

Mathematical Analysis

Yury Holubeu *

November 28, 2025

This note is not intended for distribution. Mathematical analysis and applications are discussed in detail. Links below show contents of solved problems, summary of special topics.

Contents

Preface and main motivation	16
I — Formulas and Theorems for Application in a Nutshell —	19
1 Main formulas and methods	19
1.1 Typical functions and equations	19
1.1.1 Typical equations	19
1.1.2 Trigonometry	19
1.1.3 Hyperbolic functions	24
1.1.4 Log, exp, x^a	28
1.1.5 δ -, δ' , θ -functions, etc.	29
1.1.6 Fast counting in a head	30
1.2 1D integrals	30
1.2.1 Table integrals	30
1.2.2 Approximations of 1D integrals	35
1.2.3 Basic methods for 1D integrals	35
1.2.4 Useful Specific methods for 1D integrals	44
1.2.5 Analysis of 1D integrals	47
1.3 Basic Analysis of Functions	52
1.3.1 Derivatives	52
1.3.2 Limits	53
1.3.3 Approximation of functions	56
1.3.4 Extremums	56
1.3.5 General properties of $f(x)$	56
1.4 Series and Sums	57
1.4.1 Main table series	57
1.4.2 Summation methods	60
1.4.3 Decompositions into series	61
1.4.4 Theorems and properties of series	62
1.4.5 Analysis of Series	63
1.4.6 Fourier Series	65
1.5 Other Typical Problems of Calculus	68
1.5.1 Coordinate Systems, Mappings	68
1.5.2 rot, grad, div, ∇	70
1.5.3 Surface and Volume Integrals	71
1.5.4 Properties of Operators and Generalized Functions	72
1.5.5 Inequalities	72
1.6 Selected Important Constructions for Applications	73
1.6.1 Divergent Integrals and Regularization	73
II — Details of Basics and Other Useful Theorems in a Nutshell	74

*<https://yuriholubeu.github.io/>, yuri.holubev@gmail.com

2	Functions, Integrals, Sums	74
2.1	general properties of sets, mappings, functions	74
2.1.1	algebraic properties of numbers	74
2.1.2	sets, compactness, topology, curves	74
2.1.3	sequences and functions of one variable	78
2.1.4	basics of complex analysis	79
2.2	Construction of integrals	80
2.2.1	Basics of Jordan and Lebesgue Measures	80
2.2.2	Construction and Properties of the Lebesgue Integral	82
2.3	Functions of Many Variables, Vector Analysis, Differential Geometry	82
2.3.1	Functions of several variables and implicit functions (!?!)	82
2.3.2	Smooth mappings and differential forms	83
2.3.3	Other typical topic about differential surfaces, mappings	83
2.3.4	Overview of Differential Geometry in Physics	84
2.3.5	2D, 3D integrals, curves, surfaces	84
2.3.6	Integrals over manifolds and of differential forms	86
2.4	Harmonic and functional analysis in a nutshell	88
2.4.1	Abstract theory of Fourier series	88
2.4.2	Fourier transformation: Other Properties and Applications (!?!)	89
2.4.3	Banach and Hilbert spaces	93
III	— Special Theorems and Formulas in a Nutshell —	97
3	Other methods of calculus	97
3.1	Other Methods for Integrals	97
3.1.1	Methods for Exotic Hard Integrals (??)	97
3.1.2	Oscillatory Integrals	97
3.1.3	Path Integrals (!!???)	97
3.1.4	Examples of estimations of integrals and solutions to diff. eq-s	97
3.2	Other, Special Problems	107
3.2.1	Evaluating infinite products	107
3.2.2	Summing Divergent Series	107
3.3	Special methods and formulas for physics	108
3.3.1	Summations for physics	108
3.3.2	Integrals for physics	108
4	On some special constructions	108
4.1	Other properties of typical branches of mathematics	108
4.1.1	Other properties of differential geometry	108
4.1.2	Basics of complex analysis	108
4.1.3	complex analysis: other well-known properties	109
4.2	Other, Purely Mathematical Theories	109
4.2.1	Functional Spaces: Basics	109
4.2.2	Functional Spaces: Advanced topics	111
4.2.3	Mathematical logic: basics	112
IV	General Fundamentals	113

5	Fundamentals of Mathematical Analysis	113
5.1	Numbers: Basics	113
5.1.1	integers	113
5.1.2	Rational Numbers	113
5.1.3	Sets and Mappings	113
5.1.4	Equivalence relation	116
5.1.5	Real numbers and their completeness	119
5.1.6	Real Numbers: Other Properties	121
5.1.7	Complex Numbers: Basic Properties	122
5.1.8	Infinites and Their Comparison	128
5.1.9	Limits: Basic Properties	129
5.1.10	Exact bounds of numerical sets	130
5.1.11	Counterexamples about the Real Number System 1	132
5.1.12	Counterexamples about the Real Number System 2	140
5.2	Numbers: Advanced Properties	143
5.2.1	Series representations for some mathematical constants	143
5.2.2	Other definitions of real numbers	156
5.2.3	What Number Theory is About?	159
5.2.4	p -adic numbers (??)	159
5.3	Set Theory: Basics	159
5.3.1	Cardinality of a set, countable and uncountable sets of numbers	159
5.3.2	Cantor set	162
5.3.3	Concept of a fractal	162
5.3.4	Paradox of sets	163
5.3.5	What Set Theory is About?	165
5.4	Sequences	165
5.4.1	Definitions of limits	166
5.4.2	Fundamental sequences of sets of numbers	166
5.4.3	Rational Numbers	167
5.4.4	Arithmetic operations with limits (!!)	168
5.4.5	Arithmetic operations and comparison of real numbers	170
5.4.6	Bernoulli's inequality and the first remarkable limit	174
5.4.7	Partial limits	176
5.4.8	Topology on the line for sequences (??)	178
5.4.9	Counterexamples in sequences	183
5.5	Basics of Metric Spaces	183
5.5.1	Definition and examples of metric spaces	183
5.5.2	Limits of sequences, fundamental sequences and complete metric spaces	185
5.5.3	Balls, boundedness, radius and diameter	187
5.5.4	Topology in a metric space	189
5.5.5	Compactness in a metric space (!?)	191
5.5.6	Continuous mappings of metric spaces (!?)	195
5.5.7	Continuous mappings of compact and connected sets	197
5.5.8	Uniform continuity (!?)	199
5.5.9	Distance between sets and normality (!!!)	201
5.5.10	Abstract Geometry: Basics	204
5.6	Curves	204
5.6.1	Curves and linear connectedness	204
5.6.2	Differentiable curves in Euclidean space	208
5.6.3	Internal metric of a metric space	212
5.6.4	Length of a curve in a metric space	214

6	Functions of one variable	217
6.1	Basic properties of functions of one variable	217
6.1.1	Continuity of functions	217
6.1.2	Inverse functions and intermediate values	220
6.1.3	Functions continuous on compact sets (!?)	224
6.1.4	Limits of functions	225
6.1.5	Comparison of asymptotic behavior of functions, symbols O and o	229
6.1.6	Derivative and differentiability of a function	231
6.1.7	Lagrange's mean value theorem	235
6.1.8	Study of monotonicity, extrema and convexity	237
6.1.9	Mean value theorems	239
6.1.10	L'Hôpital's rule	240
6.1.11	Higher-order derivatives	242
6.1.12	Taylor's formula for functions of one variable	244
6.1.13	Discontinuous and semicontinuous functions	246
6.1.14	Bounded variation, absolute continuity and oscillation	249
6.1.15	Plots of Functions	249
6.2	Elementary functions	250
6.2.1	Exponential and logarithm	250
6.2.2	Trigonometric functions and curves	254
6.3	Functions of several variables	260
6.3.1	Limit of a function of several variables	260
6.3.2	Functions continuous at a point	260
6.3.3	Functions continuous on sets	260
6.3.4	Polynomials	260
6.4	Fundamentals of smooth mappings	261
6.4.1	Differentiable mappings of open subsets of $\mathbb{R}^n$	261
6.4.2	Convolutions and approximation of functions by infinitely smooth ones	265
6.4.3	Continuously differentiable mappings and curvilinear coordinate systems	270
6.4.4	Study of functions of several variables for extrema	275
6.4.5	Vectors and vector fields	279
6.4.6	Quotient space and finite generation of a vector space	283
6.4.7	Dimension of a vector space	285
6.4.8	Multilinear forms and determinant	290
6.4.9	Differential forms and exterior differentiation	295
7	Complex Functions: Basics	299
7.0.1	Differentiability in the complex sense	299
7.0.2	Line integral of a function of a complex variable and Cauchy's integral theorem	301
7.0.3	Antiderivative of a function of a complex variable and universal covering of a domain	304
7.0.4	Cauchy Integral Formula and Analyticity	306
7.0.5	Laurent Series and Singularities of a Function at a Point	310
7.0.6	Contour Integrals and Residues	313
7.0.7	Analytic Continuations of Functions	317
7.0.8	Openness and Maximum Principle	319
7.0.9	Compactness Property for Analytic Functions	321
7.0.10	Introduction to Conformal Mappings	323
7.0.11	Riemann Mapping Theorem	328
7.0.12	Universal Covering and Fundamental Group	330
7.0.13	Fundamental Group	332
7.0.14	General Riemann Theorem and Picard Theorem	335

8	Functions of Many Variables	338
8.1	Coordinate systems	339
8.1.1	Spherical coordinate system	339
8.1.2	Polar coordinate system	339
8.1.3	Cylindrical coordinate system	339
8.2	Vector Analysis (!!?!?!?)	339
9	Special Topics about Basic Functions	340
9.1	Very Specific Functions	340
9.1.1	Continued Fractions	340
9.2	Approximation of functions	340
9.2.1	Approximation by Piecewise Linear Functions and Polynomials	340
9.2.2	Approximation by Trigonometric Polynomials and Stone-Weierstrass Theorem	343
9.2.3	Other on Approximations (??)	347
9.3	Inequalities	347
9.4	Counterexamples about Functions and Limits	348
9.5	Counterexamples about Differentiation	357
9.6	19 Asymptotic Expansions	361
9.6.1	Introduction	361
9.6.2	19.1 Asymptotic Formulas and Asymptotic Series	363
9.6.3	19.1.1 Basic Definitions	363
9.6.4	19.1.2 General Facts about Asymptotic Series	367
9.6.5	19.1.3 Asymptotic Power Series	370
9.6.6	19.1.4 Problems and Exercises	372
9.7	19.2 The Asymptotics of Integrals (Laplace's Method)	375
9.7.1	19.2.1 The Idea of Laplace's Method	375
9.7.2	19.2.2 The Localization Principle for a Laplace Integral	377
9.7.3	19.2.3 Canonical Integrals and their Asymptotics	379
9.7.4	19.2.4 The Principal Term of the Asymptotics of a Laplace Integral	382
9.7.5	19.2.5* Asymptotic Expansions of Laplace Integrals	384
9.7.6	19.2.6 Problems and Exercises	393
VI	Series and Sequences	395
10	Fundamentals of Series	395
10.1	General Analysis of Series	395
10.1.1	Concept of a Numerical Series (??)	395
10.1.2	Geometric Progression	395
10.1.3	Concept of a Functional Series	395
10.1.4	Summation of Absolutely Convergent Series	396
10.1.5	Analysis of Divergent Series (???)	403
10.1.6	Uniform Convergence	404
10.1.7	Overview of Types of Series	408
10.1.8	Power Series	408
10.1.9	Conditional Convergence of Series	411
10.1.10	Series with Terms of Constant Sign	415
10.1.11	Alternating Series	415
10.1.12	Taylor Series for Elementary Functions	415
10.1.13	Taylor Formula for Functions of Several Variables	419
10.1.14	Overview of Refinements of the Taylor Formula	422
10.1.15	Other Expansions	422
10.2	Series of Harmonic Analysis	422
10.2.1	Convergence of Fourier Series in the Mean-Square Sense	422

10.2.2	Uniform and Pointwise Convergence of a Trigonometric Fourier Series	425
10.2.3	Poisson summation formula	430
10.2.4	Examples of transformations	431
10.2.5	Summation of Trigonometric Series by Fejér	434
10.2.6	Szegő limit theorems	437
10.2.7	Toeplitz matrix	438
10.3	Other Special Methods of Summation	440
10.3.1	Ewald summation	440
10.3.2	Euler–Maclaurin formula	440
10.3.3	Darboux’s formula	442
10.3.4	Matsubara’s summations	442
10.4	Other Properties of Series	442
10.4.1	Expansion into Series in Half-Integer Powers	442
10.4.2	Expansion into Series in Almost Half-Integer Powers	442
10.4.3	On Series Whose Sums Can Be Arbitrary	443
10.5	18.2 Trigonometric Fourier Series	443
10.5.1	18.2.1 Basic Types of Convergence of Classical Fourier Series	443
10.5.2	18.2.2 Investigation of Pointwise Convergence of a Trigonometric Fourier Series	447
10.5.3	18.2.3 Smoothness of a Function and the Rate of Decrease of the Fourier Coefficients	454
10.5.4	18.2.4 Completeness of the Trigonometric System	458
10.5.5	18.2.5 Problems and Exercises	463
10.6	18.3 The Fourier Transform	470
10.6.1	18.3.1 Representation of a Function by Means of a Fourier Integral	470
10.6.2	18.3.2 The Connection of the Differential and Asymptotic Properties of a Function and its Fourier Transform	480
10.6.3	18.3.3 The Main Structural Properties of the Fourier Transform	483
10.6.4	18.3.4 Examples of Applications	487
10.6.5	18.3.5 Problems and Exercises	491
11	Special Sums and Summation Methods	497
11.1	Ten Problems in Experimental Mathematics by Bailey, Borwein, et. al.	497
11.1.1	Introduction	497
11.1.2	2. The bifurcation point B_3	498
11.1.3	3. Madelung’s constant $\sum_{(m,n,p) \neq 0} \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$	501
11.1.4	4. Double Euler sums.	504
11.1.5	5. Khintchine’s constant $K_0 = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{k(k+2)}\right]^{\log_2 k}$	507
11.1.6	6. Ramanujan’s AGM continued fraction	508
11.1.7	7. Expected distance on a unit square	510
11.1.8	8. Expected distance on a unit cube	511
11.1.9	9. An infinite cosine product $\pi_2 = \int_0^{\infty} \cos(2x) \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) dx$	513
11.1.10	10. A multivariate zeta-function $\sum_{i>j>k>l>0} \frac{1}{i^3 j k^3 l}$	517
11.1.11	11. A Watson integral	520
11.2	Special functions for summations	522
11.2.1	Sums by Polylogarithms (??)	522
11.3	Sums and Summation for QFT	522
11.4	Sums and Summation for Statistical physics	522
11.5	Counterexamples about Sums	522
11.5.1	Counterexamples about Sequences	522
11.5.2	Counterexamples about Infinite Series	526
11.5.3	Counterexamples about Uniform Convergence	541

12 Real Infinite Series by Bonar, Khoury	546
12.1 Introduction	546
12.1.1 Definitions	546
12.1.2 1.3 Intuition and Infinity	552
12.1.3 1.4 Basic Convergence Tests	557
12.1.4 1.5 General Series	568
12.2 More Sophisticated Techniques	572
12.2.1 2.1 The Work of Cauchy	572
12.2.2 2.2 Kummer's Results	576
12.2.3 2.3 The Tests of Raabe and Gauss	578
12.2.4 2.4 Logarithmic Scales	581
12.2.5 2.5 Tests of Abel	583
12.3 The Harmonic Series and Related Results	591
12.3.1 3.1 Divergence Proofs	592
12.3.2 3.2 Rate of Growth	596
12.3.3 3.3 The Alternating Harmonic Series	598
12.3.4 3.4 Selective Sums	602
12.3.5 3.5 Unexpected Appearances	607
12.4 Intriguing Results	609
12.4.1 4.1 Gems 1	610
12.4.2 4.1 Gems 2	618
12.4.3 4.1 Gems 3	628
12.5 Series and the Putnam Competition	659
12.5.1 5.1 The Problems	660
12.5.2 5.2 The Solutions	666
12.6 Final Diversions	693
12.6.1 6.1 Puzzles	694
12.6.2 6.2 Visuals	695
12.6.3 6.3 Fallacious Proofs	706
12.6.4 6.4 Fallacies, Flaws and Flimflam	708
12.6.5 6.5 Answers to Puzzles	713
12.7 101 True or False Questions	716
12.7.1 Questions	716
12.7.2 Explanations	720
12.8 What's Harmonic about the Harmonic Series?*	730

VII Measure and Integral 732

13 Do We Really Need Understanding Construction of Integrals and Measures? 732

14 Construction of the Integral 732

14.1 Which Integral to Chose?	732
14.2 Riemann Integral	732
14.2.1 Jordan Measure	732
14.2.2 Integration of Continuous Functions via Approximations	735
14.2.3 Definition of the Riemann Integral on an Interval	738
14.2.4 Riemann Integral via Step Functions	740
14.2.5 Other Properties of the Riemann Integral	749
14.2.6 Theorems on Integration Techniques	754
14.3 Lebesgue Measure and Integral: Basics (???)	756
14.3.1 Borel Measures on Intervals, Lebesgue–Stieltjes Integral	756
14.3.2 Signed Borel Measures on $\mathbb{R}^n$ and Measure Density	759
14.3.3 Lebesgue Outer Measure and Its Properties	763

14.3.4	Sets of Finite Lebesgue Measure and Their Properties	765
14.3.5	Lebesgue-Measurable Sets with Infinite Measure, Measurability of Open and Closed Sets	767
14.3.6	Measurability of Countable Unions and Intersections, Continuity and Regularity of the Lebesgue Measure	770
14.3.7	Lebesgue-Measurable and Borel Functions	773
14.3.8	Overview of Applications of Lebesgue Measure	778
14.3.9	Lebesgue Integral for Step and Arbitrary Functions	779
14.3.10	Linearity and Monotonicity of the Lebesgue Integral	784
14.4	Lebesgue Integral: Well-known Features (???)	786
14.4.1	Approximation of Integrable Functions in the Mean	786
14.4.2	Additivity and Continuity of the Lebesgue Integral over Sets	788
14.4.3	Limit Transition in the Lebesgue Integral over Functions	790
14.4.4	Examples of Applications of the Lebesgue Integral	794
14.4.5	Criteria for Convergence of Improper Integrals of Single-Variable Functions	798
14.4.6	Special Examples that Illustrate Features of Lebesgue Integral	801
14.5	Basic Fourier Integral	801
14.5.1	Fourier Integral and Computation of the Dirichlet Integral	801
14.5.2	Uniform Convergence of an Improper Integral	806
14.5.3	Fourier Transform	808
14.5.4	Discrete Fourier Transform	811
14.5.5	Fourier Method for Signal Spectra	812
14.5.6	Schwartz Space $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ and Fourier Transform	816
14.5.7	Unitarity of the Fourier Transform	817
14.6	Other about Fourier Integrals	819
14.6.1	Fourier Series and Integral at Discontinuity Points of the 1st Kind and Gibbs Phenomenon	819
14.6.2	Multidimensional Fourier Integral and Gaussian Densities	821
14.6.3	2D Fourier transforms	824
14.6.4	Overview of Applications of the Fourier Transform	824
14.6.5	Convolution	824
14.6.6	Space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ and the Connection of Convolution with the Fourier Transform	825
15	Areas, Volumes, Multidimensional Integrals (!!!)	828
15.0.1	Fubini's Theorem and Linear Substitution of Variables in an Integral	828
15.0.2	the Volume of the Ball, the Poisson Integral, Elementary Properties of Gamma and Beta Functions (!!!)	832
15.0.3	Volumes and Areas	837
15.0.4	Bezikovich's Lemma and Differentiability Almost Everywhere (????)	838
15.0.5	Surface Area in Euclidean the Space According to Zorich	844
15.0.6	Basic Information About Differential Forms	852
15.0.7	Tasks and Exercises	864
15.0.8	3D Euclidean Space (!!!)	866
15.0.9	4D Euclidean Space (!!!)	866
15.0.10	3+1D Minkowski Space (!!!)	866
15.0.11	Multidimensional Spaces in the General Case (!!!)	867
15.1	Curved and Surface Integrals According to Zorich	867
15.1.1	The Integral of the Differential Form	867
15.1.2	Tasks and Exercises	875
15.1.3	Volume Shape, Integrals of the First and Second Kind	880
15.1.4	The Form of the Volume	882
15.1.5	Tasks and Exercises	886
15.1.6	Green's Formula	889
15.1.7	Another Thing About Multidimensional Integrals	892

15.2	Integrals for Smooth Maps	892
15.2.1	Integral of Differential Form with Compact Support in $\mathbb{R}^n$	892
15.2.2	Replacement of Coordinates in the Integral of the Form	894
15.2.3	Replacement of Coordinates in the Integral of the Function	898
15.2.4	Nested Manifolds in $\mathbb{R}^N$	900
15.2.5	Abstract Definition of a Manifold	903
15.2.6	Smooth Maps Between Manifolds	906
15.2.7	Division of the Unit Into Manifolds	909
15.2.8	The Integral of a Form over an Oriented Manifold and the Stokes Formula (!!)	914
15.2.9	Special Cases of the Stokes Formula and Its Applications	917
16	Special methods for evaluation of integrals	921
16.0.1	Different Estimations of Integrals and Expressions (!?)	921
17	Other special integrals and special methods	931
17.1	Spaces of Functions Defined by the Properties of Integrals	931
17.1.1	L_p , Spaces, Gelder and Minkowski Inequalities	931
17.1.2	Completeness of L_p space	935
17.1.3	Approximations of Functions in L_p by Stepwise and Infinitely Smooth	938
17.1.4	Limited Variation	940
17.1.5	Oscillation and Decrease of Fourier Coefficients	942
17.2	Feynman Path Integrals: Fundamentals	947
17.3	Other Integrals and Integration Methods	947
17.3.1	Special Gaussian Integrals	947
17.3.2	Matrix Integrals	949
17.4	Some Exotic Methods of Integration	950
17.5	Counterexamples about Riemann Integration 1	951
17.6	Counterexamples about Riemann Integration 2	953
17.6.1	Counterexamples about Sets and Measure on the Real Axis 1	954
17.6.2	Counterexamples about Sets and Measure on the Real Axis 2	959
17.6.3	Counterexamples about Sets and Measure on the Real Axis 3	968
VIII	Problems	974
18	Problems about properties of functions	974
18.1	Evaluation of Expressions	974
18.1.1	Problems about the limits of the functions, where the uncertainty	974
18.1.2	Problems about Limits: Warmup 1	978
18.1.3	Problems about Limits: Warmup 2	990
18.1.4	Problems about Limits 1	996
18.2	Analysis of Expressions	998
18.2.1	Problems about Continuity of Functions	998
18.2.2	Problems of uniform continuity of functions	1010
18.2.3	Derivatives and Function Differentials Tasks	1016
18.2.4	Problems about the geometric and physical meaning of the derivative	1029
18.2.5	Problems about higher order derivatives and differentials	1032
18.2.6	Problems about mean theorems for differentiable functions	1040
18.2.7	Problems about the highest and lowest values	1045
18.2.8	Problems about the dependence of functions on parameters (!!!!!)	1049
18.2.9	Problems about asymptotes of functions 1	1049
18.2.10	Problems about asymptotes of functions 2	1058
18.2.11	Problems about function graphs	1063
18.2.12	Problems about the properties of functions	1065

18.3	Tasks about other function analysis	1065
18.3.1	Problems about different types of sets in n -dimensional space	1065
18.3.2	Multiple Variable Function Tasks	1066
18.3.3	Limit and Continuity Problems of Multiple Variable Functions	1066
18.3.4	Display Tasks	1066
18.3.5	Problems about Partial derivatives	1066
18.3.6	Problems about Differential of Multiple Variables Function	1066
18.3.7	Problems about Differentiable Mappings	1066
18.3.8	Problems about Function Definition Scope	1066
18.4	General questions	1066
18.4.1	Questions on understanding the essence of matan	1066
18.4.2	Typical Knowledge Testing Tasks	1066
18.4.3	Questions on understanding typical details	1066
19	Problems about integrals	1066
19.1	Problems about Relatively Typical Integrals	1066
19.1.1	Trivial Problems that Show How to Work with Basic Methods	1066
19.1.2	Problems about Simple Fun Integrals for Worm up	1067
19.1.3	Problems about Integrals of Roots	1067
19.1.4	Problems about indefinite integrals from irrational functions (!!!)	1076
19.1.5	Problems about Integrals from Trigonometric Functions: Warmup	1082
19.1.6	Problems about Integrals from Trigonometric Functions 1	1084
19.2	Problems about Relatively Exotic Integrals	1085
19.2.1	Problems about Special Famous Integrals 1	1085
19.2.2	Problems about Feynman's Method 1	1095
19.2.3	Problems about Feynman's Method 2	1095
19.2.4	Problems about Integrals with Parameter 1	1095
19.2.5	Problems about Integrals with Parameter 2	1099
19.2.6	Problems about Integrals Related to Gamma Function	1103
19.2.7	Problems about the Fourier integral and the Fourier transform of ordinary functions	1109
19.2.8	Problems about convolution	1112
19.2.9	Selected Problems about Integrals of Special Functions 1	1113
19.2.10	Selected Problems about Integrals of Special Functions 2	1113
19.2.11	Some problems on integrals reduced to special functions (??)	1113
19.2.12	Selected problems about very complicated integrals (??)	1114
19.2.13	Problems about integrals of special functions (!??!)	1117
19.2.14	Problems about approximate calculation of integrals and estimates (!!??)	1117
19.2.15	Problems about Laplace transform	1118
19.3	Analysis of Integrals	1118
19.3.1	Problems about Convergence of integrals from sign-constant functions	1118
19.3.2	Problems about Convergence of integrals from sign-variable functions	1118
19.3.3	Problems about the uniform convergence of improper integrals with the parameter	1118
19.3.4	Problems about Jordan's measure and measurable sets	1126
19.3.5	Problems about the multiple of the Riemann integral and its properties	1126
19.3.6	Problems about geometric and physical applications of multiple integrals	1126
19.4	Integrals with Many variables and on Surfaces	1126
19.4.1	Problems about Integrals with 2 variables	1126
19.4.2	Problems about Integrals with 3 variables	1127
19.4.3	Problems about Surface Integrals	1128
19.4.4	Problems about curvilinear integrals (???)	1133
19.4.5	Plane shape area and curve length problems	1141
19.4.6	Solid Volume and Surface Area Problems	1148
19.4.7	Some problems of geometry and physics by integrals	1148
19.5	Problems about Integrals in Applications in Physics	1149

19.5.1	Problems about Integrals in Statistical Physics	1149
19.5.2	Problems about Integrals in Condensed Matter	1151
19.5.3	Problems about Integrals in QM	1152
19.5.4	Problems about Integrals in Field Theory	1152
19.5.5	Problems about Integrals in Gravity	1152
19.5.6	Problems about Typical Integrals in QFT	1152
19.5.7	Problems about Integrals in classical Mechanics	1152
20	Rows and Limits Tasks	1152
20.1	Limit Finding Tasks	1152
20.1.1	Problems about the simplest limits of sequences (!!!)	1152
20.1.2	Interesting tasks about limits (???)	1169
20.1.3	Problems about the limits of the form $\text{inf}ty - \infty$	1170
20.2	Problems about evaluation of sums	1170
20.2.1	Problems about elementary summation	1170
20.2.2	Typical Amount Tasks (!?!?)	1179
20.2.3	Tasks for calculating special amounts	1183
20.2.4	Finite Amount Tasks (?)	1183
20.2.5	Problems about Arithmetic and geometric progressions	1183
20.2.6	Problems about sums from physics	1183
20.3	Problems about decomposition into series	1184
20.3.1	Problems about the simplest Taylor series expansions (!??)	1184
20.3.2	Problems about the Taylor series	1194
20.3.3	Problems about Trigonometric Fourier series 1	1223
20.3.4	Problems about Trigonometric Fourier series 2	1230
20.3.5	Problems about Trigonometric Fourier series 3	1231
20.3.6	Problems about Trigonometric Fourier series 3	1233
20.3.7	Problems about Trigonometric Fourier series 4	1235
20.3.8	Problems about Trigonometric Fourier series 5	1239
20.3.9	Sums of rows from Fourier decomposition (!!!)	1242
20.3.10	Decomposition into atypical rows (!?!)	1245
20.4	Tasks on the analysis of series and sequences	1245
20.4.1	Converging Series Properties Tasks	1245
20.4.2	Problems about Rows with non-negative members	1251
20.4.3	Problems about Absolutely and not absolutely convergent rows	1265
20.4.4	Problems about Properties of uniformly convergent functional sequences and series	1274
20.4.5	Problems about Power series	1281
20.4.6	Problems about Sequence Properties (!!?????)	1290
20.4.7	Other tasks for series convergence	1296
21	Other problems	1303
21.1	Problems about scalar and vector fields (!!!!)	1303
21.1.1	Problems about scalar and vector fields (!!!!)	1303
21.1.2	Problems about integrals from vector and tensor fields (!!?)	1317
21.2	Problems about curves and vector functions	1320
21.3	Problems about the basic properties of mathematical analysis	1333
21.3.1	Problems about sets (?)	1333
21.3.2	Problems about fundamental properties of mathematics	1335
21.3.3	Problems about combinatorics	1336
21.3.4	Problems about mathematical logic	1336
21.3.5	Problems about Mathematical induction method	1337
21.3.6	Problems about Real numbers	1337
21.3.7	Problems about Rational Fractions	1339
21.3.8	Problems about Polynomials	1339

21.3.9 Problems about the basics of complex numbers	1342
21.4 Problems about equations and inequalities	1345
21.4.1 The simplest problems of numerical inequalities	1345
21.4.2 Problems about Trigonometric Equations	1345
21.4.3 Problems about equations with two unknowns	1346
21.4.4 Problems about equations with three unknowns	1346
21.4.5 Problems about Algebraic Equations	1346
21.4.6 Problems about Elementary inequalities	1346
21.4.7 Problems about Inequalities with logarithms	1346
21.4.8 Problems about Trivial Inequalities	1347
21.4.9 Problems about Infinite productions	1347
21.4.10 Problems about numerical solution of equations	1355
21.5 Functional Analysis Introduction Tasks	1357
21.5.1 Problems about types of convergence	1357
21.5.2 Metric Space Tasks	1357
21.5.3 Problems about Normalized and semi-normalized spaces	1357
21.5.4 Problems about Hilbert spaces	1357
21.5.5 Problems about Topological Spaces - Generalized Functions	1357
21.5.6 Linear Functional and Linear Operator Normality Tasks	1357
21.5.7 Tasks on the completeness of metric spaces	1358
21.5.8 Problems about Everywhere dense sets, completeness of function systems, basis	1358
21.5.9 Problems about Generalized Functions	1359
21.5.10 Problems about Fourier transform of generalized functions, applications	1360

IX Other Topics 1361

22 Proofs from the Book by Aigner, Ziegler	1361
22.1 Number Theory	1361
22.1.1 Six proofs of the infinity of primes	1361
22.1.2 Bertrand's postulate	1367
22.1.3 Binomial coefficients are (almost) never powers	1373
22.1.4 Representing numbers as sums of two squares	1376
22.1.5 The law of quadratic reciprocity	1383
22.1.6 Every finite division ring is a field	1390
22.1.7 The spectral theorem and Hadamard's determinant problem	1394
22.1.8 Some irrational numbers	1401
22.1.9 Four times $\pi^2/6$	1408
22.2 Geometry	1419
22.2.1 Hilbert's third problem: decomposing polyhedra	1419
22.2.2 Lines in the plane and decompositions of graphs	1431
22.2.3 The slope problem	1439
22.2.4 Three applications of Euler's formula	1444
22.2.5 Cauchy's rigidity theorem	1453
22.2.6 The Borsuk rings don't exist	1457
22.2.7 Every large point set has an obtuse angle	1470
22.2.8 Borsuk's conjecture	1476
22.3 Analysis	1483
22.3.1 Sets, functions, and the continuum hypothesis	1483
22.3.2 In praise of inequalities	1498
22.3.3 The fundamental theorem of algebra	1505
22.3.4 One square and an odd number of triangles	1508
22.3.5 A theorem of Pólya on polynomials	1515
22.3.6 Van der Waerden's permanent conjecture	1523

22.3.7	On a lemma of Littlewood and Offord	1531
22.3.8	Cotangent and the Herglotz trick	1534
22.3.9	Buffon's needle problem	1540
22.4	Combinatorics	1546
22.4.1	Pigeon-hole and double counting	1546
22.4.2	Pigeon-hole principle	1546
22.4.3	Tiling rectangles	1556
22.4.4	Three famous theorems on finite sets	1560
22.4.5	Shuffling cards	1565
22.4.6	Lattice paths and determinants	1575
22.4.7	Cayley's formula for the number of trees	1580
22.4.8	Identities versus bijections	1587
22.5	Graph Theory	1604
22.5.1	Permanents and the power of entropy	1604
22.5.2	The Dinitz problem	1614
22.5.3	Five-coloring plane graphs	1620
22.5.4	How to guard a museum	1625
22.5.5	Turán's graph theorem	1629
22.5.6	Communicating without errors	1634
22.5.7	The chromatic number of Kneser graphs	1643
22.5.8	Of friends and politicians	1649
22.5.9	Probability makes counting (sometimes) easy	1652
23	Catalog of selected rows, integrals	1661
23.0.1	Minimum catalogue of special amounts (!?!?)	1662
24	Introduction to other areas of mathematics	1663
24.1	Introduction to Differential Geometry	1663
24.1.1	Potentials of first-degree differential forms	1663
24.1.2	Primordial differential forms and cohomology of de Rham.	1666
24.1.3	Critical and regular values, sarah's theorem	1672
24.1.4	Internal multiplication and Li derivative (!?!!!!!?)	1682
24.1.5	divergence	1687
24.1.6	Integration of vector fields and differential equations	1687
24.1.7	Integration of vector fields on a manifold, geometric meaning of the Lie derivative	1692
24.1.8	Riemannian manifolds and Riemannian volume	1697
24.1.9	Sprocket Hodge, gradient, rotor, divergence.	1700
24.1.10	Covariant derivative	1705
24.1.11	Curve length and geodetic equation	1708
24.1.12	Exponential mapping, local minimality of geodetic and completeness.	1711
24.1.13	Quantities	1714
24.1.14	Curvature of Riemannian manifolds	1714
24.1.15	On the Space-Time of the Special Theory of Relativity	1719
24.1.16	On motion in an electromagnetic field, Maxwell's equations, Einstein's equation (???)	1722
24.1.17	Model spaces of Riemannian geometry	1724
24.1.18	De Sitter spaces and Schwarzschild metric	1728
24.1.19	Surface area according to Minkowski (??)	1731
24.1.20	Brunn-Minkowski inequality and isoperimetric inequality	1733
24.2	Introduction to Functional Analysis	1736
24.2.1	parallelogram equality	1736
24.2.2	Fourier Transform	1737
24.2.3	Hilbert space and their bases	1737
24.2.4	Dual to Hilbert space	1741

24.2.5	Banach spaces and Baer's theorem	1744
24.2.6	Linear mappings between Banach spaces	1750
24.2.7	Compact subsets in Banach spaces	1752
24.2.8	Han-Banach theorem	1755
24.2.9	Han-Banach theorem: Applications	1757
24.2.10	Zorn's lemma and transfinite induction	1757
24.2.11	*- weak topology and compactness in dual space (!!!)	1761
24.2.12	What functional analysis can give for physicists what can't be obtained in another way?	1764
24.3	Other Introduction to Functional Analysis	1764
24.3.1	Tikhonov's theorem	1764
24.3.2	Dual to the space of continuous functions on the segment	1768
24.3.3	About $W^{-\infty,2}$ и $\mathcal{E}'$ spaces	1774
24.3.4	Distributions from $\mathcal{D}'$, регулярные и нерегулярные обобщённые функции	1779
24.3.5	Derivative of distribution and topology in space $\mathcal{D}'$	1781
24.3.6	Multiplication of distribution by function and distribution medium	1784
24.3.7	Distributions from $\mathcal{S}'$ и преобразование Фурье	1788
24.3.8	Multivariate and manifold distributions	1790
24.3.9	Of course additive measures and ultrafilters	1792
24.4	On the applications of differential shapes	1797
24.4.1	Homotopies and the Katanaev Fundamental Group (???)	1797
24.4.2	Covered by Katanaev (??)	1797
24.4.3	Main and associated bundles according to Katanaev (??)	1797
24.5	Inequalities	1798
24.6	Introduction to Convex Analysis	1798
24.6.1	"Polyhedra".	1798
24.7	Introduction to set theory	1798
25	About Mathematical Analysis Applications	1798
25.1	About category theory	1798
25.2	About some sections of algebra	1798
25.2.1	On the theory of groups	1798
25.3	Harmonic Analysis Applications	1798
25.3.1	Some physical tasks	1798
25.3.2	About other harmonic analysis applications	1799
25.4	Applications to ordinary life	1799
25.5	Physical Applications	1799
25.5.1	Mechanical Appendices	1799
25.5.2	Field Theory Applications	1799
25.5.3	Optics Applications	1799
X	Tables	1800
26	Functions	1800
27	Integrals	1800
28	Sums	1800
XI	Appendix	1801

A	Good Introduction to Mathematical Analysis	1801
A.1	The Mindset of Professionals	1801
A.1.1	Some Topics of MA Are Not Applicable. Should We Study Them?	1801
A.1.2	Once again about the importance of filtering idiots and useless theories	1802
A.1.3	How to distinguish meaningful mathematics from a useless waste of paper?	1802
A.1.4	Physicist's approach to mathematical analysis (!!!?)	1803
A.1.5	Effective approach to tasks from the ideological side	1803
A.2	Motivation for mathematical analysis	1803
A.2.1	Motivation for mathematical analysis	1803
A.2.2	Motivation for sections of mathematical analysis (??)	1804
A.3	Effective solution of Matan's tasks	1806
A.3.1	Algorithm for taking or analyzing an integral	1806
A.3.2	Algorithm for calculating or analyzing a series	1807
A.4	The Mindset of Professionals: Advanced Topics	1807
A.4.1	Mathematical thinking	1807
A.4.2	Ways to guess the main ideas from almost zero	1807
A.4.3	A way to prove typical theorems (?!!)	1807
A.4.4	What is the essence of matan?	1807
A.4.5	About successful mathematicians	1808
A.4.6	Features of effective study of analysis	1808
A.4.7	Matan jokes	1809
A.5	Acknowledgements	1809
A.6	Literature	1809
A.6.1	Main	1809
A.6.2	Professional Literature	1810
A.6.3	The subjects are as follows	1812
A.7	Introduction	1812
A.7.1	Mathematical Analysis Overview	1812
A.7.2	Overview of sections of mathematical analysis (!!!)	1813
A.7.3	Links with other mathematical sciences	1814
A.7.4	Application of analysis in physics (??)	1814
A.7.5	Description of record	1814
A.7.6	Brief historical overview	1817
A.8	Matan Puzzles for different occasions	1817
A.8.1	Interesting questions for beginners in mathematics	1817
A.8.2	Interesting questions for beginners who study a lot of mathematics	1817
A.8.3	Interesting questions for physicists	1817
A.8.4	Math Puzzles	1817
A.8.5	Interesting different tasks	1818
A.8.6	Interesting integrals	1818
A.8.7	Interesting counterexamples	1819
A.8.8	Interesting details of theorems and deep questions for discussion	1819
A.8.9	Mathematics Questions to Test Theorem Level	1820
A.8.10	Questions to check the level of theoremine	1820
A.8.11	Useless, strict questions to students to make them hate you	1820
A.8.12	Puzzles for mastering the most typical concepts	1820
B	Bibliography	1821

Preface and main motivation

Fundamentals

Functions

Series and Sequences

Measure and Integral

Other Topics

Tables

I used the following [literature](#).

Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would help a lot for studying mathematical analysis.

Хорошая идея ли изучать матан? На уровне решения типичных задач - да. На уровне понимания деталей - скорее всего нет, понадобятся темы - тогда и выучишь их.

(тут важные рассуждения, что нечего почем зря обожествлять матан, как делают многие в вузах, где он преподается. Наиболее вероятно, что если забудешь на детали, то будет только больше пользы. напишу 1/2 страницы про это потом.)

Вот и основная мотивация в том, что математическому анализу должно быть свое место, а не переоценивать или недооценивать его, а потом думать, как бы иметь больше мотивации? Не нужно думать, что есть такие-то причины, почему важно его знать. Нет, нет таких, пока не дошло до конкретных задач, где это нужно, и вероятность, что дойдет до них не такая большая.

Отдельно подчеркну, что наличие многих лекций по матану, многих умных профессоров, преподающих матан, наличие многих контрпримеров не являются аргументом изучать матан. Иногда это нужно, иногда это нет. В рамках обязательного образования, где студент пробегает тему за темой - точно это не нужно делать и точно это не даст пользу. С логикой, пользуясь которой, студент выбирает проходить такой курс матана, можно года 4 заниматься только общим развитием в математике, а потом уйти в анализ данных и стать программистом (пусть и став более умным от занятий математикой), потому что подход этот тупиковый.

Математический анализ хорошо развивает мышление в целом

Однако должен быть правильный подход, на это нужно много времени, и конечно же только им не стоит ограничиваться.

(напишу, что это не всякие углубления узкие как разные отдельные разделы, в то же время деталей и тонкостей очень много)

(абзац про экзамены по матану. То один не может понять вопрос, то другой несет какой-то абсолютный бред, то третий что-то сам додумал, в итоге на простых примерах не понимает, что происходит, то еще один говорит утверждения совершенно фантастические. вот тут и четко видно, что нужно просто сесть, пару месяцев подумать про матан и все. Хотя и да, суммарно по матану развитие на 3 года растягивается, не меньше. Это минимальная подготовка человека в науке.)

(абзац про тех, кто не развивает свое мышление, часто судьба их грустная.)

Общая подготовка по математике очень даже может пригодиться в науке где угодно, а иногда и в жизни

(укажу приложения словами)

Математика - интересная наука, и не сложно учиться

(про то, что интересная пара абзацев, многое можно указать)

(абзац про то, как на самом деле нужно учиться. про трудолюбие тоже. кто не умеет учиться - тот и не понимает. плюс не нужно верить тем, кто за пару месяцев требует понять детали все, в другой стране и других вузах совершенно иначе бы относились и еще более уверенными были бы, что так и нужно обучать. все тут просто, но важно.)

Также отдельно много мотивации появляется к матану, если умеешь фильтровать идиотов, и глубоко понимаешь ценности жизни и духовность

(пара абзацев про это, никуда без этого. особенно в странах, где низкий уровень демократии.)

(про ценность присутствия. часто в математике навешивается ценность думать много, это ложная ценность. Привязка к этому скорее всего мотивацию погубит, а если не погубит, то скорее всего сделает несчастливым. Так что очень хорошо это бы понимать!)

Map of Mathematics

(I'll draw it later, a really good thing to have it)

Лучшие идейные головоломки для мотивации

Тут я приведу одни из лучших вопросов и головоломок, которые мотивируют учить математику. Предлагается над ними подумать, и не читать сразу указания для решения!

(каки-то контрпримеры будут еще!)

m-th.1 Простейшее уравнение

Сколько в общем случае решений имеет уравнений $x^2 = x$? Найдите их.

Имеется в виду решений над полем вещественных чисел.

Some instructions. А если я докажу, что более чем 2? Готовы поспорить?

(see youtube video about it for now)

Лучшие технические головоломки для мотивации

Тут я приведу одни из лучших вопросов и головоломок, которые мотивируют учить математику. Предлагается над ними подумать, и не читать сразу указания для решения!

m-te.1.1 Relation between fundamental constants

Why $\pi = e^{3/2} \prod_{n=2}^{\infty} e \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$?

Some instructions.

(see https://www.youtube.com/watch?v=bMEpIKmQgZo&ab_channel=MichaelPenn for now)

m-te.1 Элегантный интеграл дроби

$$\int \frac{x^n}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}} dx = ?$$

Some instructions.

Raad.196. напишу потом строчку указаний

m-te.2 Элегантный интеграл степени

$$\int_0^1 x^{-x} dx = ?$$

Some instructions.

(очень известный) (не вникал, но на ютубе очень популярные про это видео.)

m-te.2 Elegant sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = ?$$

Some instructions.

https://www.youtube.com/watch?v=wiBFV0Fz0S4&ab_channel=TheFeynmanTechnique

Part I

Basics for Application in a Nutshell

1 Main formulas and methods

1.1 Typical functions and equations

1.1.1 Typical equations

Quadratic equation

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c \quad (\text{Vieta})$$

(помню, что там аккуратным быть нужно.)

Анализ свойств других уравнений

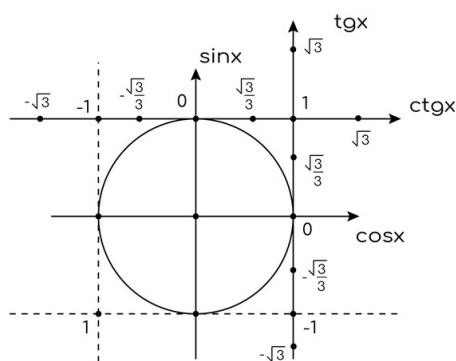
(укажу там про количество нулей и все такое.)

О преобразованиях степенных выражений

Квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

1.1.2 Trigonometry

Свойства из определений



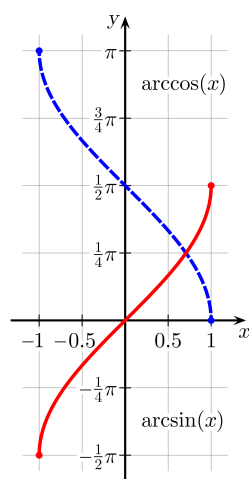
Функция	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin(t)$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos(t)$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg}(t)$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(t)$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

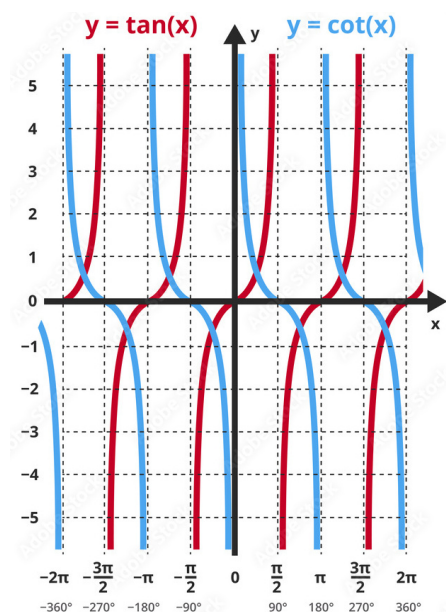
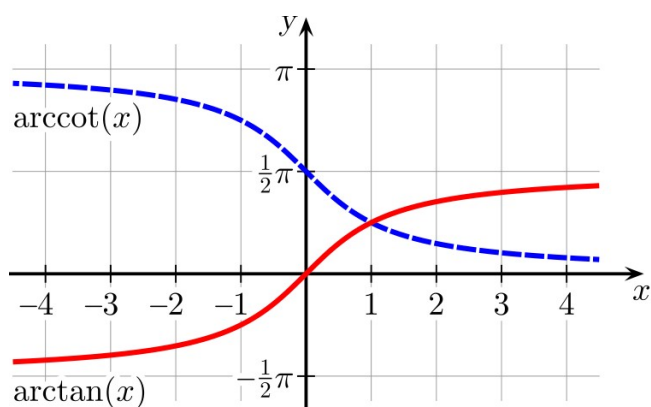
(draw the circle)

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Not defined
$\operatorname{cosec} \theta$	Not defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	Not defined
$\cot \theta$	Not defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$





Суммирование и умножение тригонометрических функций

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$c \cdot c \rightarrow c + c$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$s \cdot s \rightarrow c(-) - c(+)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$s \cdot c \rightarrow s + s$$

Суммы и разности $\sin$, $\cos$ выводятся из соответствующей ф. умножения:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\tan \theta \pm \tan \varphi = \frac{\sin(\theta \pm \varphi)}{\cos \theta \cos \varphi}.$$

Синусы, косинусы сумм, разностей тоже легко выводятся из формул умножения, нужно лишь сложить/вычесть пару, получаем:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

Кратные углы

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$= 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2};$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

(???? как нормально запомнить??) Можно, конечно, явно по синусу/косинусу суммы посчитать.

Если $\sin^4 x$ или $\cos^4 x$, то раскладываем в удвоенные гармоники, и так легко считаем.

Формулы приведения

(рисуем кружок, через него все это и выводим, это самое надежное.)

Обратные тригонометрические функции и связь с обычными

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad |a| \leq 1$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad |a| \leq 1$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad |a| \leq 1$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & xy < 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & x > 0, xy > 1 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & x < 0, xy > 1 \end{cases}$$

(???? как доказывать - подумаю когда-то.)

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cot(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \cot(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Они могут пригодиться при заменах для взятия интегралов.

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (x \in (-\infty; +\infty))$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (x \in (-\infty; +\infty))$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x (x \in (-\infty; +\infty))$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x} (x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty))$$

Производные тригонометрических функций

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Другие достаточно полезные свойства

(если совсем редко формула отсюда нужна, в теорию занесу ee!)

Sine	Cosine	Произведения
$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$	$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$	$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1 - \cos(4\theta)}{8}$
$\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4}$	$\cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos(3\theta)}{4}$	$\sin^3 \theta \cos^3 \theta = \frac{3 \sin(2\theta) - \sin(6\theta)}{32}$
$\sin^4 \theta = \frac{3 - 4 \cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}$	$\cos^4 \theta = \frac{3 + 4 \cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}$	$\sin^4 \theta \cos^4 \theta = \frac{3 - 4 \cos(4\theta) + \cos(8\theta)}{128}$
$\sin^5 \theta = \frac{10 \sin \theta - 5 \sin(3\theta) + \sin(5\theta)}{16}$	$\cos^5 \theta = \frac{10 \cos \theta + 5 \cos(3\theta) + \cos(5\theta)}{16}$	$\sin^5 \theta \cos^5 \theta = \frac{10 \sin(2\theta) - 5 \sin(6\theta) + \sin(10\theta)}{512}$

Тригонометрические уравнения

(большинство школьных задач будут решаться указаниями из этого параграфа)

1.1.3 Hyperbolic functions

Основные свойства и определения гиперболических функций

$$\cosh(ix) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$$

$$\sinh(ix) = \frac{1}{2} (e^{ix} - e^{-ix}) = i \sin x$$

$$\cosh(x + iy) = \cosh(x) \cos(y) + i \sinh(x) \sin(y)$$

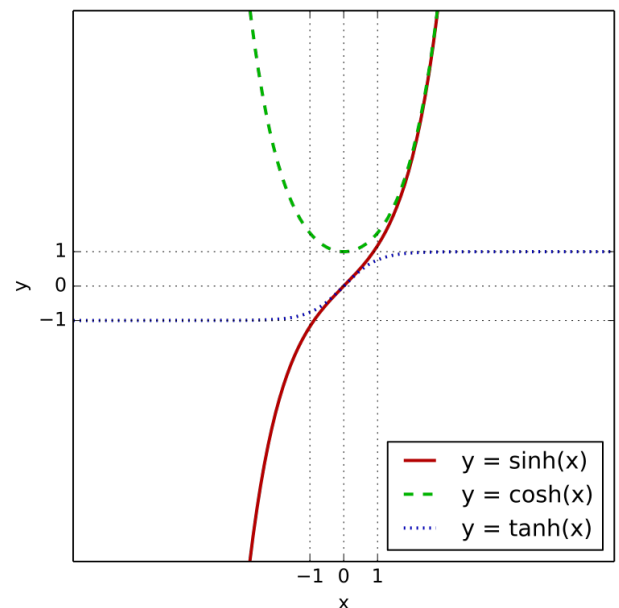
$$\sinh(x + iy) = \sinh(x) \cos(y) + i \cosh(x) \sin(y)$$

$$\tanh(ix) = i \tan x$$

$$\cosh x = \cos(ix)$$

$$\sinh x = -i \sin(ix)$$

$$\tanh x = -i \tan(ix)$$



$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1};$$

$$\operatorname{cth} x := \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= -i \sin(ix), & \operatorname{ch} x &= \cos(ix), & \operatorname{th} x &= -i \operatorname{tg}(ix); & \cos x &= \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \operatorname{sh}(ix) &= i \sin x, & \operatorname{ch}(ix) &= \cos x, & \operatorname{th}(ix) &= i \operatorname{tg} x; & \sin x &= \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\operatorname{sch} x$	$-\frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$
$\operatorname{csch} x$	$-\frac{\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}$

Чётность/нечётность гиперболических функций:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(-x) &= -\operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch}(-x) &= \operatorname{ch} x \\ \operatorname{th}(-x) &= -\operatorname{th} x \\ \operatorname{cth}(-x) &= -\operatorname{cth} x \\ \operatorname{sch}(-x) &= \operatorname{sch} x & \operatorname{csch}(-x) &= -\operatorname{csch} x + 1 \end{aligned}$$

Сложение гиперболических функций

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 &= 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2} \\ \operatorname{sh} z_1 - \operatorname{sh} z_2 &= 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 - z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 + z_2}{2} \\ \operatorname{ch} z_1 + \operatorname{ch} z_2 &= 2 \operatorname{ch} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2} \\ \operatorname{ch} z_1 - \operatorname{ch} z_2 &= 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{sh} \frac{z_1 - z_2}{2} \\ \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x \\ \operatorname{th}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \\ \operatorname{cth}(x \pm y) &= \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y} \end{aligned}$$

Обратные гиперболические функции

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x) &= \sqrt{x^2 - 1}, \quad |x| > 1; \\
\operatorname{sh}(\operatorname{arth} x) &= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1; \\
\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x) &= \sqrt{1 + x^2}; \\
\operatorname{ch}(\operatorname{arth} x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1; \\
\operatorname{th}(\operatorname{arsh} x) &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}; \\
\operatorname{th}(\operatorname{arch} x) &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}, \quad |x| > 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\
\operatorname{arcosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1 \\
\operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad |x| < 1 \\
\operatorname{arcoth}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad |x| > 1 \\
\operatorname{arsech}(x) &= \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) \quad 0 < x \leq 1 \\
\operatorname{arsch}(x) &= \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right) \quad x \neq 0
\end{aligned}$$

Двойной угол у гиперболических функций

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x} \\
\operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x} \\
3 \operatorname{th} 2x &= \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \\
\operatorname{cth} 2x &= \frac{1}{2}(\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x) \\
\operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\operatorname{sh} 2x} = \frac{\operatorname{sh} 2x}{1 + \operatorname{ch} 2x} \\
\operatorname{ch} 2x \pm \operatorname{sh} 2x &= (\operatorname{sh} x \pm \operatorname{ch} x)^2 \\
\sinh\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{\sinh x}{\sqrt{2(\cosh x + 1)}} = \operatorname{sgn} x \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \\
\cosh\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} = \operatorname{sgn} x \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\
\tanh\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}
\end{aligned}$$

Кратные углы гиперболических функций

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 3x &= 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x & \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} &= \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2} \\ \operatorname{ch} 3x &= 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x & \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} &= \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}. \\ \operatorname{th} 3x &= \operatorname{th} x \frac{3 + \operatorname{th}^2 x}{1 + 3 \operatorname{th}^2 x}. \end{aligned}$$

Произведения и суммы гиперболических функций

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)}{2} \\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \frac{\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)}{2} \\ \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y &= \frac{\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)}{2} \\ \operatorname{th} x \operatorname{th} y &= \frac{\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)}{\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)}. \\ \operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2} \\ \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2} \\ \operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y &= \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y} \end{aligned}$$

Другие формулы и свойства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arcosh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} & 1 < x \\ \frac{d}{dx} \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{1 - x^2} & |x| < 1 \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{1 - x^2} & 1 < |x| \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arsech} x &= -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} & 0 < x < 1 \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arcsch} x &= -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}} & x \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} du &= \operatorname{arsinh} \left(\frac{u}{a} \right) + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du &= \operatorname{sgn} u \operatorname{arcosh} \left| \frac{u}{a} \right| + C \\ \int \frac{1}{a^2 - u^2} du &= a^{-1} \operatorname{artanh} \left(\frac{u}{a} \right) + C \quad u^2 < a^2 \\ \int \frac{1}{a^2 - u^2} du &= a^{-1} \operatorname{arcoth} \left(\frac{u}{a} \right) + C \quad u^2 > a^2 \\ \int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}} du &= -a^{-1} \operatorname{arsech} \left| \frac{u}{a} \right| + C \\ \int \frac{1}{u\sqrt{a^2 + u^2}} du &= -a^{-1} \operatorname{arcsch} \left| \frac{u}{a} \right| + C \end{aligned}$$

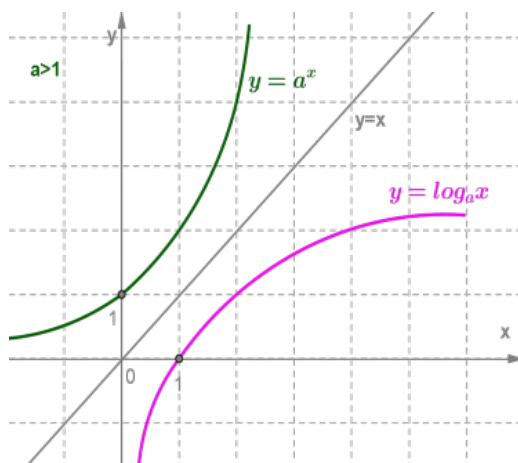
(тут абзац про смысл, типа там площадь под гиперболами, но это не так важно понимать.)

1.1.4 Log, exp, x^a

О логарифмах

Основные свойства

$$f(x) = e^{\ln f(x)}$$



Мы отражаем просто график экспоненты относительно линии $y = x$ - и получаем график логарифма.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$$

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

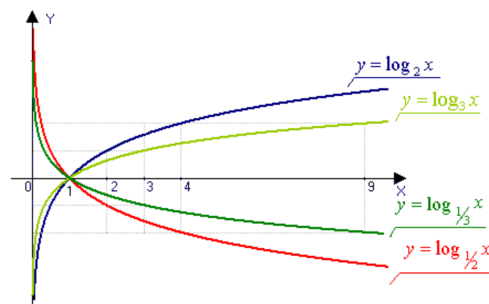
$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b$$

$$\log_a a = 1$$

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

$$\log_a 1 = 0$$

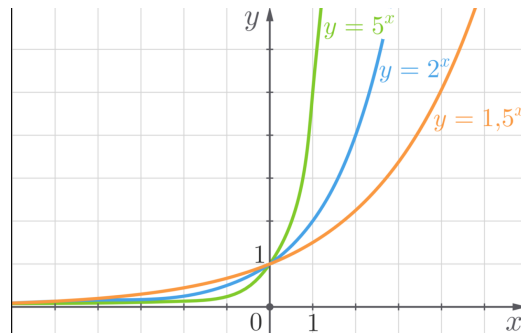
(мб некоторые потом из тфкп добавлю, пока без них, плюс еще их не зашарил)



О показательных функциях $f(x) = a^x$

(пара комментариев, тут вроде все должно быть очевидно, но это обсуждается типично в матане.)

$$a = e^{\ln a}$$



1.1.5 δ -, δ' , θ -functions, etc.

(скоро выпишу, пока см. отдельную запись про спецфункции)

δ -function

θ -function

Plemelj formulas

$$\frac{1}{2}(f(\omega + i\varepsilon) - f(\omega - i\varepsilon)) = i\rho(\omega)$$

$$\frac{1}{2}(f(\omega + i\varepsilon) + f(\omega - i\varepsilon)) = \frac{1}{\pi}P \int_{\Gamma} \frac{\rho(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'.$$

1.1.6 Fast counting in a head

(соберу потом, неплохие навыки)

Fast multiplication

(write, practice)

Summing numbers up to 1000

(write, practice)

Summing numbers over 1000

(write, practice)

1.2 1D integrals

1.2.1 Table integrals

Типичные элементарные табличные интегралы

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0).$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \quad (-\operatorname{arctg} x + C).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C \quad (|x| > |k| \text{ при } k < 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1 \quad (-\arccos x + C)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C = \frac{1}{2a} \operatorname{Arth} x \quad (|x| \neq 1, a \neq 0), \text{ ибо } \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

(тут многие будут еще)

Гауссов интеграл (интеграл Эйлера-Пуассона, Пуассона)

Основные свойства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\beta^2} dx = \beta\sqrt{\pi}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{ф Пуассона})$$

В конечных пределах гауссов интеграл - спецфункция $\operatorname{erf} x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Для четных степеней x^n подынтегральная функция четная, и интеграл набирается и от $-\infty$ до $+\infty$ и по половине:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\gamma x^2} dx = \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}, \quad \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \quad (\text{By int by parts (?)})$$

Для нечетных n функция $x^n e^{-\gamma x^2} dx$ нечетная, и интеграл от 0 до $+\infty$:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = (1/2)! = \sqrt{\pi}/2$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-\gamma x^2} dx = \frac{1}{2\gamma}, \quad \int_0^{\infty} x^3 e^{-\gamma x^2} dx = \frac{1}{2\gamma^2}, \quad \int_0^{\infty} x^5 e^{-\gamma x^2} dx = \frac{1}{\gamma^3}$$

Классическое доказательство - рассмотреть этот интеграл дважды и потом извлечь корень:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{1}{2}y^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} dr r e^{-\frac{1}{2}r^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} dw e^{-w} = 2\pi$$

Также это можно доказать через контурный интеграл по границе сектора на комплексной плоскости, образованного осью абсцисс, лучом $y = x, x \geq 0$ и окружностью радиуса R с центром в начале координат. При $R \rightarrow \infty$ интеграл по дуге стремится к 0, интеграл по вещественной оси - нужный интеграл.

Свойства для физики

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + Jx} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} e^{J^2/2a}$$

Другие полезные свойства

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j \right) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-\frac{1}{2} x^\top A x \right) d^n x = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} = \sqrt{\frac{1}{\det(A/2\pi)}}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \sqrt{\pi} \frac{a^{2n+1} (2n-1)!!}{2^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-bx^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{b^n 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-bx^2} dx = \frac{n!}{2b^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-bx^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2b^{\frac{n+1}{2}}}$$

Гамма-функция $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ (!?!!!)

(очень крутые задачи на это есть!!)

Основные свойства

Гамма-функция сходится при $p > 0$.
(график вставляю!)

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad p > 0; \quad (\text{ф понижения})$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < p < 1. \quad (\text{ф дополнения})$$

Так как $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, то из формулы понижения следует, что

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

О применениях (?)

Бета-функция $B(p; q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$

Основные свойства

Интеграл бета-функции сходится при $p > 0$ и $q > 0$.

$$B(p; q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

О применениях (?)**Критерии задач на гамма и бета функции (?)**

(пока лишь пределы интегрирования вижу, потом пропишу лучше)

Интегралы Фурье

(??? отдельный про них раздел кст, перенесу потом туда.)

Основные свойства

Интегралы Фурье - по сути преобразование Фурье:

$$f(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt \quad (\text{вещественная форма})$$

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt \quad (\text{комплексная форма})$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. В точках разрыва функции f :

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt$$

Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на R функция f имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные, то в случае, когда эта функция является четной, справедливо равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos xy dy \quad a(y) := \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos yt dt$$

а в случае, когда f - нечетная функция, выполняется равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(y) \sin xy dy \quad b(y) := \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin yt dt$$

Об интегралах Френеля $S(x) := \int_0^x \sin(t^2) dt$, $C(x) := \int_0^x \cos(t^2) dt$ (??)

(нужны будут - изучу)

Основные свойства

В простейшем случае:

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Они не выражаются через элементарные функции.

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320} - \dots$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} = x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{216} - \dots$$

они сходятся при всех x .

Некоторые авторы используют в качестве аргумента тригонометрических подынтегральных функций $\frac{\pi}{2}t^2$.

Таким образом определенные интегралы Френеля получаются из определённых выше интегралов заменой переменной $t \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}t$ и

$S(x)$ и $C(x)$ - нечётные функции x . Асимптотики интегралов Френеля при $x \rightarrow \infty$ даются формулами

$$S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\text{sign}(x)}{2} - \frac{\cos(x^2)}{x\sqrt{2\pi}} [1 + O(x^{-4})] - \frac{\sin(x^2)}{x^3\sqrt{8\pi}} [1 + O(x^{-4})] \right)$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\text{sign}(x)}{2} + \frac{\sin(x^2)}{x\sqrt{2\pi}} [1 + O(x^{-4})] - \frac{\cos(x^2)}{x^3\sqrt{8\pi}} [1 + O(x^{-4})] \right)$$

Используя разложение в ряд, можно построить аналитическое продолжение интегралов Френеля на всю комплексную плоскость.

Комплексные интегралы Френеля выражаются через функцию ошибок как

$$S(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (\sqrt{i} \operatorname{erf}(\sqrt{i}x) + \sqrt{-i} \operatorname{erf}(\sqrt{-i}x))$$

$$C(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (\sqrt{-i} \operatorname{erf}(\sqrt{i}x) + \sqrt{i} \operatorname{erf}(\sqrt{-i}x))$$

Параметрический график $S(x)$ и $C(x)$ даёт кривую на плоскости, называемую спиралью Корню или клотоидой.

(рисунок приведу потом)

О применениях (?)

Эллиптические интегралы

Основные свойства

О применениях

Эллиптические интегралы играют большую роль в математике; в частности, длина дуги эллипса вычисляется с помощью эллиптического интеграла

Интеграл Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

(есть куча задач в духе "посчитать с ним интеграл такой-то, так что порешаю потом их")

Об интегралах, не вычисляющихся в элементарных функциях

Типичные именные интегралы

(потом укажу самые основные особенности и случаи применения)

$\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона (интеграл ошибок).

$\int \sin(x^2) dx$ - интеграл Френеля.

$\int \cos(x^2) dx$ - интеграл Френеля.

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм.

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус.

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ - интеграл Дирихле

1.2.2 Approximations of 1D integrals

(скоро напишу)

Быстрое определение величины интеграла

Если подынтегральная функция нечетная и интеграл от $-\infty$ до $+\infty$, то интеграл равен нулю.

Если подынтегральная функция четна и интеграл от $-\infty$ до $+\infty$, то интеграл точно не равен нулю.

1.2.3 Basic methods for 1D integrals

Типичные ходы для интегрирования

Интегрирование по частям

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

Иногда интегрирование по частям нужно делать несколько раз.

Метод полезен, если

- под интегралом произведение функций, от каждой из которых известен интеграл.
- под интегралом функция в какой-то степени. Таким образом, производной можно эту степень понизить.
- Под интегралом произведение функций, производная от одной даст деление на другую (??)

Подготовка: упрощение функций

Это самый типичный метод и им решаются большая часть простых интегралов.

- Если дробь, то раскрыть скобки или разделить на дроби

Если прямо совсем тривиальный интеграл, то тупо раскрыть скобки и будет достаточно.

Например, часто если есть в знаменателе произведения степенных функций, можно разложить всю дробь на дроби и каждую проинтегрировать. Очень много задач на это.

(? кст, откуда такое соотношение?)

- Если дробь, можно представить числитель подынтегральной функции в виде линейной комбинации знаменателя и производной знаменателя

представить числитель подынтегральной функции в виде линейной комбинации знаменателя и производной знаменателя:

$$2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x = \alpha(4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x) + \beta(4 \operatorname{ch} x + 5 \operatorname{sh} x).$$

Интегрирование заменой переменных (!!!!)

Метод замены переменных - самый типичный метод, который чаще всего решает задачу. Особенно, если интеграл от дроби, и в знаменателе непонятная функция, ее или зачать ее и заменяю на новую переменную. Запрещено говорить, что интеграл не берется, если не пробовал сделать замену переменных!

Для замены переменной

1) изначальный интеграл должен существовать,

2) замена должна быть биективной, дифференцируемой, непрерывной

(?? проверю, чтобы на самом деле этого было достаточно, а то мало ли после замены интеграл перестанет существовать.)

Формально:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \Big|_{t=\varphi(x)}.$$

Также смотрим на область значений, потому что у новой переменной вообще говоря другая область значений!

Важно отслеживать, чтобы не было никаких замен, когда нельзя их делать. (!?!?!? потом эти тонкости теории допишу)

А какая конкретно может замена сработать - зависит от типа интеграла, что я и укажу ниже.

Особые известные ходы для интегралов

О замене $x = \cos t$

Если есть выражение вида $\sqrt{1-x^2}$, то есть смысл попробовать сделать замену типа $x = \cos t$.

О замене $x = \tan(t)$ или $x = \tan(t/2)$

$$x = \tan(t)$$

спасает в интегралах от степеней $(1+x^4)$ или если подынтегральная функция обладает свойством $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$. В таком случае делим, переопределим к дроби от тангенса, далее замена и поможет.

Например, в интегралах вида $\int \frac{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}{x} dx$

Также в интеграле от тригонометрических функциях (!?!?!?)

$$x = \tan(t/2)$$

работает в выражениях вида $A \cos x + B \sin x$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Например, прокатывает для $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$

О замене $t = \operatorname{sh} x$

Для функций

$$R(\operatorname{sh} x; -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x; \operatorname{ch} x).$$

(??? обещается, что все хорошо.)

Интегрирование простейших дробей (?!?!?!?)

(скоро буду тренировать!)

Интегрирование элементарных дробей

Раскладываем дробь на $\frac{A}{(x-a)^n}$, и $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$.

Далее типичное преобразование:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x+p/2)^2 + q - p^2/4} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{N - Mp/2}{\sqrt{q - p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{x+p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + C, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \\ &= \frac{M}{2} \frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{((x+p/2)^2 + q - p^2/4)^n}, n > 1. \end{aligned}$$

Последний интеграл линейной подстановкой $t = x + p/2$ приводится к интегралу J_n , для которого известно, что $J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n \right)$. (??? додумая чуть!)

Если под интегралом дробь, то разделить на x^2 , преобразовать, добавить к изначальному интегралу, легко вычислить, сведя к арктангенсу. Например, это работает

для $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$.

(???? для каких еще?? пока мало такой метод использовал.)

Разложение в дроби, а затем поиск коэффициентов дифференцированием и приравниваем их при $x = 1, x = 0, x = -1$

(важно потренироваться, что-то не уверен, когда этот метод работает)

Так можно сдвинуться, когда иначе сложно.

Этот прием отыскания коэффициентов A и D удобен в тех случаях, когда знаменатель рациональной дроби имеет кратные корни.

Метод Остроградского (??)

Если знаменатель правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ имеет кратные корни, особенно комплексные, работает формула Остроградского:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (\text{rational} + \text{transcendental parts})$$

где $Q_2(x)$ - многочлен, имеющий те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но все корни многочлена $Q_2(x)$ простые (однократные), $Q_1(x) = Q(x)/Q_2(x)$.

Для отыскания многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ их записывают с неопределенными коэффициентами, которые находят после дифференцирования обеих частей формулы Остроградского.

Если $P_2 \neq 0$, то, так как корни $Q_2(x)$ простые, интеграл $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$ есть функция трансцендентная; она равна сумме слагаемых вида

$$a \operatorname{arctg}(\alpha x + \beta) + b \ln(\gamma + \delta) + C, \quad a, b \neq 0.$$

О случаях применения метода Остроградского (??)

(?? скоро оттренирую!)

Метод Остроградского позволяет найти алгебраическую часть интеграла от правильной рациональной дроби чисто алгебраическим путем, т. е. не прибегая к интегрированию каких-либо функций.

Делаем его, если более простые способы не прокатывают, потому что времени на него может уйти много.

(хз, насколько ходовой метод, мб он рил очень громоздкий, не знаю.)

Типичные примеры Метода Остроградского

(укажу тут)

Интегрирование рациональной функции от $\sin x$ и $\cos x$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

где R - рациональная функция. Этот интеграл рационализуется универсальной подстановкой

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

Интегрирование простейших корней, дробей с корнями (!!!!)

Чаще всего делаем просто подстановку, с помощью которой функция станет рациональной.

Через $R(x_1; x_2; \dots; x_n)$ будем обозначать рациональную функцию.

Подстановки дроби с степенью, равной общему знаменателю

Интегралы вида

$$\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right) dx$$

где $n \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{Q}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

где m - общий знаменатель рациональных чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$, приводятся к интегралу от рациональной функции.

(??? потренирую потом)

Интегралов от простейших корней (?!?!?!?)

(очень тоже типичные задачи, так что их впишу. в интернете хорошо гуглятся.)

$$J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + C.$$

при $a \neq 0$

(у кудрявцева т.2 решена, пропишу потом суть этого вывода, почти дошел.)

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0,$$

имеем

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n \right).$$

(у кудрявцева т.2 решена, пропишу потом суть этого вывода, почти дошел.)

Подстановки Эйлера (!!!!)

Интегралы

$$\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0,$$

могут быть сведены к интегралам от рациональных функций подстановками Эйлера:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \pm \sqrt{a}x \pm t, & \text{если } a > 0; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \pm xt \pm \sqrt{c}, & \text{если } c > 0; \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \pm (x - x_1)t, \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \pm (x - x_2)t, \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 - различные действительные корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. (Знаки в правых частях равенств можно брать в любых комбинациях.)

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам.

Общий методы взятия $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0,$

Преобразуем

$$R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) = \frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + R_2(x),$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ - рациональные дроби. Тем самым интеграл $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0,$ можно свести к интегралу от рациональной дроби $R_2(x)$ и к интегралу вида

$$\int R_1(x) \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Представив рациональную дробь $R_1(x)$ в виде суммы многочлена $P_n(x)$ и элементарных дробей, приходим к интегралам следующих трех видов:

$$\begin{aligned} & \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \\ & \int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \\ & \int \frac{(Mx + N)dx}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad p^2 - 4q < 0. \end{aligned}$$

Для вычисления $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ удобно пользоваться формулой

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

где $Q(x)$ - многочлен степени не выше, чем $n - 1$, а λ - некоторое число. Дифференцируя обе части этой формулы и затем умножая на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, получаем равенство многочленов, из которого находим λ и коэффициенты многочлена $Q(x)$.

Интеграл $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ подстановкой $t = 1/(x - \alpha)$ приводится к интегралу выше.

Интеграл $\int \frac{(Mx + N)dx}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ в случае, когда квадратные трехчлены

$$ax^2 + bx + c, \quad x^2 + px + q$$

совпадают или отличаются только множителем, следует представить в виде линейной комбинации двух интегралов

$$\int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^{(2m+1)/2}} \text{ и } \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{(2m+1)/2}}.$$

Первый интеграл берется подстановкой $u = x^2 + px + q$, второй подстановкой Абеля

$$t = \left(\sqrt{x^2 + px + q} \right)' = \frac{2x + p}{2\sqrt{x^2 + px + q}}$$

сводится к интегралу от многочлена.

В общем случае, если $p \neq b/a$, применяется подстановка

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1},$$

где α и β подбираются так, чтобы в квадратных трехчленах $x^2 + px + q$ и $ax^2 + bx + c$ исчезли члены, содержащие t в первой степени. При таком выборе чисел α и β интеграл (5) сведется к интегралу вида

$$\int \frac{P(t)dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{st^2 + r}},$$

где $P(t)$ - многочлен степени $2m - 1$ и число $\lambda > 0$. (Если $p = b/a$, то уничтожение членов первой степени достигается проще: линейной заменой $x = t - p/2$.)

Разложив правильную рациональную дробь $P(t)/(t^2 + \lambda)^m$ на элементарные дроби, придем к интегралам

$$\int \frac{tdt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{st^2 + r}}, \quad \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{st^2 + r}}$$

Первый интеграл вычисляется подстановкой $u^2 = st^2 + r$, второй подстановкой Абеля

$$v = \left(\sqrt{st^2 + r} \right)' = \frac{st}{\sqrt{st^2 + r}}.$$

Для вычисления интегралов вида (2) часто удобно использовать тригонометрические или гиперболические подстановки. Для этого, предварительно выделив полный квадрат в трехчлене $ax^2 + bx + c$ и сделав соответствующую линейную замену, приводят интеграл (2) к одному из следующих видов:

$$\int R(t; \sqrt{p^2 - t^2}) dt, \quad \int R(t; \sqrt{t^2 - p^2}) dt, \quad \int R(t; \sqrt{t^2 + p^2}) dt.$$

К первому интегралу применяют подстановки

$$t = p \sin u, \quad t = p \cos u, \quad t = p \operatorname{th} u,$$

ко второму - подстановки

$$t = \frac{p}{\cos u}, \quad t = p \operatorname{ch} u,$$

и к третьему - подстановки

$$t = p \operatorname{tg} u, \quad t = p \operatorname{sh} u.$$

Интегралы от дифференциального бинома

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx \quad - \text{интеграл от дифференциального бинома,}$$

где a, b - действительные, m, n, p - рациональные числа, причем $a \neq 0, b \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$. Эти интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций в следующих трех случаях:

$$\begin{aligned} p & \quad - \text{целое число,} \\ \frac{m+1}{n} & \quad - \text{целое число,} \\ \frac{m+1}{n} + p & \quad - \text{целое число.} \end{aligned}$$

В первом случае применяется подстановка

$$x = t^N,$$

где N - общий знаменатель дробей m и n ; во втором и в третьем случаях - соответственно подстановки

$$ax^n + b = t^s \quad \text{и} \quad a + bx^{-n} = t^s,$$

где s - знаменатель дроби p . Если ни одно из условий (8) не выполняется, то интеграл (7) не может быть выражен через элементарные функции (теорема Чебышева).

Переход к эллиптическим интегралам (????)

Интегралы вида

$$\int R(x; \sqrt{P_n(x)}) dx,$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени $n > 2$, как правило, не выражаются через элементарные функции и в этом случае при $n = 3$ и $n = 4$ называются эллиптическими, а при $n > 4$

гиперэллиптическими. В том случае, когда интеграл (9) при $n = 3$ и $n = 4$ является элементарной функцией, он называется псевдоэллиптическим.

Каждый эллиптический интеграл может быть выражен через элементарные функции и через стандартные эллиптические интегралы

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ & \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ & \int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k \in (0; 1). \end{aligned}$$

Подстановкой $x = \sin \varphi$ эти интегралы сводятся к линейным комбинациям интегралов

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ & \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \\ & \int \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k \in (0; 1) \end{aligned}$$

которые называются соответственно эллиптическими интегралами первого, второго, третьего рода в форме Лежандра.

