interact with a set of 8 gluons in an  $SU(3)$  symmetric way. The  $SU(3)$  associated with the color interaction is called color  $SU(3)$ . It has nothing to do with Gell-Mann's  $SU(3)$ , except, of course, that it provides the force that binds the light quarks into Gell-Mann's representations.

### 15.17.1 16.1 Colored quarks

The quark states transform like a 3 - they have a single color  $SU(3)$  index which I will let run from 1 to 3. The quark wave functions are tensors

$$q^i \quad \text{for } i = 1 \text{ to } 3. \quad (16.1)$$

They also carry labels for Gell-Mann's  $SU(3)$  (flavor), spin and position. The idea is that the color interaction binds three quarks into a color singlet baryon state, which is then described by contracting the color wave functions of the quarks with an  $\epsilon$  -

$$\epsilon_{ijk} q^i q^j q^k \quad (16.2)$$

Then, because the  $\epsilon$  is completely antisymmetric, the baryon state is symmetric under the exchange of all the other labels.

It is this binding of three quarks into an  $SU(3)$  singlet baryon that suggested the name "color" for the color  $SU(3)$  indices. The metaphor is based on the fact that colorless light can be produced by combining beams of the three primary colors, red, green and blue. In the same way, a colorless (that is color  $SU(3)$  singlet) baryon state can be made out of three colored quarks. Thus the color  $SU(3)$  indices are sometimes referred to as red, green and blue, rather than 1, 2 and 3.

I think that it was the use of the term color that gave rise, in turn, to the name flavor for the label,  $u, d, s$ , etc, that distinguishes one type of quark from another. Gell-Mann's  $SU(3)$  is

sometimes referred to as flavor  $SU(3)$  because it transforms the light flavors into one another. Flavor is a completely independent attribute. The quarks carry both color and flavor (and also spin).

Antiquarks transform like  $\bar{3}$  s under color  $SU(3)$ , because color charges, at least those in the Cartan subgroup that can be diagonalized, are quantum numbers like electric charge and baryon number, and like electric charge and baryon number, they change sign in going from a particle to its antiparticle. If the Cartan charges change sign, that means that the weights change sign, and that means going from the 3 representation to its complex conjugate, the  $\bar{3}$ .

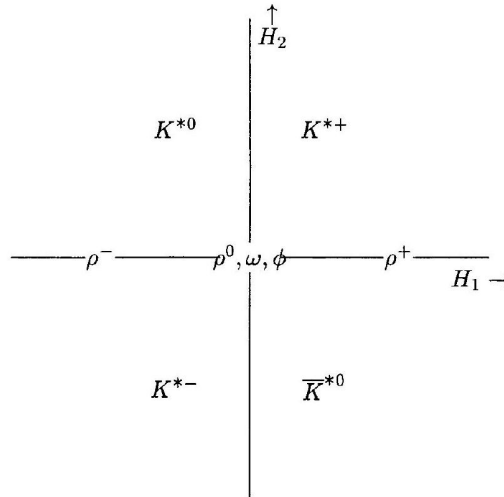
We can make a color singlet state from three antiquarks by contracting with an  $\epsilon$  -

$$\epsilon^{ijk} \bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k \quad (16.3)$$

This describes an antibaryon. Or we can make color singlet states out of one quark and one antiquark -

$$q^i \bar{q}_i \quad (16.4)$$

These are the mesons. They include the pseudoscalar meson octet, the pseudoscalar singlet  $\eta'$  and also an octet plus singlet of spin 1 vector mesons, shown below



Why does the color force bind these states? A partial answer is that it behaves like the electromagnetic force. The gluons couple to color charges, that is the color  $SU(3)$  generators, just as the photon, the particle of light, couples to electric charge (the generator of a  $U(1)$  symmetry). The electromagnetic force between two objects is attractive when the product of their electric charges is negative. This is why the electromagnetic force tends to bind charged particles into neutral atoms and molecules. One difference with color is that there are 8 gluons, instead of one photon, and the color interaction between two colored particles is proportional to the sum of the products of their color charges. If this is negative, the force is attractive.

Specifically, consider a state of two particles,  $A$  and  $B$ , transforming according to some representations of color  $SU(3)$ :

$$\begin{aligned} T_a^A |r, A\rangle &= |s, A\rangle [T_a^A]_{sr} \\ T_a^B |x, B\rangle &= |y, B\rangle [T_a^B]_{yx} \end{aligned} \quad (16.6)$$

where  $r, s(x, y)$  are the color indices for the  $A(B)$  representation. The two particle state is then a tensor product

$$|v, A, B\rangle = v_{rx}|r, A\rangle|x, B\rangle \quad (16.7)$$

Now the color interaction is proportional to the product of the charges,

$$T_a^A T_a^B \quad (16.8)$$

summed over  $a$ , in the usual sense of the tensor product space. This is invariant under  $SU(3)$  because the generator on the tensor product space is

$$T_a = T_a^A + T_a^B \quad (16.9)$$

which commutes with (16.8) because

$$\begin{aligned} & [T_a^A + T_a^B, T_b^A T_b^B] \\ &= [T_a^A, T_b^A] T_b^B + T_b^A [T_a^B, T_b^B] \\ &= if_{abc} (T_c^A T_b^B + T_b^A T_c^B) = 0 \end{aligned} \quad (16.10)$$

The eigenstates of (16.8) are irreducible representations of color  $SU(3)$  because of Schur's lemma. To compute the eigenvalues, it is convenient to write

$$T_a^A T_a^B = \frac{1}{2} (T_a^2 - T_a^{A^2} - T_a^{B^2}) \quad (16.11)$$

The object  $T_a^2$  (summed over  $a$ ) is called a Casimir operator (it is the analog of  $\vec{J}^2$  in angular momentum  $SU(2)$ ). It is easy to see that it commutes with the  $SU(3)$  generators and is therefore a number on each irreducible representation. Note that  $T_a^{A^2}$  and  $T_a^{B^2}$  are fixed because they are properties of the particles involved, but  $T_a^2$  depends on how the  $A$  and  $B$  states are combined into a state with definite color - that is, it depends on how the particular linear combination of tensor product states we are looking at transforms under  $SU(3)$ , and it has definite values on states that transform under an irreducible representation. Loosely speaking,  $T_a^2$  measures the size of the color representation. The smaller  $T_a^2$ , the less "colorful" the state. Thus the color force is most attractive in the least colorful states, and therefore it tends to bind quarks and antiquarks into the least colorful states possible. This is a step in the right direction.

In a  $q\bar{q}$  state, the most attractive state will be an  $SU(3)$  singlet (with  $T_a^2 = 0$ ). In a three quark state, we can consider each pair of quarks in turn. If the colors of a quark pair are combined symmetrically, the  $qq$  state is a 6. If they are combined antisymmetrically, the state is a  $\bar{3}$ .  $T_a^2$  is 4/3 for the  $\bar{3}$  and 10/3 for the 6, thus the antisymmetric combination is the most attractive. Thus the most favored state is one that is antisymmetric in the colors of each quark pair, which is the color singlet, completely antisymmetric state.

## 15.17.2 16.2 Quantum Chromodynamics

There is much more to color. The quantum theory of the color interaction of quarks and gluons is called QCD, Quantum Chromodynamics, in analogy with the quantum theory of the electromagnetic interactions of electrons and photons, QED, Quantum Electrodynamics. There is a dimensional parameter built into the QCD theory,  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , a few hundred MeV. The QCD interaction is rather weak for distances smaller than  $1/\Lambda_{\text{QCD}}$ , however, it gets strong for distances larger than  $1/\Lambda_{\text{QCD}}$ . We now believe that the quarks are permanently confined by the strong long-distance QCD interactions inside colorless hadrons, so that we can never completely isolate a colored quark from its hadronic surrounding. This doesn't mean that we cannot see

quarks. In fact, we see quarks and gluons rather directly in scattering experiments at energies and momenta much larger than  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . But it does mean that quarks do not show up directly in the low energy spectrum.

With this picture of the strong interactions, we can understand why GellMann's  $SU(3)$  is a useful symmetry. The interaction of the gluons is the same for each of the quarks. The only thing that distinguishes between quarks (in the strong interactions) is their mass. A mass term in the  $QCD$  Hamiltonian looks like

$$m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s \quad (16.12)$$

where  $u, d, s(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$  are annihilation (creation) operators for the  $u, d$  and  $s$  quarks. This can be rewritten

$$(m_u + m_d + m_s)(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)/3 \quad (a)$$

$$+ (m_u - m_d)(\bar{u}u - \bar{d}d)/2 \quad (b)$$

$$+ (2m_s - m_u - m_d)(2\bar{s}s - \bar{u}u - \bar{d}d)/6 \quad (c)$$

(a) is an  $SU(3)$  invariant. (b) breaks isospin symmetry, which is one reason that we think that the  $u$ - $d$  mass difference is very small, a few MeV.

This term is a small perturbation that you can ignore unless you are interested in isospin breaking. It happens to have effects roughly the same size as the electromagnetic interactions, even though it probably has nothing to do with electromagnetism. (c) is the term that is responsible for most of the breaking of Gell-Mann's  $SU(3)$ . It is fairly small, because the  $s - u$  and  $s - d$  quark mass differences, as measured, for example by the mass splittings within  $SU(3)$  representations, are not large compared to  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . Notice that (c) is a tensor operator, the 8 component of an octet. This is why Gell-Mann's original guess about the transformation law of the medium strong term in the Hamiltonian actually worked. We no longer have to guess because we have some understanding of the dynamics.

### 15.17.3 16.3 Heavy quarks

As you probably know, there are other quarks besides the  $u, d$  and  $s$  quarks. The  $c$  (for charm) quark, the  $b$  (for bottom or beauty) quark and the  $t$  (for top or truth) quark have all been seen in high energy collisions. They are all unstable, decaying back into the lighter quarks very quickly. But the  $c$  and  $b$  quarks last long enough to bind into hadrons just as the lighter quarks do. So there is now a rich phenomenology of particles containing  $c$  and  $b$  quarks. These particle had not been seen, and were barely even imagined when Gell-Mann first explored the consequences of  $SU(3)$  symmetry.

How do these states transform under Gell-Mann's  $SU(3)$ ? You should be able to guess what these states look like. There are meson states and baryon states. Meson states with a heavy  $b$  or  $c$  antiquark and a light  $u, d$  or  $s$  quark transform like the 3, because the light quarks are a 3. Meson states with a heavy  $b$  or  $c$  quark and a light  $u, d$  or  $s$  antiquark transform like the  $\bar{3}$ , because the light antiquarks are a  $\bar{3}$ . Meson states in which both the quark and the antiquark are heavy are  $SU(3)$  singlets. They transform trivially under Gell-Mann's  $SU(3)$  because the heavy quarks do not carry any  $SU(3)$  properties at all. The baryons containing a single heavy quark and two light quarks transform like the 6 and the  $\bar{3}$  of  $SU(3)$ . And so on.

### 15.17.4 16.4 Flavor $SU(4)$ is useless!

Every so often, someone gets the deceptively attractive idea of enlarging GellMann's flavor  $SU(3)$  symmetry to an  $SU(4)$  or an  $SU(5)$  including the  $c$  or the  $c$  and  $b$  quark. Alas, this

seemingly obvious extension is quite useless. The trouble is that the masses of the  $c$  and  $b$  quarks are so much larger than the light quark masses, and so different from each other, that mass differences involving these quarks are much larger than  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . The perturbative description of the breaking of  $SU(3)$  that makes Gell-Mann's  $SU(3)$  useful is not appropriate in the extensions to  $SU(4)$  or  $SU(5)$ . Don't be fooled.

### Problems

16.A. Find a relation between the sum of the products of the color charges in the  $q\bar{q}$  state in a meson and a the  $qq$  pair in a baryon.

16.B. Suppose that a "quix",  $Q$ , a particle transforming like a 6 under color  $SU(3)$  exists. What kinds of bound states would you expect with one quix and additional quarks or antiquarks? How do these states transform under Gell-Mann's  $SU(3)$ ? Hints: The quix is a flavor singlet, because Gell-Mann's  $SU(3)$  just transforms the light quarks. Also, you should only include states whose wave functions cannot be factored into two independent color singlets. For example, thinking just about the light quarks, you would not include a  $\bar{q}qqqq$  state, because you can show that every wave function you can write down factors into a color singlet  $\bar{q}q$  and a color singlet  $qqq$ . The corresponding state would presumably fall apart into a meson and a baryon.

16.C. Here is a convenient way to calculate the Casimir operators,  $C(D)$  ( $= T_a^2$ ) for small representations,  $D$ . Note that

$$\text{Tr } T_a^2 = \dim(D)C(D) = \sum_a \text{Tr}(T_a T_a) = \sum_a k_D = 8k_D$$

where  $k_D$  is defined in (6.2) and  $\dim(D)$  is the dimension of the representation  $D$ .  $k_D = 1/2$  for  $D = 3$  (or  $\bar{3}$ ) so  $C(D) = 4/3$ . But  $k_D$  behaves in a simple way under  $\oplus$  and  $\otimes$ :

$$(a) \ k_{D_1 \oplus D_2} = k_{D_1} + k_{D_2}$$

$$(b) \ k_{D_1 \otimes D_2} = \dim(D_1) k_{D_2} + \dim(D_2) k_{D_1}$$

Prove (a) and (b) and use them to calculate  $C(8)$ ,  $C(10)$ , and  $C(6)$ .

Chapter 17

## 15.18 Constituent Quarks

The color  $SU(3)$  theory of hadrons is a genuinely strongly interacting theory. There is no obvious small parameter that we can use to express QCD predictions in a perturbation series. At present, first principles QCD calculations can be done only by large-scale computer evaluations of the functional integral. While such calculations have yielded important evidence that QCD can explain the spectrum of light hadrons, the analysis is far from complete. Given this complexity, it is remarkable that a simple non-relativistic quarkmodel gives a reasonable qualitative picture of light hadron masses. In this section, we will go over this picture briefly.

### 15.18.1 17.1 The nonrelativistic limit

If all the quarks had masses very large compared to the QCD parameter,  $\Lambda$ , we could justify the nonrelativistic quark model in a simple way. In that case, the QCD interaction would behave rather like ordinary electrodynamics, except for a few peculiarities associated with the non-Abelian behavior of the Gluons, as we discussed in the previous chapter. The baryons would simply be nonrelativistic bound states. We would be able to organize a calculation of the bound-state energies in an expansion in inverse powers of the large quark masses. The leading contribution would be simply the sum of the quark masses. In next order, there would

be a contribution from the color interaction depending on the space wave function but independent of the quark spins. In the limit that the  $u, d$  and  $s$  are degenerate, we would have an approximate  $SU(6)$  symmetry like that discussed in Chapter 15. The leading  $SU(6)$  - breaking spin dependent interactions would be suppressed by inverse powers of the masses, because they are all relativistic effects of color magnetism. The most important such effect for the ground state (which should be primarily an  $\ell = 0$  state) would be the color magnetic moment interactions between the constituent quark spins.

This picture works surprisingly well even though the quarks are light (though it must be supplemented to describe the pseudoscalar mesons - not a surprise, because the pion is too light to be thought of as a nonrelativistic bound state). We do not understand why it works as well as it does, but let's see how it gives a picture of the masses of the ground states in the baryon and meson sectors, the  $SU(6)$  56 of baryons (the spin 1/2 octet and spin 3/2 decuplet) and the quark-antiquark bound states in the  $6 \otimes \bar{6}$  (the spin 1 and 0 octets and singlets).

What is really interesting about this picture is the way the spin-dependent interactions work. If the ground-states are primarily  $s$ -wave, there will be no contribution from a single color-magnetic moment interaction. However, there will be important contributions from gluon exchange between quarks that depend on the relative orientation of the color dipoles. Except for the color factor, this interaction looks like that between electron magnetic moments, or between current loops. If two current loops are sitting on top of one another, the state in which the dipole moments are aligned has lower energy than the state in which they are paired (antiparallel).

In both the baryon and the meson, the color force between pairs is attractive. Thus the magnetic moment interaction is like the magnetic moment interaction between an electron and a positron, with opposite charges (as explained in Chapter 16, it is the magic of color that allows each of the three pairs in the proton to behave as if they have "opposite" charges). Therefore aligned magnetic moments correspond to paired spins, and vice versa. Thus we expect that the state in which the spins are paired has lower energy than the state in which they are aligned. Formally, there is a term in the Hamiltonian that looks like

$$\sum_{\substack{\text{pairs} \\ i,j}} \frac{\kappa}{m_i m_j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \quad (17.1)$$

where the  $\sigma$ 's are the Pauli matrices acting on the spins and  $\kappa$  is some function of the quark positions. The factors of  $1/m_i$  are there because the color magnetic moment is inversely proportional to the quark mass. To the extent that the wave functions are independent of the type of quark (which they are in the  $SU(3)$  limit) and quark spin (the limit we are considering),  $\kappa$  is just a constant on the whole 56 or 35.

The spin-spin interaction, (17.1), makes the spin 1 mesons, in which the spins are aligned, heavier than the spin 0 mesons in which they are paired. It also makes the baryon decuplet, in which every pair is aligned, heavier than the octet, in which some spins are paired. In particular, if we ignore the mass differences between quarks it clearly just depends on the total spin,  $\vec{S}$ , because we can write it as

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa}{m^2} \sum_{\substack{\text{pairs} \\ i,j}} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \\ &= \frac{\kappa}{2m^2} \left( \sum_{i,j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j - \sum_j \vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_j \right) \\ &= \frac{\kappa}{2m^2} (4\vec{S}^2 - 3n) \end{aligned} \quad (17.2)$$

where  $n = 3$  for baryons and 2 for mesons.

The real beauty of this picture is that in the masses of the ground state particles, we see the quark mass dependence of the color magnetic interaction. For example, the splitting between  $\Xi^*$  and  $\Xi$  is smaller than the  $\Delta - N$  splitting because it involves the heavier  $s$  quarks. Likewise in the meson system, the  $K^* - K$  splitting is smaller than the  $\rho - \pi$  splitting for the same reason. The most amusing example along these lines is the  $\Sigma - \Lambda$  splitting. These two baryons consist of the same quarks, one  $u$ , one  $d$  and one  $s$ , and they have the same total spin. The difference is the way in which the spins are put together. In the  $\Sigma$ , because the isospin is 1, the  $u$  and  $d$  quarks are in a symmetric flavor state, and thus the spins must be aligned, because the state must also be symmetric in spin space. In the  $\Lambda$ , the isospin is 0, the  $u$  and  $d$  quarks are in an antisymmetric flavor state, and thus the spins are paired. The  $\Lambda$  has lower energy because the color magnetic interaction between the lighter  $u$  and  $d$  quarks is more important.

Furthermore, the ratio of  $m_s$  to  $m_{u,d}$  required is about the same in the mesons and the baryons. You will show this in problem 17.B.

Although this simple picture was developed in the early days of QCD, it is still not known for certain whether its success is simply fortuitous, or whether it is telling us something important about QCD, or both! Probably, both. Certainly, there are reasons to believe that the picture is more complicated, because there are other ways of estimating the quark mass ratios that give very different results. But it is also true that the constituent quark model picture described in this chapter goes over very smoothly to a sensible description of mesons and baryons containing heavy  $c$  and  $b$  quarks. Thus even though, as explained in the last chapter, we cannot use more powerful symmetry arguments to understand these states because the symmetries are badly broken, we can still understand a lot about them by using the quark model directly. The simultaneous success of the constituent quark model for both

heavy and light quark states convinces me that it does capture at least some important part of the physics of QCD bound states.

## Problems

17.A. Suppose the quix,  $Q$ , described in (16.B) is a heavy spin zero particle. Then in the ground state  $qq\bar{Q}$  bound states of an antiquix and two light quarks (any of  $u, d$  or  $s$ ), the only spin dependence should come from the light quarks (because the ground state presumably has orbital angular momentum zero). Discuss the spectrum of all the  $qq\bar{Q}$  ground state particles, spin 0 and spin 1, giving their  $SU(3)$  properties and their spins. Hint: In the ground state, we expect the space wave function of the two quarks to be symmetric under exchange.

17.B. Estimate  $m_{u,d}/m_s$  by comparing the  $\rho - \pi$  mass splitting with the  $K^* - K$  mass splitting. Make an independent estimate of the ratio using appropriate combinations of the  $\Sigma^* - \Sigma$  and  $\Sigma - \Lambda$ . mass differences.

\*17.C. Discuss semiquantitatively the mass spectrum of baryon states with a single  $c$  quark and a pair of light quarks (various combinations of  $u, d$  and  $s$ ). You will need to find some experimental information about some of these bound states to get started. You will also need to think about which of the formulas in this chapter you can trust in this context.

Chapter 18

## 15.19 Unified Theories and $SU(5)$

The forces of the standard model of Elementary Particle Physics are shown in the table below:



|          |                 |                        |                    |
|----------|-----------------|------------------------|--------------------|
| force    | E&M             | weak                   | strong             |
| range    | $\infty$        | $10^{-16}$ cm          | $10^{-13}$ cm      |
| strength | $\frac{1}{137}$ | $\approx \frac{1}{30}$ | $\approx 1$        |
| particle | photon          | $W$ and $Z$            | gluons             |
| mass     | 0               | $\approx 100m_P$       | 0 or $\approx m_P$ |

|                                      |
|--------------------------------------|
| gravity                              |
| $\infty$                             |
| $\approx 10^{-38} \frac{E^2}{m_P^2}$ |
| graviton?                            |
| 0                                    |

Gravity is separate, because if we were only interested in the physics of individual particles, we wouldn't know about it at all. It is only because we have some experience with huge collections of particles put together into planets and stars that we know about gravity.

### 15.19.1 18.1 Grand unification

Each of the other forces is associated with a Lie Algebra. This suggests that it may be possible to unify all the particle interactions as different aspects of a single underlying interaction, based on a single simple Lie algebra.

We will see in this chapter that all the particle interactions fit very neatly into the simple Lie algebra  $SU(5)$ . We will also discuss other embeddings, based on larger algebras. These theories are called Grand Unified theories, where the term "grand" is added for obscure historical reasons. We will not be able to discuss the full structure of these theories without the language of

quantum field theory. But we can, at least, exhibit the Lie algebraic structure of grand unified theories in some detail. I hope that this will whet your appetite for a more complete study of the physics behind the group theory. <sup>1</sup>

We have already discussed the color  $SU(3)$  theory of the strong interactions. The  $SU(2) \times U(1)$  theory of the electroweak interactions is slightly more complicated. We will give only a superficial introduction here.

### 15.19.2 18.2 Parity violation, helicity and handedness

One of the salient features of the weak interactions is that they violate parity. Parity is the symmetry in which the signs of all space coordinates are changed. It is equivalent (up to a rotation) to reflection in a mirror. Spin 1/2 particles like electrons and quarks, if they are moving, can be characterized by their helicity, the component of the spin in the direction of motion. For a spin 1/2 particle, the helicity is  $\pm 1/2$ . Particles with helicity 1/2 are said to be right-handed. Those with helicity  $-1/2$  are said to be left-handed. For reasons that are not obvious, but which follow from basic principles of quantum field theory, the antiparticle of a right-handed particle is left-handed, and the antiparticle of a left-handed particle is right-handed. Helicity (or handedness) is not invariant under a parity transformation because a mirror interchanges left and right. Thus if some interaction acts differently on the right-handed and left-handed components of a particle, the interaction is parity violating. That is what the weak interactions do. A massive particle (at least if it carries a conserved particle number) must have both left-handed and right-handed components, because the helicity of a massive particle is not relativistically invariant. It changes sign depending on the reference frame. Thus electrons and their heavier cousins, muons and taus, and all the quarks have both left and right-handed parts. But a massless particle need not have both components. Neutrinos are known to



be very light, and for our purposes, we can treat them as massless.<sup>2</sup> Thus far, only left-handed neutrinos and their antiparticles, right-handed antineutrinos, have been observed.

For reasons which will become clear, it is useful to describe the symmetry properties of the creations and annihilation operators, rather than those of the states. We will restrict ourselves to the interactions of the lightest particle, the  $u$  and  $d$  quarks and the electron and its neutrino. The heavier particles all seem to be copies of one of these.

The Glashow-Weinberg-Salam theory of the weak and electromagnetic interactions treats the creation and annihilation operators as tensor operators under an  $SU(2) \times U(1)$  Lie algebra. We will call the  $SU(2)$  generators  $R_a$  and the  $U(1)$  generator  $S$ . Consider the creation operators for the righthanded particles:

$$u^\dagger, \quad d^\dagger, \quad e^\dagger, \quad \bar{u}^\dagger, \quad \bar{d}^\dagger, \quad \bar{e}^\dagger, \quad \bar{\nu}^\dagger \quad (18.1)$$

which create, respectively, right-handed  $u$  quarks,  $d$  quarks, electrons,  $\bar{u}$  antiquarks,  $\bar{d}$  antiquarks, positrons, and antineutrinos. The color index of the quark and antiquark operators is suppressed for now because it plays no role in the weak interactions. We will come back to it later. Color  $SU(3)$  commutes with the electroweak  $SU(2) \times U(1)$ . Under the  $SU(2)$  algebra, the positron and the antineutrino form a doublet, transforming according to the spin 1/2 representation. Like the proton and neutron creation operators under isospin, these two creation operators can be regarded as the 1 and 2 components of a tensor operator:

$$\bar{\ell}_1^\dagger = \bar{e}^\dagger, \quad \bar{\ell}_2^\dagger = \bar{\nu}^\dagger \quad (18.2)$$

Likewise, the  $\bar{d}$  and  $\bar{u}$  antiquarks transform like a doublet under  $SU(2)$  and we can write them as components of a tensor operator:

$$\bar{\psi}_1^\dagger = \bar{d}^\dagger, \quad \bar{\psi}_2^\dagger = \bar{u}^\dagger \quad (18.3)$$

The  $\bar{\psi}$  field is also a tensor operator under color  $SU(3)$ , transforming like a  $\bar{3}$ , but for now, we have not written the  $SU(3)$  index explicitly.

Then the commutation relations of these creation operators with the  $SU(2)$  and  $U(1)$  generators are the following:

$$\begin{aligned} [R_a, u^\dagger] &= 0, & [S, u^\dagger] &= 2u^\dagger/3 \\ [R_a, d^\dagger] &= 0, & [S, d^\dagger] &= -d^\dagger/3; \\ [R_a, e^\dagger] &= 0, & [S, e^\dagger] &= -e^\dagger; \\ [R_a, \bar{\psi}_r^\dagger] &= \bar{\psi}_s^\dagger [\sigma^a]_{sr}/2, & [S, \bar{\psi}_r^\dagger] &= -\bar{\psi}_r^\dagger/6 \\ [R_a, \bar{\ell}_r^\dagger] &= \bar{\ell}_s^\dagger [\sigma^a]_{rs}/2, & [S, \bar{\ell}_r^\dagger] &= \bar{\ell}_r^\dagger/2 \end{aligned} \quad (18.4)$$

Thus all the fields are tensor operators, with  $\bar{\psi}^\dagger$  and  $\bar{\ell}^\dagger$  transforming like doublets under the  $SU(2)$ , and the rest transforming like singlets.

The annihilation operators for the right-handed particles are just the adjoints of (18.1). They transform under the complex conjugate representation. In particular, all the  $S$  values change sign. The creation operators for the left-handed particles transform like the annihilation operators for their right-handed antiparticles. Thus, for example, the creation operator for a lefthanded  $u$  quark transforms like the annihilation operator from a right-handed  $\bar{u}$  antiquark.

The  $S$  values in (18.4) have been constructed so that the electric charge operator,  $Q$ , is

$$Q = R_3 + S \quad (18.5)$$

<sup>1</sup> See H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 438.

<sup>2</sup> There are a number of experimental indications of tiny neutrino masses. Note also that a neutrino could have a small mass that violates particle number.

You can check that

$$\begin{aligned} [Q, u^\dagger] &= 2u^\dagger/3, & [Q, d^\dagger] &= -d^\dagger/3 \\ [Q, e^\dagger] &= -e^\dagger, \\ [Q, \bar{u}^\dagger] &= -2\bar{u}^\dagger/3, & [Q, \bar{d}^\dagger] &= \bar{d}^\dagger/3 \\ [Q, \bar{e}^\dagger] &= \bar{e}^\dagger, & [Q, \bar{\nu}^\dagger] &= 0 \end{aligned} \quad (18.6)$$

Now the idea of the electroweak standard model is that as in QCD, each of the generators of the Lie algebra is associated with a force particle. The  $R_a$  with three  $W_a$  s, and the  $S$  with  $X$ . One linear combination of  $W_3$  and  $X$  is the photon which couples to the electric charge,  $Q$ . Thus electromagnetism is contained within this larger theory. The other particles, the  $W^\pm$  (corresponding to the complex combinations  $W_1 \pm iW_2$ ) and the  $Z$  (the combination of  $W_3$  and  $X$  orthogonal to the photon) are responsible for the weak interactions.

### 15.19.3 18.3 Spontaneously broken symmetry

There is something peculiar going on here. The  $SU(2) \times U(1)$  cannot really be a symmetry. If it were, the weak interactions would have long range, like the electromagnetic interactions. Instead, the weak interactions have very short range and their force particles, the  $W$  and  $Z$ , are massive. Furthermore, if the  $SU(2) \times U(1)$  symmetry remained unbroken, the quarks and the electron would have to be massless particles, because the weak interactions treat their left-handed and right-handed helicity components differently, which is consistent with relativity only for massless particles. Some new physics gives mass to the quarks and leptons, and to all but one linear combination (the photon) of  $R_3$  and  $X$ , without destroying the consistency of the theory. What is this physics?

The answer is the structure of the vacuum state. The  $SU(2) \times U(1)$  generators commute with the Hamiltonian, but the vacuum state of the world is not an  $SU(2) \times U(1)$  singlet. Hence,  $SU(2) \times U(1)$  is not a good symmetry on the states of the physical Hilbert space, all of which are built on the asymmetric vacuum state. The quarks and leptons and the  $W^\pm$  and  $Z$  are not degenerate with the massless photon in our vacuum.