Через $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$ обозначают соответственно ту из первообразных (13) и (14), которая при $\varphi = 0$ обращается в нуль (см. задачи 27).

Интегрирование простейшей тригонометрии и гиперболической геометрии

Интегралы общего вида от тригонометрии $\int R(\sin x; \cos x) dx$ и случаи их симметрии

Интегралы вида

$$\int R(\sin x; \cos x) dx,$$

всегда можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}(x/2)$, $x \in (-\pi; \pi)$. Эта подстановка преобразует его к виду

$$2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Такая подстановка часто приводит к громоздким вычислениям, поэтому прибегать к ней следует только тогда, когда не видно других путей к вычислению интеграла.

Если подынтегральная функция обладает одним из свойств:

- 1) $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$;
- 2) $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$;
- 3) $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$;

то для вычисления интеграла удобнее использовать соответственно подстановки:

- 1) $t = \cos x, x \in (-\pi/2; \pi/2)$;
- 2) $t = \sin x, x \in (0; \pi)$;
- 3) $t = \operatorname{tg} x, x \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Интегралы от шинуса и чесинуса $\int R(\operatorname{sh} x; \operatorname{ch} x) dx$

Интегралы вида

$$\int R(\operatorname{sh} x; \operatorname{ch} x) dx$$

где $R(u; v)$ - рациональная функция переменных u и v , всегда можно свести к интегралам от рациональных функций

$$2 \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}; \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \frac{dt}{1-t^2}$$

с помощью гиперболической подстановки $t = \operatorname{th}(x/2)$.

Иногда удобнее использовать подстановки $t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{ch} x$, $t = \operatorname{th} x$ или другие методы (см. примеры 3, 6, 7).

(?? укажу потом их тут)

Интегралы $\int \sin^p x \cos^q x dx$ и $\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x dx$

Интегралы

$$\int \sin^p x \cos^q x dx, \quad \int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x dx, \quad p, q \in \mathbb{Q},$$

подстановками $t = \sin x$ или $t = \cos x$ и соответственно $t = \operatorname{sh} x$ или $t = \operatorname{ch} x$ всегда можно свести к интегралам от дифференциального бинома.

(?? отработаю потом)

Интегралы от произведения многочлена на элементарную функцию

Интегралы вида

$$\int P_n(x) f(x) dx,$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n , а $f(x)$ - одна из следующих функций:

$$e^{\alpha x}, \sin \alpha x, \cos \alpha x, \ln x, \arcsin \alpha x, \arccos \alpha x, \operatorname{arctg} \alpha x, \operatorname{arcctg} \alpha x,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, вычисляются с помощью, вообще говоря, многократного интегрирования по частям.

О выражении через интегральный синус, интегральный логарифм и интеграл вероятностей (??)

Интегралы от трансцендентных функций часто не выражаются через элементарные функции. К таким интегралам относятся, например, следующие часто встречающиеся интегралы:

$$\operatorname{Si}(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx,$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} dx, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{li}(x) = \int \frac{dx}{\ln x}, \quad x \in (0; 1).$$

(?? потом отработаю.)

Взятие интегралов, зависящих от параметра

(про них отдельный раздел, хотя мб потом сделаю параграфом)

Основной метод

(потом также укажу, когда он нужен)

Типичные примеры

1.2.4 Useful Specific methods for 1D integrals

Метод Фейнмана (метод дифференцирования и интегрирования по параметру)

Дифференцирование по параметру

Если функции $f(x; \alpha)$ и $f'_\alpha(x; \alpha)$ непрерывны на множестве $G = \{(x; \alpha) : a \leq x < +\infty, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$, интеграл $I(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x; \alpha) dx$ сходится при каждом $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$, а интеграл от производной $\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x; \alpha) dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$, то “дифференцирование заносится под интеграл”:

$$I'(\alpha) = \int_a^{+\infty} f'_\alpha(x; \alpha) dx$$

при $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ (правило Лейбница).

Интегрирование по параметру несобственных интегралов (!!)

Если функция $f(x; \alpha)$ непрерывна на множестве

$$G = \{(x; \alpha) : a \leq x < +\infty, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$$

$\int_a^{+\infty} f(x; \alpha) dx$ равномерно сходится по α на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$, то справедлива формула

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x; \alpha) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x; \alpha) d\alpha.$$

Если $f(x; \alpha) \geq 0$ на множестве G , то равенство выше остается в силе также и для бесконечного промежутка $(\alpha_1; \alpha_2)$ в предположении, что внутренние интегралы в равенстве (2) являются непрерывными функциями и хотя бы одна из частей равенства (2) имеет смысл.

Если функция $f(x; \alpha)$ непрерывна на множестве

$$\tilde{G} = \{(x; \alpha) : a \leq x < +\infty, c \leq \alpha < +\infty\},$$

интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x; \alpha) dx \text{ и } \int_c^{+\infty} f(x; \alpha) d\alpha$$

сходятся равномерно соответственно по α и x на отрезках $[c; \xi]$ и $[a; \eta]$ при каждом фиксированном $\xi \in (c; +\infty)$ и $\eta \in (a; +\infty)$ и если, кроме того, хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_c^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} |f(x; \alpha)| dx, \quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x; \alpha)| d\alpha$$

сходится, то сходятся и равны между собой оба повторных интеграла от функции f , т. е.

$$\int_c^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x; \alpha) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x; \alpha) d\alpha.$$

Типичные интегралы с параметрами

При вычислении несобственных интегралов часто используются интегралы ниже. Если $\alpha > 0$, то для любого $\beta \in \mathbb{R}$ справедливы формулы

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Эти формулы можно получить, используя метод интегрирования по частям.

(?? проверю потом)

О формуле Фруллани.

Если функция f непрерывна на $[0; +\infty)$ и для каждого $A > 0$ сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, то при любых $a > 0, b > 0$ справедлива формула Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

(??? из чего это следует???)

Если расходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, от непрерывной на промежутке $[a; +\infty)$ функции f , но существует конечный $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ и, кроме того, сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x) - f(+\infty)}{x} dx$, то, применив формулу (6) к функции $\tilde{f}(x) = f(x) - f(+\infty)$, получим равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

(??? порешаю про это потом, пока хз)

Например, по Фруллани можно считать интегралы Дирихле и Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ и

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx.$$

Методы типичного комплексного анализа взятия интегралов

Обсудим типичные способы взятия интегралов с помощью ТФКП.

(потом буду прописывать, пока не до этого.)

(не уверен, насколько глубоко это буду писать, по идее х5 короче, чем в 1 части комплана)

(!! это должен быть именно определенный интеграл, помню это!)

Сведение к вычетам в двух словах

(потом также укажу, когда он нужен)

Метод перевала в двух словах

Мы просто заменяем интеграл на гауссов:

(напишу это потом лучше)

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2} (t - t_0)^2, \quad f''(t_0) < 0$$

$$I \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_0)|}} e^{f(t_0)}$$

(?? в комплексном случае - сложнее, напишу потом про это немного тоже сюда)

Другие методы

Некоторые особые формулы (???)

(такое вообще еще не по уровню. но потом мб порешаю задачи)

Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1 + x^2 \alpha^2}$$

можно вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$. (? потренируюсь!)

Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sin x} \ln \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dt}{a^2 - b^2 t^2 \sin^2 x},$$

где $a > b > 0$, можно вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \ln \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \frac{dx}{\sin x}$. (? потренируюсь!)

Теоремы об интеграле с параметром

Теорема о непрерывности интеграла по параметру.

Пусть функция $f(x; \alpha)$ непрерывна на множестве $[a; b] \times [\alpha_1; \alpha_2]$ и интеграл $\int_a^b f(x; \alpha) dx$

сходится равномерно на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$, тогда функция $F(\alpha) = \int_a^b f(x; \alpha) dx$ непрерывна на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$.

Теорема о дифференцировании интеграла по параметру.

Пусть функция $f(x; \alpha)$ и ее частная производная $f'_\alpha(x; \alpha)$ непрерывны на прямоугольнике $[a; b] \times [\alpha_1; \alpha_2]$ интеграл $\int_a^b f'_\alpha(x; \alpha) dx$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$ и при некотором $\alpha_0 \in [\alpha_1; \alpha_2]$ сходится интеграл $\int_a^b f(x; \alpha_0) dx$, тогда функция $F(\alpha) = \int_a^b f(x; \alpha) dx$ дифференцируема на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$ и

$$F'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x; \alpha) dx$$

Напомним, что несобственный интеграл, зависящий от параметра, удобно рассматривать как функцию параметра $F(\alpha)$, тогда применение теоремы дифференцирования позволяет найти производную этой функции. Затем $F(\alpha)$ может быть восстановлена по своей производной:

- либо с помощью определенного интеграла Римана по формуле Ньютона-Лейбница (при этом необходимо найти значение интеграла при конкретном значении параметра),
- либо с помощью неопределенного интеграла (при этом используются свойства функции $F(\alpha)$ для нахождения значения произвольной постоянной, например, предел на бесконечности, ограниченность и т.п.).

Теорема об интегрировании интеграла по параметру.

Пусть функция $f(x; \alpha)$ непрерывна на множестве $[a; b] \times [\alpha_1; \alpha_2]$ и интеграл $\int_a^b f(x; \alpha) dx$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$, тогда

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(\int_a^b f(x; \alpha) dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x; \alpha) d\alpha \right) dx$$

Собственные интегралы с параметром

Несобственные интегралы с параметром

О комплексных методах для интегралов (!!!)

(тут важные будут указания, скорее всего пару пар-ов сделаю, пока в комплане про это)

1.2.5 Analysis of 1D integrals

When some typical transformations are applicable?

Замена переменных в 1D интеграле

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ_x , а функция $\varphi(t)$ - на промежутке Δ_t и $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Тогда имеет смысл композиция $f \circ \varphi$, т. е. сложная функция $f(\varphi(t))$.

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке Δ_x , а функция (t) непрерывна вместе со своей производной на промежутке Δ_t , то

$$a \in \Delta_t, \quad \beta \in \Delta_t, \quad a = \varphi(a), \quad b = \varphi(\beta)$$

то есть мы просто при новой переменной вставляем пределы как функции от нее!
В частности:

$$\int_a^b dk f(k) = - \int_a^b (-dk) f(-(-k)) = - \int_{-a}^{-b} d(-k) f(-(-k)) = - \int_{-a}^{-b} dy f(-y) = \int_{-b}^{-a} dy f(-y).$$

(!!! важно не затупить и правильно пределы менять, и чтобы знаки правильные были, иначе можно минусы потерять.)

Основные соображения про одномерные определенные интегралы

Об интегралах от $-\infty$ до $+\infty$

Если функция под интегралом четная относительно какой-то точки на оси аргумента, то этот интеграл равен удвоенному интегралу в сторону увеличения аргумента.

Если хочешь делать замены, позаботься, чтобы область определения не изменилась. Поэтому в некоторых интегралах следует сперва разбить его на два, а потом уже делать замены.

На 2 можно разбивать тогда, когда оба сходятся и сам интеграл сходится. Если такого нет, то (???? учить матан нужно, не усвоил, что тогда?)

Пара типичных интегралов от $-\infty$ до $+\infty$

(???? как считать - я хз, мб напишу когда-то методы для них, пока забил, потому что просто в вольфрам можно вставить их и все. тут пара очень уж типичных, чтобы сразу пользоваться ими!)

Лоренцевы интегралы и их модификации:

```
1 Integrate[1/(x^2+a^2)^3,{x,-Infinity,+Infinity}, Assumptions-> a>0]
```

Исследование на сходимость (!?!?!?)

Шаблонные сходящиеся и расходящиеся интегралы от знакопостоянных функций

- $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходимость: $\alpha < 1$, расходимость: $\alpha \geq 1$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходимость: $\alpha > 1$, расходимость: $\alpha \leq 1$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x}}$ сходимость: $\alpha > 0$, расходимость: $\alpha \leq 0$;
- $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ сходимость: $\alpha < 1, \beta \in \mathbb{R}$; или $\alpha = 1, \beta > 1$;
расходимость: $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$; или $\alpha = 1, \beta \leq 1$;

- $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ сходимость: $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$; или $\alpha = 1, \beta > 1$;
расходимость: $\alpha < 1, \beta \in \mathbb{R}$; или $\alpha = 1, \beta \leq 1$;
- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^\alpha x^\beta}$ сходимость: $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$; или $\alpha = 0, \beta > 1$;
расходимость: $\alpha < 0, \beta \in \mathbb{R}$; или $\alpha = 0, \beta \leq 1$.

Исследование на равномерную сходимость интегралов от параметра $\int_a^{b^*} f(x; \alpha) dx$
(!?!?!?)

(??? потом строчка про указание доказательств добавлю!!!)

Определения и критерии сходимостей

Определение поточечной сходимости. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x; \alpha) dx$ с особенностью в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ поточечно сходится на множестве E , если

$$\forall \alpha \in E \forall \varepsilon > 0 \exists t_\alpha \in (a; b) \forall \xi \in [t_\alpha; b) \mapsto \left| \int_\xi^b f(x; \alpha) dx \right| < \varepsilon$$

Определение равномерной сходимости. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x; \alpha) dx$ с особенностью в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется равномерно сходящимся на множестве E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t \in (a; b) \forall \xi \in [t; b) \forall \alpha \in E \mapsto \left| \int_\xi^b f(x; \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

Замечание. Обозначим $F(\alpha) = \int_a^b f(x; \alpha) dx$ и $F(\xi; \alpha) = \int_a^\xi f(x; \alpha) dx$ - функцию, заданную, как интеграл с переменным верхним пределом. Тогда определение поточечной сходимости интеграла при $\alpha \in E$ эквивалентно условию

$$\forall \alpha \in E \quad \exists \lim_{\xi \rightarrow b} F(\xi; \alpha) = F(\alpha)$$

Равномерная сходимость интеграла по параметру $\alpha \in E$ эквивалентна условию

$$F(\xi; \alpha) \rightrightarrows F(\alpha) \quad \xi \rightarrow b.$$

Определение равномерной сходимости (?? еще одно??). Несобственный интеграл сходится неравномерно на множестве E , если - он сходится при любом $\alpha \in E$, - но не сходится равномерно, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \forall t \in (a; b) \exists \xi \in [t; b) \exists \alpha \in E \mapsto \left| \int_\xi^b f(x; \alpha) dx \right| \geq \varepsilon$$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла от параметра.

Пусть на множестве $[a; b) \times E$ определена функция $f(x; \alpha)$, такая что при любом $\alpha \in E$ сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x; \alpha) dx$ с особенностью в точке b .

Пусть $\exists g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \forall x \in [a; b) \forall \alpha \in E \mapsto |f(x; \alpha)| \leq g(x)$ и интеграл $\int_a^b g(x) dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x; \alpha) dx$ сходится равномерно на E . Замечание об использовании признака Вейерштрасса: При использовании теоремы Вейерштрасса необходимо предъявить функцию $g(x)$, равномерно ограничивающую функцию $f(x; \alpha)$ на множестве E , то есть оценку модуля подынтегральной функции функцией, независимой от α со сходящимся интегралом.

Признак Дирихле равномерной сходимости интеграла от параметра.

Достаточное условие равномерной сходимости интеграла вида $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$.

Пусть на множестве $[a; +\infty) \times E$ заданы функции $f(x; \alpha)$ и $g(x; \alpha)$, такие что при любом фиксированном $\alpha \in E$: $f(x; \alpha)$ непрерывна на луче $[a; +\infty)$; $g(x; \alpha)$ непрерывно дифференцируема по x на луче $[a; +\infty)$. Пусть 1) первообразная $F(t; \alpha) = \int_a^t f(x; \alpha) dx$ равномерно по α ограничена на луче $[a; +\infty)$:

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall t \in [a; +\infty) \forall \alpha \in E \mapsto |F(t; \alpha)| \leq C;$$

2) при любом $\alpha \in E$ функция $g(x; \alpha)$ является невозрастающей относительно x , начиная с некоторого x_0 , не зависящего от α :

$$\exists x_0 \in [a; +\infty) : \forall x \in [x_0; +\infty) \forall \alpha \in E \mapsto g'_x(x; \alpha) \leq 0;$$

3) при $x \rightarrow +\infty$ функция $g(x; \alpha)$ стремится к нулю равномерно по $\alpha \in E$:

$$\sup_{\alpha \in E} |g(x; \alpha)| \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x; \alpha)g(x; \alpha)dx$ сходится равномерно на множестве E .

Замечания об использовании признака Дирихле и признака Вейерштрасса:

1. Признак Дирихле целесообразно применять только, если нет возможности применить признак Вейерштрасса, проверка условий которого значительно проще. Например, для подынтегральной функции $h_1(x; \alpha) = \frac{\alpha \sin \alpha x}{x}$ применяем признак Дирихле ($E = \mathbb{R}$), а для подынтегральной функции $h_2(x; \alpha) = \frac{\sin \alpha x}{x^2}$ признак Вейерштрасса ($E = \mathbb{R}$).

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов влечет также абсолютную сходимость интеграла. Поэтому он не может быть применен, если интеграл сходится условно. В этом случае целесообразно проверить применимость признака Дирихле.

3. При проверке равномерной ограниченности первообразной целесообразно использовать запись первообразной через интеграл с переменным верхним пределом $F(t; \alpha) = \int_a^t f(x; \alpha) dx$, так как эта запись явно показывает проверяемое условие.

4. Доказательство монотонности функции $g(x; \alpha)$ осуществляется исследованием знака производной по x при фиксированном α .

5. Доказательство равномерной сходимости, если функция $g(x; \alpha)$ явно зависит от α часто осуществляется достаточным условием равномерной сходимости, то есть построением мажорирующей модуль $g(x, \alpha)$ бесконечно малой функции:

$\exists h(x) \forall x \in (a, +\infty) \forall \alpha \in E \mapsto |g(x, \alpha)| \leq h(x), h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Доказательство неравномерной сходимости включает: - доказательство поточечной сходимости;

- проверку отрицания условия (определения) равномерной сходимости или отрицания условия Коши).

Критерий Коши равномерной сходимости интеграла от параметра.

Пусть на множестве $[a; b) \times E$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) определена функция $f(x; \alpha)$, такая что при любом $\alpha \in E$ сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x; \alpha) dx$ с особенностью в точке b . Тогда, для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x; \alpha) dx$ сходилась равномерно на множестве E , необходимо и достаточно выполнения условия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t \in [a; b) : \forall \xi_1, \xi_2 \in [t; b) \forall \alpha \in E \mapsto \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x; \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

Замечание. Критерий Коши удобно использовать для доказательства того, что интеграл не сходится равномерно. Для этого достаточно проверить отрицание условия Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall t \in [a; b) : \exists \xi_1, \xi_2 \in [t; b) \exists \alpha_0 \in E : \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x; \alpha_0) dx \right| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим задачи на доказательство равномерной и неравномерной сходимости несобственных интегралов. В некоторых задачах мы приводим рассуждения, показывающие поиск решения. Эти рассуждения обычно не включаются в оформление решения задачи, поэтому в конце таких решений показано оформление решений.

О доказательстве отсутствия равномерной сходимости (!?!??)

(??? там мб что-то для данного фиксированного дельта можно найти такие параметры, что оно больше эпсилон (!?!?!? отработаю еще))

Когда можно данным образом преобразовывать интеграл, а когда нет?

Когда можно интеграл представить в виде суммы двух (!?!?!)

(там теорема есть про это, напишу сюда ее!!! забыл пока что нюансы!!)

Анализ с помощью программирования

Разные интегралы вместе на одном графике в вольфраме (!!!!)

(напишу, часто в этом есть необходимость.)

1.3 Basic Analysis of Functions

1.3.1 Derivatives

(по идее на почти все случаи жизни этого раздела должно хватить??)

Производные от элементарных функций

От функции в степени:

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

От логарифма: (???)

Алгоритм взятия производных (!!!!!)

(потом потренируюсь на задачах)

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} u'$$

(ниже док-во компактно сделаю потом)

Пусть $y = u^v$; тогда $\ln y = v \ln u$, $y'/y = v' \ln u + v u'/u$, откуда получаем формулу (10).

Согласно формуле (10) производная функции u^v равна сумме двух слагаемых: первое слагаемое - производная показательной функции $a^{v(x)}$ ($a = \text{const}$), второе слагаемое - производная степенной функции $(u(x))^b$ ($b = \text{const}$). Формулу (10) можно записать в виде

$$(u^v)' = u^v \left(\ln u \cdot v' + \frac{v}{u} \cdot u' \right)$$

О производных высших порядков

(потом потренируюсь на задачах)

$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin(\alpha x + (\pi n)/2);$$

$$(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos(\alpha x + (\pi n)/2);$$

$$((ax + b)^\alpha)^{(n)} = a^n \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)(ax + b)^{\alpha - n};$$

$$(\log_a |a|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n \ln a},$$

$$(\ln |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}.$$

5) Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные порядка n , то функции $\alpha u(x) + \beta v(x)$, где α и β - постоянные, и $u(x)v(x)$ также имеют производные порядка n , причем

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

Последняя формула называется формулой Лейбница.

О приложении производной к типичным задачам геометрии (!!!)

(их мб много будет.)

1.3.2 Limits

Типичные табличные пределы

Вычисление пределов во многих случаях производится с помощью двух важных формул:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Имеются следствия:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0.$$

В частности, при $a = e$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Также:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ таковы, что $\alpha(x) \neq 0$ и $\beta(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$, а также $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{1/\beta(x)} = e^A.$$

Воспользуемся равенством

$$f(x) = (1 + \alpha(x))^{1/\beta(x)} = e^{\alpha(x)/\beta(x) \ln(1+\alpha(x))/\alpha(x)}.$$

Способы поиска предела

(потом четче укажу, какой метод когда нужен!)

Простейшие методы для пределов

Просто попробовать заменить какие-то функции, сократить что-то.
(потом четче напишу)

Пределы с помощью правила Лопиталя

Чаще всего предел берется через правило Лопиталя, то есть просто берем производную числителя и знаменателя. Так что по сути нужно знать только формулы для пределов функций.

Применяя правило Лопиталя, часто бывает выгодно предварительно использовать асимптотические равенства вида

$$\sin \alpha \sim \operatorname{tg} \alpha \sim e^\alpha - 1 \sim \ln(1 + \alpha) \sim \operatorname{sh} \alpha \sim \operatorname{tg} \alpha \sim \operatorname{arctg} \alpha \sim \arcsin \alpha \sim \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$.

Иногда при вычислении пределов правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$ может преобразоваться к виду $\frac{\infty}{\infty}$, и дальше по Лопиталю возьмется.

Неопределенность вида $\infty - \infty$ может преобразоваться к виду $\frac{0}{0}$, используя асимптотическую формулу функций в ней. (?? отработаю!)

Однако, часто преобразования могут упростить выражения, так что не нужно считать порой большие производные.

(?? укажу потом детали этого правила, пока вроде нет вопросов)

(абзац про суть вывода, что там теорему Ферма используем и все)

Пределы с помощью Разложение в ряд Тейлора (!?!?)

Если имеется функция из многих элементарных, то предел находится с помощью разложения в ряд Тейлора ее частей в окрестности предельной точки.

Просто вспоминаем разложения элементарных в ряд Тейлора, подставляем в первом порядке их.

Тут важно просто не ошибаться и нормально раскладывать в ряд Тейлора.

Далее подставляем нужные разложения

Предел функции вида $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Пусть $f(x) = ax^n + o(x^n)$ и $g(x) = bx^n + o(x^n)$, $x \rightarrow 0, b \neq 0$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^n + o(x^n)}{bx^n + o(x^n)} = \frac{a}{b}$.

В данном разделе во всех примерах мы используем обозначение $f(x)$ для числителя дроби и $g(x)$ для знаменателя.

Предел функции вида $(f(x))^{\frac{1}{g(x)}}$.

Пусть $f(x) = 1 + ax^n + o(x^n)$, $x \rightarrow 0, a \neq 0$ и $g(x) = bx^n + o(x^n)$, $x \rightarrow 0, b \neq 0$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax^n + o(x^n))^{\frac{1}{(bx^n + o(x^n))}} = e^{\frac{a}{b}}$.

Вообще, если большая какая-то функция, то это может быть типичная задача, которая решается разложением в Тейлора, просто нужно подставить разложение.

Пределы с помощью домножения, убирающее неопределенности

Если хочется решать более простыми методами, то можно домножить выражение на что-то, чтобы неопределенность ушла. Именно такие способы решения в примерах представлены.

Если имеется предел $\infty - \infty$, то нужно преобразовывать выражение! Например, домножить и разделить на сумму слагаемых, чтобы формулой суммы квадратов преобразовать. Далее делим на наибольшую степень переменной и приходим к ответу.

Пределы с помощью Введение функции как новой переменной

Хотя вроде как другие методы тоже работать должны, однако с таким способом можно не пользоваться правилом Лопиталя. В одной задаче по тригонометрии это было ключевым, так что иметь следует в виду, что так можно!!!

Пределы с помощью определения предела (??)

тогда оцениваем функцию в окрестности предела, находим эпсилон.

(пока на практике такой метод не использовал, потом подумаю.)

Пределы с помощью сведения к первому замечательному пределу

Если имеем тригонометрию, то скорее всего задача сведется к первому замечательному пределу.

Пределы с помощью сведения к второму замечательному пределу (!!!!)

Если имеем логарифмы или степени, то скорее всего второй замечательный предел поможет.

(!!! тут потренироваться нужно!!)

(вроде много типичных задач на такой переход!!!! проработаю потом!)

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ таковы, что $\alpha(x) \neq 0$ и $\beta(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$, а также $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$. тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{1/\beta(x)} = e^A.$$

Пределы от рекуррентных последовательностях (??)

(в кр мфти за 1996-7 года такие есть, я хз, как решать их пока что)
пропишу, уже понял)

Теоремы о свойствах пределов

Теорема о пределе сложной функции:

Если существуют $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, $\lim_{y \rightarrow a} f(y)$, причем в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется условие $\varphi(x) \neq a$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ имеет предел в точке x_0 и справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow a} f(y).$$

В случае непрерывности функции $f(y)$ в точке a равенство выше можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right).$$

Теорема о двух милиционерах: Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняются неравенства $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, и если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Теорема о пределе суммы и произведения

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab.$$

Теорема о пределе частного

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, где $b \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

1.3.3 Approximation of functions

(Тут указание на приближенные методы аналитических вычислений и на вычматы, важный раздел вообще, займусь потом)

типы приближений

равномерно, в среднем и среднеквадратичном

О полных системах

(у балашова написано хорошо это)

Приближение интегрируемых функций в среднем

глава по идее из теории лебега, так по крайней мере у карасева, а как это делается - вообще я хз.

какие-то тут методы приближения на пару страниц наработаны все-так, так что в принципе есть, чем заняться.

мб это даже очень важно.

Разложение в ряды для поиска приближенного значения

Типичное занятие - раскладывать в ряд, чтобы находить приближенное значение. По сути тут обычная теория рядов Тейлора, разве что нужен нормальный прикладной опыт.

Так что соберем эту тут теорию.

(в физике мб каждый день это использоваться будет)

4.7. Приближение кусочно линейными функциями и многочленами

4.8. Приближение тригонометрическими многочленами и общая теорема Стоуна–Вейерштрасса

1.3.4 Extremums

(when I need it, I' write it)

1.3.5 General properties of $f(x)$

(theorems, all this useless theory from the university)

О непрерывности функций

(скучно, мало что важного, просто утверждения соберу и все)

5. Непрерывность функции в точке.

Свойства непрерывных функций.

Односторонняя непрерывность.

Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

Непрерывность сложной функции.

Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

О дифференцируемости

О построении графиков функций и их анализе (!?!)

(одного параграфа на все эти задачи скорее всего хватит)

Об исследовании функции на интегрируемость (!?!?)

(тоже могут быть про это задачи)

Алгоритм нахождения максимума функции**Основные методы исследования на непрерывность**

(пропишу, когда буду задачи решать)

Основные методы исследования на равномерную непрерывность

(пропишу, когда буду задачи решать)

О применениях равномерной непрерывности (???)

(пока этот вопрос остается, мб занесу его в часть про теорию.)

1.4 Series and Sums**1.4.1 Main table series****Main Tailor series**

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}, \quad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3).$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \quad x \in (-1; 1]$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \quad x \in (-1; 1]$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad |x| < \infty,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty,$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{2x^7}{4725} + \dots \right), \quad |x| < \pi$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$$

Main Laurent series

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$$

for $|z| < |a|$

Типичные бесконечные суммы

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \ln 2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Typical finite series

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{i=1}^n i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Main series for physics

(см. пока конд среды, потом из них выпишу это)

Sums from condensed matter

$$\tanh(z) = 8z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(2k-1)^2 + 4z^2} /; \frac{iz}{\pi} - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Sums from electrodynamics

$$\sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2} = \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{\pi^2}{6}, \quad x \in [0, 2\pi).$$

Sums from statistical physics

(потом выпишу, в статфизе про них и рассказывают)

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n,p) \neq 0} \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \\ C = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k}\right)^2 \frac{1}{(k+1)^3}\end{aligned}$$

Other famous series for mathematics

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Для $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

(? строчка, откуда это?)

Sums from number theory

The Bailey-Borwein-Plouffe formula (BBP formula, 1995):

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \right]$$

1.4.2 Summation methods

(задач пр это много.)

О суммах тригонометрических рядов

Можно через ядро Дирихле попробовать (???)

Метод почленного дифференцирования (!!?)

(напишу потом)

Суммирование формулой Пуассона

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

where $\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s t} f(t) dt$

Суммирование рядов Фурье

Способ суммирование ряда Фурье

Суммирование по Дирихле:

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (\text{ядро Дирихле})$$

Сумма является сверткой с ядром Дирихле:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt$$

Суммирование по Фейеру: (?????)

Для любой 2π периодической непрерывной функции f последовательность сумм Фейера имеет вид

$$\sigma_{n+1}(f, x) = \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \cdots + S_n(f, x)}{n+1}$$

то есть сумм частичных сумм ряда Фурье в точке x равномерно сходится.
(место для доказательства этого)

Оказывается, это выполняется и для абсолютно интегрируемых функций.

$$\|f - \sigma_n(f)\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_{n+1}(f, x)| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

(??? док-во???)

О геометрических методов вычисления сумм ряда (???)

(там тоже крутые прикольные конструкции, сопоставить ряду площадь фигуры, гениально ведь! Пропишу потом указание на них.)

Other useful methods of summation

Summation by like-fourier formula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \sin(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right).$$

then one can set here $f(x) = \cosh(x)$.

(??? why does it work???)

1.4.3 Decompositions into series

Разложение функции одной переменной в ряд Тейлора

Разложение в ряд упрощением, приведением ее к сумме тех, разложение которых известно

Простейшие задачи так и решаются.

Под рукой должны быть шаблоны с типичными разложениями, потому что к ним и сводятся задачи.

Часто эти шаблонные разложения делаются с простейшими модификациями.

Также если нужно разложить в окрестности не нуля, то отдельный шаг - переход к новой переменной. Важно уделить этому шагу внимание и аккуратно заменить переменную.

Разложение в ряд через интегрирование ряда производной

Так работает, если нужно найти разложение от логарифма или арктангенса от сложной функции.

Разложение функции одной переменной into Laurent series

(см. комплан пока что)

1.4.4 Theorems and properties of series

(тут многое - пока просто параграфы, а там посмотрим, вообще, маловероятно, что буду их уменьшать или увеличивать.)

Теоремы о ряде Тейлора (?!?!?)

Ряд тейлора в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Ряд тейлора в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n$$

Формула Тейлора для функции двух переменных:

Формула Тейлора для функции трех переменных:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & f_0 + x \frac{\partial f_0}{\partial x} + y \frac{\partial f_0}{\partial y} + z \frac{\partial f_0}{\partial z} + \\ & + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + xy \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} + xz \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial z} + yz \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial z} + R_2(x, y, z), \end{aligned}$$

то есть просто в каждом порядке комбинации всех производных.

Формула Тейлора многих переменных:

Критерии разложимости функции в ряд тейлора:

Theorems about Laurent series

(see note on compl an for now)

Суммирование абсолютно сходящихся рядов**Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов****Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ и радиус сходимости**

Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости: Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

Формула Даламбера для радиуса сходимости:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

если предел существует.

Теоремы и контрпримеры о ряде Тейлора (???)

Бесконечно дифференцируемая функция не раскладывается в ряд Тейлора, который сходится к значению функции в данной точке:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

(тут вкратце пруф) $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} P_n(1/x)e^{-1/x^2} = 0$ (это в контрпримерах в теории пишу, потом сюда лучше укажу чуть.)

1.4.5 Analysis of Series

(задач пр это много.)

Признаки сходимости числовых рядов

(тоже важная тема)

признак Дирихле

и вывод его!!!

Липшица**Абеля****интересные примеры**

после решения многих задач я нашел следующие интересные примеры:

..

Признаки равномерной сходимости

Признак Дирихле равномерной сходимости ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ имеет равномерно ограниченные частичные суммы, а последовательность $(g_n(x))$ монотонна по n и равномерно по $x \in X$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$$

тоже равномерно сходится.

Тут все функции считаем определёнными на X .

Способы определения радиуса сходимости

По формуле Коши-Адамара

Формула расстояния от минимального полюса (???)

(еще не тренировал)

При вычислении радиуса сходимости R степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = f(z)$ часто применяется формула

$$R = \min |z_k - a|,$$

где минимум берется по всем особым точкам z_k функции комплексного переменного $f(z)$.

Критерий сходимости ряда

Критерий равномерной сходимости ряда

Элементарные свойства рядов

Лемма 1. Сумма ряда из чисел одного знака не меняется при перестановке её элементов.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

Теорема Фубини для рядов

Пусть сумма $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$, индексированная счетным множеством $N \times N$, сходится абсолютно. Тогда

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \right)$$

Если все числа a_{nm} неотрицательны то равенство выполняется даже тогда, когда левая и правая часть равны $+\infty$, при этом считаем, что если мы суммируем неотрицательные числа и среди них встретилась $+\infty$, то общая сумма равна $+\infty$.

Перемножение абсолютно сходящихся рядов

Если суммы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{s=2}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{s-1} a_n b_{s-n} \right)$$

(укажу потом док-во)

О равномерной сходимости

Что такое равномерная сходимость и зачем она? (!??)

(когда-то потом четко напишу.)

Некоторые контрпримеры про ряды (!??)

(тоже интересно.)

Условная сходимость рядов, признаки Абеля и Дирихле

1.4.6 Fourier Series

Алгоритм разложения функции одной переменной в ряд Фурье

(куча задач на это)

О сходимости ряда Фурье

(!?!?!? наreshиваю про это скоро задачи!!!!)

Признаку Дирихле сходимости ряда Фурье.

Если абсолютно интегрируемая 2π -периодическая функция непрерывна в точке x и имеет **ограниченную вариацию в окрестности x** , то её ряд Фурье сходится к её значению в x .

Применяется признак Дирихле при (?????)

Признак Липшица сходимости ряда Фурье.

Если абсолютно интегрируемая 2π -периодическая функция f удовлетворяет **условию Гёльдера в точке x** : $|f(x+t) - f(x)| \leq C|t|^\alpha$ для достаточно малых t и фиксированных положительных C и α , то её ряд Фурье сходится к её значению в x .

Применяется признак Липшица при (?????)

Признак Дини сходимости ряда Фурье.

Если интеграл $\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt$ **сходится**, то и ряда Фурье сходится к значению функции в точке x ,

Применяется признак Дини при (?????)

О следствиях разложения в ряд Фурье (!?!?!?)

(????? укажу идею доказательства этих свойств, пока не понимаю это.)

(?? на каком отрезке это верно? от минус пи до пи??)

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right).$$

Разложите функцию $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$, в ряд Фурье. (????)

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} x &= \text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \pi k} \\ \frac{1}{\sin x} &= \text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k} \\ \sin x &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right),\end{aligned}$$

где $\text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n a_k$.

(решу задачу эту ниже - пропишу, почему так мы делаем??!!!)

О свойствах рядов Фурье

Об интегрировании и дифференцировании рядов Фурье

Определение, когда ряд это ряд Фурье (!!?)

расходимость ряда Фурье

(не очень зашарил я это)

Для сходимости ряда Фурье функции в точке к значению функции фигурирует условие, более сильное, чем непрерывность.

То есть, существуют непрерывные функции, у которых ряд Фурье не сходится к значению этой функции в данной точке.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

где $b_k \geq 0$, и ряд..

сходится.

По признаку Вейерштрасса функция f непрерывна продолжим f нечетным образом на отрезок $[-\pi; 0]$, построенная таким образом функция непрерывна на $[-\pi; \pi]$, и может быть периодически продолжена на $\mathbb{R}$.

n -я частичная сумма ряда Фурье через ядро Дирихле:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt$$

Таким образом что для построенной нами функции f в нуле:

$$S_n(f, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) D_n(t) dt$$

Чтобы посчитать эту сумму, рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(t) D_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt D_n(t)$$

Положим

$$\beta_{k,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b_k \sin kt D_n(t) dt$$

Подынтегральное выражение с помощью вида ядра Дирихле через суммы можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} & 2 \sin kt D_n(t) \\ &= \sin kt + \sum_{m=1}^n 2 \sin kt \cos mt = \\ &= \sin kt + \sum_{m=1}^n (\sin(k+m)t + \sin(k-m)t) \end{aligned}$$

В итоге при $k > n$ мы имеем сумму синусов

При $k \leq n$ также имеем сумму синусов, потому что

$$\begin{aligned} & \sin kt + \sum_{m=1}^n (\sin(k+m)t + \sin(k-m)t) \\ &= \sin kt + \sum_{m=k+1}^{n+k} \sin mt + \\ &+ \sum_{m=1}^k \sin(k-m)t + \sum_{m=k+1}^n \sin(m-k)t = \\ &= \sum_{m=k}^{n+k} \sin mt + \sum_{m=1}^{n-1} \sin mt - \sum_{m=1}^{n-k} \sin mt = \\ &= \sum_{m=k+1}^{n+k} \sin mt \end{aligned}$$

Далее заметим еще, что когда мы будем каждый член этой суммы интегрировать, то будет в итоге положительная величина.

Действительно:

$$\int_0^{\pi} \sin mt dt = - \frac{\cos mt}{m} \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^m}{m} \geq 0$$

Поэтому

$$S_n(f, 0) \geq \beta_{n,n} = \frac{2}{\pi} b_n \int_0^{\pi} \sin nt D_n(t) dt$$

В итоге можно получить оценку:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} 2 \sin nt D_n(t) dt = \int_0^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{2n} \sin mt \right) dt = \\ &= \sum_{m=1}^{2n} \frac{1 - (-1)^m}{m} = \sum_{m=1}^n \frac{2}{2m-1} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m-\frac{1}{2}} \geq \\ &\geq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_n(f, 0) \geq \frac{b_n}{\pi} \ln n$$

Осталось уточнить последовательность b_n , чтобы в итоге была расходимость.
(?????)

Уточним теперь выбор последовательности b_n : при $n = 2^{m^3}$ определим $b_n = \frac{1}{m^2}$, а при $n \neq 2^{m^3}$ положим $b_n = 0$ Тогда при $n = 2^{m^3}$ имеем

$$S_n(f, 0) \geq \frac{1}{\pi} \frac{1}{m^2} \ln 2^{m^3} = \frac{\ln 2}{\pi} m$$

Таким образом

$$S_{2^m}^3(f, 0) \rightarrow +\infty, \quad m \rightarrow \infty$$

О том, как не нужно суммировать ряд Фурье

когда ряд является рядом Фурье своей суммы

(пара слов про важность этого занятия (???))

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Пусть последовательность b_k монотонно убывает к нулю (и тем самым $b_k \geq 0$ при всех k), а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ сходится.

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \right) \sin mx dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \sin mx dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=1, k \neq m}^{\infty} b_k \frac{\sin(k-m)x}{k-m} \right) \Big|_{\delta}^{\pi} + b_m(\pi - \delta) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sin(k+m)x}{k+m} \Big|_{\delta}^{\pi} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \left(- \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sin(k-m)\delta}{k-m} + b_m(\pi - \delta) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sin(k+m)\delta}{k+m} \right) \end{aligned}$$

(тут пара примеров)

теорема римана об осцилляции

и равномерной осцилляции

О порядке убывания коэффициентов Фурье (!!???)

(хз, но есть на это задачи.)

1.5 Other Typical Problems of Calculus

1.5.1 Coordinate Systems, Mappings

Spherical coordinate system

The desired coefficients are the magnitudes of these vectors: [5]

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = r, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \theta$$

The surface element spanning from θ to $\theta + d\theta$ and φ to $\varphi + d\varphi$ on a spherical surface at (constant) radius r is then

$$dS_r = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi = |r\hat{\boldsymbol{\theta}} \times r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}| d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Thus the differential solid angle is

$$d\Omega = \frac{dS_r}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$$

The surface element in a surface of polar angle θ constant (a cone with vertex at the origin) is

$$dS_\theta = r \sin \theta d\varphi dr$$

The surface element in a surface of azimuth φ constant (a vertical half-plane) is

$$dS_\varphi = r dr d\theta$$

The volume element spanning from r to $r + dr$, θ to $\theta + d\theta$, and φ to $\varphi + d\varphi$ is specified by the determinant of the Jacobian matrix of partial derivatives,

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

namely

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = r^2 dr d\Omega$$

Thus, for example, a function $f(r, \theta, \varphi)$ can be integrated over every point in $\mathbf{R}^3$ by the triple integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Polar coordinate system

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{d}{dy} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

The line element is

$$d\mathbf{r} = d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz \hat{\mathbf{z}}.$$

The volume element is

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

The surface element in a surface of constant radius ρ (a vertical cylinder) is

$$dS_\rho = \rho d\varphi dz.$$

The surface element in a surface of constant azimuth φ (a vertical half-plane) is

$$dS_\varphi = d\rho \, dz$$

The surface element in a surface of constant height z (a horizontal plane) is

$$dS_z = \rho d\rho \, d\varphi$$

The del operator in this system leads to the following expressions for gradient, divergence, curl and Laplacian:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Cylindrical coordinate system

1.5.2 rot, grad, div, ∇

О векторных операциях $\div$, grad, rot(!??!)

(пока по идее тут про то, как там брать роер, дивергенцию, на это есть задачи и часто не нужно знать ничего особого, чтобы их решать.)

О диес, бимоле

Риманова или полуриманова структура позволяет преобразовать вектор в дифф форму 1 степени:

$$X^b(Y) = g(X, Y), \forall Y.$$

Обратно, из формы 1 степени можно сделать вектор так:

$$g(\alpha^\sharp, Y) = \alpha(Y), \forall Y.$$

7.12. О звёздочке Ходжа

Определение 7.115. В присутствии (полу)римановой структуры g на ориентированном многообразии M^n (чтобы vol_g можно было считать элементом $\Omega^n(M)$) для любой формы $\beta \in \Omega^k(M)$ формула

$$\alpha \wedge * \beta = \tilde{g}(\alpha, \beta) \text{vol}_g, \forall \alpha \in \Omega^k(M),$$

определяет форму $*\beta \in \Omega^{n-k}(M)$ и определяет линейное преобразование $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$, звёздочку Ходжа.

Точнее можно сказать, что $*$ определяется как композиция изоморфизмов в каждой точке

$$\Omega_p^k(M) \longrightarrow (\Omega_p^k(M))^* \longrightarrow \Omega_p^{n-k}(M),$$

в которой первый возникает из невырожденного спаривания $\tilde{g}$ между формами степени k , а второй - из спаривания, заданного внешним умножением с делением на vol_g .

7.12. построение градиента, ротора, дивергенции**7.13. О Ковариантной производной (!!???)****1.5.3 Surface and Volume Integrals**

(задачи для них есть разные тоже, раздел для них!)

Вычисление интегралов от векторов с учетом симметрии по Мэтьюзу и Уокеру (?!!!)

Для

$$I_1(\mathbf{k}) = \int \frac{d\Omega}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \frac{1}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}},$$

где $\hat{\mathbf{r}}$ - единичный радиус-вектор и (θ, φ) - обычные сферические угловые координаты: $\hat{\mathbf{r}}_x = \sin \theta \cos \varphi$, $\hat{\mathbf{r}}_y = \sin \theta \sin \varphi$, $\hat{\mathbf{r}}_z = \cos \theta$.

(тут крутые методы, допишу потом суть это?!!)

Ориентация координат произвольна, то можно выбрать ось z вдоль $\mathbf{k}$ и получить (предполагая $k < 1$)

$$I_1(\mathbf{k}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos \theta)}{1 + k \cos \theta} = \frac{2\pi}{k} \ln \frac{1+k}{1-k}.$$

Интегралы

$$I_m(\mathbf{k}) = \int d\Omega / (1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^m$$

можно вычислить посредством дифференцирования I_1 (для этого следует заменить в знаменателе 1 на α , продифференцировать по α и положить α равным снова 1). Например,

$$I_2(\mathbf{k}) = \int d\Omega / (1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2 = 4\pi / (1 - k^2).$$

Другой пример:

$$I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \int \mathbf{a}\hat{\mathbf{r}} d\Omega / (1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}).$$

Этот интеграл сложнее по той причине, что два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{k}$ задают два направления, и поэтому нельзя выбрать полярную ось вдоль обоих направлений. Однако направление $\mathbf{a}$ тривиально в том смысле, что его можно «выделить». Рассмотрим интеграл

Ясно, что $I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}\mathbf{J}$. Вектор $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ должен быть направлен вдоль $\mathbf{k}$, так как нет другого выделенного направления. Следовательно,

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = A\mathbf{k}.$$

Чтобы вычислить скаляр A , умножим на $\mathbf{k}$ обе части (3.22). Получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k^2} \mathbf{k}\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}} d\Omega = \\ &= \frac{1}{k^2} \int d\Omega \left(1 - \frac{1}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}} \right) = \frac{4\pi}{k^2} \left(1 - \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = A\mathbf{a}\mathbf{k} = \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{a}\mathbf{k} \left[1 - \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right].$$

(про другие просто словами напишу, в теории обязательно раздел про это!)

Объёмы шаров

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \mu B_n \cdot \Gamma(n/2 + 1),$$

где единичный шар $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$, и $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$. Это потому что (??? не понял док-во???)

1.5.4 Properties of Operators and Generalized Functions

(задачи функана элементарные, как их решать вообще??? укажу тут.)

О норме линейного функционала и линейного оператора

1.5.5 Inequalities

(I'll write it while I'll be solving problems about them)

Об элементарных неравенствах

(сяду когда-то, за 4 часа и научусь им, просто подумать про задачи нужно и написать параграф.)

О неравенствах Юнга, Гельдера и Минковского

Неравенство Юнга. Для любых чисел $a, b \geq 0$ и чисел $p, q > 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ верно

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (\text{неравенство Юнга}).$$

Доказывается через рассмотрение выпуклой вверх $f(x) = \ln x$ на множестве $(0, +\infty)$, откуда $\lambda \ln x_1 + (1 - \lambda) \ln x_2 \leq \ln(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \forall x_1, x_2 > 0$. Подставляя $\lambda = \frac{1}{p}$, $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, где $1 - \lambda = \frac{1}{q}$, получаем ответ.

(абзац про применения нер Юнга!!!)

Неравенство Гельдера. Пусть X - измеримое множество в $\mathbb{R}^n$; числа $p, q > 1$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; измеримые функции $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ и $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ таковы, что $\int_X |f(x)|^p dx < +\infty$ и $\int_X |g(x)|^q dx < +\infty$, тогда

$$\int_X |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (\text{неравенство Гельдера}).$$

Тут измеримость $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ - значит, что $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$ измеримы. Доказывается... (напишу потом)

(абзац про применения нер Гельдера!!)

О неравенствах с суммами (???)

(такие могут тоже встретиться.)

Методы решения неравенств с логарифмами (???????)

Самое важное это отслеживать каждый шаг и не обсчитываться!

Начинаем с ОДЗ!!! Важно отдельно обратить внимание, что основание логарифма не должно быть равно 1. Скорее всего это в процессе решения вылезет, тем не менее, правильнее вначале это указать, чтобы не забывать.

Основное рассуждение в том, что:

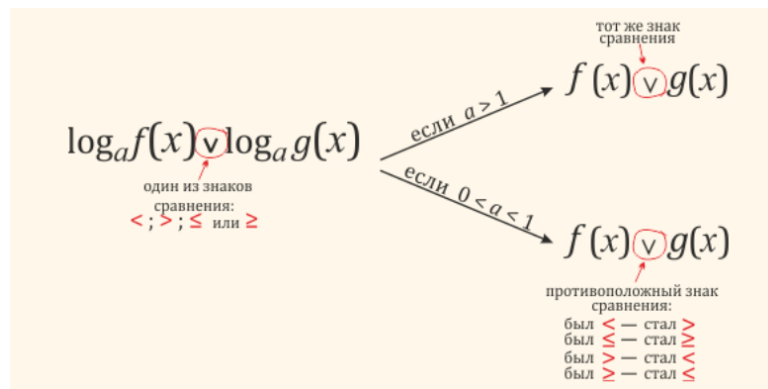
$$(\log_a u(x) - \log_a v(x)) p(x) \leq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} (u(x) - v(x))p(x) \leq 0, \\ u(x) > 0, \\ v(x) > 0. \end{cases}$$

Из этого следует типичная формула на большинство задач:

$$\begin{aligned} \log_{h(x)} f(x) < b &\Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x)}{\log_2 h(x)} - b < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x) - b \log_2 h(x)}{\log_2 h(x)} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x) - \log_2 h^b(x)}{\log_2 h(x) - \log_2 1} < 0. \end{aligned}$$

Очень часто у нас сумма логарифмов в одном из которых в основании функция, которая в аргументе второго. Тогда просто делаешь замену и решаешь скорее всего квадратное уравнение, никаких проблем.

Если мы сравниваем логарифмы, то просто делаем это в зависимости от основания очевидным образом, помня графики логарифмов:



О других неравенствах

(указание на сложыне тут)

1.6 Selected Important Constructions for Applications

1.6.1 Divergent Integrals and Regularization

(I'll study QFT better and write here what is it)

Part II

Details of Basics and Other Useful Theorems in a Nutshell

2 Functions, Integrals, Sums

2.1 general properties of sets, mappings, functions

2.1.1 algebraic properties of numbers

4.1. О комплексных числах и многочленах

(мб расширю, в алгебре про это больше. пока тут раздел будет, потом когда-то напишу)

О кватернионах, гамма-матрицах

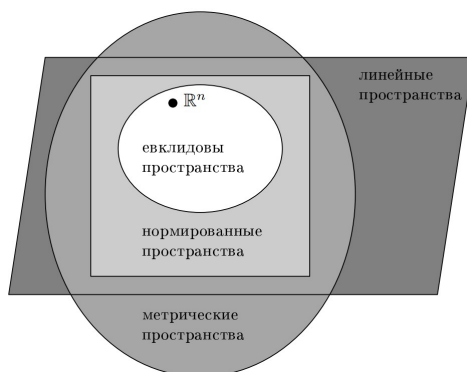
$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (p_1c)^2 + (p_2c)^2 + (p_3c)^2}$$

$$= \gamma_0 mc^2 + \gamma_1 cp_1 + \gamma_2 cp_2 + \gamma_3 cp_3$$

(по идее на прикладном уровне указания тут будут, чтобы не было вопросов, почему именно так все работает. в теорфизе как раз такое понимание полезно.)

2.1.2 sets, compactness, topology, curves

Обзор множеств и их особенностей



Любое нормированное - метрическое и линейное.

(А вот контрпримеры - тут приведу когда-то, пока еще чуть не до них)

Об открытости и замкнутости

(суть этого)

О компактности (!!!!)

Суть компактности

(определение тут!)

Вообще, все связано с топологией (что считать открытым), можно что-то там накрутить, чтобы было все иначе.

(абзац примеров) R не компактно, потому что не ограниченное.

(абзац про Гейне-Бореля, вроде абзаца на суть ее должно хватить.)

Теорема Тихонова: произведение произвольного (необязательно конечного) множества компактных множеств (с топологией произведения) компактно.

О предкомпактности (???)

Предкомпактность - когда замыкание компактно.

О секвенциальной компактности (???)

(тоже есть такое и я не шарю.)

Секвенциально компактное пространство - пространство, в котором из любой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Из секвенциальной компактности метрического пространства X следует его компактность.

О полноте (??)

Полное метрическое пространство - пространство, в котором любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Если в метрическом пространстве M все замкнутые шары компактны, то M — полное.

О топологии

О базе и обобщениях (!!!)

Семейство $\mathfrak{B}$ открытых множеств топологического пространства X называется базой топологии (или топологического пространства), если любое открытое множество из X представимо в виде объединения элементов семейства $\mathfrak{B}$.

Семейство $\mathfrak{B}$ открытых множеств топологического пространства X является базой, тогда и только тогда, когда для каждой точки x пространства X и её окрестности U найдётся множество V из $\mathfrak{B}$ такое, что $x \in V \subset U$.

- Локальная база пространства X в точке $x \in X$ (база точки x) - семейство $\mathfrak{B}(x)$ окрестностей точки x со свойством: для любой окрестности O_x точки x найдется элемент $V \in \mathfrak{B}(x)$ такой, что $x \in V \subset O_x$.

- Минимум мощностей всех локальных баз пространства X в точке $x \in X$ называется характером пространства X в точке x и обозначается $\chi(x, X)$.

- Супремум характеров пространства X во всех точках $x \in X$ называется характером пространства X и обозначается $\chi(X)$.

- Пространства, имеющие счетную локальную базу в каждой точке, называются пространствами с первой аксиомой счетности.

- Семейство $\mathfrak{B}$ открытых в X множеств является базой тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ подсемейство $\mathfrak{B}(x)$ всех элементов $\mathfrak{B}$, содержащих точку x является локальной базой точки x .

- Система окрестностей - Это семейство $\{\mathfrak{B}(x)\}_{x \in X}$, такое, что $\mathfrak{B}(x)$ является локальной базой пространства X в точке x для каждого $x \in X$.

- Предбаза - семейство $\mathcal{U}$ открытых подмножеств топологического пространства X такое, что совокупность всех множеств, являющихся пересечением конечного числа элементов $\mathcal{U}$, образует базу пространства X

(!!! оно тут важно для чего-то, встречается там дальше)

- Замкнутая база - семейство всех дополнений к элементам некоторой базы.

- π -база (решётчатая база) - семейство $\mathfrak{B}$ непустых открытых подмножеств пространства X такое, что всякое непустое открытое в X множество содержит множество из $\mathfrak{B}$, то есть $\mathfrak{B}$ плотно по Хаусдорфу в пространстве X . Любая база есть π -база. Обратное неверно, например, в компактификации Стоуна - Чеха $\beta\mathbb{N}$ множества натуральных чисел семейство одноточечных подмножеств множества $\mathbb{N}$ является π -базой, но не является базой.

- Псевдобаза - такое семейство открытых подмножеств, что пересечение всех его элементов, содержащих фиксированную точку, совпадает с этой точкой. Существует только в T -пространствах. Пример пространства со счётной псевдобазой, в котором нет счётной базы - пространство последовательностей нулей и единиц с дискретной топологией (псевдобаза - множества, состоящие из всех последовательностей с фиксированным значением на некоторой позиции).

О других определениях (?)

Вес топологического пространства

Минимальная мощность всех баз пространства X называется весом топологического пространства X . Вес пространства X обычно обозначается $w(X)$.

Свойства

- Для каждой базы $\mathfrak{B}$ существует подмножество $\mathfrak{B}_0$, являющееся базой и имеющее мощность, равную весу пространства.

- Если вес пространства X не более, чем счётный (то есть X имеет счётную базу), то X называют пространством со второй аксиомой счётности.

- В пространстве веса τ существует всюду плотное множество мощности $\leq \tau$.

О применениях топологии

- в 4 семестре в функане используется очень много.

(потом раскрою, почему)

3.2. Пределы последовательностей, фундаментальные последовательности и полные метрические пространства

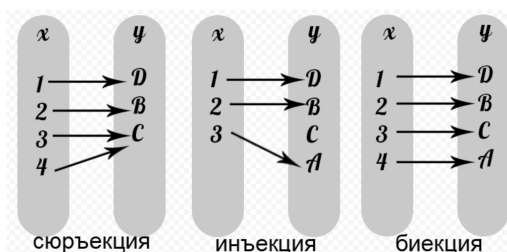
3.3. Шары, ограниченность, радиус и диаметр

3.4. Топология в метрическом пространстве

3.5. Компактность в метрическом пространстве

Биекция, инъекция, сюръекция

(тут как раз тот параграф, с которым я не буду путаться!)



О метрических пространствах

(разберу раздел ниже - потом этот писать буду. пока рано, пока не разобрался еще нормально!!!)

метрическое пространство это грубо говоря множество в котором можно количественно сказать, насколько любые два элемента далеко находятся друг от друга.

Определение метрических пространств

метрическое пространство состоит из множества и расстояния со следующими свойствами:

невырожденность

симметричность

неравенство треугольника.

О неравенстве Коши-Буняковского

$$(v \cdot w)^2 \leq (v \cdot v) \cdot (w \cdot w) \leftrightarrow |(v \cdot w)| \leq |v| \cdot |w|$$

или

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)$$

или

$$\left| \int_X f(x) \overline{g(x)} \mu(dx) \right|^2 \leq \left(\int_X |f(x)|^2 \mu(dx) \right) \cdot \left(\int_X |g(x)|^2 \mu(dx) \right)$$

Это главное свойство метрических пространств.

(тут идея доказательств)

Также есть еще виды:

$$\text{cov}^2(X, Y) \leq D[X] \cdot D[Y]$$

(??? поясню, откуда такой вид?)

(тут укажу применения)

Об индуцированной метрике

Пусть дано подмножество $X \subseteq M$ метрического пространства M . Индуцированная метрика - ограничение $\rho|_{X \times X}$, это метрика на X .

В таком смысле индуцированная с $\mathbb{R}$ метрика на $\mathbb{Q}$ не полна. Аналогично метрика на $\mathbb{Q}^n$, индуцированная с $\mathbb{R}^n$, тоже не полна.

(???)

3.6. Непрерывные отображения метрических пространств

3.7. Непрерывные отображения компактов и связных множеств

3.8. Расстояние между множествами и нормальность

3.9. Кривые и линейная связность

3.12. Длина кривой в метрическом пространстве

3.13. Дифференцируемые кривые в евклидовом пространстве

3.14. Внутренняя метрика метрического пространства

2.1.3 sequences and functions of one variable

основные свойства

О непрерывности (!?!?!?!?!)

(еще путаюсь в этом)

Определения непрерывности

Непрерывность по Коши в точке: Для любой $U_\varepsilon(f(x_0))$ найдётся $U_\delta(x_0)$, такая что $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.

Непрерывность по Гейне в точке: Если $x_k \rightarrow x_0$ в M , то $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ в N .

Топологическое определение непрерывности: Для любого открытого $U \subseteq N$ прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в M .

(тут укажу потом идею, почему они об одном и том же.)

мотивация изучать функции на непрерывность

(??)

но такие вопросы всегда возникают

различные типы непрерывностей для различных объектов

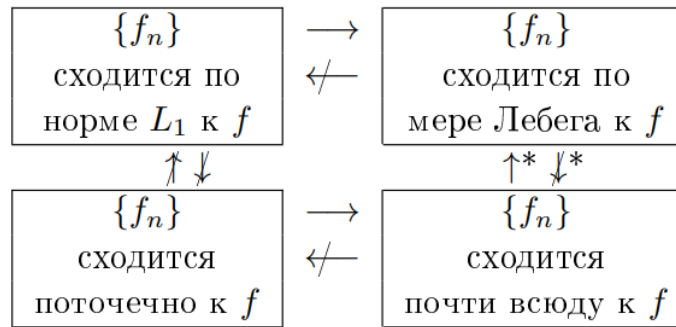
их много, тут обзор мотивации

3.10. Равномерная непрерывность (!?!?!?!?!)

3.11. Разрывные и полунепрерывные функции

О сходимости





Самая лучшая сходимость - равномерная сходимость.

(?? дальше уже плаваю пока что)

Теорема об обратной функции (?!!!)

(!!! напишу тут нормально, чтобы можно было чуть что пользоваться)

Суть

О применениях

О сути доказательства

Посмотрим, какие утверждения можно сделать про функции, используя знания про производные.

свойства функций с помощью производных

Теорема Коши о среднем

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

вспомним то, что уже мы видели, только тут мб докажем это.

Теорема 2. *правила лейбница*

2.1.4 basics of complex analysis

(там ниже еще раздел есть про комплан, пока вижу так, что тут основы, а ниже - именно суть основных тем компалана)

Об элементарных свойствах

13. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Информация об основной теореме алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.

2.2 Construction of integrals

2.2.1 Basics of Jordan and Lebesgue Measures

Свойства интеграла Лебега

Теорема 3. Если функция $f > 0$ интегрируема по Лебегу на множестве X (то есть когда???) положительной меры Лебега (а как иначе???) и

$$\int_X f(x) dx = 0,$$

то $f(x) = 0$ на всем X , кроме множества меры 0.

(главный вопрос - почему это не очевидно?????????????)
(счетная адд инт Л по множествам)

Теорема 4. Если $X = \sqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, а также какие-то условия на f , то

$$\int_X f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} f(x) dx$$

(да я вообще хз)

непрерывность инт Л по множествам (???)

(?? если это важно, то оставлю, нет - удалю.)

какая-то теорема тут...

Теорема 5.

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \subseteq X_k \subseteq X_{k+1} \subseteq \dots$$

...

тогда:

$$\int_X f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X_k} f(x) dx$$

и еще есть по убыванию множеств.

и еще непрерывность по верхнему пределу есть.

мда.

Формула Ньютона-лейбница (!!!)

(!!! проработаю нормально!!!)

Нужно ли изучать свойства интеграла Лебега?

(важное обсуждение этого вопроса. Пока ответ - нет, потому что я не знаю, кому вообще это нужно? ну, кроме фанатиков математики.)

4.9. Интегрирование непрерывных функций через приближения**4.10. Разбиения отрезка, суммы Дарбу и интеграл Римана****4.11. Интеграл Римана через ступенчатые функции****4.12. Интегрируемость по Риману разных функций****5.1. Элементарные множества и мера Жордана****5.2. Внешняя мера Лебега и её свойства****5.3. Множества конечной меры Лебега и их свойства****5.4. Измеримые по Лебегу множества с бесконечной мерой****5.5. Измеримость счётных объединений и пересечений, непрерывность меры Лебега****5.6. Измеримость открытых и замкнутых множеств, регулярность меры Лебега**

Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу.

(??? почему по сути???)

Измеримое по Лебегу множество X можно сколь угодно точно по мере приблизить содержащим его открытым множеством. Если X имеет конечную меру, то его можно сколь угодно точно по мере приблизить содержащимся в нём компактным множеством.

(??? почему по сути???)

5.7. Измеримые по Лебегу функции

Определение 5.43. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) называется измеримой по Лебегу, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x | f(x) < c\}$ измеримо по Лебегу.

Определение измеримой функции со строгим неравенством эквивалентно определению с нестрогим неравенством $\{x | f(x) \leq c\}$.

(?? почему, по сути?)

Поточечное взятие точной верхней или нижней грани последовательности функций не выводит за класс измеримых функций с возможно бесконечными значениями.

Поточечный переход к (верхнему или нижнему) пределу также не выводит за класс измеримых функций с возможно бесконечными значениями.

5.8. Борелевские множества и функции

Определение 5.51. Борелевским множеством в $\mathbb{R}^n$ называется множество, которое можно получить из открытых множеств операциями разности множеств, счётного объединения и счётного пересечения, а также повторениями этих операций несколько раз.

Определение 5.52. Борелевской функцией называется функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ или $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, у которой для любого c множество $\{x \in X | f(x) < c\}$ борелевское.

Все сравнительно явно заданные функции будут не просто измеримыми по Лебегу, а даже борелевскими. Но на самом деле измеримых по Лебегу имеет меру Лебега нуль и мощность континуума $\aleph_1 = |2^{\mathbb{N}}|$, значит все его подмножества измеримы и имеют меру нуль (это называется полнота меры Лебега), а их количество $2^{\aleph_1} > \aleph_1$ (в силу задачи 1.171). Можно доказать, что количество открытых множеств в евклидовом пространстве - континуум, и количество борелевских - тоже континуум.

(мб когда-то подумаю еще про это)

(далее в таком же духе всякие еще утверждения)

Композиция борелевских отображений тоже будет борелевской.

2.2.2 Construction and Properties of the Lebesgue Integral

5.9. Интеграл Лебега для ступенчатых функций

5.10. Интеграл Лебега для произвольных функций

5.11. Линейность и монотонность интеграла Лебега

5.12. Приближение интегрируемых функций в среднем

5.13. Счётная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам

5.14. Предельный переход в интеграле Лебега по функциям

5.15. Примеры применения интеграла Лебега

5.16. Несобственный интеграл функции одной переменной

5.17. Теорема Фубини и линейная замена переменных в интеграле

5.19. Лемма Безикевича и дифференцируемость почти всюду

теорема Лебега об ограниченной сходимости

2.3 Functions of Many Variables, Vector Analysis, Differential Geometry

2.3.1 Functions of several variables and implicit functions (!??!)

(тут много крутого!)

6.1. Дифференцируемые отображения открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$

6.2. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

6.3. Свёртки и приближение функций бесконечно гладкими

6.4. Непрерывно дифференцируемые отображения и их обратные

6.5. Криволинейные системы координат

(пока тут, мб перенесу в др раздел, где замена перменных)

Теорема 6.31 (Теорема о неявной функции). Пусть функции $f_1, \dots, f_k$ непрерывно дифференцируемы в окрестности $p \in \mathbb{R}^n$ и определитель

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^k$$

не равен нулю в этой окрестности, пусть также $f_i(p) = y_i$. Тогда найдётся окрестность точки p вида $U \times V, U \subset \mathbb{R}^k, V \subset \mathbb{R}^{n-k}$, такая что в этой окрестности множество решений системы уравнений

$$f_1(x) = y_1, \dots, f_k(x) = y_k,$$

совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : V \rightarrow U$, заданного в координатах как

$$x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

...

$$x_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

6.6. Исследование функций нескольких переменных на экстремум (!?!)

(напишу скоро)

2.3.2 Smooth mappings and differential forms**6.7. Определение касательного вектора****6.8. Векторные поля и прямой образ вектора****6.9. Факторпространство и конечная порождённость векторного пространства****6.10. Размерность векторного пространства****6.11. Полилинейные формы и детерминант****6.12. Тензорное произведение векторных пространств****6.13. Тензорное произведение и двойственность****6.14. Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование****7.6. Внутреннее умножение и производная Ли****7.7. Интегрирование векторных полей и дифференциальные уравнения****7.10. Группы Ли, левоинвариантные векторные поля и однопараметрические подгруппы****7.11. Римановы многообразия и риманов объём****2.3.3 Other typical topic about differential surfaces, mappings**

(мб потом допишу, пока не до этого, в диффгеме это же по идее, но тут более математически. пока вообще не нужно было это.)

(мб во 2ю 1ю часть перенесу!!)

7.1. Потенциалы дифференциальных форм первой степени**7.2. Первообразные дифференциальных форм и когомологии де Рама****7.3. Критические и регулярные значения, теорема Сарда****7.4. Степень гладкого отображения****7.5. Применения степени отображения**

(?? actually, I have no idea how really it is used?)

7.8. Интегрирование векторных полей на многообразии, геометрический смысл производной Ли

7.9. Интегрирование системы векторных полей

7.14. Длина кривой, действие и уравнение геодезической

7.15. Экспоненциальное отображение и локальное существование кратчайших

7.16. Полнота и геодезическая полнота, глобальное существование кратчайших

7.17. Кривизна римановых многообразий

2.3.4 Overview of Differential Geometry in Physics

7.18. Пространство-время специальной теории относительности

7.19. Движение в электромагнитном поле, уравнения Максвелла, уравнение Эйнштейна

7.20. Модельные пространства римановой геометрии

7.21. Пространства де Ситтера и метрика Шварцшильда

2.3.5 2D, 3D integrals, curves, surfaces

(тут именно про задачи и использование методов!!)

Вычисление поверхностных интегралов

Вычисление с помощью теоремы Стокса

теорема Остроградского-Гаусса

Предположим, что $U \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ - это открытое ограниченное подмножество с достаточно «гладкой» границей ∂U такой, что в каждой ее точке $y \in \partial U$ задано поле единичных нормалей $n_y = (n_{y1}, \dots, n_{yN}) (|n_y| = 1)$.

Ясно, что

$$n_{yj} = \cos(n_y, e_j) \quad \text{при} \quad j = \overline{1, N}$$

где e_j - орты заданной системы координат в $\mathbb{R}^N$.

Прежде всего сформулируем без доказательства теорему Остроградского-Гаусса-Грина.

$$\int_U u_{x_i}(x) dx = \int_{\partial U} u(y) \cos(n_y, e_i) dS_y, \quad i = \overline{1, N}$$

Переход в n -мерные сферические координаты

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1 \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{N-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{N-2} \cos \varphi_{N-1} \\ x_N = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{N-2} \sin \varphi_{N-1} \end{cases}$$

$$J_N = \frac{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})} = r^{N-1} \sin^{N-2} \varphi_1 \sin^{N-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{N-2}$$

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} dx_N = J_N dr d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_{N-2} d\varphi_{N-1}$$

Например, интеграл по единичной сфере:

$$I_1 := \int_{B(0, \varepsilon)} f(|x|) dx, \quad I_2 := \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(|y|) dS_y$$

где $dx := dx_1 \cdots dx_N$ - элемент объема в N -мерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, dS_y - элемент площади многообразия $\partial B(0, \varepsilon)$ в точке $y \in \partial B(0, \varepsilon)$.

где $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^N : |x - y| < r\}$, $\partial B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^N : |x - y| = r\}$

Вычислим сначала интеграл I_1 .

Действительно, имеем воспользуемся переходом к сферической системе координат в общем N -мерном случае.

Если в пространстве $\mathbb{R}^N$ замкнутый шар $\overline{B(0, \varepsilon)}$ имеет вид $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leq \varepsilon^2$, то в сферической системе координат $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})$ шару $B(0, \varepsilon)$ соответствует прямоугольный параллелепипед

Поэтому для интеграла I_1 мы получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\varepsilon dr \int_0^\pi d\varphi_1 \cdot \int_0^\pi d\varphi_{N-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} J_N f(r) = \\ &= \int_0^\varepsilon r^{N-1} f(r) dr \int_0^\pi \sin^{N-2} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{N-3} d\varphi_{N-3} \times \\ &\quad \times \int_0^\pi \sin \varphi_{N-2} d\varphi_{N-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} = \omega_N \int_0^\varepsilon r^{N-1} f(r) dr \end{aligned}$$

где

$$\omega_N := 2 \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}, \quad \omega_2 = 2\pi, \quad \omega_3 = 4\pi$$

и по смыслу является площадью поверхности единичной сферы $\{y \in \mathbb{R}^N : |y| = 1\}$.

Отметим, что из объем единичного шара $B(0, 1)$ равен

$$\alpha_N := \frac{\omega_N}{N}$$

Интеграл от единичной сферы

Действительно, прежде всего заметим, что в сферической системе координат сфера $\partial B(0, \varepsilon)$ параметризуется углами $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})$.

Используя формулу

$$dS_y = J_N(y) d\varphi_1 \cdots d\varphi_{N-1}, \quad y = (\varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$$

для элемента площади dS_y в точке y сферы $\partial B(0, \varepsilon)$, где $J_N(y)$ - это якобиан в который подставлены координаты точки y на сфере $\partial B(0, \varepsilon)$ в сферической системе координат.

После подстановки явного выражения для dS_y мы получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(|y|) dS_y = \\ &= f(\varepsilon) \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi d\varphi_{N-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} J_N(\varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-2}) = \\ &= f(\varepsilon) \varepsilon^{N-1} \int_0^\pi \sin^{N-2} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{N-3} d\varphi_{N-3} \times \\ &\quad \times \int_0^\pi \sin \varphi_{N-2} d\varphi_{N-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} = f(\varepsilon) \varepsilon^{N-1} \omega_N \end{aligned}$$

Полезной в различных вычислениях является связь элемента площади dS_y сферы $\partial B(0, \varepsilon)$ и элемента площади dS_z единичной сферы $\partial B(0, 1)$ Эта связь дается следующей формулой:

$$dS_y = \varepsilon^{N-1} dS_z, \quad y = (\varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}), \quad z = (1, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$$

Докажите сами! $\otimes$

О криволинейных интегралах (???)

(задачи для них есть разные тоже, раздел для них!)

15. Элементы дифференциальной геометрии.

Кривые на плоскости и в пространстве.

Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой.

Оценка приращения вектор-функции через производную.

Длина кривой.

Производная переменной длины дуги.

Натуральный параметр.

Кривизна кривой, формулы для ее вычисления.

Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

2.3.6 Integrals over manifolds and of differential forms

6.15. Интеграл дифференциальной формы с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$

Дифференциальные формы с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$ - определённые на всём $\mathbb{R}^n$ и равные нулю за пределами некоторого компакта. В более общем виде можно рассматривать формы с компактным носителем на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Формы с компактным носителем на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначаются $\Omega_c^k(U)$ и нетрудно понять (проверьте это самостоятельно), что продолжение формы нулём за пределы U даёт включение $\Omega_c^k(U) \subseteq \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$.

Определение 6.112. Для гладкой формы с компактным носителем $\nu = a(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega_c^n(U)$ определим в какой-то фиксированной системе координат

$$\int_U \nu := \int_U a(x) dx_1 \cdots dx_n$$

Лемма 6.113. Если $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(U)$, то

$$\int_U d\lambda = 0.$$

Следствие 6.115. Пусть $P = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ - это произведение интервалов. Факторпространство $\Omega_c^n(P)/d\Omega_c^{n-1}(P)$ одномерно, то есть всевозможные способы определить интеграл формы $\nu \in \Omega_c^n(P)$ так, чтобы интеграл от $d\lambda, \lambda \in \Omega_c^{n-1}(P)$, равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу.

6.16. Разбиение единицы в окрестности компакта в $\mathbb{R}^n$

Лемма 6.116 (Разбиение единицы в окрестности компакта в $\mathbb{R}^n$). Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ компакта $K \subseteq \mathbb{R}^n$ найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ с компактными носителями $\text{supp } \rho_\alpha$ таких, что

$$\forall \alpha \text{ supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha,$$

только конечное число из них не равно нулю и

$$\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$$

в некоторой окрестности K .

6.17. Замена координат в интеграле от формы

Лемма 6.120 (Поведение интеграла от формы при замене координат в параллелепипеде). Пусть открытый параллелепипед P содержится в образе диффеоморфизма $\varphi : U \rightarrow V$ между областями в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой дифференциальной формы $\nu \in \Omega_c^n(P)$ выполняется формула

$$\int_U \varphi^* \nu = (\text{sgn } J\varphi) \int_V \nu$$

Заметим, что так как U связна по определению области, то знак якобиана один и тот же во всех точках области.

Теорема 6.121 (Общий случай замены координат в интеграле от формы). Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega_c^n(V)$ при отображении φ^* , соответствующем диффеоморфизму $\varphi : U \rightarrow V$ между областями в $\mathbb{R}^n$ меняет или не меняет знак в зависимости от знака якобиана $J\varphi$, то есть

$$\int_U \varphi^* \nu = (\text{sgn } J\varphi) \int_V \nu$$

- 6.18. Замена координат в интеграле от функции
- 6.19. Вложенные многообразия в $\mathbb{R}^N$
- 6.20. Абстрактное определение многообразия
- 6.21. Гладкие отображения между многообразиями
- 6.22. Разбиение единицы на многообразии
- 6.23. Ориентация многообразия
- 6.24. Интеграл формы по ориентированному многообразию и формула Стокса
- 6.25. Частные случаи формулы Стокса и её применения

2.4 Harmonic and functional analysis in a nutshell

2.4.1 Abstract theory of Fourier series

О базисах в бесконечномерных евклидовых пространствах

(тут была ни о чем теория, удалил, потом с задачами заново соберу все, что нужно тут.)

Равенство Парсеваля (???)

Суть

Равенство Парсеваля ($f, g \in S(\mathbb{R}^n)$)

$$\begin{aligned} f, g \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f \vee g}(x) dx \end{aligned}$$

О применениях (??)

Вот оказывается, суммы $1/n^2$ и $1/n^4$ можно находить в помощью него. как???

Минимальность коэффициентов Фурье

по ортогональной системе функций в L_2 .

8.7. Осцилляция и убывание коэффициентов Фурье

8.8. Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном

8.9. Равномерная и поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье

8.10. Интегрирование ряда Фурье, разложение котангенса и косеканса на элементарные дроби и формула дополнения для бета-функции

8.11. Суммирование тригонометрических рядов по Фейеру

Примеры абстрактных рядов Фурье

(соберу потом)

О многочленах Лежандра

(напишу потом, иногда могут применяться.)

2.4.2 Fourier transformation: Other Properties and Applications (!??!)

(!!! очень скоро доучу!)

О преобразовании Фурье

$$F[f] = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt$$

$$F^{-1}[f] = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt} dt$$

$\delta(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
1	$\sqrt{2\pi} \delta(\omega)$
t^n	$i^n \sqrt{2\pi} \delta^{(n)}(\omega)$
e^{iat}	$\sqrt{2\pi} \delta(\omega - a)$
$\cos(at)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\delta(\omega-a) + \delta(\omega+a)}{2}$
$\sin(at)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\delta(\omega-a) - \delta(\omega+a)}{2i}$

$\exp(-at^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(\frac{-\omega^2}{4a}\right)$
$\frac{1}{t}$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\omega)$
$\frac{1}{t^n}$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sgn}(\omega)$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (i\omega)^{-1}$
$\sqrt{2\pi} \theta(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega)$

Если у нас четная функция $f(k)$, то ее преобразование Фурье $g(x)$ будет четной функцией по x . Таким образом, если $f(k, x) \equiv f(k)$, то $g(x) = g(|x|)$. Таким образом, если мы берем интеграл Фурье через вычеты, достаточно рассмотреть только одну полуось, для общей формулы потом будет достаточно просто положить $x \rightarrow |x|$.

Преобразование Фурье переводит свертку в произведение, а также произведение в свертку (с коэффициентом $\frac{1}{2\pi}$). (??? добавлю слова про доказательство, пока не вникал)

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f \quad (\text{ф обращения})$$

для непрерывной, абсолютно интегрируемой на R функции $f(x)$, имеющей в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные

Если существуют преобразования Фурье функций f и g , то при любых комплексных α и β справедливо равенство

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g] \quad (\text{Линейность})$$

Аналогичное утверждение справедливо и для обратного преобразования Фурье.

3) Непрерывность.

Если функция f абсолютно интегрируема на R , то ее преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ - непрерывная и ограниченная на R функция, причем

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \hat{f}(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \hat{f}(y) = 0$$

4) Преобразование Фурье производной.

Если функция f и ее производные до n -го порядка включительно непрерывны и абсолютно интегрируемы на R , то

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f], \quad k = 1, 2, \dots, n$$

5) Производная преобразования Фурье.

Если функция f непрерывна на R , а функции $f(x), xf(x), \dots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на R , то функция $\hat{f}(y) = F[f]$ имеет на R производные до n -го порядка включительно, причем

$$\hat{f}^{(k)}(y) = (-i)^k F[x^k f(x)], \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Запаздывание (сдвиг)

$$f(x - x_0) e^{\mp iay} F_{\pm}[f(x)](y)$$

$e^{iax} f(x)$	$F_{\pm}[f(x)](y - a)$
$f(x) \cos ax$	$\frac{1}{2} (F_{\pm}[f(x)](y - a) + F_{\pm}[f(x)](y + a))$
$f(x) \sin ax$	$\frac{1}{2i} (F_{\pm}[f(x)](y - a) - F_{\pm}[f(x)](y + a))$
$f(ax)$	$ a ^{-1} F_{\pm}[f(x)]\left(\frac{y}{a}\right)$
$f(Ax + b)$	$ \det A ^{-1} e^{\pm i(y, A^{-1}b)} F_{\pm}[f(x)]((A^{-1})^* y)$

Свойство преобразования Фурье от n -ой производной

$$\frac{d^n f}{dx^n} (?) = (\pm iy)^n F_{\pm}[f(x)](y)$$

Дифференцирование преобразования Фурье (???)

Формула Пуассона говорит, что для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ суммирование по целым числам n это то же, что и суммирование ее фурье, но по $2\pi n$:

$$f = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$$

Это можно видеть просто из дельта-функции на $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, а далее ее продолжения (? додумаю!)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x} \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\pi k x} \\ \sum_n \int f(x) \delta(x - n) dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k) \end{aligned}$$

Так можно всегда и считать суммы. Например, гауссова экспонента перейдет в себя, так что сумма от гауссовых интегралов перейдет в нее же, но только от малого коэффициента под экспонентой переход будет к большому.

(!?!?!? потренируюсь!)

Свойства преобразования Фурье быстро убывающих функций

1. Преобразование Фурье линейно, т. е. для любых $a, b \in \mathbb{C}$ и любых $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$F_{\pm}[af(x) + bg(x)](y) = aF_{\pm}[f(x)](y) + bF_{\pm}[g(x)](y).$$

2. Для любого мультииндекса α и любой быстро убывающей функции f справедливы равенства

$$F_{\pm}[x^{\alpha} f(x)](y) = (\pm i)^{|\alpha|} D^{\alpha} F_{\pm}[f(x)](y).$$

3. Для любого мультииндекса α и любой быстро убывающей функции f справедливы равенства

$$F_{\pm}[D^{\alpha} f(x)](y) = (\pm i y)^{|\alpha|} F_{\pm}[f(x)](y).$$

4. Пусть A - невырожденная $n \times n$ -матрица, b - n -мерный вектор и $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - быстро убывающая функция. Тогда

$$F_{\pm}[f(Ax + b)](y) = |\det A|^{-1} e^{\pm i(y, A^{-1}b)} F_{\pm}[f(x)]((A^{-1})^* y).$$

Здесь A^{-1} обозначает матрицу, обратную к A , а $(A^{-1})^*$ - матрицу, сопряженную к A^{-1} , т. е. такую (единственным образом определенную) матрицу, что для любых векторов $u, v \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$(A^{-1}u, v) = (u, (A^{-1})^* v)$$

5. Если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - быстро убывающая функция, а $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то

$$F_{\pm}[f(x - x_0)](y) = e^{\mp i(x_0, y)} F_{\pm}[f(x)](y).$$

6. Если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ - быстро убывающая функция, а a - отличное от нуля вещественное число, то

$$F_{\pm}[f(ax)](y) = \frac{1}{|a|^n} F_{\pm}[f(x)]\left(\frac{y}{a}\right).$$

О дискретном преобразовании Фурье (???)

(нужно будет - напишу.)

О вычислении интегралов через свойства преобразования Фурье

(таких много задач, вот и для них параграф самый важный! такой-то интеграл, как считаем?)

О других типичных задачах на преобразование Фурье**О простейших интегральных уравнениях через свойства преобразования Фурье**

(такие есть задачи, вот тут все указания для них, мб 3/4 страницы! потом посижу, разберу)

8.12. Интеграл Фурье и вычисление интеграла Дирихле**8.13. Равномерная сходимости несобственного интеграла****8.14. Сходимость интеграла Фурье, преобразование Фурье и его свойства****8.15. Пространство $S(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье****8.16. Унитарность преобразования Фурье****8.17. Ряд и интеграл Фурье в точках разрыва 1-го рода и явление Гиббса****8.18. Многомерный интеграл Фурье и гауссовы плотности****8.19. Пространство $S(\mathbb{R}^n)$ и преобразование Фурье****8.20. Свёртка и преобразование Фурье****Fast Fourier transformation**

(write, what is it??? a very good method! write in compute math about it)

примеры преобразования Фурье

для обобщенных функций:

это не по теме, но раз уж говорим о нем и знаем функан - напомним парк примеров.

О применении преобразования Фурье в физике

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \varphi(\mathbf{k}, \omega) \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4}$$

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \int e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt$$

???

(тут абзац про статфиз, там очень много Фурье! Мб на 3/4 страницы!)

(тут абзац про теорпол, там очень много Фурье! Мб на 3/4 страницы!)

О других теоремах

О теореме котельникова

(пока что почти не дошел. потом мб займусь ей, пока хз.)

Пусть функция f имеет финитный спектр (??), тогда

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f\left(\frac{\pi}{\Omega}k\right) \frac{\sin\left(\Omega\left(t - \frac{\pi}{\Omega}k\right)\right)}{\Omega\left(t - \frac{\pi}{\Omega}k\right)}$$

Это следует из того, что

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi}{\Omega}k\right) e^{i\omega t - i\frac{\pi\omega}{\Omega}k} \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\Omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi}{\Omega}k\right) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t - i\frac{\pi\omega}{\Omega}k} d\omega \end{aligned}$$

2.4.3 Banach and Hilbert spaces

Обзор функциональных пространств

Основные свойства

Банахово пространство - полное нормированное пространство $\mathcal{N} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$.

Например, метрическое пространство $\mathbb{E}^m$ является конечномерным нормированным пространством и его норма имеет вид $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^m x_k^2$. Это пространство банахово.

Как отмечалось ранее любое пространство со скалярным произведением можно превратить в нормированное пространство (см. замечание 1.7).

Гильбертово пространство - банахово пространство $\mathcal{E}$, норма которого порождена скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.21. В линейном пространстве $\mathcal{L}$ норма $\|\cdot\|_2$ не слабее нормы $\|\cdot\|_1$, если существует такая положительная постоянная C , что для всех $x \in \mathcal{L}$ выполняется $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.22. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называются эквивалентными, если существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2 , что для всех $x \in \mathcal{L}$ выполняется $C_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2$.

Можно сказать, что норма $\|\cdot\|_2$ не слабее нормы $\|\cdot\|_1$, а норма $\|\cdot\|_1$ не слабее нормы $\|\cdot\|_2$.

ТЕОРЕМА В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

В бесконечномерных нормированных пространствах нормы могут быть неэквивалентны. (????) Пусть $\mathcal{C}[a, b]$ - линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. На $\mathcal{C}[a, b]$ можно ввести нормы, которые не являются эквивалентными:

$$\|f\|_c = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad C[a, b] = (\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_c)$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad L_c^1[a, b] = (\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_1);$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}, \quad L_c^2[a, b] = (\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_2).$$

(???? тут про коши буняковского будет мб.)

О банаховом пространстве

Основные свойства

О гильбертовом пространстве

Основные свойства

Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D' .

Регулярные и сингулярные обобщенные функции.

О Дельта-функции

Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую.

Сходимость в пространстве обобщенных функций.

Дифференцирование обобщенных функций.

Пространство основных функций S и пространство обобщенных функций S' .

Преобразование Фурье обобщенных функций.

Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

О принципе равномерной ограниченности

Суть

Принцип равномерной ограниченности или Теорема Банаха — Штейнгауза — фундаментальный результат функционального анализа. Теорема утверждает, что поточечная и равномерная ограниченности эквивалентны для семейств непрерывных линейных операторов, заданных на Банаховом пространстве.

О применениях

(хз)

О сути доказательства

8.1. Пространства L_p , неравенства Гёльдера и Минковского

8.2. Полнота пространств L_p

8.3. Приближения функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими

8.4. Ограниченная вариация

8.5. Абсолютная непрерывность, обобщённая формула Ньютона–Лейбница и обобщённое интегрирование по частям

8.6. Борелевские меры на отрезках, интеграл Лебега–Стилтьеса

9.1 Банаховы пространства и теорема Бэра

9.2. Двойственное пространство, его норма и принцип равномерной ограниченности

9.3. Линейные отображения между банаховыми пространствами

9.4. Гильбертовы пространства и их базисы

Определение 9.41. Если норма в банаховом пространстве E порождается положительно определённым скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

то E называется гильбертовым пространством.

Рассмотрим неравенство (в комплексном варианте)

$$(ax + by, ax + by) \geq 0 \Leftrightarrow |a|^2 \|x\|^2 + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}\overline{(x, y)} + |b|^2 \|y\|^2 \geq 0.$$

Используя условия неотрицательной определённости эрмитовой формы двух переменных a, b мы получим неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

Определение 9.43. Последовательность векторов (φ_k) является полной системой векторов в банаховом пространстве E , если замыкание её линейной оболочки совпадает с E , то есть для любого $x \in E$ и $\varepsilon > 0$ найдётся конечная линейная комбинация $a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$, такая что

$$\|x - a_1\varphi_1 - \dots - a_n\varphi_n\| < \varepsilon.$$

Определение 9.44. Последовательность векторов (φ_k) является замкнутой системой векторов в гильбертовом пространстве H , если в H нет векторов, ортогональных всем φ_k , то есть из равенств $(x, \varphi_k) = 0$ для всех k следует $x = 0$.

Теорема 9.46. Для любой ортогональной системы векторов $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ в гильбертовом пространстве H следующие свойства эквивалентны:

- а) полнота системы;
 - б) замкнутость системы;
 - в) сходимости ряда Фурье любого $x \in H$ по системе (φ_k) к x ;
 - 2) равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье любого $x \in H$ по данной системе.
- (там большое доказательство, скорее всего пару слов про него укажу, когда пойму.)

О других свойствах гильбертовых пространств

(Теорема Мюнца для L_2) Пусть (n_k) - строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Докажите, что система функций $\{x^{n_k} | k \in \mathbb{Z}^+\}$ полна в $L_2[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty$. (мб комментариев укажу про вывод)

9.5. Изометричность гильбертовых пространств

Теорема 9.59 (Теорема Рисса-Фишера). Любое гильбертово пространство H , в котором нашлась счётная полная система элементов, изометрично некоторому $\mathbb{C}^n$ в случае комплексного поля скаляров, $\mathbb{R}^n$ в случае действительного поля скаляров, или комплексному или действительному варианту бесконечномерного пространства последовательностей с конечной суммой квадратов модулей $\ell_2 = L_2(\mathbb{N})$.

9.6. Метрическая проекция и двойственное к гильбертову пространству

Метрическая проекция в гильбертовом пространстве делается так. Пусть H - гильбертово пространство, $V \subset H$ - его замкнутое линейное (или аффинное) подпространство. Для любого $x \in H$ существует единственный $P_V(x) \in V$, ближайший к x , то есть

$$\|x - P_V(x)\| = \text{dist}(x, V).$$

Теорема о метрической проекции (????). Если V - замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства H , то метрическая проекция $P_V : H \rightarrow V$ линейна, $\|P_V\| = 1$ при $V \neq 0$, и имеет место ортогональное разложение в прямую сумму замкнутых подпространств $H = V \oplus \ker P_V$.

Теорема 9.69 (Двойственное к гильбертову пространству). Для любого u в гильбертовом пространстве положим

$$\lambda_y(x) = (x, y).$$

Тогда $\lambda_y \in H'$, $\|\lambda_y\| = \|y\|$ и все элементы двойственного пространства H' имеют такой вид.

9.7. Компактные подмножества в банаховых пространствах

Part III

Special Theorems, Formulas in a Nutshell

3 Other methods of calculus

3.1 Other Methods for Integrals

3.1.1 Methods for Exotic Hard Integrals (??)

(вообще отдельная про них запись, отдельные на них методы, сюда какие-то потом укажу.)

3.1.2 Oscillatory Integrals

(там очень большая теория, лишь укажу ее)

Основные свойства

О применениях

3.1.3 Path Integrals (!?!?!)

(тоже полезная заготовка, пока в теории и в отдельной записи об этом будет.)

3.1.4 Examples of estimations of integrals and solutions to diff. eq-s

(это частично в 1ю 1ю часть перекину! пока еще чуть разобрать нужно!)

Принцип подобных оценок состоит в определении области переменных, вносящей главный вклад в результат, и в выделении быстро и медленно меняющихся в этой области частей математического выражения.

Оценки интегралов

Оценим
$$I(x) = \int_0^x e^{t^2} \frac{dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}.$$

Если $x \ll 1$, то в подынтегральном выражении экспонента $e^{t^2} \approx 1$. Следовательно,
$$I(x) \approx \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$
 Так как в этом интеграле нет никаких параметров, то $I(x) \sim 1$. Вычисляя, находим, $I(x) \approx \pi/2$.

Если $x \geq 1$, то из-за экспоненциального роста множителя e^{t^2} главный вклад в интеграл внесет область около точки $t = x$.

Если обозначить $\xi = x - t$, то

$$I(x) = \int_0^x e^{x^2 - 2\xi x + \xi^2} \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi x - \xi^2}}.$$

Область ξ , существенная в подынтегральном выражении, сосредоточена около нижнего предела и имеет ширину порядка $1/2x$. В этой области $\xi^2 \sim 1/4x^2 \ll 1$, следовательно,

$e^{\xi^2} \approx 1$ и

$$I(x) \approx e^{x^2} \int_0^x e^{-2\xi x} \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi x}} \approx \frac{e^{x^2}}{2x} \int_0^\infty e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} \sim \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

При $x \sim 1$ оба выражения для $I(x)$, как это должно быть, примерно совпадают и порядка единицы. Таким образом, указанные оценки хорошо описывают $I(x)$ во всей области изменения x .

Оценим $I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \sin^2 \beta x dx$

Перепишем этот интеграл в виде

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-z^2} \sin^2 \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z \right) dz.$$

При $z > 1$ подынтегральная функция быстро убывает, поэтому существенная область интегрирования $0 < z < 1$.

Если $\beta \gg \sqrt{\alpha}$, то $\sin \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z$ много раз осциллирует в существенной области значений z . Следовательно, $\sin^2 \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z \right)$ можно заменить на $1/2$ и интеграл $I(\alpha, \beta)$ приближенно равен

$$I(\alpha, \beta) \approx \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}},$$

где C_1 - числовой множитель, равный $\sqrt{\pi}/4$.

Если $\beta \ll \sqrt{\alpha}$, то в существенной области значений z $\sin \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z \approx \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z$. Следовательно,

$$I(\alpha, \beta) \approx \frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-z^2} z^2 dz = C_2 \frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\alpha}},$$

где C_2 - числовой множитель, равный $V\pi/4$.

При $\beta = V\alpha$ оба выражения для $I(\alpha, \beta)$ совпадают и равны $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Заметим, что точное значение оцениваемого интеграла равно

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \left\| \frac{\pi}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}} \right) \right\|.$$

Легко видеть, что из него получаются оба предельных случая $\beta \gg \sqrt{\alpha}$ и $\beta \ll \sqrt{\alpha}$, приведенные выше.

При $\beta = \sqrt{\alpha} I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$, т. е. того же порядка, что и приведенные оценки.

Оценим $I(\alpha, a) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x+a} dx, \quad \alpha > 0.$

Заменим переменную интегрирования: $x = az$. Тогда $I(\alpha, a)$ принимает вид

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha az} dz}{z+1}.$$

Область, где подынтегральная функция существенно отлична от нуля, $z \leq 1/\alpha a$.

Пусть $\alpha a \gg 1$. Тогда $z \ll 1$ в существенной области. Следовательно,

$$I \underset{\alpha a \gg 1}{\approx} \int_0^{\infty} e^{-\alpha a z} dz = \frac{1}{\alpha a}.$$

Если $\alpha a \ll 1$, то в существенной области $z \gg 1$. Следовательно, можно заменить $z + 1 \approx z$ и $e^{-\alpha a z} \approx 1$. Поэтому

$$I \underset{\alpha a \ll 1}{\approx} \int_1^{\infty} \frac{dz}{z} = \ln \frac{1}{\alpha a}.$$

Рассматриваемый интеграл выражается через интегральную показательную функцию $\text{Ei}(x)$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x+a} dx = -e^{\alpha a} \text{Ei}(-\alpha a).$$

Если $\alpha a \gg 1$, то $\text{Ei}(-\alpha a) \approx \frac{e^{-\alpha a}}{-\alpha a}$, и мы получаем формулу (1.1). Если $\alpha a \ll 1$, то $\text{Ei}(-\alpha a) \approx \ln \frac{1}{\alpha a}$, что мы и нашли.

Метод перевала. Асимптотическое выражение для гамма-функции

Получим асимптотическое выражение при больших x для гамма-функции

$$x! \equiv \Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt$$

Запишем это выражение в виде $\int_0^{\infty} e^{-t+x \ln t} dt$ и вычислим его по способу, который называется методом перевала. Этот метод состоит в следующем. Рассмотрим интеграл $I(x) = \int_0^{\infty} g(t) e^{f(x,t)} dt$, где $e^{f(x,t)}$ - функция, которая для больших x имеет резкий максимум при $t = t_0(x)$. Пусть вблизи $t_0(x)$ функция $g(t)$ медленно меняется.

Тогда в окрестности максимума функцию ge^f можно заменить более простой функцией. Для этого разложим $f(x, t)$ в ряд Тейлора в окрестности ее максимума t_0 :

$$f(x, t) = f(x, t_0) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 f''(x, t_0) + \dots$$

Предположим, что $|f''(x, t_0)| \geq 1/t_0^2$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) &\approx g(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x, t_0) - \frac{1}{2} (t - t_0)^2 |f''(x, t_0)|} dt = \\ &= \frac{g(t_0) e^{f(x, t_0)}}{\sqrt{\frac{1}{2} |f''(x, t_0)|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x, t_0)|}} g(t_0) e^{f(x, t_0)} \end{aligned}$$

Пределы интегрирования здесь заменены на $[-\infty, \infty]$, так как подынтегральное выражение экспоненциально затухает в области

$$\delta t \sim 1/\sqrt{|f''(t_0)|} \leq t_0.$$

Если заменить далее $t - t_0 = i\xi$, то подынтегральное выражение превратится в растущую экспоненту. Иными словами, в комплексной плоскости переменной t точка t_0 является седловой (рис. 3).

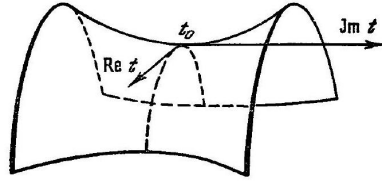


Рис. 3.

Направление интегрирования совпадает с направлением наискорейшего спуска с перевала. Отсюда понятно название метода перевала.

Мы рассмотрели частный случай, когда направление перевала совпадает с вещественной осью. Можно рассмотреть и более общий случай, когда направление перевала составляет произвольный угол с вещественной осью.

Итак, вычислим $\Gamma(x + 1)$ методом перевала. Обозначим $f(t) = -t + x \ln t$. Тогда из равенства нулю $f'(t)$ можно найти точку перевала t_0 :

$$f'(t_0) = -1 + \frac{x}{t_0} = 0,$$

откуда $t_0 = x$.

Далее, $f''(t_0) = -\frac{x}{t_0^2} = -\frac{1}{x}$. Итак, вблизи точки перевала $t_0 = x$

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \frac{-1}{x}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(x + 1) \underset{x \gg 1}{\approx} e^{f(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2x}(t-t_0)^2} dt = e^{-x+x \ln x} \sqrt{2x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}.$$

Эта асимптотическая формула называется формулой Стирлинга. Для оценки ее точности напишем следующие члены разложения $f(t)$ вблизи точки перевала. Так как $f'''(t_0) = \frac{2x}{t_0^3} = \frac{2}{x^2}$, то в показатель экспоненты добавляется кубический член $\frac{2}{3!x^2}(t - t_0)^3$. Учитывая его малость, разложим в ряд экспоненту

$$e^{\frac{2}{3!x^2}(t-t_0)^3} \approx 1 + \frac{1}{3x^2}(t - t_0)^3.$$

Интеграл от этой поправки обратится в нуль из-за нечетности подынтегральной функции. Поэтому, чтобы найти поправку, нужно разлагать $f(t)$ вблизи t_0 с точностью до $(t - t_0)^4$. Так как

$$f^{(4)}(t_0) = -\frac{6x}{t_0^4} = -\frac{6}{x^3},$$

то

$$e^{\frac{2}{3!x^2}(t-t_0)^3 - \frac{6}{4!x^3}(t-t_0)^4} \approx 1 + \frac{(t - t_0)^3}{3x^2} - \frac{(t - t_0)^4}{4x^3} + \frac{(t - t_0)^6}{18x^4}$$

Следовательно, поправка к $\Gamma(x + 1)$ имеет оценку:

$$\begin{aligned} e^i(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2x}(t-t_0)^2} \left[-\frac{(t - t_0)^1}{4x^3} + \frac{(t - t_0)^6}{18x^4} \right] dt = \\ = e^{-x+x \ln x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left[\frac{2^4 \cdot 4x^2}{4x^3} + \frac{z^6 \cdot 8x^3}{18x^4} \right] \sqrt{2x} dz = \frac{\sqrt{2\pi} x^x}{12\sqrt{x}} e^{-x} \end{aligned}$$

Итак,

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \left(1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Интересно, что формула Стирлинга с большой точностью годится и для небольших значений x . Например, даже для $x = 1$ получаем по этой формуле

$$\sqrt{2\pi} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{12}\right) = 0,995 \approx 1! = 1$$

при $x = 2$

$$\sqrt{4\pi} \frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{24}\right) = 1,9994 \approx 2! = 2.$$

Задача. Вычислить интеграл $\int_0^\infty z^{-\alpha} dz$ методом перевала.

ОТВЕТ. $\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} - \frac{1}{2}}$

Свойства интегралов от осциллирующих функций. Оценки дальнейших членов ряда Фурье

Рассмотрим несколько примеров, поясняющих свойства интегралов от осциллирующих функций.

$$1. I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} dt}{\sqrt{a^2 + v^2 t^2}}, \omega \rightarrow \infty.$$

Особые точки подынтегрального выражения находятся на мнимой оси: $t = \pm i \frac{a}{v}$. Вычислим этот интеграл, смещая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость (см, рис. 4).

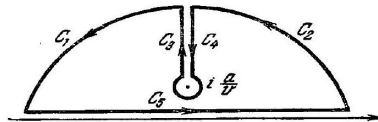


Рис. 4.

Интегралы по C_1 и C_2 исчезают при смещении контура в бесконечность. Поэтому рассматриваемый интеграл равен интегралу по контуру $C_3 + C_4 + C_5$ вокруг точки ветвления $t = i \frac{a}{v}$. Знаменатель подынтегрального выражения $\sqrt{a^2 + v^2 t^2}$ меняет знак при обходе точки ветвления. Поэтому интегралы по C_3 и C_4 равны (а не равны с противоположным знаком, как это было бы в случае обхода простого полюса). Интеграл по контуру C_5 стремится к нулю. В этом легко убедиться, заменяя $\frac{v}{a} t = i + r e^{i\varphi}$, причем $r \rightarrow 0$. Тогда

$$\int_{C_5} \sim \int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\varphi} d\varphi}{\sqrt{i e^{i\varphi}}} \sim \sqrt{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Вводя переменную интегрирования $x = \frac{v}{a} t$, имеем:

$$I = \frac{a}{av} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{\omega a x}{v}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x=i(1+\eta)}{=} \frac{2e^{-\frac{\omega a}{v}}}{v} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega a \eta}{v}} \frac{d\eta}{\sqrt{2\eta}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{v} e^{-\frac{\omega a}{v}} \sqrt{\frac{v}{\omega a}}.$$

(вроде как именно во 2-м тут равенстве мы и перешли к двум интегралам по контурам)

При больших ω интеграл I экспоненциально мал.

$$2. I = \int_{-1}^1 f(x) e^{ikr x} dx \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Этот интеграл возникает при вычислении амплитуды рассеяния (см. 2.1) (???). Пределы интегрирования здесь конечны. Интегрируя по частям, получим:

$$I = f(x) \frac{e^{ikr x}}{ikr} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 f'(x) e^{ikr x} dx = \frac{f(1)e^{ikr} - f(-1)e^{-ikr}}{ikr} + O\left(\frac{1}{k^2 r^2}\right).$$

Итак, в случае конечных пределов далекие фурье-компоненты малы степенным образом (вместо экспоненциальной малости в случае бесконечных пределов).

Обобщение результатов

Эти результаты можно обобщить: далекие фурьекомпоненты функций, не имеющих особенностей на вещественной оси, экспоненциально малы. Если x_1 - характерная длина $f(x)$ (это означает, что расстояние от вещественной оси до особой точки - порядка x_1), то

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \underset{\omega x_1 \gg 1}{\sim} e^{-\omega x_1}.$$

Оценим предэкспоненциальный множитель для фурьекомпоненты f_ω . Если $f(x)$ имеет полюс в комплексной плоскости ω , то

$$f_\omega \sim f(x_1) x_1 e^{-\omega x_1}.$$

Действительно, вычет C_1 функции f в точке полюса, как видно из размерности, имеет порядок $C_1 \sim f(x_1) x_1$. Если $f(x)$ имеет точку ветвления корневого типа, то, как мы видели на первом примере

$$f_\omega \sim \frac{f(x_1) x_1}{\sqrt{\omega x_1}} e^{-\omega x_1}.$$

В случае конечных пределов

$$f_\omega = \int_{a_1}^{a_2} f(x) e^{i\omega x} dx \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f(a_1)}{\omega}.$$

То же самое относится к интегралам в бесконечных пределах в случае, когда $f(x)$ имеет скачки на вещественной оси. Действительно, интеграл можно разбить на области от $-\infty$ до места скачка и от места скачка до ∞ . Если вычислять затем каждый из этих интегралов, то, как и в только что приведенном примере, возникнет степенная малость. В этом случае

$$f_\omega \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Delta f}{\omega},$$

где Δf - величина скачка.

Легко видеть, что если скачок имеет n -я производная функции $f(x)$, то

$$f_\omega \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Delta f^{(n)}}{\omega^{n+1}},$$

где $\Delta f^{(n)}$ - величина скачка функции $f^{(n)}(x)$. Чтобы убедиться в этом, нужно проинтегрировать по частям $n+1$ раз величину $f_\omega = \int_{-\infty}^a f(x) e^{i\omega x} dx + \int_a^\infty f(x) e^{i\omega x} dx$, где a - место скачка.

Пример для иллюстрации

Для иллюстрации этих результатов рассмотрим пример, на котором будет видно, как в далеких компонентах

Фурье экспоненциальная малость превращается в степенную, когда особенность функции приближается к вещественной оси. Именно, рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1 + e^{\alpha x}} dx, \omega = \omega_0 - i\delta, \delta \rightarrow +0, \quad \alpha > 0.$$

График функции $f(x) = \frac{1}{1+e^{\alpha x}}$ имеет вид, изображенный на рис. 5.

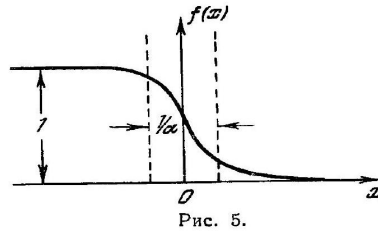


Рис. 5.

Если $\alpha \rightarrow \infty$, то эта функция стремится к прямоугольной ступеньке. Функция $f(x)$ имеет простые полюсы в точках $x = \frac{(2k+1)\pi i}{\alpha}$, где k - целое число. Если $\alpha \rightarrow \infty$, то каждый полюс приближается к вещественной оси. Вычислим интеграл, смещал контур интегрирования в верхнюю полуплоскость (рис. 6).

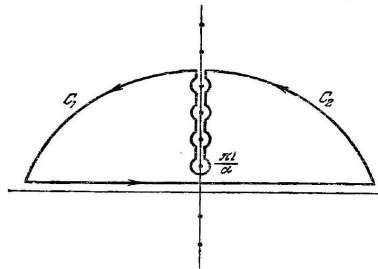


Рис. 6.

Интеграл по $C_1 + C_2$ обращается в нуль при смещении контура в бесконечность. Итак, рассматриваемый интеграл сводится к сумме вычетов в полюсах верхней полуплоскости. Для нахождения вычета разложим $e^{\alpha x}$ в ряд вблизи полюса x_k :

$$e^{\alpha x} \approx e^{\alpha x_k} + \alpha e^{\alpha x_k} (x - x_k) = -1 - \alpha (x - x_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= - \sum_{k=0}^{\infty} \text{Res} \int e^{i\omega x} \frac{dx}{-\alpha (x - x_k)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{\alpha} (2k+1)\pi} = \\ &= \frac{2\pi i}{\alpha} e^{-\frac{\pi\omega}{\alpha}} [1 + e^{-2\frac{\pi\omega}{\alpha}} + e^{-4\frac{\pi\omega}{\alpha}} + e^{-6\frac{\pi\omega}{\alpha}} + \dots]. \end{aligned}$$

Ряд в квадратных скобках представляет собой геометрическую прогрессию и его сумма равна $\frac{1}{1 - e^{-2\frac{\pi\omega}{\alpha}}}$. Следовательно,

$$I = \frac{2\pi i}{\alpha} \frac{e^{-\pi\omega/\alpha}}{1 - e^{-2\pi\omega/\alpha}} = \frac{\pi i}{\alpha \text{sh} \frac{\pi\omega}{\alpha}}.$$

Если $\omega/\alpha \gg 1$, то рассматриваемый интеграл экспоненциально мал:

$$I \underset{\omega/\alpha \gg 1}{\approx} \frac{2\pi i}{\alpha} e^{-\pi\omega/\alpha}.$$

Это соответствует сделанному выше утверждению об экспоненциальной малости далеких фурье-компонент в случае, когда подынтегральная функция не имеет особенностей на вещественной оси.

Если $\alpha \rightarrow \infty$, то

$$I \underset{\omega/\alpha \ll 1}{\approx} \frac{i}{\omega}.$$

Итак, когда особенность переходит на вещественную ось, фурье-компонента становится малой степенным образом.

З а а ч а Оценить далекую фурье-компоненту функции $f(x) = xe^{-|x|}$.

О т в е т.

$$f_{\omega} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2}{\omega^3}.$$

Оценки решений дифференциальных уравнений

Приведем несколько случаев качественного решения дифференциальных уравнений.

Квазиклассическое приближение

При рассмотрении многих задач теоретической физики требуется решить дифференциальное уравнение вида

$$\varphi'' + k^2(x)\varphi = 0.$$

Характер решения уравнения (1.5) существенно зависит от знака k^2 . Действительно, пусть k^2 - постоянная положительная величина. Тогда решение имеет осциллирующий характер: $\varphi = e^{\pm ikx}$. Если $k^2 < 0$, то решение экспоненциально растет или затухает: $\varphi = e^{\pm |k|x}$. Решение уравнения (1.5) имеет такой же характер, и когда k зависит от x (рис. 7).

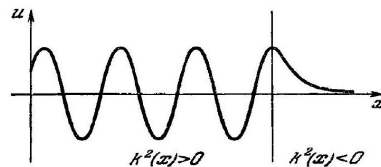


Рис. 7.

Если $k^2(x)$ - большое положительное число, то приближенное решение уравнения (1.5) имеет вид

$$\varphi = f(x) \exp \left\{ \pm i \int k(x) dx \right\},$$

где $f'(x)$ - медленно изменяющаяся функция. Действительно, в этом случае $\varphi' \approx \pm ik(x)\varphi$ и $\varphi'' \approx -k^2(x)\varphi \pm ik'(x)\varphi$. Если $k(x)$ - достаточно гладкая функция x , то $k' \ll k^2$ для существенных x . Следовательно, решение (1.6) приближенно удовлетворяет уравнению $\varphi'' + k^2(x)\varphi = 0$.

Можно найти и следующую поправку (подробнее см. 3.1). Так как $\varphi' = \frac{f'}{f}\varphi \pm ik\varphi$ и $\varphi'' \approx -k^2\varphi \pm ik'\varphi \pm 2ik\frac{f'}{f}\varphi$, то, подставляя φ и φ'' в $\varphi'' + k^2(x)\varphi = 0$, находим

$$2kf' + fk' = 0,$$

или

$$\frac{f'}{f} = -\frac{k'}{2k},$$

откуда

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Итак, приближенное решение уравнения $\varphi'' + k^2(x)\varphi = 0$ в случае больших положительных $k^2(x)$ имеет вид

$$\varphi \approx \frac{1}{\sqrt{k}} \exp \left\{ \pm i \int k(x) dx \right\}.$$

Примеры

Рассмотрим примеры.

а) $\varphi'' + \alpha x \varphi = 0, \alpha > 0$

Это уравнение для так называемой функции Эйри.

Пусть сначала $x > 0$. Тогда $k^2 = \alpha x > 0$, и согласно полученной формуле $\varphi \approx \frac{1}{\sqrt{k}} \exp \left\{ \pm i \int k(x) dx \right\}$ решение при больших x имеет вид

$$\varphi \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha x}} e^{\pm \frac{2}{3} i \sqrt{\alpha x^3}}.$$

А решение при $x < 0$ можно получить аналитическим продолжением:

$$\varphi \underset{|x| \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt[4]{\alpha |x|}} e^{\pm \frac{2}{3} \sqrt{\alpha |x|^3}}$$

Дополнительная фаза $\exp(-\pi i/4)$ возникает при обходе точки ветвления $x = 0$ (подробнее об этом см. 3.1). (!?!?!?)

б) $\varphi'' + (\alpha - \beta x^2) \varphi = 0$

Если $\beta x^2 \gg \alpha$, то $\int k dx \approx \sqrt{\beta} \int x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\beta} x^2$. Следовательно, асимптотическое решение при больших x имеет вид

$$\varphi \underset{x \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{\beta x^2}} e^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta} x^2}.$$

решение по поведению вблизи особых точек (???)

Построим решение по поведению вблизи особых точек. Зная решение дифференциального уравнения вблизи особых точек, можно построить

интерполяционные формулы для решения во всей области изменения переменной. В качестве примера рассмотрим уравнение Томаса-Ферми

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\varphi^{3/2}, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0.$$

Оно возникает при нахождении самосогласованного поля атома в квазиклассическом приближении (см. 3.1). Это уравнение имеет две особые точки: $x = 0$ и $x = \infty$.

Найдем приближенное решение ур Т-Ф при $x \rightarrow \infty$. Будем искать его в виде $\varphi = A/x^\alpha$. Подставляя это решение в ур Т-Ф, получим

$$A\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2} = A^{3/2}x^{-\frac{3}{2}\alpha-1/2},$$

откуда $\alpha + 2 = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}$, т. е. $\alpha = 3$ и $A^{1/2} = \alpha(\alpha+1)$, т. е. $A = 144$: Итак,

$$\varphi \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{144}{x^3}.$$

Найдем поправку к этому решению при $x \rightarrow \infty$:

$$\varphi \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{144}{x^3} + \psi.$$

Подставим (1.10) в (1.9). В линейном по ψ приближении находим

$$\psi'' = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{3}{2} \varphi^{1/2} \psi \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{x^2} \psi$$

Из (1.11) видно, что Ψ степенным образом зависит от x . Итак,

$$\psi = \frac{B}{x^\beta}.$$

Для β из (1.11) получаем квадратное уравнение

$$\beta(\beta+1) = 18,$$

откуда $\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{2}$. Годится лишь корень $\beta \approx 3,77 > 0$, для которого $\Psi \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Следовательно,

$$\varphi \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{144}{x^3} + \frac{B}{x^{3,77}}.$$

С той же степенью точности, что и в (1.12), решение можно написать в виде

$$\varphi = \frac{144}{x^3 \left(1 + \frac{C}{x^{0,77}} \right)^n},$$

где n и C -пока произвольные числа.

Найдем такое n , чтобы $\varphi(0)$ было конечно. Для этого должно быть $3 - 0,77n = 0$, т. е. $n = 3,90$. После этого константу C можно найти из условия $\varphi(0) = 1$: $144/C^{3,90} = 1$, откуда $C = (144)^{0,77/3} = (12^{2/3})^{0,27}$. Окончательно,

$$\varphi = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x}{12^{2/3}} \right)^{0,77} \right]^{3,90}}$$

Это приближенное решение удовлетворительно согласуется с точным решением, получаемым на компьютере:

x	$\varphi_{\text{прибл}}$	$\varphi_{\text{точн}}$	x	$\varphi_{\text{прибл}}$	$\varphi_{\text{точн}}$
0	1	1	2	0,22	0,24
0,3	0,67	0,72	3	0,14	0,16
0,5	0,56	0,61	5	0,072	0,079
1	0,38	0,42			

3.2 Other, Special Problems

3.2.1 Evaluating infinite products

Алгоритм нахождения бесконечных произведений

Примеры бесконечных произведений

(сборник Градштейна, мб понадобится когда-то, все-таки это хотя бы что-то)
(???? пока не умею такое доказывать, нужно будет - научусь.)

$$0.261 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right) = \sqrt{2} \ni 171$$

$$1. \prod_{h=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$2. \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

$$3. \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$0.263 \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}\right)^{\frac{1}{8}} \dots = e.$$

$$0.264 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{e}}{1 + \frac{1}{k}} = e^c.$$

$$0.265 \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots = \frac{2}{\pi}.$$

$$0.266 \prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2^k}) = \frac{1}{1-x} \quad [|x| < 1].$$

3.2.2 Summing Divergent Series

(write what is known about it?)

Теория в двух словах

Определение. Если суммирующая функция s_p определяется равенством

$$s_P(U) = s_P \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k x^k,$$

то такое суммирование называется суммированием по Пуассону - Абелю.

Примеры. 1. Для ряда

$$1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

суммирование по Пуассону - Абелю дает

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1 - x + x^2 - \dots) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

3.3 Special methods and formulas for physics

3.3.1 Summations for physics

Matsubara summations

Now, let us use the formula from Matsubara summations:

$$\sum_n \frac{e^{in\varphi}}{(n+B_1)(n+B_2)} = \begin{cases} -\oint_{\gamma} \frac{e^{i\varphi\zeta}}{(\zeta+B_1)(\zeta+B_2)} \frac{d\zeta}{e^{2\pi i\zeta}-1} & \varphi > 0 \\ -\oint_{\gamma} \frac{e^{i\varphi\zeta}}{(\zeta+B_1)(\zeta+B_2)} \frac{e^{2\pi i\zeta} d\zeta}{e^{2\pi i\zeta}-1} & \varphi < 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

3.3.2 Integrals for physics

4 On some special constructions

4.1 Other properties of typical branches of mathematics

4.1.1 Other properties of differential geometry

7.22. Площадь поверхности по Минковскому

7.23. Неравенство Брунна–Минковского и изопериметрическое неравенство

4.1.2 Basics of complex analysis

(maybe later I'll make a bigger section and maybe I'll move it to the previous part (to details of basics of math an), but first, I'll write it in the note on compl an)

10.1. Дифференцируемость в комплексном смысле

$$df = du + idv = u'_x dx + u'_y dy + iv'_x dx + iv'_y dy = \partial f dz + \bar{\partial} f d\bar{z}$$

где

$$dz = dx + idy, d\bar{z} = dx - idy, \partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Тогда, при наличии дифференцируемости f как отображения на вещественной плоскости, условие комплексной дифференцируемости записывается как

$$\bar{\partial} f = 0,$$

или в чисто действительном виде (условия Коши-Римана)

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x.$$

10.2. Криволинейный интеграл функции комплексного переменного и интегральная теорема Коши

10.3. Первообразная функции комплексного переменного и универсальное накрытие области

10.4. Интегральная формула Коши и аналитичность

Теорема 10.16 (Общая интегральная формула Коши). Пусть $U \subset \mathbb{C}$ - ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что U при обходе остаётся

слева. Если $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ аналитическая и непрерывно продолжается на границу U , то для любой $z \in U$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

10.5. Ряд Лорана и особенности функции в точке

Теорема 10.21 (Ряд Лорана). Если f аналитическая в кольце $A_{r,R}(z_0)$, то в нём она представляется в виде абсолютно сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

10.6. Контурные интегралы и вычеты

10.7. Аналитические продолжения функций

10.8. Открытость и принцип максимума

10.9. Свойство компактности для аналитических функций

4.1.3 complex analysis: other well-known properties

10.10. Конформные отображения

10.11. Теорема Римана об отображении

10.12. Накрытия многообразий и универсальное накрытие

10.13. Фундаментальная группа многообразия

10.14. Общая теорема Римана и теорема Пикара

4.2 Other, Purely Mathematical Theories

4.2.1 Functional Spaces: Basics

(всякая теория, про которую можно подумать, если уже все остальное сделано)

What functional analysis can give for physicists what can't be obtained in another way?

(szego limiting theorem)

(that question about commutation of phase operator and number operator)

9.12. Борелевские меры со знаком на R^n и плотность меры

9.13. Двойственное к пространству непрерывных функций на отрезке

9.14. Распределения (обобщённые функции) из $W^{-\infty,2}$ и E

Для пространства $L_2(\mathbb{K})$ мы уже установили, что двойственное ему пространство можно идентифицировать с ним самим, сопоставляя функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ линейный

функционал

$$\lambda_g(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Пример с двойственным пространством к $C[a, b]$ и теоремой Рисса намекает на то, что для расширения двойственного пространства мы можем рассмотреть какое-либо «меньшее» функциональное пространство $\mathcal{F}$, с более жёсткими ограничениями на функции, для которого вложение $I : \mathcal{F} \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ непрерывно с точки зрения топологии $\mathcal{F}$ и $L_2(\mathbb{R})$. Тогда возникает сопряжённое отображение (см. определение 9.32) двойственных пространств $I^* : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}'$, $I^*(\lambda) = \lambda \circ I$, и получается, что мы не только вложили $\mathcal{F}$ в $L_2(\mathbb{R})$, но и расширили пространство $L_2(\mathbb{R})$ до пространства $\mathcal{F}'$. Инъективность I^* будет обеспечена плотностью $\mathcal{F}$ в $L_2(\mathbb{R})$ в топологии L_2 .

Достаточно удобно выбрать пространство $\mathcal{F}$ нормированным или даже гильбертовым. Например, гильбертовым пространством будет пространство Соболева $W^{k,2}(\mathbb{R})$, состоящие из функций с k -й обобщённой производной (при локально абсолютно непрерывной $(k-1)$ -й производной) и с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 + \dots + \|f^{(k)}\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Можно проверить (проверьте полноту в качестве упражнения), что эти пространства на самом деле гильбертовы. Определяя

$$W^{-k,2} = (W^{k,2})'$$

мы получим целую последовательность пространств, связанных непрерывными инъективными отображениями (слева идут естественные вложения, а справа - их сопряжения)

$$\dots \rightarrow W^{k,p} \rightarrow W^{k-1,p} \rightarrow \dots \rightarrow W^{1,2} \rightarrow W^{0,2} = L_2 \rightarrow W^{-1,2} \rightarrow \dots W^{-k+1,2} \rightarrow W^{-k,2} \rightarrow \dots$$

В итоге можно будет определить пространство $W^{\infty,2}$ как пересечение всех пространств Соболева с топологией, заданной счётным семейством соболевских норм, все эти функции уже будут бесконечно гладкие. Также можно определить $W^{-\infty,2}$ как объединение всех пространств Соболева, на самом деле окажется, что

$$W^{-\infty,2} = (W^{\infty,2})'.$$

Теорема 9.164. Любое распределение $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ задаётся интегрированием производных $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ по борелевским мерам со знаком конечной вариации на некотором отрезке:

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^m \varphi d\mu_0 + \int_{-m}^m \varphi' d\mu_1 + \dots + \int_{-m}^m \varphi^{(k)} d\mu_k.$$

Определение 9.168. Последовательность элементов (x_n) топологического векторного пространства $\mathcal{T}$ является фундаментальной, если $x_n - x_m \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Более подробно: если для любой окрестности нуля $U \subseteq \mathcal{T}$ найдётся натуральное N , такое что $x_n - x_m \in U$ при $n, m \geq N$.

Определение 9.169. Топологическое векторное пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём имеет предел. Лемма 9.170. Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ полно.

- 9.15. Распределения из D' , регулярные и нерегулярные обобщённые функции
 9.16. Производная распределения и топология в пространстве D'
 9.17. Умножение распределения на функцию
 9.18. Носитель распределения и E' как распределения с компактным носителем

9.19. Распределения из S' и преобразование Фурье

4.2.2 Functional Spaces: Advanced topics

9.8. Теорема Хана–Банаха

(??? I have no idea still, why it is useful???)

Лемма 9.88. Любой непрерывный функционал $\lambda : E \rightarrow \mathbb{C}$ на банаховом пространстве E над полем комплексных чисел однозначно определяется своей действительной частью $\operatorname{Re} \lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$

Теорема 9.89 (Теорема Хана–Банаха). Пусть E - банахово пространство, $F \subset E$ - его линейное подпространство. Тогда любой ограниченный линейный функционал $\lambda \in F'$ продолжается до линейного функционала на всём E без увеличения его нормы.

Следствие 9.90. Для любого банахова пространства E и его ненулевого элемента $x \in E$ найдётся $\lambda \in E'$, такой, что $\|\lambda\| = 1$ и $\lambda(x) = \|x\|$.

Следствие 9.92. Естественное отображение банахова пространства в двойственное к его двойственному (второе двойственное)

$$E \rightarrow E'', x \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(x))$$

является вложением, сохраняющим норму.

9.9. Лемма Цорна и трансфинитная индукция

Суть (???)

б

(пока хз, ничего не разобрал.)

Определение 9.97. Множество X называется вполне упорядоченным, если на нём введён линейный порядок, в котором любое непустое подмножество $Y \subseteq X$ имеет минимальный элемент.

Определение 9.98. Начальным интервалом линейно упорядоченного множества R называется его подмножество I , обладающее свойством: если $x \in R, y \in I$ и $x < y$, то $x \in I$. Лемма 9.99. Объединение любого семейства начальных интервалов линейно упорядоченного множества X тоже является начальным интервалом.

О применениях (????)

(пока нигде не нужно, но тут очень хочется уж оставить указание)

9.10. Теорема Тихонова

Теорема 9.112 (Теорема Тихонова). Пусть A - некоторое множество, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство компактных топологических пространств, индексированное этим множеством. Тогда будет компактным и декартово произведение

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

9.11. *—слабая топология и компактность в двойственном пространстве

9.20. Многомерные распределения и распределения на многообразиях

9.21. Конечно-аддитивные меры и ультрафильтры

9.22. Мера Хаара

Лемма 9.245. Компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства замкнуто.

Лемма 9.246. В локально компактном хаусдорфовом пространстве X для любой окрестности U точки x найдётся её меньшая окрестность $V \ni x$, такая что её замыкание $\text{cl } V$ компактно и содержится в U .

Лемма 9.247. В локально компактной хаусдорфовой топологической группе G для любого компактного множества K и замкнутого F , которые не пересекаются, найдётся окрестность единицы $U \ni e$, такая что $KU = \{gh | g \in K, h \in U\}$ не пересекается с $FU = \{gh | g \in F, h \in U\}$.

Определение 9.249. Функция $\mu^* : 2^S \rightarrow [0, +\infty]$ называется внешней мерой на множестве S , если она монотонна, $\mu^* X \leq \mu^* Y$ при $X \subseteq Y$, счётно субаддитивна,

$$\mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(X_k),$$

и $\mu^*(\emptyset) = 0$. Определение 9.250. При наличии внешней меры μ^* на множестве S подмножество $E \subseteq S$ называется измеримым по Каратеодори относительно μ^* , если для любого $A \subseteq S$ выполняется $\mu^* A = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$.

4.2.3 Mathematical logic: basics

(просто указание на это, отдельная про это запись так-то есть, ну и не нужно это вообще пока было. пока не планирую думать про это.)

Part IV

General Fundamentals

Подробно обсудим основы анализа, необходимые для глубокого понимания предмета.

5 Fundamentals of Mathematical Analysis

Приведем базовые темы теории чисел, поняв которые можно начать ей заниматься или хотя бы что-то уметь делать.

5.1 Numbers: Basics

(???? maybe these topics are not that important and I'll decrease the sections below. I'll think later)

5.1.1 integers

О формуле Стирлинга через формулу Валлиса (??)

(она нужна? если да, у Балашова спису)

5.1.2 Rational Numbers

Обсудим подробно рациональные числа.

Определение рациональных чисел

уточним, что от рациональных чисел мы предполагаем возможность складывать и умножать их, а также делить в тех случаях, где мы делим не на нуль, со свойствами коммутативности, дистрибутивности, ассоциативности.

Также мы предполагаем возможность сравнивать рациональные числа и оперировать с неравенствами стандартным образом, прибавлять одно и то же число к обеим частям неравенства, умножать неравенство на положительное число, либо умножать неравенство на отрицательное число, переворачивая его знак.

Следует отметить, что рациональные числа образуют множество, то есть некий объект X , такой что для любого другого объекта Y мы можем узнать, является ли Y элементом X ($Y \in X$) или не является ($Y \notin X$).

5.1.3 Sets and Mappings

Задание множества перечислением

В общем случае понять это может быть непросто, но самый простой способ задать множество - задать его явным перечислением, например множество цифр

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

тогда не составит труда для всякого объекта определить, является ли он элементом этого множества.

Хотя конечно могут остаться философские вопросы, например, является ли цифра, набранная другим шрифтом, 9, элементом множества D , или не является; но в целом уже ясно, о чём идёт речь.

Для множеств определены операции объединения, пересечения и разности по формулам

$$x \in X \cup Y \leftrightarrow x \in X \text{ или } x \in Y$$

$$x \in X \cap Y \rightarrow x \in X \text{ и } x \in Y$$

$$x \in X \setminus Y \leftrightarrow x \in X \text{ и } x \notin Y$$

Здесь $\leftrightarrow$ читается как «тогда и только тогда, когда» или «равносильно».

Множество Y называется подмножеством множества X , $Y \subseteq X$, если всякий элемент Y является элементом X .

Мы считаем, что допустимо строить подмножество множества X с помощью выражений типа

$$Y = \{x : x \in X, P(x)\}$$

где $P(x)$ - некоторое логическое условие на элемент x , которое может выполняться или нет.

Мы не конкретизируем, какие именно условия допустимы, а какие нет; будем полагаться в этом на интуицию.

Если у множества нет элементов, оно называется пустым, $\emptyset$, оно является подмножеством любого другого множества.

Множество состоит из одного элемента, если оно непусто и любые Два его элемента совпадают.

Множество состоит из двух элементов, если у него найдутся два несовпадающих элемента и любой другой его элемент совпадает с одним из этих двух.

Мы будем считать, что для всякого множества X можно говорить о множестве всех подмножеств X .

Более интересная операция - декартово произведение Двух множеств $X \times Y$.

Это множество упорядоченных пар (x, y) , таких что $x \in X$ и $y \in Y$.

Иначе говоря, если X и Y не пересекаются, то это просто множество двухэлементных подмножеств $P \subseteq X \cup Y$, таких что $X \cap P$ и $Y \cap P$ состоят ровно из одного элемента.

Если множества пересекаются, то может понадобится конструкция похитрее, над которой читателю предлагается подумать самостоятельно.

Пока мы считаем интуитивно ясным понятие множество состоит из одного элемента и множество состоит из двух элементов, хотя развитие этого понятия приводит к нетривиальной концепции «мощности множества».

Определения про отображения

Определение отображения

Отображением между двумя множествами $f : X \rightarrow Y$ называется подмножество $X \times Y$, такое что для всякого $x \in X$ найдётся ровно один $y \in Y$ такой что $(x, y) \in f$.

Последнюю формулу часто пишут в виде $y = f(x)$ и говорят, что y - образ x при отображении f .

Мы говорим, что X - область определения, Y - области значений.

Определение композиции отображений

Композиция отображений $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ - это отображение $h : X \rightarrow Z$ такое что

$$z = h(x) \leftrightarrow \exists y \in Y : f(x) = y \text{ и } g(y) = z$$

Пишут $h = g \circ f$. Здесь $\exists \dots : \dots$ читается как "существует... такое что...".

Можно проверить, что построенное в этом определении $h \subseteq X \times Z$ действительно является отображением.

Определение образа и прообраза

Образ X при отображении $f : X \rightarrow Y$ определяется как

$$f(X) = \{y : y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)\}$$

Для всякого подмножества $Z \subseteq Y$ определим прообраз

$$f^{-1}(Z) = \{x : x \in X, f(x) \in Z\}$$

Определение тождественного отображения

Тождественное отображение $\text{id}_X : X \rightarrow X$ состоит из всех пар вида (x, x) , где $x \in X$, то есть всегда $\text{id}_X(x) = x$.

Определение взаимно обратного отображения

Отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ взаимно обратным, если $f \circ g = \text{id}_Y$ и $g \circ f = \text{id}_X$.

Эквивалентно, $f \subseteq X \times Y$ превращается в $g \subseteq Y \times X$ при перестановке первого и второго элемента в упорядоченных парах.

Отображение, у которого существует обратное, называется обратимым или биекцией.

Задача о правом и левом взаимно обратном отображении (???)

Выясните, что означает существование у отображения $f : X \rightarrow Y$ правого обратного g , для которого $f \circ g = \text{id}_Y$.

Аналогично для левого обратного, для которого

$$g \circ f = \text{id}_X$$

Говоря о множестве X , мы также можем говорить о множестве подмножеств X .

Множество подмножеств X находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всевозможных отображений $\chi : X \rightarrow \{0, 1\}$.

Характеристическая функция множества

Конструкция характеристической функции множества

Более подробно, для подмножества $Y \subseteq X$ мы можем определить отображение

$$\chi_Y : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Y \\ 0, & \text{если } x \notin Y \end{cases}$$

Оно называется характеристическая функция множества Y .

Обратно, зная характеристическую функцию $\chi : X \rightarrow \{0, 1\}$, мы можем восстановить подмножество как $Y = \chi^{-1}(1)$.

для любых множеств A и B множество всевозможных отображений $A \rightarrow B$ часто обозначают B^A , а с учётом приведённого выше описания множество подмножеств X можно обозначить как $\{0, 1\}^X$, или несколько неформально 2^X .

О применениях хар функции множеств

(в теореме например, есть, укажу потом)

5.1.4 Equivalence relation

Работая с декартовым произведением множества на себя, аналогично отображениям мы можем определить отношение эквивалентности и отношение порядка.

Конструкция

Определение

Отношением эквивалентности на множестве X называется

$$\sim \subseteq X \times X$$

удовлетворяющее следующим свойствам (вместо $(x, y) \in \sim$ мы будем писать $x \sim y$): (рефлексивность) $\forall x \in X, x \sim x$ (для любого $x \in X$ имеем $x \sim x$); (симметричность) $x \sim y \leftrightarrow y \sim x$ ($x \sim y$ тогда и только тогда, когда $y \sim x$); (транзитивность) $x \sim y$ и $y \sim z \rightarrow x \sim z$ (из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$).

При наличии на X отношения эквивалентности, для любого $x \in X$ можно определить

$$C_x = \{y : y \in X, y \sim x\}$$

это класс эквивалентности.

Тогда легко проверить, что $C_x = C_y \leftrightarrow x \sim y$ и $C_x \cap C_y = \emptyset \leftrightarrow x \not\sim y$.

Таким образом всё множество X разбивается на непустые классы эквивалентности, множество которых обозначается $X / \sim$, это фактормножество по отношению эквивалентности.

Отображение, сопоставляющее x его класс эквивалентности C_x ($x \mapsto C_x$) называется проекцией на фактормножество $X \rightarrow X / \sim$.

Можно заметить, что любое отображение $f : X \rightarrow Y$ даёт отношение эквивалентности $x \sim_f y \leftrightarrow f(x) = f(y)$.

таким образом отношение эквивалентности $\sim$ восстанавливается из его проекции $X \rightarrow X / \sim$.

Пример

В качестве простого примера отношения эквивалентности можно привести сравнимость действительных чисел по модулю натурального числа π . По определению,

$$x \equiv y \pmod{\pi} \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = k\pi.$$

Соответствующее отображение на фактормножество $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} / (\pi)$ называется «взятие остатка по модулю π ».

Более важный для нас пример - множество рациональных чисел. Оно определяется как фактормножество множества дробей

$$F = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

по отношению эквивалентности

$$\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'} \leftrightarrow pq' = p'q$$

Задача

8.

Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$ и рассматривается проекция на фактормножество $P : X \rightarrow X/\sim$.

Докажите, что отображение $f : X \rightarrow Y$ представляется в виде $f = g \circ P$, для некоторого $g : X/\sim \rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда для любых $x' \sim x''$ оказывается $f(x') = f(x'')$.

Отношение порядка

Определение отношения порядка

Отношением порядка на множестве X называется

$$\preceq \subseteq X \times X$$

удовлетворяющее следующим свойствам (вместо $(x, y) \in \preceq$ мы будем писать $x \preceq y$):

(рефлексивность) $\forall x \in X, x \preceq x$;

(антисимметричность) $x \preceq y$ и $y \preceq x$ влечёт $x = y$;

(транзитивность) $x \preceq y$ и $y \preceq z \rightarrow x \preceq z$.

О применениях (??)

(?? и зачем оно?)

Определение

Отношение порядка $\preceq \subseteq X \times X$ называется линейным порядком, если для любых двух $x, y \in X$ выполняется $x \preceq y$ или $y \preceq x$.

Иногда не обязательно линейный порядок называют частичным порядком.

В качестве примера отношения порядка можно рассмотреть стандартный порядок на множестве целых чисел:

$$n \leq m \leftrightarrow m - n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

и на множестве рациональных чисел:

$$\frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \leftrightarrow q'p \leq p'q$$

Читателю предлагается в качестве упражнения проверить выполнение свойств отношения порядка.

Тривиальная задача о порядках (???)

Проверьте, что отношение на парах целых чисел

$$(n, m) \preceq (n', m') \leftrightarrow n \leq n' \text{ и } m \leq m'$$

является отношением порядка, но не является линейный порядком.

О задачах типа “доказать, что $2 > 1$ ”

(тут я обсужу это. насколько такие задачи вообще имеют смысл?? пока не до этого.)

Определение

Если множество X имеет отношение порядка, то элемент $x \in X$ называется минимальным, если не существует элементов $y \in X$ таких, что $y \preceq x$ и $y \neq x$.

Аналогично можно определить максимальный элемент.

В случае линейно упорядоченного множества, минимальность элемента $x \in X$ можно сформулировать проще, как выполнение неравенства $x \preceq y$ для любого $y \in X$.

в линейно упорядоченном множестве минимальный элемент единственный

Докажите, что в линейно упорядоченном множестве минимальный элемент единственный.

(не актуально)

пример, когда в частично упорядоченном множестве минимальный элемент не единственный

Приведите пример, когда в частично упорядоченном множестве минимальный элемент не единственный.

(хз)

Определение конечного множества

Подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ называется конечным, если оно либо пустое, либо имеет максимальный элемент.

Более подробно понятия конечного и бесконечного будут рассматриваться в разделе 1.13.

Пока же при работе с натуральными числами полезно иметь в виду характеристическое свойство натуральных чисел, аксиому математической индукции: Если подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ содержит число 1 и из того, что $n \in X$ следует, что $n + 1 \in X$, тогда $X = \mathbb{N}$

Вывод свойства полной индукции

Выведите из аксиомы математической индукции свойство «полной индукции»: Если подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ обладает свойством

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\forall m < n, m \in X) \rightarrow n \in X,$$

то $X = \mathbb{N}$

[[
Рассмотрите множество $Y = \{n : \forall m < n, m \in X\}$.
]]

Любой линейный порядок на конечном множестве всегда имеет минимальный элемент (???)

Докажите, что любой линейный порядок на конечном множестве всегда имеет минимальный элемент.

Приведите пример (частичного) порядка на конечном множестве, у которого нет минимального элемента.

||

Считайте, что конечное множество является подмножеством $\mathbb{N}$, рассмотрите максимальный элемент конечного множества и проведите математическую индукцию по нему.

||

5.1.5 Real numbers and their completeness

(пока не до этого раздела. как-нибудь сяду, проделаю доказательства эти, работа на денек.)

эквивалентное определение предела

Определение предела и фундаментальности действительных чисел такое же, как в случае рациональных.

Однако нам удобно будет дать эквивалентное определение предела:

Число $a_0 \in \mathbb{R}$ является пределом последовательности (a_n) действительных чисел, если для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдётся номер N , такой что при $n \geq N$ выполняется $|a_n - a_0| < \varepsilon$, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$$

или $a_n \rightarrow a_0$ и говорят, что a_n стремится к a_0 при $n \rightarrow \infty$.

Это важно, так как вследствие этого предыдущее определение нам достаточно проверить для рациональных $\varepsilon > 0$. А именно, если нам дано положительное $\varepsilon \in \mathbb{R}$, то мы найдём k такое, что $0 < 1/k < \varepsilon$. Подставив $1/k$ вместо ε в определение и получив N , мы обнаружим, что это N годится и для исходного ε .

Аналогичное верно для определения фундаментальности последовательности действительных чисел, ε в нём достаточно рассматривать только рациональные.

Лемма об одинаковом пределе для одной и той же последовательности с элементами в смысле рациональных и действительных чисел

Если число $\alpha \in \mathbb{R}$ представлено фундаментальной последовательностью рациональных (a_n) , то в смысле определения предела последовательности действительных чисел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

Доказательство

По определению предела мы должны доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно больших n выполняется неравенство действительных чисел

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon,$$

причём по замечанию перед формулировкой леммы можно считать $\varepsilon > 0$ рациональным.

Это неравенство равносильно выполнению двух неравенств действительных чисел

$$a_n - \alpha - \varepsilon < 0, \quad a_n - \alpha + \varepsilon > 0.$$

Для установления первого неравенства мы должны проверить, что представляющая действительное число $a_n - \alpha - \varepsilon$ последовательность рациональных чисел $(a_n - a_m - \varepsilon)_m$ (n фиксировано, а последовательность индексируется $m \in \mathbb{N}$) при достаточно больших m состоит из рациональных чисел, меньших некоторого фиксированного отрицательного рационального числа.

Во втором неравенстве нам надо проверить, что последовательность $(a_n - a_m + \varepsilon)_m$ при достаточно больших m состоит из рациональных чисел, больших некоторого фиксированного положительного рационального числа.

По определению фундаментальности (a_n) при достаточно большом n и всех $m \geq n$ будет выполняться неравенство для рациональных чисел $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$.

Тогда при достаточно больших n и всех $m \geq n$ будут выполняться неравенства

$$a_n - a_m - \varepsilon < -\varepsilon/2, \quad a_n - a_m + \varepsilon > \varepsilon/2$$

Это как раз означает, что при достаточно больших n оказывается

$$a_n - \alpha - \varepsilon < 0, \quad a_n - \alpha + \varepsilon > 0$$

Лемма о существовании двумя разными действительными числами рационального числа

Между двумя разными действительными числами есть рациональное.
(почему не очевидно?)

Доказательство

Пусть $a < b \in \mathbb{R}$, а $c = (a + b)/2$ лежит между ними.
Возьмём $\varepsilon = c - a = b - c > 0$, тогда

$$(a, b) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

Возьмём теперь фундаментальную последовательность рациональных чисел (c_n) , представляющую c .

Она стремится к c по предыдущей лемме, следовательно рациональные числа c_n для достаточно больших n попадают в $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) = (a, b)$.

Теорема о полноте множества действительных чисел (???)

Последовательность действительных чисел имеет предел в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство

Из сходимости последовательности к числу следует её фундаментальность, аналогично доказанному для рациональных чисел.

(???)

Обратно, пусть у нас есть фундаментальная последовательность действительных чисел (a_n) , представим каждое a_n как предел последовательности рациональных чисел $(a_{n,k})_k$ (последовательность индексируется числом k).

Так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k} = a_n,$$

то из элементов $a_{n,k}$ можно выбрать рациональное b_n , такое что $|a_n - b_n| < 1/n$.

Тогда последовательность (b_n) является последовательностью рациональных чисел, эквивалентной (a_n) в смысле, аналогичном эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Фундаментальность (b_n) проверяется с помощью неравенства

$$|b_n - b_m| \leq |a_n - a_m| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

в котором при достаточно больших n и m будет выполняться $|a_n - a_m| < \varepsilon/3$, и будет выполняться $1/n, 1/m < \varepsilon/3$ по следствию 1.44.

Фундаментальная последовательность рациональных чисел (b_n) представляет некоторое число $b \in \mathbb{R}$ и стремится к нему. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geq N(\varepsilon/2)$ будет выполняться $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Тогда будет выполняться и $|a_n - b| < \varepsilon/2 + 1/n$, что при достаточно большом n с учётом следствия 1.44 даст $|a_n - b| < \varepsilon$. То есть b - это предел (a_n) по определению.

О случаях применения теоремы о полноте действительных чисел

(тут пока хз, потом укажу.)

Определение ограниченной сверху последовательности действительных чисел

Последовательность действительных чисел (a_n) ограничена сверху, если найдётся $M \in \mathbb{R}$, такое что $a_n \leq M$ для всех n ; ограничена снизу, если найдётся $M \in \mathbb{R}$, такое что $a_n \geq M$ для всех n ; ограничена, если найдётся $M \in \mathbb{R}$, такое что $|a_n| \leq M$ для всех n .

Определение монотонно возрастающей и убывающей последовательности

Последовательность действительных чисел (a_n) монотонно возрастает, если для любого n выполняется $a_n \leq a_{n+1}$; монотонно убывает, если для любого n выполняется $a_n \geq a_{n+1}$.

Если неравенства строгие, то говорят, что последовательность строго возрастает и строго убывает соответственно.

5.1.6 Real Numbers: Other Properties

Основные свойства числа e

О формуле Валлиса

(из каталога перекину сюда потом)

Рассмотрите интегралы $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Выведите рекуррентную формулу

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\text{где } I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1).$$

Докажите, что

Формула Виллиса:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Здесь для натурального n через $n!!$ обозначено произведение всех натуральных чисел, меньших или равных n и одной с ним четности, $0!! = 1$.

Теорема о существовании предела монотонной последовательности действительных чисел

Монотонная последовательность действительных чисел имеет предел, если она ограничена, то этот предел конечен.

(?? очевидно же, нет?)

Доказательство

Пусть последовательность (a_n) возрастает, без ограничения общности.

Если она неограничена сверху, то запишем отрицание определения ограниченности: для любого $M \in \mathbb{R}$, найдётся $n = N(M)$, такое что $a_n > M$.

Так как последовательность монотонно возрастает, то отсюда следует, что $a_n > M$ при $n \geq N(M)$. А это есть определение стремления к $+\infty$.

Так что остаётся показать, что возрастающая и ограниченная сверху (а значит и снизу) последовательность имеет конечный предел. Нам надо доказать, что последовательность фундаментальна и использовать теорему 1.36. Предположим противное и выпишем отрицание фундаментальности

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n, m \geq N : |a_n - a_m| \geq \varepsilon$$

Без ограничения общности можно считать $n < m$ и $a_m - a_n \geq \varepsilon$.

Найдём одну пару таких чисел a_{n_1}, a_{m_1} , чтобы $a_{m_1} \geq a_{n_1} + \varepsilon$.

Положим в отрицании $N = m_1 + 1$ и найдём ещё одну пару a_{n_2}, a_{m_2} , чтобы $a_{m_2} \geq a_{n_2} + \varepsilon$ и $n_2 > m_1$.

Продолжая так далее, будем находить пары a_{n_k}, a_{m_k} , чтобы $a_{m_k} \geq a_{n_k} + \varepsilon$ и $n_k > m_{k-1}$.

Из монотонности последовательности также последует, что $a_{n_k} \geq a_{n_{k-1}} + \varepsilon$, то есть в итоге

$$a_{n_k} \geq a_{n_1} + (k-1)\varepsilon$$

Отсюда очевидно, что последовательность неограниченна сверху, противоречие.

5.1.7 Complex Numbers: Basic Properties

(?? другого про многочлены вроде вообще нет у меня??)

Конструкция комплексных чисел

Определим комплексные числа, как пары покомпонентно и перемножаемые с использованием правила $i^2 = -1$, то есть как

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$$

При этом a называется действительной частью, а b - мнимой частью комплексного числа $a + ib$.

Действительные числа вкладываются в комплексные с помощью отображения $x \mapsto x + i0$. выполняется равенство

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

После этого можно заметить, что при $z \neq 0$ число (деление на действительное число происходит покомпонентно)

$$z^{-1} = \frac{z}{z\bar{z}}$$

является обратным по умножению числу z .

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$, так как на самом деле это то же самое $\mathbb{R}^2$ в смысле метрики

$$\rho(z, z') = \sqrt{(z - z')(\overline{z - z'})}$$

то мы будем применять к множеству комплексных чисел все топологические понятия, которые мы имеем для евклидовых пространств.

О кватернионах (?)

(и зачем это сюда ставить?)

На множестве четвёрок действительных чисел, записываемых в виде $a+ibj+kd$ введём умножение по правилам

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -j, ik = -j$$

это называется кватернион.

Докажите, что у всякого ненулевого кватерниона есть обратный относительно умножения.

[[
Определите сопряжение и действуйте как с комплексными числами.
]]

О свойствах комплексных чисел

Важное отличие комплексных чисел от действительных - отсутствие линейной упорядоченности.

С другой стороны, у комплексных чисел есть и преимущества по сравнению с действительными.

Запишем два комплексных числа в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

при этом r_i и φ_i называются модуль и аргумент комплексного числа; аргумент определён с точностью до прибавления числа вида $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, а для нуля аргумент не определён.

С помощью тригонометрических формул легко проверить, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, это объясняет полезность такой записи.

Часто выражение $\cos \varphi + i \sin \varphi$ записывают в виде $e^{i\varphi}$.

Это оправданно, так как при таком обозначении выходит $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}$.

После разложения экспоненты и тригонометрических функций в ряды Тейлора мы увидим еще более убедительные причины для таких обозначений.

В более общем виде можно определить

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Решение уравнения $z^n = 1$

После этого можно заметить, что уравнение

$$z^n = 1$$

в комплексных числах имеет n корней, которые можно записать в виде

$$w_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

это легко проверяется возведением в степень в тригонометрической записи.

Более того, для ненулевого $v = re^{i\varphi}$ уравнение

$$z^n = v$$

имеет n корней

$$w_k = |v|^{1/n} e^{i\frac{2\pi k + \varphi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Это свойство можно обобщить, рассмотрев произвольный многочлен с комплексными коэффициентами

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, c_n \neq 0,$$

число n называется его степенью.

В окрестности всякой точки z_0 можно подставить в многочлен выражение $z_0 + t$ и заметить, что

$$P(z_0 + t) = P(z_0) + P'(z_0)t + r(z_0, t)$$

где

$$P'(z) = c_1 + 2c_2 z + \dots + nc_n z^{n-1}$$

а остаток $r(z_0, t)$ при фиксированном z_0 оценивается по модулю как $C|t|^2$ в малой окрестности z_0 .

Это означает, что многочлен является непрерывной функцией комплексного переменного, которая также дифференцируема в комплексном смысле, то есть записывается в виде

$$P(z_0 + t) = P(z_0) + P'(z_0)t + o(|t|), \quad t \rightarrow 0.$$

Алгебраическая замкнутость комплексных чисел

Формулировка

Всякий многочлен P с комплексными коэффициентами положительной степени имеет хотя бы один комплексный корень, то есть число $z \in \mathbb{C}$, такое что $P(z) = 0$.

Доказательство (!?!?)

Без ограничения общности можно считать старший коэффициент многочлена c_n равным 1. Тогда можно записать

$$P(z) = z^n \left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_0}{z^n} \right).$$

При $|z| \geq R$ модуль выражения в скобках оценивается как

$$\left| 1 - \frac{|c_{n-1}|}{R} - \dots - \frac{|c_0|}{R^n} \right| \leq \left| 1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_0}{z^n} \right| \leq \left| 1 + \frac{|c_{n-1}|}{R} + \dots + \frac{|c_0|}{R^n} \right|$$

и стремится к единице при $R \rightarrow +\infty$.

Так как $|z^n| \geq R^n \rightarrow +\infty$ при $R \rightarrow +\infty$, мы делаем вывод, что $|P(z)|$ стремится к $+\infty$ при $|z| \rightarrow +\infty$.

Если $P(0) = c_0$, то мы можем выбрать R таким, что $|P(z)| \geq |c_0| + 1$ при $|z| \geq R$.

Тогда минимальное по модулю значение $|P(z)|$ на круге $|z| \leq R$ существует как минимум непрерывной на компакте функции, и на самом деле является глобальным минимумом $|P(z)|$ на всём $\mathbb{C}$.

Пусть точка минимума - это z_0 .

Тогда выражение

$$Q(t) = P(z_0 + t)$$

тоже является многочленом от t степени n (проверьте это явно).

Распишем его в виде

$$Q(t) = d_0 + d_1 t + \dots + d_n t^n.$$

Мы хотим доказать, что $d_0 = 0$, тогда окажется $Q(0) = P(z_0) = 0$ и мы найдем корень.

Предположим противное, что $d_0 \neq 0$.

Пусть за коэффициентом d_0 идёт некоторое количество нулевых коэффициентов, а на k -м месте оказался $d_k \neq 0$, тогда можно записать

$$Q(t) = d_0 + d_k t^k + o(|t|^k) = d_0 + d_k t^k (1 + o(1))$$

при $t \rightarrow 0$.

Найдем (по замечаниям перед формулировкой теоремы) число w , такое что

$$d_k w^k = -d_0$$

тогда подставив $t = ws$, мы получим

$$Q(ws) = d_0 - d_0 s^k (1 + o(1)) = d_0 (1 - s^k (1 + o(1)))$$

при $s \rightarrow 0$.

Это выражение показывает, что если s будет стремиться к нулю по действительным положительным числам, то мы увидим значения $|Q(ws)|$, меньшие $|Q(0)|$.

Получаем противоречие с выбором минимума модуля. комплексные $\mathbb{C}$ числа, мы будем говорить о поле чисел $\mathbb{F}$.

Множество многочленов с коэффициентами в этом поле будем обозначать $\mathbb{F}[x]$.

Степень многочлена P будем обозначать $\deg P$, на самом деле она равна степени отображения $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, как будет ясно позже (??)

О других доказательствах (!!!!!)

(укажу, ибо они тоже есть)

О применении этой теоремы (???)

(что-то Олег говорил, уже не помню.)

Деление многочленов с остатком

Докажите, что для $P, D \in \mathbb{F}[x]$, при $\deg D > 0$, найдётся единственный остаток $R \in \mathbb{F}[x]$ с $\deg R < \deg D$ и единственное частное $Q \in \mathbb{F}$, такие что

$$P = QD + R$$

||

Можно использовать индукцию по степени P ||

Задача

4.

докажите, что всякий многочлен $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n \in \mathbb{C}[z]$ степени n раскладывается в произведение

$$P(z) = c_n (z - z_0) \cdots (z - z_n)$$

[[

Поделите многочлен с остатком на многочлен $z - z_0$ и посмотрите, что будет, если z_0 был его корнем.

]]

Задача

4.5.

Докажите, что всякий многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ представляется в виде произве- $x^2 + p_ix + q_i$ с отрицательными детерминантами.

[[

Примените комплексное утверждение и заметьте, что у действительного многочлена корни идут парами комплексно сопряжённых.

]]

най дутся $S, T \in \mathbb{F}[x]$, такие что $\deg S < \deg Q, \deg T < \deg P$, а

$$D = SP + TQ$$

является делителем P и Q .

Этот наибольший общий делитель D определён однозначно с точностью умножения на константу.

[[

Поделите P на Q с остатком и примените индукцию.

]]

Задача

7.

докажите, что всякий общий делитель P и Q из предыдущей задачи является делителем D из предыдущей задачи.

[[

Используйте установленную формулу наибольшего общего делителя.

]]

Задаиа 4.8.

Многочлен из $\mathbb{F}[x]$ положительной степени называется неприводимым, если его нельзя представить в виде произведения многочленов меньшей степени.

Докажите, что всякий многочлен из $\mathbb{F}[x]$ можно разложить в произведение неприводимых мно- жения их на ненулевые числа (элементы $\mathbb{F}$).

[[

Вспомните, как в школе доказывалась единственность разложения натурального числа В произведение простых.

]]

Задача 9.

Многочлены с наибольшим общим делителем степени 0 (то есть константой) назовём взаимно простыми.

Докажите, что многочлены $P, Q \in \mathbb{C}$ взаимно просты тогда и только тогда, когда они не имеют общих корней.

||

Используйте установленную формулу наибольшего общего делителя и алгебраическую замкнутость $\mathbb{C}$.

||

Solution

Так как $\mathbb{C}$ - алгебраически замкнутое поле, то

$$P(x) = c \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{m_i}, \quad Q(x) = d \prod_{j=1}^s (x - \beta_j)^{n_j},$$

где $c, d \neq 0, \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$. Пусть $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} = \{\alpha_i\} \cap \{\beta_j\}$ - множество общих корней (без повторений). Тогда стандартная формула для НОД в $\mathbb{C}[x]$ гласит:

$$\gcd(P, Q) = \prod_{t=1}^k (x - \gamma_t)^{\min\{\text{mult}_P(\gamma_t), \text{mult}_Q(\gamma_t)\}}.$$

Отсюда немедленно следует: - $\deg \gcd(P, Q) = 0$ (то есть НОД - константа) тогда и только тогда, когда $k = 0$, то есть когда нет общих корней; - если есть общий корень, то $k \geq 1$ и $\deg \gcd(P, Q) \geq 1$, т.е. P, Q не взаимно просты.