This situation is called spontaneous symmetry breaking. The  $SU(2) \times U(1)$  symmetry is said to be spontaneously broken down to the  $U(1)$  of electromagnetism, because only the linear combination  $Q = R_3 + S$  treats the vacuum state of our world as a singlet. The resulting theory gives a very good description of the weak and electromagnetic interactions.

### 15.19.4 18.4 Physics of spontaneous symmetry breaking

It would be logical to explain, at this point, what new physics it is that produces spontaneous symmetry breaking. Alas, we still do not know what this new physics is. There is, however, a model of the process that is easy to explain and worth understanding. This is the hypothesis of the Higgs field. A field is a quantity defined at each point in space and time, like the electric and magnetic fields of electromagnetism. The electric and magnetic fields have several components that transform nontrivially under rotations and Lorentz transformations. But imagine that there exists a scalar field, which is invariant under rotations and Lorentz transformations. Such a field can have a non-zero value in the vacuum state without breaking rotation symmetry or Lorentz invariance. If the field transforms nontrivially under  $SU(2) \times U(1)$ , a non-zero vacuum value breaks the  $SU(2) \times U(1)$  symmetry spontaneously.

In the  $SU(2) \times U(1)$  electroweak theory, a Higgs field transforming like a doublet of  $SU(2)$  and with  $S = 1/2$  does the trick. Such a field (call it  $\phi$ ) transforms as

$$[R_a, \phi_r^\dagger] = \phi_s^\dagger [\sigma^a]_{sr} / 2, \quad [S, \phi_r^\dagger] = \phi_r^\dagger / 2 \quad (18.7)$$

If such a field exists, its self interactions can be described by a potential,  $V(\phi)$  which is just the energy stored in a constant  $\phi$  field.  $V(\phi)$  is actually only a function of  $\phi^\dagger\phi$  because it is invariant under  $SU(2) \times U(1)$ . Now the lowest energy state corresponds to the minimum value of  $V(\phi)$ . But it may be that  $\phi$  is not zero at the minimum of  $V(\phi)$ . A simple example of a potential with a non-zero value of  $\phi$  at its minimum is

$$V(\phi) = \lambda (\phi^\dagger\phi - v^2)^2 \quad (18.8)$$

for  $\lambda > 0$ . This is minimized when  $\phi^\dagger\phi = v^2$ . Then, for example, we can take the vacuum value of  $\phi$  to be

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = v \quad (18.9)$$

Notice that (18.7) implies that the combination  $R_3 + S$  acting on the vacuum value of  $\phi$ , (18.9), gives zero, so that this particular subgroup of  $SU(2) \times U(1)$ , associated with electromagnetism, is not broken by the Higgs field. But any other linear combination of  $SU(2) \times U(1)$  generators acting on the vacuum value of  $\phi$  gives a non-zero result, which means that these generators are spontaneously broken - they correspond to rotations from the physical vacuum to an unphysical vacuum state. The precise form of the unbroken combination depends on the particular choice, (18.9), for the vacuum value of  $\phi$ . However, any other choice with  $\phi^\dagger\phi = v^2$  gives the same physics because it is related to (18.9) by an  $SU(2) \times U(1)$  transformation. Thus it does no harm to make the choice (18.9) which leads to a simple form for the unbroken  $U(1)$  generator,  $Q = R_3 + S$ .

The Higgs field also allows the electron and quarks to get mass. The rule is that a Higgs field can produce a mass for a spin 1/2 particle if the tensor product of the representation of the right-handed particle and the representation of the corresponding antiparticle contains the representation of the Higgs field or its complex conjugate.<sup>3</sup> You can check that this is the case for the electron and quark fields.

### 15.19.5 18.5 Is the Higgs real?

There is overwhelming evidence that the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  model of the strong and electroweak interactions, with the  $SU(2) \times U(1)$  symmetry spontaneously broken down to the  $U(1)$  of electromagnetism, is an excellent description of the interactions of elementary particles down to distances of the order of  $10^{-16}$  cm. It is important to point out, however, that we do not yet know whether the Higgs field actually exists. It is quite possible that it is simply a mathematical metaphor for some other dynamics with the same symmetry properties. As of this writing, we do not know whether the Higgs is physics or mathematics. But we do know that if the Higgs is not real, there is some other new physics that does the symmetry breaking. One of the most important goals for particle physicists today is to either see the Higgs field directly, or to find the physics that replaces it.

### 15.19.6 18.6 Unification and $SU(5)$

The  $SU(2) \times U(1)$  symmetry of (18.4) is a partial unification of the weak and electromagnetic interactions. It leaves many striking features of the physics of our world unexplained. One of these is the quantization of electric charge. The hydrogen atom is known to be electrically

---

<sup>3</sup> In quantum field theory, this makes it possible to write an  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  invariant interaction terms involving the Higgs field and the particle creation and annihilation operators that becomes a mass term when the Higgs field is replaced by its vacuum value.

neutral to extraordinary accuracy. This implies that there is a relation between the charges of the quarks and that charge of the electron. However, (18.5), while it can describe the charges we see, does not explain them. The problem is the  $S$  generator. The values of  $R_3$  are quantized because of the non-Abelian nature of the  $SU(2)$  algebra. However, the values of  $S$  are completely arbitrary. They are chosen to describe the quantized charges we see, but if we could embed both  $R_3$  and  $S$  into a simple group, then the values of  $S$ , like those of  $R_3$ , would be constrained by the structure of the algebra.

This idea was a major motivating factor in the search for unified theories in the early 70s. At first, we searched for a simple group that unified only the  $SU(2) \times U(1)$  electroweak theory. This search proved fruitless. It was only when color  $SU(3)$  was included as well that interesting unifications could be obtained.

Thus we ask, is it possible to include the color  $SU(3)$  of the strong interactions and further unify  $SU(3)$  and  $SU(2) \times U(1)$  into a larger algebra,  $G$ , which is spontaneously broken down to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ?

We will say that a set of creation operators,  $a_{xr}^\dagger$ , transforms according to the representation  $(D, d)_s$  of  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  if it satisfies

$$\begin{aligned} [T_a, a_{xr}^\dagger] &= a_{yr}^\dagger [T_a^D]_{yx} \\ [R_a, a_{xr}^\dagger] &= a_{xt}^\dagger [R_a^d]_{tr} \\ [S, a_{xr}^\dagger] &= s a_{xr}^\dagger \end{aligned} \quad (18.10)$$

Thus  $x$  is a color  $SU(3)$  index, associated with the  $SU(3)$  representation  $D$ . The  $r$  is an  $SU(2)$  index, associated with the  $SU(2)$  representation  $d$ . The  $s$  is the  $S$  quantum number. (18.10) and (18.5) imply that  $s$  must be simply the average electromagnetic charge of the representation, because for each representation,

$$\text{Tr } Q = \text{Tr } R_3 + \text{Tr } S = \text{Tr } S \quad (18.11)$$

(the trace of  $R_3$  always vanishes because of theorem 8.9, or equivalently, because  $SU(2)$  representations are symmetrical about  $R_3 = 0$ ).

We know the color  $SU(3)$  transformation properties of all the particles, so we can read off the representations of the creation operators for the right-handed particles from (18.4):

$$\begin{aligned} u^\dagger &: (3, 1)_{2/3}, & d^\dagger &: (3, 1)_{-1/3}, & e^\dagger &: (1, 1)_{-1}, \\ \bar{\psi}^\dagger &: (\bar{3}, 2)_{-1/6}, & \bar{\ell}^\dagger &: (1, 2)_{1/2} \end{aligned} \quad (18.12)$$

where we have indicated the  $SU(2)$  representations by their dimensions. The full  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  representation of the creation operators for the right-handed particles is thus,

$$(3, 1)_{2/3} \oplus (3, 1)_{-1/3} \oplus (1, 1)_{-1} \oplus (\bar{3}, 2)_{-1/6} \oplus (1, 2)_{1/2} \quad (18.13)$$

The creation operators for the left-handed fields transform like the complex conjugate of the representation (18.13):

$$(\bar{3}, 1)_{-2/3} \oplus (\bar{3}, 1)_{1/3} \oplus (1, 1)_1 \oplus (3, 2)_{1/6} \oplus (1, 2)_{-1/2} \quad (18.14)$$

where we have used the fact that the  $SU(2)$  representation is real,  $\bar{2} = 2$ . Notice that (18.13) and (18.14) are not the same, and thus the representation is complex because of the parity violating habits of the electroweak  $SU(2) \times U(1)$ .

(18.13) is the starting point in the search for unifying algebras. We want to find an algebra  $G$  which contains  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  as a subgroup, and which has a representation

transforming like (18.13) under this subgroup. The rank of  $G$  must be at least four if it is to contain the four commuting generators,  $T_3, T_8, R_3$  and  $S$ . The simplest possibility is to try the rank four algebra,  $SU(5)$ . We will see later that the other simple rank 4 algebras could not possibly work because they do not have complex representations, and so there is no way they could describe the complex representation, (18.13).

$SU(5)$  has a five dimensional representation of course. It actually has two, because the 5 is complex, and thus the 5 and  $\bar{5}$  (or [1] and [4]) are not equivalent. Can we find an  $SU(2) \times U(1)$  subgroup of  $SU(5)$  such that the 5 transforms like some five dimensional subset of the creation operators? The only possible such subset is

$$(3, 1)_{-1/3} \oplus (1, 2)_{1/2} \quad (18.15)$$

The five dimensional subset,

$$(3, 1)_{2/3} \oplus (1, 2)_{1/2} \quad (18.16)$$

cannot work because the generator  $S$  is not traceless on it. Thus by theorem 8.9,  $S$  could not possibly be an  $SU(5)$  generator for this choice.

It is straightforward to embed  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  in  $SU(5)$  to obtain (18.15). Take the  $SU(3)$  generators to be traceless matrices acting on only the first three indices in the 5,

$$\begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18.17)$$

and the  $SU(2)$  generators to be the traceless matrices acting on the last two,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_a \end{pmatrix}$$

Then  $S$  is the generator that commutes with both (18.17) and (18.18),

$$\begin{pmatrix} -I/3 & 0 \\ 0 & I/2 \end{pmatrix} \quad (18.19)$$

Thus we can put the  $d^\dagger$  and  $\bar{\ell}^\dagger$  creation operators into an  $SU(5)5, \lambda_j^\dagger$ , as follows:

$$\begin{aligned} \lambda_x^\dagger &= d_x^\dagger, \text{ for } x = 1 \text{ to } 3 \\ \lambda_4^\dagger &= \bar{\ell}_1^\dagger = \bar{e}^\dagger \\ \lambda_5^\dagger &= \bar{\ell}_2^\dagger = \bar{\nu}^\dagger \end{aligned} \quad (18.20)$$

What about the rest of (18.13). What remains is  $u^\dagger, e^\dagger$ , and  $\bar{\psi}^\dagger$  which transforms as

$$(3, 1)_{2/3} \oplus (1, 1)_{-1} \oplus (\bar{3}, 2)_{-1/6} \quad (18.21)$$

This representation is 10 dimensional.  $SU(5)$  has a 10 and a  $\bar{10}$ , the [2] and [3] representations. The 10 is an antisymmetric tensor product of two 5's, so we can determine how it transforms under the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  subgroup by taking the antisymmetric product of (18.15) with itself (you can easily check that this is equivalent to using the general rule described in chapter 13). The  $SU(3)$  and  $SU(2)$  representations compose in the standard way. The  $S$  quantum number simply add. Thus,

$$\begin{aligned} &[(3, 1)_{-1/3} \oplus (1, 2)_{1/2}] \otimes [(3, 1)_{-1/3} \oplus (1, 2)_{1/2}]_{AS} \\ &= [(\bar{3}, 1)_{-2/3} \oplus (1, 1)_1 \oplus (3, 2)_{1/6}] \end{aligned} \quad (18.22)$$

This is just the complex conjugate of the representation (18.21). Thus what we actually want is the  $\overline{10}$  representation, and then we can write the remaining right-handed fermion creation operators in an  $SU(5)$  representation antisymmetric in two upper indices,  $\xi^{jk\dagger} = -\xi^{kj\dagger}$ , with

$$\begin{aligned}\xi^{ab\dagger} &= \epsilon^{abc} u_c^\dagger \text{ for } a, b, c = 1 \text{ to } 3 \\ \xi^{a\dagger\dagger} &= \bar{\psi}_2^{a\dagger} = \bar{u}^{a\dagger} \text{ for } a = 1 \text{ to } 3 \\ \xi^{a5\dagger} &= \bar{\psi}_1^{a\dagger} = \bar{d}^{a\dagger} \text{ for } a = 1 \text{ to } 3 \\ \xi^{45\dagger} &= e^\dagger\end{aligned}\tag{18.23}$$

This is the standard  $SU(5)$  model, with the creation operators for the right-handed particles transforming like  $5 \oplus \overline{10}$ , or equivalently, with the creation operators for the left-handed particles transforming like  $\bar{5} \oplus 10$ . The most interesting thing about it is the way that everything fits.

### 15.19.7 18.7 Breaking $SU(5)$

There are two issues that must be addressed in discussing the spontaneous breaking of  $SU(5)$  symmetry.

1. How is the symmetry broken down from  $SU(5)$  to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ?
2. How do the quarks and leptons get mass?

Let us answer these in the Higgs field language.

There is a very simple solution to the problem of breaking  $SU(5)$  down to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , which in fact is very much analogous to GellMann's solution to the problem of breaking  $SU(3)$  down to the  $SU(2) \times U(1)$  of isospin and hypercharge. The  $S$  generator in the adjoint representation has all the desired properties for the vacuum value of a Higgs field. Just as the hypercharge generator in the adjoint representation of  $SU(3)$  commutes with isospin and hypercharge, so the  $U(1)$  generator,  $S$ , in the adjoint of  $SU(5)$  commutes with  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Thus the 24 representation with a vacuum value in the  $S$  direction <sup>4</sup> is a good choice for the Higgs field that breaks  $SU(5)$  down to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

Two conditions must be satisfied in order for a Higgs field to give mass directly to the fermions in an  $SU(5)$  theory. <sup>5</sup> The Higgs representation (or its

complex conjugate) must appear in the tensor product of the  $SU(5)$  representations in which the fermion and its antifermion appear. And the Higgs representation must have a component that transforms under  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  like the Higgs field of the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  model or its complex conjugate.

The right-handed positron ( $\bar{e}$ ) and  $d$  quark fields are in the  $5$ , while their antiparticles, the electron and  $\bar{d}$  fields are in the  $\overline{10}$ . In  $SU(5)$ ,  $5 \otimes \overline{10}$  is  $[1] \otimes [3] = [4] \oplus [3, 1]$ , or  $\bar{5} \oplus \overline{45}$  (see problem 13.B).

From (18.15), you can check that the  $5$  contains a component that transforms like the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  Higgs field - the  $(1, 2)_{1/2}$ . You can check (see problem 18.E) that the  $45$  has the desired component as well.

Thus the electron and  $d$  quark masses can come from either of the two Higgs representations,  $5$  or  $45$ .

---

<sup>4</sup> Unlike the situation in the Higgs doublet breaking  $SU(2) \times U(1)$ , there are physically inequivalent directions in the adjoint of  $SU(5)$ . One can show that the  $S$  direction is a possible vacuum value.

<sup>5</sup> More complicated, indirect mechanisms involving quantum mechanical "loop" effects are also possible, but we will not discuss these.

The right-handed  $u$  and  $\bar{u}$  are both in the  $\overline{10}$ , and

$$[3] \otimes [3] = [1] + [4, 2] + [3, 3] = 5 + 45 + 50 \quad (18.24)$$

We already know that both the 5 and 45 of  $SU(5)$  Higgs fields have the appropriate component to act as the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  Higgs field, thus they can give mass to the  $u$  quark. The 50, however, does not have any component transforming like  $(1, 2)_{\pm 1/2}$  under  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  (see problem 18.E). Thus this representation is not useful for giving mass to the  $u$  quark.

## 15.19.8 18.8 Proton decay

Another fascinating thing about the  $SU(5)$  theory is that quarks, antiquarks and the electron all appear in the same irreducible representation. Because of this, some of the  $SU(5)$  interactions do not conserve baryon number. Thus  $SU(5)$  unification leads to proton decay. The proton is known to be extremely long-lived. But if the vacuum value of the 24 Higgs field is extremely large, then the interactions that cause proton decay are short range and the probability of two quarks inside the proton interacting to cause the proton to decay is very small. It turns out that we know approximately what the vacuum value of the 24 must be in order to explain the observed differences between the color  $SU(3)$ , electroweak  $SU(2)$  and  $U(1)$  forces.<sup>6</sup> Thus the rate of proton decay can actually be predicted in a given  $SU(5)$  model. Since  $SU(5)$  was first found theoretically, experimenters have looked for proton decay with

more and more sensitive experiments, so far without success. In fact, the simplest version of the  $SU(5)$  unified theory is fairly convincingly ruled out by these experiments. But slightly elaborated versions of the  $SU(5)$  theory, particularly supersymmetric versions, are still extremely promising.

### Problems

18.A. Check explicitly that mass terms for the electron and the  $u$  and  $d$  quarks are allowed in the  $SU(2) \times U(1)$  model in which the symmetry is broken by the Higgs field of (18.7). Hint: see the discussion on page 230.

18.B. Find the symmetric tensor product of (18.15) with itself.

18.C. Do the same for (18.21).

18.D. Consider the operator

$$O = \bar{e}^\dagger \epsilon^{abc} u_a u_b d_c$$

where  $u$  and  $d$  are quark annihilation operators. Show that if the operator  $O$  appears in the Hamiltonian, it has the right charge and color properties to allow a proton to decay into a  $\pi^0$  and a positron.

18.E. How do the 45([4, 2]) and 50([3, 3]) of  $SU(5)$  transform under the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  subgroup? Hint: it may be easier to answer the question for the complex conjugate representations and then complex conjugate.

Chapter 19

## 15.20 The Classical Groups

There are four infinite series of simple Lie algebras, generating what are called the classical groups. The first of these consists of the  $SU(N)$  algebras that we have studied already. Their Dynkin diagrams have the form

<sup>6</sup> This is not something that can be understood using group theory alone. It involves the dynamics.



The rank  $n$  algebra  $SU(n+1)$  was called  $A_n$  by Cartan, who first classified these things. In this brief section, we will go over the others very lightly, before we do the complete classification. Later, we will discuss each of them in detail.

### 15.20.1 19.1 The $SO(2n)$ algebras

The orthogonal  $2n \times 2n$  matrices form the group of rotations in  $2n$ -dimensional real space. The group is generated by the imaginary antisymmetric  $2n \times 2n$  matrices, of which  $n(2n-1)$  are independent. We can choose the Cartan generators as follows:

$$[H_m]_{jk} = -i(\delta_{j,2m-1}\delta_{k,2m} - \delta_{k,2m-1}\delta_{j,2m}) \quad (1.2)$$

This amounts to breaking up the  $2n$  dimensional space into  $n$  different two dimensional subspaces on which the different Cartan generators act.  $H_m$  is a little Pauli matrix,  $\sigma_2$ , in the appropriate 2 dimensional space, with zeros everywhere else. The eigenvectors of  $\sigma_2$  are given by

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \pm 1 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \quad (19.3)$$

Thus the eigenvectors of the  $H_m$  are

$$[|\pm e^k\rangle]_j = \delta_{j,2k-1} \pm i\delta_{j,2k} \quad (19.4)$$

satisfying

$$H_m |\pm e^k\rangle = \pm \delta_{km} |\pm e^k\rangle \quad (19.5)$$

Thus the weight vectors are  $\pm$  the unit vectors  $e^k$  with components

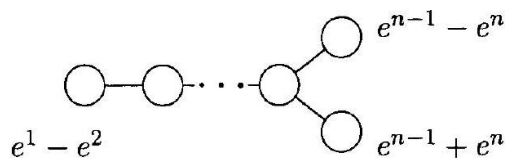
$$[e^k]_m = \delta_{km} \quad (19.6)$$

(as usual, you must not confuse the space on which the generators act with the Cartan space in which the weight vectors live).

The roots connect one subspace with another in all possible ways, so that the roots vectors are

|                |                                       |        |
|----------------|---------------------------------------|--------|
| roots          | $\pm e^j \pm e^k$ for $j \neq k$      | (19.7) |
| positive roots | $e^j \pm e^k$ for $j < k$             |        |
| simple roots   | $e^j - e^{j+1}$ for $j = 1 \dots n-1$ |        |
|                | and $e^{n-1} + e^n$                   |        |

The Dynkin diagram is



The algebra  $SO(2n)$  was called  $D_n$  by Cartan.

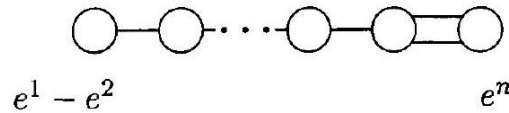


### 15.20.2 19.2 The $SO(2n + 1)$ algebras

For a  $2n + 1$  dimensional space, we can find  $n$  two dimensional subspaces, but there is a one dimensional subspace left over. Thus for the rotation group in  $2n + 1$  dimensional space, generated by the imaginary antisymmetric  $(2n + 1) \times (2n + 1)$  matrices, we can choose the Cartan generators as before, and there will be weights of the form  $\pm e^k$  corresponding to vectors in the  $k$  th two dimensional subspace. But there is also a 0 weight, associated with the extra dimension. Again, just as before, there will be roots connecting the various two dimensional subspaces, with the same roots as in  $SO(2n)$ . But now there are also roots connecting the extra one dimensional subspace with the others, with roots  $\pm e^j$ . Thus the roots are

$$\begin{array}{ll} \text{roots} & \pm e^j \pm e^k \text{ for } j \neq k \text{ and } \pm e^j \\ \text{positive roots} & e^j \pm e^k \text{ for } j < k \text{ and } e^j \\ \text{simple roots} & e^j - e^{j+1} \text{ for } j = 1 \dots n - 1 \\ & \text{and } e^n \end{array} \quad (19.9)$$

The root  $e^{n-1} + e^n$  is not simple in  $SO(2n + 1)$  because it is a sum of  $e^{n-1} - e^n$  and twice  $e^n$ . The Dynkin diagram is



The algebra  $SO(2n + 1)$  was called  $B_n$  by Cartan.

### 15.20.3 19.3 The $Sp(2n)$ algebras

Finally consider the  $2n \times 2n$  dimensional hermitian matrices which are tensor products of  $2 \times 2$  matrices and  $n \times n$  matrices, of the following form:

$$1 \otimes A, \quad \sigma_1 \otimes S_1, \quad \sigma_2 \otimes S_2, \quad \sigma_3 \otimes S_3 \quad (19.11)$$

where the  $\sigma_a$  are the Pauli matrices,  $A$  is an antisymmetric  $n \times n$  matrix, and  $S_1, S_2$  and  $S_3$  are symmetric  $n \times n$  matrices. You can check that these close under commutation because of the properties of the Pauli matrices. The subset

$$1 \otimes A, \quad \sigma_3 \otimes S_3 \quad (19.12)$$

for traceless  $S_3$  generate an  $SU(n)$  subalgebra of  $Sp(2n)$  of the form

$$\begin{pmatrix} T_a & 0 \\ 0 & -T_a^* \end{pmatrix} \quad (19.13)$$

which generates the reducible representation  $n \oplus \bar{n}$  with weights  $\nu^j$  and  $-\nu^j$  where the  $\nu^j$  vectors are defined in (13.9). We will take the first  $n - 1$  elements of our Cartan subalgebra to be the Cartan subalgebra of this  $SU(n)$  subgroup,  $H_1, H_2 \dots H_{n-1}$ . The final element of the Cartan subalgebra is then

$$H_n = \sigma_3 \otimes I / \sqrt{2n} \quad (19.14)$$

All the generators of the  $SU(n)$  subalgebra commute with  $H_n$ , thus the roots of the subalgebra have  $H_n = 0$ . We already know that the other components are given by the  $SU(n)$  root vectors,  $\nu^j - \nu^k$ . The other roots correspond to the matrices  $(\sigma_1 \pm i\sigma_2) \otimes S_{k\ell}$  where

$$[S_{k\ell}]_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}) \quad (19.15)$$

with  $H_n = \pm\sqrt{2/n}$  and  $H_m = \pm[\nu^k + \nu^\ell]_m$ .

I should say that this is a pretty stupid way of writing the roots. Later, when we talk about  $Sp(2n)$  in more detail, we will introduce a better notation in which all these relations are more obvious. Anyhow, if we take  $\nu^{n+1}$  to be a unit vector orthogonal to all the  $\nu^j$  for  $j = 1$  to  $n$ , the roots can be written as

$$\begin{array}{ll} \text{roots} & \nu^j - \nu^k \text{ for } j \neq k \\ \text{positive roots} & \nu^j - \nu^k \text{ for } j < k \\ & \text{and } \left( \nu^j + \nu^k + \sqrt{\frac{2}{n}}\nu^{n+1} \right) \\ \text{simple roots} & \nu^j - \nu^{j+1} \text{ for } j = 1 \dots n-1 \\ & \text{and } \left( 2\nu^n + \sqrt{\frac{2}{n}}\nu^{n+1} \right) \end{array} \quad (19.16)$$

The Dynkin diagram is

$$\nu^1 - \nu^2 - \bigcirc - \bigcirc \nu^n + \sqrt{\frac{2}{n}}\nu^{n+1} \quad (19.17)$$

where the  $SU(n)$  roots are shorter. The algebra  $Sp(2n)$  was called  $C_n$  by Cartan.

## 15.20.4 19.4 Quaternions

A useful way of thinking about the classical groups is as rotations groups in various spaces. Obviously,  $SO(N)$  is the group of rotations in a real,  $N$  dimensional space. The group generators,  $X$ , in the defining representation are pure imaginary. The product  $iX$  that is exponentiated to get the representation of the group elements is completely real and antisymmetric. Similarly,  $SU(N)$  is the group of "rotations" in a complex  $N$  dimensional space that preserve the norm of complex vectors. The real part of  $iX$  in the defining representation is antisymmetric, and generates an  $SO(N)$  subgroup of  $SU(N)$ . The imaginary part of  $iX$  is symmetric and traceless.

Finally,  $Sp(2N)$  can be thought of as the group of rotations in a quaternionic  $N$  dimensional space, where the elements are quaternions, objects of the form

$$B + \vec{j} \cdot \vec{C} \quad (19.18)$$

where the components of  $\vec{j}$  are the quaternionic units, satisfying

$$j_a j_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} j_c \quad (19.19)$$

Thus a vector in the  $N$  dimensional quaternionic space looks like

$$Q \equiv \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 + \vec{j} \cdot \vec{C}^1 \\ \vdots \\ B^N + \vec{j} \cdot \vec{C}^N \end{pmatrix} \quad (19.20)$$

In this language,  $iX$  has an antisymmetric part  $iA$ , plus three independent "complex" symmetric components,

$$j_1 S_1, \quad j_2 S_2, \quad j_3 S_3 \quad (19.21)$$

proportional to the three quaternionic imaginary units, so that the  $iX$  have the form

$$iA, \quad j_1 S_1, \quad j_2 S_2, \quad j_3 S_3 \quad (19.22)$$

To see the connection of the quaternionic description of  $Sp(2N)$  with (19.11), note that the quaternionic units  $\vec{j}$  are equivalent to  $-i$  times the Pauli matrices,

$$\vec{j} \rightarrow -i\vec{\sigma} \quad (19.23)$$

so that (19.21) is related to the terms in (19.11) proportional to the Pauli matrices. To see how the  $Sp(2N)$  transformations in a  $2N$  dimensional space are equivalent to quaternionic rotations, consider simply building the  $N$  dimensional space of quaternions in terms of the Pauli matrices, so that the quaternionic  $N$ -vector becomes a  $2N \times 2$  matrix of the form

$$Q \rightarrow \begin{pmatrix} B^1 - i\vec{\sigma} \cdot \vec{C}^1 \\ \vdots \\ B^N - i\vec{\sigma} \cdot \vec{C}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1 - iC_3^1 & -C_2^1 - iC_1^1 \\ C_2^1 - iC_1^1 & B^1 + iC_3^1 \\ \vdots & \vdots \\ B^N - iC_3^N & -C_2^N - iC_1^N \\ C_2^N - iC_1^N & B^N + iC_3^N \end{pmatrix} \quad (19.24)$$

The action of ( $i$  times) the  $Sp(2N)$  generators on the complex  $2N$ -vector defined by the first column of (19.24) is equivalent to the action of (19.22) on (19.24).

What makes this construction work is that the real numbers, the complex numbers, and the quaternions share a very important property. For all of them, an absolute value,  $|z|$ , can be defined with the properties that

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad |z| = 0 \Rightarrow z = 0 \quad (19.25)$$

You are familiar with how this works for the real numbers and the complex numbers. For the quaternions, the absolute value is

$$|B + \vec{j} \cdot \vec{C}| \equiv \sqrt{B^2 + \vec{C}^2} \quad (19.26)$$

Note that it satisfies

$$|B + \vec{j} \cdot \vec{C}|^2 = (B - \vec{j} \cdot \vec{C})(B + \vec{j} \cdot \vec{C}) = (B + \vec{j} \cdot \vec{C})^*(B + \vec{j} \cdot \vec{C}) \quad (19.27)$$

where complex conjugation is defined as usual as changing the sign of the imaginary parts (all three of them in this case).

The existence of the absolute value with these properties means that there is a natural norm defined on the  $N$  dimensional quaternionic vector space:

$$\|Q\|^2 = \sum_{j=1}^N |q^j|^2 \quad (19.28)$$

$Sp(N)$  is the group of rotations that preserve this norm while preserving the structure of the quaternionic space.

One might wonder why there are not other possibilities for classical groups. The reason is that it is not so easy to satisfy the condition (19.25). This condition, plus the requirement that addition, subtraction, multiplication and division (except by 0) can all be consistently defined, is the defining property of a structure called a division algebra. There is only one other such structure, the octonians, with seven imaginary units, which we will discuss further in Chapter 27. Unfortunately, the multiplication law for octonians is not associative, so in general, rotations in an octonionic space do not form a group. However, the peculiar Lie algebras that do not

fit into any of the classical groups are all related to octonions on one way or another. We have already seen the algebra  $G_2$ , and we will discuss some of these bizarre algebras further in chapter 27.

### Problems

19.A. Consider the 36 matrices,

$$\sigma_a, \quad \tau_a, \quad \eta_a, \quad \sigma_a \tau_b \eta_c$$

where  $\sigma, \tau$ , and  $\eta$  are independent sets of Pauli matrices. Show that these matrices form a Lie algebra. Find the roots, the simple roots and the Dynkin diagram. What is the algebra?

19.B. Consider the 28 matrices,

$$\sigma_a, \quad \tau_a, \quad \eta_3, \quad \sigma_a \eta_1, \quad \sigma_a \eta_2, \quad \tau_a \eta_1, \quad \tau_a \eta_2, \quad \sigma_a \tau_b \eta_3$$

where  $\sigma, \tau$ , and  $\eta$  are independent sets of Pauli matrices. Show that these matrices form a Lie algebra. Find the roots, the simple roots and the Dynkin diagram. What is the algebra?

Chapter 20

## 15.21 The Classification Theorem

We will now classify all of the simple Lie algebras following the argument of Dynkin. We will do this with simple analytical geometrical arguments based on the master formula, (6.36). It may be that mathematicians can visualize the meaning of the arguments in multidimensional space. I can't do that. But the analytical arguments are simple enough.

### 15.21.1 20.1 P-systems

We know that the simple roots of any simple Lie algebra have the following properties:

A. They are linearly independent vectors.

B. If  $\alpha$  and  $\beta$  are distinct simple roots,  $2\alpha \cdot \beta / \alpha^2$  is a non-positive integer.

To ensure that a system of roots satisfying **A** and **B** yields a simple Lie algebra, we need one additional condition:

C. The simple root system is indecomposable.

A system of roots is decomposable if it can be split into two mutually orthogonal subsystems.

A system is indecomposable if it is not decomposable.

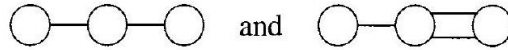
It is easy to see that for decomposable simple-root systems, the simple roots in the two orthogonal subsystems commute ( $p$  and  $q$  are zero for all pairs), and the entire system of roots splits into two commuting subsets. Each subsystem, along with the Cartan generators associated with the subspace it spans, forms an invariant subalgebra. The group associated with a decomposable root system is not simple. However, it is semi-simple, which means that it has no Abelian invariant subalgebra. Because the subalgebras commute, the groups they generate also commute. A group of this kind that is built out of two commuting subgroups,  $G_1$  and  $G_2$ , is called a direct product of the two subgroups,  $G = G_1 \times G_2$ . An elementary example is the algebra you studied in problem 8.B, in which the Dynkin diagram consisted of two disconnected circles, associated with the group  $SU(2) \times SU(2)$ . All the semisimple Lie groups are direct products of simple Lie groups.

Dynkin calls a system of vectors satisfying **A**, **B** and **C** a  $\Pi$ -system. All we need do to classify the simple Lie algebras is to classify the possible  $\Pi$  systems. This is just geometry. We know that the system of vectors can be constructed (up to a conventional normalization) from the Dynkin diagram, and we will use the term  $\Pi$ -system to refer interchangeably to the

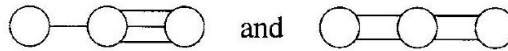
system of vectors or the Dynkin diagram that represents it. In terms of Dynkin diagrams, **B** is just automatic, because the diagram just determines the integers; **C** is the condition that the diagram cannot be taken apart into two diagrams without cutting any lines; and **A** is equivalent to the condition that all the simple roots are positive, from which we showed that linear independence followed if **B** is satisfied.

Let us now do some geometry.

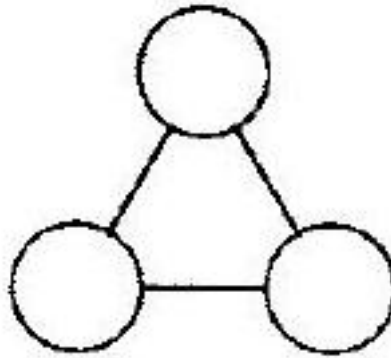
Lemma 1. The only  $\Pi$ -systems of three vectors are



This follows from the simple fact that the sum of the angles between any three linearly independent vectors is less than  $360^\circ$ . The only possible angles in a  $\Pi$ -system are  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$  and  $150^\circ$  and only one  $90^\circ$  degree angle is allowed by indecomposability, so these are the only possibilities. We will later see that there are three important systems that satisfy **B** and **C**, but not **A**:



and

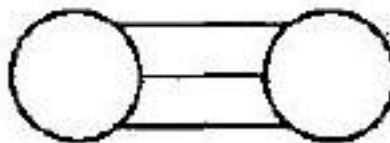


These do not satisfy **A** because the sum of the angles is  $360^\circ$  so the three vectors are coplanar and thus not linearly independent.

In fact, lemma 1 is an incredibly strong constraint, because if we take from any Dynkin diagram a connected subset of circles, the result is another Dynkin diagram. This is true because the lengths and angles are unchanged and (because of **B**) the subset of vectors must also be linearly independent.

Thus any indecomposable subsystem of a  $\Pi$ -system is also a  $\Pi$ -system. Thus any three connected vectors in any  $\Pi$ -system must be in one of the two forms in (20.1).

A very simple corollary of this is that no triple line can appear in a  $\Pi$  system of three or more vectors. Thus the only  $\Pi$ -system containing a triple line is



corresponding to the algebra  $G_2$ .

lemma 2. if a  $\Pi$ -system contains two vectors connected by a single line, the diagram obtained by shrinking the line away and merging the two vectors into a single circle is another  $\Pi$ -system.

Let  $\alpha$  and  $\beta$  be the two vectors and  $\Gamma$  the set of all the other vectors in the  $\Pi$ -system. Because of lemma 1, we know that  $\Gamma$  contains no vector connected to both  $\alpha$  and  $\beta$ . Thus if a vector  $\gamma$  is connected to  $\alpha$ , then  $\gamma \cdot \beta = 0$ , and if  $\gamma$  is connected to  $\beta$ , then  $\gamma \cdot \alpha = 0$ . We also know that  $\alpha + \beta$  has the same length as  $\alpha$  and  $\beta$ . Therefore

if  $\gamma \in \Gamma$  is a vector connected to  $\alpha$ ,

$$\text{then } \gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha \quad (2.4)$$

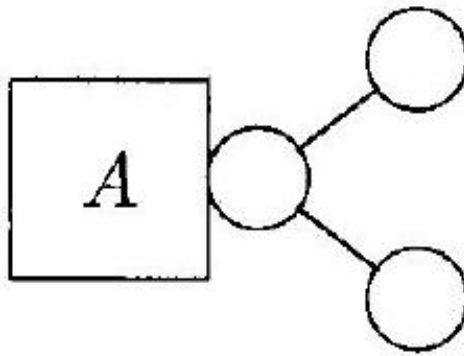
if  $\gamma' \in \Gamma$  is a vector connected to  $\beta$

$$\text{then } \gamma' \cdot (\alpha + \beta) = \gamma' \cdot \beta$$

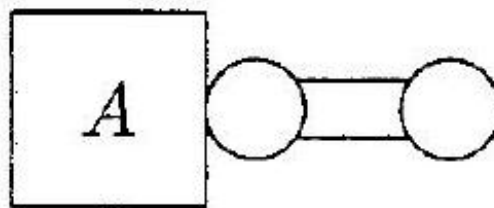
So the set  $\alpha + \beta$  and  $\Gamma$  is the shrunk  $\Pi$ -system.

Lemma 2 has two important corollaries. a. No  $\Pi$ -system has more than one double line; and b. no  $\Pi$ -system contains a closed loop. Either configuration could be shrunk into conflict with lemma 1.

lemma 3. If the configuration



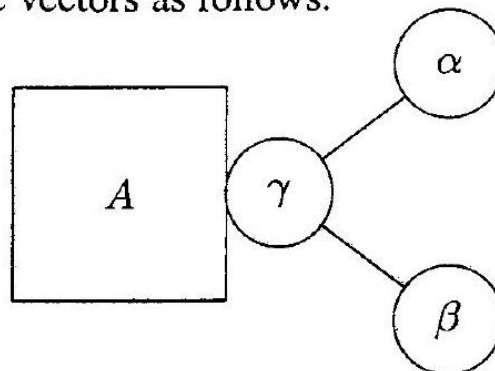
is a  $\Pi$ -system for some subdiagram,  $A$ , then



is also a  $\Pi$ -system.

To see this, label the vectors as follows:

**2 vectors as follows:**



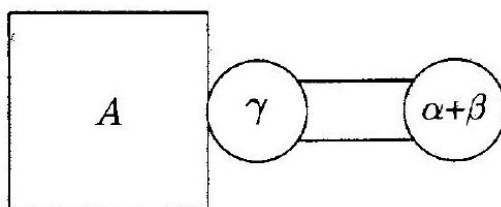
We know that  $\alpha \cdot \beta = 0$  and

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha \cdot \gamma}{\alpha^2} &= \frac{2\alpha \cdot \gamma}{\gamma^2} \\ &= \frac{2\beta \cdot \gamma}{\beta^2} = \frac{2\beta \cdot \gamma}{\gamma^2} = -1 \end{aligned} \quad (20.8)$$

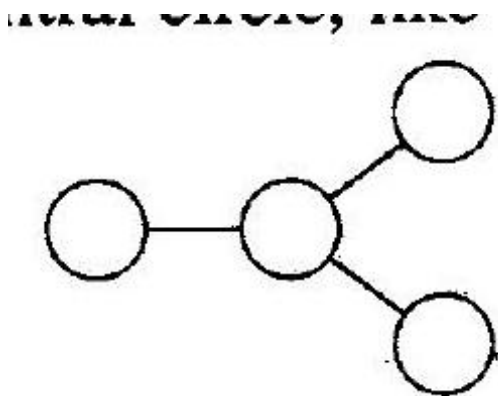
from which it follows that

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma \cdot (\alpha + \beta)}{\gamma^2} &= -2 \\ \frac{2\gamma \cdot (\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^2} &= -1 \end{aligned} \quad (20.9)$$

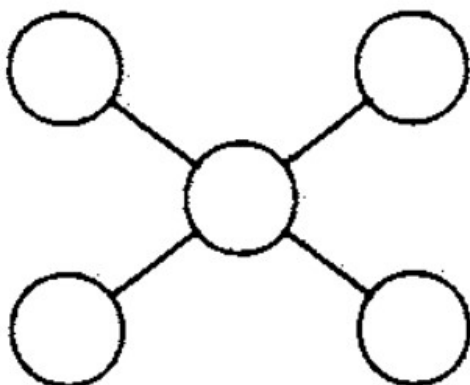
Thus the following is the Dynkin diagram for the shrunk  $\Pi$ -system:



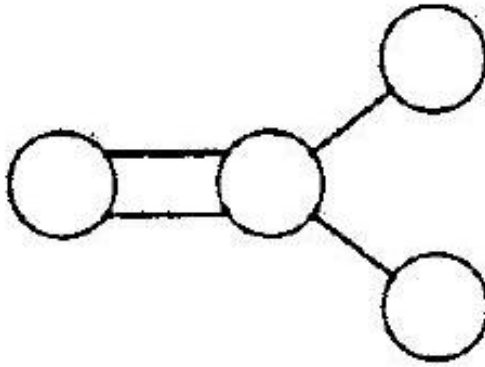
A corollary is that the only branches in a  $\Pi$ -system have the form of three single lines coming from a central circle, like



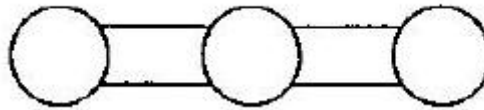
because anything with more branches, such as



or a double line such as



can be shrunk to

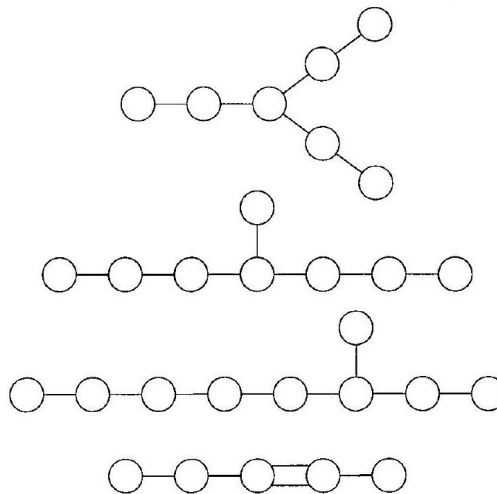


which is not a  $\Pi$ -system because of lemma 1.

Similarly, no  $\Pi$ -system contains two branches.

This is as far as we can go with general theorems. We must now consider some peculiar special cases, associated, as we will see, with what are called the exceptional groups (meaning that they don't fall into any of the infinite families discussed in the previous chapter).

lemma 4. No  $\Pi$ -system contains any of the following diagrams:

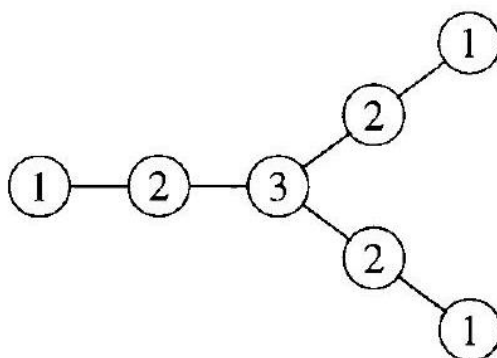


All of these fail the test of linear independence, because we can find a set of numbers  $\mu_j$  such that, if the vectors in the diagram are  $\alpha^j$ , the sum

$$\left( \sum_j \mu_j \alpha^j \right)^2 = 0 \quad (20.15)$$

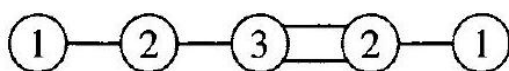
The appropriate values of  $\mu_j$  are indicated inside the corresponding circles below:



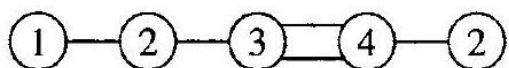


(c)

In (d), the vectors do not all have the same length. The two on the right may be either longer or shorter than the others by a factor of  $\sqrt{2}$ . If they are longer, use

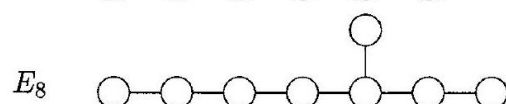
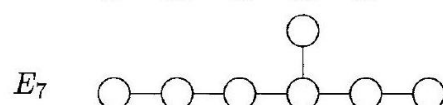
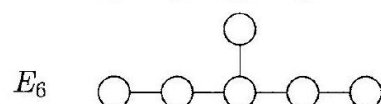
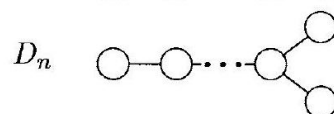
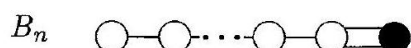
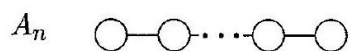


If they are shorter, use



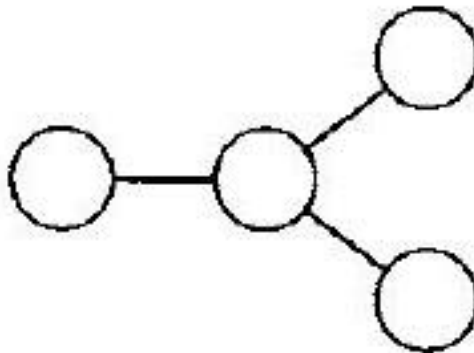
We will see later that all these diagrams can be constructed with linearly dependent vectors.

We now have enough information to complete the classification theorem. All  $\Pi$  systems must belong to one of 4 infinite families, or be one of 5 exceptional diagrams. All these are shown below, with shorter vectors indicated by filled circles.

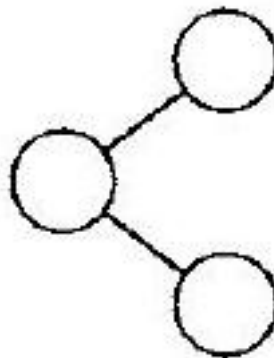


Nothing else is allowed. Everything else runs afoul of one of the geometrical constraints we have derived. There are no other infinite families. Adding more circles beyond the double line in  $B_n$  or  $C_n$  runs into (d), except for  $F_4$ . Continuing beyond the branch in  $D_n$  runs into (a), (b) or (c), except for the  $E_j$  exceptionals. And we already knew that  $G_2$  is the unique diagram with a triple line.

Note some equivalences between the algebras.  $A_1, B_1$  and  $C_1$  all consist of a single circle, and thus all describe the algebra of  $SU(2)$ . In addition,  $B_2 = C_2$ . The  $D_n$  family is a bit odd. As you go down in  $n$  you keep removing circles from the left.  $D_4$  looks like



and  $D_3$  degenerates into



and thus  $D_3 = A_3$ . Note, further, that if we remove one more circle from  $D_3$  to get  $D_2$ , it falls apart into two disconnected circles (the middle one must be removed to stay in the  $D_n$  family). Thus  $D_2$  is not simple. This is the statement (an important one) that the algebra of  $SO(4)$  is the same as the algebra of  $SU(2) \times SU(2)$  (problem 8.B).

That is the complete list of such coincidences. All the others are distinct algebras.

### 15.21.2 20.2 Regular subalgebras

A regular subalgebra,  $R$ , of a simple Lie algebra,  $A$ , is a subalgebra such that the roots of  $R$  are a subset of the roots of  $A$  and the generators of the Cartan subalgebra are linear combinations of the Cartan generators of  $A$ . A regular subalgebra is called maximal if the rank of  $R$  is the same as the rank of  $A$  (in which case the Cartan subalgebras are identical).

If we leave a circle out of a Dynkin diagram, the result is a diagram or two disconnected diagrams. These are associated with a regular subalgebra of the original algebra, associated with a subset of the original simple roots. Thus for example, the  $SU(n) \times SU(m)$  subgroup of  $SU(n+m)$  is obtained in this way. We can repeat the procedure and find other regular subgroups. However, these subalgebras have lower rank than the starting group. The Cartan generators that have been left out generate  $U(1)$  factors of the subalgebra. There are also non-maximal but regular subalgebras which cannot be obtained by leaving out a circle, but instead are obtained by the merging procedure that we used to establish the classification theorem.

To find the semisimple maximal regular subalgebras, we can use the following trick. Add to the system of simple roots,  $\alpha^j$  for  $j = 1$  to  $n$ , the lowest root,  $\alpha^0$ . Because  $\alpha^0$  is the lowest root,  $\alpha^0 - \alpha^j$  is not a root, and therefore, by the usual argument,

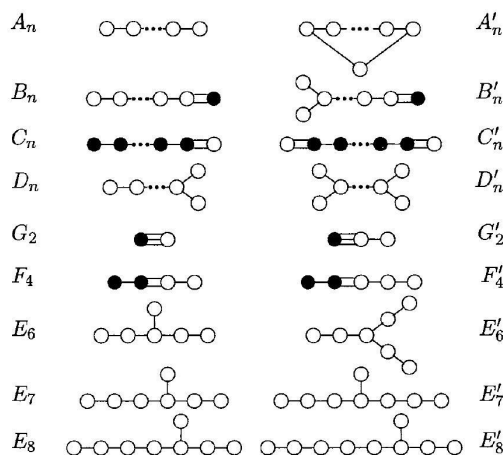
$$\frac{2\alpha^0 \cdot \alpha^j}{\alpha^{02}} \quad \text{and} \quad \frac{2\alpha^0 \cdot \alpha^j}{\alpha^{j2}} \quad (20.19)$$

are non-positive integers. Therefore, this system of vectors satisfies the conditions for a  $\Pi$ -system except that there is one linear relation among the vectors. This is called an extended  $\Pi$ -system or an extended Dynkin diagram.

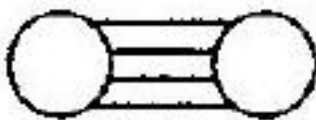
If we remove any vector from an extended  $\Pi$ -system, the remaining vectors are linearly independent. They still satisfy the master formula. They are therefore the simple roots of a regular, maximal subalgebra of the original algebra. However, the system may not be indecomposable, so the subalgebra may be semi-simple.

There is a unique extended  $\Pi$ -system for each  $\Pi$ -system, because given a Dynkin diagram, we can find the lowest root explicitly. In fact, we have already discussed all of the extended  $\Pi$ -systems in the discussion of the classification theorem, because they are just the systems that failed the test of linear independence, but were otherwise OK. Here they are:

diagram extended diagram



There are some exceptions for small  $n$ .  $A_1 = B_1 = C_1 = SU(2)$  and  $D_2 = SU(2) \times SU(2)$  cannot be extended without changing notation because the highest and lowest roots of  $SU(2)$  are negatives on one another, and we have not included a notation for  $180^\circ$  in our definition of Dynkin diagrams. It should probably be



The other exceptions are  $B_2$  and  $D_3$ , for which the indicated extensions do not exist because there are not enough open circles to allow for branching. The corresponding extended  $\Pi$ -systems are actually  $C'_2$ , and  $A'_3$ .

Let's work out some other examples.

The first thing to notice is that  $A_n$  doesn't have any semi-simple regular maximal subalgebras. Removing any circle from  $A'_n$  just takes you back to  $A_n$  again.

For the  $B_n$  s, removing an open circle from the left end of  $B'_n$  gives you back  $B_n$  again. But removing the filled circle from the right end of  $B'_n$  gives

$D_n$ . This corresponds to the fact that  $SO(2n+1)$  has an  $SO(2n)$  subgroup. If instead we remove a circle from the middle of  $B'_n$  (for large enough  $n$  that the middle exists), the diagram falls apart into a  $B_k$  and a  $D_{n-k}$ , corresponding to the  $SO(2k) \times SO(2n-2k+1)$  subgroup. Each of these can be further broken down, as well. In general, to enumerate all the semisimple regular maximal subalgebras, you must continue breaking things up into subgroups until you get to subalgebras that cannot be further broken down.

For the  $C_n$ , removing an open circle from either end just gives you back  $C_n$ . Removing a filled circle from the middle breaks up  $C_n$  into  $C_k$  and  $C_{n-k}$ . Finally, removing the first of last filled circle gives  $A_1 \times C_{n-1}$ . This is really the same thing again, because  $A_1 = SU(2)$  is the same algebra as  $C_1 = Sp(2)$ , so this is just a degenerate special case of the same analysis.

For  $D_n$ , removing a circle from either end gives back  $D_n$ , so all we can do is to remove a circle from the middle to get  $D_k \times D_{n-k}$ , corresponding to  $SO(2k) \times SO(2n-2k)$ .

$G_2$  is small enough that it is easy to enumerate all the possibilities. Removing the open circle from the right of  $G'_2$  gives back  $G_2$ . Removing the filled circle from the left gives  $A_2 = SU(3)$ . Removing the middle circle gives  $SU(2) \times SU(2)$ .

$F_4$  has a  $B_4$  subgroup, obtained by removing the filled circle from the left. It has an  $A_1 \times A_3$  subgroup obtained by removing the second filled circle. It has an  $A_2 \times A_2$  subgroup obtained by removing the left-most open circle. And it have a  $C_3 \times A_1$  subgroup obtained by removing the penultimate open circle.

I'll stop here to leave some questions to ask on problem sets and exams.

### 15.21.3 20.3 Other Subalgebras

The general subject of the subalgebras of an algebra is quite complicated. But the principle is a simple one. For each algebra, there is a simplest representation, out of which all the other representations can be built. If you know how this representation transforms under a subalgebra, you can determine how any representation transforms. Conversely, each possible transformation of the simplest representation is associated with a different subalgebra.

We will come back to this notion several times in the following chapters.

#### Problems

20.A. Prove that decomposable  $\Pi$ -systems yield decomposable root systems.

20.B. Find the regular maximal subalgebras of  $E_6$ .

20.C. Find the regular maximal subalgebras of  $SO(12)$ . To find them all, you will have to apply the extended Dynkin diagram algorithm several times, because some of the regular maximal subalgebras themselves have nontrivial regular maximal subalgebras.

Chapter 21

### 15.22 $SO(2n+1)$ and Spinors

The  $SO(N)$  algebras have a fascinating property which is worth exploring - spinor representations.

#### 15.22.1 21.1 Fundamental weights of $SO(2n+1)$

Label the generators of  $SO(2n+1)$  as

$$M_{ab} = -M_{ba} \text{ for } a, b = 1 \text{ to } 2n+1 \quad (21.1)$$

In the  $2n+1$  dimensional defining representation

$$[M_{ab}]_{xy} = -i (\delta_{ax}\delta_{by} - \delta_{bx}\delta_{ay}) \quad (21.2)$$

It is easy to find the commutation relations

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] \\ = -i (\delta_{bc}M_{ad} - \delta_{ac}M_{bd} - \delta_{bd}M_{ac} + \delta_{ad}M_{bc}) \end{aligned} \quad (21.3)$$

This is the standard form for rotation generators in a real vector space. The commuting generators in the Cartan sub-algebra we took to be

$$H_j = M_{2j-1,2j} \text{ for } j = 1 \text{ to } n \quad (21.4)$$

We can take the roots to be

$$\begin{aligned} E_{\eta e^j} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (M_{2j-1,2n+1} + i\eta M_{2j,2n+1}) \\ E_{\eta e^j + \eta' e^k} &= \frac{1}{2} (M_{2j-1,2k-1} + i\eta M_{2j,2k-1} \\ &\quad + i\eta' M_{2j-1,2k} - \eta\eta' M_{2j,2k}) \end{aligned} \quad (21.5)$$

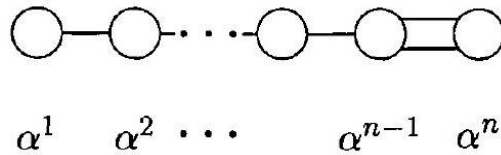
where  $\eta, \eta' = \pm 1$ . These satisfy

$$[H_j, E_{\eta e^k}] = \eta [e^k]_j E_{\eta e^k} = \eta \delta_{jk} E_{\eta e^k} \quad (21.6)$$

so that the simple roots are

$$\begin{aligned} \alpha^j &= e^j - e^{j+1} \text{ for } j = 1 \text{ to } n-1 \\ \alpha^n &= e^n \end{aligned} \quad (21.7)$$

corresponding to the diagram



The fundamental weights are

$$\begin{aligned} \mu^j &= \sum_{k=1}^j e^k \text{ for } j = 1 \text{ to } n-1 \\ \mu^n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n e^k \end{aligned} \quad (21.9)$$

The last one is different because of the different normalization of  $\alpha^n$ . This last representation is the spinor. By Weyl reflections in the roots  $e^j$ , we get from  $\mu^n$  the set of weights

$$\frac{1}{2} (\pm e^1 \pm e^2 \cdots \pm e^n) \quad (21.10)$$

All of these are unique, because they are equivalent by reflection to the highest weight state. Furthermore, each could be the highest weight for some other definition of positivity, thus there are no other weights and the representation is  $2^n$  dimensional. It is convenient to treat the  $2^n$  dimensional space as a tensor product of  $n$  two dimensional spaces. Then an arbitrary matrix in the space can be built as a tensor product of Pauli matrices. Call the Pauli matrices for the  $j$  th space  $\sigma_a^j$ , so that

$$\begin{aligned} & |\pm e^1/2 \pm e^2/2 \cdots \pm e^n/2\rangle \\ & \equiv |\pm e^1/2\rangle \otimes |\pm e^2/2\rangle \otimes \cdots \otimes |\pm e^n/2\rangle \\ & \sigma_a^j |xe^j\rangle = |x'e^j\rangle [\sigma_a]_{x'x} \end{aligned} \quad (21.11)$$

where  $x, x' = \pm 1/2$ .