Что и требовалось доказать. (Замечание: эквивалентный критерий - тождество Безу: P, Q взаимно просты $\iff$ существуют $A, B \in \mathbb{C}[x]$ такие, что $AP + BQ \equiv 1$. Наличие общего корня противоречит этому при подстановке в левую часть.)

Определение рациональных функций

Определим рациональные функции, $\mathbb{F}(x)$, как отношения $\frac{P}{Q}$ с $P, Q \in \mathbb{F}[x]$ и $Q \neq 0$, с точностью до стандартного отношения эквивалентности

$$\frac{P}{Q} = \frac{S}{T} \leftrightarrow PT = QS$$

Рациональная функция $\frac{P}{Q}$ называется правильной дробью, если $\deg P < \deg Q$.

О равенстве двух рациональных функций (??)

Докажите, что если две рациональные дроби из $\mathbb{R}(x)$ принимают одинаковые значения при подстановке в них любого $x \in \mathbb{R}$ для которого они одновременно могут быть вычислены, то они равны в смысле предыдущего определения.

||

Сведите к равенству двух многочленов, значения которых совпадают на бесконечном множестве значений переменной.

||

Задача

Докажите, что если $\frac{P}{Q_1 Q_2}$ - правильная дробь, а Q_1 и Q_2 взаимно просты, то дробь можно представить в виде суммы правильных дробей

$$\frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

||
Используйте алгоритм Евклида.
||

Об обратных дробях (???)

Из последней задачи следует (проверьте это), что всякая правильная дробь с комплексными коэффициентами представляется в виде суммы элементарных дробей вида $\frac{a}{(z-z_0)^k}$.

Это очень помогает при нахождении первообразных рациональной функции, то есть функции, производная которой равна данной.

Всякую неправильную дробь с помощью деления с остатком можно превратить в сумму многочлена и правильной дроби.

Первообразная многочлена

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

находится с точностью до прибавления константы явно как

$$a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \cdots + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

а первообразные элементарных дробей имеют вид

$$(\operatorname{Ln}(z - z_0))' = \frac{1}{z - z_0}, \quad \left(\frac{-1}{(k+1)(z - z_0)^{k+1}} \right)' = \frac{1}{(z - z_0)^k}$$

Производная здесь понимается в комплексном смысле, логарифм ненулевого комплексного числа определяется как обратная функция к экспоненте с точностью Δ прибавления $2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$.

Подробности работы с функциями комплексного переменного читатель может найти в разделе 10.

ней, найдите первообразную правильной дроби

$$\frac{ax + b}{x^2 + px + q}$$

в виде, использующем только действительные числа и функции.

||
Посмотрите, как записать отдельно действительную и мнимую часть логарифма комплексного числа.
||

приложения в двух словах**5.1.8 Infinities and Their Comparison**

(that abstract philosophical ideas from Kantor)

Overview of applications of Kantor's ideas

I have no idea of any applications, it seems 100% useless.

5.1.9 Limits: Basic Properties

Докажем утверждения, связанные с пределами и неравенствами.

Лемма о больших членах двух сходящихся последовательностей

Если последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы а $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, то для достаточно больших n будет выполняться $a_n < b_n$.

Доказательство

Найдём число c между a и b .

Для конечных a и b можно взять полусумму, а если, к примеру, $a \in \mathbb{R}, b = +\infty$, то можно положить $c = a + 1$.

Тогда применим определение предела к окрестностям $U(a) = (-\infty, c)$ и $U(b) = (c, +\infty)$.

Для достаточно больших n (в смысле обоих определений) мы будем иметь $a_n < c < b_n$.

Следствие: Всякая последовательность имеет единственный предел.

Взяв в предыдущей лемме одну и ту же последовательность, мы получим это утверждение.

(??? почему?? многие последовательности не имеют предела ведь????)

Предельный переход в неравенстве

Переформулировав лемму в обратную сторону, мы получим:

Если $a_n \leq b_n$ для достаточно больших n и последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Пример $a_n \equiv 0, b_n = 1/n$ показывает, что при переходе к пределу в строгом неравенстве итоговое неравенство всё равно может оказаться нестрогим.

Теорема о двух милиционерах (!)

Если $a_n \leq b_n \leq c_n$ для достаточно больших n , и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$.

Доказательство

(чет не въехал пока, да и пофиг)

Возьмём окрестность $U(x) \ni x$.

Для достаточно больших n оказывается $a_n, c_n \in U(x)$ по определению предела.

Тогда и b_n тоже будет в $U(x)$.

(укажу, где она нужна, на самом деле много где!!)

Определение последовательности вложенных отрезков

Последовательность отрезков $([a_n, b_n])_n$ называется последовательностью вложенных отрезков, если выполняются включения $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ для любого n .

Определение стягивающейся

Последовательность вложенных отрезков $([a_n, b_n])_n$ называется стягивающейся, если длины отрезков стремятся к нулю, $(b_n - a_n) \rightarrow 0$.

Теорема: Последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение

Последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение. Если последовательность стягивающаяся, то пересечение состоит из одной точки.

(?? почему не очевидно???)

Доказательство

Последовательность (a_n) возрастает и ограничена сверху любым b_k .

Последовательность (b_k) убывает и ограничена снизу любым a_n .

Значит обе последовательности имеют конечные пределы, a и b .

Переходя два раза к пределу в неравенстве $a_n \leq b_k$, мы получим $a \leq b$.

Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$ в неравенстве $a_n \leq b_k$, мы получим $a_n \leq a$ для любого n . аналогично $b \leq b_k$.

Выходит, что отрезок $[a, b]$ лежит в пересечении нашей системы отрезков.

На самом деле он совпадает с пересечением, так как, к примеру, если $x < a$, то для достаточно больших n будет верно $a_n > x$, аналогично, если $x > b$, то для достаточно большого n будет верно $b_n < x$, то есть такие x выйдут из пересечения в некоторый момент.

Для стягивающейся последовательности очевидно, что $0 \leq b - a \leq b_n - a_n \rightarrow 0$, что неизбежно влечёт $b = a$.

Задача: пример последовательности вложенных интервалов не имеет общей точки (?!?!)

(хз вообще!)

Приведите пример, когда последовательность вложенных интервалов не имеет общей точки.

Сформулируйте достаточные условия того, чтобы последовательность вложенных интервалов всё же имела общую точку.

||

Следите за концами интервалов.

||

5.1.10 Exact bounds of numerical sets

(??? why is it needed???)

В конечном и непустом множестве действительных чисел всегда можно найти максимальный и минимальный элемент, для натуральных чисел это следует из задачи 1.17, а для действительных чисел надо еще определить понятие «конечного множества действительных чисел», что будет строго сделано в разделе 1.13. Сейчас же мы несколько неформально будем говорить о конечном и бесконечном. В бесконечном множестве чисел может и не быть максимума или минимума, например, не существует минимального положительного числа. Но можно ввести понятия, заменяющие максимум и минимум в тех случаях, когда их нет.

Определение верхней грани

Для непустого $X \subseteq \mathbb{R}$ будем говорить, что $M \in \overline{\mathbb{R}}$ является его верхней гранью, если для любого $x \in X$ выполняется $x \leq M$. В качестве верхней грани всегда сходится $+\infty$, а если у X есть конечные верхние грани, то оно называется ограниченным сверху.

Определение точной верхней грани можно расписать в кванторах так:

$$c = \sup X \leftrightarrow (\forall x \in X, x \leq c) \text{ и } (\forall c' < c \exists x \in X : c' < x)$$

Определение нижней грани

Для непустого $X \subseteq \mathbb{R}$ будем говорить, что $M \in \overline{\mathbb{R}}$ является его нижней гранью, если для любого $x \in X$ выполняется $x \geq M$. В качестве нижней грани всегда сходится $-\infty$, а если у X есть конечные нижние грани, то оно называется ограниченным снизу.

Теорема

51.

Среди всех верхних граней непустого $X \subset \mathbb{R}$ есть минимальная, которую мы будем обозначать $\sup X$ и называть «точная верхняя грань». Среди всех нижних граней непустого X есть максимальная, которую мы будем обозначать $\inf X$ и называть «точная нижняя грань».

Доказательство

Докажем для верхних граней, рассуждения для нижних граней аналогичны.

Если множество X не ограничено сверху, то очевидно $\sup X = +\infty$.

Иначе пусть $a \in X$, а b - какая-то конечная верхняя грань X .

Пусть $[a, b]$ - первый отрезок в последовательности вложенных отрезков, которую мы будем строить следующим образом.

Возьмём середину отрезка $c = 1/2(a + b)$ если середина является верхней гранью, то следующий отрезок в последовательности будет $[a, c]$, иначе $[c, b]$.

Делая так произвольное число раз, переходя к левой или правой половине отрезка, мы получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, которая будет стягивающейся, так как длина $(b_n - a_n) \leq (b - a)2^{-n+1} \leq (b - a)/n \rightarrow 0$.

Также каждый отрезок в последовательности пересекается с X по построению и не имеет элементов X справа от себя (то есть больших b_n), значит его правый конец b_n является верхней гранью X .

Пусть c - точка пересечения всех таких отрезков, докажем, что она является верхней гранью X и меньших верхних граней нет.

Для любой $x \in X$ переходя к пределу в неравенстве $x \leq b_n$ мы получим $x \leq c$, то есть c является верхней гранью.

Если была бы меньшая верхняя грань $c' < c$, то при достаточно больших n мы бы имели $c' < a_n$, из чего следует существование $x \in X$, такого что $c' < x$.

Задача

52.

Запишите в кванторах как можно короче утверждение про два непустых множества $X, Y \subseteq \mathbb{R} : \sup X < \inf Y$.

5.1.11 Counterexamples about the Real Number System 1

Introduction and Definitions for Counterexamples about the Real Number System

We begin by presenting some definitions and notations that are basic to analysis and essential to this first chapter. These will be given in abbreviated form with a minimum of explanatory discussion. For a more detailed treatment see [16], [21], [22], and [30] of the Bibliography.

If A is any set of objects, the statement a is a member of A is written $a \in A$. The contrary statement that a is not a member of A is written $a \notin A$. If A and B are sets, the statement A is a subset of B is written $A \subset B$, and is equivalent to the implication $x \in A$ implies $x \in B$, also written $x \in A \Rightarrow x \in B$. The phrase if and only if is often abbreviated iff, and sometimes symbolized $\Leftrightarrow$. The set whose members are $a, b, c, \dots$ is denoted $\{a, b, c, \dots\}$. The notation $\{\dots | \dots\}$ is used to represent the set whose general member is written between the first brace $\{$ and the vertical bar $|$, and whose defining property or properties are written between the vertical bar $|$ and the second brace $\}$. The union and intersection of the two sets A and B can therefore be defined:

$$\begin{aligned} A \cup B &\equiv \{x | x \in A \quad \text{or} \quad x \in B\}, \\ A \cap B &\equiv \{x | x \in A, x \in B\}, \end{aligned}$$

where the comma in the last formula stands for and. For convenience, members of sets will often be called points. The difference between the sets A and B is denoted $A \setminus B$ and defined:

$$A \setminus B \equiv \{x | x \in A, x \notin B\}$$

When a general containing set or space or universe of discourse S is clearly indicated or understood from context, the difference $S \setminus A$ is called the complement of A , and denoted A' . In general, the difference $A \setminus B$ is called the complement of B relative to A .

If A and B are two nonempty sets (neither A nor B is the empty set $\emptyset$), their Cartesian product is the set of all ordered pairs (a, b) , where $a \in A$ and $b \in B$, denoted:

$$A \times B \equiv \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

If $(a, b) \in A \times B$, a is the first coordinate or component of (a, b) and b is the second coordinate or component of (a, b) . Any subset ρ of $A \times B$ is called a relation from A to B . A function from A to B is a relation from A to B such that no two distinct members of f have the same first coordinate. If the phrases there exists and there exist are symbolized by the existential quantifier $\exists$, and the words such that by the symbol $\ni$, the domain (of definition) $D = D_f$ and range (of values) $R = R_f$ of a function f can be defined:

$$\begin{aligned} D = D_f &\equiv \{x | \exists y \ni (x, y) \in f\}, \\ R = R_f &\equiv \{y | \exists x \ni (x, y) \in f\}. \end{aligned}$$

The function f is a function on A into B iff f is a function from A to B with domain equal to A . The function f is a function on A onto B iff f is a function on A into B with range equal to B . A function f is a one-to-one correspondence between the members of A and the members of B iff f is a function on A onto B such that no two distinct members of f have the same second coordinate. The values of a function are the members of its range. The inverse f^{-1} of a one-to-one correspondence f is obtained by interchanging the domain and range of f :

$$f^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in f\}$$

A constant function is a function whose range consists of one point. Various types of relations and functions are indicated in Figure 1.

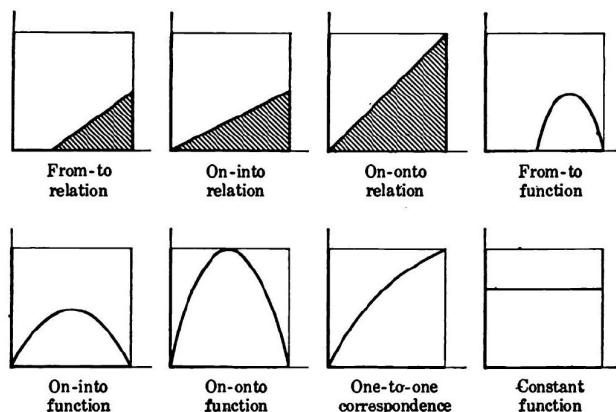


Figure 1

In each case the sets A and B are taken to be the closed unit interval $[0, 1]$ consisting of all real numbers x such that $0 \leq x \leq 1$.

Let f be a function on A into B , symbolized in the following two ways:

$$f : A \rightarrow B,$$

$$A \xrightarrow{f} B.$$

If x is an arbitrary member of A , then there is exactly one member y of B such that $(x, y) \in f$. This member y of B is written:

$$y = f(x)$$

Other ways of writing the function just described are:

$$f : y = f(x), \quad x \in A, \quad y \in B;$$

$$f : x \in A, \quad f(x) \in B;$$

or,

$$y = f(x) : x \in A, \quad y \in B,$$

$$f(x) : x \in A,$$

when it is clear from the context that the notation $f(x)$ represents a function rather than merely one of its values.

If f is a function with domain D , and if S is a subset of D , then the restriction of f to S is the function g whose domain is S such that

$$x \in S \Rightarrow g(x) = f(x)$$

The range of the restriction of f to S is denoted $f(S)$. That is,

$$f(S) = \{y | \exists x \in S \ni f(x) = y\}.$$

If g is a restriction of f , then f is called an extension of g .

If f and g are functions such that the range of g is a subset of the domain of f , then the composite of f and g , denoted $f \circ g$, is the function whose value at the point x of the domain of g is $f(g(x))$; in short, the function $y = f(g(x))$ is called the composite of the function $f(u)$ and the function $u = g(x)$. (It should be noted that the composite of f and g is not in general the same as the composite of g and f ; counterexample: $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$.)

If A is a nonempty set, a binary operation from A to A is a function from $A \times A$ to A . A binary operation on A into A is a function on $A \times A$ into A . In classical arithmetic there are two fundamental binary operations: addition and multiplication. Many properties of these operations in arithmetic are shared by operations in more abstract settings, where the operations bear the same names. If a binary operation F is called addition, and if $z = F((x, y))$, then z is also written $z = x + y$. If a binary operation G is called multiplication, and if $z = G((x, y))$, then z is also written $z = xy$, or $z = x \cdot y$.

Definition I. A field is a nonempty set $\mathfrak{F}$, together with two binary operations on $\mathfrak{F}$ into $\mathfrak{F}$, called addition and multiplication, such that:

A. For addition:

(i) The associative law holds:

$$x, y, z \in \mathfrak{F} \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z.$$

(ii) $\exists$ a member 0 of $\mathfrak{F}$ such that

$$x \in \mathfrak{F} \Rightarrow x + 0 = x.$$

(iii) $x \in \mathfrak{F} \Rightarrow \exists(-x) \in \mathfrak{F} \ni x + (-x) = 0$.

(iv) The commutative law holds:

$$x, y \in \mathfrak{F} \Rightarrow x + y = y + x.$$

B. For multiplication:

(i) The associative law holds:

$$x, y, z \in \mathfrak{F} \Rightarrow x(yz) = (xy)z.$$

(ii) $\exists$ a member 1 of $\mathfrak{F}$ such that $1 \neq 0$ and $x \in \mathfrak{F} \Rightarrow x \cdot 1 = x$.

(iii) $x \in \mathfrak{F}, x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in \mathfrak{F} \ni xx^{-1} = 1$.

(iv) The commutative law holds:

$$x, y \in \mathfrak{F} \Rightarrow xy = yx$$

C. For addition and multiplication:

The distributive law holds (more precisely, multiplication is distributive over addition):

$$x, y, z \in \mathfrak{F} \Rightarrow x(y + z) = xy + xz.$$

The member 0 of $\mathfrak{F}$, of A(ii), is called the zero, or additive identity, of $\mathfrak{F}$. The member $(-x)$ of $\mathfrak{F}$, of A(iii), is called the negative, or additive inverse, of x . The binary operation $x - y$, defined by $x - y \equiv x + (-y)$, is called subtraction. The member 1 of $\mathfrak{F}$, of B(ii), is called the one, or unity, or multiplicative identity, of $\mathfrak{F}$. The member x^{-1} of $\mathfrak{F}$, of B(iii), is called the reciprocal, or multiplicative inverse, of x . The binary operation x/y , defined by $x/y \equiv xy^{-1}$, where $y \neq 0$, is called division. Division is a "from-to" operation and not an "on into" operation since "division by zero" is excluded.

A nonempty set $\mathcal{G}$ together with a binary operation on $\mathcal{G}$ into $\mathcal{G}$ in this case denoted $+$ and called addition - subject to properties A(i), (ii), and (iii) is called a group (in this

case, an additive group). In case the commutative law **A**(iv) holds, $\mathcal{S}$ is called an Abelian or commutative group. Thus, with respect to addition any field is an Abelian additive group. With respect to multiplication the nonzero members of a field form an Abelian multiplicative group.

Definition II. An ordered field is a field $\mathfrak{F}$ that contains a subset ρ such that

(i) $\mathcal{O}$ is closed with respect to addition; that is,

$$x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{P} \Rightarrow x + y \in \mathcal{P}.$$

(ii) ρ is closed with respect to multiplication; that is,

$$x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{P} \Rightarrow xy \in \mathcal{P}.$$

(iii) $x \in \mathcal{F} \Rightarrow$ exactly one of the three statements is true:

$$x \in \mathcal{P}; \quad x = 0; \quad -x \in \mathcal{P}.$$

A member x of $\mathfrak{F}$ is positive iff $x \in \mathcal{P}$; x is negative iff $-x \in \mathcal{P}$.

Inequalities in an ordered field are defined in terms of membership in ρ . For example,

$$\begin{aligned} x < y & \quad \text{iff} \quad y - x \in \rho; \\ x \geq y & \quad \text{iff} \quad x - y \in \rho \quad \text{or} \quad x = y. \end{aligned}$$

A function f from $\mathfrak{F}$ to $\mathfrak{F}$, where $\mathfrak{F}$ is an ordered field, is increasing (or nondecreasing) on a subset A of its domain iff

$$x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

The function f is strictly increasing on A iff

$$x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

The terms decreasing (or nonincreasing) and strictly decreasing are similarly defined. A function is monotonic on a set iff it is either increasing or decreasing there. Strictly monotonic has an obvious definition.

If $\mathcal{F}$ is an ordered field and if $x \in \mathcal{F}$, then $|x|$ called the absolute value of x , is defined to be x in case $x \geq 0$, and to be $-x$ in case $x < 0$.

The following are a few of the standard properties of absolute value, where $x, y, \varepsilon \in \mathcal{F}$.

- (i) $|x| \geq 0$; $|x| = 0$ iff $x = 0$.
- (ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- (iii) If $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$ iff $-\varepsilon < x < \varepsilon$.
- (iv) The triangle inequality: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- (v) $|x| = \sqrt{x^2}$; that is, $|x|$ is the unique member of $\mathcal{P} \cup \{0\}$ whose square = x^2 .
- (vi) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

If $\mathcal{F}$ is an ordered field, and if $a, b \in \mathcal{F}, a < b$; then the following sets are called finite or bounded intervals, further described by the attached initial adjective, and denoted as indicated with parentheses

and/or brackets:

open:

closed:

half-open (or half-closed):

half-open (or half-closed):

$$\begin{aligned}
(a, b) &\equiv \{x | x \in \mathcal{F}, \quad a < x < b\} \\
[a, b] &\equiv \{x | x \in \mathcal{F}, \quad a \leq x \leq b\} \\
[a, b) &\equiv \{x | x \in \mathcal{F}, \quad a \leq x < b\} \\
(a, b] &\equiv \{x | x \in \mathcal{F}, \quad a < x \leq b\}
\end{aligned}$$

Infinite or unbounded intervals are similarly delineated:

$$\begin{aligned}
\text{open:} \quad (a, +\infty) &\equiv \{x | x > a\}, \\
\text{open:} \quad (-\infty, a) &\equiv \{x | x < a\}, \\
\text{closed:} \quad [a, +\infty) &\equiv \{x | x \geq a\}. \\
\text{closed:} \quad (-\infty, a] &\equiv \{x | x \leq a\}. \\
\text{open and closed:} \quad (-\infty, +\infty) &\equiv \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

A neighborhood of a point a of an ordered field $\mathcal{F}$ is an open interval of the form $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, where ε is a positive member of $\mathcal{F}$. This neighborhood can also be written in terms of absolute values, and will be denoted:

$$N(a, \varepsilon) \equiv (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \equiv \{x | |x - a| < \varepsilon\}.$$

A deleted neighborhood of a point a is a neighborhood of a with the point a deleted; a deleted neighborhood $D(a, \varepsilon)$ of a , for some $\varepsilon > 0$, is thus defined:

$$D(a, \varepsilon) \equiv \{x | 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

The binary operations max and min on $\mathcal{F}$ to $\mathcal{F}$ are defined:

$$\max(x, y) \equiv \begin{cases} x & \text{if } x \geq y, \\ y & \text{if } x < y; \end{cases} \quad \min(x, y) \equiv \begin{cases} y & \text{if } x \geq y, \\ x & \text{if } x < y. \end{cases}$$

If $\mathfrak{F}$ is an ordered field, if $u \in \mathfrak{F}$, and if $x \leq u$ for every member x of a nonempty set A of points of $\mathfrak{F}$, then u is called an upper bound of A . A nonempty set in $\mathfrak{F}$ is bounded above in $\mathfrak{F}$ iff there exists a member of $\mathcal{F}$ that is an upper bound of the set. If s is an upper bound of A and if s is less than every other upper bound of A , then s is called the least upper bound or supremum of A , written $s = \sup(A) = \sup A$. Similar definitions hold for lower bound, bounded below, and greatest lower bound or infimum i of a nonempty set A , written $i = \inf(A) = \inf A$.

Definition III. A complete ordered field is an ordered field $\mathfrak{F}$ in which a least upper bound exists for every nonempty set in $\mathfrak{F}$ that is bounded above in $\mathfrak{F}$.

Any two complete ordered fields $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}'$ are isomorphic in the sense that there exists a one-to-one correspondence $x \leftrightarrow x'$, where $x \in \mathcal{F}$ and $x' \in \mathcal{F}'$, that preserves binary operations and order; that is:

$$(x + y)' = x' + y', \quad (xy)' = x'y', \quad x < y \text{ iff } x' < y'.$$

(For a proof and discussion, see [35], pp. 128-131.) As far as structure is concerned, then, the real number system is uniquely described by the definition:

Definition IV. The real number system $\mathcal{R}$ is a complete ordered field.

A function on A onto B is called real-valued iff $B \subset \mathcal{R}$; it is called a function of a real variable iff $A \subset \mathcal{R}$.

The signum function is the real-valued function of a real variable defined and denoted: $\text{sgn } x \equiv 1$ if $x > 0$; $\text{sgn } x \equiv -1$ if $x < 0$; $\text{sgn } 0 \equiv 0$.

If S is any nonempty space and if A is any subset of S , then the characteristic function of A is the real-valued function χ_A defined: $\chi_A(x) \equiv 1$ if $x \in A$ and $\chi_A(x) \equiv 0$ if $x \in A' = S \setminus A$.

Definition V. An inductive set in an ordered field $\mathfrak{F}$ is a set A having the two properties:

- (i) $1 \in A$.
- (ii) $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$.

Definition VI. A member n of an ordered field $\mathfrak{F}$ is a natural number iff n is a member of every inductive set of $\mathfrak{F}$. The set of all natural numbers of $\mathfrak{F}$ is denoted $\mathfrak{N}$.

From this definition follow the familiar properties (cf. [35] pp. 17-18) of natural numbers, including the theorem:

Fundamental Theorem of Induction. If s is an inductive set of natural numbers, then $S = \mathbb{I}$.

If $\mathcal{J}$ and $\mathcal{J}^*$ are the sets of all natural numbers of two ordered fields $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}^*$, then $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{K}^*$ are isomorphic (cf. [35], pp. 34-35).

Definition VII. A member x of an ordered field $\mathfrak{F}$ is an integer iff $x \in \mathfrak{K}, x = 0$, or $x \in \mathfrak{K}$. A member x of an ordered field is a rational number iff there exist integers m and $n, n \neq 0$, such that $x = m/n$.

The set of all rational numbers of an ordered field $\mathcal{F}$, under the operations of addition and multiplication of $\mathfrak{F}$ and the ordering of $\mathcal{F}$, is also an ordered field, denoted $\mathcal{Q}$. (Any two ordered fields of rational numbers are isomorphic; cf. [35], p. 67.)

Definition VIII. A ring is a nonempty set $\mathcal{B}$, together with two binary operations on $\mathcal{B}$ into $\mathcal{B}$, called addition and multiplication, such that the following laws of Definition I hold: $\mathbf{A}(i), (ii), (iii), (iv), \mathbf{B}(i), \mathbf{C}$, and a second distributive law:

$$\mathbf{C}'. \quad x, y, z \in \mathcal{B} \Rightarrow (x + y)z = xz + yz.$$

Definition IX. An integral domain is a ring $\mathfrak{D}$ such that the following additional laws of Definition I hold: $\mathbf{B}(ii), (iv)$ - that is, all laws of Definition I except for $\mathbf{B}(iii)$ and also the following weakened form of $\mathbf{B}(iii)$:

$$\mathbf{D}. \quad x \in D, y \in D, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0.$$

That $\mathbf{D}$ is a weakened form (that is, a consequence) of $\mathbf{B}(iii)$ can be seen by assuming the existence of $x \neq 0$ and $y \neq 0$ such that $xy = 0$. Then $x^1(xy) = (x^1x)y = 1y = y \neq 0$, whereas $x^{-1}0 = 0$. (Contradiction.) In any ring, law $\mathbf{D}$ is equivalent to the law:

$$\mathbf{D}'. \quad \text{Cancellation law. } xy = xz, x \neq 0 \Rightarrow y = z.$$

($\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{D}'$ since $xy = xz$ iff $x(y - z) = 0$; $\mathbf{D}' \Rightarrow \mathbf{D}$ since $xy = 0$ can be written $xy = x0$.)

The set of all integers of an ordered field $\mathcal{F}$, with the operations of addition and multiplication of $\mathfrak{F}$, is an integral domain, denoted $\mathfrak{g}$. Any two integral domains of integers are isomorphic (cf. [35], p. 64).

Let f be a function from $\mathfrak{F}$ to $\mathfrak{F}$, where $\mathfrak{F}$ is an ordered field, and let $a \in \mathfrak{F}$. Then f is continuous at a iff a belongs to the domain D of f , and corresponding to an arbitrary positive member ε of $\mathcal{F} \exists$ a positive member δ of $\mathcal{F}$ such that $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ for every x of D such that $|x - a| < \delta$. With the aid of the universal quantifier $\forall$, representing the words for all, for an arbitrary, for every, or for each, and the language and notation of neighborhoods, this last portion of the definition of continuity of f at a point a of D can be expressed:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni f(D \cap N(a, \delta)) \subset N(f(a), \varepsilon).$$

A point p is a limit point of a nonempty set A , in an ordered field $\mathcal{F}$, iff every deleted neighborhood of p contains at least one point of A :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in D(p, \varepsilon) \cap A.$$

If f is a function from $\mathfrak{F}$ to $\mathfrak{F}$, if a is a limit point of the domain D of f , and if $b \in \mathcal{F}$, then the limit of $f(x)$ as x approaches a is said to exist and equal b , with the notation

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni f(D \cap D(a, \delta)) \subset N(b, \varepsilon).$$

One-sided limits are defined similarly, and denoted $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

A function f from an ordered field $\mathcal{F}$ to $\mathcal{F}$ is uniformly continuous on a subset A of its domain D iff

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \\ x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

If f is a function from an ordered field $\mathcal{F}$ to $\mathcal{F}$, and if a is a point of the domain D of f , then the symbol $f'(a)$ denotes the member of $\mathfrak{F}$ defined

$$f'(a) \equiv \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

provided this limit exists. The function f' defined by $f'(x)$ whenever $f'(x)$ exists for x in the domain of D is called the derivative of f .

A function f from an ordered field $\mathcal{F}$ to $\mathcal{F}$ is said to have the intermediate value property on an interval I contained in its domain iff

$$\begin{aligned} \forall a, b \in I, d \in \mathcal{F} \ni a < b \\ \text{and either } f(a) < d < f(b) \text{ or } f(a) > d > f(b), \\ \exists c \ni a < c < b, \quad f(c) = d. \end{aligned}$$

A sequence is a function whose domain is the set of natural numbers $\mathfrak{N}$. Its value for n is usually denoted by means of a subscript, thus: a_n , and the sequence itself by braces: $\{a_n\}$. A sequence $\{a_n\}$, where the values or terms a_n are members of an ordered field $\mathcal{F}$, is said to be convergent and to have the limit b , or to converge to b , where $b \in \mathcal{F}$, iff

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{O} \exists N \in \mathfrak{N} \ni n > N \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon,$$

where $\mathcal{P}$ is the set of positive members of $\mathcal{F}$. A sequence is divergent iff it fails to be convergent (that is, iff a limit b fails to exist). A sequence $\{a_n\}$, where the terms a_n are members of an ordered field $\mathcal{F}$, is a Cauchy sequence iff

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{P} \exists N \in \mathfrak{N} \ni m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Every convergent sequence is a Cauchy sequence, and if $\mathcal{F} = \mathcal{R}$ every Cauchy sequence is convergent (cf. [34], p. 57).

A complex number is an ordered pair (x, y) of real numbers x and y . Addition and multiplication of complex numbers are defined:

$$\begin{aligned} (x, y) + (u, v) &\equiv (x + u, y + v) \\ (x, y)(u, v) &\equiv (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$

The complex numbers form a field $\mathcal{C}$ (cf. [34], p. 497), with zero $(0, 0)$ and unity $(1, 0)$. In the sequel the standard notation $x + iy$ for the ordered pair (x, y) will be usual.

1. An infinite field that cannot be ordered.

To say that a field $\mathcal{F}$ cannot be ordered is to say that it possesses no subset ρ satisfying the three properties of Definition II of the Introduction. A preliminary comment is that since every ordered field is infinite, no finite field can be ordered ([35], p. 38).

An example of an infinite field that cannot be ordered is the field of complex numbers. To show that this is the case, assume that there does exist a subset $\mathcal{P}$ of $\mathfrak{C}$ satisfying Definition II. Consider the number $i \equiv (0, 1)$. Since $i \neq (0, 0)$, there are two alternative possibilities. The first is $i \in \mathcal{P}$, in which case $i^2 = (-1, 0) \in \mathcal{P}$, whence $i^4 = (1, 0) \in \mathcal{P}$. Since i^2 and i^4 are additive inverses of each other, and since it is impossible for two additive inverses both to belong to $\mathcal{O}$ (cf. Definition II, (iii)), we have obtained a contradiction, as desired. The other option is $-i = (0, -1) \in \mathcal{P}$, in which case $(-i)^2 = (-1, 0) \in \mathcal{P}$, whence $(-i)^4 = (1, 0) \in \mathcal{P}$, with the same contradiction as before.

2. A field that is an ordered field in two distinct ways.

The set $\mathfrak{F}$ of all numbers of the form $r + s\sqrt{2}$, where r and s are rational and the operations of addition and multiplication are those of the real number system $\mathcal{G}$ of which $\mathcal{F}$ is a subset, is an ordered field in which the subset $\mathcal{P}$ of Definition II is the set of all members of $\mathcal{F}$ that are positive members of $\mathcal{R}$, that is, positive real numbers. A second way in which $\mathcal{F}$ is an ordered field is provided by the subset $\mathcal{G}$ defined:

$$r + s\sqrt{2} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow r - s\sqrt{2} \in \mathcal{P}.$$

That $\mathcal{B}$ satisfies the three requirements of Definition II is easily verified.

Each of the fields $\mathcal{Q}$ of rational numbers and $\mathcal{Q}$ of real numbers is an ordered field in only one way ([35], p. 146).

3. An ordered field that is not complete.

The ordered field $\mathcal{Q}$ of rational numbers is not complete. This can be seen as follows: The set A of all positive rational numbers whose squares are less than 2 ,

$$A \equiv \{r | r \in \mathcal{Q}, \quad r > 0, \quad r^2 < 2\},$$

is nonempty ($1 \in A$) and is bounded above by the rational number 2. Let us assume that $\mathcal{Q}$ is complete. Then there must be a positive rational number c that is the supremum of A . Since there is no rational number whose square is equal to 2 (cf. [35], p. 126), either $c^2 < 2$ or $c^2 > 2$. Assume first that $c^2 < 2$ and let d be the positive number

$$d = \frac{1}{2} \min \left(\frac{2 - c^2}{(c + 1)^2}, 1 \right).$$

Then $c + d$ is a positive rational number greater than c whose square is less than 2:

$$(c + d)^2 < c^2 + d(c + 1)^2 < 2.$$

But this means that $c + d \in A$, whereas c is an upper bound of A . (Contradiction.) Now assume that $c^2 > 2$ and let d be the positive number

$$d = \frac{c^2 - 2}{2(c + 1)^2}.$$

Then $c - d$ is a positive rational number less than c whose square is greater than 2:

$$(c - d)^2 > c^2 - d(c + 1)^2 > 2.$$

Since $c - d$ is therefore an upper bound of A less than the least upper bound c , a final contradiction is reached.

4. A non-Archimedean ordered field.

An ordered field $\mathcal{F}$ is Archimedean iff the set $\mathcal{N}$ of natural numbers of $\mathcal{F}$ is not bounded above in $\mathcal{F}$ (equivalently, whenever $a, b \in \mathcal{F}$, $a > 0, b > 0$, then there exists a natural number n such that $na > b$). Let f be a polynomial function on $\mathcal{R}$ into $\mathcal{R}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathcal{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

and let g be a nonzero polynomial function (that is, $g(x)$ is not identically zero), and let f/g be the rational function h defined by $h(x) = f(x)/g(x)$ whose domain consists of all real numbers for which $g(x) \neq 0$. Let $\mathcal{H}$ consist of all rational functions f/g in lowest terms (the only common polynomial factors of f and g are constants), with addition and multiplication defined:

$$\frac{f}{g} + \frac{r}{s} \equiv \frac{fs + gr}{gs}, \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{r}{s} \equiv \frac{fr}{gs},$$

where the right-hand member in each case is reduced to lowest terms. Then $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ is a field ([35], p. 104). If a subset $\mathcal{O}$ of $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ is defined to consist of all nonzero f/g of $\mathcal{F}$ such that the leading coefficients (that is, the coefficients of the terms of highest degree) of f and g have the same sign, then ρ satisfies the requirements of Definition II, and $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ is an ordered field. But any rational function $f/1$, where f is a nonconstant polynomial with positive leading coefficient, is an upper bound of the set $\mathfrak{I}$ of natural numbers of $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ (the natural numbers of $\mathcal{H}$ are the constant rational functions of the form $n/1$, where n is the constant polynomial whose values are all equal to the real natural number n). For a more detailed discussion, see [35], pp. 99-108.

5. An ordered field that cannot be completed.

To say that an ordered field $\mathcal{F}$ cannot be completed means that there is no complete ordered field $\mathcal{R}$ containing $\mathcal{F}$ in such a way that the operations of addition and multiplication and the order relation of $\mathcal{F}$ are consistent with those of $\mathcal{G}$. The preceding example $\mathcal{H}$ of rational functions cannot be completed in this sense or, in other words, cannot be embedded in the real number system (cf. Definition IV). The reason, in brief, is that if $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ could be embedded in $\mathcal{R}$, then the natural numbers of $\mathcal{H}$ would correspond in an obvious fashion with those of $\mathcal{R}$. Since $\mathcal{N}$ is bounded above in $\mathcal{H}$ but not in $\mathcal{R}$ ([35], p. 122), a contradiction is obtained.

5.1.12 Counterexamples about the Real Number System 2

6. An ordered field where the rational numbers are not dense.

The "rational numbers" of the ordered field $\mathcal{H}$ of Example 4 are not dense in $\mathcal{H}$. That is, there are two distinct members of $\mathcal{H}$ having no rational number between them. In fact, any ordered field $\mathcal{F}$ in which the rational numbers are dense is Archimedean. To see this, let a be an arbitrary positive member of $\mathfrak{F}$, and let m/n be a rational number between 0 and $1/a$. Adjust notation if necessary in order to assume (without loss of generality) that m and n are both positive.

Then

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} < \frac{1}{a},$$

whence $n > a$. Consequently a is not an upper bound of $\mathfrak{K}$, and since a is arbitrary, $\mathfrak{N}$ is not bounded above. It follows, then, that since $\mathcal{H}$ is not Archimedean the rational numbers of $\mathcal{H}$ cannot be dense in $\mathcal{H}$. Examples of two distinct members of $\mathcal{H}$ having no rational number between them are any two distinct nonconstant polynomials with positive leading coefficients.

7. An ordered field that is Cauchy-complete but not complete.

If the ordered field $\mathcal{K}$ of rational functions, Example 4, is extended by means of equivalence classes of Cauchy sequences, the resulting structure is an ordered field in which every Cauchy sequence converges. However, by Example 5, this Cauchy-completion cannot become complete in the sense of the definition given in the Introduction in terms of least upper bounds. (For a treatment of Cauchy-completion in general, see [20], pp. 106-107, [21].)

8. An integral domain without unique factorization.

A unit of an integral domain $\mathfrak{D}$ is a member u of $\mathfrak{D}$ having a multiplicative inverse v in $\mathfrak{D} : uv = 1$. (The units of the integral domain $\mathcal{I}$ of integers are 1 and -1.) Any member of $\mathfrak{D}$ that is the product of two nonzero members of $\mathfrak{D}$ neither of which is a unit is called composite. Any nonzero member of D that is neither a unit nor composite is called prime. An integral domain D is a unique factorization domain iff every nonzero nonunit member of D can be expressed as a product of a finite number of prime members of $\mathfrak{D}$, and when so expressed is uniquely so expressed except for the order of the factors or multiplication of the factors by units.

In the real number system $\mathcal{R}$ define the set Φ of all numbers of the form $a + b\sqrt{5}$, where $a, b \in \mathcal{R}$. Then Φ is an integral domain. The following two facts are not difficult to prove (cf. [35], p. 144): (i) The units of Φ consist of all $a + b\sqrt{5}$ such that $|a^2 - 5b^2| = 1$. (ii) If $a + b\sqrt{5}$ is a nonzero nonunit, then $|a^2 - 5b^2| \geq 4$. Consequently, if $1 < |a^2 - 5b^2| < 16$, $a + b\sqrt{5}$ is prime. In particular, $2, 1 + \sqrt{5}$, and $-1 + \sqrt{5}$ are all prime members of Φ since for each, $|a^2 - 5b^2| = 4$. Furthermore, the two factorings of 4,

$$2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})$$

are distinct in the sense defined above: No factor of either member is a unit times either factor of the other member. (For details see [35], p. 145.)

9. Two numbers without a greatest common divisor.

In an integral domain $\mathfrak{D}$, a member m divides a member n , written $m|n$, iff there exists a member p of D such that $mp = n$. A member d of $\mathfrak{D}$ is called a greatest common divisor of two members a and b of D iff:

$$d|a \text{ and } d|b; \tag{i}$$

$$c|a, c|b \Rightarrow c|d. \tag{ii}$$

In the integral domain Φ of the preceding example, the numbers 4 and $2(1 + \sqrt{5})$ have no greatest common divisor. (For details, see [35], pp. 145-146.)

10. A fraction that cannot be reduced to lowest terms uniquely.

If fractions are constructed from pairs of members of the integral domain Φ of Example 8, the fraction $2(1 + \sqrt{5})/4$ can be reduced to lowest terms in the following two ways:

$$\frac{2(1 + \sqrt{5})}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}.$$

The results are distinct in the sense that neither numerator is a unit times the other, and neither denominator is a unit times the other.

11. Functions continuous on a closed interval and failing to have familiar properties in case the number system is not complete.

We conclude this chapter with a collection of functions defined on a closed interval $[a, b] \subset \mathcal{Q}$ and having values in $\mathcal{Q}$. These examples would all be impossible if the rational number system $\mathcal{Q}$, which is not complete (cf. Example 3), were replaced by the real number system $\mathcal{R}$, which is complete. The ordered field $\mathcal{Q}$ will be considered to be embedded in $\mathcal{R}$ in order that symbols such as $\sqrt{2}$ can be used. The letter x is assumed to represent a rational number in every case.

a. A function continuous on a closed interval and not bounded there (and therefore, since the interval is bounded, not uniformly continuous there).

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

b. A function continuous and bounded on a closed interval but not uniformly continuous there.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

c. A function uniformly continuous (and therefore bounded) on a closed interval and not possessing a maximum value there.

$$f(x) = x - x^3, \quad 0 \leq x \leq 1$$

d. A function continuous on a closed interval and failing to have the intermediate value property.

Example b; or $f(x) = x^2$ on $[1, 2]$, which does not assume the value 2 intermediate between the values 1 and 4.

e. A nonconstant differentiable function whose derivative vanishes identically over a closed interval.

Example b.

f. A differentiable function for which Rolle's theorem (and therefore the law of the mean) fails.

Example c.

g. A monotonic uniformly continuous nonconstant function having the intermediate value property, and whose derivative is identically 0 on an interval.

This example is more difficult than the preceding ones. It can be constructed by means of the Cantor set defined and discussed in Chapter 8. For details, see Example 15, Chapter 8.

5.2 Numbers: Advanced Properties

5.2.1 Series representations for some mathematical constants by Alzer, Karayannakis, Srivastava (2005)

Here, we apply a classical series identity involving the psi (or digamma) function with a view to deriving series representations for a number of known mathematical constants. Several closely related consequences and results are also considered.

1. Introduction, definitions and preliminaries

In the significantly vast (and widely scattered) literature on fractional calculus (that is, calculus of derivatives and integrals of an arbitrary real or complex order), we find many systematic (and historical) accounts of its theory and applications in a number of areas including (for example) ordinary and partial differential equations, special functions, integral equations, and summation of series. Many of the recent works (or the so-called serendipities) in fractional calculus, especially those in the area of summation of infinite series, did indeed revive (as illustrations emphasizing the usefulness of the underlying fractional calculus techniques) various special cases and consequences of either the following familiar summation theorem for the Gauss hypergeometric function (cf., e.g., [29, p. 282]; see also [1, p. 556, Entry 15.1.20]):

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (\Re(c-a-b) > 0; c \notin \mathbb{Z}_0^- := \{0, -1, -2, \dots\}) \quad (1.1)$$

or the following well-known (rather classical) result in the theory of the psi (or digamma) function $\psi(z)$ (cf., e.g., [15, p. 19, Eq. 1.7.4 (30)]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu)_n}{n \cdot (\lambda)_n} = \psi(\lambda) - \psi(\lambda - \nu) \quad (\Re(\lambda - \nu) > 0; \lambda \notin \mathbb{Z}_0^-) \quad (1.2)$$

where

$$\psi(z) := \frac{d}{dz} \{\log \Gamma(z)\} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (1.3)$$

or, equivalently,

$$\log \Gamma(z) = \int_1^z \psi(\zeta) d\zeta \quad (1.4)$$

and $(\lambda)_\nu$ denotes the Pochhammer symbol defined (for $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ and in terms of the Gamma function) by

$$\begin{aligned} (\lambda)_\nu &:= \frac{\Gamma(\lambda + \nu)}{\Gamma(\lambda)} \\ &= \begin{cases} 1 & (\nu = 0; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \\ \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + n - 1) & (\nu = n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}; \lambda \in \mathbb{C}) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

While the summation theorem (1.1) is attributed to Carl Friedrich Gauss (1777-1855), a finite-difference derivation of the series identity (1.2) can be found on pp. 251 and 261 in the 1924 classical monograph, entitled *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, by Niels Erik

Nörlund (1885-1981) (see, for example, Erdélyi et al. [15, p. 19]; see also Hansen [17, p. 126, Entry (6.6.34)], Magnus et al. [21, p. 17], Prudnikov et al. [23, p. 537, Entry 40], and Whittaker and Watson [29, p. 263, Example 43]). For a reasonably detailed historical account of the series identity (1.2), and of its numerous consequences and generalizations, one may refer to the work on the subject by Nishimoto and Srivastava [22], who also provided a number of relevant earlier references on summation of infinite series by means of fractional calculus. Many further developments on this subject are reported by (among others) Srivastava [26], Al-Saqabi et al. [2], and Aular de Durán et al. [5].

In our present investigation dealing with the series identity (1.2), we shall also make use of such other higher transcendental functions as the Riemann zeta function $\zeta(s)$ as well as the Hurwitz (or generalized) zeta function $\zeta(s, a)$ defined, when $\Re(s) > 1$, by (cf., e.g., [27, p. 88 et seq.])

$$\zeta(s) := \zeta(s, 1) \quad \text{and} \quad \zeta(s, a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \quad (\Re(s) > 1; a \notin \mathbb{Z}_0^-) \quad (1.6)$$

which satisfies the following relationship:

$$\psi^{(p)}(z) = \frac{d^p}{dz^p} \{\psi(z)\} = (-1)^{p+1} p! \zeta(p+1, z) \quad (p \in \mathbb{N}; z \notin \mathbb{Z}_0^-) \quad (1.7)$$

with the polygamma function $\psi^{(p)}(z)$ defined by

$$\psi^{(p)}(z) := \frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}} \{\log \Gamma(z)\} = \frac{d^p}{dz^p} \{\psi(z)\} \quad (p \in \mathbb{N}_0; z \notin \mathbb{Z}_0^-) \quad (1.8)$$

The following result will also be required in our investigation. Indeed, for the psi (or digamma) function $\psi(z)$, it is known that [27, p. 14, Eq. 1.2 (7)]

$$\psi(z+n) = \psi(z) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{z+k-1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-) \quad (1.9)$$

which, for $z = 1$, yields the following special case for the n th harmonic number H_n :

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \gamma + \psi(n+1) \quad (1.10)$$

where γ denotes the Euler-Mascheroni constant defined by

$$\begin{aligned} \gamma &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = -\psi(1) \\ &\cong 0.577215664901532860606512... \end{aligned} \quad (1.11)$$

In view of this last relationship (1.11), an obvious special case of the series identity (1.2) when

$$\lambda = 1 \quad \text{and} \quad v = 1 - t \quad (0 < t < 1)$$

would yield the following formula which plays a key role in our investigation:

$$\psi(t) = -\gamma - \frac{1}{\Gamma(1-t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1-t)}{n \cdot n!} \quad (0 < t < 1). \quad (1.12)$$

Applying the identity (1.9), we find from (1.12) by differentiation that

$$\psi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_n(t)}{n \cdot n!} \quad \text{with} \quad \mathcal{A}_n(t) := \frac{\Gamma(n+1-t)}{\Gamma(1-t)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-t} \quad (1.13)$$

and

$$\psi''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n(t)}{n \cdot n!}$$

with

$$\mathcal{B}_n(t) := \frac{\Gamma(n+1-t)}{\Gamma(1-t)} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-t)^2} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k-t} \right)^2 \right] \quad (1.14)$$

We note that the infinite series in (1.13) and (1.14) converge uniformly in every closed interval contained in $(0, 1)$, so that the term-by-term differentiation is justified.

In [18] it is shown that (1.12) and (1.13) can be used to get good numerical approximations for certain values of $\psi(t)$ and $\psi'(t)$.

Such mathematical constants as (for instance) π and e have attracted the attention of researchers for centuries. Their fascination has led to the discovery of numerous remarkable series, product, and integral representations for many of these mathematical constants. In Sections 2 and 3 of the present paper, we apply the formulas (1.12), (1.13) and (1.14), as well as other results, in order to obtain (presumably new) series expansions for π , π^2 , π^3 , π^4 , $\log 2$, $\log 3$, Catalan's constant

$$G := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cong 0.915965594177219015... \quad (1.15)$$

and Apéry's constant

$$\zeta(3) \cong 1.20205690315959428540...$$

2. Series representations

The following elegant series representations for π , π^3 , and π^4 were given by Lehmer [20], Zucker [30], and Borwein and Borwein [8], respectively:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu_n}, \quad \frac{7\pi^3}{216} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{2^{2n}(2n+1)^3}, \quad \text{and} \quad \frac{\pi^4}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h_n}{n} \right)^2, \quad (2.1)$$

where μ_n denotes the normalized binomial mid-coefficient defined by

$$\mu_n := 2^{-2n} \binom{2n}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n! \sqrt{\pi}} \quad (2.2)$$

and

$$h_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n = \frac{1}{2} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \quad (2.3)$$

in terms of the n th harmonic number H_n given already by (1.10). The third formula in (2.1) is a corrected version of a result found earlier by De Doelder [14, p. 138, Eq. (22)] (see also [8, p. 1198]).

Some of the main properties of μ_n are collected in [3,6]. Many interesting facts about H_n can be found in [25]. Furthermore, series representations for π^4 involving H_n are considered in (for example) [8,14,24].

An application of (1.13) leads us to a series representation for π^2 involving μ_n and h_n defined by (2.2) and (2.3), respectively. Indeed, using the last expression in (2.2), together with the fact that

$$\psi' \left(\frac{1}{2} \right) = \zeta \left(2, \frac{1}{2} \right) = 3\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2} \quad \text{and} \quad \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{\pi} \quad (2.4)$$

we get

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n h_n}{n} \quad (2.5)$$

2. We know that (see, for example, [27, p. 20])

$$\psi \left(\frac{1}{4} \right) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3 \log 2 \quad \text{and} \quad \frac{\Gamma \left(n + \frac{3}{4} \right)}{\Gamma \left(\frac{3}{4} \right)} = \left(\frac{3}{4} \right)_n = \frac{1}{4^n} \prod_{k=1}^n (4k - 1), \quad (2.6)$$

so that (1.12) (with $t = \frac{1}{4}$) yields the following companion of the first formula in (2.1):

$$\frac{\pi}{2} = -3 \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n}, \quad (2.7)$$

where

$$p_n := \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k} \right). \quad (2.8)$$

Furthermore, in terms of q_n defined by

$$q_n := \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{3}{4k} \right), \quad (2.9)$$

by applying [27, p. 20]

$$\psi \left(\frac{3}{4} \right) = -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3 \log 2$$

and (1.12) (with $t = \frac{3}{4}$), we get

$$\frac{\pi}{2} = 3 \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n} \quad (2.10)$$

Numerous remarkable representations for π are given in [9,11].

3. The following interesting connections of the Catalan constant G defined by (1.15) with π^2 , $\psi' \left(\frac{1}{4} \right)$, and $\psi' \left(\frac{3}{4} \right)$ were given by Kölbig [19]:

$$\psi' \left(\frac{1}{4} \right) = \pi^2 + 8G \quad \text{and} \quad \psi' \left(\frac{3}{4} \right) = \pi^2 - 8G. \quad (2.11)$$

Making use of (2.11), together with the second formula in (2.6) and

$$\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)_n = \frac{1}{4^n} \prod_{k=1}^n (4k-3) \quad (2.12)$$

we find from (1.13) (with $t = \frac{1}{4}$ and $t = \frac{3}{4}$, respectively) that

$$\frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n} \quad (2.13)$$

where

$$\sigma_n := p_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-1} + q_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-3} \quad (2.14)$$

and

$$4G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n} \quad (2.15)$$

where

$$\delta_n := p_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-1} - q_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-3} \quad (2.16)$$

p_n and q_n being given by (2.8) and (2.9), respectively.

Further series expansions as well as product and integral representations for the Catalan constant G can be found in (for example) [12,27], and [28, pp. 199-200].

4. In his celebrated paper [4], Roger Apéry (1916-1994) used the following known formula (see, for details, [27, p. 280]):

$$\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n} n^3 \mu_n} \quad (2.17)$$

to prove the irrationality of $\zeta(3)$.

In view of (1.7) (with $p = 2$ and $z = \frac{1}{2}$), we have [27, p. 96]

$$\psi''\left(\frac{1}{2}\right) = -2\zeta\left(3, \frac{1}{2}\right) = -14\zeta(3) \quad (2.18)$$

so that (1.14) yields the following series representation for the Apéry constant $\zeta(3)$:

$$\zeta(3) = \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \omega_n}{n}, \quad (2.19)$$

where μ_n is given by (2.2) and

$$\omega_n := \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \quad (2.20)$$

A detailed list of references on Apéry's constant can be found in [16].

5. Using the formulas [27, p. 20]:

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\log 3, \quad \psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\log 3,$$

$$\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)_n = \frac{1}{3^n} \prod_{k=1}^n (3k-2), \quad \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)_n = \frac{1}{3^n} \prod_{k=1}^n (3k-1),$$

and (1.12) (with $t = \frac{1}{3}$ and $t = \frac{2}{3}$), we get

$$3\log 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n + s_n}{n} \quad (2.21)$$

and

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n - s_n}{n} \quad (2.22)$$

respectively, r_n and s_n being given by

$$r_n := \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{3k}\right) \quad \text{and} \quad s_n := \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{2}{3k}\right). \quad (2.23)$$

3. Further remarks and observations

In this section, we first derive a mild generalization of the series representation (2.5) for π^2 , which we developed in Section 2. Indeed, in view of the obvious derivative formula:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} [\psi(a+n) - \psi(a)] \frac{z^n}{n!}$$

$$(|z| < 1; |z| = 1 \text{ and } \Re(c-a-b) > 0; c \notin \mathbb{Z}_0^-) \quad (3.1)$$

the classical Gauss summation theorem (1.1) yields the following summation identity [24, p. 595, Eq. (1.8)]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} [\psi(a+n) - \psi(a)]$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} [\psi(c-a) - \psi(c-a-b)]$$

$$(\Re(c-a-b) > 0; c \notin \mathbb{Z}_0^-) \quad (3.2)$$

A summation identity, equivalent to (3.2), would follow upon differentiating both sides of (1.1) partially with respect to b . Moreover, by similarly involving the denominator parameter c instead, we obtain [24, p. 595, Eq. (1.10)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} [\psi(c+n) - \psi(c)]$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} [\psi(c-a) + \psi(c-b) - \psi(c) - \psi(c-a-b)]$$

$$(\Re(c-a-b) > 0; c \notin \mathbb{Z}_0^-) \quad (3.3)$$

In its special case when $c = b + 1$, the summation identity (3.2) becomes

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b+n) \cdot n!} [\psi(a+n) - \psi(a)] \\ &= \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1-a+b)} \left(\frac{\psi(1-a+b) - \psi(1-a)}{b} \right) \\ & (\Re(a) < 1; b \notin \mathbb{Z}_0^-) \end{aligned} \quad (3.4)$$

which, when $b \rightarrow 0$, yields the following alternative form of (1.13):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{n \cdot n!} [\psi(a+n) - \psi(a)] = \psi'(1-a) \quad (\Re(a) < 1) \quad (3.5)$$

By virtue of (2.2), (2.3), and the first formula in (2.4), our series representation (2.5) for π^2 is an immediate consequence of the summation identity (3.5) when $a = \frac{1}{2}$.

Next we turn to the summation identity (3.3). By setting $c = b + 1$ and proceeding as in the derivation of (3.4), we find from (3.3) that

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b+n) \cdot n!} [\psi(b+n+1) - \psi(b+1)] \\ &= \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1-a+b)} \left(\frac{\psi(1-a+b) - \psi(1-a)}{b} - \frac{\gamma + \psi(1+b)}{b} \right) \\ & (\Re(a) < 1; b \notin \mathbb{Z}_0^-) \end{aligned} \quad (3.6)$$

which, in the limit case when $b \rightarrow 0$, leads us to the following summation formula involving the n th harmonic number H_n given by (1.10):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{n \cdot n!} H_n = \psi'(1-a) - \frac{\pi^2}{6} \quad (\Re(a) < 1). \quad (3.7)$$

For $a = \frac{1}{2}$, (3.7) yields yet another series representation for π^2 in the form:

$$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n H_n}{n} \quad (3.8)$$

where μ_n is the normalized binomial mid-coefficient given by (2.2).

We find from (3.7) by differentiation that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{n \cdot n!} H_n \cdot [\psi(a+n) - \psi(a)] = -\psi''(1-a) \quad (\Re(a) < 1) \quad (3.9)$$

Using (2.2), (2.3), and (2.18), we get from (3.9) (with $a = \frac{1}{2}$) another series representation for Apéry's constant as follows:

$$\zeta(3) = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n h_n H_n}{n} \quad (3.10)$$

This last result (3.10) may be viewed as a companion of the following series representations:

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} = \frac{4}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^2} \quad (3.11)$$

The first result in (3.11) and its obvious variant given by the second result in (3.11) were proven by Leonhard Euler (1707-1783) in his 1775 paper (see, for details, [7, p. 252 et seq.]; see also [24, p. 602]). The third result in (3.11) was derived by De Doelder [14, p. 134, Eq. (15)].

We now recall the following relationships proven by Kölbig [19]:

$$\psi''\left(\frac{1}{4}\right) = -2\pi^3 - 56\zeta(3) \text{ and } \psi''\left(\frac{3}{4}\right) = 2\pi^3 - 56\zeta(3) \quad (3.12)$$

By using (3.12), (1.9), the second formula in (2.6), and (2.12), we find from (3.9) (with $a = \frac{1}{4}$ and $a = \frac{3}{4}$, successively) that

$$\pi^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n H_n}{n} \quad (3.13)$$

where δ_n is defined in (2.16). Furthermore, since

$$\lim_{a \rightarrow 0} \{(a)_n \cdot [\psi(a+n) - \psi(a)]\} = (n-1)! \quad (3.14)$$

in its limit case when $a \rightarrow 0$, (3.9) yields Euler's result given by the second formula in (3.11).

From (3.9) we find by further differentiation that

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_n}{n \cdot n!} \mathcal{B}_n(1-a) = -\psi'''(1-a) \quad (\Re(a) < 1) \quad (3.15)$$

where $\mathcal{B}_n(1-a)$ is defined as in (1.14). Since

$$\lim_{a \rightarrow 0} \{\mathcal{B}_n(1-a)\} = -2 \cdot (n-1)! \cdot H_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$$

and

$$\psi'''(1) = 6\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$$

in its limit case when $a \rightarrow 0$, (3.15) yields

$$\frac{\pi^4}{30} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_{n-1} H_n}{n^2} \quad (3.16)$$

Using (3.16) in conjunction with Euler's formula (see, for example, [24, p. 602, Eq. (4.13)]):

$$\frac{\pi^4}{72} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} \quad (3.17)$$

we get the following known companion of the third formula in (2.1) [17, p. 366, Entry (55.8.2)] (see also [24, p. 603]):

$$\frac{17\pi^4}{360} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{H_n}{n}\right)^2 \quad (3.18)$$

By means of a different method, the series representation (3.18) was rediscovered by (for example) Borwein and Borwein [8, p. 1192, Eq. (3)]. Moreover, in its equivalent form:

$$\frac{11\pi^4}{360} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{H_n}{n+1}\right)^2 \quad (3.19)$$

the known result (3.18) was also derived markedly differently by De Doelder [14, p. 129, Eq. (9)] (see, for details, [24, p. 603]).

Since

$$\psi''' \left(\frac{1}{2} \right) = 6\zeta \left(4, \frac{1}{2} \right) = \pi^4 \quad \text{and} \quad \frac{\mathcal{B}_n \left(\frac{1}{2} \right)}{n!} = -4\mu_n \omega_n$$

where ω_n is defined by (2.20), we can deduce yet another series representation for π^4 from the formula (3.15) (with $a = \frac{1}{2}$) as follows:

$$\frac{\pi^4}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \omega_n H_n}{n} \quad (3.20)$$

Some other interesting consequences and applications of the results considered here are being recorded as follows.

1. By setting $b = 1$ in (3.6) and making use of (1.9), we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(n+1)!} (H_{n+1} - 1) = \frac{a}{(1-a)^2} \quad (3.21)$$

In view of the summation identity [20]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n+1} = 1 \quad (3.22)$$

a special case of (3.21) when $a = \frac{1}{2}$ yields the following relative of (3.8):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n H_{n+1}}{n+1} = 3. \quad (3.23)$$

2. For $a = b = c - 1 = \frac{1}{2}$, (3.3) yields

$$\frac{1}{2}(\log 4 - 1)\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n (h_{n+1} - 1)}{2n+1} \quad (3.24)$$

Now, by observing that the power series in

$$P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{\arcsin(2x)}{2x} \quad \left(|x| < \frac{1}{2} \right)$$

converges also when $x = \frac{1}{2}$, we conclude from Abel's theorem that

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

which leads us to the following summation identity:

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{2n+1} \quad (3.25)$$

From (3.24) and (3.25), we obtain

$$\frac{\pi}{2} \log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\mu_n h_n}{(2n-1)^2} \quad (3.26)$$

3. Using the limit relation (3.14), we find from (3.2) that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b)_n}{nb \cdot (c)_n} = \frac{\psi(c) - \psi(c-b)}{b} \quad (\Re(c-b) > 0; b \neq 0; c \notin \mathbb{Z}_0^-)$$

which, when $b \rightarrow 0$, yields

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n \cdot (c)_n} = \psi'(c) \quad (\Re(c) > 0) \quad (3.27)$$

In view of (2.11), by setting $c = \frac{1}{4}$ and $c = \frac{3}{4}$ in (3.27), we obtain

$$2\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{q_n} + \frac{1}{p_n} \right) \quad \text{and} \quad 16G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{p_n} \right) \quad (3.28)$$

respectively, p_n and q_n being given by (2.8) and (2.9).

4. The reflection formula for the psi (or digamma) function states that

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z) \quad (3.29)$$

which, upon differentiation, yields

$$\psi'(1-z) + \psi'(z) = \pi^2 \csc^2(\pi z) \quad (3.30)$$

and

$$\psi''(1-z) - \psi''(z) = 2\pi^3 \csc^2(\pi z) \cot(\pi z) \quad (3.31)$$

Using (3.29) and (1.12), we find that

$$\pi \cot(\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t)_n - (t)_n}{n \cdot n!} \quad (0 < t < 1), \quad (3.32)$$

which, in the special case when $t = \frac{1}{4}$, leads to

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n - q_n}{n}, \quad (3.33)$$

where p_n and q_n are defined by (2.8) and (2.9), respectively. If, on the other hand, we combine (2.7) and (2.10), we obtain the following counterpart of (3.33):

$$6 \log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n + q_n}{n} \quad (3.34)$$

In view of (1.13), a special case of (3.30) when $z = \frac{1}{4}$ yields (2.13). Moreover, by applying (3.30) (with $z = \frac{1}{3}$) and (1.13), we get

$$\frac{4\pi^2}{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n} \quad (3.35)$$

where

$$\epsilon_n := r_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-1} + s_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-2} \quad (3.36)$$

with r_n and s_n given by (2.23).

By using (3.31) (with $z = \frac{1}{3}$) and (1.14), we obtain

$$\frac{8\sqrt{3}}{81}\pi^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{n} \quad (3.37)$$

where

$$\begin{aligned} \theta_n := & s_n \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)^2} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-2} \right)^2 \right] \\ & - r_n \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)^2} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

with r_n and s_n given by (2.23).

By differentiating both sides of (3.31) once more, we get

$$\psi'''(1-z) + \psi'''(z) = 2\pi^4 \csc^2(\pi z) [1 + 3\cot^2(\pi z)]. \quad (3.39)$$

If we set $z = \frac{1}{4}$ in (3.39) and apply (3.15), we obtain

$$\pi^4 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_n \vartheta_n}{n} \quad (3.40)$$

where

$$\begin{aligned} \vartheta_n := & p_n \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-1} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)^2} \right] \\ & + q_n \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-3} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

with p_n and q_n given in (2.8) and (2.9), respectively.

Remark. It is easily seen from (3.29) that

$$\psi^{(N)}(1-z) + (-1)^{N+1} \psi^{(N)}(z) = (-1)^N \pi \frac{d^N}{dz^N} \{\cot(\pi z)\} \quad (N \in \mathbb{N}_0)$$

in which the right-hand side is expressible as a polynomial of degree $N+1$ in $\cot(\pi z)$. Thus, whenever this polynomial can be evaluated in a closed form, we are led to a series representation of the class exemplified already by (3.35), (3.37), and (3.40) above.

5. By setting $c = 2a$ in (3.2), we have

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(2a)_n \cdot n!} \frac{(b)_n}{b} [\psi(a+n) - \psi(a)] \\ &= \frac{\Gamma(2a)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(2a-b)} \frac{\psi(a) - \psi(a-b)}{b} \\ & \quad (\Re(a-b) > 0; 2a \notin \mathbb{Z}_0^-; b \neq 0) \end{aligned} \quad (3.42)$$

We now let $b \rightarrow 0$ in (3.42). We thus find that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{n \cdot (2a)_n} [\psi(a+n) - \psi(a)] = \psi'(a) \quad (\Re(a) > 0) \quad (3.43)$$

For $a = 1$, (3.43) yields the following counterpart of the first two series expansions given in (3.11):

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n(n+1)} \quad (3.44)$$

which is comparable with a known summation identity:

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n \cdot 2^n} \quad (3.45)$$

The summation identity (3.44) follows also as a special case of the following known result [17, p. 361, Entry (55.2.7)]:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(x+n)} [\psi(x+n) - \psi(x+1)] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\frac{\pi^2 x}{6} - \gamma - \psi(x+1) \right] \quad (x \notin \mathbb{Z}_0^-) \end{aligned} \quad (3.46)$$

when $x = 1$. On the other hand, since [17, p. 61, Entry (5.12.44)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2$$

the summation identity (3.45) is an obvious special case of the following known result [17, p. 63, Entry (5.13.15)]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n \frac{x^n}{n} = \frac{1}{2} [\log(1-x)]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad (|x| < 1) \quad (3.47)$$

when $x = \frac{1}{2}$. Formula (3.45) was, in fact, posed as a problem in [13].

6. It is known that [17, p. 360, Entry (55.1.2); p. 366, Entry (55.9.5)]

$$\psi^{(N)}(mx) = \delta_{N,0} \log m + \frac{1}{m^{N+1}} \sum_{k=0}^{m-1} \psi^{(N)} \left(x + \frac{k}{m} \right) \quad (3.48)$$

where $\delta_{N,0}$ is the Kronecker symbol. Using (3.48) with $N = 1$, we get

$$\sum_{k=1}^{m-1} \psi' \left(\frac{k}{m} \right) = \frac{1}{6} (m^2 - 1) \pi^2 \quad (m \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$$

which, in conjunction with (1.13), yields

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_n \left(\frac{k}{m} \right)}{n \cdot n!} = \frac{1}{6} (m^2 - 1) \pi^2 \quad (m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) \quad (3.49)$$

Formula (2.5) is a special case of (3.49) when $m = 2$. By setting $m = 3$ in (3.49), we obtain (3.35).

7. By applying (3.48) with $N = 2$, we find that

$$\sum_{k=1}^{m-1} \psi''\left(\frac{k}{m}\right) = -2(m^3 - 1)\zeta(3) \quad (m \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$$

which, together with (1.14), leads us to the following summation identity:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n\left(\frac{k}{m}\right)}{n \cdot n!} = -2(m^3 - 1)\zeta(3) \quad (m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) \quad (3.50)$$

Formula (2.19) is a special case of (3.50) when $m = 2$. Moreover, for $m = 3$ in (3.50), we get

$$\frac{52}{9}\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n + \beta_n}{n} \quad (3.51)$$

where

$$\alpha_n := r_n \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-1} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)^2} \right] \quad (3.52)$$

and

$$\beta_n := s_n \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-2} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)^2} \right] \quad (3.53)$$

with r_n and s_n given by (2.23). Formula (3.51) is related to (3.37).

8. By applying the following known result [14, p. 136, Eq. (19)]:

$$\pi G - \frac{7}{4}\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{h_n}{n^2} \quad (3.54)$$

and the third formula in (3.11), we obtain

$$\frac{1}{2}\pi G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{2n-1}}{(2n-1)^2} \quad (3.55)$$

9. By letting $a \rightarrow c$ in (3.2), we find that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} [\psi(c+n) - \psi(c)] = -\frac{\Gamma(c)\Gamma(-b)}{\Gamma(c-b)} \quad (\Re(b) < 0; c \notin \mathbb{Z}_0^-) \quad (3.56)$$

In its special cases when $c = -b = \frac{1}{2}$ and $c = -2b = 1$, if we appropriately apply the definitions (2.2) and (1.5), we obtain

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n h_n}{2n-1} \quad (3.57)$$

and

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n H_n}{2n-1}, \quad (3.58)$$

respectively.

The formulas in (3.57) and (3.58) may be looked upon as counterparts of those in (2.5) and (3.8), respectively. A comparison of (2.5) with (3.57) would yield

$$\frac{\pi^2}{4} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n h_n}{2n-1} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n h_n}{n} \quad (3.59)$$

10. The general problem of evaluating double sums of the type:

$$\mathfrak{S}_{l,m} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^l} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^m} \quad (l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}; m \in \mathbb{N}) \quad (3.60)$$

was first proposed in a letter from Christian Goldbach (1690-1764) to Euler in 1742, and Euler was successful in obtaining closed-form sums in several cases (for details, see [7, p. 253] and [10, p. 2]; see also [27, p. 138, Problem 37; p. 157, Proposition 3.7] for some recent developments involving the general sum $\mathfrak{S}_{l,m}$ ($l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}; m \in \mathbb{N}$). In particular, we recall that (cf., e.g., [24, p. 603, Eq. (4.20)])

$$\mathfrak{S}_{2,2} = [\zeta(2)]^2 - \frac{3}{4}\zeta(4) = \frac{7\pi^4}{360} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \zeta(4) \quad (3.61)$$

It is easily proven by the principle of mathematical induction that

$$H_n^2 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.62)$$

Making use of (3.61), (3.62), and (3.18), we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{k} = \frac{17\pi^4}{720} + \frac{1}{2}\mathfrak{S}_{2,2} = \frac{\pi^4}{30} \quad (3.63)$$

Further series representations, analogous to the ones presented in this paper, can indeed be developed in a similar manner.

5.2.2 Other definitions of real numbers

Определение действительного числа как разбиения множества $\mathbb{Q}$ на два непустых подмножества L, R

Можно заметить, что всякое действительное число $x \in \mathbb{R}$ однозначно определяется множествами

$$L_x = \{r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}, \quad R_x = \{r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\}$$

достаточно понять, что $x = \sup L_x$.

Действительно, если мы берём $x' < x$, то между ними найдётся рациональное $r \in (x', x)$, а значит x - это точная верхняя грань L_x и точная нижняя грань R_x .

Альтернативный подход к определению действительного числа - это определение действительного числа как разбиения множества $\mathbb{Q}$ на два непустых подмножества L, R ,

так что $\forall \ell \in L, \forall r \in R, \ell < r$, причём множеству R разрешается иметь минимальный элемент, а множеству L не разрешается иметь максимальный элемент.

Такое разбиение $\mathbb{Q} = L \cup R$ называется сечением.

Для сечений можно определить сравнение $(L, R) \leq (L', R')$ как включения $L \subseteq L'$ и $R \supseteq R'$, всякие два сечения оказываются сравнимыми и

$$(L, R) \leq (L', R') \text{ и } (L, R) \geq (L', R') \rightarrow (L, R) = (L', R').$$

Теорема о существовании предела возрастающей ограниченной последовательности действительных чисел

Для сечений достаточно легко доказывается теорема о существовании предела возрастающей ограниченной последовательности действительных чисел (то есть сечений) (L_n, R_n) .

Ограниченность означает наличие непустого пересечения $R = \bigcap_n R_n$, монотонность означает монотонность по включению $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots$, и если положить $L = \bigcup_n L_n$, то пара (L, R) оказывается сечением, представляющим предел.

канонический способ приближения действительных чисел снизу и сверху конечной десятичной дробью

Также мы можем придумать канонический способ приближения действительных чисел снизу и сверху конечной десятичной дробью

$$\underline{d}_n(x) = \max \{m10^{-n} : m \in \mathbb{Z}, m10^{-n} \leq x\}, \quad \bar{d}_n(x) = \min \{m10^{-n} : m \in \mathbb{Z}, m10^{-n} \geq x\}$$

существование максимума и минимума гарантируется тем, есть целые числа как большие $10^n x$, так и меньшие его.

Очевидно, что $\underline{d}_n(x) \leq x \leq \bar{d}_n(x)$ и последовательность отрезков $[\underline{d}_n(x), \bar{d}_n(x)]$ стягивается.

При этом десятичные записи $\underline{d}_n(x)$ и $\bar{d}_n(x)$ стабилизируются в каждой цифре и в пределе $n \rightarrow \infty$ могут рассматриваться как бесконечная десятичная дробь, причём можно проверить, что из $\underline{d}_n(x)$ и $\bar{d}_n(x)$ получается одна и та же бесконечная десятичная дробь.

Между $10^n x$ и $10^n y$ для различных x, y поместятся два целых числа

Если два числа x, y различны, то при достаточно большом n между $10^n x$ и $10^n y$ поместятся два целых числа (докажите это в качестве упражнения), что доказывает однозначность представления числа десятичной записью.

(??? вот почему это не очевидно???? я хз, как это доказывать и из чего стартуя)

Определение целых чисел через бесконечные десятичные дроби

Соответственно, еще один подход к определению целых чисел - ввести бесконечные десятичные дроби, их сравнение и арифметические операции между ними.

теорема о существовании предела ограниченной возрастающей последовательности тогда выводится из рассмотрения конечных отрезков десятичных дробей (с фиксированным числом знаков после запятой) и сводится к теореме о существовании максимума в ограниченном множестве целых чисел.

(???? пока эту теорему не оттренировал ещё)

Свойство полноты $\mathbb{R}$ выводится из существования предела ограниченной монотонной последовательности (!?)

Для увязывания других определений действительных чисел с определением через фундаментальные последовательности нужно утверждение:

Свойство полноты $\mathbb{R}$ выводится из существования предела ограниченной монотонной последовательности.

Доказательство

(пока не до него)

Из существования предела ограниченной монотонной последовательности выводится существование общей точки у последовательности вложенных отрезков.

Пусть у нас есть фундаментальная последовательность (x_n) . Она ограничена, следовательно все её члены лежат в некотором отрезке $[a_1, b_1]$.

В частности верно, что на этом отрезке лежит бесконечно много членов последовательности. Пусть мы имеем аналогичное на k -м шаге, с отрезком $[a_k, b_k]$.

Разобьём отрезок $[a_k, b_k]$ в середине на два и выберем в качестве $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ тот из них, который содержит бесконечно много элементов последовательности (x_n) .

(см. замечание после определения 1.18).

Такой найдётся, иначе и в $[a_k, b_k]$ было бы конечное число элементов последовательности.

В итоге мы получим последовательность стягивающихся отрезков, которая имеет единственную общую точку c .

Применим определение фундаментальности, возьмём $\varepsilon > 0$ и найдём соответствующее $N(\varepsilon)$.

Рассмотрим также отрезок $[a_k, b_k] \ni c$ из нашей последовательности, который имеет длину меньше ε .

Среди членов последовательности с номерами $n \geq N(\varepsilon)$ найдётся какой-то, лежащий в $[a_k, b_k]$.

Тогда $|x_n - c| < \varepsilon$.

Так как при любом $m \geq N(\varepsilon)$ по определению фундаментальности $|x_n - x_m| < \varepsilon$, мы получаем

$$|x_m - c| < 2\varepsilon$$

и это уже выполняется для любого $m \geq N(\varepsilon)$, то есть по определению $x_n \rightarrow c$.

(тут конец док-ва, и пока что я пропустил его, ибо не актуально)

Все способы построения действительных чисел приводят к одному и тому же результату (??!!!)

(тут я хз, просто пропустил)

Докажите, что все способы построения действительных чисел приводят к одному и тому же результату.

Точнее, что любое упорядоченное поле $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ (то есть поле, в котором арифметические операции связаны с неравенствами стандартным образом и содержащее в себе $\mathbb{Q}$ как упорядоченное подполе), обладающее "свойством Архимеда»

$$\mathbb{K} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$$

однозначно вкладывается в $\mathbb{R}$, если потребовать сохранения порядка при вложении и тождественность вложения на $\mathbb{Q}$.

||

Для элемента $x \in \mathbb{K}$ постройте стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, таких что $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ и $a_n \leq x \leq b_n$.

В качестве образа x в $\mathbb{R}$ возьмите пересечение соответствующей стягивающейся последовательности вложенных отрезков в $\mathbb{R}$.

Проверьте совместимость такого вложения с арифметическими операциями.

||

5.2.3 What Number Theory is About?

(here, I'll make just an intro to it, there are big books about it. I'll also write approximately 10 interesting theorems from there, to make it meaningful)

5.2.4 p -adic numbers (??)