In this notation, the Cartan generators are

$$H_j = \frac{1}{2} \sigma_3^j \quad (21.12)$$

These all satisfy

$$H_j^2 = \frac{1}{4} \quad (21.13)$$

We could have chosen any  $M_{ab}$  to be a Cartan generator, so it is clear that

$$M_{ab}^2 = \frac{1}{4} \quad (21.14)$$

in this representation for any  $a \neq b$ . Now consider the roots

$$E_{ej} = \frac{1}{\sqrt{2}} (M_{2j-1, 2n+1} + iM_{2j, 2n+1}) \quad (21.15)$$

Because we can only raise a state in the representation at most once, we must have

$$(E_{ej})^2 = 0 \quad (21.16)$$

Expanding out  $(E_{ej})^2$ , you can see that this implies

$$\{M_{2j-1, 2n+1}, M_{2j, 2n+1}\} = 0 \quad (21.17)$$

Again, the particular choice of axes is arbitrary, so we must have

$$\{M_{j\ell}, M_{k\ell}\} = 0 \quad \text{for } j \neq k \neq \ell \neq j \quad (21.18)$$

Let us now construct the  $E$  s explicitly. Because  $E_{e^1}$  is a raising operator, we know that

$$\begin{aligned} & E_{e^1} | -e^1/2 + x_2 e^2 + \cdots x_n e^n \rangle \\ & = f(x_2, \cdots, x_n) | e^1/2 + x_2 e^2 + \cdots x_n e^n \rangle \\ & E_{-e^1} | -e^1/2 + x_2 e^2 + \cdots x_n e^n \rangle = 0 \end{aligned} \quad (21.19)$$

for some function,  $f$ . We can compute the norm of  $f$  using standard tricks.

$$\begin{aligned} & |f(x_2, \cdots, x_n)|^2 = \langle -e^1/2 + x_2 e^2 + \cdots x_n e^n | \\ & E_{-e^1} E_{e^1} | -e^1/2 + x_2 e^2 + \cdots x_n e^n \rangle \\ & = \langle -e^1/2 + \cdots | \{E_{-e^1}, E_{e^1}\} | -e^1/2 + \cdots \rangle \end{aligned} \quad (21.20)$$

but using (21.14) and (21.17) we see that <sup>1</sup>

$$\{E_{-e^1}, E_{e^1}\} = \frac{1}{2} \quad (21.21)$$

and thus

$$|f(x_2, \dots, x_n)|^2 = \frac{1}{2} \quad (21.22)$$

Now for each  $x_2, \dots, x_n$ , we can choose the relative phase of the states so that  $f$  is positive. We can do this by adjusting the phases of the states with  $x_1 = -1/2$ . Then

$$f(x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (21.23)$$

independent of  $x$ . Comparing with our definition of  $\sigma_a^1$ , we can write

$$E_{\pm e^1} = \frac{1}{2} \sigma_{\pm}^1 \quad (21.24)$$

Let us now apply the same argument to  $E_{\pm e^2}$ .

$$\begin{aligned} E_{e^2} |x_1 e^1 - e^2/2 + \dots x_n e^n\rangle \\ = f_2(x_1, x_3, \dots, x_n) |x_1 e^1 + e^2/2 + \dots x_n e^n\rangle \end{aligned} \quad (21.25)$$

where  $|f_2(x_1, x_3, \dots, x_n)|^2 = \frac{1}{2}$

$$\text{where } |f_2(x_1, x_3, \dots, x_n)|^2 = \frac{1}{2}$$

for some function,  $f_2$ . For  $x_1 = 1/2$ , we can choose the relative phases of the states to make  $f_2 = 1/\sqrt{2}$ , as before so that

$$E_{e^2} |e^1/2 - e^2/2 + \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e^1/2 + e^2/2 + \dots\rangle \quad (21.26)$$

But now we cannot change the phases of the  $x_1 = -1/2$  states, because we have already fixed them in the previous argument. In particular, we know that  $\{E_{\pm e^1}, E_{\pm e^2}\} = 0$ , and therefore we can do the following computation

$$\begin{aligned} E_{e^2} |-e^1/2 - e^2/2 + \dots\rangle \\ = \sqrt{2} E_{e^2} E_{-e^1} |e^1/2 - e^2/2 + \dots\rangle \\ = -\sqrt{2} E_{-e^1} E_{e^2} |e^1/2 - e^2/2 + \dots\rangle \\ = -E_{-e^1} |e^1/2 + e^2/2 + \dots\rangle \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} |-e^1/2 + e^2/2 + \dots\rangle \end{aligned} \quad (21.27)$$

\footnotetext{

<sup>1</sup> We could equally well use the fact that  $[E_{\alpha^1}, E_{-\alpha^1}] = \vec{\alpha}^1 \cdot \vec{H}$ .

That is we need an extra minus sign for the  $-e^1/2$  state. Or in terms of  $\sigma_a^j$  matrices,

$$E_{\pm e^2} = \frac{1}{2} \sigma_3^1 \sigma_{\pm}^2 \quad (21.28)$$

where the tensor product is understood, as usual.

This is easy to understand. The  $\sigma_3^1$  is there to ensure that  $E_{\pm e^1}$  and  $E_{\pm e^2}$  anticommute. Since  $E_{\pm e^1}$  is built out of  $\sigma_1^1$  and  $\sigma_2^1$ ,  $E_{\pm e^2}$  must be proportional to  $\sigma_3^1$ .

Continuing in exactly the same way, we find

$$\begin{aligned} E_{\pm e^3} &= \frac{1}{2} \sigma_3^1 \sigma_3^2 \sigma_3^3 \\ &\dots \\ E_{\pm e^j} &= \frac{1}{2} \sigma_3^1 \cdots \sigma_3^{j-1} \sigma_{\pm}^j \end{aligned} \quad (21.29)$$

For the hermitian generators, we can then write

$$\begin{aligned} M_{2j-1, 2n+1} &= \frac{1}{2} \sigma_3^1 \cdots \sigma_3^{j-1} \sigma_1^j \\ M_{2j, 2n+1} &= \frac{1}{2} \sigma_3^1 \cdots \sigma_3^{j-1} \sigma_2^j \end{aligned} \quad (21.30)$$

Now we know everything, because we can construct all the other generators by commutation:

$$M_{ab} = -i [M_{a, 2n+1}, M_{b, 2n+1}] \quad (21.31)$$

for  $a, b \neq 2n+1$ . Each  $M_{ab}$  is just  $\pm 1/2$  times a product of Pauli matrices.

This representation is called the spinor representation of  $SO(2n+1)$ . As you see, it is a generalization of the spin  $1/2$  representation of  $SO(3)$  (or  $SU(2)$ ).

## 15.22.2 21.2 Real and pseudo-real

From (21.10), we can see that the spinor representation,  $\mu^n$ , is equivalent to its complex conjugate. Nevertheless, the spinor representations have interesting properties under complex conjugation. Before discussing this specifically, we will address the problem more generally.

Suppose that  $T_a$  generates a real irreducible unitary representation of a simple Lie algebra, so that

$$T_a = -RT_a^* R^{-1} = -RT_a^T R^{-1} \quad (21.32)$$

We can prove that  $R$  is unique up to a trivial scale factor. For suppose that there is another non-singular matrix,  $Q$ , that also satisfies

$$T_a = -QT_a^* Q^{-1} \quad (21.33)$$

Then

$$T_a^* = -Q^{-1} T_a Q \quad (21.34)$$

and thus

$$T_a = RQ^{-1} T_a Q R^{-1} \quad (21.35)$$

or

$$[T_a, RQ^{-1}] = 0 \quad (21.36)$$



for all  $a$ . But if a matrix commutes with all the generators of an irreducible representation, Schur's Lemma implies that it is a multiple of the identity, and thus

$$RQ^{-1} = \lambda I \quad R = \lambda Q \quad (21.37)$$

and thus  $R$  is essentially unique.

Now let us use this result to show that  $R$  must be either symmetric or antisymmetric. Because the  $T_a$  are hermitian, we can write

$$\begin{aligned} T_a &= -RT_a^T R^{-1}, \quad T_a^T = -R^{-1T} T_a R^T \\ \Rightarrow T_a &= RR^{-1T} T_a R^T R^{-1} \\ \Rightarrow [T_a, R^T R^{-1}] &= 0 \end{aligned} \quad (21.38)$$

Therefore, using Schur's Lemma again, we conclude that  $R^T R^{-1} = \lambda I$  or

$$R^T = \lambda R \quad (21.39)$$

But since transposing twice gets us back to where we started, we must have  $\lambda^2 = 1$ , or  $\lambda = \pm 1$ , which is the desired result. Either

$$R = A = -A^T \quad \text{or} \quad R = S = S^T \quad (21.40)$$

Thus there can be two kinds of real representations. If  $R = S$ , the representation is called real-positive, or just real. If  $R = A$ , the representation is called real-negative, or pseudo-real.

### 15.22.3 21.3 Real representations

To see what this difference means in practice, suppose that  $T_a$  is equivalent to a representation consisting of purely imaginary antisymmetric matrices,

$$T'_a = U^{-1} T_a U, \quad T'_a = -T'^{*}_a \quad (21.41)$$

The corresponding group representation is completely real, since it has the form

$$e^{i\epsilon_a T'_a} \quad (21.42)$$

In this case, we can compute the matrix  $R$  -

$$\begin{aligned} T'_a &= -T'^{T}_a = -U^T T_a^T U^{-1} T = U^{-1} T_a U \\ \Rightarrow T_a &= -UU^T T'^{*}_a (UU^T)^{-1} \end{aligned} \quad (21.43)$$

Thus the matrix  $R$  is the symmetric matrix  $UU^T$ .

The converse is also true. Any irreducible representation of a simple Lie algebra with a symmetric  $R$  is equivalent to a representation that is pure imaginary. Let's see how this argument goes. All the irreducible representations are equivalent to unitary representations, so we will assume that the generators are hermitian. Then it is easy to see that  $R$  is proportional to a unitary matrix. We can write the equivalence condition as

$$-T_a^T = R^{-1} T_a R = R^\dagger T_a R^{-1\dagger} \quad (21.44)$$

where the second equality follows from Hermitivity. But then

$$RR^\dagger T_a = T_a RR^\dagger \quad (21.45)$$

and  $RR^\dagger \propto I$  by Schur's Lemma. The overall constant just cancels out in the similarity transformation, so we may as well take  $R$  to be unitary. Now suppose that it is also symmetric. It is a linear algebra fact that we can write a symmetric unitary matrix as a product of unitary matrix and its transpose <sup>2</sup>

$$R = VV^T \quad (21.46)$$

But then the generators

$$T'_a = V^{-1}T_a V \quad (21.47)$$

are antisymmetric - for example, we can multiply the reality condition (21.44) on the left by  $V^T$  and on the right by  $V^{-1T}$  to obtain

$$-V^T T_a^T V^{-1T} = V^{-1}T_a V \quad (21.48)$$

### 15.22.4 21.4 Pseudo-real representations

The pseudo-real representations, in contrast, cannot be transformed into purely imaginary matrices, even though they are equivalent to their complex conjugates. The simplest example of a pseudo-real representation is the spin 1/2 representation of  $SU(2)$  generated by the Pauli matrices,  $T_a = \sigma_a/2$ . Obviously, there is no way to generate this representation with antisymmetric imaginary  $2 \times 2$  matrices, because there is only one such matrix and there are three generators. But still, the representation is equivalent to its complex conjugate because

$$\sigma_a = -\sigma_2 \sigma_a^* \sigma_2 \quad (21.49)$$

And indeed, the transformation matrix,  $\sigma_2$ , is antisymmetric, so the representation is pseudo-real.

### 15.22.5 21.5 $R$ is an invariant tensor

There is another very useful way of thinking about the matrix  $R$ . It is an invariant tensor. To see this, note that if the representation is unitary, as we always assume, we can rewrite (21.32) as

$$T_a R = -R T_a^* \Rightarrow T_a R + R T_a^T = 0 \quad (21.50)$$

In terms of explicit indices, this can be written

$$[T_a]_z^x R^{zy} + [T_a]_z^y R^{xz} = 0 \quad (21.51)$$

which implies that  $R$  is an invariant tensor in the tensor product space  $D \otimes D$  where  $D$  is generated by the  $T_a$ . For any real representation,  $D \otimes D$  contains the trivial representation, 1, only once because  $R$  is unique. If  $D$  is realpositive, the coefficient of the representation 1 in  $D \otimes D$ , which is precisely the invariant tensor  $R$ , is symmetric in the exchange of the two equivalent  $D$  s. If  $D$  is real-negative (pseudo-real), the coefficient  $R$  is antisymmetric.

<sup>2</sup> If  $R$  is symmetric and unitary, then  $RR^* = R^*R = I$ , and therefore the real and imaginary parts of  $R$  commute. Thus they can be simultaneously diagonalized by an orthogonal transformation. The reader should be able to take it from there.

### 15.22.6 21.6 The explicit form for $R$

To find the matrix  $R$  for the spinor representation of  $SO(2n + 1)$ , it is enough to satisfy (21.32) for the generators

$$\begin{aligned} M_{2j-1, 2n+1} &= \frac{1}{2} \sigma_3^1 \cdots \sigma_3^{j-1} \sigma_1^j \\ M_{2j, 2n+1} &= \frac{1}{2} \sigma_3^1 \cdots \sigma_3^{j-1} \sigma_2^j \end{aligned} \quad (21.52)$$

for all  $j$ , because the rest can be obtained by commutation of these, and if (21.32) is satisfied for the generators (21.52), it is satisfied for any commutator of two of them. We can now build up  $R$  as a tensor product of  $2 \times 2$  matrices in the various subspaces,

$$R \equiv \prod_j r^j \quad (21.53)$$

We must have

$$\begin{aligned} -r^1 \sigma_{1,2}^1 * r^{1-1} &= \sigma_{1,2}^1 \\ -r^1 \sigma_3^1 * r^{1-1} \cdot r^2 \sigma_{1,2}^2 r^{2-1} &= \sigma_3^1 \sigma_{1,2}^2 \\ -\left( \prod_{k=1}^{j-1} r^k \sigma_3^{k*} r^{k-1} \right) \cdot r^j \sigma_{1,2}^j * r^{j-1} & \\ = \left( \prod_{k=1}^{j-1} \sigma_3^k \right) \sigma_{1,2}^j & \end{aligned} \quad (21.54)$$

Now we can determine the  $r^j$  one at a time.  $r^1$  must anticommute with  $\sigma_1^1$  and commute with  $\sigma_2^1$ . Thus we can take  $r^1 = \sigma_2^1$ . Then from the next condition,  $r^2$  must commute with  $\sigma_1^2$  and anticommute with  $\sigma_2^2$ . Thus we can take  $r^2 = \sigma_1^2$ . And so on - the  $\sigma_2$  s and  $\sigma_1$  s alternate.

Thus we can take the matrix  $R$  to be

$$R = \prod_{\substack{j \\ \text{odd}}} \sigma_2^j \prod_{\substack{k \\ \text{even}}} \sigma_1^k \quad (21.55)$$

Note that

$$R^2 = 1, \quad \text{or} \quad R = R^{-1} \quad \text{and} \quad R^T = (-1)^{n(n+1)/2} R \quad (21.56)$$

So for  $n = 1$  and  $2$ ,  $R$  is antisymmetric; for  $n = 3$  and  $4$ ,  $R$  is symmetric; for  $n = 5$  and  $6$ ,  $R$  is antisymmetric; etc. Thus

Algebra Spinors

|              |             |
|--------------|-------------|
| $SO(8k + 3)$ | pseudo-real |
| $SO(8k + 5)$ | pseudo-real |
| $SO(8k + 7)$ | real        |
| $SO(8k + 1)$ | real        |

### Problems

21.A. Show that the set of 10 matrices,  $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ ,  $\frac{1}{2}\vec{\sigma}\tau_1$ ,  $\frac{1}{2}\vec{\sigma}\tau_3$ , and  $\frac{1}{2}\tau_2$  generate the spinor representation of  $SO(5)$ . Find the matrix  $R = R^{-1}$  such that  $T_a = -RT_a^*R$  for this representation.

21.B. Identify any convenient  $SO(2n-1)$  subalgebra of  $SO(2n+1)$  and determine how the spinor representation of  $SO(2n+1)$  transforms under the subalgebra.

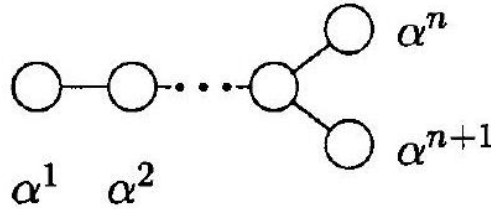
Chapter 22

## 15.23 $SO(2n+2)$ Spinors

We can use the results for  $SO(2n+1)$  to work out the spinor representations for  $SO(2n+2)$ . We will use the same notation as in the previous discussions.

### 15.23.1 22.1 Fundamental weights of $SO(2n+2)$

The Dynkin diagram for  $SO(2n+2)$  is



where

$$\alpha^j = e^j - e^{j+1} \text{ for } j = 1 \text{ to } n, \quad \alpha^{n+1} = e^n + e^{n+1} \quad (22.2)$$

All the roots have the form

$$\pm e^j \pm e^k, \quad j \neq k \quad (22.3)$$

We are interested in the two special representations corresponding to the last two fundamental weights,

$$\begin{aligned} \mu^n &= \frac{1}{2} (e^1 + \cdots + e^n - e^{n+1}) \\ \mu^{n+1} &= \frac{1}{2} (e^1 + \cdots + e^n + e^{n+1}) \end{aligned} \quad (22.4)$$

Call the corresponding representations  $D^n$  and  $D^{n+1}$ . The weights of  $D^n$  are of the form

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \eta_j e^j \quad (22.5)$$

where

$$\eta_j = \pm 1 \quad \text{and} \quad \prod_{j=1}^{n+1} \eta_j = -1 \quad (22.6)$$

This is because the roots always change the sign of two of the  $\eta$ s. The weights of  $D^{n+1}$  have the same form but with

$$\prod_{j=1}^{n+1} \eta_j = 1 \quad (22.7)$$

Now that we know the weights, we can determine the reality properties of the representations. If  $n$  is odd, so that the algebra has the form  $SO(4m)$  for integer  $m$ , then there are an even number of  $\eta$  s. Thus  $-\mu^n$  is a weight in  $D^n$ , because it still satisfies  $\prod_{j=1}^{n+1} \eta_j = -1$ . Evidently, it is the lowest weight in  $D^n$ . Similarly,  $-\mu^{n+1}$  is the lowest weight in  $D^{n+1}$ . Thus, for  $n$  odd, the spinor representations of  $SO(2n+2)$  are real (or pseudo-real).

But for even  $n$ ,  $-\mu^n$  is the lowest weight in  $D^{n+1}$ , because it satisfies  $\prod_{j=1}^{n+1} \eta_j = 1$ . Likewise,  $-\mu^{n+1}$  is the lowest weight of  $D^n$ . Thus for even  $n$ , the spinor representations are complex.  $\bar{D}^n$  is  $D^{n+1}$  and  $\bar{D}^{n+1}$  is  $D^n$ .

To construct these representations in detail, consider the  $SO(2n+1)$  subgroup of  $SO(2n+2)$  generated by

$$M_{jk} \text{ for } j, k \leq 2n+1 \quad (22.8)$$

This eliminates the Cartan generator

$$H_{n+1} = M_{2n+1, 2n+2} \quad (22.9)$$

The  $4n$  generators with weights

$$\pm e^j \pm e^{n+1} \quad \text{for } j \leq n \quad (22.10)$$

which are linear combinations of

$$M_{j, 2n+1} \quad \text{and} \quad M_{j, 2n+2} \quad \text{for } j \leq 2n \quad (22.11)$$

collapse to the  $2n$  generators  $M_{j, 2n+1}$  with weights

$$\pm e^j \quad \text{for } j \leq n \quad (22.12)$$

Under this  $SO(2n+1)$  subgroup both  $D^n$  and  $D^{n+1}$  transform like the spinor representation we just analyzed. Because  $H_{n+1}$  is not a generator of this subgroup, we can take over the previous analysis without change if we just ignore the  $n+1$  component of all the weight vectors. When we do this, the weight vectors are the same for both  $D^n$  and  $D^{n+1}$ :

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \eta_j e^j \quad \text{for } \eta_j = \pm 1 \quad (22.13)$$

In the tensor product notation,  $\eta_j = \sigma_3^j$  and the generators are given by

$$\begin{aligned} M_{2j-1, 2n+1} &= \frac{1}{2} \sigma_3^1 \cdots \sigma_3^{j-1} \sigma_1^j \\ M_{2j, 2n+1} &= \frac{1}{2} \sigma_3^1 \cdots \sigma_3^{j-1} \sigma_2^j \end{aligned} \quad (22.14)$$

Now going back to the full  $SO(2n+2)$  algebra, in the representation  $D^n$ , we know that

$$\eta_{n+1} = - \prod_{j=1}^n \eta_j = -\sigma_3^1 \cdots \sigma_3^n \quad (22.15)$$

Therefore

$$H_{n+1} = M_{2n+1,2n+2} = -\frac{1}{2}\sigma_3^1 \cdots \sigma_3^n \quad (22.16)$$

Now all the generators can be found using the commutation relations.  
In  $D^{n+1}$

$$\eta_{n+1} = \prod_{j=1}^n \eta_j = \sigma_3^1 \cdots \sigma_3^n \quad (22.17)$$

and

$$H_{n+1} = M_{2n+1,2n+2} = \frac{1}{2}\sigma_3^1 \cdots \sigma_3^n \quad (22.18)$$

Now that we have explicit forms for the representations, we can examine the reality properties we discussed earlier in more detail. As in  $SO(2n+1)$ , we define the matrix

$$R = R^{-1} = \prod_{\substack{j \\ \text{odd}}} \sigma_2^j \prod_{\substack{k \\ \text{even}}} \sigma_1^k \quad (22.19)$$

and then look at the complex conjugate representations

$$-RT_a^* R^{-1} \quad (22.20)$$

for  $D^n$  and  $D^{n+1}$ . We already know that

$$-RM_{jk}^* R^{-1} = M_{jk} \quad (22.21)$$

for the  $SO(2n+1)$  subgroup,  $j, k \leq 2n+1$ . It is then enough to see what happens to  $M_{2n+1,2n+2}$  under complex conjugation. If  $n$  is odd,

$$-RM_{2n+1,2n+2}^* R^{-1} = M_{2n+1,2n+2} \quad (22.22)$$

and then the equivalence can be established for all the generators using the commutation relations. Thus, as we already knew, the representation is real. But now we know  $R$ , so we can determine whether it is real-positive or pseudo-real. For  $n = 4k+1$ ,  $R$  is antisymmetric, so  $D^n$  and  $D^{n+1}$  are pseudo-real. For  $n = 4k+3$ ,  $R$  is symmetric, so  $D^n$  and  $D^{n+1}$  are real.

For even  $n$ ,

$$-RM_{2n+1,2n+2}^* R^{-1} = -M_{2n+1,2n+2} \quad (22.23)$$

so the representations  $D^n$  and  $D^{n+1}$  get interchanged and thus they are complex. The full story of the reality properties of the  $SO(N)$  spinors is then as follows:

| Algebra    | Spinors     |
|------------|-------------|
| $SO(8k+3)$ | pseudo-real |
| $SO(8k+4)$ | pseudo-real |
| $SO(8k+5)$ | pseudo-real |
| $SO(8k+6)$ | complex     |
| $SO(8k+7)$ | real        |
| $SO(8k)$   | real        |
| $SO(8k+1)$ | real        |
| $SO(8k+2)$ | complex     |

**Problems**

22.A. Show that  $SO(2n)$  has a regular maximal subalgebra,  $SO(2m) \times SO(2n - 2m)$ . How do the spinor representations of  $SO(2n)$  transform under the subgroup?

22.B. Show that  $SO(2n + 1)$  has a regular maximal subalgebra,  $SO(2m) \times SO(2n - 2m + 1)$ . How do the spinor representations of  $SO(2n + 1)$  transform under the subgroup?

22.C. Show that  $SO(4)$  has the same algebra as  $SU(2) \times SU(2)$ . Thus, it is not simple. Nevertheless, the arguments in the chapter apply. Explain how.

22.D. Show that the  $SO(6)$  algebra and the  $SU(4)$  algebra are equivalent, with the 4 of  $SU(4)$  corresponding to a spinor representation of  $SO(6)$ . In  $SU(4)$ ,  $4 \otimes 4 = 6 \oplus 10$ . The 6 is the vector representation of  $SO(6)$ . What is the 10, in the  $SO(6)$  language?

Chapter 23

**15.24  $SU(n) \subset SO(2n)$** 

In order to discuss the embedding of  $SU(n)$  in  $SO(2n)$  efficiently, we will introduce another language for talking about the spinor representations Clifford algebras.

**15.24.1 23.1 Clifford algebras**

A Clifford algebra is a set of operators satisfying the following anticommutation relations:

$$\{\Gamma_j, \Gamma_k\} = 2\delta_{jk}, \quad \text{for } j, k = 1 \text{ to } N \quad (23.1)$$

If you are given such a set of operators, you can immediately construct a representation of  $SO(N)$  as follows:

$$M_{jk} = \frac{1}{4i} [\Gamma_j, \Gamma_k] \quad (23.2)$$

It is easy to check, using the Jacobi identity, that the  $M_{jk}$  have the commutation relations of  $SO(N)$ , and furthermore that the  $\Gamma$  s are a set of tensor operators transforming according to the  $N$  dimensional representation of  $SO(N)$ , satisfying

$$[M_{jk}, \Gamma_\ell] = i(\delta_{j\ell}\Gamma_k - \delta_{k\ell}\Gamma_j) = \Gamma_m \left[ M_{jk}^{D^1} \right]_{m\ell} \quad (23.3)$$

where

$$\left[ M_{jk}^{D^1} \right]_{\ell m} = -i(\delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell}) \quad (23.4)$$

generate the vector representation,  $D^1$ , with highest weight  $\mu^1$ .

For  $SO(2n + 1)$  it is straightforward to find a Clifford algebra that gives the spinor representation we constructed. It is

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \sigma_2^1 \sigma_3^2 \cdots \sigma_3^n & \Gamma_2 &= -\sigma_1^1 \sigma_3^2 \cdots \sigma_3^n \\ \Gamma_3 &= \sigma_2^2 \cdots \sigma_3^n & \Gamma_4 &= -\sigma_1^2 \cdots \sigma_3^n \\ &\vdots & & \\ \Gamma_{2n-1} &= \sigma_2^n & \Gamma_{2n} &= -\sigma_1^n \\ \Gamma_{2n+1} &= \sigma_3^1 \sigma_3^2 \cdots \sigma_3^n \end{aligned} \quad (23.5)$$

Notice that the product

$$\Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{2n+1} = i^n \quad (23.6)$$

is proportional to the identity element.

There is a connection of this with  $SO(2n+2)$ , even though we don't have enough elements in the Clifford algebra to generate it. These elements of the Clifford algebra are actually proportional to  $M_{j,2n+2}$  in the spinor representation that we constructed. These generators transform like the components of a vector under the  $SO(2n+1)$  subgroup of  $SO(2n+2)$ .

While we cannot construct a representation of the  $SO(2n+2)$  algebra from this Clifford algebra (at least, we cannot use (23.2) to construct the generators because we do not have enough  $\Gamma$ s), we can construct the  $SO(2n)$  algebra just by leaving out  $\Gamma_{2n+1}$ . But the resulting representation is reducible, because there is a nontrivial matrix that commutes with all of the generators — namely  $\Gamma_{2n+1}$  itself -

$$\Gamma_{2n+1} = (-i)^n \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{2n} = \prod_{j=1}^n \sigma_3^j \quad (23.7)$$

We can use this to construct projection operators onto the two invariant subspaces that transform according to the irreducible representations,  $D^{n-1}$  and  $D^n$ .

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{2n+1}) & \text{projects onto } D^{n-1} \\ \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{2n+1}) & \text{projects onto } D^n \end{array} \quad (23.8)$$

because  $\prod_{j=1}^n \sigma_3^j$  is -1 on the first subspace and +1 on the second.

### 15.24.2 23.2 $\Gamma_m$ and $R$ as invariant tensors

The main reason that the Clifford algebra construction is useful is that  $\Gamma$  s are a set of invariant tensors (see (23.3)). For that reason, we can use it to help with the process of Clebsch-Gordan decomposition of products of spinors. Let us return to  $SO(2n+1)$  and write out the commutation relation (23.3) in terms of components - it looks like

$$\begin{aligned} [M_{jk}]_{xz} [\Gamma_\ell]_{zy} - [M_{jk}^*]_{yz} [\Gamma_\ell]_{xz} \\ + [M_{jk}^{D^1}]_{\ell m} [\Gamma_m]_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (23.9)$$

Thus  $[\Gamma_\ell]_{xy}$  is an invariant tensor in which the  $x$  index transforms like the spinor representation,  $D^n$ , the  $y$  index like the conjugate representation,  $\bar{D}^n$ , and the  $\ell$  like the vector representation,  $D^1$ . Of course, we know that in  $SO(2n+1)$  the representation  $\bar{D}^n$  is equivalent to  $D^n$  by a similarity transformation involving the matrix  $R$ , but in this form for the  $\Gamma$ s, we have not done the similarity transformation, it is the  $\bar{D}^n$  matrices that appear explicitly. We could put in the transformation explicitly. Suppose we do that using

$$-M_{jk}^* = -M_{jk}^T = R^{-1} M_{jk} R \quad (23.10)$$

It is useful to write this in terms of upper and lower indices. If the matrix elements of the generators of  $D^n$  (say) are written as

$$[M_{jk}]_y^x \quad (23.11)$$

where  $x$  refers to the row (the first index of the matrix) and  $y$  to the column (the second index), then  $R$  behaves as an invariant tensor with two upper indices. We showed this in chapter 21, but let's do it again. If we multiply on the left by  $R$  and put the indices in, (23.10) becomes

$$-R^{xz} [M_{jk}]_z^y = [M_{jk}]_z^x R^{zy} \quad (23.12)$$



or in prettier form

$$[M_{jk}]_z^x R^{zy} + [M_{jk}]_z^y R^{xz} = 0 \quad (23.13)$$

which is the statement that  $R^{xy}$  is an invariant tensor

The elements of the Clifford algebra have one upper and one lower index, like the  $M_{jk}$  s

$$[\Gamma_j]_y^x \quad (23.14)$$

These do not have a definite symmetry property (or more precisely,  $\Gamma_j$  has different symmetry for different values of  $j$  and these properties depend on the basis) because the upper and lower indices are different kinds of objects so it doesn't make any sense to interchange them. But by multiplying by  $R$ , we raise the lower index

$$[\Gamma_j R]^{xy} = [\Gamma_j]_z^x R^{zy} \quad (23.15)$$

This object can and does have definite symmetry.

Now let us rewrite the commutation relation of  $M_{jk}$  with  $\Gamma_\ell$  with upper and lower indices

$$\begin{aligned} [M_{jk}]_z^x [\Gamma_\ell]_y^z + [R^{-1} M_{jk} R]_z^y [\Gamma_\ell]_z^x \\ + \left[ M_{jk}^{D^1} \right]_{\ell m} [\Gamma_m]_y^x = 0 \end{aligned} \quad (23.16)$$

which we can rewrite by multiplying by  $R^{yw}$  and summing over  $y$

$$\begin{aligned} [M_{jk}]_z^x [\Gamma_\ell R]^{zw} + [R^T R^{-1} M_{jk} R]_z^w [\Gamma_\ell]^{xz} \\ + \left[ M_{jk}^{D^1} \right]_{\ell m} [\Gamma_m R]^{xw} \\ = [M_{jk}]_z^x [\Gamma_\ell R]^{zw} + [R^T R^{-1} M_{jk}]_z^w [\Gamma_\ell R^T]^{xz} \\ + \left[ M_{jk}^{D^1} \right]_{\ell m} [\Gamma_m R]^{xw} \\ = [M_{jk}]_z^x [\Gamma_\ell R]^{zw} + [M_{jk}]_z^w [\Gamma_\ell R]^{xz} \\ + \left[ M_{jk}^{D^1} \right]_{\ell m} [\Gamma_m R]^{xw} = 0 \end{aligned} \quad (23.17)$$

In the last step we have used the fact that  $R$  is either symmetric or antisymmetric, so I can replace the two  $R^T$  s by two  $R$  s. Thus it is the product  $\Gamma_\ell R$  that is an invariant tensor in the space  $D^n \otimes D^n \otimes D^1$ . These products must be either symmetric or antisymmetric in exchange of the identical  $D^n$  labels, unlike the  $\Gamma$  s themselves. This will seem familiar to those of you who have studied the Dirac equation, where something similar happens with the Dirac  $\gamma$  matrices.

To see whether  $\Gamma_j R$  is symmetric or antisymmetric, we can check any  $\Gamma_j$ . The easiest is  $\Gamma_{2n+1}$  which is just a product of  $\sigma_3$  s in all the spaces. When we multiply by  $R$ , the result is a kind of mirror image of  $R$ , where, up to factors of  $i$ , the  $\sigma_1$  s and  $\sigma_2$  s are simply interchanged. If we define

$$R^T = \eta_R R \quad \text{and} \quad (\Gamma_j R)^T = \eta_{\Gamma R} \Gamma_j R \quad (23.18)$$

then

$$\eta_R \cdot \eta_{\Gamma R} = (-1)^n \quad (23.19)$$

because in each two dimensional subspace, there is a  $\sigma_1$  in either  $R$  or  $\Gamma_{2n+1}R$  and a  $\sigma_2$  in the other. Since we know that

$$\eta_R = (-1)^{n(n+1)/2} \quad (23.20)$$

we find that

$$\eta_{\Gamma R} = (-1)^{n(n-1)/2} \quad (23.21)$$

### 15.24.3 23.3 Products of $\Gamma$ s

The reason that it is sometimes better to stick to the  $\Gamma$ s rather than using the symmetric  $\Gamma R$ s, is that matrix products of the  $\Gamma$ s also yield invariant tensors. These products have one upper and one lower index, so like  $\Gamma_j$  they live in the space  $D^n \otimes \bar{D}^n$ , and we can use them to complete the process of ClebschGordan decomposition. For example, consider the commutator,  $[\Gamma_j, \Gamma_k]$ . We already know that this is proportional to  $M_{jk}$ , which is an antisymmetric tensor operator. But we could also conclude this using the Jacobi identity:

$$\begin{aligned} [M_{jk}, [\Gamma_\ell, \Gamma_m]] &= [[M_{jk}, \Gamma_\ell], \Gamma_m] + [\Gamma_\ell, [M_{jk}, \Gamma_m]] \\ &= [\Gamma_{m'}, \Gamma_m] \left[ M_{jk}^{D^1} \right]_{m'\ell} + [\Gamma_\ell, \Gamma'_m] \left[ M_{jk}^{D^1} \right]_{m'm} \end{aligned} \quad (23.22)$$

which means that  $[\Gamma_j, \Gamma_k]$  transforms like the antisymmetric tensor product of two vectors.

More generally the interesting combinations are the products that are antisymmetric in the vector indices, defined as a sum over permutations of the indices. For  $m \leq n$ , define

$$\Gamma_{[j_1} \Gamma_{j_2} \cdots \Gamma_{j_m]} \equiv \frac{1}{m!} \sum_P \pm \Gamma_{k_1} \Gamma_{k_2} \cdots \Gamma_{k_m} \quad (23.23)$$

$$P \begin{pmatrix} k_1 \cdots k_m \\ j_1 \cdots j_m \\ j \end{pmatrix}$$

with the - sign for the odd permutations. The other combinations are not interesting because the anticommutator of two  $\Gamma$ s can be eliminated using the Clifford algebra. The Jacobi identity can be used in exactly the same way to show that this transforms like an antisymmetric tensor with  $m$  vector indices. Of course, we don't really have to do this complicated sum because the Clifford algebra guarantees that the  $\Gamma_j$  anticommute for different values of  $j$ , so really all the sum is doing is ensuring that no two indices are the same.

We do not get any new matrices for  $m > n$ , because of the fact that the product of all  $2n + 1$   $\Gamma$ s is proportional to the identity, so the antisymmetric product of  $n + \kappa$   $\Gamma$ s is related to the antisymmetric product of  $n - \kappa + 1$   $\Gamma$ s.

The product  $\Gamma_{[j_1} \Gamma_{j_2} \cdots \Gamma_{j_\mu]}$  tells us explicitly how the antisymmetric  $\mu$  index tensor appears in the tensor product  $D^n \otimes \bar{D}^n$ . The tensor product of two spinors in  $SO(2n + 1)$  can be decomposed into antisymmetric tensors of rank 0 (the trivial representation), 1 (the vector), 2 (the adjoint for  $n > 1$ ), and so on up to rank  $n$ . You can see that the dimensions work out because of the binomial theorem:

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= (1 + 1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \\ \Rightarrow 2^n \times 2^n &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} \end{aligned} \quad (23.24)$$

where the second line follows because

$$\binom{2n+1}{2n+1-k} = \binom{2n+1}{k} \quad (23.25)$$

so that the sum from  $k = 0$  to  $n$  is the same as the sum from  $n+1$  to  $2n+1$ .

Somewhat more bizarre is the breakup into symmetric versus antisymmetric products. All the products have one upper and one lower index, so again, to get something that is either symmetric or antisymmetric, we must multiply by  $R$ . The result of multiplying by  $R$  the product of  $k$  distinct  $\Gamma_j$  matrices (which is the antisymmetric product, because the different indices anticommute) can be written as

$$\begin{aligned} & \Gamma_{j_1} \Gamma_{j_2} \cdots \Gamma_{j_k} R \\ &= (\Gamma_{j_1} R) R^{-1} (\Gamma_{j_2} R) R^{-1} \cdots (\Gamma_{j_k} R) \end{aligned} \quad (23.26)$$

The transpose is

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{j_k} R)^T R^{-1} \cdots (\Gamma_{j_2} R)^T R^{-1} (\Gamma_{j_1} R)^T \\ &= \eta_R^{k-1} \eta_{\Gamma R}^k (\Gamma_{j_k} R) R^{-1} \cdots (\Gamma_{j_2} R) R^{-1} (\Gamma_{j_1} R) \\ &= \eta_R^{k-1} \eta_{\Gamma R}^k \Gamma_{j_k} \cdots \Gamma_{j_2} \Gamma_{j_1} R \end{aligned} \quad (23.27)$$

where we have used the fact that  $R^{-1}$  (which has two lower indices) has the same symmetry properties as  $R$  itself. To get the  $\Gamma_j$  factors back into the original order we have to make

$$(k-1) + (k-2) + \cdots + 1 = k(k-1)/2 \quad (23.28)$$

transpositions, each of which gives a  $-$  sign because of the Clifford algebra. Thus we have finally

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{[j_1} \Gamma_{j_2} \cdots \Gamma_{j_k]} R)^T \\ &= (-1)^{k(k-1)/2} \eta_R^{k-1} \eta_{\Gamma R}^k \Gamma_{[j_1} \Gamma_{j_2} \cdots \Gamma_{j_k]} R \end{aligned} \quad (23.29)$$

We can write the factor in front somewhat more elegantly as follows

$$\begin{aligned} & (-1)^{k(k-1)/2} \eta_R^{k-1} \eta_{\Gamma R}^k \\ &= (-1)^{k(k-1)/2} \eta_R (\eta_R \eta_{\Gamma R})^k \\ &= (-1)^{k(k-1)/2} (-1)^{n(n+1)/2} (-1)^{nk} \\ &= (-1)^{k(k-1)/2} (-1)^{n(n+1)/2} (-1)^{-nk} \\ &= (-1)^{(n-k)(n-k+1)/2} \end{aligned} \quad (23.30)$$

Thus in  $SO(2n+1)$ , the symmetry properties of the  $k$  index antisymmetric tensor in the tensor product of  $D^n \otimes D^n$  repeat with period 4, and look like this:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|---|---|---|---|
| 0   | - | - | + | + |
| 1   | + | - | - | + |
| 2   | + | + | - | - |
| 3   | - | + | + | - |

Thus for  $SO(3)$  the 1 is antisymmetric and  $D^1$  is symmetric. For  $SO(5)$  the 1 and  $D^1$  are antisymmetric while  $D^2$  is symmetric. For  $SO(7)$  the  $D^1$  and  $D^2$  are antisymmetric while 1 and  $D^3$  are symmetric. For  $SO(9)$  the  $D^2$  and  $D^3$  are antisymmetric while 1,  $D^1$  and  $D^4$  are symmetric. And so on!

For  $SO(2n)$ , the analysis is more complicated because the  $2^n$  dimensional space on which the Clifford algebra acts is not irreducible. We will use the projection operators onto the irreducible subspaces

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \Gamma_{2n+1}) \quad (23.32)$$

$P_+$  projects onto  $D^n$  while  $P_-$  projects onto  $D^{n-1}$ . Now a general  $2^n \times 2^n$  transforms under commutation with the generators like the tensor product

$$(D^n \oplus D^{n-1}) (\bar{D}^n \oplus \bar{D}^{n-1}) \quad (23.33)$$

Then we can project out all four possible transformation laws with the projection operators. If  $K$  is an arbitrary  $2^n \times 2^n$  matrix, then:

$$\begin{array}{ll} P^+ K P^+ & \text{transforms like } D^n \otimes \bar{D}^n \\ P^- K P^- & \text{transforms like } D^{n-1} \otimes \bar{D}^{n-1} \\ P^+ K P^- & \text{transforms like } D^n \otimes \bar{D}^{n-1} \\ P^- K P^+ & \text{transforms like } D^{n-1} \otimes \bar{D}^n \end{array} \quad (23.34)$$

As before, we can construct the  $K$  matrices out of antisymmetric products of the  $\Gamma$ s. We need not include  $\Gamma_{2n+1}$  because we are interested only in  $SO(2n)$  (and the projection operators make it  $\pm 1$  anyway). Furthermore, once we leave out  $\Gamma_{2n+1}$ , the projection operators pick out either the even or odd products, because the other  $\Gamma$  s anticommute with  $\Gamma_{2n+1}$ , and therefore

$$\Gamma_j P_+ = P_- \Gamma_j \quad \text{for } j = 1 \text{ to } 2n \quad (23.35)$$

Thus only an odd number of  $\Gamma$ s can appear between  $P_+$  and  $P_-$  (in either order) and only an even number of  $\Gamma$  s can appear between two  $P_+$  or two  $P_-$ . As before, we can ignore tensors with rank  $m > n$ .

#### 15.24.4 23.4 Self-duality

There is an additional subtlety that occurs for tensors of rank  $n$ . Not all the components of the rank  $n$  antisymmetric tensor in  $D^n \otimes \bar{D}^n$  or  $D^{n-1} \otimes \bar{D}^{n-1}$  are independent. For example in  $D^n \otimes \bar{D}^n$

$$\begin{aligned} P_+ \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_n P_+ &= P_+ \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_n \Gamma_{2n+1} P_+ \\ &= (-i)^n P_+ \Gamma_1 \cdots \Gamma_n \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2n} P_+ \\ &= (-i)^n (-1)^{n(n-1)/2} P_+ \Gamma_{n+1} \Gamma_{n+2} \cdots \Gamma_{2n} P_+ \\ &= (-i)^{n^2} \frac{1}{n!} \epsilon_{12 \cdots nj_1 \cdots j_n} P_+ \Gamma_{j_1} \cdots \Gamma_{j_n} P_+ \end{aligned} \quad (23.36)$$

Evidently, the rank  $n$  tensors satisfy a self-duality condition, the nature of which depends on  $n$ . If  $n$  is even, the relation is real, and the tensor is either self-dual (for  $D^n \otimes \bar{D}^n$ ), satisfying

$$A_{j_1 \cdots j_n} = \frac{1}{n!} \epsilon_{j_1 \cdots j_n k_1 \cdots k_n} A_{k_1 \cdots k_n} \quad (23.37)$$

or anti-self-dual (for  $D^{n-1} \otimes \bar{D}^{n-1}$ ), satisfying

$$A_{j_1 \dots j_n} = -\frac{1}{n!} \epsilon_{j_1 \dots j_n k_1 \dots k_n} A_{k_1 \dots k_n} \quad (23.38)$$

If  $n$  is odd, on the other hand, the relation is complex:

$$A_{j_1 \dots j_n} = \pm i \frac{1}{n!} \epsilon_{j_1 \dots j_n k_1 \dots k_n} A_{k_1 \dots k_n} \quad (23.39)$$

and thus the representations are complex. It is through this complex selfduality condition that the complexity of the  $SO(4n+2)$  spinor representations is manifested in the ordinary tensor representations.

We summarize all of this below, incorporating the fact that for  $SO(2n)$  with even  $n$ ,  $\bar{D}^n = D^n$  and  $\bar{D}^{n-1} = D^{n-1}$ , while for odd  $n$ ,  $\bar{D}^n = D^{n-1}$  and  $\bar{D}^{n-1} = D^n$ . We indicate the rank  $m$  antisymmetric tensor representation by  $(m)$ .

$$\begin{aligned} SO(2n+1) : D^n \otimes D^n &= \sum_{k=0}^n (k) \\ SO(4m) : D^{2m} \otimes D^{2m-1} &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) \\ D^{2m} \otimes D^{2m} &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k) + (2m)_+ \\ D^{2m-1} \otimes D^{2m-1} &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k) + (2m)_- \\ SO(4m+2) : D^{2m+1} \otimes D^{2m} &= \sum_{k=0}^m (2k) \\ D^{2m+1} \otimes D^{2m+1} &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) + (2m+1)_1 \\ D^{2m} \otimes D^{2m} &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1) + (2m+1)_2 \end{aligned} \quad (23.40)$$

where  $(2m)^\pm$  are self-dual and anti-self-dual respectively, and  $(2m+1)_1$  and  $(2m+1)_2$  satisfy complex self-duality conditions.

### 15.24.5 23.5 Example: $SO(10)$ .

For example, consider the 16 dimensional  $D^5$  representation of  $SO(10)$ . We see that

$$16 \otimes 16 = (1) \oplus (3) \oplus (5)_1 \quad (23.41)$$

The  $(1)$  is the 10 dimensional vector. The  $(3)$  is the  $10 \cdot 9 \cdot 8 / 6 = 120$  dimensional three index antisymmetric tensor. The  $(5)$  is the 5 index antisymmetric tensor with a complex self-duality condition, with dimension

$$\frac{1}{2} \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 126 \quad (23.42)$$

The symmetry of these under exchange of the identical 16's can be found by looking at the discussion of the symmetry of the  $\Gamma_j R$ s for  $SU(2n+1)$  - in this case we want  $n = 5$

to focus on the  $2^5$  dimensional space of the Clifford algebra. The symmetry factor for  $(k)$  is  $(-1)^{(n-k)(n-k-1)/2}$ , so the (1) and (5) are symmetric and the (3) is antisymmetric.

Likewise

$$16 \otimes \overline{16} = (0) \oplus (2) \oplus (4) = 1 \oplus 45 \oplus 210 \quad (23.43)$$

### 15.24.6 23.6 The $SU(n)$ subalgebra

Now we can identify an  $SU(n)$  subgroup of  $SO(2n)$ . From the Clifford algebra, we can construct the objects

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{2} (\Gamma_{2j-1} - i\Gamma_{2j}) \\ A_j^\dagger &= \frac{1}{2} (\Gamma_{2j-1} + i\Gamma_{2j}) \end{aligned} \quad (23.44)$$

Because of the Clifford algebra, these satisfy

$$\begin{aligned} \{A_j, A_k\} &= \{A_j^\dagger, A_k^\dagger\} = 0 \\ \{A_j, A_k^\dagger\} &= \delta_{jk} \end{aligned} \quad (23.45)$$

This is, therefore, a set of creation and annihilation operators, from which we already know how to construct an  $SU(n)$  algebra. Using the matrix elements,  $[T_a]_{jk}$ , of the defining representation of  $SU(n)$ , we define

$$T_a = \sum_{j,k} A_j^\dagger [T_a]_{jk} A_k \quad (23.46)$$

We know that the  $T_a$  generate  $SU(n)$  on the  $2^n$  dimensional space of the Clifford algebra, but we must also show that it is a subalgebra of  $SO(2n)$ . To see this we can write

$$\begin{aligned} A_j^\dagger A_k &= \frac{1}{2} \{A_j^\dagger, A_k\} + \frac{1}{2} [A_j^\dagger, A_k] = \frac{1}{2} \delta_{jk} \\ &+ \frac{i}{2} M_{2j-1, 2k-1} + \frac{1}{2} M_{2j-1, 2k} - \frac{1}{2} M_{2j, 2k-1} + \frac{i}{2} M_{2j, 2k} \end{aligned} \quad (23.47)$$

The  $\delta_{jk}$  term does not contribute to  $T_a$  because  $[T_a]_{jk}$  is traceless. The other terms are  $SO(2n)$  generators. So, the  $T_a$  are linear combinations of the  $SO(2n)$  generators, thus they generate a subalgebra.

Denote by  $|0\rangle$  the state that is annihilated by all the  $A_j$ . In our representation of the Clifford algebra, all the  $A_j$  s are proportional to lowering operators,  $\sigma_-^j$ , so  $|0\rangle$  is the state for which all the  $\sigma_3^j = -1$ . It is in the representation  $D^n$  for  $n$  even and  $D^{n-1}$  for  $n$  odd.

As always, the creation operators,  $A_j^\dagger$ , are tensor operators:

$$[T_a, A_j^\dagger] = \sum_k A_k^\dagger [T_a]_{kj} \quad (23.48)$$

They transform according to the  $n$  dimensional defining representation of  $SU(n)$ .

When we act on  $|0\rangle$  with some number of  $A^\dagger$  (say  $m$ ), we therefore get a set of states transforming like the antisymmetric tensor product of  $mn$  s because the  $A^\dagger$  s anticommute.

This is the fundamental representation  $[m]$ . Otherwise, this construction is similar to what we did with the 3-dimensional harmonic oscillator.

Note also that if  $m$  is even, the states formed by acting on  $|0\rangle$  with  $mA^\dagger$  s are in the same irreducible representation of  $SO(2n)$  as the  $|0\rangle$  state, because  $\Gamma_{2n+1}$  anticommutes with each  $A^\dagger$ , so it commutes with the product of an even number of them. But for odd  $m$ , the states are in the other irreducible  $SO(2n)$  representation.

Putting this together, we can summarize the embedding of  $SU(n)$  in  $SO(2n)$  as follows. For  $SO(4n+2)$ ,

$$D^{2n+1} = \sum_{j=0}^n [2j+1] \quad D^{2n} = \sum_{j=0}^n [2j] \quad (23.49)$$

This is consistent with the fact that  $\overline{D^{2n}} = D^{2n+1}$  because  $\overline{[j]} = [2n+1-j]$ .

For  $SO(4n)$ ,

$$D^{2n} = \sum_{j=0}^n [2j] \quad D^{2n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} [2j+1] \quad (23.50)$$

There is an  $SO(2n)$  generator which commutes with all of the generators of the  $SU(n)$  subgroup we have constructed. It is

$$S = \sum_{j=1}^n M_{2j-1,2j} = \sum_{j=1}^n A_j^\dagger A_j - \frac{n}{2} \quad (23.51)$$

$S$  generates a  $U(1)$  subalgebra. In the space of the Clifford Algebra

$$S = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_3^j \quad (23.52)$$

Thus  $S|0\rangle = -\frac{n}{2}|0\rangle$ . Then, since  $[S, A_j^\dagger] = A_j^\dagger$ , the creation operators raise  $S$ . Thus the representation  $[m]$  in the spinor representations of  $SO(2n)$  has  $S = m - n/2$ .

## Problems

23.A. Check that the dimensions work out in (23.49) and (23.50) by using the binomial theorem.

23.B. Use (23.9) and (23.44) to determine how the vector representation,  $D^1$ , of  $SO(2n)$  transforms under  $SU(n)$ . Explain why this result is obvious.

23.C. Let  $u^{jk\ell}$  be a completely antisymmetric tensor in  $SO(6)$ . A selfduality condition has the form

$$u^{jk\ell} = \lambda \epsilon^{jk\ell abc} u^{abc}$$

What are the possible values of  $\lambda$ ?

23.D. How do the spinor representations of  $SO(14)$  transform under the following subgroups:

a.  $SU(7)$ ?

b.  $SO(4) \times SU(5)$ ?

Chapter 24

## 15.25 $SO(10)$

$SU(5)$  is the only choice for a unifying algebra that makes use only of the matter particles that we actually see. However, it is not obvious that this is a necessary property. We know that the unifying symmetry, whatever it is (and assuming that it exists at all!) must be spontaneously broken to account for the differences in the interactions that we see. It could be that the process of spontaneous breaking gives a large mass to some of the matter particles of a representation, thus effectively removing them. The next simplest unification, based on the algebra  $SO(10)$ , adds just one such matter particle - a righthanded neutrino.

### 15.25.1 24.1 $SO(10)$ and $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$

Let us begin the discussion of  $SO(10)$  unification by considering (23.49) for  $n = 2$ . This shows that the  $SU(5)$  content of the spinor representations of  $SO(10)$  is as follows:

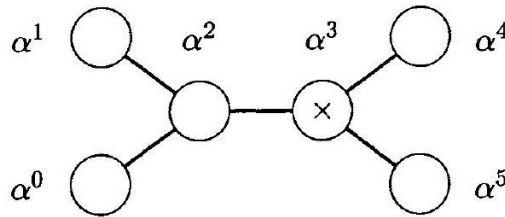
$$\begin{aligned} D^5 &= [1] + [3] + [5] = 5 + \overline{10} + 1 \\ D^4 &= [0] + [2] + [4] = 1 + 10 + \overline{5} \end{aligned} \quad (24.1)$$

Thus  $D^5$  has the right  $SU(5)$  content to describe the right-handed creation operator of a family of quarks and leptons, with the addition of one  $SU(5)$  singlet. Likewise,  $D^4$  behaves like the left-handed creation operators plus a singlet.

Thus  $SO(10)$  has the interesting feature that it incorporates all the creation operators of a single family into a single irreducible representation. Of course, it also incorporates an extra singlet which does not correspond to any of the particles that we have observed in the world. But we can hope that this extra particle will get a large mass in the spontaneous symmetry breaking process.

The extra singlet is also related to the particles that we actually observe in an interesting way. When we include it, we can restore the parity symmetry that is lost in  $SU(5)$ . To see what is happening, let us examine another subgroup of  $SO(10)$ .

The  $SU(5)$  subalgebra of  $SO(10)$  is regular, but not maximal. It is obtained by removing one of the circles from the Dynkin diagram. To find the regular maximal subalgebras, consider the extended Dynkin diagram:



If we remove the circle labeled with the  $\times$ , the diagram falls apart into  $SU(2) \times SU(2) \times SU(4)$ . The  $SU(2) \times SU(2)$  is the same algebra as  $SO(4)$ , and the  $SU(4)$  is the same as  $SO(6)$ . Thus this is the subalgebra of the 10 dimensional rotation generators which are block diagonal on 4 and 6 dimensional subspaces.

We can use the Dynkin diagrams rather directly to see how the spinor representations transform under the subgroup. The weights of  $D^5$  are

$$\sum_{i=1}^5 \eta_i e^i / 2, \quad \text{where} \quad \prod_{i=1}^5 \eta_i = 1 \quad (24.3)$$



from (22.5)-(22.7). We know from the form of the extended Dynkin diagram that the  $SU(4)$  (or  $SO(6)$ ) subgroup has roots  $\alpha^1, \alpha^2$ , and  $\alpha^0$  (the lowest root). Explicitly

$$\alpha^1 = e^1 - e^2, \quad \alpha^2 = e^2 - e^3, \quad \alpha^0 = -e^1 - e^2 \quad (24.4)$$

Thus the roots of the  $SU(4)$  subalgebra are entirely in the three dimensional subspace of the weight space formed by the first three components. The weights, (24.3), decompose into two copies of each of the two spinor representations of  $SO(6)$ , one for  $\eta_1\eta_2\eta_3 = 1$ , the other for  $\eta_1\eta_2\eta_3 = -1$ .

The  $SU(2) \times SU(2)$  (or  $SO(4)$ ) subgroup corresponds to the roots

$$\alpha^4 = e^4 - e^5, \quad \alpha^5 = e^4 + e^5 \quad (24.5)$$

in the two dimensional subspace formed by the last two components of the weight space.  $\alpha^4$  generates an  $SU(2)$  under which the weights

$$\pm (e^4 - e^5) \quad (24.6)$$

form a doublet.  $\alpha^5$  generates an  $SU(2)$  under which the weights

$$\pm (e^4 + e^5) \quad (24.7)$$

form a doublet. Thus, the weights

$$\sum_{i=1}^3 (\eta_i e^i) / 2 \pm (e^4 + e^5) / 2 \quad \text{for} \quad \prod_i \eta_i = 1 \quad (24.8)$$

are associated with a representation of the  $SO(6) \times SO(4)$  subalgebra which transforms like a spinor under the  $SO(6)$  (or equivalently, the 4 of  $SU(4)$ ), like a singlet under the  $SU(2)$  associated with  $\alpha^4$  and like a doublet under the  $SU(2)$  associated with  $\alpha^5$  (we will call this  $SU(2)'$  to distinguish it from the first  $SU(2)$ ). Thus, under the  $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)'$  subgroup, (24.8) is a  $(4, 1, 2)$ .

The weights

$$\sum_{i=1}^3 (\eta_i e^i) / 2 \pm (e^4 - e^5) / 2 \quad \text{for} \quad \prod_i \eta_i = -1 \quad (24.9)$$

transform like the complex conjugate spinor under the  $SO(6)$  (or equivalently, the  $\bar{4}$  of  $SU(4)$ ), like a doublet under the  $SU(2)$  associated with  $\alpha^4$  and like a singlet under the  $SU(2)$  associated with  $\alpha^5$ . Thus, under the  $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)'$  subgroup, (24.9) is a  $(\bar{4}, 2, 1)$ .

Thus

$$D^5 \rightarrow (4, 1, 2) \oplus (\bar{4}, 2, 1) \quad (24.10)$$

under  $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)'$ . It then follows that the complex conjugate representation,  $D^4$ , is

$$D^4 \rightarrow (\bar{4}, 1, 2) \oplus (4, 2, 1) \quad (24.11)$$

The  $SU(4)$  in  $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$  contains color  $SU(3)$ . Each 4 is a  $3 \oplus 1$  under  $SU(3)$ . Each  $\bar{4}$  is a  $\bar{3} \oplus 1$ . Comparing (24.10) with (18.13), you can see in more detail how the  $SO(10)$  unification works. The weak interaction  $SU(2)$  in (18.13) must be identified with the  $SU(2)$  subgroup of  $SO(10)$ . Under it, the creation operators for the right-handed antiquarks and the right-handed positron and antineutrino transform as doublets. Under the  $SU(2)'$  of  $SO(10)$ ,

the creation operators for the right-handed quarks are a doublet, and there is another doublet comprising the creation operators for the right-handed electron and a neutral particle. This  $SU(2)'$  is a mirror image of the weak interaction  $SU(2)$ . If we look at the creation operators for the lefthanded fields, in the representation  $D^4$ , the antiquarks will be a doublet under  $SU(2)'$ , just as the right-handed antiquarks are a doublet under  $SU(2)$  in  $D^5$ . Thus we should identify the neutral partner of the right-handed electron in the  $SU(2)'$  doublet as a right-handed neutrino, the looking-glass version of the left-handed neutrino.

The  $SO(10)$  unification thus restores the mirror symmetry of the theory that was lost completely in  $SU(5)$ . Of course, physics is not mirror symmetric. Parity is violated. The right-handed neutrino has never been seen. If  $SO(10)$  unification is to describe the world, there must be some symmetry breaking that makes the right-handed neutrino and the particles associated with the  $SU(2)'$  generators (and indeed, all the other  $SO(10)$  generators except those of the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  subgroup) very heavy.

### 15.25.2 24.2 \* Spontaneous breaking of $SO(10)$

The spontaneous breaking of  $SO(10)$  down to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  can be considered in several steps. First one can ask, how can we break  $SO(10)$  down to  $SU(5)$ ? Then we can ask, what  $SO(10)$  representation contains the 24 of  $SU(5)$  that we use to break the  $SU(5)$  subgroup down further to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ? Finally, we can ask what  $SO(10)$  representation contains the 5 and 45 of  $SU(5)$  that we use to break the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  down to the  $U(1)$  of electric charge?

### 15.25.3 24.3 \* Breaking $SO(10) \rightarrow SU(5)$

The simplest representation that can break  $SO(10)$  to  $SU(5)$  is the 16 (or  $\overline{16}$ ) This is evident from (24.1). Because the 16 has a component that transforms as a singlet under the  $SU(5)$  subgroup, if that component has a vacuum value, the  $SO(10)$  symmetry will be spontaneously broken down to  $SU(5)$ . In the first discussion of  $SO(10)$ , this representation was used. However, there is something slightly unattractive about it. It cannot be used (at least at the classical level) to give a large mass to the right-handed neutrino. It is important to have some mechanism for getting rid of the right-handed neutrino. It has not been seen, and if it were present, it would cause problems for both particle physics and for cosmology. The original discussion of  $SO(10)$  assumed the existence of an  $SO(10)$  singlet neutrino, in addition to the 16. Then the 16 Higgs representation could be used to put the right-handed neutrino together with this extra singlet into a massive particle, thus eliminating the unseen right-handed neutrino from the low-energy particle spectrum.