(так пока ничего не усвоил)

5.3 Set Theory: Basics

5.3.1 Cardinality of a set, countable and uncountable sets of numbers

В этом разделе мы порассуждаем о том, насколько велики бывают бесконечные множества.

Определение равномоощных множеств

Множества X и Y называются равномоощными, если существует обратимое отображение $f : X \rightarrow Y$. Будем обозначать это как $|X| = |Y|$.

Можно проверить, что это «отношение эквивалентности». Мы ставим здесь кавычки, потому что отношения эквивалентности определяются на множествах, а «множество всех множеств» не является множеством. Тем не менее, если $f : X \rightarrow Y$ обратимо и $g : Y \rightarrow Z$ обратим, то $g \circ f$ обратимо и его обратное - это $f^{-1} \circ g^{-1}$, остальные два свойства отношений эквивалентности очевидны.

Напомним, что конечным множеством натуральных чисел мы называли множество натуральных чисел, либо пустое, либо имеющее минимальный элемент.

что всякое непустое конечное множество натуральных чисел равномоощно начальному отрезку натуральных чисел (??)

Докажите, что всякое непустое конечное множество натуральных чисел равномоощно начальному отрезку натуральных чисел вида $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

||

Используйте полную индукцию по максимальному элементу множества. ||

Определение

22.

Произвольное множество называется конечным, если оно пустое или равномоощно некоторому множеству $[n]$, $n \in \mathbb{N}$.

При этом n называется мощностью конечного множества, а мощностью пустого множества называется нуль. мощность конечного множества X обозначается $|X|$ или $\#X$.

Задача

23. докажите, что мощность конечного множества определена корректно, то есть множества $[n]$ и $[m]$ не могут быть равномощными при $n \neq m$.

[[

Используйте математическую индукцию; предположив противное, постарайтесь уменьшить n и m на единицу.]]

Задача

24. докажите, что для мощности конечных множеств выполняются свойства:

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|, \quad |X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

[[

Используйте математическую индукцию.]]

Все бесконечные множества на первый взгляд, выглядят одинаково, хотя мы уже Δ показали, что множество действительных чисел на самом деле больше, чем множество натуральных чисел.

Определение

25. Множество называется счётным, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

Лемма

26. Подмножество счётного множества либо конечно, либо счётно.

Доказательство

Можно считать, что мы рассматриваем непустое $X \subseteq \mathbb{N}$. Определим x_1 как минимальный элемент X , x_2 - как минимальный из оставшихся и так далее по индукции. При этом X будет поставлено в соответствие либо всему $\mathbb{N}$, либо его конечному отрезку, то есть окажется либо счётным, либо конечным.

Теорема

27. Множество ? счётно.

Доказательство

Можно обратимо отобразить $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ как $f(0) = 1$, и для $n \in \mathbb{N}$

$$\text{положить } f(n) = 2n, f(-n) = 2n + 1.$$

Операция декартова произведения делает конечные множества больше (если они состоят из более чем одного элемента). Однако у счётных множеств операция декартова произведения мощность не увеличивает:

Лемма

28. Произведение $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ равномощно $\mathbb{N}$.

Доказательство

Выпишем явные отображения: при $\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$ ($k \in \mathbb{N}$) мы ПолоЖИМ

$$f(n) = \left(x - \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2} + 1 - x \right)$$

и в обратную сторону положим

$$f^{-1}(\ell, m) = \frac{(\ell + m - 1)(\ell + m - 2)}{2} + \ell$$

Теорема

29. Множество Φ счётно.

Доказательство

Всякий элемент $r \in \mathbb{Q}$ представляется в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$ с $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$. таким образом $\mathbb{Q}$ равномощно подмножеству $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, то есть по лемме 1.128 равномощно подмножеству $\mathbb{N}$. Так как $\mathbb{Q}$ не является конечным, то по лемме 1.126 оно должно оказаться счётным.

Задача

30. докажите, что множество всех подмножеств $X, 2^X$, не равномощно X .

||

Предположите наличие отображения $f : X \rightarrow 2^X$ и подумайте, может ли в его образе лежать множество $\{x : x \in X, x \notin f(x)\}$ (используйте парадокс Бертрана Рассела). ||

Определение

31. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется инъективным, если из $f(x) = f(x')$ следует $x = x'$.

Определение

32. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется сюръективным, если из $f(X) = Y$.

Обратите внимание, что инъективное и одновременно сюръективное отображение является биективным, то есть обратимым.

Определение

33. Будем говорить, что множество X не мощнее множества Y , если существует инъективное отображение $f : X \rightarrow Y$. Будем обозначать это как $|X| \leq |Y|$. Можно определить отношение $|X| \leq |Y|$ через существование сюръективного отображения в обратную сторону, $g : Y \rightarrow X$. Перейти от f к g можно, отобразив всякий элемент $y \in Y$ вида $y = f(x)$ в x , а остальные элементы отобразив в X как-нибудь.

Перейти от g к f можно, выбрав по одному $f(x)$ во всяком прообразе $g^{-1}(x)$. Это кажется достаточно безобидным, но на самом деле в этом процессе используется аксиома

выбора: имея семейство непустых множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (как отображение из индексирующего множество в множество подмножество некоторого множества U), можно выбрать по одному элементу $f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого α . Аксиому выбора также можно сформулировать как утверждение, что бесконечное декартово произведение

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha, \text{ таких что } \forall \alpha \in A, f(\alpha) \in X_\alpha \right\}$$

непустых множеств само не пусто. Более содержательное обсуждение следствий аксиомы выбора мы откладываем до раздела 9.8.

Задача

34. * Докажите, что если $|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |X|$, то $|X| = |Y|$.

||

Возьмите существующие по определению инъективные $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$. На множестве $X \cup Y$ введите отношение эквивалентности, $a \sim b$, если b можно получить из a повторением операций f, g, f^{-1}, g^{-1} . Разбейте $X \cup Y$ на классы эквивалентности по этому отношению, изучите структуру этих классов и задайте в каждом классе биекцию между элементами X и элементами Y . ||

Задача

35. * докажите, что множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{R}$.

||

Поработайте с представлением действительного числа двоичной записью и используйте результат задачи 1.134. ||

Задача

36. * докажите, что множество $\mathbb{R}$ равномощно $2^{\mathbb{N}}$.

||

Поработайте с представлением действительного числа двоичной записью и используйте результат задачи 1.134. ||

5.3.2 Cantor set

Обсудим подробно множество Кантора.

Конструкция

О случаях использования (?!!!)

(пропишу потом)

5.3.3 Concept of a fractal

(тут совсем вкратце, подробно - отдельный раздел)

Конструкция

О случаях использования (?!!!)

(пропишу потом)

5.3.4 Paradox of sets

Обсудим некоторые парадоксы, которые возникают редко, ведь теория множеств в принципе интуитивно понятна.

(??? пока не до них.)

О парадоксе Бертрانا Рассела

(про него подробнее где-то в другом месте)

Как например, следующий парадокс Бертрана Рассела: Рассмотрим множество $\bar{Z}$ таких множеств, которые не имеют самого себя как элемент, или в более формальной записи

$$Z = \{X : X \notin X\}$$

Можно ли тогда утверждать, что $Z \in Z$? На самом деле нет, так как по определению из этого следует $Z \notin Z$.

Можно ли утверждать, что $Z \notin Z$? Тоже нет, так как тогда по определению $Z \in Z$.

В общем, с множеством Z явно что-то не так.

О применениях (!?!?)

да хз.

Об отеле Гильберта

Суть

Парадокс «Гранд-отель» — мысленный эксперимент, иллюстрирующий свойства бесконечных множеств. Он демонстрирует отель с бесконечным количеством комнат, в каждой из которых находится постоялец. При этом в гостиницу всегда можно подселить ещё посетителей, даже если их бесконечное множество. Впервые парадокс был сформулирован немецким математиком Давидом Гильбертом в 1924 году и популяризирован в книге Георгия Гамова «Раз, два, три... бесконечность» в 1947 году.

Именно так есть отель, который и работает, они тупо не парятся и тупо заселяют куда угодно! Возможно, как раз за счет понимания этой концепции.

Гость ω приходит в отель, в котором все комнаты заняты. Для того чтобы освободить ему комнату, гость из комнаты 1 переходит в комнату 2, гость из комнаты 2 — в комнату 3 и так далее. И новый гость ω селится в комнате 1. Представьте себе отель со счётным множеством комнат, в каждой из которых находится постоялец. На первый взгляд, в отель невозможно подселить новых посетителей, как если бы речь шла об обычной гостинице, с конечным количеством комнат.

Новый посетитель Для того чтобы подселить нового человека, нам придётся освободить одну комнату. Для этого мы переселим гостя из комнаты № 1 в комнату № 2, гость из комнаты № 2 перейдёт в комнату № 3 и так далее. В общем случае, гость из комнаты n переселится в комнату $n+1$. Таким образом, мы освободим первую комнату, в которую можно будет поселить нового гостя.

Бесконечное количество новых посетителей В этом случае нам придётся освободить бесконечное количество комнат: постояльца из комнаты 1 переселим в комнату 2, из комнаты 2 в комнату 4, в общем случае из комнаты n переселим в комнату $2n$. Таким образом мы освободим все нечётные комнаты, количество которых также счётное множество.

Бесконечное количество автобусов с бесконечным количеством пассажиров. Есть несколько способов для того, чтобы расселить бесконечное количество пассажиров из бесконечного количества автобусов. Большинство методов подразумевает, что у каждого пассажира есть номер места, на котором он сидит в своём автобусе. В дальнейшем обозначим номер места переменной n , а номер автобуса, в котором сидит пассажир, переменной s .

Метод степени простого числа Для начала, переселим всех постояльцев из своих комнат в комнаты степени 2. Таким образом, человек из комнаты i теперь будет в комнате 2^i . Всех пассажиров из первого автобуса поселим в комнаты под номером 3^n , из второго автобуса в комнаты под номером 5^n . Пассажиров из автобуса ss поселим в комнаты p^n , где p — s -ное нечётное простое число. Согласно основной теореме арифметики (см. статью Основная теорема арифметики) номера совпадать не будут. Это решение оставляет свободными комнаты, номера которых не являются степенью простого числа, то есть, большинство непростых чисел: 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22 и т. д.

Метод факторизации целых чисел Каждого гостя, который сидит на месте pn в автобусе ss , можно поселить в комнате $2^n 3^c$ (отель можно обозначить как нулевой автобус). К примеру, гость из комнаты 2592 ($2^5 \times 3^4$) находился в 4 автобусе и сидел на 5 месте. Так как каждое число имеет единственное разложение в произведение простых множителей, ни один из гостей не останется без комнаты и никто не будет поселён в занятую комнату. Как и в предыдущем методе, в этом случае остаются свободные комнаты.

Метод чередования Для каждого гостя сравниваются длины номеров его автобуса и места в какой-либо позиционной системе счисления. Если одно из чисел короче, к нему добавляются ведущие нули, пока оба числа не будут иметь одинаковое количество цифр. Чередуя цифры этих чисел, получим номер комнаты. Например, пассажир на сидении 6917 в автобусе 843 получит комнату номер 60981473, то есть 60981473.

В отличие от решения со степенями простых чисел, метод чередования заполняет отель полностью, не оставляя пустых комнат.

Метод треугольного числа В начале, каждый житель отеля будет переселён из комнаты n в комнату T_n (то есть n -ное треугольное число, $\frac{n(n+1)}{2}$). Далее, гости, которые сидят на месте n в автобусе s будут поселены в комнату $T_{s+n-1} + n$. Таким образом, все комнаты будут заселены, и в каждой комнате будет только один житель.

Высшие уровни бесконечности Допустим, что отель стоит на берегу моря. К берегу прибывает бесконечное количество автомобильных паромов, на каждом из которых бесконечное количество автобусов, каждый с бесконечным количеством пассажиров. Эта ситуация, включающая три «уровня» бесконечности, решается путём расширения любого из представленных выше методов. В этом случае также подразумевается, что паромы имеют порядковые номера.

Далее будет использоваться обозначение адреса пассажира в виде «место-автобус-паром». Например, 768-85-7252 — адрес пассажира на 768-ом месте в 85-ом автобусе на 7252-ом пароме.

Метод факторизации целых чисел можно применить, добавив новое простое число: пассажир, сидящий на месте n в автобусе s на пароме f , будет поселён в комнату $2^n 3^c 5^f$. Данный метод возвращает очень большие числа для небольших входных данных. Например, пассажир с адресом 10-45-26 займёт комнату 4507923441392263334111022949218750000000000 ($2^{10} \times 3^{45} \times 5^{26}$). Как было отмечено ранее, метод оставляет огромное количество комнат пустыми.

Метод чередования можно использовать, чередуя не по две цифры, а по три. Так, пассажир с адресом 1-2-3 займёт комнату 123, а пассажир с адресом 42609-233-7092 займёт

комнату 400207620039932.

Предвидя возможность любого уровня бесконечности, администрация отеля пожелает назначать номера таким образом, чтобы жителям не нужно было переселяться при заселении новых гостей. Одним из возможных решений является присвоение гостям двоичного номера, где единицы разделяют группы нулей, в каждой группе количество нулей равно соответствующему числу из адреса гостя, для каждого уровня бесконечности. Например, гость с адресом 2-5-4-3-1 будет поселён в комнату 10010000010000100010, что соответствует десятичному числу 590882.

Как дополнение к этому методу, из каждой группы нулей удаляется один нуль. Таким образом, гость с адресом 2-5-4-3-1 будет заселён в комнату 101000010001001, что соответствует десятичному 10308. Это дополнение гарантирует, что каждая комната будет заселена гостями.

Анализ Парадокс Гильберта действительно является парадоксом. Выражения «в каждой комнате есть гость» и «гости больше не могут быть размещены» теряют свою эквивалентность, когда речь идёт о бесконечном количестве комнат.

Свойства конечных и бесконечных множеств существенно отличаются. Парадокс «Гранд-отель» можно понять, используя теорию трансфинитных чисел Кантора. В обычном (небесконечном) отеле с более чем одной комнатой, количество нечётных комнат, очевидно, меньше, чем общее количество комнат. Однако в Гранд-отеле Гильберта количество нечётных номеров не меньше общего количества номеров. В математических терминах, мощность подмножества, содержащего нечётные комнаты, равна мощности множества всех комнат. Действительно, бесконечные множества характеризуются как множества, имеющие собственные подмножества той же мощности.

О применениях (!?!?)

да хз, некоторые отели по этому принципу работают, да и все

Выводы из парадоксов

хз

Мы пока не будем глубоко исследовать этот вопрос, отметим лишь, что выражения «множество всех множеств» или «множество всех множеств таких что...», похоже, использовать нельзя.

5.3.5 What Set Theory is About?

(?? just intro to it, some basic statements)

связь теории множеств и теории категорий

Ершов говорил, что это альтернативный поход, но я не знаю, потом подумаю про это.

5.4 Sequences

Обсудим подробно последовательности.

(по идее всё о них в этот раздел занесу)

5.4.1 Definitions of limits

предел по Коши

предел по Гейне

О применениях понятия предела

можно характеризовать набор функций по их способности достичь другой функции. это свойство - полнота.

5.4.2 Fundamental sequences of sets of numbers

Обсудим подробно пределы и последовательности.

(выкину теорию чисел в раздел про них)

Определение последовательности

Далее мы будем работать с понятием последовательности и предела, поэтому даём соответствующее

Последовательность элементов множества X - это отображение $s : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Для последовательностей часто пишут s_n вместо $s(n)$.

Имея в виду всю последовательность, часто пишут (s_n) .

Говоря «элемент последовательности» мы будем иметь в виду пару (n, s_n) из номера $n \in \mathbb{N}$ и значения s_n .

Таким образом, последовательность может иметь одно значение, но последовательность всегда имеет бесконечно много элементов.

Указанное соглашение будет важно, когда мы будем употреблять фразы «конечное число элементов последовательности» или «бесконечное число элементов последовательности».

Определение окрестности

Если $a < x < b \in \mathbb{Q}$, то мы будем говорить, что интервал (a, b) (от a до b не включая концы) является окрестностью числа x .

Определение предела

Число $a_0 \in \mathbb{Q}$ является пределом последовательности (a_n) рациональных чисел, если для любой окрестности $U(a_0)$ найдётся номер N , такой что при $n \geq N$ выполняется $a_n \in U(a_0)$.

Тогда пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$$

или $a_n \rightarrow a_0$ при $n \rightarrow \infty$; и говорят, что a_n стремится к a_0 при n стремящемся к бесконечности.

определение предела последовательности удобно понимать так, что в любой окрестности $U(a_0)$ лежат все члены последовательности кроме конечного их числа (заодно определим, что подмножество $\mathbb{N}$ называется конечным, если у него есть максимальный элемент).

Например, по определению легко проверить, что $1/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

С другой стороны, легко проверить, что последовательность $(-1)^n$ не имеет предела.

Определение фундаментальной последовательности

Последовательность (a_n) рациональных чисел называется фундаментальной или последовательностью Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N(\varepsilon), |a_n - a_m| < \varepsilon$$

В этом определении логическая формула посложнее.

Словами можно передать её так: при достаточно больших n и m разность $|a_n - a_m|$ будет меньше любого наперёд заданного ε .

Примером нефундаментальной последовательности является последовательность $(-1)^n$, или даже последовательность с $a_n = n$.

Если последовательность имеет предел, то она фундаментальна

Proof. Возьмём в определении предела окрестность $U(a_0)$, длина которой $\leq \varepsilon$, например $(a_0 - \varepsilon/2, a_0 + \varepsilon/2)$.

Тогда с некоторых пор a_n, a_m будут лежать в $U(a_0)$ и значит тогда будет выполняться $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

(потом подумаю.)

□

5.4.3 Rational Numbers

О рациональных числах

Проблема с рациональными числами состоит в том, что в них «нет» некоторых чисел, например $\sqrt{2}$, то есть числа, дающего в квадрате 2.

Однако нам нетрудно построить фундаментальную последовательность c_n по такому принципу (это на самом деле конечные десятичные дроби):

$$c_n = \max \{ m10^{-n} : m \in \mathbb{Z}, (m10^{-n})^2 \leq 2 \}$$

у нас всегда будет выполняться неравенство $c_n^2 < 2 < (c_n + 10^{-n})^2$ и если бы у этой последовательности был предел $c_0 \in \mathbb{Q}$, то по его определению можно было бы установить (далее это будет исследовано в более общем виде как «существование обратной функции»), что $c_0^2 = 2$.

Таким образом мы заключаем, что отсутствие пределов некоторых фундаментальных последовательностей рациональных чисел в множестве рациональных чисел является практически важной проблемой, которую хочется решить.

Существует несколько способов расширить множество рациональных чисел так, чтобы фундаментальные последовательности имели пределы и выполнялись другие полезные свойства.

Мы воспользуемся самой прямолинейной процедурой - «пополнением», тем более, что она имеет развитие при пополнении метрических пространств, нормированных пространств и т.п.

Определение

На множестве фундаментальных последовательностей рациональных чисел $c(\mathbb{Q})$ введём отношение эквивалентности

$$(a_n) \sim (b_n) \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), |a_n - b_n| < \varepsilon$$

Фактормножество по этому отношению эквивалентности обозначим $\mathbb{R} = c(\mathbb{Q}) / \sim$.

Проверим транзитивность этого отношения эквивалентности (остальные свойства очевидны):

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N'(\varepsilon) : \forall n \geq N'(\varepsilon), |a_n - b_n| < \varepsilon \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists N''(\varepsilon) : \forall n \geq N''(\varepsilon), |b_n - c_n| < \varepsilon \\ \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = \max \{N'(\varepsilon/2), N''(\varepsilon/2)\} : \forall n \geq N(\varepsilon) \\ |a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Значит, действительно можно говорить о фактормножестве.

Заметим, что всякому рациональному числу $x \in \mathbb{Q}$ соответствует фундаментальная последовательность (x) , в которой все члены равны x .

Нетрудно убедиться по определению, что при разных $x \neq y \in \mathbb{Q}$ такие последовательности не эквивалентны.

Это даёт вложение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то есть мы действительно расширили множество рациональных чисел

5.4.4 Arithmetic operations with limits (!!)

(вот тут можно потренироваться и заготовить полезные теоремы!!!)

Сумма сходящихся последовательностей сходится

Теорема 6. Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то их сумма и разность тоже сходятся к сумме или разности пределов,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Доказательство

(??)

Пусть $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$.

Утверждение следует из неравенства

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Определение бесконечно малой последовательности

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то последовательность (a_n) называется бесконечно малой.

Определение бесконечно большой

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$, то последовательность (a_n) называется бесконечно большой и пишут $a_n \rightarrow \infty$.

Связь бесконечно малых и бесконечно больших

Последовательность ненулевых чисел (a_n) бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(1/a_n)$ бесконечно большая.

Доказательство

определение и того и другого сводится к неравенству $|a_n| < x \leftrightarrow |1/a_n| > 1/x$ для достаточно больших n при любом фиксированном $x > 0$.

Свойства бесконечно малых

Лемма 7. Сумма и разность бесконечно малых последовательностей бесконечно малая, произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей является бесконечно малой.

Доказательство

Первое утверждение следует из того, что предел суммы равен сумме пределов.

Для доказательства второго предположим $a_n \rightarrow 0, |b_n| \leq M$.

Тогда выбрав ε/M в качестве ε в определении предела, мы будем иметь $|a_n| < \varepsilon/M$ для достаточно больших n .

Но тогда $|a_n b_n| < \varepsilon_{\text{для достаточно больших } n}$, то есть $a_n b_n \rightarrow 0$.

Произведение сходящихся последовательностей сходится к произведению пределов

Теорема 8. Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то их произведение тоже сходится к произведению пределов,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Доказательство

(???)

Мы используем лемму 1.26 (?!?! упустил пока) о том, что фундаментальная (т.е. сходящаяся) последовательность ограничена.

Пусть $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, тогда утверждение следует из неравенства

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a| \sup_n |b_n| + |b_n - b| \cdot |a|$$

к правой части мы применяем утверждение о произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей.

для последовательности с конечным пределом $(1/b_n)$ определена для всех n кроме конечного числа и ограничена

Если $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$, то последовательность $(1/b_n)$ определена для всех n кроме конечного числа и ограничена.

Доказательство

Положим $\varepsilon = |b|/2$ в определении предела.

Тогда

$$|b_n - b| < |b|/2 \rightarrow |b_n| > |b|/2$$

что означает ограниченность.

Теорема о пределе отношения последовательностей (!)

Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Доказательство

(прямо интересно, как доказывать это?? и почему такой способ)

Пусть $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$.

По предыдущей лемме b_n не равно нулю для достаточно больших n и $1/b_n$ ограничено, поэтому можно говорить о пределе частного даже если оно не всегда определено.

Запишем

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb_n} (a_nb - ab_n)$$

Последовательность $\left(\frac{1}{bb_n}\right)$ ограничена, а последовательность $(a_nb - ab_n)$ бесконечно малая по произведению пределов, так что разность оказывается бесконечно малой, что означает

$$a_n/b_n \rightarrow a/b.$$

Символические тождества для бесконечно малых (?)

Проверьте, что для бесконечных пределов выполняются символические тождества:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \infty \cdot \infty = \infty$$

Приведите примеры, показывающие, что для $(+\infty) + (-\infty)$ и $\infty \cdot 0$ может получиться что угодно.

5.4.5 Arithmetic operations and comparison of real numbers

Теперь нам нужно определить понятия арифметических операций и работу с неравенствами для действительных чисел.

Определим сумму действительных чисел.

Почему не очевидны арифметические операции над действительными числами

(пока что это не понимаю, потом спрошу умных людей и пропишу ответы.)

Определение

Суммой последовательностей (a_n) и (b_n) называется последовательность с членами $c_n = a_n + b_n$.

Лемма: Сумма фундаментальных последовательностей фундаментальна

Сумма фундаментальных последовательностей фундаментальна.

При замене последовательностей эквивалентными класс эквивалентности сумм не меняется.

Доказательство

Первое утверждение верно, потому что (для достаточно больших m и n)

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \text{ и } |b_n - b_m| < \varepsilon/2 \rightarrow |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon$$

Второе верно потому что если $(a_n) \sim (a'_n)$, то для достаточно больших n

$$|a_n - a'_n| < \varepsilon \rightarrow |(a_n + b_n) - (a'_n + b_n)| < \varepsilon$$

Аналогично происходит при замене b_n на b'_n . Так как класс эквивалентности суммы последовательностей не меняется при замене любого из слагаемых на эквивалентное, то таким образом определена операция $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, аналогично можно определить операцию $-$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Коммутативность и ассоциативность сложения, нейтральность нуля и существование противоположного элемента следуют из того, что это всё выполняется на уровне последовательностей.

Лемма: последовательность ограничена

Фундаментальная последовательность (a_n) ограничена, то есть существует M такое, что $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$

Доказательство

Положим $\varepsilon = 1$ в определении фундаментальной последовательности.

Тогда с номера $N = N(1)$ последовательность ограничена числом $|a_N| + 1$. О этого были еще некоторые члены последовательности, но в целом она ограничена максимальным из конечного набора чисел

$$\max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$$

Определение Произведения последовательностей

Произведением последовательностей (a_n) и (b_n) называется последовательность с членами $c_n = a_n b_n$.

Лемма: Произведение фундаментальных последовательностей фундаментально

Произведение фундаментальных последовательностей фундаментально.

(пока не зашарил, задротство тут)

При замене последовательностей эквивалентными класс эквивалентности произведения не меняется.

Доказательство

По предыдущей лемме выберем число M , которое ограничивает все фигурирующие в утверждениях последовательности.

Тогда первое утверждение верно, потому что (для достаточно больших m и n)

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ и } |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2M} \rightarrow \\ |a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \leq M |b_n - b_m| + M |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Второе верно потому что если $(a_n) \sim (a'_n)$, то для достаточно больших n

$$|a_n - a'_n| < \varepsilon/M \rightarrow |a_n b_n - a'_n b_n| \leq M |a_n - a'_n| < \varepsilon$$

Аналогично происходит при замене b_n на b'_n .

Таким образом определена операция умножения $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Свойства ассоциативности, дистрибутивности и нейтральности единицы проверяются на уровне последовательностей.

Определим теперь знак действительного числа и следующий из этого определения линейный порядок действительных чисел.

Заметим, что если $(a_n) \sim 0$, то это просто означает, что последовательность (a_n) стремится к нулю.

Лемма

9.

Если действительное число представлено фундаментальной последовательностью $(a_n) \approx 0$, то для некоторого рационального $\varepsilon > 0$ найдётся $N(\varepsilon)$, удовлетворяющее одному из свойств:

для всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется $a_n > \varepsilon$ (тогда (a_n) называется положительной);
 для всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется $a_n < -\varepsilon$ (тогда (a_n) называется отрицательной).

Доказательство

Если предел (a_n) не равен нулю, то найдётся маленькая окрестность $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \ni 0$, такая что бесконечно много членов последовательности не попадает в неё.

Без ограничения общности пусть бесконечно много раз $a_n \geq 2\varepsilon$ (случай когда бесконечно много раз $a_n \leq -2\varepsilon$ рассматривается также).

Возьмём $\varepsilon > 0$ и $N(\varepsilon)$ в определении фундаментальности (a_n) и для любого $m \geq N(\varepsilon)$ возьмём какое-нибудь $n \geq N(\varepsilon)$ так, чтобы $a_n \geq 2\varepsilon$ (таких n бесконечное число и среди них есть не меньшие $N(\varepsilon)$).

Тогда

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, a_n \geq 2\varepsilon \rightarrow a_m > \varepsilon$$

Это уже выполняется для всех $m \geq N(\varepsilon)$.

Заметим, что определение положительности и отрицательности не зависит от класса эквивалентности, так как если начиная с некоторого момента $a_n > \varepsilon$ и начиная с некоторого момента $|a_n - b_n| < \varepsilon/2$, то начиная с некоторого (возможно более позднего) момента $b_n > \varepsilon/2$.

Таким образом, знак ненулевого действительного числа определён корректно.

Сумма положительных чисел тогда оказывается положительной, сумма отрицательных - отрицательной.

Произведение чисел одного знака будет положительным, а произведение чисел разных знаков - отрицательным.

Сравнение действительных чисел происходит по правилу $a < b \leftrightarrow b - a > 0$.

Транзитивность

$$a < b \text{ и } b < c \rightarrow a < c$$

следует из того, что сумма положительных чисел положительна и $c - a = (c - b) + (b - a)$.

Остальные свойства неравенств проверяются аналогично.

Лемма: о делении фундаментальной последовательности

Теперь разберёмся с делением действительных чисел.

Если $(a_n) \approx 0$ и фундаментальна, то последовательность b_n , заданная для достаточно больших n формулой $b_n = 1/a_n$, а для остальных заданная произвольно, тоже фундаментальна.

Доказательство

По предыдущей лемме найдётся положительное δ , такое что $|a_n| > \delta$ для достаточно больших n .

Тогда можно написать

$$|b_n - b_m| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n a_m|} \leq \frac{1}{\delta^2} |a_n - a_m|$$

При достаточно больших n и m мы можем гарантировать $|a_n|, |a_m| > \delta$ и следовательно $|a_n - a_m| < \varepsilon \delta^2$.

Тогда для достаточно больших n и m будет $|b_n - b_m| < \varepsilon$.

Заметим, что работая с понятием предела последовательности и фундаментальной последовательности, мы всегда можем изменить последовательность в конечном числе позиций (для конечного числа индексов), не меняя предела, не меняя её фундаментальности и не меняя её класс эквивалентности в множестве фундаментальных последовательностей.

Действительно, взяв какое-либо конкретное $M \in \mathbb{N}$ мы можем заменить все $N(\varepsilon)$ в определении на $N'(\varepsilon) = \max\{N(\varepsilon), M\}$, тогда утверждение из определения продолжает быть верным и в нём перестают участвовать члены последовательности с индексами $n < M$.

В частности, последовательность можно считать неопределённой для конечного числа индексов, если нас интересует только её предел или её фундаментальность.

Предыдущая лемма устанавливает существование обратного по умножению для любого ненулевого действительного числа a .

Обратное единственно, так как если есть другое обратное b' , то

$$b = b(ab') = (ba)b' = b'$$

Архимедовость действительных чисел

для всякого действительного числа α найдётся большее его целое и меньшее его целое.

Доказательство

Представим α последовательностью (a_n) .

По лемме 1.26 эта последовательность ограничена по модулю некоторым рациональным числом $p/q > 0$, а значит она ограничена по модулю и целым числом p .

Тогда последовательность $(p - a_n)$ состоит из неотрицательных чисел и представляет неотрицательное действительное число.

Это означает, что $\alpha \leq p$ по определению.

Аналогично доказывается, что $\alpha \geq -p$.

О случаях отсутствия архимедовости (??)

(такое вообще есть? я хз.)

для всякого действительного найдётся такое, которое $\alpha > 1/n$

для всякого положительного действительного числа α найдётся натуральное n , такое что $\alpha > 1/n$.

Доказательство

Найдётся целое $n > 1/\alpha$, которое очевидно должно быть натуральным.

Домножив это неравенство на положительное α и поделив на положительное n , получим

$$\alpha > 1/n.$$

Почему архимедовость не очевидна?

(хз)

Когда архимедовость не выполняется?

(хз)

Об ошибках в арифметических операциях с пределами (!!!)

(укажу их точно!! это важно, я раньше часто делал. потренируюсь!!)

(тут про ошибку про перемножение последовательностей, вроде так просто это не прокатит. не так помню.)

5.4.6 Bernoulli's inequality and the first remarkable limit**О применениях этого раздела**

(честно, вроде для построения анализа раздел этот нужен, в остальном - плевать, итак хватает нормальных утверждений на все эти случаи. так что пока забиваю на него, при потребности вернусь. тут всё очевидно. тупо потренироваться доказывать можно и всё.)

Неравенство Бернулли

Теорема 9. для $x \geq -1$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Доказательство

для $n = 1$ неравенство обращается в равенство.

Воспользуемся математической индукцией.

Пусть верно для $n - 1$:

$$(1+x)^{n-1} \geq 1+(n-1)x$$

Домножим на $(1+x)$:

$$(1+x)^n \geq (1+(n-1)x)(1+x) = 1+nx+(n-1)x^2 \geq 1+nx,$$

то есть неравенство верно и для n .

По принципу математической индукции это означает, что неравенство верно для всех натуральных n .

(вроде крутизна его в том, что доказывается оно без знаний чего угодно, что дальше развивается. потом уточню, в этом ли его ценность?)

Лемма: о бесконечно малой (!!!!!)

(мб это очень полезно, потом вникну в суть и в док-во!)

Если последовательность (a_n) бесконечно малая, то

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \rightarrow 1$$

Выражение в скобках очевидно положительно для достаточно больших n .

Доказательство

Мы предполагаем, что выполняется $|a_n| < 1$, что действительно верно для достаточно больших n .

Тогда по неравенству Бернулли

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \geq 1 + a_n$$

Для отрицательного a_n эта оценка уже годится для доказательства стремления к 1.

Запишем также неравенство

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{a_n}{n}\right) = 1 - \frac{a_n^2}{n^2} \leq 1$$

из которого следует

$$1 + a_n \leq \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 - a_n}$$

Теперь теорема о двух милиционерах доказывает требуемое.

(потом досмотрю. укажу применения.)

Лемма: $e_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ возрастает

При фиксированном $x \in \mathbb{R}$ последовательности $e_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ положительна и возрастает при достаточно больших n .

Доказательство

Ясно, что при достаточно больших n эта величина будет положительна.

Тогда нам достаточно доказать, что при достаточно больших n

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \geq 1$$

Запишем

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1 \end{aligned}$$

используя неравенство Бернулли.

5.4.7 Partial limits

Суть частичных пределов

Суть в том, что частичный предел это точка, в которую бесконечно много элементов последовательности сходятся. Сформулируем это строго:

Определение 5.1. Для всякой точки $x_0 \in M$ число или бесконечность со знаком $A \in \mathbb{R}$ называется *частичным пределом* f в точке x_0 , если можно найти последовательность $(x_n) \in M$, такую что $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$ для любого n и $f(x_n) \rightarrow A$.

И поскольку частичных пределов может быть много, то вводят два крайних, верхний и нижний пределы f в точке x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Пример 1. поясним на примерах.

Определение подпоследовательности и частичного предела

Последовательность (b_k) называется подпоследовательностью числовой последовательности (a_n) , если выполняется $b_k = a_{n_k}$ для некоторой строго возрастающей последовательности (n_k) натуральных чисел.

Частичный предел числовой последовательности (a_n) - это значение $a \in \overline{\mathbb{R}}$, если a является пределом некоторой подпоследовательности последовательности (a_n) .

Лемма: о частичном пределе

(очев.)

Значение $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является частичным пределом последовательности (a_n) тогда и только тогда, когда в любой окрестности a найдётся бесконечно много элементов последовательности (a_n) .

Напомним, что говоря «найётся бесконечно много элементов» мы подразумеваем, что найдётся бесконечно много номеров $n \in \mathbb{N}$, таких что значение a_n попадает в данную окрестность (см. также замечание после определения 1.18).

Доказательство

Если a -частичный предел, то очевидно в любой окрестности a лежит бесконечно много членов соответствующей подпоследовательности a_{n_k} .

Докажем в обратную сторону. Взяв окрестность $U_{1/k}(a)$, можно найти в ней a_{n_k} из нашей последовательности так, что номер n_k будет больше ранее использованных номеров (у нас бесконечно много вариантов выбора). Так получится подпоследовательность $(a_{n_k})_k$, которая стремится к a по определению.

Теорема Больцано-Вейерштрасса (?!!!!)

(потренируюсь позже в док-ве её!)

Формулировка

У всякой числовой последовательности есть частичный предел.

(мб добавлю пояснения о сути, пока хз)

Доказательство

Если последовательность не ограничена сверху, то в любой окрестности $+\infty$, то есть в интервале вида $(m, +\infty)$, есть бесконечно много элементов последовательности, ведь иначе максимальный из них ограничивал бы последовательность сверху или вся последовательность была бы ограничена сверху m . Значит в этом случае $+\infty$ является частичным пределом.

Пусть теперь последовательность (x_n) ограничена. Значит все её значения лежат на отрезке $[a, b]$. Поделим отрезок посередине точкой c на два отрезка. На одном из отрезков будет находиться бесконечно число элементов последовательности, обозначим его $[a_2, b_2]$. Далее будем продолжать делить отрезок пополам и выберем стягивающуюся последовательность отрезков $([a_k, b_k])$, в каждом из которых лежит бесконечно много элементов последовательности (x_n) .

Как мы знаем, существует единственная общая точка x_0 всех отрезков и $a_k, b_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$. Ясно, что в любой окрестности x_0 оказывается некоторый отрезок $[a_k, b_k]$ целиком, и значит в ней оказывается бесконечно много элементов последовательности.

О том, почему не очевидна теорема Больцано-Вейерштрасса (???)

Ну, потому что а вдруг не будет частичного предела???

О применениях теоремы Больцано-Вейерштрасса (?!!!)

(пока хз, зачем она.)

Теорема о существовании максимального и минимального элемента

В множестве частичных пределов любой числовой последовательности есть максимальный и минимальный элемент. Они обозначаются

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Доказательство

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ - это точная верхняя грань множества частичных пределов. Если $a = -\infty$, то $-\infty$ должно быть частичным пределом, иначе бы частичных пределов вообще не было в противоречии с теоремой Больцано-Вейерштрасса. Если $a = +\infty$ и $+\infty$ является частичным пределом, то утверждение верно.

В оставшихся случаях в любой окрестности $U(a)$ найдётся частичный предел a' , иначе a не было бы точной верхней гранью множества частичных пределов. Но $U(a)$ является и окрестностью a' , следовательно в $U(a)$ есть бесконечно много точек последовательности. Получается, что само a тоже является частичным пределом. Для точной нижней грани доказательство аналогично.

Теорема о пределе последовательности с совпадающим верхним и нижним пределом

Если у числовой последовательности (a_n) имеется $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Доказательство

Предположим противное определению предела: тогда за пределами некоторой окрестности $U(a)$ лежит бесконечно много элементов последовательности a_n . Тогда из них мы составим подпоследовательность последовательности (a_n) и выберем её частичный предел b , он очевидно не равен a . Но тогда b будет частичным пределом и для исходной последовательности - противоречие.

Пример последовательностей с частичными пределами во всем отрезке

Пусть α - иррациональное число. докажите, что последовательности $(\cos \pi \alpha n)$ и $(\sin \pi \alpha n)$ имеют множеством частичных пределов весь отрезок $[-1, 1]$.

(хз)

||

Рассмотрите точки $P_n = (\cos \pi \alpha n, \sin \pi \alpha n)$. докажите, что какие-то две из них P_n и P_m могут оказаться на окружности сколь угодно близко друг от друга. Воспользуйтесь тем, что дуга $\widehat{P_n P_m}$ отличается от дуги $\widehat{P_{n-k} P_{m-k}}$ только вращением.

||

Существование монотонной подпоследовательности

Докажите, что у всякой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

||

Можно рассуждать чисто комбинаторно, используя лишь порядок действительных чисел, а можно задействовать понятие частичного предела.

||

(а я хз)

5.4.8 Topology on the line for sequences (??)

(тут тренировки остались!)

Определение открытого множества

Множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется открытым, если у каждой точки $x \in U$ есть окрестность $(a, b) \ni x$, которая полностью содержится в U .

Без труда можно проверить, что всякий интервал (a, b) является открытым множеством.

Свойства открытых множеств

Пустое множество открыто, всё $\mathbb{R}$ открыто.

Пересечение конечного числа открытых множеств открыто, объединение произвольного семейства открытых множеств открыто.

Доказательство

Первые два свойства очевидны по определению. Рассмотрим конечное пересечение $\bigcap_{k=1}^n U_k$ открытых множеств. Если точка x содержится в пересечении, то есть содержится в каждом из множеств, то она содержится в U_k вместе со своей окрестностью вида $(x - \varepsilon_k, x + \varepsilon_k)$. Положим $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k > 0$, тогда $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ содержится во всех U_k , а значит и содержится в их пересечении. Для объединения

доказательство проще: $x \in \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ тогда и только тогда, когда x содержится хотя бы в одном из U_{α} . Но если x содержится в U_{α} , то $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_{\alpha}$, значит

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

примеры бесконечной системы открытых множеств

Нетрудно привести пример бесконечной системы открытых множеств $\{(-1/n, 1/n): n \in \mathbb{N}\}$, пересечение которых состоит из одной точки и не является открытым.

В целом, введение на некотором множестве X системы «открытых множеств», удовлетворяющих свойствам из леммы, называется топологией на множестве X .

топология Зарисского

Конечно, даже на множестве $\mathbb{R}$ можно ввести и другие топологии, например, топология Зарисского на $\mathbb{R}$ объявляет «открытыми» множества U , дополнения к которым $\mathbb{R} \setminus U$ конечны.

Но мы такую топологию рассматривать не будем, хотя читатель может самостоятельно убедиться, что это тоже топология.

(потому что мб это стремная конструкция, я хз)

Определение

2. Множество $F \subseteq \mathbb{R}$ называется замкнутым, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Иначе можно сказать, что F замкнуто, если любая точка $x \notin F$ имеет не пересекающуюся с F окрестность.

Свойства замкнутых множеств (?!!!!)

(вот это проделаю!!!)

Пустое множество замкнуто, всё $\mathbb{R}$ замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто, пересечение произвольного семейства замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство

Сводится к свойствам открытых множеств с помощью формул

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{\alpha} U_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha} (\mathbb{R} \setminus U_{\alpha}), \quad \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha} (\mathbb{R} \setminus U_{\alpha})$$

Определение внутренней, внешней и граничной точки и их множеств

для всякого $X \subseteq \mathbb{R}$ и числа $y \in \mathbb{R}$ возможны три варианта: Некоторая окрестность $U(y) \ni y$ полностью содержится в X , тогда y - внутренняя точка X .

Некоторая окрестность $U(y) \ni y$ не пересекается с X , тогда y - внешняя точка X .

Всякая окрестность $U(y) \ni y$ содержит точки как из X , так и не из X , тогда y - граничная точка X .

Множество внутренних точек X обозначается $\text{int } X$, множество граничных точек X обозначается ∂X . Множество $X \cup \partial X$ называется замыканием X , $\text{cl } X$.

Лемма об открытости внутренности и замкнутости дополнения

Для любого $X \subseteq \mathbb{R}$ множество $\text{int } X$ открыто, множества ∂X и $\text{cl } X$ замкнутым.

Доказательство

Если $U(y) \subseteq X$, то для всякой $y' \in U(y)$ её окрестность $U(y')$ тоже содержится в X . Это доказывает открытость $\text{int } U$. Множество внешних точек можно описать как $\text{int } (\mathbb{R} \setminus X)$ и оно тоже открыто.

Замыкание $\text{cl } X$ является дополнением к множеству внешних точек и поэтому оно замкнуто. Граница ∂X является дополнением к объединению двух открытых множеств, поэтому она замкнута.

В качестве типичного примера можно рассмотреть полуинтервал $[a, b)$ при $a < b$. Его внутренность - это интервал (a, b) , его замыкание - отрезок $[a, b]$, его граница множество из двух точек a и b .

Задача о критерии открытости

Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ открыто тогда и только тогда, когда $\text{int } X = X$.

Задача

8. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{cl } X = X$. Определим более сложное понятие:

Компактность**Определение компактного множества**

Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется компактным, если из любого покрытия открытыми множествами

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

можно выбрать конечное подсемейство $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$, которое всё ещё покрывает X , $X \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$. Неформально часто говорят «из любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие».

О других определениях (!!!?)**О применениях (!!!!?)****Критерий компактности в топологическом пространстве (?!)**

(там еще другие есть кст, это такой общий вроде)

Теорема 10. *Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство

докажем сначала лёгкую часть - компактное множество ограничено и замкнуто. Семейство интервалов $(-n, n)$ покрывает всё $\mathbb{R}$ и множество X тоже. Если из него можно

оставить конечную подсистему (то есть на самом деле один интервал), то X окажется ограниченным. Пусть теперь $x \in \partial X$, если $x \notin X$, то семейство открытых множеств

$$U_n = (-\infty, x - 1/n) \cup (x + 1/n, +\infty)$$

покроем всё X .

Если его конечное подсемейство покроем X , то на самом деле будет выполняться

$$X \subset (-\infty, x - 1/n) \cup (x + 1/n, +\infty)$$

для некоторого натурального n . Но это будет значить, что X не пересекается с $(x - 1/n, x + 1/n)$, то есть x на самом деле внешняя точка X - противоречие.

В обратную сторону, фиксируем систему открытых множеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ и будем менять множество X . Так как оно ограничено, что оно содержится в отрезке $[a_1, b_1]$. Разобьём его на два равных отрезка и выберем тот из них в качестве $[a_2, b_2]$, для которого $X \cap [a_2, b_2]$ нельзя покрыть конечным подсемейством? Так сделать можно, ибо если покрыть конечным подсемейством можно пересечение X с каждым из отрезков, то покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$ можно и пересечение X с исходным отрезком. Повторяя эту конструкцию, мы получаем семейство стягивающихся отрезков $[a_n, b_n]$ с общей точкой x и свойством, что пересечение $X \cap [a_n, b_n]$ нельзя покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$. Но тогда в любой окрестности x есть точки из X . Следовательно x не является внешней точкой X , и из замкнутости получаем $x \in X$. Значит $x \in U_{\Delta, \Delta}$ некоторого $U \in \mathcal{U}$. Из того, что $a_n, b_n \rightarrow x$ следует, что $[a_n, b_n] \subseteq U_{\text{для}}$ достаточно больших n , то есть пересечение $X \cap [a_n, b_n]$ можно покрыть одним элементом семейства? Противоречие.

Задача

1. Докажите, что $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность чисел из X имеет частичный предел в X .

||

Это нетрудно сделать, используя критерий компактности и теорему Больцано-Вейерштрасса.

||

Есть ещё один полезный пример компактности. Расширенная числовая прямая $\bar{\mathbb{R}}$ имеет топологию, в которой базовые окрестности $-\infty$ имеют вид $[-\infty, x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, а базовые окрестности $+\infty$ имеют вид $(x, +\infty]$. Далее можно говорить об открытых и замкнутых множествах на расширенной числовой прямой и т.п.

Компактность расширенной числовой прямой

Расширенная числовая прямая компактна

Доказательство

Если $-\infty$ и $+\infty$ покрыты открытыми множествами, то они покрыты вместе с какими-то интервалами $[-\infty, a)$ и $(b, +\infty]$. После удаления открытых множеств, покрывающих $-\infty$ и $+\infty$, остаётся замкнутое подмножество $[a, b]$, из всякого покрытия которого можно оставить конечное подпокрытие.

гомеоморфизм $\mathbb{R}$ на отрезок $[-1, 1]$ (??)

Постройте гомеоморфизм $\mathbb{R}$ на отрезок $[-1, 1]$, то есть обратимое отображение, которое сохраняет систему открытых множеств (топологию).

При обсуждении непрерывности функции, определённой на некотором подмножестве действительных чисел будет важно следующее понятие:

Определение

Пусть X - фиксированное подмножество $\mathbb{R}$. для всякого открытого $U \subseteq \mathbb{R}$ множество $U \cap X$ называется открытым относительно X . Открытые относительно X множества задают на X индуцированную топологию.

Например, множество $[0, 1)$ не открыто на прямой, но открыто относительно отрезка $[0, 2]$.

Задача (??)

Докажите, что если множества $Z, Y \subseteq X$ открыты относительно X и не пересекаются, то найдутся непересекающиеся открытые $U, V \subseteq \mathbb{R}$, такие что $Z = X \cap U$ и $Y = X \cap V$

||

У всякой $y \in Y$ найдите окрестность $U(y) = (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y)$, не пересекающуюся с Z , аналогично для $z \in Z$ найдите $U(z) = (z - \varepsilon_z, z + \varepsilon_z)$, не пересекающуюся с Y . Потом уменьшите размеры каждой из этих окрестностей в два раза и рассмотрите их объединения.

||

Определение плотного множества

Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ называется плотным, если $\text{cl } X = \mathbb{R}$. Множество Y называется всюду неплотным, если его дополнение всюду плотно.

Всюду плотное множество можно иначе описать как множество, пересекающее любое непустое открытое множество. Всюду неплотное множество можно иначе описать, как множество, имеющее пустую внутренность.

Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является всюду плотным (мы уже доказали, что на всяком интервале есть рациональное число), а также является всюду неплотным (так как на всяком интервале есть числа вида $r\sqrt{2}$ с $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$).

Теорема Бэра на прямой (?!!!)

Последовательность всюду плотных открытых множеств в $\mathbb{R}$ имеет всюду плотное пересечение.

Доказательство

Рассмотрим последовательность открытых всюду плотных множеств (U_k) . Чтобы доказать, что пересечение $\bigcap_k U_k$ всюду плотно по определению, мы должны доказать, что всякий интервал (a_1, b_1) имеет непустое пересечение с пересечением всей последовательности, $\bigcap_k U_k$. Множество U_1 имеет непустое пересечение с (a_1, b_1) , к тому же $U_1 \cap (a_1, b_1)$ открыто и в нём можно выбрать отрезок ненулевой длины $[a_2, b_2]$. Переходя к интервалу (a_2, b_2) и продолжая так же далее, мы в пересечении $U_k \cap (a_k, b_k)$ всегда будем выбирать отрезок ненулевой длины $[a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Получается последовательность вложенных отрезков, у которой есть общая точка x . По построению она принадлежит всем множествам U_k и начальному интервалу (a_1, b_1) .

Теорема Бэра на прямой для замкнутых множеств

Переходя к дополнениям, мы получим такую формулировку:

Последовательности всюду неплотных замкнутых множеств в $\mathbb{R}$ имеет всюду неплотное объединение.

Заметим, что множество из одной точки является замкнутым и всюду неплотным. Значит мы доказали

Применения теоремы Бэра на прямой (?!!!)

(где-то она все-таки нужна!!!)

в

Докажите, что ломаная не может заполнить весь квадрат. (???)

в банаховых пространствах (????)

в:

Докажите, что не существует функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывной в рациональных точках, и разрывной в иррациональных точках

Несчётность множества действительных чисел

Множество $\mathbb{R}$ не является множеством значений никакой последовательности действительных чисел.

Более формальная работа с понятиями «счётное» и «несчётное» будет происходить в следующем разделе.

5.4.9 Counterexamples in sequences

(потом их соберу, это на самом деле интересно.)

5.5 Basics of Metric Spaces

(потом подумаю еще раз про пользу)

(!!! этот раздел вообще идет после анализа функций, потому что по сути обобщает то, что там. определения очень схожие, так что можно и запутаться. по сути функции - частный случай этого раздела (???))

5.5.1 Definition and examples of metric spaces

(??? так где по итогу примеры???)

Обзор применений метрических пространств (????)

(хз, честно говоря, так и не понял пока что????)

Определение метрического пространства

Более формально определение выглядит так ($\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных действительных чисел):

Определение

3.1.

Метрическое пространство состоит из множества M и функции расстояния $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ со следующими свойствами

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ (невырожденность);}$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) \text{ (симметричность);}$$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \text{ (неравенство треугольника).}$$

поясняющие примеры метрического пространства

В качестве очень простого примера можно рассмотреть множество действительных чисел с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$.

Менее тривиальный пример - евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

Из свойств метрики сравнительно нетривиально установить неравенство треугольника, которое в таком определении сводится к

$$|v + w| \leq |v| + |w|.$$

Для начала надо ввести понятие скалярного произведения векторов

$$v \cdot w = \sum_{k=1}^n v_k w_k$$

так что $|v| = \sqrt{v \cdot v}$ и установить следующее:

Неравенство Коши-Буняковского для векторов

Для любых $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$(v \cdot w)^2 \leq (v \cdot v) \cdot (w \cdot w) \Leftrightarrow |(v \cdot w)| \leq |v| \cdot |w|$$

Доказательство

Если $|w| = 0$, то обе части неравенства равны нулю.

Иначе рассмотрим квадратный трёхчлен

$$|v + tw|^2 = |v|^2 + 2t(v \cdot w) + t^2|w|^2 \geq 0$$

Из его неотрицательности следует, что его дискриминант не положителен.

Это и означает первый вариант неравенства Коши-Буняковского. Теперь неравенство треугольника выводится так:

$$|v + w|^2 = |v|^2 + 2(v \cdot w) + |w|^2 \leq |v|^2 + 2|v| \cdot |w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2$$

Отметим, что евклидово пространство является частным случаем декартова произведения метрических пространств.

В общем случае для произведения $M \times M''$ можно аналогично евклидову случаю положить:

$$\rho_2((x', x''), (y', y'')) = \sqrt{\rho(x', y')^2 + \rho(x'', y'')^2}$$

О следствиях (!?!?!!!!!)

Однако формула с квадратами и квадратным корнями несколько неудобна в работе, например, было бы гораздо проще положить

$$\rho_{\infty}((x', x''), (y', y'')) = \max \{ \rho(x', y'), \rho(x'', y'') \}$$

Свойства метрики в данном случае проверяются очень просто, невырожденность и симметричность очевидны, неравенство треугольника тоже не требует усилий.

Такой вариант определения метрики в декартовом произведении отлично работает даже для произведения бесконечного числа евклидовых пространств, с заменой максимума на точную верхнюю грань.

Конкретно в случае $\mathbb{R}^n$ мы получим расстояние

$$\rho_{\infty}(x, y) = \|x - y\|_{\infty} = \max \{ |x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n| \}$$

О применении неравенства Коши-Буняковского

Задача

3.3.

Пусть на множестве M есть полурасстояние $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$, имеющее все свойства метрики, кроме свойства невырожденности, заменённого на более слабое свойство $\rho(x, x) \equiv 0$.

Докажите, что отношение, определённое как

$$x \sim y \leftrightarrow \rho(x, y) = 0$$

является отношением эквивалентности, а на множестве $M/\sim$ функция ρ корректно задаёт невырожденную метрику.

||

Надо проверить транзитивность и равенство $\rho(x, y) = \rho(x', y)$ при $x \sim x'$]

5.5.2 Limits of sequences, fundamental sequences and complete metric spaces

Определения последовательностей и пределов

Предел последовательности в метрическом пространстве

Последовательность элементов (x_k) метрического пространства M стремится к элементу $x_0 \in M$, если $\rho(x_k, x_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Определение фундаментальной последовательности

Последовательность элементов (x_k) метрического пространства называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall k, m \geq N(\varepsilon), \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$$

Посмотрим, что это означает в случае $\mathbb{R}^n$.

Используем очевидные неравенства для координат вектора $v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\forall i, |v_i| \leq |v| \text{ и } |v| \leq |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|.$$

Первое определение легко декодировать так: для всякого номера координаты i , координаты $x_{k,i}$ стремятся к $x_{0,i}$ при $k \rightarrow \infty$.

Второе определение декодируется так: для всякого номера координаты i , координаты $(x_{k,i})_k$ образуют фундаментальную последовательность.

Определение

3.6.

Метрическое пространство полное, если всякая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

Из предыдущих наблюдений вытекает, что $\mathbb{R}^n$ - полное метрическое пространство.

Действительно, если последовательность его точек (x_k) фундаментальна, то для всякого $i = 1, \dots, n$ последовательность координат $(x_{k,i})_k$ фундаментальна и сходится, то есть $x_{k,i} \rightarrow x_{0,i}$ при $k \rightarrow \infty$.

Тогда вектор $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$ является пределом последовательности (x_k) , так как

$$\rho(x_k, x_0) = |x_k - x_0| \leq |x_{k,1} - x_{0,1}| + \dots + |x_{k,n} - x_{0,n}| \rightarrow 0.$$

Конечно, нетрудно придумать неполные метрические пространства, особенно в этом помогает понятие индуцированной метрики: для всякого подмножества $X \subseteq M$ метрического пространства M ограничение $\rho|_{X \times X}$ даёт метрику на X .

В таком смысле индуцированная с $\mathbb{R}$ метрика на $\mathbb{Q}$ не полна.

Аналогично метрика на $\mathbb{Q}^n$, индуцированная с $\mathbb{R}^n$, тоже не полна.

Аналогично процедуре пополнения $\mathbb{Q}$ можно сделать процедуру пополнения с произвольным метрическим пространством M .

Сначала рассматривается множество $c(M)$

фундаментальных последовательностей точек M , определяется полурасстояние между последовательностями

$$\bar{\rho}((p_k), (q_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(p_k, q_k),$$

предел существует, так как по неравенству треугольника

$$|\rho(p_k, q_k) - \rho(p_m, q_m)| \leq \rho(p_k, p_m) + \rho(q_k, q_m)$$

Неравенство треугольника для полурасстояния является пределом неравенств треугольника в исходном пространстве.

После этого вводится отношение эквивалентности

$$(p_k) \sim (q_k) \leftrightarrow \bar{\rho}((p_k), (q_k)) = 0$$

и берётся фактормножество по нему, которое и будет пополнением $\bar{M}$, а $\bar{\rho}$ даст на нём уже невырожденную метрику по построению.

Пространство M вложено в $\bar{M}$ с помощью отображения, которое сопоставляет точке $p \in M$ постоянную последовательность $p_k \equiv p$.

Лемма

3.7.

Пополнение метрического пространства является полным метрическим пространством.

Доказательство

Рассмотрим фундаментальную последовательность (x_k) в пополнении $\bar{M}$.

Представим каждое x_k как класс эквивалентности некоторой фундаментальной последовательности $(x_{k,n})_n$ точек из M .

Из определения фундаментальности $(x_{k,n})_n$ найдётся $N_k \in \mathbb{N}$, такой что для любых $n, m \geq N_k$ выполняется

$$\rho(x_{k,n}, x_{k,m}) \leq \frac{1}{k}$$

Пусть $y_k = x_{k, N_k} \in M$.

Рассматривая y_k как элемент $\bar{M}$, мы видим, что

$$\rho(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}$$

Из определения фундаментальности (x_k) и неравенства

$$\rho(y_k, y_m) \leq \rho(x_k, x_m) + \frac{1}{k} + \frac{1}{m}$$

следует, что последовательность (y_k) фундаментальна в M .

Следовательно, она по определению представляет некоторый элемент $y \in \bar{M}$, и как последовательность элементов $\bar{M}$ сходится к нему (подробности были даны в доказательстве леммы 1.34).

Из неравенства

$$\rho(x_k, y) \leq \rho(y_k, y) + \frac{1}{k}$$

следует, что x_k тоже сходится к y .

Задача

3.8.

Докажите единственность предела последовательности точек метрического пространства.

5.5.3 Balls, boundedness, radius and diameter

Определение шаров и ограниченности

Во всяком метрическом пространстве можно определить понятие метрического замкнутого шара

$$B_x(r) = \{y : y \in M, \rho(x, y) \leq r\}$$

Открытый шар мы определим как

$$D_x(r) = \{y : y \in M, \rho(x, y) < r\}$$

Множество $X \subseteq M$ в метрическом пространстве M называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре, $X \subseteq B_x(r)$.

Заметим, что если $X \subseteq B_x(r)$ и $y \in M$ - какая-то точка, то неравенство треугольника даёт включение $X \subseteq B_y(r + \rho(x, y))$.

(????)

Таким образом ограниченность шаром с одним центром влечёт ограниченность возможно большим шаром с другим центром.

В частности, в $\mathbb{R}^n$ ограниченность часто понимают как ограниченность множества $\{|x| : x \in X\}$.

вид шаров в разных пространствах

Для пояснения обсудим, какие могут быть шары.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ это будут круги, в $\mathbb{R}^3$ - привычные нам шары.

В других метрических пространствах шары могут выглядеть менее привычно.

аналогом теоремы о вложенных отрезках для метрических пространств

Обсудим утверждения, являющиеся аналогом теоремы о вложенных отрезках на действительной прямой (более правильное обобщение теоремы Кантора для метрических пространств дано ниже в теореме 3.20). (????)

Докажите, что последовательность вложенных замкнутых шаров $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ полного метрического пространства со стремящимися к нулю радиусами имеет единственную общую точку.

Overview of the statements about balls in spaces

I think, statements here are useless and obvious.

(??? right???)

Задача

3.11.

Докажите, что последовательность вложенных замкнутых шаров $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ евклидова пространства имеет общую точку, даже если радиусы шаров не стремятся к нулю.

(?????? вообще, это очевидно, если просто представить)

||

Докажите, что последовательность центров шаров будет фундаментальной.

||

Задача

3.12. (??????)

* Приведите пример полного метрического пространства, в котором последовательность вложенных замкнутых шаров $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ евклидова пространства НЕ имеет общую точку, даже если радиусы шаров не стремятся к нулю.

||

Введите метрику на $\mathbb{N}$ так, чтобы всегда выполнялось $\rho(n, m) > 1$ для $n \neq m$, докажите, что это гарантирует полноту такого метрического пространства.

При подходящем введении метрики, радиусов и центров шаров можно добиться того, чтобы шары в последовательности выглядели как $B_k = \{n : n \geq k\}$. ||

Определение и свойства диаметра

Для описания того, какое множество в метрическом пространстве маленькое, а какое большое, сделаем определение диаметра

Для множества $X \subseteq M$ определим диаметр как

$$\text{diam } X = \sup_{x, y \in X} \rho(x, y)$$

Из неравенства треугольника следует, что диаметр шара не более двух его радиусов.

В евклидовом пространстве диаметр шара в точности равен двум его радиусам.

Подмножество метрического пространства ограничено тогда и только тогда, когда оно имеет конечный диаметр

(?? how to prove it? it's obvious)

Задача

3.15.

Докажите, что если два множества X и Y в метрическом пространстве M пересекаются, то

$$\text{diam } X \cup Y \leq \text{diam } X + \text{diam } Y$$

Приведите пример, когда неравенство нарушается для непересекающихся множеств.

(?? how to prove it? it's obvious)

5.5.4 Topology in a metric space

Топология в двух словах

с опытом напишу

о важности топологии

хз, зачем она?

вот серьезно, я вообще не знаю.

базовые определения

Определим ε -окрестность точки x в метрическом пространстве M как $D_x(\varepsilon)$ и будем обозначать тем же обозначением $U_\varepsilon(x)$, которое мы использовали на прямой.

Определение 5.2. *Открытое подмножество $U \subseteq M$ - такое, которое вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ε -окрестность этой точки.*

Точно так же, как в случае $\mathbb{R}$, доказываются основные свойства: пустое множество и всё пространство M открыты, пересечение конечного числа открытых множеств открыто, объединения любого семейства открытых множеств открыто.

Определение 5.3. *Подмножество $F \subseteq M$ называется замкнутым, если его дополнение $M \setminus F$ открыто.*

о других способах определить открытость и замкнутость

а можно ли иначе это определить всё?

хз

простейшие следствия определений

тут про многое подумать можно, вот и подумаю.

Естественно получается, что пустое множество и всё пространство M замкнуты, объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто, пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

«открытый шар» $D_x(r)$ открыт

(???? тут поясню, зачем страдать этой фигней??)

Проверим, что «открытый шар» $D_x(r)$ открыт.

Действительно, если $y \in D_x(r)$, то $r > \rho(x, y)$ и по неравенству треугольника

$$D_y(r - \rho(x, y)) \subseteq D_x(r)$$

что доказывает открытость.

Проверим, что «замкнутый шар» $B_x(r)$ замкнут.

Действительно, если $y \notin B_x(r)$, то шар $B_y(\rho(x, y) - r)$ не пересекает $B_x(r)$ по неравенству треугольника.

Задача

3.18.

Проверьте, что стандартная метрика евклидова пространства и метрика $\|x - y\|_\infty$ (максимум модуля разности координат) определяют одну и ту же топологию в $\mathbb{R}^n$

||

Поместите куб в больший шар, а шар в больший куб.

||

Далее для всякого подмножества $X \subseteq M$ точки M разбиваются на внутренние точки X , граничные точки X , и внешние точки X .

Определяется внутренность $\text{int } X$, граница ∂X и замыкание $\text{cl } X$, как делалось в случае $\mathbb{R}$.

Так же проверяется, что внутренность является открытым множеством, а граница и замыкание - замкнутыми.

Для всякого множества X определяются множества, открытые относительно X , как пересечения $X \cap U$ с открытыми подмножествами $U \subseteq M$.

Это определяет индуцированную топологию на X .

Задача

3.19.

Проверьте, что индуцированная топология соответствует индуцированной метрике.

Обобщение теоремы Кантора о вложенных отрезках на метрическое пространство (????)

Убывающая по включению последовательность замкнутых непустых множеств

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq \dots$$

полного метрического пространства, диаметры которых стремятся к нулю, имеет общую точку.

(потом еще потренируюсь. напишу в 1 часть, что идея - перейти к точкам!!)

Доказательство

Выберем по одной произвольной точке из каждого множества $x_k \in X_k$.

Из вложенности множеств следует, что $x_m \in X_k$ при $m \geq k$ и $\rho(x_k, x_m) < \text{diam } X_k$.

А так как диаметры стремятся к нулю, то последовательность (x_k) оказывается фундаментальной.

Из полноты метрического пространства следует, что у неё есть предел x_0 .

Если оказалось, что $x_0 \notin X_k$, то x_0 имеет окрестность $U_\varepsilon(x_0)$, не пересекающуюся с X_k .

Но тогда точки x_m при $m > k$ тоже содержатся в X_k , не лежат в $U_\varepsilon(x_0)$ и не могут стремиться к x_0 .

Полученное противоречие показывает, что $x_0 \in X_k$ для любого k .

(Я чуть доделал док-во Карасева, в его док-ве не очень мелочь понял, скорее всего ошибок у меня нет.)

связное множество

Введём определение, которое годится для любого топологического пространства (то есть использует только понятие открытости множества):

Множество X называется связным, если его нельзя разбить на два непустых открытых относительно X множества.

Теорема о том, что связные множества на прямой $\mathbb{R}$ -это промежутки

Связные множества на прямой $\mathbb{R}$ -это промежутки.

Доказательство

докажем, что если множество $X \subseteq \mathbb{R}$ не является промежутком, то оно несвязно.

Если в X лежат точки a и b , но не лежит некоторая точка $c \in (a, b)$, то множества $X \cap (-\infty, c)$ и $X \cap (c, +\infty)$ дают разбиение X на два непустых и открытых относительно X множества.

Это показывает несвязность X .

В обратную сторону, если $X \subseteq \mathbb{R}$ несвязно, то оно по определению оно разбито на две непустые открытые относительно X части Y и Z .

Выберем $a \in Y, b \in Z$, без ограничения общности пусть $a < b$.

Мы должны доказать, что X не является промежутком.

Предположим противное - что X является промежутком и содержит весь отрезок $[a, b]$, тогда $Y' = Y \cap [a, b]$ и $Z' = Z \cap [a, b]$ открыты относительно отрезка $[a, b]$ и дают разбиение отрезка на две непустые части.

Далее работаем в отрезке $[a, b]$ и слово «окрестность» будет означать «окрестность точки в пересечении с отрезком $[a, b]$ ».

Некоторая окрестность a лежит в Y' и не пересекается с Z' , следовательно $c = \inf Z' > a$.

Так как некоторая окрестность b содержится в Z' , то $c < b$.

Точка c не может лежать в Z' , так как из открытости Z' тогда в Z' нашлось бы меньшее c число.

Но она не может лежать в Y' , так как тогда некоторая окрестность c полностью лежала бы в Y' и не пересекалась бы с Z' , то есть c не могло бы быть точной нижней гранью Z' .

Полученное противоречие доказывает утверждение.

5.5.5 Compactness in a metric space (!)

(тут была большая просадка и всё ещё остается)

Обзор компактности (!!!)

(соберу в этот раздел всё, что к ней относится!)

Определение 5.4. *если из любого покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие, которое также покрывает это множество.*

Теорема 11. *критерий компактности евклидовых пространств.*

...

примеры и контрпримеры компактности

(наберу для конкретики!! мб задачи прорешаю также!)

О применениях понятия компактности (!!!!!)

и я хз, какие они.

Определение и обзор компактности

Множество $X \subseteq M$ называется компактным, если из любого покрытия открытыми множествами

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

можно выбрать конечное подсемейство $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$, которое всё ещё покрывает X .

Лемма

3.24.

Если X компактно, а $Y \subset X$ замкнуто, то Y тоже компактно.

Доказательство

Так как Y замкнуто, то его дополнение V открыто.

Ко всякому покрытию $Y \subseteq \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ добавим открытое множество V .

Если из нового семейства можно выбрать конечное покрытие для X , то это конечное подсемейство без V будет покрывать Y .

Обратите внимание, что для общего метрического пространства ограниченность и замкнутость не означает компактность.

Одна из причин может заключаться в том, что метрическое пространство не полное.

Например интервал $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ с индуцированной метрикой является ограниченным и замкнутым (в индуцированной топологии), но его покрытие интервалами

$$U_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right)$$

нельзя уменьшить до конечного подпокрытия.

Но даже для полных метрических пространств ограниченность и замкнутость может не давать компактность, более детальное обсуждение этого мы откладываем до работы с бесконечномерными банаховыми пространствами и теоремы 9.48.

Приведённая выше лемма показывает, что компактность ограниченных множеств следует из компактности всех замкнутых шаров.

Пока же докажем критерий компактности для евклидовых пространств, в них ситуация не отличается от ситуации на числовой прямой.

Критерий компактности в евклидовых пространствах

Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Доказательство

Докажем сначала лёгкую часть - компактное множество ограничено и замкнуто, это верно в любом метрическом пространстве.

Семейство шаров $D_0(n)$ покрывает всё $\mathbb{R}^n$ и множество X тоже.

Если из него можно оставить конечную подсистему (то есть на самом деле один шар), то X окажется ограниченным.

Пусть теперь $x \notin X$, тогда семейство открытых множеств

$$U_n = \mathbb{R}^n \setminus B_x(1/n)$$

покрывает всё X .

Если его конечное подсемейство покрывает X , то на самом деле будет выполняться

$$X \subset \mathbb{R}^n \setminus B_x(1/n)$$

для некоторого натурального n .

Это будет значить, что X не пересекается с $D_x(1/n)$, то есть x на самом деле внешняя точка X .

Следовательно, дополнение к X открыто, а само X - замкнуто.

В обратную сторону, фиксируем систему открытых множеств $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ и будем менять множество X .

Так как оно ограничено, оно содержится в некотором кубе $Q_1 = [-m, m]^n$.

Разобьём его на 2^n равных кубов, разрезав его по середине вдоль каждой координаты.

Выберем тот из них в качестве Q_2 , для которого $X \cap Q_2$ нельзя покрыть

конечным подсемейством? Так сделать можно, ибо если покрыть конечным подсемейством можно пересечение X с каждым из меньших кубов, то покрыть конечным подсемейством $\mathcal{U}$ можно и пересечение X с исходным кубом.

Повторяя эту конструкцию, мы получаем семейство стягивающихся кубов (Q_k) , в том смысле, что семейство упорядочено по включению и диаметры Q_k стремятся к нулю.

При этом последовательность $(X \cap Q_k)$ является убывающей по включению последовательностью непустых замкнутых множеств со стремящимся к нулю диаметром.

По теореме 3.20, существует общая точка, $x \in X \cap Q_k$ при любом k .

Значит $x \in U$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$.

Из того, что $\text{diam } Q_k \rightarrow 0$ следует, что $Q_k \subseteq U$ для достаточно больших k , то есть пересечение $X \cap Q_k$ можно покрыть одним элементом семейства? Противоречие.

Установим также свойство секвенциальной компактности метрических компактов, здесь

Определение

Частичного предела последовательности $(x_n) \subseteq M$ такое же как для чисел: частичный предел последовательности (x_n) - это предел некоторой её подпоследовательности (см.

также задачу 9.151 по поводу трудности определения частичного предела в произвольном топологическом пространстве).

Теорема

3.26.

Если подмножество X метрического пространства компактно, то любая последовательность (x_k) элементов X имеет частичный предел в X .

Доказательство

Для начала заметим, что в метрических пространствах (x_n) имеет частичным пределом точку x тогда и только тогда, когда в любой окрестности x содержится бесконечно много элементов последовательности (x_n) .

В одну сторону это утверждение очевидно, а в другую мы можем выбирать точки $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$ и составлять из них подпоследовательность.

Теперь предположим, что частичных пределов некоторой последовательности (x_k) нет.

Тогда для всякой точки $x \in X$ есть окрестность $U(x)$, в которой последовательность бывает только конечное число раз.

Эти окрестности покрывают X и выбрав конечное подпокрытие мы получаем, что в последовательности в целом было конечное число элементов, противоречие.

Задача

3.27.

* докажите, что из секвенциальной компактности метрического пространства X следует его компактность.

||

Это можно вывести из свойства вполне ограниченности, см.

теорему 9.48, но можно придумать и какое-нибудь другое рассуждение.

||

Заметим, что декартово произведение секвенциально компактных метрических пространств X и Y , $X \times Y$, является очевидно секвенциально компактным, так как каждую «координату» в последовательности пар $((x_k, y_k))_k$ можно заставить сходиться переходом к подпоследовательности.

Из предыдущей задачи следует, что $X \times Y$ будет и просто компактным.

Компактность произведения компактов (в топологическом смысле) в максимальной общности устанавливает

Теорема

Тихонова (

Теорема

9.77), которую мы в полной мере будем использовать позже. X покрыто открытыми множествами $\{U_\alpha\}$, то найдётся $\delta > 0$, такое, что всякое подмножество $Y \subseteq X$ диаметра не более δ содержится в каком-то одном из множеств U_α полностью.

||

Предположите противное, взяв $\delta = 1/k$ и соответствующее Y_k с $\text{diam } Y_k \leq 1/k$.

Выберите $y_k \in Y_k$ и рассмотрите предельную точку последовательности (y_k) в X .]

5.5.6 Continuous mappings of metric spaces (!)

Обзор

Для отображения между метрическими пространствами $f : M \rightarrow N$ можно ввести несколько эквивалентных определений непрерывности:

Да вообще по сути тут то же, что и с функциями, просто утверждаем для метрических пространств (??? вроде так??)

Определения

Непрерывность по Коши в точке

для любой $U_\varepsilon(f(x_0))$ найдётся $U_\delta(x_0)$, такая что $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.

Непрерывность по Гейне в точке

Если $x_k \rightarrow x_0$ в M , то $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ в N

Топологическое определение непрерывности метрических пространств

для всякого открытого $U \subseteq N$ прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в M . нение непрерывности по Коши или Гейне во всех точках M эквивалентно топологическому определению непрерывности.

О важности обратного образа для топологического определения (???)

Эквивалентность определений

(Коши) $\rightarrow$ (Гейне)

Пусть $x_k \rightarrow x_0$.

Возьмём $U_\varepsilon(f(x_0))$ и соответствующую $U_\delta(x_0)$.

При достаточно большом k окажется $x_k \in U_\delta(x_0)$.

Тогда $f(x_k) \in U_\varepsilon(f(x_0))$, то есть $\rho(f(x_k), f(x_0)) < \varepsilon$.

Значит $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ по определению.

(Гейне) $\rightarrow$ (Коши)

Предположим противное в определении Коши: для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ (пусть $\delta = 1/k$) мы найдём точку $x_k \in U_{1/k}(x_0)$, такую что $\rho(f(x_k), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Тогда выйдет, что $x_k \rightarrow x_0$ и $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$.

(топологическое

Определение Коши во всех точках метрических пространств

Окрестность $U_\varepsilon(f(x_0))$ открыта и $V = f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ является открытым множеством, содержащим x_0 .

Тогда по определению открытости найдётся $U_\delta(x_0) \subseteq V$ и тогда $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$.

(Коши во всех точках) $\rightarrow$ (топологическое определение)

Пусть U открыто и мы рассматриваем $V = f^{-1}(U)$.

Если $x_0 \in V$, то $f(x_0) \in U$ и по определению открытости U найдётся $U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq U$.

Рассмотрим соответствующую $U_\delta(x_0)$ из определения Коши.

$$f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq U$$

следовательно $U_\delta(x_0) \subseteq V$ по определению прообраза.

Это означает, что точка x_0 лежит в V вместе со своей окрестностью, то есть V открыто.

При рассмотрении непрерывного отображения $f : X \rightarrow N$, определённого на подмножестве $X \subseteq M$, мы всегда будем иметь в виду X как метрическое пространство с индуцированной метрикой и топологией.

В частности, в топологическом определении прообразы открытых множества $f^{-1}(U)$ должны быть открыты относительно X .

Нетрудно понять, что ограничение непрерывного отображения $f : M \rightarrow N$ на подмножество $X \subseteq M$ всегда даёт непрерывное отображение $f|_X : X \rightarrow N$.

Теорема о непрерывности композиции непрерывных отображений

Композиция непрерывных отображений непрерывна.

Доказательство

Пусть $f : M \rightarrow N$ и $g : N \rightarrow L$ непрерывны.

Для $h = g \circ f$ и открытого $U \subseteq L$ очевидно, что $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ является открытым.

Можно определить и операцию декартова произведения отображений: если $f : M \rightarrow N$ и $g : M' \rightarrow N'$, то $f \times g : M \times M' \rightarrow N \times N'$ действует по формуле

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

определение непрерывности по Гейне легко показывает, что декартово произведение непрерывных отображений (метрических пространств) непрерывно.

Для работы с топологическими пространствами и топологическим определением непрерывности важно понимать, что топология в декартовом произведении $M \times M'$ состоит из всевозможных объединений множеств вида $U \times U'$, где $U \subseteq M$ и $U' \subseteq M'$ - открыты.

Тогда утверждение про декартово произведение непрерывных отображений будет верным и для непрерывных отображений топологических пространств.

Можно проверить, что операции сложения векторов, умножения вектора на число, деления числа на число непрерывны как отображения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ (проще всего это проверить по Гейне).

Если учесть непрерывность простых, но полезных операций диагонали (повторения)

$$\Delta_M : M \rightarrow M \times M, \quad \Delta_M(x) = (x, x)$$

Добавления к вектору постоянных координат, перестановки координат, забывания координат вектора, то мы можем сказать, что все операции, которые мы можем построить явно с использованием указанных действий над векторами, арифметических операций на числами и элементарных функций, будут непрерывными на своей естественной области определения.

О применениях

Дальше теория (??)

Аналогично определению непрерывности можно ввести определение предела отображения в точке

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

по Коши или по Гейне, которое по сути будет означать возможность доопределить или переопределить $f(x_0) = A \in N$ и получить отображение, непрерывное в точке x_0 .