What is unattractive about this is that the addition of the extra singlet may be a step backwards. The  $SU(5)$  model already unified the right-handed particles in two irreducible representations. The  $SO(10)$  model without the extra singlet, with all the particles of the lightest family in a single irreducible representation, is perhaps more "unified," but with the extra singlet, it seems like an unnecessary complication of the original  $SU(5)$  model. Is it possible to eliminate the right-handed neutrino without adding a singlet? The answer is yes, with a slightly peculiar twist. One can treat the right-handed neutrino as its own antiparticle, and find a Higgs in the tensor product of two 16's that is responsible for its mass. The vacuum value of the Higgs representation must be an  $SU(5)$  singlet, as before, so that it can give mass to the  $SU(5)$  singlet right-handed neutrino.

The tensor product of two 16 s is

$$10 \oplus 120 \oplus 126 \quad (24.12)$$

where the 10 is the  $SO(10)$  vector, the 120 is an antisymmetric three index tensor, and the 126 is a complex self-dual five index tensor. The 10 and 126 appear symmetrically in the tensor product of the two 16s (because the two 16s are the same representation, their tensor product can be classified according to representations of  $S_2$ ), while the 120 appear antisymmetrically. Then we can easily figure out the  $SU(5)$  content of each of these representations by doing the tensor product of  $D^5$  in (24.1) with itself. The antisymmetric part is

$$\begin{aligned} & (5 + \bar{10} + 1) \otimes (5 + \bar{10} + 1)_{AS} \\ &= (5 \otimes 5)_{AS} \oplus (\bar{10} \otimes \bar{10})_{AS} \oplus (5 \otimes \bar{10}) \oplus (5 \otimes 1) \oplus (\bar{10} \otimes 1) \\ &= 10 \oplus 45 \oplus \bar{5} \oplus \bar{45} \oplus 5 \oplus \bar{10} \end{aligned} \quad (24.13)$$

Note that this is a real representation. The symmetric part is

$$\begin{aligned} & (5 + \bar{10} + 1) \otimes (5 + \bar{10} + 1)_S \\ &= (5 \otimes 5)_S \oplus (\bar{10} \otimes \bar{10})_S \oplus (1 \otimes 1)_S \oplus (5 \otimes \bar{10}) \oplus (5 \otimes 1) \oplus (\bar{10} \otimes 1) \\ &= 15 \oplus 5 \oplus 50 \oplus 1 \oplus \bar{5} \oplus \bar{45} \oplus 5 \oplus \bar{10} \end{aligned} \quad (24.14)$$

Since the 10 is  $5 + \bar{5}$ , the 126 is

$$15 \oplus 50 \oplus 1 \oplus \bar{45} \oplus 5 \oplus \bar{10} \quad (24.15)$$

This representation is complex, and it contains the  $SU(5)$  singlet component that we want to give the right-handed neutrino a mass. This is particularly useful, because an  $SU(5)$  singlet vacuum value cannot give mass to any of the other particles, because their masses require a vacuum value that breaks  $SU(2) \times U(1)$ . Thus if the vacuum value of the  $SU(5)$  singlet component of the 126 is very large, it will give a large mass to the right-handed neutrino, but all the other matter particles will remain massless until we turn on vacuum value for the Higgs that breaks  $SU(2) \times U(1)$ . This vacuum value can be much smaller (and indeed, as in  $SU(5)$  it has to be if the couplings are to come out correctly), which explains why we don't see the right-handed neutrino - it is much heavier than all the other fermions.

Either with the 126 or the 16 and an extra singlet, we get rid of the righthanded neutrino and break the  $SO(10)$  symmetry down to  $SU(5)$ , we can then discuss the further breaking of  $SU(5)$  by asking what  $SO(10)$  representations contain the  $SU(5)$  representations that we discussed for the breaking of  $SU(5)$ .

#### 15.25.4 24.4 \* Breaking $SO(10) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

As in  $SU(5)$ , the obvious representation to consider is the adjoint representation, the 45 dimensional representation,  $D^2$ , which is a real two-index antisymmetric tensor. Let us ask how this  $SO(10)$  representation transforms under  $SU(5)$ . We can find this by noting that the antisymmetric tensor product of two 10s is a 45. Since the 10 is  $5 \oplus \bar{5}$ , the 45 is

$$45 \rightarrow 24 + 10 + \bar{10} + 1 \quad (24.16)$$

This is encouraging. Because (24.16) contains an  $SU(5)$  24, we might expect to find a possible vacuum value that breaks  $SO(10)$  to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

It is not quite that simple, however. The most general possible vacuum value for the antisymmetric tensor can be brought, by an  $SO(10)$  transformation into the following canonical form:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 & 0 \end{pmatrix} \quad (24.17)$$

The only way this can commute with  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  is if two of the  $a$  s, say  $a_1$  and  $a_2$  are equal, and the other three  $a$  s are equal, so that the vacuum value has the form

$$\begin{pmatrix} a_1 I_2 i \sigma_2 & 0 \\ 0 & a_3 I_3 i \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (24.18)$$

where the first block is  $4 \times 4$ , written as a tensor product of two two-dimensional spaces, and the second is  $6 \times 6$ , written similarly as tensor product of two- and three-dimensional spaces. This commutes with matrices of the form

$$\begin{pmatrix} A_2 + \sigma_2 S_2 & 0 \\ 0 & A_3 + \sigma_2 S_3 \end{pmatrix} \quad (24.19)$$

where the  $A$  s are antisymmetric and the  $S$  s are symmetric matrices in the appropriate spaces. The  $A_2 + \sigma_2 S_2$  generate an  $SU(2) \times U(1)$ , while the  $A_3 + \sigma_2 S_3$  generate an  $SU(3) \times U(1)$ . There is an extra  $U(1)$  here that we do not want, but it is broken by the vacuum value of the 16 or 126. Thus together with the 16 or 126, the 45 can do the required symmetry breaking down to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

There are other options for the  $SO(10)$  breaking. We will just mention one. The symmetry can be broken by the vacuum value of a 54, a real traceless, symmetric tensor. This is also simple to analyze, because like the 45, it can be brought into a simple canonical form by an  $SO(10)$  transformation.

In fact, this is even simpler - the 54 can be diagonalized

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10} \end{pmatrix} \quad (24.20)$$

where

$$\sum_{j=1}^{10} a_j = 0 \quad (24.21)$$

The only way this can commute with  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  is if four of the  $a$ 's are equal, so that there is an unbroken  $SO(4)$  that contains the  $SU(2) \times U(1)$ , and the other six  $a$ 's are equal, so that there is an unbroken  $SO(6)$  that contains  $SU(3)$ . Thus a vacuum value for the 54 that preserves  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  automatically preserves a larger symmetry,  $SO(6) \times SO(4)$ , which is in fact just the  $SU(2) \times SU(2) \times SU(4)$  subgroup that we discussed at the beginning of this section. But in fact, this is really all we need from the 54. The 16 or 126 vacuum value breaks the  $SU(2) \times SU(2) \times SU(4)$  the rest of the way down to  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

### 15.25.5 24.5\* Breaking $SO(10) \rightarrow SU(3) \times U(1)$

Finally, we can think about what  $SO(10)$  representations can be responsible for breaking  $SU(2) \times U(1)$  and giving mass to the quarks and leptons. We have seen that these must contain a 5 or 45 of  $SU(5)$  and they should be contained in the tensor product of two 16's, (24.12). You can see that all three of the representations in  $16 \times 16$  can do the job. Each gives a somewhat different pattern of mass relations among the particles of different charges and colors.

### 15.25.6 24.6 \* Lepton number as a fourth color

There is one more thing that is worth mentioning about the  $SU(2) \times SU(2)' \times SU(4)$  subgroup of  $SO(10)$ . This algebra is interesting because it is the smallest that contains the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  symmetry in a semisimple algebra. This is physically interesting, because it leads automatically to the quantization of electric charge. A simple algebra is not necessary for charge quantization, because it is only  $U(1)$  factors that are not constrained by commutation relations. As we mentioned above, the  $SU(2)'$  factor is a right-handed version of the electroweak  $SU(2)$ , so that in this model, the left-handed nature of the electroweak interactions is picked out not by the algebra, but by the vacuum - by whatever spontaneously breaks  $SU(2)'$  much more strongly than  $SU(2)$ . But the  $SU(4)$  is also quite interesting. One can think of it as treating lepton number as a fourth color. The neutrino is part of an  $SU(4)$  4 with the three colors of  $u$  quarks, and the electron is part of an  $SU(4)$  4 with the three colors of  $d$  quarks. It is only the spontaneous symmetry breaking, which leaves the color  $SU(3)$  subgroup unbroken, that distinguishes leptons from quarks.<sup>1</sup>

## Problems

24.A. Show that the matrices

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}, \frac{1}{2}\vec{\tau}, \frac{1}{2}\vec{\eta}, \frac{1}{2}\vec{\sigma}\rho_1, \frac{1}{2}\vec{\tau}\rho_2, \frac{1}{2}\vec{\eta}\rho_3, \frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{\tau}\rho_3, \frac{1}{2}\vec{\tau}\vec{\eta}\rho_1, \frac{1}{2}\vec{\eta}\vec{\sigma}\rho_2$$

where  $\vec{\sigma}, \vec{\tau}, \vec{\eta}$  and  $\vec{\rho}$  are independent sets of Pauli matrices, generate a spinor representation of  $SO(10)$ . Find an  $SU(2) \times SU(2) \times SU(4)$  subgroup in which one of the  $SU(2)$  factors is generated by the subset  $\vec{\eta}(1 + \rho_3)/4$ .

24.B. What is the dimension of the  $SO(10)$  representation with highest weight  $2\mu^5$ . How do you know? Hint: consider  $D^5 \otimes D^5$ .

## Chapter 25

---

<sup>1</sup> This idea, along with the  $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$  model, was an important precursor to unification, discussed in J. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D 10 (1974) 275.

## 15.26 Automorphisms

An automorphism  $A$  of a group  $G$  is a mapping of the group onto itself which preserves the group multiplication rule:

$$A(g_1 g_2) = A(g_1) A(g_2) \quad (25.1)$$

For a Lie group, an automorphism of the group induces a mapping of the Lie algebra onto itself which preserves the commutation relations. Under an automorphism, the generators are mapped into linear combinations of generators

$$T_a \rightarrow A_{ab} T_b \quad (25.2)$$

such that

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (25.3)$$

implies

$$[A_{aa'} T_{a'}, A_{bb'} T_{b'}] = i f_{abc} A_{cc'} T_{c'} \quad (25.4)$$

### 15.26.1 25.1 Outer automorphisms

Some automorphisms are trivial in the sense that the mapping they induce on the generators is an equivalence:

$$A_{ab} T_b = R T_a R^{-1} \quad (25.5)$$

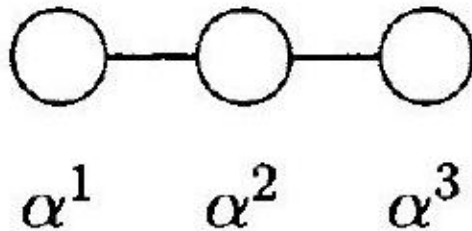
where  $R = e^{i\theta_a T_a}$  is a group element. This is called an inner automorphism. But some of the Lie algebras have non-trivial or outer automorphisms.

For example, consider complex conjugation. If  $T_a$  are the generators of some representation, the mapping

$$T_a \rightarrow -T_a^* \quad (25.6)$$

is an automorphism in which generators corresponding to imaginary antisymmetric matrices are unchanged, while generators corresponding to real symmetric matrices change sign (note that we can always choose the generators to be either antisymmetric or symmetric in the highest weight construction). Thus, an algebra can have complex representations only if it has some nontrivial automorphism.

We can identify the nontrivial automorphisms by looking at the symmetries of the Dynkin diagram. For example, consider  $SU(4)$  with Dynkin diagram

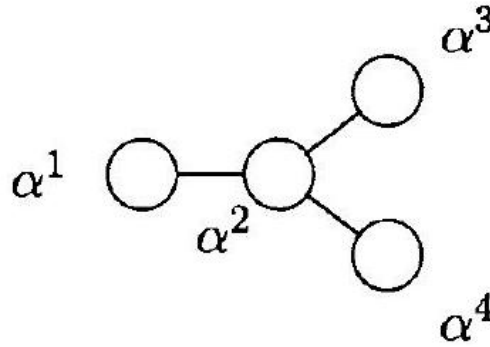


Since  $\alpha^1$  and  $\alpha^3$  appear symmetrically, the diagram with  $\alpha^1$  and  $\alpha^3$  interchanged has all the same lengths and angles and thus generates the same algebra. So there is an automorphism of  $SU(4)$  in which the corresponding generators are interchanged,

$$E_{\alpha^1} \leftrightarrow E_{\alpha^3} \quad (25.8)$$

along with all the other changes this induces in the explicit construction of the algebra from the diagram. This automorphism is nontrivial, since it interchanges the fundamental representations  $D^1$  and  $D^3$ , which are inequivalent. In fact, since these representations are complex conjugates of one another, this is just the automorphism induced by complex conjugation, up to some trivial equivalence. All of the complex conjugation automorphisms are obtained in this way, associated with reflection symmetries of the Dynkin diagram.

But not all reflection symmetries correspond to complex conjugation. For example, the  $SO(4n)$  groups have only real representations. Thus the reflection symmetries of their Dynkin diagrams correspond to nontrivial automorphisms that are not complex conjugations. The most interesting (and bizarre) example of this is the group  $SO(8)$ , with Dynkin diagram



Here there is a separate automorphism for each permutation for  $\alpha^1, \alpha^3$  and  $\alpha^4$ .

### 15.26.2 25.2 Fun with $SO(8)$

The roots of the  $SO(8)$  Dynkin diagram are

$$\alpha^j = e^j - e^{j+1} \text{ for } j = 1 \text{ to } 3, \quad \alpha^4 = e^3 + e^4 \quad (25.10)$$

The fundamental representations  $D^1, D^3$ , and  $D^4$ , with highest weights  $\mu^1, \mu^3$ , and  $\mu^4$ , are each 8 dimensional.  $D^1$  is the defining representation, an 8-vector.  $D^3$  and  $D^4$  are the two real spinor representations. The automorphisms map these three representations into one another in all possible ways.

First consider the mapping between  $D^3$  and  $D^4$ . This corresponds to the symmetry of the Dynkin diagram that interchanges  $\alpha^3$  and  $\alpha^4$  with  $\alpha^1$  and  $\alpha^2$  held fixed. This is implemented by changing the sign of  $e^4$ . That means

$$H_4 \rightarrow -H_4 \quad \text{or} \quad M_{78} \rightarrow -M_{78} \quad (25.11)$$

and

$$E_{\eta e^j + e^4} \leftrightarrow E_{\eta e^j - e^4} \quad \text{or} \quad M_{j8} \rightarrow -M_{j8} \quad (25.12)$$

This, of course, is what we found when we explicitly constructed these representations.  $M_{jk}$  for  $j, k = 1$  to  $7$  were the same for both representations, while

$$H_4 = M_{78} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma_3^1\sigma_3^2\sigma_3^3 & \text{for } D^3 \\ \frac{1}{2}\sigma_3^1\sigma_3^2\sigma_3^3 & \text{for } D^4 \end{cases} \quad (25.13)$$

The rest follow from commutation. Of course in this case, we got the result just from the symmetry of the Dynkin diagram, without constructing the representation explicitly.

Now consider the automorphism that interchanges  $\alpha^1$  and  $\alpha^3$  with  $\alpha^2$  and  $\alpha^4$  held fixed. This is rather weird, because it interchanges the vector representation  $D^1$ , generated by the antisymmetric matrices with only two non-zero elements with the spinor representation  $D^3$ , generated by products of Pauli matrices, whose square is proportional to the identity. The relevant mapping in terms of the weights is

$$\begin{aligned} e^1 - e^2 &\leftrightarrow e^3 - e^4 \\ e^2 - e^3 &\rightarrow e^2 - e^3 \\ e^3 + e^4 &\rightarrow e^3 + e^4 \end{aligned} \quad (25.14)$$

Solving this for the  $e^j$  S we find

$$\begin{aligned} e^1 &\rightarrow \frac{1}{2}(e^1 + e^2 + e^3 - e^4) \\ e^2 &\rightarrow \frac{1}{2}(e^1 + e^2 - e^3 + e^4) \\ e^3 &\rightarrow \frac{1}{2}(e^1 - e^2 + e^3 + e^4) \\ e^4 &\rightarrow \frac{1}{2}(-e^1 + e^2 + e^3 + e^4) \end{aligned} \quad (25.15)$$

so the Cartan generators get mapped in the same way

$$\begin{aligned} H_1 &\rightarrow \frac{1}{2}(H_1 + H_2 + H_3 - H_4) \\ H_2 &\rightarrow \frac{1}{2}(H_1 + H_2 - H_3 + H_4) \\ H_3 &\rightarrow \frac{1}{2}(H_1 - H_2 + H_3 + H_4) \\ H_4 &\rightarrow \frac{1}{2}(-H_1 + H_2 + H_3 + H_4) \end{aligned} \quad (25.16)$$

or

$$\begin{aligned} M_{12} &\rightarrow \frac{1}{2}(M_{12} + M_{34} + M_{56} - M_{78}) \\ M_{34} &\rightarrow \frac{1}{2}(M_{12} + M_{34} - M_{56} + M_{78}) \\ M_{56} &\rightarrow \frac{1}{2}(M_{12} - M_{34} + M_{56} + M_{78}) \\ M_{78} &\rightarrow \frac{1}{2}(-M_{12} + M_{34} + M_{56} + M_{78}) \end{aligned} \quad (25.17)$$

Note how cleverly the theory has solved the mapping problem. The antisymmetric generators,  $M_{2j-1,2j}$  of the vector representation get mapped into matrices of the form



$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm\sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (25.18)$$

whose square is  $1/4$ .

The way the rest of the mappings go is this. The other generators break up into 6 sets of 4, each of which mix up among themselves like the four  $M_{12}, M_{34}, M_{56}$  and  $M_{78}$  that we just dealt with.

$SO(8)$  has a very interesting subgroup  $-SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$ . It is easy to see that this is a maximal subalgebra. It is just  $SO(4) \times SO(4)$ . But the way the automorphism works on the different  $SU(2)$  factors is instructive. Let us look at the extended Dynkin diagram. It is (??????? add diagram!)

where the lowest root,  $\alpha^0$  is  $-e^1 - e^2$ . Evidently, we get the  $SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$  subalgebra by removing  $\alpha^2$ . The four  $SU(2)$  s are associated with the four mutually orthogonal roots,

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= -e^1 - e^2 & \alpha^1 &= e^1 - e^2 \\ \alpha^3 &= e^3 - e^4 & \alpha^4 &= e^3 + e^4 \end{aligned} \quad (25.20)$$

Now consider the action of this subalgebra on the spinor representation  $D^3$ , with weights

$$\eta_j e^j / 2 \quad \text{for} \quad \prod_j \eta_j = -1 \quad (25.21)$$

These break up into two sets transforming irreducibly under the subalgebra. The set

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (e^1 + e^2 + e^3 - e^4), & \quad \frac{1}{2} (e^1 + e^2 - e^3 + e^4) \\ \frac{1}{2} (-e^1 - e^2 + e^3 - e^4), & \quad \frac{1}{2} (-e^1 - e^2 - e^3 + e^4) \end{aligned} \quad (25.22)$$

is orthogonal to  $\alpha^1$  and  $\alpha^4$ , and thus transform trivially, like singlets under the two  $SU(2)$  associated with  $\alpha^1$  and  $\alpha^4$ . But each weight is a component of doublet under the  $SU(2)$  associated with  $\alpha^0$  and  $\alpha^3$ . Similarly, the set

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (e^1 - e^2 + e^3 + e^4), & \quad \frac{1}{2} (e^1 - e^2 - e^3 - e^4) \\ \frac{1}{2} (-e^1 + e^2 + e^3 + e^4), & \quad \frac{1}{2} (-e^1 + e^2 - e^3 - e^4) \end{aligned} \quad (25.23)$$

is orthogonal to  $\alpha^0$  and  $\alpha^3$ , and thus transform trivially, under these two  $SU(2)$ , and are components of doublet under the  $SU(2)$  associated with  $\alpha^1$  and  $\alpha^4$ . Thus we say that under the

$$SU(2)^0 \times SU(2)^1 \times SU(2)^3 \times SU(2)^4 \quad (25.24)$$

subgroup, the spinor representation  $D^3$  transforms as

$$(2, 1, 2, 1) \oplus (1, 2, 1, 2) \quad (25.25)$$

There are two other similar possibilities for the transformation property of an 8:

$$(2, 2, 1, 1) \oplus (1, 1, 2, 2) \quad (25.26)$$

and

$$(2, 1, 1, 2) \oplus (1, 2, 2, 1)$$

These correspond to  $D^1$  and  $D^4$  respectively. How do we know which is which?

**Problems**

25.A. Carry through the argument discussed at the end of the chapter and determine which representation in the last equation in the chapter is  $D^1$  and which is  $D^4$ .

25.B. Does  $SO(8)$  have an  $SO(5)$  subgroup under which one spinor ( $D^4$ , say) transforms like two  $SO(5)$  spinors while the other spinor ( $D^3$ ) transforms like an  $SO(5)$  vector and three singlets? Explain.

Chapter 26

**15.27  $Sp(2n)$** 

One reason that I want to discuss  $Sp(2n)$  in more detail is that it is a good excuse to introduce another notation for  $SU(n)$  which is often easier to work with.

**15.27.1 26.1 Weights of  $SU(n)$** 

The weights of the defining representation of  $SU(n)$ ,  $\nu^i$  for  $i = 1$  to  $n$ , have the following properties

$$\nu^j \cdot \nu^k = \frac{1}{2}\delta_{jk} - \frac{1}{2n}, \quad \sum_{j=1}^n \nu^j = 0 \quad (26.1)$$

The condition on the sum follows from the tracelessness of the generators. The  $n\nu^j$  span an  $n - 1$  dimensional space, but we can make things much more obvious by embedding the  $\nu^j$ 's in an  $n$  dimensional space, as follows:

$$\nu^j = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^j - \Sigma/n) \quad (26.2)$$

where the  $e^j$  are an orthonormal basis and the vector  $\Sigma$  is

$$\Sigma \equiv \sum_{k=1}^n e^k \quad (26.3)$$

In this notation, the simple roots of  $SU(n)$  take the form

$$\alpha^j = \nu^j - \nu^{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^j - e^{j+1}), \text{ for } j = 1 \text{ to } n - 1 \quad (26.4)$$

These are also the first  $n - 1$  simple roots of  $Sp(2n)$ . The last simple root is

$$\alpha^n = 2\nu^n + \sqrt{\frac{2}{n}}\nu^{n+1} \quad (26.5)$$

where  $\nu^{n+1}$  is a unit vector orthogonal to  $e^j$  for  $j = 1$  to  $n$ . Now the point is that we can take

$$\nu^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\Sigma \quad (26.6)$$

Then

$$\alpha^n = \sqrt{2}e^n \quad (26.7)$$

We could have guessed this from the Dynkin diagram by comparing with our form for the roots of  $SO(2n + 1)$ . The only difference here is overall normalization of the roots and that the

last root is longer than the others, rather than shorter. But you should now see the connection with the previous, somewhat cumbersome notation.

So the roots are

$$\frac{\pm e^j \pm e^k}{\sqrt{2}} \text{ for } j \neq k \quad \text{and} \quad \pm \sqrt{2} e^j \quad (26.8)$$

or equivalently

$$\frac{\pm e^j \pm e^k}{\sqrt{2}} \text{ for all } j, k \quad (26.9)$$

The weights of the  $2n$  dimensional representation are

$$\pm e^j / \sqrt{2} \quad (26.10)$$

so  $D^1$  has highest weight

$$\mu^1 = e^1 / \sqrt{2} \quad (26.11)$$

It is easy to see that the other fundamental representations have highest weight

$$\mu^j = \sum_{k=1}^j e^k / \sqrt{2} \quad (26.12)$$

which is related to the antisymmetric tensor product of  $j D^1$  s.

### 15.27.2 26.2 Tensors for $Sp(2n)$

If we invent a tensor language in which the states of  $D^1$  have a lower index (as in  $SU(n)$ ), the tensor coefficients have upper indices and transform in the usual way

$$(T_a u)^\alpha = [T_a]_\beta^\alpha u^\beta \quad (26.13)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  run from 1 to  $2n$ . It is most convenient to write these in the tensor product notation we introduced in which  $\alpha = (j, x)$  where  $j$  runs from 1 to  $n$  and  $x$  from 1 to 2. Then  $T_a$  are the generators of the defining representation, with the form

$$\epsilon_a [T_a]_{ky}^{jx} = \left( \vec{S}_k^j \vec{\sigma}_y^x + A_k^j \delta_y^x \right) \quad (26.14)$$

An arbitrary linear combination of  $Sp(2n)$  generators has this form where the  $\vec{S}$  are three independent real symmetric  $n \times n$  matrices and  $A$  is an antisymmetric  $n \times n$  matrix. For example we could denote the generators as follows:

$$\begin{aligned} [T_{\mu jj}]_{\ell y}^{kx} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{jk} \delta_{j\ell} [\sigma_\mu]_{xy} \quad \text{for } \mu = 1 \text{ to } 3 \\ [T_{\mu ij}]_{\ell y}^{kx} &= \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{jk} \delta_{i\ell}) [\sigma_\mu]_{xy} \\ &\quad \text{for } \mu = 1 \text{ to } 3, i \neq j \\ [T_{0ij}]_{\ell y}^{kx} &= \frac{i}{2} (\delta_{ik} \delta_{j\ell} - \delta_{jk} \delta_{i\ell}) \delta_{xy} \end{aligned} \quad (26.15)$$

The complex conjugate representation, with a lower index transforms as

$$(T_a u)_\alpha = -[T_a]_\alpha^\beta u_\beta = -[T_a^*]_\beta^\alpha u_\beta \quad (26.16)$$

But this representation is pseudoreal, because

$$-[R]^{\alpha\alpha'} [T_a^*]_{\alpha'}^{\beta'} [R^{-1}]_{\beta'\beta} = [T_a]_\beta^\alpha \quad (26.17)$$

where

$$R^{jxky} = \delta_{jk} [\sigma_2]_{xy} \quad (26.18)$$

$R$  is antisymmetric, so the representation is pseudoreal. As we saw with the orthogonal groups,  $R$  is an invariant tensor with two upper indices and  $R^{-1}$  is an invariant tensor with two lower indices (they happen to have equal matrix elements in this case). Thus we need never consider tensors with lower indices, because we can always raise the lower indices and obtain tensors with the same information.

Now we can use this tensor notation to analyze the irreducible representations as tensor products of the defining representation. The point is that tensor analysis looks very much like that in  $SU(2n)$ , except that the existence of the invariant tensors  $R$  and  $R^{-1}$  allows us to get rid of lower indices and to reduce antisymmetric combinations. For example, consider the tensor product  $D^1 \otimes D^1$ , which explicitly looks like

$$u^\alpha v^\beta \quad (26.19)$$

The symmetric combination

$$S^{\alpha\beta} \equiv u^\alpha v^\beta + u^\beta v^\alpha \quad (26.20)$$

is irreducible because we cannot use  $R$  to decompose it further. This has highest weight  $2\nu^1$ , so this is that adjoint representation. Note that the number of components is right:

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \quad (26.21)$$

But the antisymmetric combination

$$u^\alpha v^\beta - u^\beta v^\alpha \quad (26.22)$$

can be reduced, because the combination

$$O \equiv [R^{-1}]_{\beta\alpha} u^\alpha v^\beta \quad (26.23)$$

is a non-zero singlet. The combination

$$A^{\alpha\beta} \equiv u^\alpha v^\beta - u^\beta v^\alpha - \frac{1}{n} [R]^{\alpha\beta} [R^{-1}]_{\beta'\alpha'} u^{\alpha'} v^{\beta'} \quad (26.24)$$

satisfies

$$[R^{-1}]_{\beta\alpha} A^{\alpha\beta} = 0 \quad (26.25)$$

because

$$[R^{-1}]_{\beta\alpha} R^{\alpha\beta} = \text{Tr}(R^{-1}R) = 2n \quad (26.26)$$

Therefore  $A^{\alpha\beta}$  is the irreducible representation  $D^2$  and we can write the product in terms of irreducible combination as

$$u^\alpha v^\beta = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} A^{\alpha\beta} + \frac{1}{n} R^{\alpha\beta} O \quad (26.27)$$

It is sometimes useful to see all this explicitly in the tensor product notation. Here the discussion should remind you of our treatment of symmetry and antisymmetry in the spinor representations of the orthogonal groups. The point is that the matrix generators of  $D^1$  provide an invariant tensor that describes how the adjoint representation appears in  $D^1 \otimes \overline{D^1}$ . However, this tensor has one upper and one lower index. To find the invariant tensor in  $D^1 \otimes D^1$ , we must raise the lower index with  $R$ . That is, if we multiply the generators on the right by  $R$  which in the tensor product notation is just  $\sigma_2$ , we should get symmetric matrices with two upper indices. And this is right, because

$$(\vec{S} \cdot \vec{\sigma} + A) \sigma_2 \quad (26.28)$$

is symmetric because in each term the factors in the two spaces have the same symmetry. In the same notation, one sees that  $\sigma_2$  itself is the singlet in  $D^1 \otimes \overline{D^1}$ , and that  $D^2$  has the form

$$(\vec{A}' \cdot \vec{\sigma} + S') \sigma_2 \quad (26.29)$$

where  $S'$  is constrained to be traceless.

## Problems

26.A. Find a set of Cartan generators for  $\vec{\sigma} \cdot \vec{S} + A$  that makes it obvious that this defining representation is the fundamental representation  $\mu^1$ .

26.B. Find  $D^1 \otimes D^2$  in  $Sp(6)$  using tensor methods. Find the dimensions of each of the irreducible representations that appear in the tensor product.

Chapter 27

## 15.28 Odds and Ends

### 15.28.1 27.1 Exceptional algebras and octonians

The search for interesting unified theories, like the  $SU(5)$  and  $SO(10)$  theories, leads naturally to an interesting theory based on the algebra,  $E_6$ , one of the exceptional Lie algebras. The exceptional algebras are associated with the octonians, a peculiar set of objects of the form

$$a + b_\alpha i_\alpha \quad (27.1)$$

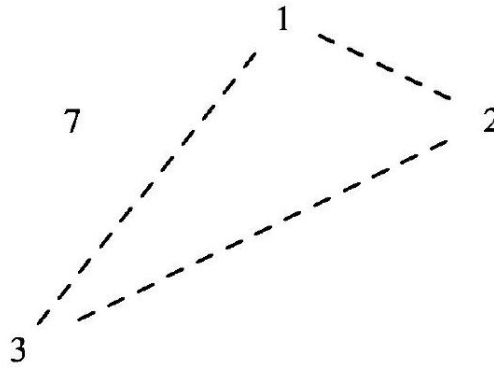
where  $a$  and the  $b_\alpha$  for  $\alpha = 1$  to 7 are real numbers. The  $i_\alpha$  are a set of seven "imaginary units" which are generalizations of  $i$  and of the quaternions,  $\vec{j}$ . The  $i_\alpha$  have the following multiplication law:

$$i_\alpha i_\beta = -\delta_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta\gamma} i_\gamma \quad (27.2)$$

where  $g_{\alpha\beta\gamma}$  is completely antisymmetric. In some basis,  $g$  is

$$g_{123} = g_{247} = g_{451} = g_{562} = g_{634} = g_{375} = g_{716} = 1 \quad (27.3)$$

with all other components either zero or obtainable from (27.3) by antisymmetrization. This multiplication law can be obtained from the following picture:



4

6

5

The seven sets  $\{jkl\}$  for which  $g_{jkl}$  is not zero are obtained by rotating the dotted triangle, with the cyclic order of the indices maintained.

The algebra (27.2) shares with the real numbers, the complex numbers and the quaternions a nice property that was discussed in chapter 19. It is a division algebra with an absolute value that obeys a product rule. The absolute value,

$$|a + b_\alpha i_\alpha| \equiv (a^2 + b_\alpha^2)^{1/2} \quad (27.5)$$

is preserved under multiplication. If  $A$  and  $B$  are octonians, then

$$|AB| = |A||B| \quad (27.6)$$

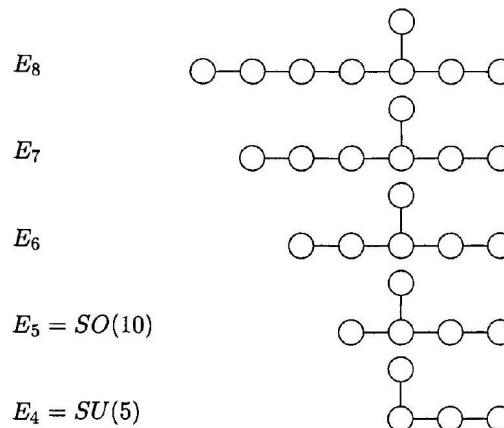
However, the octonian multiplication law is not associative! For example,

$$(i_1 i_2) i_7 = i_3 i_7 = i_5, \quad i_1 (i_2 i_7) = i_1 (-i_4) = -i_5 \quad (27.7)$$

Because of the lack of associativity, octonionic matrices do not generally form groups (whose multiplication laws must be associative). However, the octonians are connected with the exceptional algebras in less direct ways. For example,  $G_2$  is the subgroup of  $SO(7)$  that leaves the object  $g_{\alpha\beta\gamma}$  appearing in (27.2) invariant.

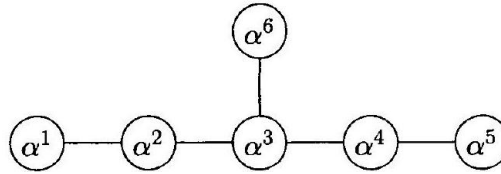
## 15.28.2 27.2 $E_6$ unification

Now back to  $E_6$ . Note first that to go from  $E_8 \rightarrow E_7 \rightarrow E_6$ , you remove one circle from the left branch of the Dynkin diagram, as shown below.



Continuing the same series, you see that  $E_5 = SO(10)$  and  $E_4 = SU(5)$ . Because  $E_4$  and  $E_5$  both give sensible unified theories,  $E_6$  is worth looking at. Of course, this argument is only suggestive, because it turns out that  $E_7$  and  $E_8$  are not useful for unification. But  $E_6$  does turn out to be interesting.

Let us begin by considering the root system and some of the fundamental representations. Label the roots as shown below:



The Cartan matrix is then

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (27.10)$$

It follows from (20.15)-(a) that

$$\alpha^0 + \alpha^1 + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + 2\alpha^4 + \alpha^5 + 2\alpha^6 = 0 \quad (27.13)$$

Thus we can compute the Dynkin coefficient of the weight  $\mu$  for the root  $\alpha^0$ ,

$$\ell^0 = \frac{2\alpha^0 \cdot \mu}{\alpha^{0^2}} \quad (27.14)$$

as linear combinations of the 6 coefficients:

$$\ell^0 = -\ell^1 - 2\ell^2 - 3\ell^3 - 2\ell^4 - \ell^5 - 2\ell^6 \quad (27.15)$$

The result is shown below where the last column is  $\ell^0$ .

1f)  $() () (x) - 1$

|          |          |           |           |           |           |
|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|          |          |           |           | -110000-1 |           |
|          |          |           |           |           | 0-11000-1 |
|          |          |           |           |           | 00-1101-1 |
|          |          |           |           | 00010-10  | 000-111-1 |
|          |          |           | 001-11-10 | 0000-11-1 |           |
|          |          | 0010-1-10 | 01-10100  |           |           |
|          |          | 01-11-100 |           | 1-100100  |           |
|          | 010-1000 |           | 1-101-100 |           | -1000100  |
|          |          | 1-11-1000 |           | -1001-100 |           |
|          |          | 10-10010  |           | -101-1000 |           |
| 10000-11 |          |           |           | -11-10010 |           |
|          |          | -11000-11 |           |           | 0-100010  |
|          |          |           | 0-1100-11 |           |           |
|          |          |           | 00-11001  |           |           |
|          |          |           | 000-1101  |           |           |
|          |          | 0000-101  |           |           |           |

(27.16)

If we now remove one of the roots to get a regular maximal subalgebra, we can simply remove the Dynkin coefficients corresponding to the removed weight from (27.16), and what remains will be the Dynkin coefficients of the subalgebra. Below, we show the result of removing the root  $\alpha^3$  to get  $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ . We also write the remaining coefficients in the order 120654. We do this so that in each of the three  $SU(3)$  factors, the two roots appear together and the root on the outside of the extended Dynkin diagram appears first.

|         |         |          |          |          |          |
|---------|---------|----------|----------|----------|----------|
| 10-1000 |         |          |          |          |          |
|         |         |          |          | -11-1000 |          |
|         |         |          |          |          | 0-1-1000 |
|         |         |          |          |          | 00-1101  |
|         |         |          |          | 000-101  | 00-111-1 |
|         |         |          | 000-11-1 | 00-11-10 |          |
|         |         | 000-1-10 | 010010   |          |          |
|         |         | 0100-11  |          | 1-10010  |          |
|         | 01000-1 |          | 1-100-11 |          | -100010  |
|         |         | 1-1000-1 |          | -1000-11 |          |
|         |         | 100100   |          | -10000-1 |          |
| 101-100 |         |          |          | -110100  |          |
|         |         | -111-100 |          |          | 0-10100  |
|         |         |          | 0-11-100 |          |          |
|         |         |          | 001001   |          |          |
|         |         |          | 00101-1  |          |          |
|         |         | 0010-10  |          |          |          |

These can be organized into three sets of nine weights:



$$\boxed{\{10, -11, 0-1\}\{01, 1-1, -10\}00}, \boxed{\{01, 1-1, -10\}00\{10, -11, 0-1\}},$$

and  $\boxed{00\{10, -11, 0-1\}\{01, 1-1, -10\}}$

In the set  $\{10, -11, 0-1\}$ , we recognize the Dynkin coefficients of the 3 of  $SU(3)$ . The set  $\{01, 1-1, -10\}$  is the  $\bar{3}$ . Thus the 27 transforms as

$$27 \sim (3, \bar{3}, 1) \oplus (1, 3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 1, 3) \quad (27.19)$$

An analogous argument, removing the root  $\alpha^6$ , shows that the 27 transforms under the  $SU(6) \times SU(2)$  subgroup as

$$27 \sim (6, 2) \oplus (\bar{15}, 1) \quad (27.20)$$

where the  $\bar{15}$  is the fundamental representation  $D^4$ , antisymmetric in 4 upper (or two lower) indices.

Note that  $SO(10)$  and  $SU(5)$  are regular but not maximal subalgebras of  $E_6$ . You can probably guess how the 27 transforms under  $SO(10)$  and  $SU(5)$  from what we have already seen. But it is easy to check by removing the first Dynkin coefficient from (27.11) that the transformation law under  $SO(10)$  is

$$27 \sim 16 \oplus 10 \oplus 1 \quad (27.21)$$

where the 16 is  $D^5$  and the transformation law under  $SU(5)$  is

$$27 \sim 5 \oplus \bar{10} \oplus 1 \oplus 5 \oplus \bar{5} \oplus 1 \quad (27.22)$$

From equations (27.21) and (27.22), you can see that  $E_6$  unification can be related to  $SO(10)$  much as  $SO(10)$  is related to  $SU(5)$ . In addition to the complex  $SO(10)$  representation, 16, the 27 of  $E_6$  contains real representations which can be given a large mass by the symmetry breaking.

### 15.28.3 27.3 Breaking $E_6$

One of the features of  $E_6$  unification is that the 27, in which the matter particles live, also contains  $SU(2)$  doublets, living in the 10 of  $SO(10)$ , that could be responsible for the breaking of  $SU(2) \times U(1)$  at low energy. One might ask the following group theory question. Can one break the  $E_6$  symmetry down to the low energy  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  entirely with Higgs transforming like 27s. The answer is no. You can see this from (27.22). If there are 27 s with vacuum values in the two  $SU(5)$  singlet directions, that breaks the symmetry down to  $SU(5)$ . But there are no other  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  singlet components in the 27, because there are none in the  $SU(5)10, 5$  or  $\bar{5}$ . Thus anything in the 27 that preserves  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  also preserves  $SU(5)$ . Something else is needed. Here we will simply state without proof that the additional breaking can be provided by a Higgs transforming like the 78 dimensional adjoint representation.

### 15.28.4 27.4 $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ unification

In passing, it is worth noting that the  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  symmetry is actually completely contained in the  $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$  subgroup of  $E_6$ . Observe further that the transformation properties of the 27 of  $E_6$ , from (27.19), are invariant under cyclic permutations of the three  $SU(3)$  factors. This cyclic symmetry is an inner automorphism of the  $E_6$  algebra, and thus a discrete subgroup of  $E_6$ . It is related to the symmetry of the extended Dynkin diagram of  $E_6$ ,

(27.12). But it is an inner, rather than an outer automorphism, because it is not a symmetry of the Dynkin diagram.

While  $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$  is not simple, if it is supplemented by the cyclic discrete symmetry, it shares many of the properties of a unified theory. The 27 is irreducible under the combination of the continuous and discrete symmetry. In this model, one can do the symmetry breaking entirely with Higgs transforming like the 27.

### 15.28.5 27.5 Anomalies

There is a peculiar constraint on unified theories that follows from the structure of quantum field theory, the mathematical language in which all these theories are formulated. The constraint is that if the creation operators for all the right-handed spin 1/2 particles transform according to a representation generated by matrices  $T_a^R$ , then  $T_a^R$  must satisfy

$$\text{Tr} (\{T_a^R, T_b^R\} T_c^R) = 0 \quad (27.23)$$

You can show that this symmetric trace of three generators vanishes for all simple Lie algebras except  $SU(N)$  for  $N \geq 3$  (and  $SO(6)$  which is equivalent to  $SU(4)$ ). In  $SU(N)$ , suppose that  $T_a^{\bar{D}}$  generate the representation  $D$  of  $SU(N)$ . Then define the invariant tensor  $d^{abc}$  as follows:

$$\text{Tr} (\{T_a^{D^1}, T_b^{D^1}\} T_c^{D^1}) \equiv d^{abc} \quad (27.24)$$

for the defining representation  $D^1$ . Then, for any representation, you can show that

$$\text{Tr} (\{T_a^D, T_b^D\} T_c^D) = A(D) d^{abc} \quad (27.25)$$

where  $A(D)$  is an integer, which is called the anomaly of the representation  $D$ . Thus (27.23) is the statement that the creation operators for the righthanded particles transform according to an anomaly free representation of the unifying group.

You can easily derive the following properties of  $A(D)$  (see problem 27.C):

$$A(\bar{D}) = -A(D) \quad (27.26)$$

$$A(D_1 \oplus D_2) = A(D_1) + A(D_2) \quad (27.27)$$

$$A(D_1 \otimes D_2) = \dim(D_1) A(D_2) + \dim(D_2) A(D_1) \quad (27.28)$$

For  $SU(5)$ , or  $SU(2) \times U(1)$ , the anomaly of the 10 is the same as the anomaly of the 5 (see problem 27.B), thus  $5 \oplus \bar{10}$  is anomaly free. This in turn implies that the representation (18.12) of a family of right-handed particles under  $SU(2) \times U(1)$  is anomaly free, because the generators of  $SU(2) \times U(1)$  in this representation are just a subset of the generators of  $SU(5)$  in the  $5 \oplus \bar{10}$ .

### Problems

27.A. Find  $A(D)$  for the 6, and 10 of  $SU(3)$ .

27.B. You can find the anomaly of the fundamental representations of  $SU(n)$  by calculating the anomaly of the  $SU(3)$  subalgebra of  $SU(n)$  under which the  $n$  transforms like a single 3 and  $n - 3$  singlets. Use this to show that the anomaly of the 10 is the same as the anomaly of the 5 in  $SU(5)$ .

27.C. Prove (27.27) and (27.28).

---

## Part IX

# Appendix

## A Introduction

### A.1 General Ideas

Осудим, как видят мир и алгебру профессионалы.

#### A.1.1 Extra Motivation

Обсудим, какова польза алгебры и приведем всю мотивацию, которая позволит нам его познать без проблем.

#### Algebra is used in CFT

(раскрою мысль, что именно там полно её применений и если интересны модиф. теории поля, то тогда алгебра - важнейший предмет, который нужно готовить.)

#### О пользе алгебры

всегда хотел четко прописать, что же дает на самом деле занятие ей.

Очень часто в физике встречаются понятия, на которых нет времени останавливаться, так что тут будет нормально все подробно пояснено.

#### Удивительные факты

#### Результаты алгебры

#### A.1.2 What is “Algebraic Thinking”?

(??? that is why algebra is included for typical study programs...)

#### A.1.3 Ways to Guess Some Main Ideas (???)

(это же в части про теорию укажу, очень важный вопрос. как вообще вывести все конструкции? на что смотреть????)

#### Появление алгебры в нашей картине мира

(??? how to guess that there is such thing called algebra? why would one at all think about it?)

#### A.1.4 Overview of Applications of Algebra

(?!?! an important topic, I am not sure)

#### A.1.5 How to Study Algebra?

хорошо учить алгебру, когда развита теория поля, чтобы заодно применять ее в физических теориях

так и мотивации много будет.

**постарайся найти человека, с которым приятно общаться, кто изучает или знает алгебру**

Такие люди отличаются от других и найти их может быть сложно.

потому что мало кто всерьез задумается про алгебру, а из тех, кто задумается, мало кто приятен в общении, хотя я не проверял среди разных социумов.

в любом случае, найти такого человека очень поможет принципиально во всем.

ибо это преподаст подход!

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ Кострикина (??)

(пока не думал про это, подумаю потом)

Так как лекционных часов и семинарских занятий, отводимых на освоение изложенного в [ВА III] материала, слишком мало, то приходится ориентироваться на некий каркас, оснащая его по мере возможности разными деталями. Каркас, именуемый учебной программой, подвержен эволюции, вкусам лектора, а в целом отвечает уровню студенческой восприимчивости.

Рассказ о соответствии между линейными группами Ли и касательными к ним алгебрами Ли (гл. 2§4), опирающийся на материал из [ВА II, гл. 7§1] и в какой-то мере нужный геометрам (инициирован он по их просьбе), получился довольно схематичным из-за явного дефицита топологических сведений. Гораций был бы недоволен.. . (см. предисловие к [ВА I]). И всё-таки сопоставления типа "алгебра Ли  $\rightarrow$  группа Ли", "многочлен  $\rightarrow$  его группа Галуа", "произвольное ассоциативное кольцо  $\rightarrow$  модуль над этим кольцом" крайне полезны, поскольку они служат яркой иллюстрацией единства алгебры как большого раздела математики.

В условиях механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова упомянутый выше каркас алгебры третьего семестра применялся несколько раз. Теория Галуа потихоньку отошла в область спецкурсов. Собственно, глава 5 и написана для одного из таких спецкурсов, причём рассчитанного на эффективное использование теории характеров.

## ПРОГРАММА КУРСА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ (3-й семестр, 1995 г.) Кострикина

**N)**Порядок элемента и порядок циклической группы. Изоморфизм циклических групп одинакового порядка. Полное описание подгрупп циклической группы.

**N)**Разложение группы в объединение левых (правых) смежных классов по её подгруппе. Теорема Лагранжа и её следствия (2 часа).

**N)**Нормальная подгруппа. Факторгруппа. Теоремы о гомоморфизмах и об изоморфизме. Прямые произведения групп (5 часов).

**N)**Действия групп. Орбиты и стабилизаторы. Классы сопряжённых элементов и центр группы. Примеры:  $S_n$  и  $A_n$  (2 часа).

**N)**Понятие простой группы. Простота  $A_n, n > 4$ , и  $SO(3)$  (2 часа).

**N)**Теоремы Силова (2 часа).

**N)**Свободные абелевы группы конечного ранга и их подгруппы. Периодические абелевы группы. Строение конечно порождённых абелевых групп (4 часа).

**N)**Кольца, алгебры, факторалгебры. Присоединение корня многочлена к полю. Поле разложения многочлена. Конечные поля (5 часов).

**N)**Алгебры с делением. Алгебра кватернионов. Теорема Фробениуса (2 часа).

**N)**Линейные представления групп и алгебр. Инвариантные подпространства. Неприводимые и вполне приводимые представления. Матричная реализация. Теорема Машке. Представления конечных абелевых групп (3 часа).

N) Модули. Лемма Шура. Теорема плотности. Структура простой конечномерной ассоциативной алгебры (3 часа).

N) Линейные группы Ли. Классические группы. Алгебры Ли. Касательная алгебра Ли группы Ли. Экспоненциальное отображение (4 часа).

Общее количество лекционных часов - 34 (на практике меньше). При необходимости часть лекционного материала переносится на семинарские занятия.

## A.2 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

## A.3 Literature

Обсудим книги, которые использовались при создании этой записи.

### A.3.1 Main literature

#### Основная обучающая литература по общей алгебре

[1] Zhou K. Lecture Notes on Group Theory

Хороший конспект типичных тем от аспиранта Стенфорда, короткий и очень содержательный.

[2] Lukas A., Tillim H. Groups and Representations MMathPhys/MScMTP lecture course from Oxford

A very good course from Oxford.

[3] Dorey N. Symmetries, Fields, and Particles lectures (transcribed by Josh Kirklin.)

<https://kirklin.science/notes/sfp.pdf>

Nice summary of main ideas, short and well-written.

[4] Винберг Курс Алгебры

Big famous book. Basics of algebra for 1-st year students are provided.

[5] Matthew S. Foster Mainly Lie algebra representation theory (Rice University) <http://mf23.web.rice.edu/>

Very good lectures with many explanations, pictures and examples. Many examples of  $su(3)$  are provided.

#### Особо используемая профессиональная литература по линейной алгебре, теории групп, алгебрам Ли

[6] Howard Georgi Lie Algebras in Particle Physics

Good famous book with a lot of tensor methods.

Phillipe Di Francesco, Pierre Mathieu, David Sénéchal, Conformal Field Theory (Springer-Verlag, New York, 1996).

This book has many algebraic applications and explanations, so it is very useful for those who passed basic course.

#### Books With Many Solved Problems

(currently problems are in books about theory, but I'll cite them again here later.)

## A.3.2 Additional and professional literature

### Другая обучающая

Van Proeyen A. Groups and symmetries (Lecture notes for master course 2005–2022 KU Leuven)

Nice compact summary of many useful concepts and illustration of  $sp(4)$ . Mostly it is based on Fuchs Schweigert's book.

Jonathan Evans Video lectures on Lie algebra  
<https://www.youtube.com/@jonathanevans27/videos>

Lectures that are easy to find in Google or YouTube. Nice lectures if you are tired of introductory reading books.

[?] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II

Famous Russian book that has a lot of theorems and covers all basic topics. More theoretical, applications are not explained.

Anthony Zee, Group Theory in a Nutshell for Physicists (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2016).

Famous book by a famous author. Didn't have time to read it now, but later I'll look at it.

[7] В.В.Киселев, Д.Л.Осипов Генераторы симметрии, алгебры Ли и квантовая динамика

Detailed discussion in an unusual notation is provided. There must be many important ideas, but after looking at lectures from world top universities I don't have a lot of motivation to think about Kiselev's extra theory. I am not sure that it is important.

[?] Берштейн лекции.

Небольшие лекции по теории групп, где тоже есть, чему поучиться.

N. P. Strickland Fields and galois theory [https://neilstrickland.github.io/fields\\_and\\_galois\\_theory/notes/fields.pdf](https://neilstrickland.github.io/fields_and_galois_theory/notes/fields.pdf)

Курс по теории Галуа, хорошие конспекты, есть упражнения, есть на гитхабе исходный код их (но там куча своих макросов). Пока не актуальная эта тема, но выглядят очень хорошими.

<https://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/Spin/> José Miguel Figueroa-O'Farrill  
Course on Spin group

Good and detailed course on spin group, Clifford algebra.

[8] Kirillov, Jr, Alexander An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras

Another good book, covers typical topics. I was taught by another books, so I wasn't looking a lot to it.

[9] Coleman, Sidney Fun with  $SU(3)$

Little, useful and not so trivial manual about  $SU(3)$ . Tensor background is needed for it.

Ильин Позняк Линейная алгебра

Еще одна известная книга про линейную алгебру, обсуждаются основы.

[10] Кострикин Введение в алгебру, часть 1

Book about first basics of algebra for 1 year students.

[11] Кострикин Введение в алгебру, часть 3

Good famous in Russia book. Covers a lot of typical constructions, but it is easier to open a famous English book, than to understand some statements in this book. Not all is explained understandably.

[?] Кострикин Манин

потом посмотрю, обещает быть полезной.

## Профессиональная литература по алгебре

[?]

Профессиональная книга, которую как и многие другие хотелось бы понять, но нет, не до нее пока нет супер стабильности в науке.

[12] Fuchs, Schweigert Symmetries, Lie Algebras and Representations A Graduate Course for Physicists

Большая профессиональная книга, где многое написано, очень многому можно научиться, однако есть поясняющие лекции, по которым понять темы гораздо легче. Наличия многой информации в первые месяцы изучения только создает сложности, но если основы понятны, то, наоборот, очень интересно читать разные дополнительные темы в ней. Её в открытом доступе нет, так что нужно просить кого-то математика или студента ее прислать.

Ленг Алгебра

очень большая, профессиональная книга, можно месяц сидеть на ней, мб однажды засяду, структура заготовлена уже.

Robert N. Cahn, Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations (Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984).

An interesting book that Foster used in his lectures, so I opened it also. Maybe I'll look again later in it. Maybe nothing very special is there, especially if one has had Foster's notes.

[?] Хамфрис Алгебры и Алгебра ли

Большая книга для специалистов.

[?] Кириллов "Что такое число?"

Интересное популярное введение, где мало что объяснено, поэтому особой пользы от прочтения не будет, но если кто-то алгеброй занимается, то тем очень интересно было бы почитать.

[1] Robert N. Cahn, Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations (Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984).

From references by Foster, lecture 5 (roots and weights)

[2] R. Shankar, Principles of Quantum Mechanics, 2nd ed. (Plenum Press, New York, 1994).

From references by Foster, lecture 5 (roots and weights)

Anthony W. Knap Lie Groups Beyond an Introduction (2 Edition, 2023)

A big encyclopedia of Lie algebras, more than 800 pages, I didn't need this theory yet.

## References from Lie groups as manifolds. $SU(2)$ and the three-sphere

[1] Sean Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity (Addison-Wesley 2003); arXiv:gr-qc/9712019.

[2] M. Chaichian and R. Hagedorn, Symmetries in Quantum Mechanics (IoP Publishing, Bristol, UK, 1998).

[3] Konstantin Efetov, Supersymmetry in Disorder and Chaos (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999).

## Книги по основам алгебр Ли

Жан Пьер Серр Алгебры Ли

Наверное, крутая книга, но не было времени изучать её.

## Дополнительная по алгебраической теории

[?] Ширков Алгебры Клиффорда.

Если начну изучать алгебры Клиффорда, её почитаю.



Николай Вавилов Курс лекций: Алгебры Клиффорда и спинорные группы <https://www.lektorium.tv/lecture/14226>

Курс от прекрасного математика, у которого очень многому можно научиться. Было бы нужно - посмотрел бы её. Смотрел штуки 3 лекций, но не было времени продумать эти темы, да и потребности в них тоже не было.

[13] Garibaldi, Skip  $E_8$ , the most exceptional group

Cool little article with a review of many constructions, that I've not even heard of.

[14] Naoki Yamatsu Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building

Известный огромный словарь алгебр Ли.

[15] Аржанцев, И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений

Я когда-то хотел понять, как алгебра в системах уравнений может помочь, тут хорошая методичка. Так она и не стала актуальной, не до неё было вообще всегда.

### Статьи и книги о спинорах

Теория спиноров [1997] Картан

Очень много теории спиноров, очень полезна будет специалистам, однако я вряд ли дойду до нее.

JOSE FIGUEROA-O'FARRILL MAJORANA SPINORS

Nice article about Majorana spinors, I still need to understand them much better.

[?] Широков Д. С "Алгебры Клиффорда и Спиноры"

Открыл, показались интересными, закрыл.

[?] Лекции курса Р.С. Авдеева и А.И. Буфетова «Спиноры»

Открыл, показались интересными, закрыл.

### Статьи и книги о superalgebra

[363] V. G. Кас, A sketch of Lie superalgebra theory, Commun. Math. Phys. 53 (1977) 31-64

Проен написал, что там классификация дана и вообще статья хорошая.

[364] V. G. Кас, Lie superalgebras, Adv. Math. 26 (1977) 8-96

Проен написал, что там классификация дана и вообще статья хорошая.

[365] M. Parker, Classification of real simple Lie superalgebras of classical type, J. Math. Phys. 21 (1980) 689-697

Проен написал, что там классификация дана и вообще статья хорошая.

### Статьи и книги о К-теории

(пока не актуально)

### Математическая литература в помощь

[?] Карасёв Р.Н. Отдельные темы математического анализа

Если нужно вспомнить матан, то тут неплохой конспект, однако к алгебре очень мало он относится.

[?] Геометрические методы в математической физике Катанаев М. О.

Интересная книга, которую хотел когда-то прочитать, но пока она совершенно мне не нужна была.

[16] Пирковский А.Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов

Книга больше по функану, но и в алгебре она скорее всего будет полезной.



[?] Н.А. Гусев "Заметки к курсу Мера и интеграл Лебега"

Интересная книга, которую хотел когда-то прочитать, но пока она совершенно мне не нужна была.

[?] Т Тао структура и Случайность

Интересная книга, которую хотел когда-то прочитать, но пока она совершенно мне не нужна была.

[?] И.В.Аржанцев Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений

Интересная книга, которую хотел когда-то прочитать, но пока она совершенно мне не нужна была.

### A.3.3 Literature about Applications

#### Литература про разные вообще приложения

[17] Sternberg, S Group Theory and Physics

Big book about many applications. Some of them I know, but most of them - I don't. Looks like encyclopedia. Use lib.mipt to download it.

#### Литература про алгебру в теории поля

[18] D. Z. Freedman, A. Van Proeyen Supergravity

Книга, рассказывающая про особые свойства полей и суперсимметрии, есть приложения алгебры, но не особо много.

#### Литература про алгебру в конденсированных средах и спинных моделях

[19] Tsvelik, Alexei M. Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics

Very good book with many algebraic models in condensed matter. I'll write later a whole section about these methods. Use lib.mipt to download it.

Refs by Foster:

[8] M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. 82, 3045 (2010).

Статья, которую рекомендовал Кирилл Песоцкий.

[1] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. B 78, 195125 (2008).

Более техническая статья про классификацию.

[2] S. Ryu, A. P. Schnyder, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, New J. Phys. 12, 065010 (2010).

Более обзорная статья про классификацию.

[3] A. Kitaev, AIP Conf. Proc. No. 1134 (AIP, New York, 2009), p. 22.

[4] For a review, see e.g. C.-K. Chiu, J. C. Y. Teo, A. P. Schnyder, and S. Ryu, Rev. Mod. Phys. 88, 035005 (2016).

[5] M. Mehta, Random Matrices, 3rd ed. (Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2004).

как это связано с гамильтонианами и их классификацией?

[6] K. Efetov, Supersymmetry in Disorder and Chaos (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1997).

Известная книга про беспорядки в конд. средах, пока не знаю, как это с алгеброй вообще связано?

[7] F. Evers and A. D. Mirlin, Rev. Mod. Phys. 80, 1355 (2008).