В частном случае отображения $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ мы будем писать

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

Так как при непрерывном отображении прообраз открытого множества открыт, то и прообраз замкнутого множества замкнут.

5.5.7 Continuous mappings of compact and connected sets

Теорема о компактности образа при непрерывном отображении

Образ компактного множества при непрерывном отображении является компактным. Она дает связь компактности с непрерывностью.

Доказательство (??)

Это утверждение верно вообще для любых топологических пространств необязательно метрических.

Пусть $f : X \rightarrow N$ непрерывно и X компактно.

Заметим, что компактность X как подмножества большего пространства M эквивалентна его компактности в индуцированной с M топологии, поэтому мы работаем только с X как со всем пространством.

Допустим мы покрыли $f(X)$ открытыми множествами $\{U_\alpha\}$.

Положим $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, эти множества открыты по топологическому определению непрерывности и покрывают X .

Значит из них можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее X .

Соответствующее подсемейство $\{U_\alpha\}$ покрывает $f(X)$.

О применениях

Аналогично для секвенциальной компактности (???)

(в 1ю укажу, зачем это понятие???)

В качестве упражнения читатель может доказать аналогичное утверждение для секвенциальной компактности, используя определение непрерывности по Гейне.

Аналогичное утверждение верно для непрерывных отображений и связности:

Теорема о связности образа при непрерывном отображении

Образ связного множества при непрерывном отображении является связным.

Доказательство

Аналогично предыдущему, это утверждение верно для любых топологических пространств.

Пусть $f : X \rightarrow N$ непрерывно и X связно.

Заметим, что связность X как подмножества большего пространства M эквивалентна его связности в индуцированной с M топологии, поэтому мы работаем только с X как со всем пространством.

Предположим противное: мы разбили $f(X)$ на два непустых множества, открытых относительно $f(X)$, пусть эти множества $U \cap f(X)$ и $V \cap f(X)$ для открытых $U, V \subseteq N$.

Тогда $U' = f^{-1}(U)$ и $V' = f^{-1}(V)$ не пересекаются, непустые, открытые относительно X и покрывают всё X .

Получаем противоречие со связностью X .

Гомеоморфизм

Определение гомеоморфизма

Отображение $f : M \rightarrow N$ называется гомеоморфизмом, если оно непрерывно, биективно и обратное к нему непрерывно.

Теорема о непрерывных и биективных отображениях на компакте

Если метрическое пространство компактно, то любое непрерывное и биективное отображение $f : M \rightarrow N$ будет гомеоморфизмом.

Доказательство

Нам нужно доказать непрерывность обратного отображения и мы воспользуемся секвенциальной компактностью.

Пусть $y_k \rightarrow y_0$ в пространстве N .

Обозначим $x_k = f^{-1}(y_k)$ и $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Нам надо доказать непрерывность по Гейне, то есть доказать, что $x_k \rightarrow x_0$.

Предположим противное, тогда для некоторой окрестности $U(x_0)$ последовательность (x_k) имеет бесконечно много элементов в $M \setminus U(x_0)$.

Из секвенциальной компактности x_k имеет частичный предел в $M \setminus U(x_0)$, пусть это x' .

Перейдя к подпоследовательности, мы можем считать, что $x_k \rightarrow x'$, но тогда из непрерывности f будет $y_k = f(x_k) \rightarrow f(x') \neq y_0$.

Но последовательность y_k выбрана стремящейся к y_0 , противоречие.

О возможной негомеоморфности непрерывных и биективных отображений для некомпактных пространств

Заметим, что для некомпактных пространств утверждение может и не быть верным.

Рассмотрим к примеру отображение полуинтервала $[0, 2\pi)$ в окружность по очевидной формуле $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

Оно очевидно непрерывно и обратимо, но обратное не является непрерывным.

О применениях (!?!?!?!?)

(?? зачем вообще это???)

Об отображениях, переводящих фундаментальную последовательность в фундаментальную

Докажите, что отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ для некоторого $X \subseteq \mathbb{R}^n$ переводит всякую фундаментальную последовательность в фундаментальную тогда и только тогда, когда оно продолжается до непрерывного $\bar{f} : \text{cl } X \rightarrow \mathbb{R}^m$.

О непрерывности метрики

Докажите, что для всякого метрического пространства M его функция расстояния $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ непрерывна.

||

Используйте неравенство треугольника.

||

5.5.8 Uniform continuity (!!!)

(потренироваться нужно тут!)

Конструкция равномерной непрерывности

Определение равномерной непрерывности

Отображение $F : M \rightarrow N$ между метрическими пространствами является равномерно непрерывным, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in M, \rho(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(??? и как на таком бытовом языке проще сказать это определение???)

Это усиление понятия непрерывности для отображения метрических пространств.

Удобно также работать с понятием модуль непрерывности отображения:

$$\omega_f(\delta) := \sup\{\rho(f(x), f(y)) : x, y \in M \text{ и } \rho(x, y) < \delta\}$$

Тогда определение равномерной непрерывности означает, что $\omega_f(\delta) \rightarrow +0$ при $\delta \rightarrow +0$.

Примеры равномерно непрерывных отображений

Их много.

Функция $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна, так как $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

(?? why???)

Функция $f(x) = \sqrt{x}$, ведь $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

(???)

О применениях понятия равномерной непрерывности (????!?!)

(хз, честно говоря)

Теорема о непрерывном отображении компактных метрических пространств

Непрерывное отображение $f : M \rightarrow N$ метрических пространств при компактном является равномерно непрерывным.

Доказательство

Применим определение непрерывности для всякой точки $x \in M$.

Тогда при $y \in U_\delta(x)$ мы будем иметь неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Уменьшим все эти окрестности в два раза, то есть рассмотрим семейство $\{U_{\delta(x)/2}(x)\}$.

Они покрывают M и в этом покрытии можно оставить конечно число

$$U_{\delta_1/2}(x_1), \dots, U_{\delta_N/2}(x_N)$$

Теперь положим

$$\delta = \min \{\delta_1/2, \dots, \delta_N/2\}$$

Для всяких x и y на расстоянии не более δ ясно, что $x \in U_{\delta_k/2}(x_k)$ для некоторого k .

Тогда из неравенства треугольника $y \in U_{\delta_k}(x_k)$.

А значит

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(x_k)) + \rho(f(y), f(x_k)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Это по сути означает равномерную непрерывность.

Липшицевость

Липшицево отображение $f : M \rightarrow N$ метрических пространств - такое отображение, у которого если существует константа L , такая что для любых $x, y \in M$

$$\rho(f(x), f(y)) \leq L\rho(x, y).$$

Это частный случай равномерно непрерывного отображения.

О применениях Липшицевости (???)

(в диффурах вот нужно)

Липшицевость функции с ограниченной производной

докажите, что если производная функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, то функция липшицева.

||

Используйте теорему о среднем Лагранжа.

||

О связи равномерной непрерывности и липшицевости

Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, то существуют константы $L, C > 0$, такие что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| + C.$$

||

Фиксируйте некоторые ε и дв определении равномерной непрерывности.

Всякий отрезок $[x, y]$ разбейте на части длиной не более δ и оцените сумму приращений f на этих частях.

||

О расстоянии в $M \times M$

* Как естественно определить расстояние в произведении $M \times M$ метрического пространства на себя (то есть $\rho_2 : (M \times M) \times (M \times M) \rightarrow \mathbb{R}^+$), чтобы исходная функция расстояния $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ оказалась относительно этого расстояния липшицевой с константой 1?

(?? че???)

||

Поищите в классе функций вида $\rho_2((x, y), (x', y')) = f(\rho(x, x'), \rho(y, y'))$.

О продолжении равномерно непрерывной (??)

докажите, что если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывна, то она продолжается до непрерывной функции на замыкании множества X .

||

Заметьте, что f переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные.

||

5.5.9 Distance between sets and normality (!!!)

(крутая тренировка, скоро пройду ee!!!)

Определение расстояния

Расстояние от точки x до множества Y в метрическом пространстве $M - \exists$ ТО

$$\text{dist}(x, Y) = \inf\{\rho(x, y) : y \in Y\}$$

Часто может возникнуть вопрос, когда нижняя грань в определении достигается.

Для этого есть простые достаточные условия, первое работает в произвольном метрическом пространстве, а второе - только в $\mathbb{R}^n$, или в аналогичном пространстве с компактными шарами.

Теорема о достижении расстояния до компактного множества

Если Y компактно, то $\text{dist}(x, Y)$ достигается.

Доказательство

В силу неравенства треугольника имеем

$$|\rho(x, y') - \rho(x, y'')| \leq \rho(y', y''),$$

следовательно $\rho(x, y)$ при фиксированном x является непрерывной функцией от y .

Следовательно, при компактном Y минимум $\inf_{y \in Y} \rho(x, y)$ достигается.

Теорема о достижении расстояния до замкнутого и непустого множества

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнуто, то $\text{dist}(x, Y)$ достигается.

Доказательство

Пусть $d = \text{dist}(x, Y)$.

Множество $B_x(d+1) \cap Y$ является замкнутым подмножеством компактного $B_x(d+1)$, а значит оно само компактно.

Кроме того, оно непусто, иначе бы выполнялось $\text{dist}(x, Y) \geq d+1$.

Значит $\text{dist}(x, B_x(d+1) \cap Y)$ достигается, но на самом деле это бу $\text{dist}(x, Y)$, так как точки Y на расстоянии более $d+1$ от x в определении $\text{dist}(x, Y)$ «не участвуют».

Теорема

3.43.

для произвольного подмножества Y метрического пространства M функция от $x \in M$, заданная формулой $\text{dist}(x, Y)$, непрерывна.

Доказательство

По неравенству треугольника запишем

$$\rho(x', y) \leq \rho(x'', y) + \rho(x', x'').$$

Переходя к точной нижней грани по $y \in Y$, получаем

$$\text{dist}(x', Y) \leq \text{dist}(x'', Y) + \rho(x', x'')$$

Учитывая возможность переставить x' и x'' , получаем

$$|\text{dist}(x', Y) - \text{dist}(x'', Y)| \leq \rho(x', x'')$$

что доказывает непрерывную зависимость от x .

Определение

3.44.

Расстояние между множествами X и Y в метрическом пространстве M — $\exists$ то

$$\text{dist}(X, Y) = \inf\{\rho(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

Теорема

3.45.

Если X и Y — компактные подмножества метрического пространства M , то $\text{dist}(X, Y)$ достигается.

Доказательство

Функция $\text{dist}(x, Y)$ достигает минимума на X в точке x_0 как непрерывная функция на компакте.

далее, $\rho(x_0, y)$ тоже достигает минимума при $y_0 \in Y$ по тем же причинам.

Следовательно

$$\text{dist}(X, Y) = \inf_{x \in X} \text{dist}(x, Y) = \text{dist}(x_0, Y) = \rho(x_0, y_0)$$

В евклидовом пространстве и в любом пространстве с компактными шарами верно более сильное свойство:

Теорема

3.46.

Если $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно и $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнуто, то $\text{dist}(X, Y)$ достигается.

Доказательство

Аналогично предыдущей теореме, функция $\text{dist}(x, Y)$ достигает минимума на X в точке x_0 как непрерывная функция на компакте, а $\rho(x_0, y)$ достигает минимума при $y_0 \in Y$ из замкнутости $Y \subseteq \mathbb{R}^n$.

Следствие 3.47.

Если $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнуто и $X \cap Y = \emptyset$, то $\text{dist}(X, Y) > 0$. для понимания понятия расстояния между множествами полезно решить следующую задачу.

неравенство треугольника (!)

Докажите, что расстояние между подмножествами $\text{dist}(X, Y)$ евклидова пространства не всегда удовлетворяет неравенству треугольника $\text{dist}(X, Z) \leq \text{dist}(X, Y) +$

$$\text{dist}(Y, Z)$$

Дальше мы используем понятие расстояния между множествами, чтобы поработать с окрестностями множеств.

 ε -окрестность**Определение**

Определим ε -окрестность множества X в метрическом пространстве M , при $\varepsilon > 0$, как

$$U_\varepsilon(X) = \{y \in M : \text{dist}(y, X) < \varepsilon\}$$

 ε -окрестность любого множества открыта (?????)

Докажите, что ε -окрестность любого множества открыта.

Содержимость компакта с некоторой ε -окрестностью в открытом множестве

докажите, что если компактное множество $K \subseteq \mathbb{R}^n$ содержится в открытом множестве U , то оно содержится в U вместе с некоторой своей ε -окрестностью.

[[

Рассмотрите расстояние от K до $\mathbb{R}^n \setminus U$.]

Следствие 3.47 означает, что у непересекающихся компактного X и замкнутого Y существуют непересекающиеся ε -окрестности, достаточно взять ε меньше половины расстояния между ними.

Нормальность метрических пространств

Если замкнутые подмножества X, Y в метрическом пространстве M не пересекаются, то найдутся непересекающиеся открытые $U \supseteq X$ и $V \supseteq Y$.

Если убрать требование компактности, то получится такое утверждение:

Доказательство

Для всякой точки $x \in X$ найдём окрестность $D_x(\varepsilon_x)$, которая не пересекается с Y , это можно сделать по замкнутости Y .

Для всякой $y \in Y$ аналогично найдём $D_y(\varepsilon_y)$, которая не пересекается с X .

Положим теперь

$$U = \bigcup_{x \in X} D_x(\varepsilon_x/2), \quad V = \bigcup_{y \in Y} D_y(\varepsilon_y/2)$$

Эти множества очевидно открыты и содержат X и Y соответственно.

Они не могут пересечься, так как если бы какие-то два открытых шара $D_x(\varepsilon_x/2)$ и $D_y(\varepsilon_y/2)$ пересеклись, то при $\varepsilon_x \geq \varepsilon_y$ (без ограничения общности) выполнялось бы $D_x(\varepsilon_x) \ni y$, что противоречит определению $D_x(\varepsilon_x)$.

В случае $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$ аналогично получилось бы противоречие в виде $x \in D_y(\varepsilon_y)$

5.5.10 Abstract Geometry: Basics

(write something about book of Alexandrov, a 100% useless book)

5.6 Curves

5.6.1 Curves and linear connectedness

(ну вот такое есть и хорошо, что поделаться?)

Теория

Определение

3.53.

Кривой в метрическом пространстве M называется непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow M$.

Точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ называются начало и конец кривой.

Обычно кривая рассматривается с точностью до допустимой замены параметра, то есть взяв гомеоморфизм $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ и взяв композицию $\gamma \circ \sigma : [c, d] \rightarrow M$, мы получаем эквивалентную кривую и вообще считаем кривой класс эквивалентности отображений γ с точностью до умножения справа на гомеоморфизм отрезка на отрезок.

Если класс эквивалентности определить иначе, разрешив только возрастающие гомеоморфизмы отрезка на отрезок, то получится понятие ориентированная кривая.

Определение

3.54.

Если конец кривой γ_1 совпадает с началом кривой γ_2 и множества параметров кривых подобраны так, чтобы $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$, $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow M$, то кривая

$$\gamma : [a, c] \rightarrow M, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

называется конкатенацией кривых γ_1 и γ_2 .

Будем писать $\gamma = \gamma_1 \diamond \gamma_2$. Кривая в $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, параметризованная как $\gamma(t) = (1-t)p + tq$, называется отрезком, соединяющим p и q .

Конкатенация конечного числа отрезков называется ломаной.

О кривой Пеано

(приведу тут обсуждение её мб)

Определение кривой Пеано

Придумайте кривую $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, образ которой равен квадрату $[0, 1]^2$.

||

Нарисуйте в квадрате диагональ.

Потом разбейте квадрат на 9 маленьких квадратов и замените диагональ на ломаную, составленную непрерывным образом из девяти диагоналей маленьких квадратов.

Потом к каждому из 9 отрезков ломаной примените ту же операцию, получив ломаную из 81 отрезка, потом получите ломаную из 729 отрезков и продолжайте делать так же.

Пусть на n -м этапе этой процедуры ломаная параметризована с постоянной скоростью как $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$.

докажите, что предел $\gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t)$ существует, непрерывно зависит от t и оказывается во всех точках квадрата.

||

О применениях кривой Пеано (???)

просто прикольная кривая, которая оказывается есть.

Ломаная не может заполнить весь квадрат

Докажите, что ломаная не может заполнить весь квадрат.

||

Можно доказывать по разному.

Один из вариантов: заметить, что на плоскости верна теорема Бэра об объединении счётного числа замкнутых неплотных множеств.

(?? укажу про неё, слышал из Г.А., забил.)

||

Задача

3.57.

* докажите, что функции $x(t)$ и $y(t)$, получающиеся по приведённому выше рецепту построения кривой Пеано, будут непрерывными, но ни в одной точке не дифференцируемыми.

||

Опишите $x(t)$ как предел последовательности $(x_n(t))$, обратите внимание, что функции x_n кусочно-линейные, $\left| \frac{dx_n}{dt} \right| = 3^{n-1}$ там, где производная существует, и что для всякого $t_0 \in [0, 1]$ при любом n найдутся $t' \leq t \leq t''$, такие что

$$t'' - t' \leq 3^{1-n}, \quad x_n(t') = x(t'), \quad x_n(t'') = x(t''), \quad \left| \frac{x(t'') - x(t')}{t'' - t'} \right| = 3^{n-1}$$

Докажите, что это противоречит дифференцируемости $x(t)$ в t_0 .

||

Понятие связности имеет достаточно сложное для практической проверки

Определение

, поэтому иногда удобно использовать понятие линейной связности.

Определение

3.58.

Множество X в метрическом пространстве M линейно связно, если y .

Линейно связное множество связно**Доказательство**

Предположим противное, множество X разбилось на непустые относительно открытые U и V .

Возьмём точки $u \in U$ и $v \in V$, по линейной связности найдём кривую $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, такую что $f(a) = u$, $f(b) = v$.

Множества $U' = \gamma^{-1}(U)$ и $V' = \gamma^{-1}(V)$ тогда дают разбиение $[a, b]$ на непустые (относительно) открытые множества, что противоречит связности отрезка из леммы 3.22.

Связное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ линейно связно**Доказательство**

Пусть наше множество U .

Выберем в нём точку p и рассмотрим множество U' , образованное точками U, Δ о которых можно дойти по кривым в U из p .

Докажем, что оно открыто. Действительно, если $q \in U'$, то у него есть окрестность $U_\delta(q) \subseteq U$.

Мы можем дойти из q в любую точку $U_\delta(q)$ по отрезку.

делая конкатенацию кривой из p в q и этого отрезка, мы получаем кривую из p до любой точки $U_\delta(q)$.

Следовательно, $U_\delta(q) \subseteq U'$ и вообще U' открыто.

Рассмотрим теперь множество $U'' = U \setminus U'$.

Всякая точка $q \in U''$ имеет окрестность $U_\delta(q) \subseteq U$.

Если бы какая-то точка $U_\delta(q)$ была концом кривой с началом в p , то можно было бы взять конкатенацию этой кривой с отрезком $\Delta o q$ и получить, что $q \in U'$, $q \notin U''$.

Но это не так, значит $U_\delta(q)$ не пересекается с U' и полностью содержится в U'' .

Итак, U разбилось на два открытых множества.

O_Δ но из них, U' , содержит p и поэтому не пусто.

Из определения связности, другому, U'' , придётся быть пустым.

Следовательно, $U' = U$ и до любой точки U можно дойти по кривой из p .

Если множество не открыто, то связность может не означать линейной связности.

Рассмотрим на плоскости множество X , являющееся графиком $y = \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$.

Оно само линейно связно.

Возьмём его замыкание $Y = \text{cl } X$, нетрудно догадаться, что Y отличается от X добавлением отрезка $S = \{x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$.

Тогда Y не является линейно связным, так как всякая кривая, соединяющая часть X с отрезком S должна

следовать графику функции и иметь разрыв при $x \rightarrow +0$, а у нас кривые разрешены только непрерывные.

С другой стороны, Y остаётся связным, так как если точка $(0, 0)$ лежит в одном из открытых множестве разбиения $Y = (U \cap Y) \sqcup (V \cap Y)$, то весь отрезок S лежит в нём же из связности отрезка, то есть без ограничения общности $S \subset U$.

График X при $x \rightarrow +0$ должен попасть в U , а значит из линейной связности X оказывается $X \subset U$.

Тогда $V \cap Y$ оказывается пустым.

Аналогично связности, линейная связность сохраняется при непрерывных отображениях:

Теорема

Образ линейно связного множества при непрерывном отображении является линейно связным.

Доказательство

Пусть $f : X \rightarrow f(X)$ - непрерывное отображение и X линейно связно.

для всяких $p', q' \in f(X)$ найдём их прообразы $p, q \in X$.

Их соединяет кривая γ в X .

Тогда $f \circ \gamma$ соединяет p' и q' . Ещё более сильным условием, чем линейная связность, является выпуклость:

Определение

3.62.

Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (или в любом векторном пространстве) называется выпуклым, если для любых $x, y \in X$ отрезок

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty : t \in [0, 1]\}$$

полностью лежит в X .

Задача

3.63.

Докажите, что пересечение выпуклых множеств выпукло.

Приведите пример, когда пересечение линейно связных множеств может не быть линейно связным.

Задача

3.64.

докажите, что объединение пересекающихся линейно связных множеств линейно связно.

Приведите пример, когда объединение пересекающихся выпуклых множеств не является выпуклым.

Теорема Хелли на плоскости

докажите, что если в конечном наборе выпуклых множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$ любые три множества имеют непустое пересечение, то все множества набора имеют непустое пересечение.

||

Используйте индукцию по количеству множеств, ключевой случай - когда в наборе четыре множества.

||

Неверность теоремы Хелли для другого случая (!?!?!?!?)

Покажите, что для бесконечных наборов выпуклых множеств теорема Хелли уже неверна.

||

Контрпример можно построить уже на прямой.

||

5.6.2 Differentiable curves in Euclidean space

Теория

Если мы рассматриваем кривые в евклидовом пространстве, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, то можно привести простые достаточные условия её спрямляемости и привести способ вычисления длины.

Мы воспользуемся понятием производной (скорости) кривой.

Определение

3.91.

Кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется дифференцируемой, если у неё есть производная

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

в каждой $t_0 \in [a, b]$, на концах отрезка - правая и левая.

Она называется непрерывно дифференцируемой, если производная сама по себе непрерывная.

Нетрудно проверить, что дифференцируемость кривой в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна дифференцируемости её координатных компонент.

Теорема о среднем для кривых

Если кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируема на (a, b) , то для некоторого $\xi \in (a, b)$

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq |\gamma'(\xi)| |b - a|.$$

Доказательство

Пусть e - единичный вектор в направлении $\gamma(b) - \gamma(a)$.

Тогда

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = e \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)) = f(b) - f(a)$$

если положить $f(t) = e \cdot \gamma(t)$.

Применяя теорему о среднем Лагранжа к f , получим $\xi \in (a, b)$, для которого

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = |f'(\xi)(b - a)| = |e \cdot \gamma'(\xi)(b - a)| \leq |\gamma'(\xi)| |b - a|$$

Задача

3.93.

Приведите пример ситуации, когда в теореме о среднем нельзя добиться равенства ни при каком ξ .

Мы фактически установили липшицевость дифференцируемой кривой с ограниченной производной и получаем: Следствие 3.94.

для дифференцируемой кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\ell(\gamma) \leq |b - a| \sup_{t \in (a, b)} |\gamma'(t)|.$$

Теорема

3.95.

Пусть кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемая, обозначим её ограничение на $[a, t] \subseteq [a, b]$ как γ_t , тогда натуральный параметр кривой

$$s(t) = \ell(\gamma_t)$$

является непрерывно дифференцируемым и

$$s'(t) = |\gamma'(t)|.$$

Эта теорема поясняет, что в школьном курсе физики подразумевалось под утверждением о том, что «путевая скорость равна длине векторной скорости»

Доказательство

Будем изучать правую производную $s(t)$, для левой производной можно показать, перевернув её параметризацию.

Очевидно для $t > t_0$ по аддитивности длины кривой

$$s(t) - s(t_0) = \ell(\gamma_{t_0, t})$$

то есть мы должны оценить длину куска кривой от параметра t_0 до параметра t .

Оценка сверху даётся предыдущим следствием

$$s(t) - s(t_0) \leq \sup_{\xi \in (t_0, t)} |\gamma'(\xi)| |t - t_0|.$$

Оценка снизу даётся исходя из равенства $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$ и того, что длина кривой не менее расстояния от её начала до её конца:

$$s(t) - s(t_0) \geq |(\gamma'(t_0) + o(1))(t - t_0)|.$$

Итого

$$|\gamma'(t_0) + o(1)| \leq \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \leq \sup_{\xi \in (t_0, t)} |\gamma'(\xi)|$$

Переходя к пределу $t \rightarrow t_0$ и используя непрерывность $\gamma'(t)$ получаем требуемое по теореме о двух милиционерах.

По предыдущей теореме натуральный параметр s является допустимым параметром непрерывно дифференцируемой кривой с всюду ненулевой скоростью γ' , и в натуральной параметризации кривая тоже непрерывно дифференцируема.

Вектор $\tau = \frac{d\gamma}{ds}$ тогда является единичным.

Если кривую можно дифференцировать далее, то дифференцируем далее по натуральному параметру

$$\tau \cdot \tau = 1 \rightarrow \tau' \cdot \tau = 0$$

то есть вектор $\tau' = \gamma''$ перпендикулярен τ .

Если он имеет ненулевую длину, то его направление называется главной нормалью ν , а его длина - кривизной, то есть выполняется

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu$$

Сравнивая произвольную кривую с натурально параметризованной окружностью

$$\begin{aligned} x &= R \cos \frac{s}{R}, \\ y &= R \sin \frac{s}{R}, \end{aligned}$$

можно заметить, что кривизна окружности равна $\frac{1}{R}$, поэтому величина $R = \frac{1}{k}$ для произвольной кривой называется её радиусом кривизны, а точка

$$\rho = \gamma + R\nu$$

называется центром кривизны.

Множество всех центров кривизны даёт новую кривую, которая называется эволютой исходной кривой.

На плоскости мы можем продифференцировать условия $\tau \cdot \nu = 0$ и $\nu \cdot \nu = 1$ и получить

$$\tau' \cdot \nu = -\tau \cdot \nu', \nu' \cdot \nu = 0$$

Получив таким образом формулы Френе для плоской кривой:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= k\nu \\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau \end{aligned}$$

кривизна кривой, заданной в произвольной параметризации (????!!!!)

Выпишите формулу кривизны кривой, заданной в произвольной параметризации.

[[

Воспользуйтесь тем, что $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'_t}{|\gamma'_t|}$ и продифференцируйте это равенство по s еще раз.

В левой части получится вектор, длина которого равна кривизне, а производную по s справа найдите как производную по t , делённую на $|\gamma'_t|$

]]

Задача

3.97.

Докажите, что для центра кривизны на плоскости выполняется $\frac{d\rho}{ds} = \frac{dR}{ds}\nu$ и объясните, как восстановить кривую γ по её эволюте ρ .

Определения

Бинормаль

Для кривой в $\mathbb{R}^3$ мы можем добавить еще один вектор β , чтобы тройка (τ, ν, β) стала правой, тогда β называется бинормалью.

Формулы Френе

Дифференцируя соотношения

$$\tau \cdot \tau = \nu \cdot \nu = \beta \cdot \beta = 1, \quad \tau \cdot \nu = \nu \cdot \beta = \beta \cdot \tau = 0$$

мы получим соотношения

$$\begin{aligned} \tau' \cdot \tau &= \nu' \cdot \nu = \beta' \cdot \beta = 0 \\ \tau' \cdot \nu &= -\nu' \cdot \tau, \nu' \cdot \beta = -\beta' \cdot \nu, \beta' \cdot \tau = -\tau' \cdot \beta = 0, \end{aligned}$$

в последнем получается ноль, так как $\tau' \parallel \nu$ по определению и следовательно $\tau' \cdot \beta = 0$.

Формулы Френе для трёхмерной кривой

Из этих соотношений следует существование еще одного коэффициента x , для которого верны формулы Френе для трёхмерной кривой:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= k\nu \\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau + x\beta \\ \frac{d\beta}{ds} &= -x\nu \end{aligned}$$

Коэффициент x называется кручением кривой.

Обзор параметров описания кривых

(в 1ю часть вставляю)

главная нормаль

кривизна

$$\frac{d\tau}{ds} = k\nu$$

Формулы Френе для кривизны

В итоге мы пришли к формулам Френе - главным формулам, характеризующим кривые.

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= k\nu \\ \frac{d\nu}{ds} &= -k\tau + x\beta \\ \frac{d\beta}{ds} &= -x\nu \end{aligned}$$

круто, теперь установим еще пару полезных свойств.

$$k = \frac{\|[\gamma' \times \gamma'']\|}{|\gamma'|^3}, \quad \kappa = \frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|[\gamma' \times \gamma'']|^2} \quad (5.1)$$

Задача

3.98.

Выведите формулы для кривизны и кручения трижды дифференцируемой кривой в произвольной, не обязательно натуральной, параметризации.

||

Сначала посмотрите на смешанное произведение $(\gamma', \gamma'', \gamma''')$ в натуральной параметризации, а потом изучите, как оно поменяется при замене параметризации на произвольную.

Убедитесь, что полученные вами выражения эквивалентны следующим

$$k = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}, \quad x = \frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$$

]]

Задача

3.99.

Опишите кривые в $\mathbb{R}^3$ с постоянной ненулевой кривизной и постоянным ненулевым кручением.

[[

Подберите какие-то кривые из известных вам или решите систему линейных дифференциальных уравнений, которую дают формулы Френе.

Отсутствие других примеров обоснуйте теоремой существования и единственности для линейных дифференциальных уравнений 7.64.

]]

5.6.3 Internal metric of a metric space

(???? и в чем суть этого определения???)

Понятие длины кривой позволяет ввести на всяком метрическом пространстве новую метрику:

Определение

3.100.

На линейно связном метрическом пространстве (M, ρ) можно ввести внутреннюю метрику

$$\rho_\ell(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ идёт из } x \text{ в } y\}$$

Из леммы 3.87 следует, что $\rho_\ell(x, y) \geq \rho(x, y)$ всегда.

Конечно, может оказаться, что все кривые из x в y не спрямляемы, например, если метрическое пространство M является неспрямляемой кривой без самопересечений в $\mathbb{R}^n$ с индуцированной метрикой.

Получается, что внутренняя метрика корректно определена тогда, когда любые две точки M можно соединить спрямляемой кривой.

Лемма о равенстве длин в исходной метрике ρ и во внутренней метрике

Длины кривых в исходной метрике ρ и во внутренней метрике ρ_ℓ равны.

Доказательство

Так как длина кривой не менее расстояния между её концами, то выполняется неравенство $\rho \leq \rho_\ell$.

Значит длины кривых во внутренней метрике не менее длин кривых в исходной метрике.

докажем обратное неравенство.

Пусть кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ имеет длину L в исходной метрике.

Рассмотрим набор значений параметров $a = t_0 < \dots < t_n = b$, они разбивают γ на n кусков $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

По аддитивности длины кривой

$$\ell_\rho(\gamma_1) + \dots + \ell_\rho(\gamma_n) = L$$

Всякая кривая γ_i идёт из $\gamma(t_{i-1})$ в $\gamma(t_i)$, следовательно установленное равенство свидетельствует, что расстояния во внутренней метрике удовлетворяют неравенству

$$\rho_\ell(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \dots + \rho_\ell(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)) \leq L$$

Так как это верно для любого набора значений параметров $a = t_0 < \dots < t_n = b$, то длина кривой γ во внутренней метрике по определению оказывается не более L .

Задача

3.102.

Докажите, что если метрика ρ в M уже была внутренняя, то операция взятия внутренней метрики от неё, ρ_ℓ , даст $\rho_\ell \equiv \rho$.

В евклидовом пространстве очевидно выполняется равенство $\rho_\ell(x, y) = \rho(x, y)$, так как для всяких двух точек длина отрезка между ними в точности равна расстоянию между ними.

Следующий, уже не такой тривиальный пример - стандартная единичная сфера $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

На ней есть метрика, индуцированная с $\mathbb{R}^{n+1}$, в ней расстояние между $x, y \in \mathbb{S}^n$ равно $|x - y|$.

Однако, если мы будем рассматривать кривые на сфере от точки x до точки y , то их длины будут больше $|x - y|$ и внутренняя метрика окажется строго больше индуцированной.

Теорема

3.103.

Внутренняя метрика на сфере $\mathbb{S}^n$, соответствующая индуцированной с $\mathbb{R}^{n+1}$ метрике, равна

$$\rho_\ell(x, y) = \arccos(x \cdot y)$$

Доказательство

Вместо того, чтобы доказывать формулу по определению, мы проверим, что $\rho'(x, y) = \arccos(x \cdot y)$ является метрикой, что расстояние в ней равно длине некоторой кривой между x и y на сфере и что длина любой кривой в этой метрике равна длине кривой в исходной метрике.

Чтобы ρ' была метрикой, по сути надо проверить неравенство треугольника

$$\arccos(x \cdot z) \leq \arccos(x \cdot y) + \arccos(y \cdot z)$$

Предположим противное, пусть тогда $\arccos(x \cdot z) = \alpha$, $\arccos(x \cdot y) = \beta$, $\arccos(y \cdot z) = \gamma$ и $\alpha > \beta + \gamma$.

Вектор y удовлетворяет неравенствам

$$(3.1) \quad y \cdot x \geq \cos \beta, y \cdot z \geq \cos \gamma$$

тем же неравенствам будет удовлетворять его проекция на плоскость $\langle x, z \rangle$ (так как проекция не меняет значения скалярных произведений с x и z), причём проекция будет по модулю не более единицы.

Можно увеличить $|y|$ до единицы, оставив (3.1) в силе.

Теперь мы работаем с ситуацией на окружности $\mathbb{S}^1$ и (3.1) просто означает, что угол $|\widehat{yx}| \leq \beta$, $|\widehat{yz}| \leq \gamma$, тогда как $|\widehat{yz}| = \alpha > \beta + \gamma$.

Так быть не может по аддитивности длины дуги

теперь напомним очевидные оценки индуцированной метрики на сфере и ρ' друг че.
рез друга:

$$\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq 2 \arcsin \rho(x, y)/2.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и заметим, что в определении длины кривой можно разбить кривую сколь угодно мелко, увеличив при этом число по я точной верхней гранью.

Используя равномерную непрерывность γ и мелко разбивая отрезок параметризации $[a, b]$, мы будем иметь $\rho(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < \varepsilon$ для всех частей кривой.

Тогда можно будет написать

$$\ell_\rho(\gamma) \leq \ell_{\rho'}(\gamma) \leq \ell_\rho(\gamma) \frac{2 \arcsin \varepsilon/2}{\varepsilon},$$

так как $\frac{2 \arcsin \varepsilon/2}{\varepsilon}$ возрастает.

Так как $\frac{2 \arcsin \varepsilon/2}{\varepsilon}$ стремится к 1 при $\varepsilon \rightarrow +0$, то в пределе мы получим равенство длин кривых в обеих метриках.

Таким образом $\rho_\ell = \rho'_\ell$.

Очевидно, дуга в плоскости $\langle x, y \rangle$, соединяющая x и y , будет иметь длину (в обеих метриках именно $\arccos(x \cdot y)$), таким образом, $\rho' = \rho'_\ell = \rho_\ell$, что и требовалось доказать.

Задача

3.104.

* докажите, что в метрическом пространстве с компактными шарами минимум в определении внутренней метрики, если он конечный, достигается на некоторой (возможно не единственной) кривой, называемой кратчайшей.

||

Рассмотрите последовательность кривых, стремящихся к точной нижней грани.

Параметризуйте их почти натурально липшицевым образом и используйте рассуждения типа теоремы Арцела-Асколи 9.50, выбирая из последовательности кривых равномерно сходящуюся подпоследовательность (см.

раздел 4.3).

||

5.6.4 Length of a curve in a metric space

(?? пока тут, потом пойму, куда лучше это написать?)

Теория

Мы уже использовали длины дуг окружности для определения косинуса и синуса, а теперь изучим понятие длины произвольной кривой.

Определение

3.85.

Длина кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ в метрическом пространстве M - это

$$\ell(\gamma) = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N=b} \{\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \dots + \rho(\gamma(t_{N-1}), \gamma(t_N))\}$$

Говоря неформально, мы помещаем на кривую конечное количество точек в согласованном с кривой порядке и суммируем расстояния между одной точкой и следующей.

В случае евклидова пространства мы бы сказали, что в кривую вписана ломаная.

Аддитивность длины кривой

Если $\gamma = \gamma' \diamond \gamma''$, то

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma') + \ell(\gamma'')$$

Доказательство

По сути доказательство уже было приведено для случая дуг окружности в лемме об аддитивности длины дуги окружности, оно работает и в более общей постановке.

В силу неравенства треугольника в определении $\ell(\gamma)$ можно рассматривать только такие наборы параметров, в которых в качестве одной из точек $\gamma(t_i)$ фигурирует конец γ' , равный началу γ'' .

Тогда сумма (длина ломаной) для γ разбивается на две аналогичные суммы для γ' и γ'' .

Наоборот, из любых двух сумм (ломаных) для γ' и γ'' можно собрать сумму (ломаную) для γ , так как можно считать, что начала и концы кривых всегда фигурируют в этих суммах.

Далее мы используем тождество

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$$

где

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

Неравенство на длину кривой

для всякой кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$

$$\ell(\gamma) \geq \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

Доказательство

Это выполняется по неравенству треугольника для сумм (ломаных) в определении длины кривой и значит выполняется для точной верхней грани.

Конечно, для всякой конкретной кривой длина может оказаться бесконечной, кривая конечной длины называется спрямляемой.

достаточное условие спрямляемости

Если кривая имеет липшицеву параметризацию,

$$\rho(\gamma(t), \gamma(s)) \leq L|t - s|$$

то она спрямляема.

Доказательство

Очевидно, если $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ липшицева с константой L , то все суммы «длин ломаных» в определении длины не более $L|b - a|$ и

$$\ell(\gamma) \leq L|b - a|.$$

Лемма

Следующая лемма показывает, что на кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, которая не является постоянным отображением ни на каком интервале в $[a, b]$, можно корректно ввести натуральную параметризацию.

Пусть дана спрядляемая кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, обозначим её ограничение на $[a, t] \subseteq [a, b]$ как γ_t , тогда $\ell(\gamma_t)$ непрерывно зависит от t .

Доказательство

Функция $f(t) = \ell(\gamma_t)$ очевидно возрастает и достаточно доказать, что

$$\lim_{\tau \rightarrow t-0} f(\tau) = f(t) = \lim_{\tau \rightarrow t+0} f(\tau)$$

Достаточно доказать равенство слева, равенство справа тогда следует из переворота ориентации кривой и аддитивности длины, так как натуральная параметризация перевёрнутой кривой будет даваться выражением $s(b) - s(-t'), t' \in [-b, -a]$.

Впишем в кривую γ_t ломаную P , длина которой не менее $\ell(\gamma_t) - \varepsilon/2$.

Правый конец P будет находиться в точке $\gamma(t)$, из непрерывности кривой мы можем сдвинуть его в точку $\gamma(t')$ с $t' < t$ так, чтобы получилась ломаная P' длины не менее $\ell(P) - \varepsilon/2$, то есть длины не менее $\ell(\gamma_t) - \varepsilon$.

Существование такой ломаной показывает, что $\ell(\gamma_{t'}) \geq \ell(\gamma_t) - \varepsilon$.

Так как ε в последнем неравенстве произвольное (при t' зависящем от него), то этого достаточно, чтобы исключить разрыв слева у возрастающей функции $\ell(\gamma_t)$.

Взяв на спрядляемой кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ натуральный параметр $s = \ell(\gamma_t)$ мы видим, что значение t по s восстанавливается не обязательно однозначно, но точка на кривой восстанавливается однозначно.

Более того, натуральная параметризация является липшицевой,

$$\rho(\gamma(s), \gamma(s')) \leq |s - s'|.$$

С учётом леммы 3.88 можно сказать, что кривая спрямляема тогда и только тогда, когда среди её параметризаций есть липшицева параметризация.

Задача

определение длины кривой можно дословно использовать и для разрывных кривых.

Докажите, что если разрывная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ в полном метрическом пространстве имеет конечную длину, то во всякой $t_0 \in [a, b]$ кривая имеет левый и правый предел, и случаев их несовпадения счётное количество.

||

В силу полноты пространства примените критерий Коши существования, скажем правого, предела и заметьте, что при его отсутствии в кривую можно будет «вписать ломаную» произвольно большой длины.

||

Part V

Functions

Приведем полный анализ функций.

6 Functions of one variable

Обсудим подробно непрерывные функции и отображения.

(??? у нас крч определение непрерывности по Коши, по Гейне, из них и определения пределов по Коши и по Гейне??? все еще путаюсь с этим!!!)

6.1 Basic properties of functions of one variable

6.1.1 Continuity of functions

В этом разделе функцией мы будем называть отображение из некоторого множества действительных чисел в действительные числа, более точно такие отображения называют «функции одной переменной».

далее мы считаем функции определёнными на некотором подмножестве $X \subset \mathbb{R}$.

Определение непрерывности по Коши

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V \ni f(x_0)$ найдётся окрестность $U \ni x_0$, такая что

$$f(U \cap X) \subseteq V$$

Будем говорить, что функция непрерывна, если она непрерывна в любой точке своей области определения.

Определение непрерывности по Гейне

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $(x_n) \subseteq X$ из $x_n \rightarrow x_0$ следует, что $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$.

Будем говорить, что функция непрерывна, если она непрерывна в любой точке своей области определения.

Определение предела по Гейне очень удобно, так как позволяет сводить многие вопросы о непрерывности функции к свойствам пределов последовательностей.

Неформально говоря, по Гейне функция непрерывна в x_0 , если её можно переставить с операцией взятия предела:

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

если все x_n и их предел x_0 лежат в области определения f .

Лемма об эквивалентности определений непрерывности по Коши и по Гейне (?)

(потом дожду, потренируюсь!)

Доказательство (Коши) $\rightarrow$ (Гейне)

Пусть $x_n \rightarrow x_0$ в множестве X .

для всякой $V \ni f(x_0)$ мы возьмём соответствующую $U \ni x_0$.

По определению предела последовательности найдётся N , такое что при любом $n \geq N$ будет выполняться $x_n \in U$, а значит $f(x_n) \in V$.

Это означает по определению, что $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Доказательство (Гейне) $\rightarrow$ (Коши)

Пусть это не так, для некоторой $V \ni f(x_0)$ не нашлось окрестности $U \ni x_0$, у которой $U \cap X$ полностью переходит в V .

Это значит, что для любого $n \in \mathbb{N}$ на интервале $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ есть точка $x_n \in X$, для которой $f(x_n) \notin V$.

Но тогда $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, а $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$, что противоречит определению по Гейне.

Общие свойства непрерывных функций**Непрерывность частного**

Сформулируем нужные нам свойства непрерывных функций явно:

Если функции $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в $x_0 \in X$, то непрерывны $f + g$, $f - g$ и $f \cdot g$.

При условии $g(x_0) \neq 0$ непрерывна и f/g .

Доказательство:

Утверждение про сумму, разности и произведение очевидно следует из возможности переставить предел последовательности и арифметические операции.

Про частное можно заметить, что если $|g(x_0)| = \varepsilon$ то из определения по Коши следует, что в некоторой окрестности $U \ni x_0$ выполняется $|g(x_0)| > \varepsilon/2$ и значит в этой окрестности на g можно делить и применять предел частного последовательностей.

Непрерывность композиции

Если функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, то их композиция $g \circ f$ непрерывна в любой точке своей естественной области определения $Z = X \cap f^{-1}(Y)$.

Доказательство:

Если $x_n \rightarrow x_0$ в Z , то $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ по непрерывности f и далее $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$ по непрерывности g , что и означает непрерывность $g \circ f$ по Гейне.

Г-15. Пример непрерывной монотонной функции, производная которой равна нулю почти всюду

(?? снова посмотреть нужно в книгу, пред. пример не написан)

Продолжим функцию предыдущего примера на весь единичный интервал $[0, 1]$ следующим образом. Если $x \in [0, 1] \setminus C$, то x принадлежит одному из открытых интервалов (a, b) , удаленных из $[0, 1]$ при построении множества C , и потому $\varphi(a) = \varphi(b)$; положим $\varphi(x) \equiv \varphi(a) = \varphi(b)$. Другими словами, φ постоянна на замыкании каждого интервала, удаленного при построении множества C . Точнее $\varphi(x) = 1/2$ на интервале $[1/3, 2/3]$. На интервалах $[1/9, 2/9]$ и $[7/9, 8/9]$ значения φ равны соответственно $1/4$ и $3/4$. На интервалах $[1/27, 2/27]$, $[7/27, 8/27]$, $[19/27, 20/27]$ и $[25/27, 26/27]$ значения φ равны соответственно $1/8$, $3/8$, $5/8$ и $7/8$. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим возрастающую Функцию, определенную на $[0, 1]$ и (локально) постоянную в

некоторой окрестности каждой точки множества $[0, 1] \setminus C$ (см. рис. 4). Поскольку φ возрастает на $[0, 1]$ и множество ее значений составляет полный интервал $[0, 1]$, то φ не имеет скачков. А так как монотонная функция не может иметь других разрывов, кроме скачков (см. [36], стр. 52, упр. 24. а также [33], стр. 238), то φ непрерывна. Наконец, поскольку φ локально постоянна на открытом множестве $[0, 1] \setminus C$, мера которого равна 1, заключаем, что $\varphi'(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$. Определенная выше функция называется канторовой функцией.

Аналогично тому как канторова функция была определена с помощью канторова множества, можно определить подобные "канторовы функции", исходя из других канторовых множеств (положительной меры). Вероятно, простейший способ определения канторовой функции g , соответствующей заданному на $[0, 1]$ канторову множеству A , состоит в том, что сначала g определяют на замыканиях последовательно удаляемых интервалов: на центральном интервале $g(x) \equiv 1/2$;

на следующих двух интервалах значения g полагаются соответственно равными $1/4$ и $3/4$; на следующих четырех интервалах значения g полагаются равными соответственно $1/8, 3/8, 5/8, 7/8$ и т. д. Тогда на плотном подмножестве $[0, 1] \setminus A$ интервала $[0, 1]$ функция g является возрастающей, а ее множество значений (на этом подмножестве) плотно в $[0, 1]$. Следовательно, функцию g можно продолжить, определив ее на всем интервале $[0, 1]$ так, что она станет возрастающей и непрерывной на $[0, 1]$, а ее множество значений совпадет с $[0, 1]$.

Используя пример 5 "канторова множества" из иррациональных чисел, можно построить функцию h , возрастающую и непрерывную на $[0, 1]$, множество значений которой совпадает с $[0, 1]$, при этом $h'(x) = 0$ для каждого рационального числа $x \in [0, 1]$. На самом деле, множество значений $h(x)$ для рациональных $x \in [0, 1]$ можно сделать равным множеству $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ всех рациональных точек интервала $[0, 1]$ вместо множества точек вида $m/2^n$, как в предыдущих случаях. Таким образом, мы получим функцию, удовлетворяющую требованиям примера 11(г) гл. 1.

Г-30. Пример непрерывной строго монотонной функции с равной нулю почти всюду производной (??)

Непрерывная строго монотонная функция с производной, равной нулю почти всюду, рассматривается в примере 30.

Функция Вейерштрасса как пример непрерывной функции, нигде не имеющей производной

(не путать с эллиптической спецфункцией Вейерштрасса)

Функция Вейерштрасса задается на всей вещественной прямой единым аналитическим выражением

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

где a - произвольное нечетное число, не равное единице, а b - положительное число, меньшее единицы. Этот функциональный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ поэтому функция w определена и непрерывна при всех вещественных x . Тем не менее, эта функция не имеет производной по крайней мере при

$$ab > \frac{3}{2}\pi + 1.$$

Для доказательства отсутствия производной в произвольной точке x_0 строят две последовательности $\{x_m\}$ и $\{y_m\}$, сходящиеся к точке x_0 , и доказывают, что отношения $\frac{w(x_m)-w(x_0)}{x_m-x_0} \not\sim \frac{w(y_m)-w(x_0)}{y_m-x_0}$ имеют разные знаки по крайней мере при

$$ab > \frac{3}{2}\pi + 1 \text{ и } a > 1.$$

Указанные последовательности могут быть определены как

$$x_m = \frac{\gamma_m - 1}{a^m} \text{ и } y_m = \frac{\gamma_m + 1}{a^m},$$

где γ_m - ближайшее целое число к $a^m x_0$. Отсутствие производной во всех точках при более общих условиях

$$ab \geq 1 \text{ и } a > 1$$

было установлено Харди.

(пока не расшарил, почему такая есть????)

Если $f(x) > x$, то $x_n = f(x_{n-1})$ стремится к $+\infty$.

Пусть непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойством $f(x) > x$ для любого x . Докажите, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ последовательность, определённая как

$$x_n = f(x_{n-1})$$

стремится к $+\infty$.

[[
Используйте монотонность последовательности и непрерывность f по Гейне.
]]

6.1.2 Inverse functions and intermediate values

(?! т о промежут значения написана явно хуже нужного, почитаю там нпр Иванова!)

О промежутках

(??? что вообще тут может быть неочевидного???)

Определение промежутков

Для установления непрерывности обратных функций введём понятие промежутков: это отрезок $[a, b]$, интервал (a, b) с возможно бесконечными a или b , полуинтервал $[a, b)$ или $(a, b]$.

Лемма о промежутках

Множество $X \subseteq \mathbb{R}$ тогда и только тогда является промежутком, если для любых $x < y \in X$ отрезок $[x, y]$ полностью лежит в X .

Доказательство

Очевидно все промежутки обладают этим свойством.

Пусть теперь X обладает указанным свойством, положим

$$a = \inf X, \quad b = \sup X$$

Если $a = b$, то X будет одной точкой, которую можно считать отрезком $[a, a]$.

Для всякого числа $c \in (a, b)$ по определению точной грани найдётся элемент X как в (a, c) , так и в (c, b) .

Следовательно и $c \in X$, то есть X содержит весь интервал (a, b) .

Далее X является отрезком, полуинтервалом или интервалом в зависимости от того, содержит ли оно свои точные верхние/ нижние грани.

Определения строгих и нестрогих возрастания, убывания и монотонности**Возрастание / убывание**

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает, если для любых $x < y \in X$ оказывается $f(x) \leq f(y)$.

Аналогично определение убывания и строгого убывания с неравенствами $f(x) \geq f(y)$ и $f(x) > f(y)$ соответственно.

Строгое возрастание / убывание

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ строго возрастает, если для любых $x < y \in X$ оказывается $f(x) < f(y)$.

Аналогично определение убывания и строгого убывания с неравенствами $f(x) \geq f(y)$ и $f(x) > f(y)$ соответственно.

Монотонность / строгая монотонность

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна, если она возрастает на всём X или убывает на всём X .

Функция строго монотонна, если она строго возрастает или строго убывает.

Теорема непрерывности монотонной функции, переводящей промежутки в промежутки (!!!!!)

(???? тут мб детали будут)

Формулировка

Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ переводит промежуток X в промежуток $f(X)$ и монотонна, то она непрерывна.

Доказательство

Пусть без ограничения общности f возрастает.

Если $f(X)$ пусто или состоит из одной точки, доказывать нечего.

Иначе используем определение по Коши.

Если $f(x_0)$ не является концом промежутка $f(X)$, тогда для всякой окрестности $V \ni f(x_0)$ найдутся значения $A < f(x_0) < B$, лежащие в $f(X) \cap V$.

Возьмём a и b такие, что $f(a) = A$ и $f(b) = B$.

Тогда из монотонности для всякого $x \in (a, b)$ будет выполняться

$$A \leq f(x) \leq B \rightarrow f(x) \in V$$

Если $f(x_0)$ является, к примеру, правым концом $f(X)$, то мы просто для всякой $V \ni f(x_0)$ найдём $A < f(x_0)$ в $f(X) \cap V$, возьмём a такое, что $f(a) = A$ и из монотонности заключим, что для любого $x \in (a, +\infty) \cap X$ будет выполняться

$$A \leq f(x) \leq f(x_0) \rightarrow f(x) \in V$$

Аналогично рассматривается случай левого конца $f(X)$.

О тонкостях (???)

(чего не очевидно это??? а если бы не переводила промежутков??? пропишу потом.)

Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций

Обсудим экспоненту, логарифм, тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции непрерывны на своих областях определения.

Доказательство

Как мы установили, экспонента и логарифм строго монотонно отображают промежуток $(-\infty, +\infty)$ на $(0, +\infty)$ и обратно, следовательно они обе непрерывны (хотя мы ранее доказали это иначе).

Аналогично можно сказать про пары взаимно обратных монотонных отображений промежутков:

$$\begin{aligned} \cos : [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] \text{ и } \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ \sin : [-\pi/2, \pi/2] &\rightarrow [-1, 1] \text{ и } \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]; \\ \operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) &\rightarrow \mathbb{R} \text{ и } \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2) \\ \operatorname{ctg} : (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R} \text{ и } \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi) \end{aligned}$$

Непрерывность тригонометрических функций на всей области определения следует из формул типа $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ и т.п., позволяющих распространять область непрерывности сдвигами на всю прямую с учётом непрерывности композиции.

Часто функции, которые получаются из указанных в последней теореме арифметическими операциями и композициями, обычно называются элементарными. Это понятие весьма условно, так как за базу мы могли бы взять и какие-то другие функции. Как следствие из утверждений этого раздела мы получаем, что все элементарные функции непрерывны на своих естественных областях определения.

Теорема о промежуточном значении о переводе промежутков в промежуток (!!???)

Если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и X -промежуток, то $f(X)$ - тоже промежуток.

Это обобщение рассуждения ранее для экспоненты, когда мы выводили существование и единственность логарифма из непрерывности и монотонности экспоненты.

Доказательство

Надо доказать, что если $f(a) = A < B = f(b)$, то весь отрезок $[A, B]$ лежит в области значений f .

Без ограничения общности будем считать $a < b$ и для всякого $C \in (A, B)$ найдём $c \in [a, b]$, для которого $f(c) = C$.

Если середина $m \in [a, b]$ не подходит в качестве c , то какой-то из отрезков $[a, m]$ или $[m, b]$ можно взять в качестве $[a_2, b_2]$, для которого $f(a_2) < C < f(b_2)$.

Далее продолжаем так же делить отрезки пополам и либо найдём $f(c) = C$ где-то посередине, либо получим стягивающуюся к точке c последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, для которых выполняется

$$f(a_k) < C < f(b_k) \rightarrow f(c) \leq C \leq f(c) \rightarrow f(c) = C$$

Следствие об непрерывности и монотонности обратной функции (!???)

Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна на промежутке X , то $f(X)$ - промежуток и обратная функция f^{-1} тоже непрерывна и строго монотонна на промежутке $f(X)$.

(???? как оно выводится???)

(там еще чет Карасев написал про это следствие, я забил.)

Задача

15.

Пусть непрерывная функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$.

Докажите, что для всякого α вида $1/n, n \in \mathbb{N}$, уравнение

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

имеет решение.

||

Докажите, что выражение $f(x + \alpha) - f(x)$ не может иметь один и тот же знак на всём отрезке $[0, 1 - \alpha]$.

Задача

16.

Пусть $\alpha \in (0, 1)$ не равно никакому $1/n, n \in \mathbb{N}$.

Приведите пример непрерывной функции $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, которая имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$ и такой, что уравнение

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

не имеет решений.

||

Начните с построения подходящей непрерывной функции g , такой что $g(x + \alpha) = g(x)$, но $g(0) \neq g(1)$, а потом модифицируйте её.

||

6.1.3 Functions continuous on compact sets (!?)

Топологическое определение непрерывности

Определение

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, если для всякого открытого V прообраз $f^{-1}(V)$ открыт относительно X .

Оно используется для компактов (?? почему именно оно?).

Почему именно прообраз в определении?
(!?!???)

Лемма об эквивалентности топологического определения непрерывности и определения непрерывности по Коши (????)

Топологическое определение непрерывности эквивалентно определению непрерывности по Коши.

Доказательство

В одну сторону, если выполняется топологическая непрерывность, то $f^{-1}(V) = U \cap X$, то есть в качестве U в определении по Коши можно брать $U \ni x_0$ или точнее какой-то интервал $U' \subseteq U$, содержащий x_0 .

Обратно, если выполняется определение по Коши, то для любой точки $x_0 \in f^{-1}(V)$ мы имеем окрестность $U \ni x_0$, для которой $U \cap X \subseteq f^{-1}(V)$. Объединяя все такие окрестности всех $x_0 \in f^{-1}(V)$ мы получим открытое множество, пересечение которого с X очевидно совпадает с $f^{-1}(V)$.

Непрерывная функция переводит компакт в компакт

Из топологического определения непрерывности удобно выводить такое свойство:
Если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и X - компакт, то $f(X)$ - тоже компакт.

Доказательство

для открытого покрытия $\{V_\alpha\}$ образа $f(X)$ можно подобрать открытые $\{U_\alpha\}$, такие что

$$U_\alpha \cap X = f^{-1}(V_\alpha)$$

Тогда $\{U_\alpha\}$ составляют открытое покрытие X , у которого есть конечное подпокрытие.

Соответствующие $\{V_\alpha\}$ тогда дадут конечное покрытие $f(X)$.

Непрерывная на непустом компакте функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ принимает минимальное и максимальное значения

Proof. Множество $f(X)$ также является компактом, а значит оно ограничено и замкнуто.

Следовательно его точные нижняя и верхняя грани конечны (из ограниченности) и лежат в нём (из замкнутости).

(???)

□

Задача

20.

Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет период $\bar{T} > 0$, то есть

$$f(x + T) = f(x)$$

для любого x .

Докажите, что для любого α уравнение

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

имеет решение.

||

Докажите, что выражение $f(x + \alpha) - f(x)$ не может иметь один и тот же знак, рассмотрев минимальное значение f .

Объясните, почему f принимает минимальное значение.

||

Следствие

Множество одновременно является компактом и промежутком тогда и только тогда, когда оно является отрезком.

Непрерывная $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ отображает отрезок в отрезок.

Разрывная $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок (?)

Придумайте разрывную $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

||

Используйте главный источник контрпримеров, выражение $\sin \frac{1}{x}$.

||

6.1.4 Limits of functions

Некоторой модификацией определения непрерывности можно получить определение предела функции в $a \in \mathbb{R}$:

Определение предельной точки

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной точкой множества X если для любой окрестности $a, U(a)$, пересечение $U(a) \cap (X \setminus \{a\})$ не пусто.

Равносильно, в множестве $X \setminus \{a\}$ можно выбрать последовательность, стремящуюся к a .

Определение предела функции по Коши

Пусть точка a является предельной точкой X и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

если для любой окрестности $A, V(A)$, найдётся окрестность $a, U(a)$, такая что

$$f(U(a) \cap (X \setminus \{a\})) \subseteq V(A)$$

Определение предела функции по Гейне

Пусть точка a является предельной точкой X и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

если для любой последовательности $(x_n) \subseteq X \setminus \{a\}$ из $x_n \rightarrow a$ следует, что $f(x_n) \rightarrow A$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство эквивалентности этих определений предела в точности повторяет доказательство эквивалентности определений непрерывности функции по Коши и по Гейне.

Deeper understanding of Heine definition of a limit

Проверьте с помощью определения по Гейне совместимость предела функции с арифметическими операциями (предел суммы, разности, произведения и частного), аналогично свойствам непрерывности.

Проверьте утверждения о переходе к пределу в неравенствах, аналогичные таковым для последовательностей.

(????)

Предел композиции функций (?)

Сформулируйте правильный вариант утверждения о пределе композиции функций. Обратите внимание, что в определении предела в точке a в функцию нельзя подставлять само a .

(??)

Критерий Коши существования конечного предела функции

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечный предел в a тогда и только тогда, когда a является предельной точкой X и

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U(a) : \forall x', x'' \in U(a) \cap (X \setminus \{a\}), |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Доказательство

Из существования конечного предела легко следует утверждение.

докажем в обратную сторону по Гейне.

для всякой последовательности $x_n \rightarrow a$ из $X \setminus \{a\}$ мы видим, что начиная с некоторого момента она попадёт в $U(a)$ из утверждения и тогда будет выполняться $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Следовательно, последовательность $(f(x_n))$ фундаментальна и имеет конечный предел.

Может ли оказаться, что для разных последовательностей эти пределы разные? Предположим, для $x'_n \rightarrow a$ и $x''_n \rightarrow a$ пределы $f(x'_n)$ и $f(x''_n)$ различны.

Составим из них одну последовательность $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$ и обозначим её (x_n) .

Тогда $x_n \rightarrow a$, но $f(x_n)$ будет иметь два частичных предела - противоречие с уже доказанным. Для функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $Y \subseteq X$ будем называть сужением f на Y , $f|_Y$, функцию $f|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$, принимающую на Y те же значения, что f .

На самом деле выражения типа «функция непрерывна на Y » «функция монотонна на Y и т.п.

у нас будут означать,
 что сужение функции на множество Y непрерывно, монотонно и т.п.
 Эта терминология имеет тонкости.
 Например, функция Дирихле

$$D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке своей области определения (докажите это в качестве упражнения), но непрерывна на множестве $\mathbb{Q}$, так как постоянна на нём.

Односторонние пределы

Определим односторонние пределы:

Левый и правый пределы функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $a \in X$ определяются как

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{X \cap (-\infty, a)}(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{X \cap (a, +\infty)}(x)$$

иногда их также обозначают $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

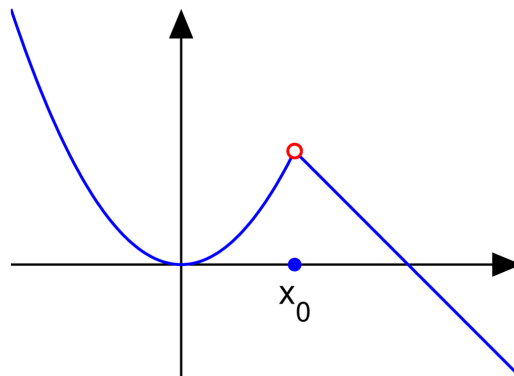
О поисках односторонних пределов

Просто берешь, вставляешь $x-0$, $x+0$, далее просто очевидно получается.
 (? напишу гораздо лучше это!)

Классификация особых точек

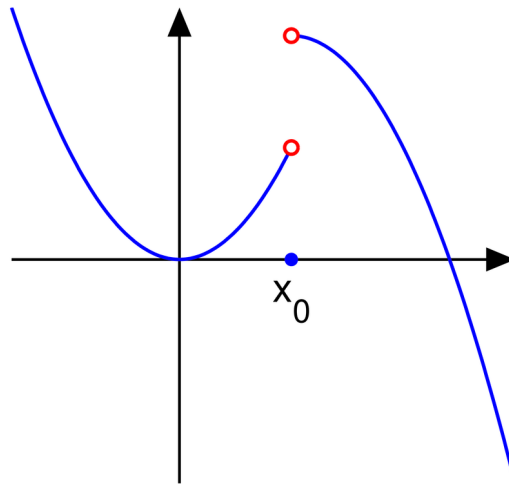
Определение точки устранимого разрыва

Точка a называется точкой устранимого разрыва функции, если в ней существует конечный предел f , но $f(a)$ не определено или не равно этому пределу.



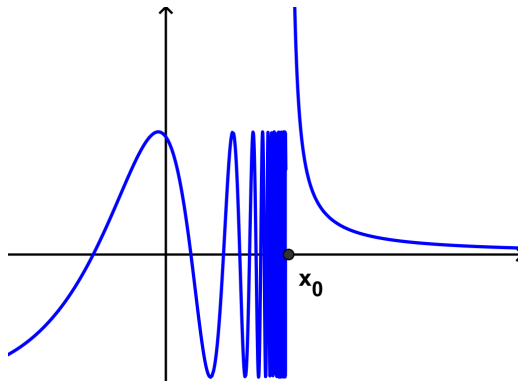
Определение точки разрыва 1го рода

Точка a называется точкой разрыва первого рода функции, если в ней существуют не равные друг другу пределы слева и справа.



Определение точки разрыва 2го рода

Точка разрыва второго рода - точка области определения функции, в которой функция не является непрерывной.



То есть в этом случае функция в этой точке или уходит в бесконечность, или просто имеет неопределенное значение.

Теорема об очевидном свойстве точек разрыва для монотонной функции.

Если $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна, то все её разрывы первого рода и в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ выполняется

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$$

(потом посмотрю, пока не интересно.)

Доказательство

Без ограничения общности пусть f возрастает.

Возьмём некоторую $x_0 \in (a, b)$ и положим $A = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x)$, из возрастания очевидно следует $A \leq f(x_0)$.

Докажем, что A является левым пределом f в точке x_0 .

Для всякой окрестности $V \ni A$ найдём $A' \in V$, $A' < A$.

По определению точной верхней грани найдётся $\xi < x_0$, такое что

$$A' < f(\xi) \leq A$$

Тогда из возрастания для всякого $x \in (\xi, x_0)$ будет выполняться

$$A' < f(\xi) \leq f(x) \leq A \rightarrow f(x) \in V$$

Аналогично доказывается, что $B = \inf_{x \in (x_0, b)} f(x)$ является правым пределом в точке x_0

У монотонной на отрезке функции не более чем счётное количество точек разрыва

(????? why???)

||

Используйте счётность множества рациональных чисел.

||

Если f и g возрастают и их сумма $f + g$ непрерывна, то и они непрерывны (?)

Пусть функции f и g возрастают на всей прямой $\mathbb{R}$ и оказалось, что их сумма $f + g$ непрерывна. Докажите, что обе функции f и g тоже непрерывны.

||

Рассмотрите поведение в предполагаемых точках разрыва.

||

Определение пределов методами программирования (!??)

(тут введение в вычматы, пока не занимался этим. а может, такого вообще нет и удалю просто этот параграф.)

6.1.5 Comparison of asymptotic behavior of functions, symbols O and o

(просто полезные формулы, пользуюсь, вроде суть ясна. потом напишу точнее, пока так.)

Теория

Предположим у нас есть две функции, определённые на одном и том же множестве X и мы рассматриваем их пределы в предельной точке a , $a \in X$.

Обе функции могут стремиться к нулю, то есть быть бесконечно малыми, но иногда полезно знать, какая из них существенно меньше, или как говорят, какая быстрее стремится к нулю.

Аналогичный вопрос, «кто быстрее», может возникнуть в случае, когда обе функции стремятся к бесконечности.

Мы также будем считать, что последовательность и её предел - это частный случай функции на множестве $\mathbb{N}$ и её предела в точке $+\infty$.

Поэтому далее мы рассуждаем о функциях, но к последовательностям всё применимо в полной мере.

Определение

34.

Если для $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ найдётся такая функция α , что

$$f(x) = \alpha(x)g(x)$$

по крайней мере в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$ в пересечении с X , и $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, то пишут

$$f(x) = o(g(x))$$

Это определение - это более аккуратный способ сказать, что $f/g \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, принимающий во внимание то, что g может обращаться в нуль.

Если g не обращается в нуль в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$, то это значит в точности $f/g \rightarrow 0$.

Обратим внимание, что данная запись достаточно условна и её надо применять с пониманием, например, написать $o(g(x)) = f(x)$ будет неправильно.

Определение $f(x) = O(g(x))$

Если для $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ найдётся такая константа C , что

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

по крайней мере в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$ в пересечении с X , то пишут

$$f(x) = O(g(x))$$

То есть это определение - более аккуратный способ сказать, что f/g ограничена при $x \rightarrow a$, и в случае, когда g не обращается в нуль, ровно это и означающий.

Симметричность O

Покажем симметричность.

Выражение из определения означает, что

$$f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)), \alpha(x) \rightarrow 0,$$

то есть эквивалентно

$$f(x) = g(x)\beta(x), \beta(x) \rightarrow 1$$

В такой формулировке получается

$$g(x) = f(x) \frac{1}{\beta(x)}, \frac{1}{\beta(x)} \rightarrow 1$$

и симметричность уже очевидна.

Транзитивность O

Транзитивность проверяется так:

$$f(x) = g(x)\beta(x), g(x) = h(x)\gamma(x) \rightarrow f(x) = h(x)\beta(x)\gamma(x)$$

и ясно, что $\beta(x)\gamma(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow a$, если $\beta(x) \rightarrow 1$ и $\gamma(x) \rightarrow 1$. В примере с многочленом степени n мы понимаем, что он асимптотически эквивалентен выражению $a_n x^n$ по уже выписанной формуле.

Собственно, при $g(x)$, не равной нулю в некоторой $U(a) \setminus \{a\}$, $f \sim g$ означает просто, что отношение f/g стремится к единице при $x \rightarrow a$.

Зачем нужно сравнение функций?

(сформулирую потом ответ)

О некоторых примерах o и O **Соотношение $x^n = o(e^x)$** Докажите, что для любого $n \in \mathbb{Z}$

$$x^n = o(e^x) \text{ при } x \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad e^x = o(x^n) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty.$$

||

Вспомните, что экспонента определялась как предел возрастающей (по крайней мере при $x > 0$) последовательности многочленов.

||

Соотношение $\ln x = o(x^\alpha)$ для любого $\alpha > 0$ докажите, что для любого $\alpha > 0$

$$\ln x = o(x^\alpha) \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

||

Сделайте замену $x^\alpha = t$ и покажите, что верность утверждения не зависит от выбора $\alpha > 0$.

Далее положите $\alpha = 2$ и оцените логарифм линейной функцией.

||

6.1.6 Derivative and differentiability of a function**Определение**

41.

Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ и x_0 является предельной точкой X .

Тогда производная f в точке x_0 определяется как

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Это определение можно интерпретировать геометрически как проведение прямой (секущей) через две точки графика $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$, нахождение тангенса угла между осью x и этой прямой, и переход к пределу $x \rightarrow x_0$, предельную прямую естественно называть касательной к графику в точке $(x_0, f(x_0))$, а производная - это тангенс угла наклона касательной.

Производная по определению может оказаться бесконечной ($-\infty$, $+\infty$ или просто ∞), но мы по умолчанию всегда будем считать производную конечной, а о возможности рассматривать бесконечную производную в данном конкретном случае будем упоминать явно.

Ещё один формальный момент - при работе с производной удобно наложить разумные требования на область определения, переходя к следующему:

Определение дифференцируемой функции

Функция f дифференцируема в точке x_0 , если она определена в некоторой окрестности x_0 и имеет конечную $f'(x_0)$.

Определение левой и правой производной

Если f определена в некоторой левой окрестности x_0 , $(a, x_0]$, то

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

называется её левой производной, а если f определена в правой окрестности x_0 , $[x_0, b)$, то

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

называется её правой производной.

По определению предела ясно, что умножение на константу, сложение и вычитание сохраняют дифференцируемость и имеет место линейность

$$(Af(x) + Bf(x))' = Af'(x) + Bg'(x).$$

Лемма о виде дифференцируемой функции

Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она определена в окрестности x_0 и

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

при $x \rightarrow x_0$.

Тогда $A = f'(x_0)$.

Доказательство

Из наличия такой формулы легко следует $f'(x_0) = A$.

Наоборот, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

то иначе можно сказать

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x), \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0$$

и искомая формула получается домножением на $x - x_0$. Обратите внимание, что в отличие от определения предела в точке, в эту формулу законно ставить $x = x_0$.

Иногда даже полезно писать это определение в виде $f(x) = f(x_0) + (f'(x_0) + o(1))(x - x_0)$.

Из такой записи дифференцируемости сразу следует: Следствие 2.45.

Дифференцируемая в x_0 функция непрерывна в x_0 . Теперь мы можем доказать теоремы о взаимодействии производной с умножением, делением и композицией функций:

Теорема о дифференцируемости произведения

Если f и g дифференцируемы в x_0 , то их произведение дифференцируемо и

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Доказательство

Воспользуемся формулами

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

и получим при перемножении

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))(x - x_0) + o(x - x_0),$$

так как из непрерывности f и g ограничены в окрестности x_0 и при домножении их на $o(x - x_0)$ опять получается $o(x - x_0)$.

Теорема о дифференцировании частного

Если f и g дифференцируемы в x_0 , то их частное дифференцируемо и

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Доказательство

Запишем

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x)g(x_0)}(x - x_0) + o(x - x_0) = \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

так как $o(x - x_0)$ из определения дифференцируемости f и g домножаются на ограниченные величины и

$$\frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x)g(x_0)} - \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} = o(1).$$

Теорема о дифференцируемости композиции

Если f дифференцируема в x_0 , и g дифференцируема в $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в x_0 и

$$(g \circ f)' = g'(y_0)f'(x_0)$$

Доказательство

Во-первых заметим, что из непрерывности f следует, что некоторая окрестность $U \ni x_0$ при f переходит в $V \ni y_0$, на которой определена g .

Следовательно, композиция $g \circ f$ определена в некоторой окрестности x_0 .

Запишем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$$

и подставим одно в другое

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(y_0) + g'(y_0)(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = \\ &= g(y_0) + g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

Теорема о дифференцируемости обратной функции

Если f непрерывна и строго монотонна в окрестности x_0 и дифференцируема в x_0 , то для обратной функции g в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет место

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

в том числе в смысле $\frac{1}{0} = \infty$.

Доказательство

Заметим, что обратная функция в данной ситуации оказывается непрерывной и при $y \rightarrow y_0$ оказывается $g(y) \rightarrow g(y_0)$.

Это позволяет записать

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Производные типичных функций

Найдем производные элементарных функций во всех точках их областей определения.

(тут потом другие добавлю, пока то, что итак есть. как раз то место, где вывод формул.)

Например для экспоненты из замечательного предела $\frac{e^t - 1}{t} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$ следует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x - x_0 \rightarrow 0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}$$

то есть $(e^x)' = e^x$.

Для логарифма можно применить теорему о производной обратной функции

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Для синуса можно записать

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos \frac{x + x_0}{2} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2}}{x - x_0} \rightarrow \cos x_0$$

из замечательного предела при $t \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\cos t} \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1 \rightarrow \frac{\sin t}{t} \rightarrow 1.$$

Аналогично для косинуса

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin \frac{x + x_0}{2} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2}}{x - x_0} \rightarrow -\sin x_0$$

Для тангенса и котангенса получим по производной частного

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Для обратных тригонометрических функций по производной обратной функции выйдет

$$\begin{aligned} (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1 + x^2}, & (\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1 + x^2}, \\ (\operatorname{arcsin} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, & (\operatorname{arccos} x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Производные гиперболических функций

Найдите производные гиперболических функций $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и их обратных функций.

(изи, да?)

Дифференцируемость на открытом множестве

В целом мы будем говорить, что функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на открытом множестве X , если она дифференцируема в любой точке $x_0 \in X$.

Тогда f' на самом деле тоже является функцией $f' : X \rightarrow \mathbb{R}$. Мы видели, что:

Всякая элементарная функция дифференцируема во внутренней своей естественной области определения и её производная - тоже элементарная функция (суженная на эту внутренность).

Взятие внутренней в этом утверждении важно, так как функция $\sqrt{x}$, к примеру, определена в нуле, но имеет в нём бесконечную (правую) производную.

В некоторых случаях мы будем интересоваться дифференцируемостью функции на не открытых промежутках, в таких случаях дифференцируемость будет пониматься как существование односторонней производной на концах промежутка.

Определение производной методами программирования (!??)

(тут введение в вычматы, пока не занимался этим.)

6.1.7 Lagrange's mean value theorem

Покажем, как знание производной функции позволяет исследовать функцию на экстремум, возрастание и убывание, и считать пределы.

Определение локального минимума, максимума, экстремума функции

Точка x_0 называется локальным минимумом функции f , если значение $f(x_0)$ минимально среди всех значений f в некоторой окрестности x_0 .

Аналогично определяется локальный максимум.

Если нам не важно, максимум или минимум в точке, то мы говорим локальный экстремум.

Если минимальное / максимальное значение принимается (из достаточно малой окрестности) только в точке x_0 , то экстремум называется строгим. Докажем простую, но очень полезную теорему:

Теорема Ферма о необходимом условии экстремума

Если f определена окрестности x_0 , имеет локальный экстремум в x_0 и имеет $f'(x_0) \in \bar{\mathbb{R}}$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

По определению производной в точке минимума для односторонних производных окажется

$$f'_-(x_0) \leq 0, f'_+(x_0) \geq 0$$

то есть при наличии производной с обеих сторон она должна быть равно нулю.

Аналогично для максимума.

Связь монотонности с производной

Пусть функция f определена и непрерывна на интервале (a, b) и возможно на его концах, а также дифференцируема на интервале (a, b) .

Тогда f возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ на всём (a, b) .

Если $f'(x) > 0$ на всём (a, b) , то f строго возрастает.

Для убывания верно то же со сменой знака производной на обратный.

Доказательство

В одну сторону утверждение (доказательство возрастания и строгого возрастания) следует из равенства

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x')$$

для любых двух точек x'', x' в области определения и некоторой точки ξ между ними.

В обратную сторону, если f возрастает, то в определении производной рассматривается предел неотрицательных выражений, который должен быть неотрицательным.

Пример $f(x) = x^3$ показывает, что функция может строго возрастать, но её производная при этом может обратиться в нуль, так что из строгого возрастания не следует строгая положительность производной.

Признак монотонности позволяет доказывать неравенства по следующей схеме: $[a, b]$, дифференцируемые на интервале (a, b) , их значения на левом конце совпадают, $f(a) = g(a)$, и на (a, b) выполняется $f'(x) \geq g'(x)$, то на интервале также выполняется $f(x) \geq g(x)$.

Доказательство

Из условия следует, что разность $f(x) - g(x)$ возрастает на $[a, b]$, а так как она равна нулю на левом конце, то она неотрицательна на всём $[a, b]$.

О неравенстве для экспоненты

Докажите, что при натуральном n и $x \geq 0$ верно неравенство

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Какие неравенство будет верно при $x < 0$?

||

Используйте интегрирование неравенств по индукции.

||

Сравнение e^π и π^e

Сравните, что больше, e^π или π^e .

||

Замените π на произвольное $x > e$, перенесите всё в левую часть и дифференцируйте.

||

Критерий постоянства функции

Так как функция постоянна тогда и только тогда, когда она (не обязательно строго) возрастает и убывает одновременно, то мы получаем критерий постоянства функции:

Пусть функция определена и непрерывна на интервале (a, b) и возможно на его концах, а также дифференцируема на интервале (a, b) .