[9] For a recent review, see e.g. J. Alicea, Rep. Prog. Phys. 75, 076501 (2012).

[10] G. E. Volovik, The Universe in a Helium Droplet (Oxford University Press, Oxford, 2003).

Special refs from Foster's Highest-weight representations:

### **Литература про алгебру в квантовой механике**

[20] Тахтаджян Л. А. Квантовая механика для математиков

Прекрасная книга для понимания математической квантовой механики. Хотелось бы разве что больше примеров и больше связей с не математической квантовой механикой, но уже с ней очень многое можно понять.

### **Литература про алгебру в теории струн**

(займусь - напишу)

## **A.4 History of Algebra**

(подробнее - в истории науки) (???)

### **Короткий исторический обзор приложений алгебры**

(подробнее - в истории науки)

### **Об открытии изоспина**

(потом напишу, пока не до этого.)

## **A.5 Puzzles for Different Situations**

### **A.5.1 Questions from Ancient and Medieval Philosophers**

(тут всякие их размышления о числах и бесконечности, с которыми и можно вечно в тупике сидеть. профессионально потом отвечу на них.)

### **Почему может быть две бесконечности**

(приведу доказательство Иоанна Дунса Скотта, что если бы их было две, то одна была бы частью другой, так что она не могла бы быть бесконечностью. а в комплексных числах это возможно. ответ на это очевиден, пропишу потом.)

### **Если ноль это ничто, то почему он существует?**

(очень тупой вопрос, тоже мб пропишу ответ)

**Я беру 2 яблока, складываю с 3мя яблоками, получаю 5 яблок. где тут мнимая единица?**

(тоже очевиден ответ, потом пропишу)

## B Bibliography

### References

- [1] Zhou, K.: *Lecture notes on group theory*. <https://knzhou.github.io/notes/grp.pdf>.
- [2] Lukas A., Tillim H.: *Groups and representations mmathphys/mscmtpl lecture course*. Oxford, 2020. <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/AndreLukas/GroupsandRepresentations/groupsrepslecturenotes.pdf>.
- [3] Dorey, N. (transcribed by Josh Kirklin.): *Symmetries, fields, and particles lectures*. <https://kirklin.science/notes/sfp.pdf>.
- [4] Винберг, Э.: *Курс алгебры*. Litres, 2017.
- [5] Foster, M. S.: *Mainly lie algebra representation theory [course notes]*. Physics & Astronomy Department, Rice University. <http://mf23.web.rice.edu/>.
- [6] Georgi, Howard: *Lie algebras in particle physics*, volume 54. Perseus Books, Reading, MA, 2nd ed. edition, 1999.
- [7] Киселев, В.В., Осипов, Д.Л.: *Генераторы симметрии, алгебры Ли и квантовая динамика*. 2023.
- [8] Kirillov, Jr, Alexander: *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [9] Coleman, Sidney: *Fun with  $su(3)$* . pages 331–352, 1965.
- [10] Кострикин, А. И.: *Введение в алгебру*. физматлит, 2004.
- [11] Кострикин, А. И.: *Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры*. М.: физматлит, 2001.
- [12] Fuchs, J., Schweigert, C.: *Symmetries, Lie Algebras and Representations: A Graduate Course for Physicists*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003, ISBN 9780521541190. [https://books.google.bg/books?id=B\\_JQryjNYyAC](https://books.google.bg/books?id=B_JQryjNYyAC).
- [13] Garibaldi, Skip:  *$e_8$ , the most exceptional group*. Bulletin of the American Mathematical Society, 53(4):643–671, June 2016, ISSN 1088-9485. <http://dx.doi.org/10.1090/bull/1540>.
- [14] Yamatsu, Naoki: *Finite-dimensional lie algebras and their representations for unified model building*, 2020. <https://arxiv.org/abs/1511.08771>.
- [15] Аржанцев, И.В.: *Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений*, 2002. <https://old.mccme.ru//free-books//dubna/arjantsev.pdf>.
- [16] Пирковский, А. Ю.: *Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов*. 2010.
- [17] Sternberg, S: *Group Theory and Physics*. Cambridge University Press, 1995, ISBN 9780521558853. <https://books.google.bg/books?id=k2Fp3JA93oYC>.

- [18] Freedman, D. Z., Van Proeyen, A.: *Supergravity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, May 2012, ISBN 978-1-139-36806-3, 978-0-521-19401-3.
- [19] Tselik, Alexei M.: *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2003.
- [20] Takhtadzhian, L.A.: *Quantum Mechanics for Mathematicians*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2008, ISBN 9780821846308. <https://books.google.bg/books?id=TQq-AgAAQBAJ>.
- [21] Кострикин, А. И., Манин, Ю. И.: *Линейная алгебра и геометрия*. “Наука”, 1986.
- [22] Кострикин, А.И.: *Введение в алгебру. Линейная алгебра*. М.: Физматлит, 2001.

### Bibliography from Skip Garibaldi’s “ $E_8$ , the most exceptional group”

## References

- [ABS90] H. Azad, M. Barry, and G. Seitz, *On the structure of parabolic subgroups*, Comm. Algebra **18** (1990), no. 2, 551–562.
- [Ada96] J. F. Adams, *Lectures on exceptional Lie groups*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996, With a foreword by J. Peter May, Edited by Zafer Mahmud and Mamoru Mimura. MR 1428422 (98b:22001)
- [AFS14] B. Allison, J. Faulkner, and O. Smirnov, *Weyl images of Kantor pairs*, arxiv:1404.3339, 2014.
- [All79] B.N. Allison, *Models of isotropic simple Lie algebras*, Comm. Algebra **7** (1979), no. 17, 1835–1875. MR 81d:17005
- [All94] ———, *Structurable algebras and the construction of simple Lie algebras*, Jordan algebras (Berlin) (W. Kaup, K. McCrimmon, and H.P. Petersson, eds.), de Gruyter, 1994, (Proceedings of a conference at Oberwolfach, 1992).
- [Bae02] J.C. Baez, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 2, 145–205.
- [BD15] L. Boelaert and T. De Medts, *A new construction of Moufang quadrangles of type  $E_6$ ,  $E_7$  and  $E_8$* , Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 5, 3447–3480.
- [BDS49] A. Borel and J. De Siebenthal, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv. **23** (1949), 200–221.
- [BG11] D. Borthwick and S. Garibaldi, *Did a 1-dimensional magnet detect a 248-dimensional algebra?*, Notices of the AMS **58** (2011), no. 8, 1055–1066.
- [BH10] J. Baez and J. Huerta, *The algebra of Grand Unified Theories*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **47** (2010), no. 3, 483–552.
- [BK94] R. Brylinski and B. Kostant, *Minimal representations of  $E_6$ ,  $E_7$ , and  $E_8$  and the generalized Capelli identity*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **91** (1994), no. 7, 2469–2472. MR 1267034 (96a:22026)
- [Blo62] R.E. Block, *Trace forms on Lie algebras*, Canad. J. Math. **14** (1962), 553–564.

- [BLS05] G. Belitskii, R. Lipyanski, and V. Sergeichuk, *Problems of classifying associative or Lie algebras and triples of symmetric or skew-symmetric matrices are wild*, Linear Algebra Appl. **407** (2005), 249–262.
- [BM13] S. Blinstein and A. Merkurjev, *Cohomological invariants of algebraic tori*, Algebra & Number Theory **7** (2013), no. 7, 1643–1684.
- [Bou02] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras: Chapters 4–6*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [Bou05] ———, *Lie groups and Lie algebras: Chapters 7–9*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [BP95] E. Bayer-Fluckiger and R. Parimala, *Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension  $\leq 2$* , Invent. Math. **122** (1995), 195–229.
- [BS81] E. Bannai and N.J.A. Sloane, *Uniqueness of certain spherical codes*, Can. J. Math. **33** (1981), no. 2, 437–449.
- [BT87] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), no. 3, 671–698.
- [BZ64] R.E. Block and H. Zassenhaus, *The Lie algebras with a nondegenerate trace form*, Illinois J. Math. **8** (1964), 543–549.
- [Car] E. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, thesis, Paris, 1894; 2nd edition, Vuibert, 1933 (= Oe., part 1, vol. 1 (1952), 137–287).
- [Car14] ———, *Les groupes réels simples finis et continus*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **31** (1914), 265–355.
- [Car89] R.W. Carter, *Simple groups of Lie type*, Wiley, 1989.
- [CCN<sup>+</sup>85] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, and R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, Eynsham, 1985, Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups, With computational assistance from J. G. Thackray. MR MR827219 (88g:20025)
- [Che89] V. Chernousov, *The Hasse principle for groups of type  $E_8$* , Soviet Math. Dokl. **39** (1989), 592–596, [Russian original: Dokl. Akad. Nauk SSSR **306** (1989), 1059–1063].
- [Che95] ———, *A remark on the (mod 5)-invariant of Serre for groups of type  $E_8$* , Math. Notes **56** (1995), no. 1-2, 730–733, [Russian original: Mat. Zametki **56** (1994), no. 1, pp. 116–121].
- [Che97] C. Chevalley, *The algebraic theory of spinors*, Springer, Berlin, 1997, reprint of the 1954 edition.
- [Che10] V. Chernousov, *On the kernel of the Rost invariant for  $E_8$  modulo 3*, Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology (J.-L. Colliot-Thélène, S. Garibaldi, R. Sujatha, and V. Suresh, eds.), Developments in Mathematics, vol. 18, Springer, 2010, pp. 199–214.
- [Col89] A.J. Coleman, *The greatest mathematical paper of all time*, Math. Intelligencer **11** (1989), no. 3, 29–38.

- [Con14] B. Conrad, *Non-split reductive groups over  $\mathbf{Z}$* , 2014.
- [CP07] M. Cederwall and J. Palmkvist, *The octic  $E_8$  invariant*, J. Math. Phys. (2007), 073505.
- [CS50] C. Chevalley and R.D. Schafer, *The exceptional simple Lie algebras  $F_4$  and  $E_6$* , Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **36** (1950), 137–141. MR 0034378 (11,577b)
- [CS03] J.H. Conway and D.A. Smith, *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*, A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2003. MR 1957212 (2004a:17002)
- [CS13] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, *Sphere packings, lattices, and groups*, 2nd ed., Springer, 2013.
- [CTW<sup>+</sup>10] R. Coldea, D.A. Tennant, E.M. Wheeler, E. Wawrzynska, D. Prabhakaran, M. Telling, K. Habicht, P. Smibidl, and K. Kiefer, *Quantum criticality in an Ising chain: experimental evidence for emergent  $E_8$  symmetry*, Science **327** (2010), 177–180.
- [CW95] A.M. Cohen and D.B. Wales, *Finite simple subgroups of semisimple complex Lie groups—a survey*, Groups of Lie type and their geometries, Lecture Notes, vol. 207, London Math. Soc., 1995, pp. 77–92.
- [Dem77] M. Demazure, *Automorphismes et déformations des variétés de Borel*, Invent. Math. **39** (1977), no. 2, 179–186.
- [DG70a] M. Demazure and A. Grothendieck, *Schémas en groupes II: Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 152, Springer, 1970.
- [DG70b] ———, *SGA3: Schémas en groupes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 151–153, Springer, 1970.
- [DG02] P. Deligne and B.H. Gross, *On the exceptional series, and its descendants*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **335** (2002), no. 11, 877–881.
- [DG10] J. Distler and S. Garibaldi, *There is no “Theory of Everything” inside  $E_8$* , Comm. Math. Phys. **298** (2010), 419–436.
- [dHS11] A.J. de Jong, X. He, and J.M. Starr, *Families of rationally simply connected varieties over surfaces and torsors for semisimple groups*, Publ. Math. IHES (2011), no. 114, 1–85.
- [DM95] G. Delfino and G. Mussardo, *The spin-spin correlation function in the two-dimensional Ising model in a magnetic field at  $T = T_c$* , Nuclear Phys. B **455** (1995), no. 3, 724–758. MR 1361337 (96g:82013)
- [DMF07] E. Diaconescu, G. Moore, and D.S. Freed, *The M-theory 3-form and  $E_8$  gauge theory*, Elliptic cohomology, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 342, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 44–88. MR 2330507 (2009f:58034)
- [DMW02] D.-E. Diaconescu, G. Moore, and E. Witten,  *$E_8$  gauge theory, and a derivation of K-theory from M-theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **6** (2002), no. 6, 1031–1134 (2003). MR 1982693 (2004i:58062)

- [Dyn57] E.B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **6** (1957), 111–244, [Russian original: Mat. Sbornik N.S. **30(72)** (1952), 349–462].
- [EHH<sup>+</sup>91] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, and R. Remmert, *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 123, Springer, 1991.
- [EKM08] R.S. Elman, N. Karpenko, and A. Merkurjev, *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, Colloquium Publications, vol. 56, Amer. Math. Soc., 2008.
- [Eld09] A. Elduque, *Jordan gradings on exceptional simple Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 12, 4007–4017. MR 2538561 (2011c:17019)
- [Elk00] N. Elkies, *Lattices, linear codes, and invariants, part I*, Notices Amer. Math. Soc. **47** (2000), 1238–1245.
- [EY89] T. Eguchi and S.-K. Yang, *Deformations of conformal field theories and soliton equations*, Phys. Lett. B **224** (1989), no. 4, 373–378.
- [Fau14] J.R. Faulkner, *Some forms of exceptional Lie algebras*, Comm. Algebra **42** (2014), no. 11, 4854–4873. MR 3210416
- [FF77] J.R. Faulkner and J.C. Ferrar, *Exceptional Lie algebras and related algebraic and geometric structures*, Bull. London Math. Soc. **9** (1977), no. 1, 1–35.
- [FFR91] Alex J. Feingold, Igor B. Frenkel, and John F. X. Ries, *Spinor construction of vertex operator algebras, triality, and  $E_8^{(1)}$* , Contemporary Mathematics, vol. 121, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. MR 1123265 (92k:17041)
- [FH91] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory: a first course*, Graduate texts in mathematics, vol. 129, Springer, 1991.
- [FK80] I.B. Frenkel and V.G. Kac, *Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models*, Invent. Math. **62** (1980), 23–66.
- [FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster*, Pure and Applied Mathematics, vol. 134, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. MR 996026 (90h:17026)
- [FO08] José Figueroa-O’Farrill, *A geometric construction of the exceptional Lie algebras  $F_4$  and  $E_8$* , Comm. Math. Phys. **283** (2008), no. 3, 663–674. MR 2434742 (2009f:17018)
- [Fre53a] H. Freudenthal, *Sur le groupe exceptionnel  $E_7$* , Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. **56** =Indagationes Math. **15** (1953), 81–89.
- [Fre53b] ———, *Sur le groupe exceptionnel  $E_8$* , Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. **56** =Indagationes Math. **15** (1953), 95–98.
- [Fre85] ———, *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie*, Geom. Dedicata **19** (1985), 7–63, (Reprint of Utrecht Lecture Notes, 1951).
- [FZ90] V.A. Fateev and A.B. Zamolodchikov, *Conformal field theory and purely elastic  $S$ -matrices*, Int. J. Modern Physics A **5** (1990), no. 6, 1025–1048.

- [Gar09a] S. Garibaldi, *Cohomological invariants: exceptional groups and spin groups*, Memoirs Amer. Math. Soc., no. 937, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, with an appendix by Detlev W. Hoffmann.
- [Gar09b] ———, *Vanishing of trace forms in low characteristic*, Algebra & Number Theory **3** (2009), no. 5, 543–566, with an appendix by A. Premet.
- [Gec16] M. Geck, *On the construction of semisimple Lie algebras and Chevalley groups*, arxiv:1602.04583, 2016.
- [GG09] S. Garibaldi and P. Gille, *Algebraic groups with few subgroups*, J. London Math. Soc. (2) **80** (2009), 405–430.
- [GG15] S. Garibaldi and R.M. Guralnick, *Simple groups stabilizing polynomials*, Forum of Mathematics: Pi **3** (2015), e3 (41 pages).
- [GGN16] S. Garibaldi, R.M. Guralnick, and D.K. Nakano, *Irreducibility of Weyl modules over fields of arbitrary characteristic*, preprint, 2016.
- [GHMR85] D.J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec, and R. Rohm, *Heterotic string*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), no. 6, 502–505. MR 774903 (86f:81158)
- [Gil01] P. Gille, *Cohomologie galoisienne des groupes algebriques quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique  $\leq 2$* , Compositio Math. **125** (2001), 283–325.
- [Gil02] ———, *Algèbres simples centrales de degré 5 et  $E_8$* , Canadian Math. Bull. **45** (2002), no. 3, 388–398.
- [Gil09] ———, *Le problème de Kneser-Tits*, Astérisque **326** (2009), 39–82.
- [Gil10] ———, *Serre’s Conjecture II: a survey*, Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology (J.-L. Colliot-Thélène, S. Garibaldi, R. Sujatha, and V. Suresh, eds.), Developments in Mathematics, vol. 18, Springer, 2010, pp. 41–56.
- [GKN01] M. Günaydin, K. Koepsell, and H. Nicolai, *Conformal and quasiconformal realizations of exceptional Lie groups*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), no. 1, 57–76. MR 1846901 (2002h:22019)
- [GM14] R. Guralnick and G. Malle, *Rational rigidity for  $E_8(p)$* , Compos. Math. **150** (2014), no. 10, 1679–1702. MR 3269463
- [GMS03] S. Garibaldi, A. Merkurjev, and J-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, University Lecture Series, vol. 28, Amer. Math. Soc., 2003.
- [GP07] S. Garibaldi and H.P. Petersson, *Groups of outer type  $E_6$  with trivial Tits algebras*, Transf. Groups **12** (2007), no. 3, 443–474.
- [GPS16] S. Garibaldi, V. Petrov, and N. Semenov, *Shells of twisted flag varieties and the Rost invariant*, Duke Math. J. **165** (2016), no. 2, 285–339.
- [GQM08] S. Garibaldi and A. Quéguiner-Mathieu, *Restricting the Rost invariant to the center*, St. Petersburg Math. J. **19** (2008), no. 2, 197–213.
- [GQM11] P. Gille and A. Quéguiner-Mathieu, *Formules pour l’invariant de Rost*, Algebra Number Theory **5** (2011), no. 1, 1–35. MR 2833783 (2012g:11073)



- [GR99] R. Griess and A. Ryba, *Finite simple groups which projectively embed in an exceptional Lie group are classified!*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 75–93.
- [GR09] P. Gille and Z. Reichstein, *A lower bound on the essential dimension of a connected linear group*, Comment. Math. Helv. **84** (2009), no. 1, 189–212.
- [Gri91] R. Griess, *Elementary abelian  $p$ -subgroups of algebraic groups*, Geom. Dedicata **39** (1991), 253–305.
- [Gro58] A. Grothendieck, *Torsion homologique et sections rationnelles*, Séminaire Claude Chevalley **3** (1958), no. 5, 1–29. MR 0110704 (22 #1572)
- [Gro96] B.H. Gross, *Groups over  $\mathbf{Z}$* , Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 263–279.
- [GS10] S. Garibaldi and N. Semenov, *Degree 5 invariant of  $E_8$* , Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 19, 3746–3762.
- [GW94] B.H. Gross and N.R. Wallach, *A distinguished family of unitary representations for the exceptional groups of real rank = 4*, Lie theory and geometry, Progr. Math., vol. 123, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994, pp. 289–304. MR 1327538 (96i:22034)
- [Har75] G. Harder, *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen. III*, J. Reine Angew. Math. **274/275** (1975), 125–138.
- [Haw00] T. Hawkins, *Emergence of the theory of Lie groups: an essay in the history of mathematics 1869–1926*, Springer, 2000.
- [Hel90] Sigurdur Helgason, *A centennial: Wilhelm Killing and the exceptional groups*, Math. Intelligencer **12** (1990), no. 3, 54–57. MR 1059228 (91k:01006)
- [HM89] T.J. Hollowood and P. Mansfield, *Rational conformal field theories at, and away from, criticality as Toda field theories*, Phys. Lett. B **226** (1989), no. 1–2, 73–79.
- [HM15] Y.-H. He and J. McKay, *Sporadic and exceptional*, arxiv:1505.06742, 2015.
- [Hum80] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, 1980, Third printing, revised.
- [Jac71] N. Jacobson, *Exceptional Lie algebras*, Lecture notes in pure and applied mathematics, vol. 1, Marcel-Dekker, New York, 1971.
- [Jac96] ———, *Finite-dimensional division algebras over fields*, Springer, 1996.
- [Kac95] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge, 1995.
- [Kil89] W. Killing, *Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Zweiter Theil*, Math. Ann. **33** (1889), 1–48.
- [Kle88] F. Klein, *Lectures on the ikosahedron*, Trübner, London, 1888, translated by G.G. Morrice.
- [KMRT98] M.-A. Knus, A.S. Merkurjev, M. Rost, and J.-P. Tignol, *The book of involutions*, Colloquium Publications, vol. 44, Amer. Math. Soc., 1998.
- [Kos10] B. Kostant, *Experimental evidence for the occurrence of  $E_8$  in nature and the radii of the Gosset circles*, Selecta Math. (NS) **16** (2010), no. 3, 419–438.

- [KS90] D. Kazhdan and G. Savin, *The smallest representation of simply laced groups*, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989), Israel Math. Conf. Proc., vol. 2, Weizmann, Jerusalem, 1990, pp. 209–223. MR 1159103 (93f:22019)
- [Lam05] T.Y. Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [Leh12] S.P. Lehalleur, *Subgroups of maximal rank of reductive groups*, preprint, 2012.
- [Lem04] N. Lemire, *Essential dimension of algebraic groups and integral representations of Weyl groups*, Transformation Groups **9** (2004), no. 4, 337–379.
- [LM02] J.M. Landsberg and L. Manivel, *Triality, exceptional Lie algebras, and Deligne dimension formulas*, Adv. Math. **171** (2002), 59–85.
- [LM15a] D. Laackman and A. Merkurjev, *Degree three cohomological invariants of reductive groups*, preprint, 2015.
- [LM15b] R. Löttscher and M. MacDonald, *The slice method for  $G$ -torsors*, preprint, 2015.
- [Lok97] H.Y. Loke, *Exceptional Lie groups and Lie algebras*, Ph.D. thesis, Harvard University, 1997.
- [Lus03] G. Lusztig, *Homomorphisms of the alternating group  $A_5$  into reductive groups*, J. Algebra **260** (2003), 298–322.
- [Lus13] ———, *On conjugacy classes in the Lie group  $E_8$* , arxiv:1309.1382, 2013.
- [Lus16] ———, *The canonical basis of the quantum adjoint representation*, arxiv:1602.07276, 2016.
- [Mac14] M.L. MacDonald, *Essential dimension of Albert algebras*, Bull. Lond. Math. Soc. **46** (2014), no. 5, 906–914.
- [McE10] I. McEwan, *Solar*, Random House, 2010.
- [Mer13] A. Merkurjev, *Essential dimension: a survey*, Transform. Groups **18** (2013), no. 2, 415–481.
- [Mer16] ———, *Degree three cohomological invariants of semisimple groups*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **18** (2016), no. 2, 657–680.
- [MPW15] B. Mühlherr, H.P. Petersson, and R.M. Weiss, *Descent in buildings*, Annals of Mathematics Studies, vol. 190, Princeton Univ. Press, 2015.
- [MS83] N. Marcus and J.H. Schwarz, *Three-dimensional supergravity theories*, Nuclear Phys. B **228** (1983), no. 1, 145–162. MR 722546 (84k:83056)
- [MS90] A.S. Merkurjev and A.A. Suslin, *The group  $K_3$  for a field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), no. 3, 522–545.
- [Neh91] E. Neher, *Lie algebras graded by 3-graded root systems and Jordan pairs covered by grids*, J. Algebra **140** (1991), 284–329.
- [PR94] V.P. Platonov and A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Academic Press, Boston, 1994.

- [PSZ08] V. Petrov, N. Semenov, and K. Zainoulline, *J-invariant of linear algebraic groups*, Ann. Ec. Norm. Sup. (4) **41** (2008), 1023–1053.
- [PTW12] R. Parimala, J.-P. Tignol, and R. M. Weiss, *The Kneser-Tits conjecture for groups with Tits-index  $E_{8,2}^{66}$  over an arbitrary field*, Transform. Groups **17** (2012), no. 1, 209–231. MR 2891217
- [Rei10] Z. Reichstein, *Essential dimension*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010, World Scientific, 2010.
- [Rei12] ———, *What is... essential dimension?*, Notices of the AMS **59** (2012), no. 10, 1432–1434.
- [Ros86] M. Rost, *Hilbert 90 for  $K_3$  for degree-two extensions*, preprint, 1986.
- [Rub92] H. Rubenthaler, *Algèbres de Lie et espaces préhomogènes*, Travaux en Cours, vol. 44, Hermann Éditeurs des Sciences et des Arts, Paris, 1992.
- [RY00] Z. Reichstein and B. Youssin, *Essential dimensions of algebraic groups and a resolution theorem for  $G$ -varieties*, Canad. J. Math. **52** (2000), no. 5, 1018–1056, with an appendix by J. Kollár and E. Szabó.
- [Sch94] R. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Dover, 1994.
- [Sel67] G.B. Seligman, *Modular Lie algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 40, Springer, 1967.
- [Sem09] N. Semenov, *Motivic construction of cohomological invariants*, arXiv:0905.4384, May 2009, to appear in *Commentarii Math. Helv.*
- [Ser62] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires*, Colloq. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962), Librairie Universitaire, Louvain, 1962, (= Oe. 53), pp. 53–68.
- [Ser91] ———, *Résumé des cours de 1990–91*, Annuaire du Collège de France (1991), 111–121, (= Oe. 153).
- [Ser92] ———, *Letter to Markus Rost dated December 3rd*, 1992.
- [Ser95] ———, *Cohomologie galoisienne: progrès et problèmes*, Astérisque (1995), no. 227, 229–257, Séminaire Bourbaki, vol. 1993/94, Exp. 783, (= Oe. 166).
- [Ser96] ———, *Exemples de plongements des groupes  $PSL_2(F_p)$  dans des groupes de Lie simples*, Invent. Math. (1996), 525–562.
- [Ser99a] ———, *Letter to Markus Rost dated June 23rd*, 1999.
- [Ser99b] ———, *Sous-groupes finis des groupes de Lie*, Séminaire Bourbaki, 51ème année, 1998–99, no. 864, June 1999.
- [Ser02] ———, *Galois cohomology*, Springer-Verlag, 2002, originally published as *Cohomologie galoisienne* (1965).
- [Ser06] ———, *Coordonnées de Kac*, Oberwolfach Reports **3** (2006), 1787–1790.
- [Ste61] R. Steinberg, *Automorphisms of classical Lie algebras*, Pacific J. Math. **11** (1961), 1119–1129, [= Collected Papers, pp. 101–111].

- [Ste65] ———, *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Publ. Math. IHES (1965), no. 25, 49–80.
- [Sus85] A.A. Suslin, *Algebraic K-theory and the norm residue homomorphism*, J. Soviet Math. **30** (1985), 2556–2611.
- [SV00] T.A. Springer and F.D. Veldkamp, *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [TFV80] M.J. Tejwani, O. Ferreira, and O.E. Vilches, *Possible Ising transition in  $^4\text{He}$  monolayer adsorbed on Kr-plated graphite*, Phys. Rev. Lett. **44** (1980), no. 3, 152–155.
- [Tit66a] J. Tits, *Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles. I. Construction*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **69** = Indag. Math. **28** (1966), 223–237.
- [Tit66b] ———, *Sur les constantes de structure et le théorème d’existence des algèbres de Lie semi-simples*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 31, 21–58. MR 0214638 (35 #5487)
- [Tit92] ———, *Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315** (1992), no. 11, 1131–1138.
- [Tot04] B. Totaro, *Splitting fields for  $E_8$ -torsors*, Duke Math. J. **121** (2004), 425–455.
- [Tot05a] ———, *The torsion index of  $E_8$  and other groups*, Duke Math. J. **129** (2005), 219–248.
- [Tot05b] ———, *The torsion index of the spin groups*, Duke Math. J. **129** (2005), no. 2, 249–290. MR 2165543 (2006f:57039b)
- [Vav04] N.A. Vavilov, *Do it yourself structure constants for Lie algebras of type  $E_\ell$* , J. Math. Sci. (N.Y.) **120** (2004), no. 4, 1513–1548.
- [VÈ78] È. B. Vinberg and A. G. Èlašvili, *A classification of the three-vectors of nine-dimensional space*, Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. **18** (1978), 197–233. MR 504529 (80b:15039)
- [Via16] M.S. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8*, arxiv:1603.04246, March 2016.
- [Vin76] E.B. Vinberg, *The Weyl group of a graded Lie algebra*, Math. USSR Izv. **10** (1976), 463–495.
- [vL08] Marc van Leeuwen, *Computing Kazhdan-Lusztig-Vogan polynomials for split  $E_8$* , Nieuw Arch. Wiskd. (5) **9** (2008), no. 2, 113–116. MR 2454587 (2009g:17009)
- [Vog07] David Vogan, *The character table for  $E_8$* , Notices Amer. Math. Soc. **54** (2007), no. 9, 1122–1134. MR 2349532 (2008g:22020)
- [Wal67] R.E. Walde, *Composition algebras and exceptional Lie algebras*, Ph.D. thesis, University of California-Berkeley, 1967.
- [Wat79] W.C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 66, Springer, 1979.

- [Wei06] R.M. Weiss, *Quadrangular algebras*, Mathematical Notes, vol. 46, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [Yun14] Z. Yun, *Motives with exceptional Galois groups and the inverse Galois problem*, Invent. Math. **196** (2014), no. 2, 267–337. MR 3193750
- [Zam89] A. B. Zamolodchikov, *Integrals of motion and S-matrix of the (scaled)  $T = T_c$  Ising model with magnetic field*, Internat. J. Modern Phys. A **4** (1989), no. 16, 4235–4248. MR 1017357 (90k:82102)