Тогда f постоянна тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ на всём (a, b) .
(obvious)

6.1.8 Study of monotonicity, extrema and convexity

Помимо необходимого условия экстремума, который даёт теорема Ферма, можно сформулировать и практически полезное достаточное условие:

Теорема о достаточном условии экстремума через первую производную

Если f непрерывна в x_0 и дифференцируема на некоторых (a, x_0) , (x_0, b) , причём $f'(x) < 0$ на (a, x_0) и $f'(x) > 0$ на (x_0, b) , то f имеет строгий локальный минимум в x_0 .

Если неравенства на производную нестрогие, то f имеет не обязательно строгий минимум.

Если неравенства (оба) в обратную сторону, то речь идёт о строгом или нестрогом максимуме.

Доказательство

Из условий следует, что f (строго) убывает на $(a, x_0]$ и (строго) возрастает на $[x_0, b)$.

Определение

63.

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, определённая на промежутке X , называется выпуклой, если для любых $x \neq y \in X$ и любого $t \in (0, 1)$

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Если все такие неравенства строгие, то функция называется строго выпуклой.

Для неравенств в обратную сторону функция называется вогнутой или строго вогнутой.

Теорема о достаточном условии выпуклости

Непрерывная на промежутке и дифференцируемая на его внутренности функция выпукла, если её производная возрастает.

Она строго выпукла, если её производная строго возрастает.

Для вогнутости утверждения аналогичны с заменой возрастания производной на убывание.

(напишу этот раздел потом лучше.)

Доказательство

Заметим, что вычитание из функции линейной функции не меняет ни её выпуклости, ни возрастания производной.

Вычитая из f линейную функцию, принимающую те же значения в точках x и y , мы придём к случаю $f(x) = f(y) = 0$.

Тогда нужно доказать, что для $z \in (x, y)$ выполняется $f(z) \leq 0$ (или $f(z) < 0$ для строгой выпуклости).

Но если $f(z) > 0$, то по теореме о среднем Лагранжа найдутся $\xi \in (x, z)$ и $\eta \in (z, y)$, такие что

$$f'(\xi) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} > 0, \quad f'(\eta) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z} < 0$$

Но при этом $\xi < \eta$, то есть производная не является возрастающей.

Для строгой выпуклости предположение $f(z) \geq 0$ также влечёт $f'(\xi) \geq 0 \geq f'(\eta)$, что даёт противоречие со строгим возрастанием производной.

Используя критерий монотонности можно сказать, что выпуклость означает неотрицательность второй производной (при её наличии) $f''(x) = (f'(x))' \geq 0$, а вогнутость — неположительность второй производной.

Задача

65.

Докажите, что если непрерывная на промежутке и дифференцируемая на его внутренности функция выпукла, то её производная возрастает.

докажите, что если функция строго выпукла, то её производная строго возрастает.

||

Предположите $f'(x) > f'(y)$ при $x < y$.

Сведите к случаю $f(x) = f(y) = 0$ как в предыдущем доказательстве и обратите внимание, что по выпуклости функция должна быть неположительной на (x, y) (отрицательной при строгой выпуклости).

Посмотрите, что происходит с функцией в окрестности точек x и y и найдите противоречие.

||

Задача

66.

На каких промежутках функция $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ выпукла, а на каких — вогнута?

Выпуклая на интервале функция непрерывна

Докажите, что выпуклая на интервале функция непрерывна.

Приведите пример функции на отрезке, которая разрывна, но выпукла.

||

Обратите внимание, что если через две точки графика выпуклой функции провести секущую, то между этими двумя точками она будет лежать (нестрого) над графиком, а слева и справа от этой пары точек — под графиком.

||

Задача

68.

Докажите, что если f определена и непрерывна на интервале (a, b) , и в каждой точке $x \in (a, b)$ выполняется

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{f(x + \delta) + f(x - \delta) - 2f(x)}{\delta^2} \geq 0$$

то f выпукла.

||

Покажите, что выпуклость f следует из выпуклости $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x^2$ при любом положительном ε .

Заметьте, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{f_\varepsilon(x + \delta) + f_\varepsilon(x - \delta) - 2f_\varepsilon(x)}{\delta^2} \geq 2\varepsilon$$

и далее действуйте аналогично доказательству теоремы 2.64.

||

6.1.9 Mean value theorems

Теорема Ролля

Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , а также $f(a) = f(b)$, то найдется $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство

Непрерывная на отрезке функция достигает на нём максимума и минимума.

Если она равна константе, то доказывать нечего, иначе из условия $f(a) = f(b)$ следует, что один из экстремумов находится строго внутри, в точке $\xi \in (a, b)$.

Тогда $f'(\xi) = 0$ по предыдущей теореме.

О корнях квазимногочлена

Докажите, что если квазимногочлен $P(x)e^{ax}$ (где P - обычный многочлен и $a \neq 0$) имеет n различных корней, то его производная тоже имеет n различных корней.

||

Как минимум $n - 1$ корень производной легко найти по теореме Ролля, остаётся найти еще один.

||

Теорема о среднем Лагранжа

Формулировка

Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство

Положим $A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Тогда $g(x) = f(x) - Ax$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля (проверьте равенство $g(a) = g(b)$!) и мы находим $\xi \in (a, b)$, такое что

$$g'(\xi) = f'(\xi) - A = 0 \rightarrow f'(\xi) = A$$

Иначе теорему Лагранжа можно записать как

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

в такой записи безопасно рассматривать и случай $b = a$, считая произведение неопределённого выражения на нуль равным нулю.

Ещё более безопасный вариант, в котором допустимо и $b = a$, такой:

$$f(b) - f(a) = f'(a + \vartheta(b - a))(b - a), \quad \vartheta \in (0, 1)$$

О применениях

(укажу потом)

Теорема о среднем Коши

Если функции f и g непрерывно на $[a, b]$ дифференцируемые на (a, b) , а также g' не равно нулю ни в одной точке (a, b) , то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Доказательство

По теореме Ролля $g(b) - g(a) \neq 0$, Положим

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

тогда

$$h(x) = f(x) - Ag(x) = \frac{f(x)g(b) - f(x)g(a) - g(x)f(b) + g(x)f(a)}{g(b) - g(a)}$$

принимает равные значения на концах отрезка.

Применяя к ней теорему Ролля, получаем точку $\xi \in (a, b)$, такую что

$$h'(\xi) = f'(\xi) - Ag'(\xi) = 0 \rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$$

(????)

О применениях

Из этой теоремы выводятся очень полезные способы находить пределы отношения функций в тех случаях, когда теорема о пределе частного не работает.

6.1.10 L'Hôpital's rule

Правило Лопиталья для неопределённости $\frac{0}{0}$

Пусть f и g определены на интервале в нуль, $f(x), g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тогда существует и предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство

Пусть точка a конечна.

Тогда доопределим $f(a) = g(a) = 0$ до непрерывности в a и напишем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

для некоторой ξ между x и a по теореме о среднем Коши.

При $x \rightarrow a$ мы будем иметь $\xi \rightarrow a$, значит выражение справа будем иметь предел, а значит и выражение слева тоже.

Если же a бесконечна, то замена $t = 1/x$ сводит задачу к $a = 0$, так как

$$\frac{(f(1/t))'_t}{(g(1/t))'_t} = \frac{f'(1/t) \frac{-1}{t^2}}{g'(1/t) \frac{-1}{t^2}} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$$

тоже имеет предел при $t \rightarrow 0$ по условию, из чего следует существование предела отношения функций.

Правило Лопиталя для неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть f и g определены на интервале в нуль, $f(x), g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$ и существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тогда существует и предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство

Воспользуемся определением предела по Коши.

Для всякой окрестности $A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, V$, мы найдём интервал с концом в a, U , такой что при $x \in U$ из области определения f и g выполняется

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in V$$

Теперь в пределе отношения функций воспользуемся определением по Гейне.

Последовательность $x_n \rightarrow a$ для достаточно больших $n \geq N$ окажется в U .

Тогда по теореме о среднем Коши

$$\frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in V$$

так как ξ тоже будет в U .

Фиксируя N и рассматривая $n \rightarrow \infty$, мы получим из стремления $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow A$ произвольности V и теоремы о единственном частичном пределе отсюда следует, что на самом деле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = A$$

О применениях правила Лопиталя (?)

(вроде часто нужно)

Задача

72.

Найдите пределы на бесконечности по правилу Лопиталья для выражений

$$\frac{x^n}{e^x} \text{ и } \frac{\ln^n x}{x^k}$$

с натуральными n, k и предел в нуле

$$x^n \ln^k x$$

6.1.11 Higher-order derivatives

Если функция f определена на некотором интервале (a, b) и имеет производную в каждой точке интервала, то возникает новая функция $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

К этой функции можно также применить взятие производной, получая вторую, f'' , третью, f''' , и т.д. производные исходной функции. Обозначения для k -й производной такие:

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}$$

Мы всегда будем считать, что существование производной $f^{(n)}$ в точке x_0 означает, что предыдущая производная $f^{(n-1)}$ определена в некоторой окрестности x_0 .

Производная суммы

Из линейности одной производной следует линейность операции взятия k -й производной

$$(Af + Bg)^{(k)} = Af^{(k)} + Bg^{(k)}$$

Получить формулу для k -й производной произведения уже посложнее.

Вспомним определение биномиальных коэффициентов для $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Используя очевидное тождество

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)(x + y)^n$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

при $1 \leq k \leq n+1$.

Если считать $\binom{n}{k}$ равным нулю для целых $n < 0$ и для целых $n \geq 0$ при $k < 0$ или $k > n$, то эта формула будет верна почти всегда, кроме случая $n+1 = k = 0$.

Формула Лейбница

Если f и g имеют n -ю производную на некотором интервале, то выполняется

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Доказательство

(?????)

Для $n = 1$ мы эту формулу $(fg)' = fg' + f'g$ уже установили.

Теперь воспользуемся индукцией и покажем переход от n к $n + 1$:

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

О другом

Для n -й производной частного общей формулы нет. Поэтому, например, мы можем выписать общую формулу $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$, но не можем выписать общую формулу для n -й производной $\operatorname{tg} x$.

Приближение функции многочленом

Заметим, что у многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ производные в нуле выражаются как

$$P^{(k)}(0) = k!a_k$$

где $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$, $0! = 1$.

Если теперь нам дана функция f , у которой есть n производных в точке x_0 , то многочлен (считаем $f^{(0)} \equiv f$)

$$P_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

имеет в точке x_0 такие же значения производных до n -го порядка включительно, как и функция f .

Обозначим остаточный член формулы Тейлора

$$r_{n,f,x_0}(x) = f(x) - P_{n,f,x_0}(x)$$

это будет функция, все производные которой до n -й включительно в точке x_0 равны нулю.

Мы хотим показать, что этот остаточный член мал, или как-либо явно выражается.

6.1.12 Taylor's formula for functions of one variable

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Теорема 12. Если f n раз дифференцируема в точке x_0 , то

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Доказательство

Мы хотим показать, что $r_{n,f,x_0}(x) = o((x - x_0)^n)$.

Обозначим для краткости $r(x) = r_{n,f,x_0}(x)$, мы знаем, что производные $r(x)$ до n -й включительно обращаются в нуль в x_0 .

Заметим, что из этого следует наличие производных до $(n - 1)$ -го порядка включительно в окрестности x_0 .

Применим правило Лопиталя (пока мы имеем дело с неопределённостями $0/0$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)}$$

теперь вспомним, что $r^{(n-1)}(x_0) = 0$ и продолжим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(x_0) = 0$$

так как предпоследнее равенство - это определение n -й производной в точке x_0 .

О случаях применения

(почти всегда она используется при разложениях)

Достаточные условия экстремума в терминах высших производных

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 как минимум $n \geq 2$ раз, её производные порядков $k = 1, \dots, n - 1$ равны нулю, а n -я производная не равна нулю. Тогда при чётном n функция имеет строгий экстремум в x_0 , а при нечётном не имеет

Доказательство.

[[

Напишите $f(x) = f(x_0) + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right) (x - x_0)^n$.

]]

Запишем по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = f(x_0) + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right) (x - x_0)^n.$$

В некоторой окрестности x_0 будет выполняться $|o(1)| < \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|$ (так как производная не равна нулю). Следовательно, знак $f(x) - f(x_0)$ определяется знаком производной $f^{(n)}(x_0)$ и знаком выражения $(x - x_0)^n$. Из рассмотрения разных случаев этих знаков получается утверждение теоремы.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Если f имеет производные до n -й включительно на интервале $U \ni x_0, n \in \mathbb{N}$, то для любого $x \in U$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n$$

для некоторого ξ между x_0 и x .

Доказательство

Нам опять надо получить формулу для $r(x) = r_{n-1}(x)$ при условии, что производные $r(x)$ до $(n-1)$ -й включительно обращаются в нуль в x_0 и производные до n -й включительно существуют в U .

Применим теорему о среднем Коши

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{r(x) - r(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{r'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} = \frac{r'(\xi_1) - r'(x_0)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} = \dots = \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{n!}$$

Положим $\xi = \xi_n$.

Так как $r(x)$ отличается от $f(x)$ многочленом степени не более $n-1$, то их n -е производные совпадают, то есть

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \rightarrow r(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n$$

О случаях применения (???)

(???)

Об асимптотических разложениях вблизи x_0 и ∞

По аналогии с формулами Тейлора можно говорить об асимптотических разложениях функции f при $x \rightarrow x_0$ по степеням $(x - x_0)$, как о последовательностях коэффициентов $a_N, a_{N+1}, \dots$, начиная с некоторого целого N , для которых при любом $n \geq N$ выполняется равенство

$$f(x) = a_N (x - x_0)^N + a_{N+1} (x - x_0)^{N+1} + \dots + a_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

При $x \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение по степеням начинается с некоторой x^N и идёт с убыванием, а не с возрастанием степеней.

О случаях разложения у бесконечности (!?!?!?)

(???? пока что еще не раскладывал у бесконечности, еще тут потренируюсь.)

Единственность

Докажите, что коэффициенты асимптотического разложения по степеням $(x - x_0)$ определены единственным образом.

Задача

80.

Приведите пример функции, которая положительна при $x \neq 0$, но её асимптотическое разложение в нуле имеет все коэффициенты равными нулю.

||

доопределите e^{-1/x^2} в нуле как 0 и считайте её производные в нуле по определению и правилу Лопиталья.

||

Задача

81.

Покажите, что для любого N и любого набора коэффициентов $a_N, a_{N+1}, \dots$ найдётся бесконечно дифференцируемая f с заданными коэффициентами асимптотического разложения по степеням x в нуле.

||

При решении этой задачи может понадобиться аккуратная работа с функциональными рядами и бесконечно гладкими функциями, отличными от нуля в маленькой окрестности нуля.

(в комплане Миттаг-Лефлера не об этом ли??)

||

Определение через методы программирования (!!!!!!!)

(чуть что именно это и буду использовать, так что важно написать!!!)

6.1.13 Discontinuous and semicontinuous functions

Будем работать на метрическом пространстве M и рассмотрим функцию $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, про которую мы не предполагаем непрерывности.

Наша цель заключается в том, чтобы изучить отклонения f от непрерывности и некоторые ослабленные варианты непрерывности, достаточные, например, для задач поиска экстремума.

Определение частичного предела

Для всякой точки $x_0 \in M$ число или бесконечность со знаком $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется частичным пределом f в точке x_0 , если можно найти последовательность $(x_n) \subseteq M$, такую что $x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$ для любого n и $f(x_n) \rightarrow A$. Аналогично частичным пределам последовательностей доказывается, что множество частичных пределов функции f в точке x_0 замкнуто, и что среди частичных пределов f в x_0 есть минимальный и максимальный, которые называются нижний и верхний пределы f в точке x_0 ,

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x), \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Теорема о единственном частичном пределе последовательности тогда превращается в утверждение, что f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$f(x_0) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

это тривиально следует из определения непрерывности по Гейне и соответствующего утверждения для последовательностей.

задача

3.75.

докажите, что если функция f непрерывна в проколотой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$, то множество её частичных пределов в x_0 является промежутком.

||

Используйте связность проколотых окрестностей при $n \geq 2$.

||

Определение полунепрерывности снизу

Функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется полунепрерывной снизу, если в любой точке $x_0 \in M$ выполняется

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Эквивалентно, f полунепрерывна снизу, если для всех $y \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in M : f(x) > y\}$$

Открыты.

(?????????)

Второе определение полунепрерывности уместно назвать «топологическим», собственно, оно может применяться не только для метрических пространств, но и для топологических пространств, так как использует только понятие открытости множества.

Два определения полунепрерывности снизу эквивалентны

Докажем, что из первого следует второе.

Предположим противное множество $\{x \in M : f(x) > y\}$ при некотором y не открыто.

Это означает существование x_0 , такого что $f(x_0) > y$, но в любой окрестности x_0 найдётся x , такое что $f(x) \leq y$.

Из таких x можно построить последовательность, которая покажет, что

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq y$$

но тогда должно быть $f(x_0) \leq y$ - противоречие.

В обратную сторону.

Пусть $f(x_0) = y_0$, для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in M : f(x) > y_0 - \varepsilon\}$ открыто, то есть в некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x) > y_0 - \varepsilon$.

Следовательно должно выполняться

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq y_0 - \varepsilon$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь произвольно, то на самом деле должно выполняться

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq y_0 = f(x_0).$$

Оказывается, полунепрерывности снизу достаточно для существования минимума на компактном множестве:

Теорема о в принципе достижении минимального значения снизу

Если функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу и M компактно, то f принимает минимальное значение в некоторой точке M .

Доказательство

Пусть $m = \inf_{x \in M} f(x)$, мы пока не исключаем, что $m = -\infty$.

Выберем последовательность y_n , строго убывающую и стремящуюся к m .

Множества

$$U_n = \{x : f(x) > y_n\}$$

открыты по определению полунепрерывности снизу.

Предположим противное — $f(x)$ никогда не равно m .

Тогда для всякого x найдётся n , такое что $f(x) > y_n$.

Следовательно, множества U_n покрывают всё M .

Так как M компактно, то оно покрывается конечным набором таких множеств, а так как они упорядочены по включению, то на самом деле покрывается одним из них, $U_N = M$.

Но это означает, что для всех $x \in M$ выполняется $f(x) > y_N > m$, то есть m не является точной нижней гранью значений f .

Противоречие.

задача

3.79.

Приведите пример полунепрерывной снизу функции на отрезке, не имеющей максимального значения.

Определение полунепрерывности сверху аналогично полунепрерывности снизу:

Определение

3.80.

Функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется полунепрерывной сверху, если в любой точке $x_0 \in M$ выполняется

$$f(x_0) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Эквивалентно, f полунепрерывна сверху, если для всех $y \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in M : f(x) < y\}$$

Открыты. Рассмотрим другой способ описать отклонение функции от непрерывности, на этот раз количественно.

Определение колебания функции

Колебание функции f в точке x_0 — это точная нижняя грань по открытым множествам, содержащим x :

$$\omega(f, x_0) = \inf \left\{ \sup_{x \in U} f(x) - \inf_{x \in U} f(x) : U \ni x \right\}$$

Для отображений между метрическими пространствами $f : M \rightarrow N$ можно обобщить это определение как

$$\omega(f, x_0) = \inf \{ \text{diam } f(U) : U \ni x \}$$

Нижнюю грань в определении можно брать по открытым множествам, а можно только по ε -окрестностям, результат не изменится.

Теорема

Непрерывность отображения между метрическими пространствами $f : M \rightarrow N$ в точке x_0 равносильна тому, что $\omega(f, x_0) = 0$.

Доказательство

Если $\omega(f, x_0) = 0$, то для любого положительного ε найдётся окрестность $U \ni x_0$, для которой

$$\text{diam } f(U) < \varepsilon$$

В частности, это означает, что $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $x \in U$.

Это даёт непрерывность f в точке x_0 .

В обратную сторону, если f непрерывно в точке x_0 , то для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ выполняется в некоторой окрестности $U \ni x_0$, следовательно, выполняется

$$\forall x, x' \in U, \rho(f(x), f(x')) \leq 2\varepsilon \rightarrow \text{diam } f(U) \leq 2\varepsilon$$

что означает $\omega(f, x_0) = 0$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$.

задача

3.83.

докажите, что для любого отображения $f : M \rightarrow N$ между метрическими пространствами функция $\omega(f, x)$ является полунепрерывной сверху.

||

Используйте определение полунепрерывности с использованием неравенства $\omega(f, x_0) < \varepsilon$ и заметьте, что окрестность $U \ni x_0$ также годится в определение $\omega(f, x)$ для любой точки $x \in U$.

||

задача

3.84.

* докажите, что не существует функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывной в рациональных точках, и разрывной в иррациональных точках.

||

Рассмотрите замкнутые множества $\{x : \omega(f, x) \geq 1/n\}$ и аккуратно примените теорему Бэра.

||

6.1.14 Bounded variation, absolute continuity and oscillation

(????????????????????????????????????)

Функции ограниченной вариации, представление функции ограниченной вариации в виде суммы монотонных и ограниченных.

(пока что вставил в подготовку к гармоническому анализу, пока не трогал это.)

6.1.15 Plots of Functions

(??? write that tutorial by Ivanova here)

6.2 Elementary functions

6.2.1 Exponential and logarithm

О применениях этого раздела

(честно, вроде для построения анализа раздел этот нужен, в остальном - плевать, итак хватает нормальных утверждений на все эти случаи. так что пока забиваю на него, при потребности вернусь. тут всё очевидно. тупо потренироваться доказывать можно и всё.)

Неравенство Бернулли

Теорема 13. для $x \geq -1$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Доказательство

для $n = 1$ неравенство обращается в равенство.

Воспользуемся математической индукцией.

Пусть верно для $n - 1$:

$$(1+x)^{n-1} \geq 1+(n-1)x$$

Домножим на $(1+x)$:

$$(1+x)^n \geq (1+(n-1)x)(1+x) = 1+nx+(n-1)x^2 \geq 1+nx,$$

то есть неравенство верно и для n .

По принципу математической индукции это означает, что неравенство верно для всех натуральных n .

(вроде крутизна его в том, что доказывается оно без знаний чего угодно, что дальше развивается. потом уточню, в этом ли его ценность?)

Лемма о о бесконечно малой (!!!!!)

(мб это очень полезно, потом вникну в суть и в док-во!)

Если последовательность (a_n) бесконечно малая, то

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \rightarrow 1$$

Выражение в скобках очевидно положительно для достаточно больших n .

Доказательство

Мы предполагаем, что выполняется $|a_n| < 1$, что действительно верно для достаточно больших n .

Тогда по неравенству Бернулли

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \geq 1 + a_n$$

Для отрицательного a_n эта оценка уже годится для доказательства стремления к 1.

Запишем также неравенство

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{a_n}{n}\right) = 1 - \frac{a_n^2}{n^2} \leq 1$$

из которого следует

$$1 + a_n \leq \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 - a_n}$$

Теперь теорема о двух милиционерах доказывает требуемое.

(потом досмотрю. укажу применения.)

Лемма о возрастании $e_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

При фиксированном $x \in \mathbb{R}$ последовательности $e_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ положительна и возрастает при достаточно больших n .

Доказательство

Ясно, что при достаточно больших n эта величина будет положительна.

Тогда нам достаточно доказать, что при достаточно больших n

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \geq 1$$

Запишем

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1 \end{aligned}$$

используя неравенство Бернулли.

определение экспоненты

Определим экспоненту действительного числа

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

определение корректно, так как по предыдущим леммам последовательность в определении при фиксированном x и достаточно больших n положительна и возрастает.

Следовательно, $\exp x > 0$, но пока не исключено, что при некоторых положительных x окажется, что $\exp x = +\infty$.

Почему такое определение?

Лемма о $\exp x \exp(-x) = 1$

для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\exp x \exp(-x) = 1$$

В частности, значения экспоненты конечны.

Доказательство

Запишем

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \rightarrow 1$$

по лемме 1.65, так как $\frac{x^2}{n} \rightarrow 0$.

Переходя к пределу, получаем требуемое.

Бесконечность $\exp x$ при положительной $\exp(-x)$ сделала бы это выражение бесконечным, что неверно.

Лемма о $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$$

Доказательство

Запишем, используя предыдущую лемму:

$$\begin{aligned} \frac{\exp(x+y)}{\exp x \cdot \exp y} &= \exp(x + y) \exp(-x) \exp(-y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(x+y)^2}{n^2} + \frac{xy}{n^2} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)\right)^n \rightarrow 1 \end{aligned}$$

по лемме 1.65, так как $-\frac{(x+y)^2}{n} + \frac{xy}{n} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right) \rightarrow 0$.

Лемма об очевидной оценке экспоненты

При любом x

$$\exp x \geq 1 + x.$$

и при любом $x < 1$

$$\exp x \leq \frac{1}{1 - x}$$

Доказательство

Первое неравенство следует из неравенства Бернулли, второе следует из первого заменой $x \mapsto -x$.

Лемма о Монотонность экспоненты

Если $x < y$, то $\exp x < \exp y$.

Доказательство

$$\exp y - \exp x = \exp x \cdot (\exp(y - x) - 1) \geq \exp x \cdot (y - x) > 0$$

Лемма о Непрерывность экспоненты

Если $x_n \rightarrow x_0$, то $\exp x_n \rightarrow \exp x_0$.

Доказательство

Используя уже установленные свойства экспоненты, запишем

$$\exp x_n - \exp x_0 = \exp x_0 \cdot (\exp(x_n - x_0) - 1).$$

Отбросив константу $\exp x_0$, можем оценить

$$x_n - x_0 \leq \exp(x_n - x_0) - 1 \leq \frac{x_n - x_0}{1 - x_n + x_0}.$$

В пределе слева и справа получается нуль, поэтому по теореме о двух милиционерах посередине в пределе тоже будет нуль.

Замечательный предел с экспонентой (?!!!!!!)

Если $x_n \rightarrow 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp x_n - 1}{x_n} = 1$$

Доказательство

В доказательстве предыдущей леммы уже установлены неравенства. Для $x_n \in (0, 1)$ выполняется $1 \leq \frac{\exp x_n - 1}{x_n} \leq \frac{1}{1 - x_n}$ и для $x_n \in (-1, 0)$

$$\frac{1}{1 - x_n} \leq \frac{\exp x_n - 1}{x_n} \leq 1$$

из которых следует требуемое в пределе по теореме о двух милиционерах.

Определение логарифма

Теперь мы определим обратную функцию к экспоненте.

На самом деле она существует по общей теореме об обратной функции, однако можно привести и прямую конструкцию.

для положительных x мы знаем, что $\exp x \geq 1 + x$ и эта величина растёт неограниченно при росте x .

для отрицательных x мы знаем, что $\exp x \leq \frac{1}{1 - x}$ и эта величина может стать сколь угодно близкой к нулю при больших по модулю x .

Тогда уравнение

$$\exp x = y$$

относительно x для положительного y можно решать методом половинного деления.

Из предыдущих замечаний следует, что найдутся $a, b \in \mathbb{R}$, такие что $\exp a < y < \exp b$.

Далее можно делить отрезок пополам и выбирать одну из половин так, чтобы всегда выполнялось неравенство

$$\exp a_n \leq y \leq \exp b_n$$

В пределе $a_n, b_n \rightarrow x$ и используя свойство непрерывности экспоненты, мы получаем в пределе

$$\exp x \leq y \leq \exp x$$

то есть $\exp x = y$.

В дальнейшем это будет обобщено в виде «теоремы о промежуточном значении непрерывных функций», но мы привели это рассуждение на случай, если читателю хочется как можно быстрее начать работать с экспонентой и логарифмом.

определение и свойства натурального логарифма

Для положительного y единственное x , такое что $\exp x = y$ называется натуральным логарифмом y и обозначается $\ln y$.

Из свойств экспоненты следуют свойства натурального логарифма:

$$\begin{aligned}\ln(xy) &= \ln x + \ln y, \\ \ln \frac{1}{x} &= -\ln x, \ln(1+x) \leq x \\ |x| < 1 &\rightarrow \ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}, \\ 0 < x < y &\rightarrow \ln x < \ln y\end{aligned}$$

Непрерывность логарифма

Если $x_n \rightarrow x_0 > 0$, $\ln x_n \rightarrow \ln x_0$.

Доказательство

Используя уже установленные свойства логарифма, запишем

$$\ln x_n - \ln x_0 = \ln \frac{x_n}{x_0}$$

Мы знаем, что $q_n = \frac{x_n}{x_0}$ стремится к 1, тогда для достаточно больших n будет $|q_n| < 2$ и по неравенствам для логарифма мы получим

$$\frac{q_n - 1}{q_n} \leq \ln q_n \leq q_n - 1$$

В пределе слева и справа получается нуль, поэтому по теореме о двух милиционерах посередине в пределе тоже будет нуль.

определение степени числа

Определим для $a > 0$ и $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Можно проверить, что $a^1 = a$ и тогда из свойств экспоненты следует, что a^n в смысле нового определения равно a^n в смысле школьного определения.

Число

$$\exp 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

обычно обозначается e (число Эйлера) и тогда можно написать покороче

$$\exp x = e^x$$

задача $a^{xy} = (a^x)^y$

Проверьте тождество $a^{xy} = (a^x)^y$.

6.2.2 Trigonometric functions and curves

(потом задумаясь, почему так определяем, пока что плевать.)

определение Тригонометрические функции

определение тригонометрических функций фактически сводится к определению понятия «угол поворота», которое мы будем определять через понятие «длина дуги окружности».

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, на которой расстояние между двумя точками определено формулой:

$$\rho((x', y'), (x'', y'')) = \left((x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 \right)^{1/2}.$$

Позже будет дано более общее определение евклидова пространства и расстояния в нём с доказательством его свойств, однако нужные в этом разделе свойства расстояния можно проверить напрямую.

На плоскости рассмотрим окружность

$$\mathbb{S} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Можно заметить исходя из свойств возведения в степень, что для всякого $x \in (-1, 1)$ найдётся два $y = \pm(1 - x^2)^{1/2}$, удовлетворяющих уравнению окружности, а для $x \in \{0, 1\}$ найдётся только один $y = 0$.

Аналогично будет если мы поменяем местами x на y . Можно убедиться, что при $a^2 + b^2 = 1$ линейное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= ax - by \\ y' &= bx + ay \end{aligned}$$

не меняет расстояние между точками на плоскости и переводит $\mathbb{S}$ в себя.

Назовём это преобразование вращением.

Выделив на окружности точку $E = (1, 0)$ мы можем заметить, что она переходит в точку (a, b) , и таким образом вращение R может перевести любую точку окружности в любую другую и оно полностью определяется значением $R(E)$.

Иначе говоря, множество всех вращений находится во взаимно однозначном соответствии с окружностью $\mathbb{S}$, что мы и будем далее подразумевать.

для двух разных точек на окружности $A, B \in \mathbb{S}$ рассмотрим уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\begin{aligned} \Delta y \cdot x - \Delta x \cdot y &= d, \\ \text{где } \Delta x &= x(B) - x(A), \Delta y = y(B) - y(A). \text{ У условия} \\ \Delta y \cdot x - \Delta x \cdot y &\geq d, x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

тогда будут определять ориентированную дугу окружности $\widehat{AB}$ с концами A и B .

Неформально говоря, эта дуга идёт «против часовой стрелки» по окружности от A до B .

Если $A = B$, то мы считаем дугу $\widehat{AB}$ вырожденной и состоящей из одной точки.

Мы хотим определить длину дуги окружности.

Рассмотрим несколько точек

$$A = C_1, \dots, C_N = B \in \widehat{AB}$$

идущих «против часовой стрелки» в том смысле, что дуги $\widehat{C_1C_2}, \widehat{C_2C_3}, \dots, \widehat{C_{N-1}C_N}$ лежат в $\widehat{AB}$ и пересекаются только по своим концам.

Тогда отрезки $C_1C_2, C_2C_3, \dots, C_{N-1}C_N$ составляют ломаную P , вписанную в дугу.

Эта ломаная лежит (не строго) с одной стороны от любой прямой C_iC_{i+1} , являющейся продолжением её отрезка, то есть является вьизуклой.

Действительно, эта прямая пересекает окружность в двух точках C_i и C_{i+1} , дуга $\widehat{C_iC_{i+1}}$ лежит по одну сторону от прямой, а другие вершины ломаные - по другую сторону от прямой.

определение длины

Длина $\ell(P)$ для ломаной $P = C_1C_2\dots C_N$ - это сумма расстояний $|C_1C_2| + |C_2C_3| + \dots + |C_{N-1}C_N|$

Определение

79.

Длина дуги $\widehat{AB}$ - это точная верхняя грань

$$\ell(\widehat{AB}) = \sup\{\ell(P) : P \text{ вписана в } \widehat{AB}\}$$

Лемма о Аддитивность длины дуги окружности

Если дуги $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$ пересекаются только в точке B , то

$$\ell(\widehat{AC}) = \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC}).$$

Доказательство

Рассматривая ломаные, вписанные в большую дугу $\widehat{AC}$, мы всегда можем добавить к их вершинам точку B в подходящем по порядку месте, длина ломаной при этом может только увеличиться по неравенству треугольника.

Такие ломаные P разбиваются на две ломаные: P' вписанная в $\widehat{AB}$ и P'' вписанная в $\widehat{BC}$, причём

$$\ell(P) = \ell(P') + \ell(P'')$$

Предельный переход тогда даст неравенство

$$\ell(\widehat{AC}) \leq \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC})$$

Наоборот из двух ломаных, вписанных в $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$, мы можем собрать в правильном порядке вершин одну, вписанную в $\widehat{AC}$ с выполнением того же равенства.

Из этого равенства мы получим в пределе неравенство

$$\ell(\widehat{AC}) \geq \ell(\widehat{AB}) + \ell(\widehat{BC})$$

Длина дуги у нас корректно определена, аддитивна, и по определению инвариантна относительно вращений.

Но нам нужно установить её конечность, ведь точная верхняя грань могла оказаться равной $+\infty$.

Лемма

Если выпуклая ломаная P содержится в треугольнике $\triangle ABC$ и идёт из вершины A в вершину B , то $\ell(P) \leq |AC| + |BC|$

Доказательство

Пусть первый из отрезков ломаной — AC_2 .

Если он лежит на стороне AC , то замена A на C_2 уменьшает $\ell(P)$ и $|AC|$ на одну и ту же величину $|AC_2|$ и сводит задачу к рассмотрению ломаной с меньшим количеством отрезков, что мы можем считать верным по индукции.

Иначе пусть луч AC_2 пересекает сторону CB в точке C' .

для той же ломаной P и треугольника $AC'B$ мы находимся в условиях уже рассмотренной ситуации из предыдущего абзаца и можем уменьшить число отрезков ломаной, поэтому считаем

$$\ell(P) \leq |AC'| + |C'B| \leq |AC| + |CC'| + |C'B| = |AC| + |BC|$$

где мы использовали неравенство треугольника и аддитивность длины отрезка.

Лемма

82.

Если касательные к окружности в точках $A \neq B$ пересекаются в точке C , которая лежит с той же стороны от прямой AB , что и дуга $\widehat{AB}$, то

$$|AB| < \ell(\widehat{AB}) < |AC| + |CB|$$

Доказательство

Нестрогие неравенства получаются предельным переходом из предыдущей леммы.

На самом деле они строгие, так как мы можем разбить дугу на две части, сделать такую же оценку для каждой части и итоговые оценки немного улучшатся. Теперь определим π как длину верхней полуокружности $\{(x, y) \in \mathbb{S} : y \geq 0\}$, длина нижней полуокружности $\{(x, y) \in \mathbb{S} : y \leq 0\}$ будет такой же, так как отображение $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ переводит одну половину в другую, не меняя расстояния.

Вписывание в окружность правильного шестиугольника со сторонами 1 и описывание вокруг неё квадрата со стороной 2 позволяют заключить (с использованием аддитивности длины дуги и леммы 1.82), что $3 < \pi < 4$.

Далее мы часто будем использовать обозначение для $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n : n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$$

Лемма о значении длин дуг на окружности

Длины дуг на окружности принимают все значения $t \in [0, 2\pi)$.

Доказательство

Ясно, что половина окружности имеет длину π .

Далее всякую дугу мы можем поделить (серединным перпендикуляром к её концам) на две части, переводящиеся друг в друга движением и значит имеющим равные длины.

Значит найдутся дуги длин $2^{-k}\pi$ для любого $k \in \mathbb{Z}^+$.

Из таких дуг мы можем составить по аддитивности мугу любой длины вида $m2^{-k}\pi$.

Теперь зафиксируем число $t \in [0, 2\pi)$.

Рассмотрим последовательность вложенных отрезков $[a_k, b_k] \ni t$, концы которых имеют вид $m2^{-k}\pi$, для этого достаточно для каж-

Аого k брать $m = \lfloor 2^k t / \pi \rfloor$ и $m = \lfloor 2^k t / \pi \rfloor + 1$ соответственно.

На окружности зафиксируем точку $E = (1, 0)$ и отложим от неё дуги $\widehat{EA_k}$ и $\widehat{EB_k}$ длинами a_k и b_k соответственно.

Мы знаем, что $\ell(\widehat{A_k B_k}) = 2^{-k}\pi \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Кроме того, при $n > k$ мы будем иметь неравенства

$$\ell(\widehat{A_k A_n}), \ell(\widehat{B_k B_n}) \leq 2^{-k} \pi.$$

лемма 1.82 тогда даёт неравенства

$$|A_k B_k|, |A_k A_n|, |B_k B_n| < 2^{-k} \pi$$

при $n > k$.

Тогда проекции точек A_k и B_k на ось x образуют фундаментальную последовательность, аналогично и с их проекциями на ось y .

Беря соответствующие пределы координат, мы получим точку C , которая содержится во всех дугах $\widehat{A_k B_k}$.

По аддитивности длина дуги $\widehat{EC}$ обязана быть равна t .

определение вращения

Предыдущая лемма оправдывает следующее определение.

Для всякого $t \in [0, 2\pi)$ определим R_t как вращение, переводящее E в точку $R_t(E)$, такую что $\ell(\widehat{ER_t(E)}) = t$.

Для остальных t определим R_t как R_s при $s = t - 2\pi \lfloor \frac{t}{2\pi} \rfloor$. R_t определено единственным образом, так как при наличии двух равных по длине дуг $\widehat{ER_t(E)}$ и $\widehat{ER'_t(E)}$ их концы $R_t(E)$ и $R'_t(E)$ обязаны совпасть, иначе это противоречило бы аддитивности длины дуги.

Из аддитивности и инвариантности относительно вращений длины дуги следуют равенства $R_t \circ R_{-t} = \text{id}$, $R_{t+s} = R_t \circ R_s$.

определение $\cos t$ и $\sin t$

Определим $\cos t$ и $\sin t$ как коэффициенты линейного преобразования R_t :

$$\begin{aligned} x' &= \cos t \cdot x - \sin t \cdot y \\ y' &= \sin t \cdot x + \cos t \cdot y \end{aligned}$$

Из равенств $R_t \circ R_{-t} = \text{id}$, $R_{t+s} = R_t \circ R_s$ соответственно выводятся формулы:

$$\begin{aligned} \cos(-t) &= \cos t \\ \sin(-t) &= -\sin t \\ \cos(t+s) &= \cos t \cdot \cos s - \sin t \cdot \sin s \\ \sin(t+s) &= \sin t \cdot \cos s + \cos t \cdot \sin s \end{aligned}$$

Определим стандартно $\text{tg } t = \frac{\sin t}{\cos t}$ и $\text{ctg } t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

Лемма о $|\sin x| \leq |x|$

для любого x выполняется

$$|\sin x| \leq |x|$$

с равенством только при $x = 0$.

для любого $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ выполняется

$$|\text{tg } x| \geq |x|$$

с равенством только при $x = 0$.

Доказательство

При $t \in (0, \pi/2)$ применим лемму 1.82 к точкам $A = (\cos t, -\sin t)$ и $B = (\cos t, \sin t)$ и получим неравенства между положительными числами

$$2 \sin x < 2x < 2 \operatorname{tg} x$$

то есть

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Из нечётности синуса и тангенса они продолжаются на $(-\pi/2, \pi/2)$ с равенством только в нуле.

Неравенство для синуса за пределами интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ следует из того, что $\pi/2 > 1$.

Неравенства для разницы синусов и косинусов (??)

Докажите, что для всяких $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

Определение

Обратные тригонометрические функции определить еще проще:

для $x \in [-1, 1]$ рассмотрим точку окружности $C_x = (x, (1 - x^2)^{1/2})$.

Положим $\arccos x = \ell(\widehat{EC_x})$.

Определение

89.

для $y \in [-1, 1]$ рассмотрим точку окружности $S_y = ((1 - y^2)^{1/2}, y)$.

Положим $\arcsin y = \ell(\widehat{ES_y})$ при неотрицательном y и $\arcsin y = -\ell(\widehat{S_y E})$ для отрицательных y .

Определение

90.

для $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим точку окружности

$$T_t = \left(\frac{1}{(1 + t^2)^{1/2}}, \frac{t}{(1 + t^2)^{1/2}} \right)$$

Положим $\operatorname{arctg} t = \ell(\widehat{ET_t})$ при неотрицательном t и $\operatorname{arctg} t = -\ell(\widehat{T_t E})$ для отрицательных t .

Определение

91.

для $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим точку окружности

$$T_t = \left(\frac{t}{(1 + t^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1 + t^2)^{1/2}} \right)$$

Положим $\operatorname{arcsctg} t = \ell(\widehat{ET_t})$. По определению легко проверить, что при $t \in [0, \pi]$ выполняется

$$\arccos(\cos t) = t$$

при $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ выполняется

$$\arcsin(\sin t) = t$$

при $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ выполняется

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t$$

и при $t \in (0, \pi)$ выполняется

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t$$

6.3 Functions of several variables

(см. Бесов нпр.)

6.3.1 Limit of a function of several variables

6.3.2 Functions continuous at a point

6.3.3 Functions continuous on sets

6.3.4 Polynomials

(про них соберу теорию)

Выражение для $(a + b + c + d)^n$

What is the expansion for $(a + b + c + d)^4$? You might consider using the multinomial formula:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{i=1}^m x_i^{k_i},$$

where

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

is a multinomial coefficient.

Выражение для $(a + b + c + d)^4$

In the example given, $n = m = 4$ and $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, \&x_4 = d$. To calculate the coefficient of, say, a^2bc , we need only compute $\binom{4}{2, 1, 1, 0} = \frac{4!}{2!1!1!0!}$, which gives 12. Note that this also is the same as the coefficient of bc^2d, abd^2 , and any other product of the x_i 's whose exponents form the multiset $\{0, 1, 1, 2\}$. The implication is that the problem reduces to finding the multinomial coefficient corresponding to each possible multiset of four non-negative

integers whose sum is 4:

$$\begin{aligned} \{0, 0, 0, 4\} &\text{ corresponds to } \binom{4}{0, 0, 0, 4} = \frac{4!}{0!0!0!4!} = 1 \\ \{0, 0, 1, 3\} &\text{ corresponds to } \binom{4}{0, 0, 1, 3} = \frac{4!}{0!0!1!3!} = 4 \\ \{0, 0, 2, 2\} &\text{ corresponds to } \binom{4}{0, 0, 2, 2} = \frac{4!}{0!0!2!2!} = 6 \\ \{0, 1, 1, 2\} &\text{ corresponds to } \binom{4}{0, 1, 1, 2} = \frac{4!}{0!1!1!2!} = 12 \\ \{1, 1, 1, 1\} &\text{ corresponds to } \binom{4}{1, 1, 1, 1} = \frac{4!}{1!1!1!1!} = 24 \end{aligned}$$

6.4 Fundamentals of smooth mappings

(снова по еву, пропишу это потом!)

6.4.1 Differentiable mappings of open subsets of $\mathbb{R}^n$

Определим понятие дифференцируемости отображений, аналогичное дифференцируемости функций одной переменной.

дифференцируемое отображение в точке

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ - открытое множество.

Отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0$$

где $Df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ является линейным отображением и называется производной f в точке x_0 .

По сравнению с определением производной функции одной переменной здесь производная - это не число, а линейное отображение.

Впрочем, старому определению это не противоречит, так как линейное отображение $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является умножением на некоторое действительное число, которое и есть производная в старом смысле.

Определение непрерывнодифференцируемого отображения

В условиях предыдущего определения f называется непрерывнодифференцируемым на U если оно дифференцируемо в каждой точке и Df_x непрерывно зависит от x .

Лемма

6.3.

для всякого линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ найдётся число $\|A\|$ такое что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|.$$

Доказательство

Заметим, что сумму модулей координат Ax можно оценить как сумму модулей матричных элементов A , умноженную на максимальный модуль координаты x .

Так как длины вектора не больше суммы модулей его координат и не меньше максимального модуля координаты, то сумма модулей матричных элементов A сходится в качестве $\|A\|$.

Обычно за норму линейного отображения $\|A\|$ берётся минимальное число, которое гарантирует неравенство

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$$

для всех x .

Обе части неравенства умножаются на $|\lambda|$ при умножении x на число λ , поэтому это неравенство достаточно проверить, например, на единичной сфере $\{x: |x| = 1\}$.

Тогда из соображений компактности видно, что оптимальное значение $\|A\|_B$ неравенстве достигается.

Задача

6.4.

Найдите $\|A\|$ для самосопряжённого оператора $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и докажите, что для любого линейного отображения $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ выполняется

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A^*\|^2.$$

||

Приведите в некотором ортонормированном базисе самосопряжённый оператор A к диагональному виду, изучите также максимум выражения (x, Ax) по единичным векторам x для самосопряжённого A .

||

С учётом существования нормы линейной части, для дифференцируемого отображения верна оценка

$$|f(x) - f(x_0)| = O(|x - x_0|)$$

при $x \rightarrow x_0$ и мы получаем: Следствие 6.5.

Если отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x_0 \in U$, то оно непрерывно в точке x_0 .

Следующее свойство является главным инструментом практического вычисления производных отображений:

Дифференцирование композиции

Если f дифференцируемо в точке x_0 , а g дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$.

Доказательство

Запишем

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(y_0) + Dg_{y_0}(f(x) - f(x_0)) + o(|f(x) - f(x_0)|) = \\ &= g(y_0) + Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(x - x_0) + Dg_{y_0}o(|x - x_0|) + o(|Df_{x_0}(x - x_0)|) + o(o(|x - x_0|)) = \\ &= g(y_0) + Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \end{aligned}$$

используя оценку из предыдущей леммы $|Ax| = O(|x|)$.

Для функций $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ мы будем обозначать $Df_x = df_x$ и называть это дифференциал функции.

По определению это линейная форма на $\mathbb{R}^n$.

Производная по направлению

Производной функции f по направлению $v \in \mathbb{R}^n$ в точке x называется

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Лемма

6.8.

Если функция дифференцируема в точке x , то в этой точке

$$\frac{\partial f}{\partial v} = df_x(v)$$

Доказательство

Подставим $x + tv$ в определение дифференциала

$$f(x + tv) - f(x) = df_x(tv) + o(|t||v|) = t(df_x(v) + o(1)).$$

Поделив на t и перейдя к пределу, мы получим требуемое.

Без формул можно было сказать, что производная по направлению - это производная композиции нашей функции и параметризации куска прямой.

Предыдущая лемма, в частности, даёт выражение частных производных, то есть производных по направлениям базисных векторов $e_1, \dots, e_n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x)}{t}$$

через дифференциал функции.

Получается, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = df_x(e_i)$$

то есть частные производные оказываются равными координатам дифференциала как линейного отображения.

В итоге дифференциал функции в точке можно выразить как

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

где $dx_1, \dots, dx_n$ - дифференциалы координатных функций, образующие Авогавственный базис к базису $e_1, \dots, e_n$.

Задача

6.9.

Приведите пример функции двух переменных, определённой в окрестности нуля и имеющей производные по всем направлениям в нуле, но не являющейся дифференцируемой в нуле.

||

На самом деле такая функция даже не обязана быть непрерывной в нуле.

||

Для отображений в $\mathbb{R}^m$ дифференцируемость на самом деле означает дифференцируемость каждой из его координат $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ и производная Df как линейное отображение на самом деле представлена матрицей из частных производных $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$.

обратную сторону, наличие частных производных может и не означать дифференцируемости, просто потому, что частные производные говорят только об изменении $f(x)$ при движении x вдоль координатных осей.

Приведём некоторые достаточные условия для практической проверки дифференцируемости отображения в терминах частных производных:

Теорема о непрерывном дифференцировании отображения в $\mathbb{R}^m$ (!?!?!?)

(посмотрю потом!!!)

Если отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ из открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в координатах как

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, m$$

и функции f_i имеют непрерывные частные производные на U , то f непрерывно дифференцируемо на U .

Доказательство

Достаточно доказать для $m = 1$, то есть для одной функции.

Фиксируем точку $x \in U$ и рассмотрим другую точку ξ в некоторой окрестности $U_\delta(x) \subseteq U$.

Тогда от x до ξ можно дойти, двигаясь вдоль координатных осей, что даёт формулу

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x) = & f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) + \\ & + f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) - f(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, x_{n-1}, x_n) + \\ & + \dots + \\ & + f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Применим теорему о среднем Лагранжа в каждой строке

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x) = & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta_n)(\xi_n - x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\xi_1, \dots, \eta_{n-1}, x_n)(\xi_{n-1} - x_{n-1}) + \dots \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\eta_1, x_2, \dots, x_n)(\xi_1 - x_1), \end{aligned}$$

для некоторых η_i между x_i и ξ_i .

Каждая частная производная берётся в некоторой точке $U_\delta(x)$, поэтому при $\delta \rightarrow 0$ из её непрерывности можно записать

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x) = & \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + o(1) \right) (\xi_n - x_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x) + o(1) \right) (\xi_{n-1} - x_{n-1}) + \\ & + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + o(1) \right) (\xi_1 - x_1), \end{aligned}$$

что уже означает непрерывность по определению, выражения $o(1)(\xi_k - x_k)$ в сумме. Отображения получается непрерывно дифференцируемым, так как Df_x , представленное матрицей с компонентами $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, непрерывно зависит от x .

Если координатные функции отображения можно дифференцировать по произвольным x_i не менее k раз и производные до k -го порядка включительно оказываются непрерывными, то отображение будет называться k раз непрерывно дифференцируемым, или класса C^k .

Если k может быть произвольно большим, то отображение будет называться бесконечно гладким или класса C^∞ .

Задача

6.11.

Приведите пример, показывающий, что существование всех частных производных, скажем в окрестности нуля для функции двух переменных, не гарантирует её дифференцируемости в нуле.

6.4.2 Convolutions and approximation of functions by infinitely smooth ones

Помимо приближения функций с помощью теоремы Стоуна-Вейерштрасса 4.69 или приближения в среднем элементарными по теореме 5.60 иногда бывает полезно иметь более контролируемое приближение функций и отображений.

В этом разделе мы рассмотрим соответствующие полезные приёмы приближения функций.

Определим понятие свёртки функций:

$$fg(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)dt.$$

Конечно, в определении свёртки остаётся вопрос о существовании интеграла.

Можно заметить, что если одна функция ограничена, а другая имеет конечный интеграл, то свёртка также ограничена, кроме того: всюду и выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |fg|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g|dx$$

и равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} fgdx = \int_{\mathbb{R}^n} fdx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} gdx$$

Доказательство

Функция $f(y)g(x)$ измерима по Лебегу и интеграл её модуля равен произведению интегралов модулей f и g по теореме Фубини.

Тогда выражение

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|dtdx$$

также равно произведению интегралов модулей f и g , так как отличается от $|f(y)g(x)|$ линейной заменой переменных с единичным детерминантом.

Тогда очевидно, что интегралы в неравенстве

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|dt$$

определены для почти всех x и требуемое неравенство получается интегрированием этого неравенства по x .

Последнее равенство в теореме просто следует из теоремы Фубини и линейной замены $x - t = y$.

Ассоциативность свёртки

докажите

$$f * (gh) = (fg)h,$$

для функций с конечным интегралом.

||

Выпишите интеграл, который повторным интегрированием сводится к двум разным порядкам свёртки.

||

Далее

Предположим, что в свёртке функция g интегрируема, а f ограничена, так же как и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Тогда возможно дифференцирование под знаком интеграла по соответствующей теореме и мы получаем

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} g,$$

то есть при дифференцировании свёртки надо дифференцировать одну из функций, и мы будем часто этим пользоваться.

Функции для свертки

Для содержательного применения свёртки (и для построения гладких разбиений единицы далее) нам потребуются специфические бесконечно гладкие функции.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$$

Она бесконечно дифференцируема везде, кроме быть может точки 0.

Всякая её производная справа от нуля имеет вид $P(1/x)e^{-1/x}$, где P - многочлен.

Отсюда следует, что предел любой её производной в нуле равен нулю.

Тогда по правилу Лопиталя

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n+1)}(x)}{1} = 0$$

и функция f оказывается бесконечно дифференцируемой в нуле, то есть бесконечно гладкой на всей прямой.

Тогда функция

$$\varphi(x) = f(x+1)f(1-x)$$

будет бесконечно гладкой, и будет отличной от нуля только на интервале $(-1, 1)$, на котором она положительна.

(????????????????7)

Лемма

6.17.

для всякого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Для всяких $\varepsilon > \delta > 0$ существует бесконечно гладкая функция $\psi_{\varepsilon, \delta} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, отличная от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ тождественно равная 1 в $U_\delta(0)$.

Доказательство

В первом случае сходится функция вида

$$\varphi_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = A \varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right) \dots \varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right)$$

для ранее построенной функции одной переменной φ и некоторой константы A .

Во втором случае рассмотрим сначала функцию одной переменной

$$\psi(x) = B \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

где константу выберем так, чтобы $\psi(x) \equiv 0$ при $x \leq -1$ и $\psi(x) \equiv 1$ при $x \geq 1$.

Тогда достаточно положить

$$\psi_{\varepsilon, \delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta + \varepsilon - 2|x|}{\varepsilon - \delta}\right).$$

Сворачивая с такими функциями, мы можем приближать непрерывную функцию бесконечно гладкими:

Теорема о бесконечной дифференцируемости свертки с функцией с интегралом равным 1 на компакте

6.18.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leq 1$ и пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Положим

$$\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx),$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и φ_k отлична от нуля только при $|x| \leq 1/k$.

Теперь для непрерывной $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определим свёртку

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) \varphi_k(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi_k(x-t) dt.$$

Функции f_k бесконечно дифференцируемые и $f_k \rightarrow f$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^n$.

Доказательство

Выпишем разность

$$f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x)) \varphi_k(t) dt.$$

Пусть f равномерно непрерывна в докрестности компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и пусть $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$ в этой окрестности.

Выберем k настолько большим, чтобы $1/k < \delta$.

Тогда в интеграле $\varphi_k(t)$ отлична от нуля только при $|t| < \delta$, и тогда $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$, при $x \in K$.

Тогда при $x \in K$ верна оценка

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx = \varepsilon$$

Это доказывает равномерную сходимость на компактах.

Дифференцируемость можно доказать, используя дифференцирование интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi_k(x-t) dt$$

по параметру и теорему 5.73.

Заметим, что производная при $x \in K$ будет зависеть только от значений f в $1/k$ -окрестности K , то есть f можно считать интегрируемой при дифференцировании по параметру, что позволяет применить теорему.

Другими словами: заметим, что выражение под интегралом обращается в нуль за пределами шара $B_x(1/k)$, а при его дифференцировании в точке $x = x_0$ можно считать $|x - x_0| < 2/k$ и ограничить интегрирование шаром $B_{x_0}(2/k)$. Тогда теорема 5.105 применима, потому что до и после дифференцирования интегрируются ограниченные функции по ограниченному множеству.

Теорема

6.21.

В условиях предыдущей теоремы, если исходная функция f имеет непрерывные производные до m -го порядка, то производные f_k до m -го порядка равномерно на компактах сходятся к соответствующим производным f .

Доказательство

Можно продифференцировать выражение

$$f \varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) \varphi_k(t) dt$$

по нескольким x_i , используя каждый раз дифференцирование под знаком интеграла с помощью теоремы об ограниченной сходимости, как было объяснено выше.

Тогда мы получим

$$\frac{\partial^m (f \varphi_k)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \varphi_k$$

Таким образом, последовательность производных свёртки является последовательностью свёрток производной f с теми же функциями φ_k .

А значит для этой последовательности тоже имеет место верна равномерная сходимость к производной f .

При практическом применении вышеуказанных теорем полезно заметить, что на самом деле для равномерной сходимости на конкретном компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ достаточно определённости f и её производных (если мы их используем) на некоторой окрестности K , так как в силу размера носителя φ_k значения свёртки $f\varphi_k$ на K будут зависеть только от значений f в $1/k$ -окрестности K .

Теорема о сходимости производных

6.20.

Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечный интеграл Лебега.

Тогда свёртки $f\varphi_k$ с функциями из теоремы 18 сколь угодно близко приближают f в среднем.

Доказательство

Возьмём $\varepsilon > 0$ и представим по теореме 5.60

$$f = g + h$$

где g - элементарно ступенчатая и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| dx < \varepsilon.$$

Тогда по теореме 6.15

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h\varphi_k| dx < \varepsilon$$

Это значит, что если окажется

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g - g\varphi_k| dx < \varepsilon,$$

то будет выполняться

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f\varphi_k| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g - g\varphi_k| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h\varphi_k| dx < 3\varepsilon$$

Таким образом, достаточно доказать утверждение для элементарно ступенчатой g .

Раскадывая g в сумму характеристических функций параллелепипеда с некоторыми коэффициентами, можно видеть, что достаточно доказать утверждение для одной характеристической функции параллелепипеда χ_P .

Но разность $\chi_P - \chi_P\varphi_k$ будет отлична от нуля только в $1/k$ -окрестности ∂P и будет там по модулю не более 1, то есть после интегрирования модуля разности мы получим не более $\mu(U_{1/k}(\partial P))$.

Прямым вычислением можно убедиться, что эта мера стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Задача

6.21.

докажите, что в условиях предыдущей задачи $f\varphi_k \rightarrow f$ поточечно почти всюду.

||

Используйте теорему об усреднении 5.102 в одномерном случае и докажите и используйте её многомерный аналог.

||

6.4.3 Continuously differentiable mappings and curvilinear coordinate systems

Смысл дифференциальной геометрии заключается в изучении объектов, определённых на открытых подмножествах $U \subseteq \mathbb{R}^n$ инвариантно относительно криволинейных замен координат, то есть таких бесконечно гладких отображений $\varphi : U \rightarrow V$, что обратное φ^{-1} определено и тоже бесконечно гладко.

Математически правильно такие отображения называть диффеоморфизмами открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$, но мы части будем называть их менее формально криволинейными заменами координат.

На практике обычно не требуется бесконечная гладкость, а требуется только конечное число производных координатных функций отображения, которое можно определить в каждом конкретном случае; когда мы будем говорить о бесконечной гладкости, мы будем называть её просто гладкость.

Мы сейчас установим стандартные инструменты, необходимые для работы с криволинейными заменами координат. Для начала установим лемму, которая записывает приращение непрерывно дифференцируемого отображения как переменный линейный оператор от приращения аргумента, она нам понадобится в этом разделе и далее.

Лемма

6.22.

Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ выпукло.

Для непрерывно дифференцируемого $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ найдётся непрерывное $A : U \times U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (тут $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - линейные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ с топологией пространства матриц $\mathbb{R}^{nm}$), такое что для любых $x', x'' \in U$

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = A(x', x'')(x'' - x')$$

и $A(x, x) = D\varphi_x$.

(???? топология пространства матриц)

То есть просто есть производные для нормальных отображений функций многих переменных.

Доказательство

Запишем формулу Ньютона- Лейбница (интеграл от векторнозначной функции можно понимать покоординатно)

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = \int_0^1 \frac{\partial \varphi((1-s)x' + sx'')}{\partial s} ds = \int_0^1 D\varphi_{(1-s)x' + sx''}(x'' - x') ds$$

так что достаточно положить (интеграл от матричнозначной функции можно понимать по координатам)

$$A(x', x'') = \int_0^1 D\varphi_{(1-s)x' + sx''} ds.$$

Непрерывность A следует из равномерной непрерывности подынтегрального выражения по переменным x' и x'' , рассматриваемым как параметры, меняющиеся в рамках некоторого компакта $K \subset U \times U$, содержащего маленькую окрестность данной пары (x', x'') .

При изменении x' и x'' не более чем на $\delta > 0$ из равномерной непрерывности значение под интегралом будет меняться не более чем на $\varepsilon > 0$, а значит и сам интеграл будет меняться не более чем на ε . При $x' = x'' = x$ из явной формулы мы будем иметь

$$A(x, x) = D\varphi_x$$

О применениях

(!!! на нее много отсылок идет, пока не шарю, потом укажу!!!)

Задача

6.23.

докажите, что если у непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ выпуклой области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ производная $D\varphi$ в каждой точке является симметричной положительно определённой матрицей, то φ инъективно.

||

Посмотрите, какое получается $A(x', x'')$ в доказательстве леммы 6.22.

||

Теорема об обратном отображении

Если отображение $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x и его дифференциал $D\varphi_x$ является невырожденным линейным преобразованием, то это отображение взаимно однозначно отображает некоторую окрестность $V \ni x$ на окрестность $W \ni y$, где $y = \varphi(x)$, и обратное отображение $\varphi^{-1}: W \rightarrow V$ тоже непрерывно дифференцируемо.

Идея доказательства (!!?)

(?? пока вопрос. почему через сжимающее отображение действуем?)

Доказательство

Без ограничения общности будем считать, что мы работаем в окрестности точки $x = 0$ и $y = \varphi(x) = 0$.

Заменив φ на его композицию с линейным отображением $D\varphi_0^{-1}$, будем считать, что $D\varphi$ в нуле является единичным линейным преобразованием, запишем тогда

$$\varphi(x) = x + \alpha(x).$$

Тогда $D\alpha = D\varphi - \text{id}$ в нуле является нулевым линейным оператором, а в некоторой δ -окрестности нуля настолько мал, что

$$|D\alpha(v)| \leq \|D\alpha\| \cdot |v| \leq 1/2|v|.$$

Тогда в этой δ -окрестности нуля у нас окажется выполненным (с формулой из леммы 6.22)

$$|\alpha(x'') - \alpha(x')| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \alpha((1-t)x' + tx'') dt \right| = \left| \int_0^1 D\alpha_{(1-t)x' + tx''} (x'' - x') dt \right| \leq 1/2 |x'' - x'|.$$

Нам надо решить уравнение $\varphi(x) = x + \alpha(x) = y$, то есть

$$x = y - \alpha(x) = f(x, y)$$

При $|y| \leq \delta/2$ и $|x| \leq \delta$ из неравенства Для α получаются свойства

$$|f(x, y)| \leq \delta.$$

и (сжимающее отображение)

$$|f(x'', y) - f(x', y)| \leq 1/2 |x'' - x'|.$$

Будем действовать методом последовательных приближений.

Положим $\psi_1(y) = 0$, и далее определим по индукции

$$\psi_k(y) = f(\psi_{k-1}(y), y),$$

В силу свойства (6.1) образ ψ_k всегда в δ -окрестности нуля, а свойство (6.2) гарантирует, что

$$|\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)| = |f(\psi_{k-1}(y), y) - f(\psi_{k-1}(y), y)| \leq 1/2 |\psi_k(y) - \psi_{k-1}(y)|,$$

откуда по индукции можно заключить, что

$$|\psi_{k+1}(y) - \psi_k(y)| \leq \delta 2^{2-k}.$$

Значит $\psi_k(y)$ сходятся к непрерывному отображению $\psi(y)$ равномерно по признаку Вейерштрасса и переходя к пределу $k \rightarrow \infty$ в определении ψ_k получим

$$\psi(y) = f(\psi(y), y) = y - \alpha(\psi(y)) = y - \varphi(\psi(y)) + \psi(y),$$

то есть $y = \varphi(\psi(y))$.

Из свойства сжатия

$$|\alpha(x') - \alpha(x'')| \leq 1/2 |x' - x''|$$

также следует, что для всякого y $|y| \leq \delta/2$ найдётся не более одного x $|x| \leq \delta$, Для которого $\varphi(x) = y$, и на самом деле мы его уже нашли как $x = \psi(y)$.

Взяв окрестность $W \ni y$, меньшую по сравнению с $\delta/2$, и взяв открытое $V = \varphi^{-1}(W)$ мы видим, что φ и ψ являются взаимно обратными на этих окрестностях.

Установим дифференцируемость ψ .

По лемме 6.22 можно написать

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) = A(x)x,$$

где линейный оператор $A(x)$ непрерывно зависит от x и равен тождественному при $x = 0$.

Подставим в эту формулу $x = \psi(y)$ и получим

$$y = A(\psi(y))\psi(y) \rightarrow \psi(y) = A(\psi(y))^{-1}y$$

Где линейный оператор $B(y) = A(\psi(y))^{-1}$ непрерывен по y и равен тождественному при $y = 0$.

Из выражения $\psi(y) = B(y)y$ тогда следует дифференцируемость ψ в нуле дифференциалом $B(0)$, дифференцируемость в остальных точках проверяется после сдвига начала координат в соответствующую точку повторением тех же рассуждений.

Комментарии

В этой теореме оказалась важна невырожденность $D\varphi$, которую на практике можно проверить как $\det D\varphi \neq 0$ (см. также раздел 6.9).

Поэтому определитель $J\varphi = \det D\varphi$ имеет специальное обозначение и называется якобианом отображения, в координатах он равен $\det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)$. В дальнейшем якобиан будет играть роль в понятии ориентации и в теореме о замене переменных в интеграле.

На практике помимо предложенного в доказательстве метода решения уравнения $\varphi(x) = y$, можно использовать итерации по методу Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k + D\varphi_{x_k}^{-1}(y - \varphi(x_k)).$$

Записав с помощью леммы 6.22

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = A(x_k, x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = A(x_k, x_{k+1}) \circ D\varphi_{x_k}^{-1}(y - \varphi(x_k))$$

можно заметить, что при небольшом отклонении $A(x_k, x_{k+1}) \circ D\varphi_{x_k}^{-1}$ от тождественного оператора (что выполняется, если x_k и x_{k+1} достаточно близки) отклонение $\varphi(x_{k+1})$ от y будет меньше, чем отклонение $\varphi(x_k)$ от y .

Аккуратный анализ этого метода можно найти в курсах вычислительной математики.

О применениях (?!?!?!?)

(вроде их много, пока не собрал еще)

Определение криволинейной системы координат

Криволинейной системой координат в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ мы будем называть набор таких функций, которые являются координатами гладкого отображения окрестности p на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с гладким обратным отображением.

По теореме об обратном отображении для того, чтобы гладкие $y_1, \dots, y_n$ в некоторой окрестности p давали криволинейную систему координат, достаточно проверить невырожденность матрицы $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$ в точке p , или иначе говоря, проверить линейную независимость дифференциалов $dy_1, \dots, dy_n$ в точке p .

Также важно иметь в виду, что неполный набор функций с линейно независимыми в данной точке дифференциалами можно дополнить до криволинейной системы координат.

Теорема о неявной функции

Пусть функции $f_1, \dots, f_k$ непрерывно дифференцируемы в окрестности $p \in \mathbb{R}^n$ и определитель $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^k$ не равен нулю в этой окрестности, пусть также $f_i(p) = y_i$.

Тогда найдётся окрестность точки p вида $U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$, такая, что в этой окрестности множество решений системы уравнений

$$f_1(x) = y_1, \quad \dots, \quad f_k(x) = y_k$$

совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : V \rightarrow U$, заданного в координатах как

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ x_k &= \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

(??? то есть можно выделить неявную функцию, в этом суть?)

Доказательство

Условия теоремы означают, что дифференциалы

$$df_1, \dots, df_k, dx_{k+1}, \dots, dx_n$$

являются линейно независимыми и из функций $f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ можно составить отображение, локально имеющее непрерывно дифференцируемое обратное, то есть окрестности старые координаты $x_1, \dots, x_k$ можно непрерывно дифференцируемо выразить через новые координаты

$$x_i = \varphi_i(f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

и поставить в этом выражении вместо f_i Константы y_i .

Это рассуждение доказывает, что множество решений системы уравнений содержится $\varphi(V) \subseteq U$.

Но и обратное верно, так как значения $f_1, \dots, f_k$ на точке вида

$$(\varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

обязаны совпадать с $y_1, \dots, y_k$, так как φ_i были выбраны как компоненты отображения, обратного к отображению с компонентами

$$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

О применениях (!?!?!?)

Теорема о расщеплении отображения на элементарные

Если отображение φ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ и имеет обратимый $D\varphi_x$, то его можно представить в виде композиции перестановки координат, отражений образом меняющих только одну координату $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n)$.

Эта теорема даёт криволинейный аналог разложения линейного отображения в композицию элементарных, перестановки и диагонального отображения.

Доказательство

Доказательство этой теоремы имитирует приведение матрицы к гауссовому виду, то есть разложение матрицы в произведение матрицы перестановки, матриц умножений координаты на число, и элементарных матриц.

Пусть компоненты φ являются функциями $y_1, \dots, y_n$ в окрестности точки p .

Некоторая y_i имеет ненулевую производную $\frac{\partial y_i}{\partial x_1}$.

Переставив y (и запомнив эту перестановку) мы можем считать, что это y_1 .

Поменяв при необходимости знак y_1 , можно считать эту производную положительной.

Тогда $y_1, x_2, \dots, x_n$ (в силу нетривиальности якобиана) дают криволинейную систему координат в некоторой окрестности p и эта система отличается от исходной возрастающей заменой первой координаты.

Далее какая-то из оставшихся $y_2, \dots, y_n$ уже в новой системе координат $y_1, x_2, \dots, x_n$ имеет ненулевую $\frac{\partial y_i}{\partial x_2}$, иначе $dy_i (i = 1, \dots, n)$ не были бы линейно независимыми.

Переставив y (и запомнив и эту перестановку), можно считать, что это y_2 .

Также можно считать эту производную положительной, поменяв при необходимости знак y_2 .

тогда можно заменить $y_1, x_2, \dots, x_n$ на систему координат $y_1, y_2, x_2, \dots, x_n$.

Делая в том же духе n раз, мы сделаем n замен координат (отображений), меняющих возрастающим образом только одну координату, а в конце нам останется поменять знаки у некоторых y_i . И переставить их.

Так как нас часто интересуют не просто непрерывно дифференцируемые отображения ????

то нам понадобится такое утверждение:

Теорема о гладкости обратного и неявного отображения

Теоремы об обратном отображении, о неявной функции и о расщеплении отображения дают отображения класса C^k при $k \geq 1$, если исходные отображения или функции были класса C^k .

Доказательство

Так как все утверждения основаны на теореме об обратном отображении, то достаточно рассмотреть лишь её.

В ней при $k \geq 1$ мы для взаимно обратных φ и ψ имеем

$$D\psi_y = (D\varphi_{\psi(y)})^{-1}$$

то есть фактически это композиция отображения ψ , отображения $x \mapsto D\varphi_x$ и отображения взятия обратной матрицы.

Знания из линейной алгебры показывают, что взятие обратной к невырожденной матрице является бесконечно гладким отображением.

Тогда при наличии у $D\varphi$ и ψ непрерывных частных производных жем утверждать, что у левой части тоже есть непрерывные частные производные до ℓ -го порядка.

Последнее будет означать, что у ψ есть все частные производные $(\ell + 1)$ - значит $D\varphi$ класса C^{k-1} , то ψ тоже будет класса C^k . Зависимы в окрестности точки p , а дифференциалы функций $f_2, \dots, f_k$ линейно независимы в p , то в некоторой окрестности точки p функция f_1 выражается через остальные.

||
Считайте функции $f_2, \dots, f_k$ частью системы координат в точке p .
||

Сжимающее отображение (!?!?!?!?!?!?)

(давно хотел прописать, потом пропишу сюда!!!)

О применениях сжимающего отображения (!?!?!?!?!?!?)

(давно хотел прописать, потом пропишу сюда!!!)

6.4.4 Study of functions of several variables for extrema

С помощью разложения функций нескольких переменных по формуле Тейлора мы можем рассмотреть вопрос о необходимых или достаточных условиях локального экстремума функции нескольких переменных.

Локальный экстремум функции f (назовем его точкой p) - точка экстремума (максимума или минимума) ограничения f на некоторую окрестность p .

С помощью формулы Тейлора мы можем установить некоторые необходимые условия экстремума:

Необходимые условия экстремума

Если f дифференцируема в точке p и имеет локальный экстремум в p , то $df_p = 0$.

Если f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности p , то $d_2f_p \geq 0$ для минимума и $d_2f_p \leq 0$ для максимума.

Здесь неравенство $\geq$ означает, что квадратичная форма второго дифференциала принимает неотрицательные значения на всех векторах, то есть положительно полуопределена, аналогично интерпретируется знак $\leq$.

Доказательство

Утверждение для первой производной следует, например, из варьирования одной координаты при фиксированных остальных, тогда по свойствам экстремума функции одной переменной мы получим равенство нулю всех частных производных, то есть всего первого дифференциала.

Для исследования второй производной (при равной нулю первой) мы запишем Для $\xi = p + tv$

$$f(p + tv) = f(p) + \frac{1}{2}d_2f_p(tv) + o(t^2|v|^2) = f(p) + t^2\left(\frac{1}{2}d_2f_p(v) + o(1)\right).$$

Переход к пределу $t \rightarrow 0$ при фиксированном v показывает, что $d_2f_p(v) \geq 0$ для минимума и $d_2f_p(v) \leq 0$, для максимума. Для установления достаточных условий экстремума нам понадобится вспомогательное утверждение.

Напомним, что квадратичная форма Q положительно определена, если $Q(v) > 0$ при ненулевых v .

Аналогично для отрицательно определённой формы должно быть $Q(v) < 0$ при $v \neq 0$.

Лемма

Если квадратичная форма Q положительно определена, то найдётся $\varepsilon > 0$, такой что

$$Q(v) \geq \varepsilon|v|^2$$

для любого v .

Доказательство

Положим ε равным минимуму Q на единичной сфере. Так как единичная сфера является компактом, а квадратичная форма является непрерывной функцией, то этот минимум достигается и положителен. Тогда неравенство верно для единичной сферы. Из этого следует неравенство для всех векторов, так как при умножении вектора на t обе части неравенства умножаются на t^2 .

Теорема о достаточном условии экстремума

Если f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности p , $df_p = 0$ и $d_2f_p > 0$, то p - точка строгого локального минимума.

Если неравенство в другую сторону, $d_2f_p < 0$, то p - точка строгого локального максимума.

Доказательство

Докажем без ограничения общности для минимума.

для $\xi = p + v$ запишем по формуле Тейлора с использованием предыдущей леммы:

$$f(p + v) = f(p) + \frac{1}{2}d_2f_p(v) + o(|v|^2) \geq f(p) + \left(\frac{\varepsilon}{2} + o(1)\right)|v|^2$$

По определению $o(1)$ при достаточно малом $|v|$ (независимо от направления v) выражение в скобках будет положительным.

Также часто рассматривают случай условного экстремума функции нескольких переменных, то есть экстремума ограничения функции f на множество S , задаваемое системой непрерывно дифференцируемых (как минимум) уравнений

$$\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0.$$

После изучения сведений о криволинейных системах координат можно догадаться, что для обеспечения понятной структуры множества S мы будем требовать условие линейной независимости дифференциалов

$$\dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m$$

в некоторой окрестности точки p .

Это условие гарантирует, что функции φ_i просто являются частью некоторой криволинейной системы координат и множество решений $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0$ может быть легко параметризовано $n - m$ оставшимися координатами этой криволинейной системы.

Необходимые условия условного экстремума в терминах 1-х производных

Если f и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности p , выполняется $\dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m$ и f имеет условный экстремум в p при условии $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0$, то в точке p выполняется

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p}$$

для некоторых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

(?!? посмотрю потом применения, еще не наreshал задачи!)

Доказательство

Заметим, что нахождение df в линейной оболочке $d\varphi_i$ инвариантно относительно криволинейных замен координат по формуле дифференциала композиции.

Согласно этой формуле, при замене координат строка чисел $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ получается из строки чисел $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ умножением справа на матрицу $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$.

Тогда мы можем считать $\varphi_1 = y_1, \dots, \varphi_m = y_m$ в системе координат $y_1, \dots, y_n$.

В этом случае мы имеем экстремум функции по остальным переменным при условии $y_1 = \dots = y_m = 0$, что даёт равенства $\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$ при $i > m$.

Тогда можно составить линейную комбинацию

$$df_p = \lambda_1 dy_1 + \dots + \lambda_m dy_m$$

по явному выражению для дифференциала в координатах. При выполнении необходимого условия условного экстремума удобно положить

$$L(x) = f(x) - \lambda_1 \varphi_1(x) - \dots - \lambda_m \varphi_m(x)$$

Это называется функция Лагранжа, а λ_i называются множители Лагранжа.

Главное свойство этой функции - обращение в нуль дифференциала dL_p в точке экстремума.

Это используется при более детальном изучении условного экстремума в следующих

Необходимые условия условного экстремума в терминах 2-х производных

(??)

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p}$$

и второй дифференциал функции Лагранжа положительно полуопределён (для минимума) или отрицательно полуопределён (для максимума) на векторах v , удовлетворяющих линейным уравнениям

$$d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0$$

Доказательство

Заметим, что при условиях $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0$ функции f и L равны.

Но функция Лагранжа удобнее тем, что $dL_p = 0$.

Лемма 6.14 позволяет в этом случае считать d_2L_p корректно определённой квадратичной формой и сделать замену координат так, чтобы $\varphi_1 = y_1, \dots, \varphi_m = y_m$, при этом d_2L_p преобразуется так, как положено преобразовываться квадратичной форме при линейном преобразовании, которое является производной заменой координат.

После замены координат мы практически рассматриваем функцию L при фиксированных первых m координат которых равны Нулю, то есть

$$dy_1(v) = \dots = dy_m(v) = 0$$

Но тогда теорема о необходимом условии экстремума без условий показывает, что d_2L_p должна быть полуопределена на допустимых приращениях v , что после обратной замены координат превращается в утверждение теоремы.

В конце доказательства этой теоремы мы принимаем, что при замене координат вектор умножается (слева как столбец) на производную этой замены, делая таким образом произведение вектора на дифференциал функции инвариантно определённым.

Более содержательное обсуждение понятия «вектор» мы проведём в следующем разделе.

Достаточные условия условного экстремума в терминах 2-х производных

Если $f, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности p , выполняется $\dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m$,

$$df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p} \leftrightarrow dL_p = 0$$

и второй дифференциал функции Лагранжа > 0 (для минимума) или < 0 (для максимума) на векторах v , удовлетворяющих линейным уравнениям

$$d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0$$

то f имеет строгий условный экстремум в p при условии $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0$.

Доказательство

Аналогично предыдущей теореме, взяв φ_i за первые m координат и воспользовавшись леммой 6.14, мы сводим задачу к случаю экстремума без условий. Пространство векторов v , удовлетворяющих линейной системе

$$d\varphi_{1,p}(v) = \cdots = d\varphi_{m,p}(v) = 0$$

логично назвать касательным пространством к многообразию S решений системы $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0$ в точке p .

В следующих разделах мы развиваем идею касательного вектора, касательного пространства и многообразия на более абстрактном уровне.

6.4.5 Vectors and vector fields

Нашей целью будет определить объекты и операции, с которыми можно одинаково легко работать в любой криволинейной системе координат.

Первые объекты, с которым можно корректно работать в любой системе координат — это гладкие функции $U \rightarrow \mathbb{R}$, их множество обозначим $C^\infty(U)$.

Для функции f в координатах $y = (y_1, \dots, y_n)$ переход к координатам $x = (x_1, \dots, x_n)$ заключается в подстановке (композиции) $g(x) = f(\varphi(x))$, если замена координат имела вид $y = \varphi(x)$.

Это естественное преобразование подразумевалось уже в предыдущих разделах.

Разобравшись с преобразованием функций при замене криволинейных координат, другие объекты дифференциальной геометрии мы будем определять в терминах гладких функций.

Нам понадобится следующая лемма о структуре гладкой функции в окрестности точки, пусть без ограничения общности эта точка $0 \in \mathbb{R}^n$.

Лемма о представлении гладкой функции

Всякую гладкую функцию в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n x_k g_k(x)$$

с гладкими g_i

Доказательство

Это следует из леммы 6.22, бесконечная дифференцируемость g_k (которые в той лемме были компонентами отображения A) следует из возможности бесконечно дифференцировать определяющий их интеграл по параметрам.

Для функций, у которых первый дифференциал в точке равен нулю, а второй невырожден, существует аналогичное утверждение, которое мы оставляем в качестве упражнения:

Лемма Морса

Всякую гладкую функцию, у которой первый дифференциал в нуле равен нулю, а гессиан невырожден, можно криволинейной заменой координат привести к виду

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$$

в некоторой окрестности нуля, где $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

||

Дважды используйте лемму, что всякую гладкую функцию в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n x_k g_k(x)$$

с гладкими g_i .

а потом вспомните процедуру приведения квадратичной формы к каноническому виду.

||

О применении леммы Морса (???)

(думаю, есть важные применения, так что укажу потом их.)

Определение касательного вектора (??)

(забил пока на это)

Определим касательный вектор в точке $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Идея этого определения следующая.

Для всякого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ мы можем определить производную по направлению вектора

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

проверить её линейность по f и формулу Лейбница для производной произведения,

$$\frac{\partial fg}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} g + f \frac{\partial g}{\partial v}$$

Некоторая проблема заключается в том, что эта формула не инвариантна относительно криволинейной замены координат, в частности сложение $p + tv$ не определено инвариантно.

С другой стороны, мы можем подействовать в обратном порядке и определить вектор как дифференцирование алгебры гладких функций в точке, удовлетворяющее формуле Лейбница.

Определим касательный вектор в точке $p \in U$ как $\mathbb{R}$ -линейное отображение $X : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$$

Касательное пространство к U в точке p состоит из всех касательных векторов в точке p и обозначается $T_p \dot{U}$.

Работая в некоторой системе координат мы понимаем, что всякий касательный вектор в координатном смысле даёт некоторое дифференцирование, и все они различны.

Так что некоторые касательные векторы в смысле инвариантного определения мы можем предъявить и остаётся выяснить, что других на самом деле нет.

О важности и сложности определения касательного вектора

(параграф про то, что казалось бы, зачем сложные конструкции и зачем заморочки??? типичный вопрос, четко напишу потом ответ.)

Лемма о локальности касательного вектора

(скучно, пропустил.)

Для начала установим свойство локальности:

Если X - касательный вектор в точке $p \in U$, то для любой окрестности $V \ni p, V \subseteq U$, выражение $X(f)$ может зависеть только от значений f в V , а не на всем всём U .

Доказательство

По лемме 6.17, найдём гладкую функцию $\psi : U \rightarrow [0, 1]$, равную нулю за пределами V и равную единице в некоторой окрестности $W \subset V$ точки p .

Обозначим $h = 1 - \psi$.

Теперь, если у нас есть функция $g \in C^\infty(U)$, такая что её ограничение на V такое же, как и f , то $(f - g)h = f - g$, так как в каждой точке U либо $f = g$, либо $h = 1$.

Следовательно, по свойству линейности и правилу Лейбница для X ,

$$\begin{aligned} X(f) - X(g) &= \\ &= X((f - g)) = X((f - g)h) = \\ &= (f(p) - g(p))X(h) + h(p)X(f - g) = \\ &= 0 \cdot X(h) + 0 \cdot X(f - g) = 0. \end{aligned}$$

В силу предыдущей леммы мы можем корректно дифференцировать операцией X и функции, определённые на произвольно малой окрестности V точки p .

Действительно, их можно умножать на функцию типа ψ из доказательства с носителем в V , тогда они гладко продолжаются за пределы V нулём, оставаясь неизменными в окрестности p .

После этого операция X применима по определению и по лемме её результат не зависит от того, как именно мы умножали и продолжали функцию.

Действие дифференцирования на функцию (!?)

(типичная тема)

Посмотрим теперь на действие некоторого дифференцирования X на функцию f в свете леммы 6.37; мы можем перейти в окрестность, даваемую этой леммой, в силу леммы 6.40 и замечания после неё.

Выберем систему координат с условием $x_i(p) = 0$, тогда

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^n X(x_i) g_i(p) + \sum_{i=1}^n x_i(p) X(g_i) = \sum_{i=1}^n X(x_i) g_i(p)$$

Здесь мы использовали, что дифференцирование константы даёт нуль, так как $X(1) = X(1^2) = X(1) + X(1)$ по правилу Лейбница, то есть $X(1) = 0$.

Оказывается, что значение $X(f)$ зависит только от значений $g_i(p)$, которые в свою очередь равны частным производным f , то есть

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X(x_i) \frac{\partial f(p)}{\partial x_i}$$

Числа $X_i = X(x_i)$ называются координатами касательного вектора в данной криволинейной системе координат, тогда весь вектор в точке p записывается как

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Заметим, что в выписанной формуле условие того, что $x_i(p) = 0$ на самом деле не нужно, так как получив аналогичное выражение в системе координат $x_1 - x_1(p), \dots, x_n - x_n(p)$ мы можем использовать тот факт, что $X(x_i - x_i(p)) = X(x_i) - X(x_i(p)) = X(x_i)$ (дифференцирование константы даёт ноль).

Полученное выражение $\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ является просто дифференцированием по направлению $(X_1, \dots, X_n)$ в координатной системе (см. лемму 6.8), то есть все касательные векторы в точке в смысле инвариантного определения являются касательными векторами в точке в смысле производной по направлению.

(??? что???)

Для наших целей (и особенно для целей изучения дифференциальных уравнений) полезно также рассмотреть ситуацию, когда касательный вектор задан в каждой точке некоторого открытого множества.

Определение векторного поля

Векторное поле на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ - это выбор касательного вектора $X(p) \in T_p U$ для каждой точки $p \in U$, гладко зависящий от p .

Гладкая зависимость понимается в смысле гладкой зависимости координат векторного поля $X_i(p)$ от точки p .

Лемма

6.42.

Обобщая определение одиночного вектора как дифференцирования на векторные поля, мы можем сформулировать:

Для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ всякое $\mathbb{R}$ -линейное отображение $X : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$, удовлетворяющее соотношению

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

задаётся векторным полем на U

Доказательство

Поддействуем векторным полем на координатные функции и рассмотрим гладкие функции $X_i = X(x_i)$.

Так как композиция дифференцирования X и взятия значения в точке является дифференцированием в точке, то по ранее установленному описанию дифференцирований в точке мы получим, что в любой точке выполняется равенство

$$X(f) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Значит операция $X(f)$ задаётся применением дифференцирования по направлению вектора с координатами $X_1(p), \dots, X_n(p)$ в каждой точке $p \in U$.

Можно также корректно определить образ касательного вектора при произвольном гладком отображении $\varphi : U \rightarrow V$, не обязательно обратимом, следующим образом.

Пусть у нас есть вектор $X \in T_p U$, $q = \varphi(p)$, тогда прямой образ вектора, $\varphi_*(X)$, определяется по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi)$$

Построенная так операция $\varphi_*(X)$ тоже является дифференцированием $C^\infty(V)$ в точке q .

действительно, отображение $\varphi : U \rightarrow V$ определяет гомоморфизм алгебр (то есть операцию, сохраняющую умножение и сложение, а также переводящую постоянные функции в постоянные с теми же значениями) $\varphi^* : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(U)$ по формуле

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

вектор даёт нам дифференцирование алгебры $X : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ и тогда $\varphi_*X = X \circ \varphi^*$ тоже будет дифференцированием алгебры.

Возвращаясь к более явным выражениям, исходя из определения (6.5) по формуле дифференцирования композиции в координатах можно выписать координаты $Y = \varphi_*(X)$ как

$$Y_i = \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} X_j$$

Таким образом мы можем бескоординатно определить производную отображения φ в точке p как линейное отображение $\varphi_* : T_p U \rightarrow T_p V$ при $q = \varphi(p)$.

Его также можно обозначать как $D\varphi_p$, так как в силу своего выражения в координатах оно на самом деле совпадает с введённый ранее производной в смысле линейного приближения отображения, что проясняет геометрический смысл конструкции прямого образа вектора.

Для $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ $f_* = df$ (???)

Проверьте, что для функции $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ отображение f_* действительно совпадает с её дифференциалом df .

Эти наблюдения могут показаться бессмысленной переформулировкой и так понятных вещей, но в дальнейшем мы будем уделять внимание преобразованиям разных объектов при заменах координат и гладких отображениях, поэтому нам надо начать со сравнительно простых примеров и посмотреть на ситуацию с разных точек зрения.

Заметим, что если гладкое отображение $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ является диффеоморфизмом на свой образ, то тогда на образе $\varphi(U)$ корректно определён и прямой образ всего векторного поля X на U (а не только отдельных векторов) при данном отображении.

В таком случае каждая $q \in \varphi(U)$ является образом единственной точки $p \in U$, в качестве вектора в q мы однозначно выбираем $Y(q) = \varphi_*(X(p))$.

Гладкая зависимость Y от q гарантируется гладкой зависимостью p от q , так как по определению диффеоморфизма обратное отображение $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ тоже гладкое.

Если же отображение φ не является инъективным, то прямой образ векторного поля при таком отображении невозможно определить, так как в одну точку могут придти два разных вектора.

Отображение, переводящее гладкие векторные поля в негладкие (????)

Приведите пример гладкого отображения $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которое является инъективным, но переводит гладкие векторные поля в негладкие.

||

Сделайте так, чтобы производная φ обращалась в нуль.

||

6.4.6 Quotient space and finite generation of a vector space

(перепись линала по Карасеву, мне на тренировку, такое еще воспроизводить сполна не могу.)

Будем рассматривать векторные пространства над полем $\mathbb{K}$, которое читатель для простоты может считать полем действительных чисел.

Определение факторпространства

Пусть $W \subseteq V$ - векторные пространства.

Тогда факторпространством V/W называется фактормножество $\hat{V}$ по отношению эквивалентности

$$v \sim v' \leftrightarrow v - v' \in W$$

Факторпространство от сложения и умножения на скаляр (?????)

(?? вроде хорошая тренировка!)

Проверьте, что сложение и умножение на скаляр в пространстве V корректно индуцирует структуру векторного пространства в V/W .

Естественная проекция (????)

С понятием факторпространства связана естественная проекция на фактормножество $\pi : V \rightarrow V/W$, которая сопоставляет вектору $v \in V$ его класс эквивалентности в пространстве V/W .

По определению это отображение является сюръективным и его ядро (обращающиеся в нуль векторы) - это в точности подпространство W .

Более того, любое линейное отображение $f : V \rightarrow U$ порождает последовательность отображений

$$\ker f \longrightarrow V \xrightarrow{\pi_f} V/\ker f \xrightarrow{s_f} \operatorname{Im} f \xrightarrow{i_f} U \longrightarrow U/\operatorname{Im} f$$

в которой π_f - естественная проекция на факторпространство, i_f - естественное вложение подпространства, а s_f является изоморфизмом векторных пространств; f при этом равно композиции $f = i_f \circ s_f \circ \pi_f$.

(?? проверю потом!)

Об определении оператора $\bar{f} : V/W \rightarrow V/W$ (??)

Докажите, что линейный оператор $f : V \rightarrow V$, такой что $f(W) \subseteq W$, корректно определяет линейный оператор $\bar{f} : V/W \rightarrow V/W$.

(??? что сделать для этого???)

Конечно-порождённое векторное поле

Сформулируем понятие, отличающее «сравнительно маленькие» векторные пространства от произвольных.

Векторное пространство V над полем $\mathbb{K}$ называется конечно-порождённым, если оно изоморфно факторпространству пространства прямой суммы N экземпляров, то есть $\mathbb{K}^N$, при некотором $N \in \mathbb{Z}^+$.

(??? зачем такое сложное определение???)

Конечно, это понятие можно объяснить попроще.

Рассмотрев сюръекцию $\pi : \mathbb{K}^N \rightarrow V$ и обозначив

$$v_i = \pi(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-i-1}),$$

мы получаем, что конечно порождённое пространство V должно совпадать с пространством линейных комбинаций своих векторов $v_1, \dots, v_N$,

$$V = \langle v_1, \dots, v_N \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^N x_i v_i : x_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Для векторных пространств это понятие просто будет означать конечномерность, хотя его аналог для модулей над кольцом (когда в определении поля $\mathbb{K}$ убирается операция деления и возможно опускается требование коммутативности умножения) имеет собственный смысл.

(????)

(??? зачем это определение???)

Факторпространство конечно-порождённого векторного пространства является конечно-порождённым

докажите, что факторпространство конечно-порождённого векторного пространства является конечно-порождённым.

||

Примените композицию сюръективных отображений. (???)

Также Карасев пишет: Из определения пока не ясно, является ли подпространство конечно-порождённого пространства конечно-порождённым, но в следующем разделе мы найдём подход к этому вопросу.

||

Конечная порождённость пространства, у которого W и V/W конечно-порождённые

Пусть дана пара векторных пространств $W \subset V$, причём W и V/W оказались конечно-порождёнными. Докажите, что V тоже является конечно-порождённым.

||

Используйте описание конечной порождённости через системы векторов, или дождитесь описания через флаги в следующем разделе.

||

6.4.7 Dimension of a vector space

(???????)

Взглянем более геометрически на понятие размерности векторного пространства над полем $\mathbb{K}$.

Why do we need this theory?

(I'll answer these question later)

Флаг

Флаг в пространстве V длины n - последовательность нетривиальных возрастающих по включению векторных пространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$$

Флаг называется полным, если в него нельзя добавить ни одного подпространства, то есть $V_k/V_{k-1} \cong \mathbb{K}$ для всех k .

Поясним полноту флага. Если факторпространство V_k/V_{k-1} имеет не более одного линейно независимого вектора, то возьмём один его вектор v и выразим любой другой как αv с $\alpha \in \mathbb{K}$.

Это означает, что V_k/V_{k-1} изоморфно $\mathbb{K}$.

Если же в V_k/V_{k-1} есть вектор v и он не порождает всё V_k , то это означает по определению факторпространства, что $V_{k-1} \neq V_{k-1} + \langle v \rangle \neq V_k$, то есть $V_{k-1} + \langle v \rangle$ можно было бы добавить в флаг между V_{k-1} и V_k .

Лемма о флагах

Для векторного пространства V максимальная длина флага в нём равна максимальному количеству линейно независимых векторов в нём. Если длина флага неограничена, то и количество линейно независимых векторов тоже неограничено.

Доказательство

Докажем в одну сторону. Пусть есть система линейно независимых векторов $v_1, \dots, v_n$, положим

$$V_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Эта последовательность нетривиальных подпространств V строго возрастает по включению и $V_k \neq V_{k-1}$, так как иначе v_k выражался бы через $v_1, \dots, v_{k-1}$ по определению линейной оболочки.

В другую сторону, есть флаг

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$$

то положим $v_k \in V_k \setminus V_{k-1}$ (так обозначено не факторпространство, а разность множеств).

Если между векторами $v_1, \dots, v_n$ была бы линейная зависимость, то какой-то из них, например v_k , выражался бы через предыдущие.

Но тогда выполнялось бы $v_k \in V_{k-1}$, что мы запретили.

Определение размерности векторного пространства через флаги

Размерностью векторного пространства V , $\dim V$, называется максимальная длина флага в нём, или эквивалентно, максимальный размер системы линейно независимых векторов в нём.

Система линейно независимых векторов, порождающая V , называется базисом в V .

Определение размерности можно интерпретировать как максимальный размер базиса векторного пространства (под размером мы упрощённо будем понимать натуральное число или ∞ , чтобы не вдаваться в теоретико-множественные проблемы).

Из определения не следует, что размеры всех базисов одного и того же пространства одинаковые, но это мы сейчас будем доказывать в следующем виде (в силу леммы 6.52):

Лемма о длинах полных флагов конечно порожденного векторного пространства

У конечно-порождённого векторного пространства все полные флаги имеют одинаковую длину.

Доказательство

Заметим, что у конечно порождённого пространства есть какая-то конечная система линейно независимых векторов.

Выбрасывая из неё векторы, которые выражаются через оставшиеся, можно добиться её линейной независимости и оставить её порождающей всё пространство, то есть сделать её базисом.

В силу леммы 6.52 (точнее её доказательства) это означает, что в конечно-порождённом V есть хотя бы один полный флаг.

Давайте теперь переопределим размерность конечно-порождённого пространства V как минимальную длину полного флага в нём.

Если мы докажем утверждение леммы (все полные флаги имеют одинаковую длину), то это определение будет совпадать с исходным.

Будем вести индукцию по размерности V . При размерности 1 по определению $V \cong \mathbb{K}$ и утверждение очевидно (если нет, проверьте его внимательно). Рассмотрим полный флаг минимальной длины

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$$

и какой-то другой полный флаг

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_m = V$$

Пусть $V' = V_{n-1} \cap W_{m-1}$.

Рассмотрим случай $V' = V_{n-1}$: из полноты флагов следует, что тогда $W_{m-1} = V'$.

В пространстве V' есть флаг $\{V_k\}_{k=1}^{n-1}$ длины $n-1$, а также есть флаг $\{W_k\}_{k=1}^{m-1}$ длины $m-1$.

По предположению индукции $n-1 = m-1$ и следовательно $n = m$.

Случай $V' = W_{m-1}$ даёт ту же самую ситуацию, осталось разобраться со случаем, когда включения $V' \subset V_{n-1} \subset V$ и $V' \subset W_{n-1} \subset V$ строгие.

Тогда естественные отображения (из задачи 6.47) $V_{n-1}/V' \rightarrow V/W_{m-1}$ и $W_{m-1}/V' \rightarrow V/V_{n-1}$ являются сюръективными и инъективными (проверьте это в качестве упражнения), то есть все эти факторы изоморфны $\mathbb{K}$.

Последовательность подпространств V' вида $V_1 \cap V', \dots, V_{n-2} \cap V', V_{n-1} \cap V' =$

V' имеет последовательные факторпространства либо изоморфные $\mathbb{K}$, либо нулевые, так как естественные отображения

$$(V_k \cap V') / (V_{k-1} \cap V') \rightarrow (V_k) / (V_{k-1})$$

инъективны (если $v \in V_k \cap V'$ оказался в V_{k-1} , то он оказался в $V_{k-1} \cap V'$).

Убирая из последовательности $\{V_k \cap V'\}$ повторы, мы получим полный флаг

$$0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_\ell = V'$$

длины $\ell \leq n-1$.

Сравнивая флаги пространства V_{n-1} (второй записан в обратном порядке)

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \supset V_{n-1} \supset V'_\ell \supset \cdots \supset V'_1 \supset V'_0 = 0$$

и применяя предположение индукции мы получаем, что $\ell = n-2$.

Теперь сравнивая флаги в пространстве W_{m-1}

$$0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_\ell \subset W_{m-1} \supset W_{m-2} \supset \cdots \supset W_1 \supset W_0 = 0$$

и используя предположение индукции, получаем $m-1 = \ell+1$, то есть $m = n$, что и требовалось доказать.

Теперь конечно-порождённые векторные пространства можно называть конечномерными, так как случай наличия конечных базисов в одном и том же пространстве, размеры которых неограничены, исключён предыдущей леммой.

Формула $\dim V = \dim W + \dim V/W$

(?? потом посмотрю мб, пока не до въезда в это.)

Если $W \subseteq V$, $\dim W$ и $\dim V/W$ конечны, то $\dim V = \dim W + \dim V/W$.

Доказательство

Взяв полные флаги

$$0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_k = W, \quad 0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_\ell = V/W$$

мы можем построить полный флаг

$$0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_k \subset \pi^{-1}(V'_1) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(V'_\ell) = V$$

длины $k + \ell$, где $\pi : V \rightarrow V/W$ - естественная проекция.

Задача о формуле размерностей (??)

докажите, что пары векторных подпространств $U, W \subseteq V$ классифицируются числами $\dim U \cap W, \dim U, \dim W, \dim V$, и что выполняется соотношение

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim(U + W)$$

||
Докажите и используйте изоморфизмы $(U + W)/U \cong W/(W \cap U)$, $(U + W)/W \cong U/(U \cap W)$.
||

Задача

Докажите, что если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто (например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$), V - конечномерное пространство над этим полем, $A : V \rightarrow V$ - линейный оператор, то существует полный флаг в V , инвариантный относительно A (в том смысле, что все составляющие флаг подпространства инварианты относительно A).

||
Найдите одномерное инвариантное подпространство для A и перейдите к фактору по нему, применив индукцию.
||

Задача

Приведите примеры линейных операторов $A : V \rightarrow V$, не имеющих инвариантных полных флагов для поля, не являющегося алгебраически замкнутым (например, поле действительных чисел $\mathbb{R}$).

Задача

Пусть V - векторное пространство размерности n , $\mathcal{F}$ - семейство его векторных подпространств. Докажите, что найдутся не более n представителей $L_1, \dots, L_m \in \mathcal{F}$ ($m \leq n$) такие, что

$$\bigcap_{i=1}^m L_i = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} L := \bigcap \mathcal{F}.$$

Понятие размерности векторного пространства позволяет говорить о ранге линейного отображения.

Определение ранга

Рангом линейного отображения $f : V \rightarrow U$, $\text{rk} f$, называется размерность пространства $V/\ker f \cong \text{Im } f$. Для простоты считаем ранг либо неотрицательным целым числом, либо ∞ .

Напомним, что двойственное пространство V^* - это пространство линейных форм (отображений) $\lambda : V \rightarrow \mathbb{K}$.

Всякое линейное отображение $f : V \rightarrow U$ порождает сопряжённое отображение $f^* : U^* \rightarrow V^*$ по формуле

$$f^*(\lambda) = \lambda \circ f$$

Для композиции линейных отображений $f = g \circ h$ по определению верна формула $f^* = h^* \circ g^*$ (проверьте её в качестве упражнения).

Так как всякая линейная форма $\lambda : V \rightarrow \mathbb{K}$ для конечномерного пространства V с базисом $e_1, \dots, e_n$ задаётся как

$$\lambda(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

то мы получаем (неестественные изоморфизмы) $V \cong V^* \cong \mathbb{K}^n$, то есть размерности V и V^* в конечномерном случае равны.

В бесконечномерном случае размерности V и V^* (определённые как мощности базисов) не обязаны быть равны

(??? proof???)

[[

Проще всего рассмотреть случай счётной прямой суммы с самим собой $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ для конечного поля $\mathbb{K}$.]

Следовательно, естественное вложение $s : V \rightarrow V^*$, действующее по формуле

$$s(v)(\lambda) = \lambda(v)$$

является изоморфизмом в конечномерном случае из совпадения размерностей (и следствия 6.55).

Задача

6.62.

Проверьте, что в бесконечномерном случае $s : V \rightarrow V^*$ не является изоморфизмом.

Попробуйте придумать элемент V^* , не лежащий в V .

Лемма

6.63.

Для отображения конечного ранга $f : V \rightarrow U$ оказывается $\text{rk} f^* \leq \text{rk} f$.

Доказательство

Посмотрим на разложение $f = i_f \circ s_f \circ \pi_f$ из диаграммы

$$\ker f \longrightarrow V \xrightarrow{\pi_f} V/\ker f \xrightarrow{s_f} \text{Im } f \xrightarrow{i_f} U \longrightarrow U/\text{Im } f$$

И неё ясно, что $\text{rk} f = \text{rk} s_f$.

Из формулы для сопряжения произведения получается $f^* = \pi_f^* \circ s_f^* \circ i_f^*$, тогда из определения ранга следует, что

$$\operatorname{rk} f^* \leq \min \{ \operatorname{rk} \pi_f^*, \operatorname{rk} s_f^*, \operatorname{rk} i_f^* \} \leq \operatorname{rk} s_f^* \leq \operatorname{rk} s_f = \operatorname{rk} f$$

так как s_f и s_f^* - изоморфизмы и их ранг равен (конечной по предположению) размерности пространств, на которых они действуют.

Следствие 6.64.

Для отображения конечномерных пространств $f : V \rightarrow U$ оказывается

$$\operatorname{rk} f^* = \operatorname{rk} f$$

Доказательство

В этом случае можно интерпретировать $f^* : V^* \rightarrow U^*$ как отображение $V \rightarrow U$, равное f .

Тогда по доказанному в предыдущей лемме

$$\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^* \leq \operatorname{rk} f^* \leq \operatorname{rk} f$$

Задача

6.65.

Проверьте, что для установления равенства $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^*$ достаточно конечности ранга, а конечномерность пространств на самом деле не нужна.

||

Докажите для начала, что всякое линейное отображение $\lambda : \operatorname{Im} f \rightarrow \mathbb{K}$ продолжается до линейного отображения $\bar{\lambda} : U \rightarrow \mathbb{K}$.

Для этого может понадобиться лемма Цорна (?!?!?!?!?)

||

6.4.8 Multilinear forms and determinant

Часто понятия размерности и линейной зависимости объясняются с помощью понятия «детерминант», поэтому имеет смысл пояснить значение детерминанта в терминах линейной алгебры.

Полилинейные формы

Определение 6.66.

Для векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ отображение

$$p : \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \rightarrow \mathbb{K}$$

называется полилинейной формой степени k на V , если оно линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных.

Заметим, что если в пространстве V задан базис $v_1, \dots, v_n$, то полилинейная форма с помощью свойства полилинейности определяется своими координатами

$$p_{i_1, \dots, i_k} = p(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Более того, эти координаты независимы, так как для всякого набора координат $p...$ выражение

$$p\left(\sum_{i_1=1}^n x_{1,i_1} v_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n x_{k,i_k} v_{i_k}\right) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} p_{i_1, \dots, i_k} x_{1,i_1} \dots x_{k,i_k}$$

корректно определяет полилинейную форму на V .

Определение

Полилинейная форма

$$p : \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{K}$$

называется кососимметричной, если при перестановке любых двух своих аргументов она меняет знак.

Заметим, что если к кососимметричной форме встречается один и тот же вектор в разных позициях, то с помощью перестановки мы получим

$$p(\dots, v, \dots, v, \dots) = -p(\dots, v, \dots, v, \dots)$$

Если в поле $\mathbb{K}$ имеет место $2 \neq 0$ (характеристика поля не равна 2), то отсюда следует

$$p(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$$

Далее можно предполагать, что либо $2 \neq 0$ в поле $\mathbb{K}$, либо в определении кососимметричности мы явно требуем обнуления формы при подстановке в неё двух одинаковых векторов в разные позиции.

Можно заметить, что всякая перестановка двух аргументов полилинейной формы (транспозиция) может быть получена как результат нескольких перестановок соседних пар.

Нам надо установить, что свойство кососимметричности достаточно проверять именно на транспозициях соседних аргументов полилинейной формы.

Мы обоснуем эти и заодно изучим полезное понятие:

Определение числа беспорядков

Число беспорядков в перестановке $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ - это количество таких пар $1 \leq i < j \leq n$, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Лемма о изменении числа беспорядков при транспозиции

Если σ - произвольная перестановка, а τ - транспозиция соседних элементов i и $i+1$, то число беспорядков в σ и $\sigma \circ \tau$ отличаются на единицу.

Доказательство

При замене σ на $\sigma \circ \tau$ в определении беспорядка происходит изменение только в одной паре $(i, i+1)$, другие пары не меняются, если предполагать, что рассматривая для σ пару (i, j) мы будем рассматривать для $\sigma \circ \tau$ пару $(i+1, j)$ вместо неё и наоборот, аналогично для (j, i) и $(j, i+1)$.

Лемма

6.70.

Транспозиция двух элементов $\{1, \dots, n\}$ может быть представлена как композиция нечётного числа транспозиций соседних элементов и следовательно в свойстве кососимметричности достаточно рассматривать транспозиции соседних аргументов.

Доказательство

Остаётся в качестве упражнения. Векторное пространство кососимметричных форм на V степени k обозначается $\wedge^k V^*$, при этом оказывается $\wedge^1 V^* = V^*$, $\wedge^0 V^* = \mathbb{K}$ (последнее можно считать определением).

Лемма о занулении внешнего произведения векторных пространств степенью, большей чем его размерность

Для векторного пространства V размерности n , $\wedge^m V^* = 0$ при $m > n$ и $\wedge^n V^*$ одномерно.

Доказательство

Сначала разберём случай степени m , большей размерности n .

Форма p тогда определяется своими значениями на последовательностях базисных векторов.

Но базисным векторов всего n и в последовательности длины m какие-то два из них повторяются, но тогда p должна обнулиться по свойству кососимметричности.

Если же степень равна в точности n , то значение полилинейной формы p определяется числами

$$p_\sigma = p(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

где σ пробегает все перестановки чисел $\{1, \dots, n\}$ из-за запрета повторов.

На самом деле достаточно знать одно из них, так как каждую перестановку можно получить из любой другой последовательностью транспозиций, каждая из которых обязана менять знак p_σ .

Это означает, что пространство кососимметричных форм степени n не более чем одномерно и для доказательства одномерности достаточно предъявить хотя бы одну нетривиальную такую форму.

Пусть для перестановки $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ её знак, $\text{sgn } \sigma$ -это $+1$ при чётном количестве беспорядков в перестановке и -1 при нечётном.

Определим через сумму по всем перестановкам

$$p \left(\sum_{j=1}^n x_{1,j} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{n,j} v_j \right) = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \cdot x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}$$

Это очевидно полилинейная форма.

В силу леммы 6.70 достаточно проверить её кососимметричность при перестановке соседних векторов, которая соответствует умножению перестановки σ под знаком суммы на транспозицию.

Но при этом $\text{sgn } \sigma$ меняет знак по лемме 6.69.

В случае поля характеристики 2 нам надо также проверить, что при подстановке в эту форму двух одинаковых векторов она обнуляется.

Пусть эти два вектора стоят на

позициях, которые переставляет транспозиция τ .

Тогда в сумме слагаемое для σ такое же, как и слагаемое для $\sigma \circ \tau$, то есть сумма делится на $2 = 0$, значит она равна 0.

Задача

6.72.

Докажите, что если $\dim V = n$, то $\dim \wedge^k V^* = \binom{n}{k}$.

||

Рассмотрите значения формы на наборах базисных векторов.

||

Теперь для всякого линейного отображения $f : V \rightarrow U$ на можно рассмотреть $\wedge^n f^* : \wedge^n U^* \rightarrow \wedge^n V^*$, действующий по формуле:

$$\wedge^n f^*(p)(v_1, \dots, v_n) = p(fv_1, \dots, fv_n)$$

Из леммы 6.71 следует, что при $\dim V = n$ отображение $\wedge^n f^* : \wedge^n V^* \rightarrow \wedge^n V^*$ является отображением одномерного векторного пространства в себя, то есть умножением на число, которое называется детерминант f и обозначается $\det f$.

Из доказательства леммы 6.71 понятно, что если оператор задан в координатно-матричном представлении

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_{ij} x_j v_i$$

то

$$\det f = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \cdot f_{1,\sigma(1)} \dots f_{n,\sigma(n)}$$

Из нашего определения детерминанта тривиально следуют его важные свойства:

Лемма

6.73.

Если $f : V \rightarrow V$ и $g : V \rightarrow V$ - два линейных оператора на конечномерном пространстве, то $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$.

Доказательство

Следует из того, что $\wedge^n(f \circ g)^* = \wedge^n g^* \circ \wedge^n f^*$.

Формула $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \rho) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \rho$ для перестановок

Докажите, что для любых двух перестановок n чисел выполняется

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \rho) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \rho$$

||

Сделайте из перестановки линейный оператор.

||

Лемма

6.75.

Линейный оператор на конечномерном пространстве $f : V \rightarrow V$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\det f \neq 0$.

Доказательство

Если f является изоморфизмом, то он имеет обратный f^{-1} и нетривиальность детерминанта следует из леммы 6.73

$$\det f \cdot \det f^{-1} = \det \text{id}_V = 1$$

По следствию 6.55

$$\dim \ker f + \dim \text{Im } f = \dim V$$

и если f не является изоморфизмом, то у него нетривиальное ядро и образ имеет размерность меньше $\dim V$.

Следовательно f записывается как композиция отображений в диаграмме

$$V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} V$$

Для $W = \text{Im } f$ ($\dim V = n$ и $\dim W < n$).

По лемме 6.71 $\wedge^n W^* = 0$.

Следовательно отображения $\wedge^n h^*$ и $\wedge^n g^*$ нулевые, как и

$$\wedge^n f^* = \wedge^n g^* \circ \wedge^n h^* = 0.$$

Задача

6.76.

Проверьте, что для линейного оператора в конечномерном пространстве $f : V \rightarrow V$ выполняется $\det f = \det f^*$.

[[

Можно использовать явную формулу, а можно заметить, что $\wedge^n f^* = (\wedge^n f)^*$.]]

Задача

6.77.

Проверьте, что если $W \subset V$ и линейный оператор $f : V \rightarrow V$ обладает

$$\begin{aligned} &\text{свойством } f(W) \subseteq W, \text{ то} \\ &\det f = \det f|_W \cdot \det \bar{f}, \\ &\text{где } \bar{f} : V/W \rightarrow V/W \text{ индуцирован } f \end{aligned}$$

[[

Можно использовать формулу $\wedge^{\dim V} V^* = \wedge^{\dim W} W^* \otimes \wedge^{\dim V - \dim W} V/W^*$ или сделать это через подходящий базис и матричное представление f .]]

Задача

6.78.

Интерпретируйте матричные элементы линейного отображения $\wedge^k f^* : \wedge^k U^* \rightarrow \wedge^k V^*$ в терминах матричных элементов отображения $f : V \rightarrow U$.

[[

| Аолжно получиться понятие, известное из матрично-ориентированных учебников как «минор».

]]

Собственные значения оператора $\wedge^k f^*$

Опишите собственные значения оператора $\wedge^k f^* : \wedge^k V^* \rightarrow \wedge^k V^*$ в терминах собственных значений исходного оператора $f : V \rightarrow V$.

||

Приведите f к верхнетреугольному виду.

||

6.4.9 Differential forms and exterior differentiation

После определения векторных полей уместно определить дифференциальные формы.

Дифференциальная форма первой степени в точке $p \in U$ что просто элемент двойственного пространства $(T_p U)^*$, которое обычно обозначается как $T_p^* U$, то есть линейная форма на касательном пространстве.

Следующее упражнение даёт более прямое (но и более абстрактное) описание $T_p^* U$.

Изоморфизм $T_p^* U = \mathfrak{m}_p(U)/\mathfrak{m}_p^2(U)$.

Обозначим $\mathfrak{m}_p(U)$ гладкие функции на U , которые обращаются в нуль в точке p , а $\mathfrak{m}_p^2(U)$ те гладкие функции, которые представляются в виде

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_k g_k, \quad \forall f_i, g_i \in \mathfrak{m}_p(U).$$

Установите изоморфизм $T_p^* U = \mathfrak{m}_p(U)/\mathfrak{m}_p^2(U)$.

||

Работая в системе координат, по существу надо доказать, что функции с нулевым значением и нулевыми производными в p лежат в $\mathfrak{m}_p^2(U)$.]]

Далее

Как и в случае векторных полей, от формы первой степени в точке можно перейти к форме первой степени, определённой в каждой точке и гладко зависящей от точки.

Нетрудно проверить (например, в координатах), что любая форма первой степени α , определённая на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ - это сопоставление каждому векторному полю X на U гла - кой функции $\alpha(X)$, линейное относительно умножения на гладкие функции, то есть $\alpha(fX) = f\alpha(X)$ для любых f и X .

В таком духе мы определим дифференциальные формы высших степеней на открытом множестве.

Определение дифференциальной формы степени k

Определим дифференциальную форму степени k на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как отображение наборов из k гладких векторных полей $X_1, \dots, X_k$ на U в бесконечно гладкие функции на U , $(X_1, \dots, X_k) \rightarrow \alpha(X_1, \dots, X_k)$, линейное по каждому аргументу

$$\alpha(X_1, \dots, X_i + Y_i, \dots, X_k) = \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + \alpha(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k)$$

и относительно умножения на бесконечно гладкие функции

$$\alpha(f_1 X_1, \dots, f_k X_k) = f_1 \dots f_k \alpha(X_1, \dots, X_k)$$

и кососимметричное, то есть меняющее знак при перестановке любых двух своих аргументов.

Кососимметричность в этом определении пока не выглядит естественно, но она будет играть ключевую роль в определении внешнего дифференциала дифференциальной формы, а далее и при интегрировании дифференциальных форм.

Лемма

6.82.

Значение выражения $\alpha(X_1, \dots, X_k)$ в точке p зависит только от значений векторных полей X_i в точке p .

Доказательство

Представим каждое поле X_i в виде $\sum_j X_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Применив линейность α , разложим выражение на слагаемые, в каждом из которых α применяется к векторным полям $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (это будет не зависящая от векторных полей часть), а множители X_i^j вынесены из α как функции.

Значение этого выражения в точке p будет зависеть только от значений X_i^j в точке p .
Предыдущая

Лемма

позволяет переформулировать определение дифференциальной формы иначе, как выбор кососимметричной полилинейной формы степени k на касательном пространстве $T_p U$ в каждой точке $p \in U$ так, чтобы выбранная форма гладко зависела от точки p .

Такое определение более геометрическое, в отличие от первого, более алгебраического.

Пространство дифференциальных форм степени k на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим $\Omega^k(U)$.

Из леммы 6.71 следует, что $\Omega^k(U) = 0$ при $k > n$, а при $k = n$ дифференциальная форма степени n в точке определяется одним числом (которое однако меняется при криволинейной замене координат!).

То есть $\Omega^n(U)$ в фиксированной системе координат выглядит как $C^\infty(U)$, но при замене координат ведёт себя иначе.

Посмотрим теперь подробнее на формы небольшой степени.

Формы нулевой степени по определению производят функцию из ничего, то есть они оказываются гладкими

$$\text{функциями, } \Omega^0(U) = C^\infty(U).$$

Для всякой функции $f \in C^\infty(U)$ её дифференциал как отображения $U \rightarrow \mathbb{R}$ можно считать формой первой степени в соответствии с формулой

$$df(X) = X(f)$$

Действительно, это выражение линейно относительно умножения X на бесконечно гладкие функции и в координатах компоненты df оказываются равны $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то есть это уже известный нам дифференциал функции, но определённый по-новому.

Дифференциалы координатных функций $dx_1, \dots, dx_n$ в любой точке дают базис пространства $T_p^* U$, двойственный к базису $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в смысле

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

По этому базису можно разложить любую форму в точке, а применяя это во всех точках области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обнаруживаем, что всякая дифференциальная форма на U первой степени выражается как

$$\alpha_1 dx_1 + \dots + \alpha_n dx_n$$

где $\alpha_i \in C^\infty(U)$.

При замене координат компоненты дифференциальной формы первой степени ведут себя так же, как компоненты дифференциала функции, то есть преобразование от новой к старой системе координат выглядит как

$$\alpha_j = \sum_i \tilde{\alpha}_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

По сути это означает, что преобразование выражения в новых координатах

$$\sum_i \tilde{\alpha}_i dy_i$$

в выражение в старых координатах

$$\sum_j \alpha_j dx_j$$

производится чисто формально, рассматривая y_i как функции от x_j и беря их дифференциалы, а также подставляя в $\tilde{\alpha}_i$ выражения y_i через $x_1, \dots, x_n$.

Существует (известное из линейной алгебры) внешнее умножение $\Omega^k(U) \times \Omega^\ell(U) \rightarrow \Omega^{k+\ell}(U)$, которое можно определить по формуле, суммируя по всем перестановкам из $k+\ell$ элементов:

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = c_{k,\ell} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} (\text{sgn } \sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)})$$

Коэффициент $c_{k,\ell}$ можно выбрать так, чтобы выполнялась ассоциативность умножения и условие нормировки (в некоторых учебниках условие нормировки может быть другим!)

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = 1$$

Задача

6.83.

Найдите коэффициенты $c_{k,\ell}$, совместимые с ассоциативностью внешнего умножения и условием нормировки.

Задача

6.84.

Проверьте, что умножение формы $\alpha \in \Omega^k(U)$ на функцию $f \in C^\infty(U)$ по формуле

$$(f\alpha)(X_1, \dots, X_k) = f \cdot \alpha(X_1, \dots, X_k)$$

совпадает со внешним умножением $f \wedge \alpha$ при интерпретации функции как формы из $\Omega^0(U)$. С помощью внешнего умножения всякую дифференциальную форму степени k в координатах можно единственным образом записать в виде:

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

где $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ - гладкие функции.

Это следует из того, что в каждой точке кососимметричные формы $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, составленные из дифференциалов координатных функций, имеют базис пространства k -линейных кососимметричных форм на $T_p U$.

Это означает, что дифференциальные формы на области U порождаются с помощью операций сложения и внешнего умножения функциями (как элементами $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$) и их дифференциалами (как элементами $\Omega^1(U)$).

Это наблюдение позволит нам определить операцию внешнего дифференцирования $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$.

Лемма

6.85.

На гладких дифференциальных формах на U существует единственный $\mathbb{R}$ линейный оператор $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$, удовлетворяющий условиям: а) для функций df является её дифференциалом; б) $d^2 = 0$; в) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$ (правило Лейбница).

Доказательство

Так как внешние формы порождаются функциями и их дифференциалами, то (с учётом вытекающего из свойства (б) равенства $d^2 x_i = 0$) дифференциал формы α в координатах обязан находиться по формуле

$$\begin{aligned} d \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k, j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Это доказывает единственность.

Чтобы доказать существование, можно просто использовать эту формулу как определение в некоторой системе координат и проверить свойства.

Свойство (а) будет очевидно; свойство (б) достаточно проверять для монома вида $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и оно будет следовать из независимости второй производной от порядка дифференцирования и вытекающего из него тождества

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell} dx_j \wedge dx_\ell + \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_j} dx_\ell \wedge dx_j = 0$$

свойство (в), в силу билинейности умножения, достаточно будет проверить на мономах вида $f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ и $g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$, что сводится к формуле Лейбница для дифференциала произведения двух функций.

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что знаки $\pm$ в выражениях будут именно такими, как написано в условии.

Доказанная единственность показывает, что операция внешнего дифференцирования совместима с заменами координат, то есть по сути определена независимо от выбора криволинейной системы координат.

Помимо обратимой замены координат полезно рассмотреть и произвольные гладкие отображения, определив обратный образ дифференциальной формы при гладком отображении:

Определение $\varphi^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$

Для всякого гладкого отображения $\varphi : U \rightarrow V$ между открытыми подмножествами евклидовых пространств определено отображение пространств дифференциальных форм $\varphi^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$, действующее по формуле (для некоторых векторов $X_1, \dots, \tilde{X}_k$ в одной и той же точке $p \in U$)

$$\varphi^* \alpha (X_1, \dots, X_k) = \alpha (\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k)$$

В этом определении следует понимать, что когда левая часть вычисляется в точке $p \in U$, то правая вычисляется в точке $\varphi(p)$.

Тогда становится понятным, что для функции $f \in C^\infty(V) = \Omega^0(V)$ оказывается

$$\varphi^* f = f \circ \varphi$$

что совпадает с понятием замены переменных в функции.

Для форм первой степени это отображение является сопряжённым к φ_* в каждой точке, оно задаётся композицией $\alpha \circ \varphi_*$, где α находится в точке $f(p)$, а φ_* - в точке p .

Важно понимать, что в отличие от векторных полей, для дифференциальных форм любое гладкое отображение порождает отображение пространства дифференциальных форм в обратную сторону.

Лемма о коммутировании обратного образа с внешним умножением и внешним дифференцированием

Взятие обратного образа дифференциальных форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием.

Доказательство

Для внешнего умножения можно проверить по определению умножения.

для дифференцирования, с учётом возможности умножать и правила Лейбница для дифференцирования, достаточно проверить на функциях и их дифференциалах, что сводится к формуле для производной композиции, что можно изобразить как

$$d(\varphi^* f) = d(f \circ \varphi) = df \circ D\varphi = \varphi^*(df)$$

Предыдущая лемма означает, что нахождение обратного образа явно заданной дифференциальной формы происходит формально, подстановкой выражений новых переменных через старые в коэффициенты формы и в дифференциалы новых переменных.

Задача

6.88.

Выпишите в явном виде действие φ^* на Ω^n в областях $\mathbb{R}^n$.

||

В выражение $dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ подставьте dy_i как дифференциалы новых функций в старых координатах $dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} dx_n$ и перемножьте по правилам внешнего умножения.

||

7 Complex Functions: Basics

(чисто основа комплана, в записи по нему подробно, тут просто как часть матана и все.)

7.0.1 Differentiability in the complex sense

Мы будем рассматривать функции комплексного переменного, то есть отображения $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ для открытых $U \subseteq \mathbb{C}$.

При естественном отождествлении комплексного числа $z = x + iy$ с парой действительных чисел (x, y) возникает отождествление $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, так что пока функция комплексного переменного выглядит просто как отображение открытого множества на плоскости в плоскость.

Чтобы придать смысл этому понятию, мы будем задействовать комплексную структуру и будем рассматривать только функции, дифференцируемые в каждой $z_0 \in U$ комплексном смысле, то есть такие что

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad z \rightarrow z_0$$

где умножение $f'(z_0)$ на $z - z_0$ понимается как умножение комплексных чисел.

Понятие комплексной дифференцируемости можно переписать разными способами.

Например, записав всё через действительную и мнимую часть, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, мы можем заметить, что дифференциал в точке

$$df = du + idv = u'_x dx + u'_y dy + i(v'_x dx + v'_y dy) = \partial f dz + \bar{\partial} f d\bar{z}$$

где

$$dz = dx + idy, d\bar{z} = dx - idy, \partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Тогда, при наличии дифференцируемости f как отображения на вещественной плоскости, условие комплексной дифференцируемости записывается как

$$\bar{\partial} f = 0,$$

или в чисто действительном виде (условия Коши-Римана)

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x$$

Теорема

10.1.

Дифференцируемость в комплексном смысле сохраняется при сложении, вычитании, умножении, делении (нена ноль) и композиции.

Доказательство

доказательства аналогичны доказательствам для функции действительного переменного.

С геометрической точки зрения дифференцируемость в комплексном смысле и условия Коши-Римана означают, что дифференциал отображения Df является $\mathbb{R}$ -линейным оператором, коммутирующим с умножением на мнимую единицу.

Такой оператор является поворотной гомотетией, то есть композицией поворота и гомотетии с некоторым коэффициентом.

В частности, если Df не нулевой, то он сохраняет углы между касательными векторами, то есть является конформным.

Собственно, всякий конформный линейный оператор на плоскости либо является поворотной гомотетией, либо является композицией комплексного сопряжения и поворотной гомотетии.

Говоря о комплексной плоскости, мы будем называть первый случай конформным, а второй антиконформным.

Задача

10.2.

Считая $f dz$ комплекснозначной дифференциальной формой на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, покажите, что из условия Коши-Римана $\bar{\partial}f = 0$ следует $d(f dz) = 0$.

Задача

10.3.

Проверьте, что $\mathbb{C}$ -линейный оператор $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ уже не обязательно сохраняет углы между векторами, определённые по отождествлению $\mathbb{C}^2$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^4$.

7.0.2 Line integral of a function of a complex variable and Cauchy's integral theorem

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ - функция комплексного переменного и пусть $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$ - кусочно-гладкая ориентированная кривая.

Тогда интеграл

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy)$$

определён как интеграл от дифференциальной формы по кривой.

Мы собираемся установить интегральную теорему Коши, у нас это будет несколько утверждений, связывающие понятие дифференцируемости в комплексном смысле с поведением этого интеграла.

Начнём с рассмотрения интеграла по треугольнику:

Лемма

10.4.

Если треугольник T содержится в U , а f дифференцируема в комплексном смысле в U , то

$$\int_{\partial T} f dz = 0$$

Доказательство

Заметим, что на самом деле это утверждение следует из условий Коши-Римана и формулы Грина, если f является непрерывно дифференцируемой.

Смысл этой леммы в том, что мы не требуем непрерывности производной f' .

Предположим противное,

$$\left| \int_{\partial T} f dz \right| \geq Cp(T)^2$$

где C - некоторая положительная константа, а $p(T)$ означает периметр треугольника T .

Далее мы будем уменьшать треугольник так, чтобы это условие сохранялось.

Действительно, разрежем T на четыре подобных ему треугольника его средними линиями.

Интеграл по границе T равен сумме интегралов по границам каждого из треугольников, значит один из меньших треугольников, T_1 , обладает свойством

$$\left| \int_{\partial T_1} f dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f dz \right| \geq \frac{C}{4} p(T) = Cp(T_1)^2.$$

Продолжая такое деление на четыре треугольника, мы получим последовательность вложенных треугольников (T_k) , для которых

$$\left| \int_{\partial T_k} f dz \right| \geq Cp(T_k)^2.$$

Эта последовательность имеет общую точку z_0 , из определения комплексной дифференцируемости мы знаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что в δ -окрестности z_0 имеет место

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$$

Пусть теперь k достаточно большое, чтобы T_k содержался в $U_\delta(z_0)$.

Легко проверить вручную (или по формуле Грина, что интеграл комплексно-линейной функции $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ по ∂T_k будет равен нулю.

Следовательно, по сути мы должны интегрировать лишь $o(z - z_0)$ для получения значения интеграла, то есть

$$\left| \int_{\partial T_k} f dz \right| \leq \left| \int_{\partial T_k} \varepsilon |z - z_0| |dz| \right| \leq \varepsilon p(T_k)^2.$$

Очевидно, что при выборе $\varepsilon < C$ мы получим противоречие.

Используя уже замеченное в доказательстве свойство аддитивности интеграла по границе области относительно разбиения области на части кусочно-гладкими кривыми, можно заметить, что для всякого не обязательно выпуклого многоугольника $P \subset U$ интеграл

$$\int_{\partial P} f(z) dz = 0$$

Действительно, многоугольник можно разбить на треугольники, читатель может убедиться в этом самостоятельно, решая следующие задачи (может понадобится

Лемма

Жордана о замкнутых кривых на плоскости 7.6).

Собственно, не обязательно выпуклый многоугольник определяется с помощью замкнутой ломаной P без самопересечений как объединение P и ограниченной части плоскости из двух компонент связности $\mathbb{R}^2 \setminus P$

Задача

10.5.

Докажите, что в не обязательно выпуклом многоугольнике P , если он не треугольник, можно провести диагональ, которая соединяет две его вершины, находится в его внутренности вся, кроме своих концов.

||
||

Попробуйте провести из одной вершины и посмотрите, что может этому помешать.

Задача

10.6.

Докажите, что необязательно выпуклый многоугольник P можно разрезать на треугольники.

||

Проводите диагонали до тех пор, пока это возможно.

||

Теперь мы докажем еще более содержательное утверждение:

Теорема

10.7.

Если кусочно-линейная кривая γ_0 гомотопна внутри U кусочно-линейной кривой γ_1 с сохранением кончиков, а f дифференцируема в U в комплексном смысле, то

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Доказательство

В этой теореме гомотопия - это такое непрерывное отображение

$$h : [t_0, t_1] \times [0, 1] \rightarrow U$$

что $h(t, 0) \equiv \gamma_0(t)$, $h(t, 1) \equiv \gamma_1(t)$, $h(t_0, s) \equiv z_0$, $h(t_1, s) \equiv z_1$.

Образ h компактен и содержится в U вместе со своей ε -окрестностью.

Используя равномерную непрерывность h разобьём $[t_0, t_1] \times [0, 1]$ на прямоугольники настолько мелко, чтобы образ каждого прямоугольника был диаметра не более ε .

Будем также считать, что образы вершин прямоугольников разбиения содержат все вершины γ_0 и γ_1 .

Для каждого прямоугольника разбиения $R_k \subseteq [t_0, t_1] \times [0, 1]$ рассмотрим четырёхугольник Q_k (возможно с самопересечениями), образованный образами вершин R_k при отображении h ; из-за выбранной мелкости $Q_k \subset \bar{U}$.

Тогда разность интегралов

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

выразится как сумма интегралов по границам четырёхугольников Q_k .

Но всякий четырёхугольник можно еще разбить на два треугольника в U и после применения леммы 10.4 получить, что интеграл по границе Q_k равен нулю, а значит и искомая разность интегралов равна нулю.

Предыдущая теорема позволяет, при условии комплексной дифференцируемости $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, определить интеграл

$$\int_{\gamma} f(z)dz$$

по любой непрерывной кривой $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$.

Действительно, из равномерной непрерывности кривая содержится в U вместе со своей ε -окрестностью.

Тогда достаточно мелко вписанные в неё ломаные тоже содержатся в U и гомотопны друг другу, следовательно интеграл по любой из них можно считать интегралом по γ по определению.

Интегральная теорема Коши

Если f дифференцируема в комплексном смысле в $U \subseteq \mathbb{C}$, а кривая $\gamma \subset U$ замкнута и стягиваема (гомотопна тождественной) в U , то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Задача

10.9) лемма Жордана в общем случае).

* докажите, что замкнутая кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две части, внутреннюю и внешнюю.

||

Нужно приближать γ ломаной всё ближе и ближе и при этом очень аккуратно обходить технические сложности.

||

7.0.3 Antiderivative of a function of a complex variable and universal covering of a domain

Продолжим рассматривать дифференцируемую в комплексном смысле $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ и дополнительно предположим, что U связно, то есть является областью.

Тогда мы можем фиксировать $p \in U$ и для всякой $z \in U$ определить

$$F(z) = \int_p^z f(\zeta) d\zeta$$

где интеграл берётся по некоторой кривой от p до z .

Конечно не все такие кривые гомотопны друг другу и определение может не быть корректным.

Первый случай, когда определение корректно, соответствует случаю односвязной области $\bar{U}$, в которой всякая замкнутая кривая гомотопна постоянной.

Тогда для всяких двух кривых γ_0 и γ_1 от p до z конкатенация $\gamma_0 \diamond \gamma_1^{-1}$ (возведение в степень -1 означает обращение ориентации) будет замкнутой, гомотопной постоянной, и интегральная теорема Коши даст нам равенство

$$\int_{\gamma_0 \diamond \gamma_1^{-1}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta = 0$$

Пусть теперь $U_\delta(z) \subseteq U$ и $z' \in U_\delta(z)$.

Рассмотрев кривую γ из p в z и дополнив её до кривой из p в z' отрезком $z' - z$, мы получим равенство

$$F(z') - F(z) = \int_{[z, z']} f(\zeta) d\zeta = f(z)(z' - z) + o(|z' - z|)$$

Следовательно, F является первообразной f в комплексном смысле.

Эти наблюдения можно сформулировать так:

Теорема

10.10.

Если $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ дифференцируема в комплексном смысле в односвязной U , то у неё существует первообразная в комплексном смысле $F : U \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$$

для любых двух $z_0, z_1 \in U$ для интеграла по любой соединяющей их в U кривой. Что делать, если область U не является односвязной? Тогда можно зафиксировать точку $p \in U$ и рассмотреть её универсальное накрытие

$$\tilde{U} = \{\gamma : \gamma \subset U \text{ выходит из } p\} / \sim$$

где $\sim$ - отношение гомотопии с сохранением концов.

Это определение подобрано так, чтобы первообразная F оказалась корректно определённой на U по теореме 10.7.

Чтобы понять структуру универсального накрытия $\tilde{U}$, надо определить естественную проекцию

$$\pi : \tilde{U} \rightarrow U, \quad p(\gamma) = \text{конец } \gamma$$

Тогда прообраз $z \in U$ состоит из классов гомотопии кривых, соединяющих p и z .

Более того, рассмотрев некоторую окрестность $U_\delta(z) \subseteq U$, можно заметить, что для любой $z' \in U_\delta(z)$ и $\gamma \in \pi^{-1}(z)$ кривая $\gamma \diamond [z, z']$ даёт элемент $\pi^{-1}(z')$ и на самом деле таким образом строится взаимно однозначное соответствие между $\pi^{-1}(z)$ и $\pi^{-1}(z')$ (докажите это в качестве упражнения).

Отсюда следует, что прообраз $\pi^{-1}(U_\delta(z))$ состоит из объединения некоторого количества копий $U_\delta(z)$, соответствующих разным классам гомотопии путей из p в z .

Это позволяет ввести на $\tilde{U}$ структуру гладкого двумерного многообразия, более того, это будет одномерное комплексное многообразие, то есть двумерное в действительном смысле многообразие с некоторой системой координатных карт, функции перехода между которыми, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, будут дифференцируемыми в комплексном смысле функциями одной комплексной переменной.

Полезно рассмотреть следующий пример, который немного проясняет приведённые выше абстрактные определения.

Пусть $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и функция задана по формуле

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Эта функция дифференцируема в комплексном смысле как частное 1 и z , которые очевидно дифференцируемы в комплексном смысле.

Посчитаем её интеграл по единичной окружности, обходящей начало координат против часовой стрелки, параметризуя её как $\{e^{it}\}_{[0, 2\pi]}$,

$$\int_S f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} de^{it} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Это уже показывает, что область U не является односвязной.

Найти первообразную можно по аналогии с действительным случаем, она должна соответствовать логарифму комплексного числа.

Вспомним определение комплексной экспоненты:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

её дифференцируемость в комплексном смысле можно проверить по определению или воспользовавшись её разложением в сходящийся степенной ряд.

Тогда логарифм комплексного числа можно определить примерно как

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

где действительная часть определена однозначно, а мнимая часть $\operatorname{Arg} z$ аргумент комплексного числа) определена только с точностью до прибавления числа кратного 2π .

В данном случае универсальное накрытие $\tilde{U}$ оказывается равным $\mathbb{C}$, а отображение $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$ соответствует экспоненте $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

В частности, это означает, что число

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}$$

полностью описывает класс гомотопии замкнутой кривой $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Более глубокое изучение универсальных накрытий произвольных многообразий мы откладываем до раздела 10.12.

Задача

10.11.

Докажите, что если для области $U \subset \mathbb{C}$ любая функция $\operatorname{Ln}(z - a)$ при $a \notin U$ допускает однозначное определение на U , то область U односвязна.

||

Предполагая неодносвязность, найдите в U простую замкнутую ломаную, которая не стягивается в U в точку, используйте лемму Жордана.

||

7.0.4 Cauchy Integral Formula and Analyticity

Сейчас мы обнаружим свойства дифференцируемой в комплексном смысле функции, которые радикально отличают её от дифференцируемой функции действительного переменного.

Первое свойство, неформально говоря, позволяет найти её значение в точки только по её значениям на окружающей эту точку кривой.

Интегральная формула Коши

Пусть замкнутая простая кривая γ лежит в области определения U дифференцируемой в комплексном смысле функции f , область V , ограниченная γ , лежит слева от γ в смысле ориентации γ , $V \subseteq U$ и $z \in V$.

Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Доказательство

Рассмотрим также кривую $\gamma_r \subset V$, которая является окружностью радиуса r вокруг точки z , ориентированная против часовой стрелки.

Рассмотрим пару точек $a \in \gamma_r$ и $b \in \gamma$, которая реализует расстояние между γ_r и γ .

Из условия минимальности отрезок $[a, b]$ полностью лежит в V , кроме его конца b .

Тогда мы можем сделать кривую γ , которая является конкатенацией отрезка $[a, b]$, одного обхода кривой γ , отрезка $[b, a]$, и одного обхода γ_r против часовой стрелки.

Можно доказать, что такая кривая Γ стягивается в $U \setminus U_r(z)$.

Мы оставляем полное рассуждение читателю и заметим, что в установлении аналитичности f это утверждение будет использоваться только в тех случаях, когда оно непосредственно очевидно; а после установления аналитичности мы сформулируем теоремы 10.15 и 10.16, которые уже не будут требовать проверки стягиваемости.

Теперь, функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ переменной ζ определена и дифференцируема в комплексном смысле в $U \setminus \{z\}$, а значит, по интегральной теореме Коши,

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

Отрезок $[a, b]$ в интеграле проходится туда и обратно и сокращается; следовательно мы получаем равенство

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

При стремлении $r \rightarrow +0$ правый интеграл можно записать как

$$(f(z) + o(1)) \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i(f(z) + o(1))$$

по уже найденному нами интегралу от $\frac{1}{z}$, в пределе $r \rightarrow +0$ мы получим требуемую формулу.

Теорема

10.13 (Ряд Тейлора аналитической в круге функции).

Если функция f дифференцируема в комплексном смысле в открытом круге $U_R(z_0)$, то она раскладывается в нём в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

приём

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

для любой окружности γ с центром в z_0 радиуса менее R , ориентированной против часовой стрелки.

Доказательство

Пусть γ - некоторая окружность с центром z_0 , лежащая в области определения f и ориентированная против часовой стрелки.

Рассмотрим также точку z , лежащую внутри неё.

Тогда в подынтегральном выражении формулы Коши для f мы можем написать по формуле геометрической прогрессии

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) (z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

причём ряд будет сходиться равномерно по ζ .

Переставляя интеграл с суммой ряда, получим требуемое представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n$$

Далее по известным свойствам степенных рядов мы утверждаем, что f имеет производные в комплексном смысле любого порядка в $U_R(z_0)$, их степенные ряды получаются почленным дифференцированием её степенного ряда, и после этого коэффициенты её степенного ряда находятся через значения её производных.

Задача

10.14.

Докажите, что формула бинома Ньютона

$$(1 + z)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

выполняется с радиусом сходимости не менее 1. Здесь для логарифма выбирается значение аргумента в пределах $(-\pi/2, \pi/2)$.

||

Это утверждение было тяжело доказать средствами действительного анализа, а в комплексном анализе достаточно проверить аналитичность левой части в круге радиуса 1.

||

Теорема

о разложении функции комплексного переменного в ряд Тейлора показывает, что из условия наличия производной в комплексном смысле на самом деле следует существование любых производных и даже аналитичность.

Поэтому с этого момента мы вместо «дифференцируемая в комплексном смысле» будем говорить «аналитическая».

Также это знание позволяет нам уточнить интегральную теорему Коши и формулу Коши.

Общая интегральная теорема Коши

Пусть $U \subset \mathbb{C}$ - ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что U при обходе остаётся слева.

Если $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ аналитическая и непрерывно продолжается на границу U , то

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 0$$

Доказательство

Исходя из кусочной гладкости границы ∂U и непрерывности f , мы можем немного сдвинуть ∂U (как набор замкнутых кривых) внутрь $\tilde{U}$ так, что интеграл изменится не более чем на наперёд заданное $\varepsilon > 0$.

После этого мы имеем бесконечную гладкость f и получаем нуль в интеграле по формуле Грина, так как при $\bar{\partial}f = 0$

$$d(fdz) = \partial f dz \wedge dz = 0$$

Далее можно перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$.

Общая интегральная формула Коши

Пусть $U \subset \mathbb{C}$ - ограниенная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что при обходе остаётся слева.

Если $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ аналитическая и непрерывно продолжается на границу U , то для любой $z \in U$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Доказательство

Рассмотрим окрестность $U_r(z) \subset U$.

Применив общую интегральную формулу Коши к области $U \setminus \text{cl } U_r(z)$, мы сведём утверждение к случаю, когда интеграл справа берётся по $\gamma_r = \partial U_r(z)$.

Далее как и в доказательстве уже имеющегося случая интегральной формулы Коши мы получаем требуемое в пределе $r \rightarrow +0$.

Задача

10.17.

Пусть аналитическая функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ такова, что $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \rightarrow \infty$. докажите, что она является многочленом от z степени не более N .

В частности, ограниченная аналитическая на $\mathbb{C}$ функция является константой.

||

Посчитайте коэффициенты её ряд по степеням z по интегральной формуле, взяв интеграл по окружностям всё большего и бoльшого радиуса.

||

Задача

10.18.

Найдите значение условно сходящегося интеграла $\int_0^{+\infty} e^{iz^2} dz$.

[[

Сначала докажите, что этот интеграл является пределом интегралов e^{iz^2} по лучам $\{re^{i\varphi} : r \geq 0\}$ при $\varphi \rightarrow +0$, используйте для этого признак равномерной сходимости Абеля.

Потом докажите, что интеграл по мучу не зависит от выбора муча с $0 < \varphi < \pi/2$, используя интегральную теорему Коши для области, ограниченной двумя отрезками и дугой.

Потом рассмотрите луч с $\varphi = \pi/4$.]]

Задача

10.19.

Докажите, что если $f = u + iv$ аналитическая, то u и v являются гармоническими, то есть для оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ выполняется

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

[[

Используйте условия Коши-Римана.

]]

Задача

10.20.

Докажите, что всякая дважды непрерывно дифференцируемая гармоническая $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ в односвязном U является действительной частью некоторой аналитической в U функции.

[[

Используйте условия Коши-Римана и достаточные условия наличия потенциала в односвязной области для нахождения подходящей v .]

7.0.5 Laurent Series and Singularities of a Function at a Point

Для функций комплексного переменного есть обобщение ряда Тейлора на случай, когда функция аналитична в кольце между двумя окружностями вида

$$A_{r,R}(z_0) = \{z : r < |z - z_0| < R\}$$

Ряд Лорана

Если f аналитическая в кольце $A_{r,R}(z_0) = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, то в нём она представляется в виде абсолютно сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Доказательство

Рассмотрим некоторую точку $z \in A_{r,R}(z_0)$.

Возьмём две окружности центрами в z_0 в этом кольце, γ и γ , так чтобы z лежала вне γ и внутри Γ .

Между этими окружностями заключено меньшее кольцо и они составляют его границу.

Считая ориентацию обеих окружностей против часовой стрелки, получим по обобщённой интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Первое слагаемое превращается в ряд Тейлора, давая компоненты $c_n (z - z_0)^n$ с $n \geq 0$.

Второе преобразуем, помня что в нём $|z - z_0| > |\zeta - z_0|$,

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta) (\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

С учётом того, что интегралы любой аналитической в $A_{r,R}(z_0)$ функции по γ и γ совпадают (обобщённая интегральная теорема Коши), мы приходим в точности к требуемому разложению и требуемым формулам.

Заметим, что ряд Фурье выглядит похоже на ряд Лорана.

Если мы рассмотрим 2π периодическую функцию действительной переменной t , то её также можно считать функцией на единичной окружности $\{z = e^{it}\}$.

В этом случае её ряд Фурье в точности имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

Конечно, он не обязан абсолютно сходиться, так как f может и не продолжаться до аналитической функции на каком-либо кольце.

даже гладкость функции f на окружности гарантирует лишь оценки её коэффициентов Фурье вида

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

тогда как её аналитичность в некотором кольце давала бы (например, по формуле Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда) более сильную оценку вида

$$c_n = O(\rho^{|n|})$$

где $r, 1/R < \rho < 1$.

Эти оценки можно рассматривать как количественные способы различить гладкость и аналитичность.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда функция аналитическая в окрестности точки z_0 , но не в самой точке z_0 , это будет называться изолированная особенность.

Будем говорить, что f определена в проколотой окрестности точки z_0 .

Рассмотрим следующие случаи:

Теорема об устранимой особенности

Если f аналитическая и ограничена в проколотой окрестности z_0 , то её особенность в z_0 устранима и она на продолжается до аналитической функции в окрестности z_0 .

Доказательство

Из формулы для коэффициентов Лорана

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta$$

с интегралом по окружности радиуса ρ мы получаем оценку

$$|c_{-n}| \leq |\rho|^n \sup_{z \in \gamma} |f(z)|,$$

которая стремится к нулю при $\rho \rightarrow +0$, если $n \geq 1$.

Это означает, что ряд Лорана на самом деле является рядом Тейлора и функция может считаться аналитической в z_0 .

Теорема о полюсе

Если f аналитическая в проколотой окрестности z_0 и $|f(z)| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$, то в этом кольце f имеет вид

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

рядком полюса.

Доказательство

В этой ситуации $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ ограничена в проколотой окрестности z_0 , а значит является аналитической в z_0 .

Рассмотрев первый ненулевой коэффициент разложения h в ряд Тейлора, мы получим

$$h(z) = (z - z_0)^k s(z)$$

где $s(z_0) \neq 0$.

Тогда требуемая формула выполняется для $g(z) = 1/s(z)$.

Теорема о существенной особой точке

Если f аналитическая в проколотой окрестности z_0 и её особенность в z_0 не устранима и не является полюсом, то всякое число $a \in \mathbb{C}$ является её частичным пределом при $z \rightarrow z_0$.

Доказательство

Предположим противное, что число $a \in \mathbb{C}$ не является частичным пределом f в z_0 . Тогда функция

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

ограничена в некоторой проколотой окрестности z_0 , следовательно она аналитическая в этой окрестности.

Тогда

$$f(z) = a + \frac{1}{h(z)} = \frac{1 + ah(z)}{h(z)}$$

и из этой формулы видно, что особенность f либо устранима (если $h(z_0) \neq 0$), либо является полюсом.

Иначе можно описать существенную особенность как такую, в которой ряд Лорана по степеням $z - z_0$ содержит бесконечно много ненулевых слагаемых с отрицательными степенями, полюс - как ситуацию, когда имеется конечное число ненулевых слагаемых с отрицательными степенями, устранимую особенность - как отсутствие слагаемых с отрицательными степенями.

Если функция определена в окрестности ∞ , то есть определена для достаточно больших $|z|$, то мы можем говорить о её особенности в бесконечности.

По сути, изучение особенности в бесконечности сводится к изучению особенности в нуле после замены

$$z = 1/\zeta.$$

Об особенностях рациональной функции (?)

Пусть функция f имеет лишь изолированные особенности и все они полюса, в том числе и в бесконечности. Докажите, что f - рациональная функция.

||

Из компактности особенностей конечное число.

Умножив f на многочлен, можно добиться исчезновения полюсов в конечных точках.

Далее используйте задачу 10.17.

||

7.0.6 Contour Integrals and Residues

Если же внутри контура на комплексной плоскости есть особенности, то мы можем выразить интеграл через некоторые числа, соответствующие этим особенностям, иначе же, если нет особенностей, он равен нулю.

Определение вычета

Вычетом в изолированной особой точке z_0 аналитической функции f называется интеграл

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$$

по достаточно маленькой окружности с центром в z_0 , ориентированной против часовой стрелки.

Иначе говоря, вычет равен коэффициенту c_{-1} в разложении f в ряд Лорана по $z - z_0$ в проколотой окрестности z_0 . Для нахождения вычета в полюсе первого порядка достаточно посчитать предел

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Для полюсов большего порядка вычисления могут быть посложнее, один из вариантов - написать для полюса k -го порядка

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z))$$

В точках существенной особенности вычисление вычета может оказаться весьма трудной задачей.

Определение вычета в бесконечности

Вычетом в бесконечности называется

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$$

по достаточно большой окружности с центром в нуле, ориентированной против часовой стрелки.

Иначе говоря, вычет равен $-c_{-1}$ в разложении f в ряд Лорана по степеням z в окрестности бесконечности.

Формула вычетов

Пусть $U \subset \mathbb{C}$ - ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной так, что U при обходе остаётся слева.

Если $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ аналитическая в U кроме конечного числа изолированных особых точек и непрерывно продолжается на границу U , то

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{res}_{z_k} f(z)$$

где сумма берётся по изолированным особым точкам в U .

Доказательство (??)

Выкинем из области U объединение маленьких кругов с центрами в z_k и применим интегральную формулу Коши, должен получиться нулевой интеграл.

Это означает, что интеграл по границе $\bar{U}$ равен сумме интегралов по маленьким окружностям вокруг особых точек, то есть равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов, по определению вычетов.

В этой теореме можно рассматривать и неограниченные области, содержащие окрестность бесконечности, тогда в формулу надо будет добавить вычет в бесконечности.

Об отношении многочленов с помощью формулы вычетов

Пусть многочлены P и Q таковы, что $\deg P + 2 \leq \deg Q = n$, а многочлен Q имеет n различных корней $z_1, \dots, z_n$.

Докажите, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = 0$$

||

Используйте формулу вычетов.

||

Об отрезках (?)

иногда в интегральных формулах возникает ситуация, когда например часть границы области U имеет вид отрезка I , окружённого этой областью.

Тогда может оказаться, что продолжение по непрерывности на I будет разным с одной стороны отрезка и с другой стороны.

Так как доказательство интегральной теоремы Коши у нас опирается на сдвиг контура интегрирования с границы внутрь области, то становится ясно, как рассматривать такой случай: интеграл по отрезку I , как по части границы ∂U , надо брать отдельно по двум его "сторонам" и значения f на каждой стороне брать соответственно.

В качестве примера можно рассмотреть функцию

$$f(z) = z^{p-1}(1-z)^{-p}$$

при действительном $p \in (0, 1)$.

Будем считать, что по этой формуле функция определена на верхней стороне отрезка $[0, 1] \subset \mathbb{C}$.

Имея в виду формулу

$$z^{p-1} = e^{(p-1) \operatorname{Ln} z}$$

мы можем понять, как выражение z^{p-1} меняется при обходе нуля с верхней стороны отрезка до нижней, оно при этом умножится на $e^{2\pi(p-1)i} = e^{2\pi pi}$ и не изменится по модулю.

Аналогично, при обходе 1 с верхней стороны отрезка до нижней выражение $(1-z)^{-p}$ по модулю не поменяется, но умножится на $e^{2\pi pi}$.

Это позволяет заключить, что вся функция f аналитически продолжается на $\mathbb{C} \setminus I$.

Тогда формула вычетов даёт:

$$\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{-p} dz - e^{2\pi pi} \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{-p} dz = 2\pi i \operatorname{res}_\infty f(z).$$

Значение действительного интеграла - это $B(p, 1-p)$, а вычет в бесконечности находится из того, что при выбранном нами продолжении с верхней части отрезка $f(z) \sim e^{\pi pi}/z$ при $z \rightarrow \infty$, то есть

$$B(p, 1-p) (1 - e^{2\pi pi}) = -2\pi i e^{\pi pi}$$

что после тривиального преобразования даёт нам формулу дополнения:

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

Формула вычетов также позволяет узнать количество нулей аналитической функции внутри данного контура (с учётом кратности).

Принцип аргумента

Пусть b аналитическая в области U кроме может быть конечного количества полюсов и непрерывно продолжается на её кусочно-гладкую границу так, что на границе f не обращается в нуль. Тогда при стандартной ориентации границы

$$\int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_{f(z')=0} k_{z'} - \sum_{f(z'')=\infty} k_{z''} \right)$$

где $k_{z'}$ - это кратность нуля $k_{z''}$ - порядок полюса в z'' .

Доказательство

Всё сводится к вычислению вычета логарифмической производной $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в нуле или полюсе f .

Например, если z' является нулём кратности k , тогда в окрестности z'

$$f(z) = (z - z')^k g(z),$$

где $g(z)$ аналитическая и $g(z') \neq 0$, тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z'} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

у первого слагаемого вычет k , а второе аналитическое в точке z' и не имеет вычета. В принципе, достаточно корректно в этой формуле писать $\frac{f'(z)}{f(z)}dz = d \operatorname{Ln} f(z)$.

Вспоминая определение логарифма и его неоднозначность, мы могли бы даже без формулы вычетов заметить, что интеграл этого выражения по замкнутому контуру должен быть кратен $2\pi i$, так как неоднозначность в логарифме может быть только такой.

Говоря неформально, количество нулей и полюсов внутри контура с учётом кратности и порядка равно числу вращения вектора $f(z)$ при обходе z по данному контуру.

Принцип аргумента даёт ясное представление о том, почему всякий комплексный многочлен степени n должен иметь n корней с учётом кратности.

Действительно, при большом $|z|$ мы имеем выражение

$$P(z) = az^n(1 + o(1))$$

которое показывает, что $P(z)$ при движении z по окружности достаточно большого радиуса делает ровно n оборотов вокруг начала координат.

Аналитическая функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ без нулей имеет вид $f(z) = e^{g(z)}$

Пусть аналитическая функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ не имеет нулей. Докажите, что тогда она представляется в виде $f(z) = e^{g(z)}$ для некоторой аналитической $g(z)$.

[[
Заметьте, что интеграл $d \operatorname{Ln} f(z)$ по любому контуру равен нулю.
]]

Задача

10.32.

Пусть f аналитическая в области U кроме может быть конечного количества полюсов и непрерывно продолжается на её кусочно-гладкую границу так, что на границе f не обращается в нуль.

докажите, что сумма k -х степеней корней уравнения $f(z) = 0$ с учётом кратностей будет равна

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} z^k d \operatorname{Ln} f(z)$$

[[
Рассуждайте так же, как при доказательстве принципа аргумента.
]]

7.0.7 Analytic Continuations of Functions

Явные формулы для рядов Тейлора дают нам возможность продолжить элементарные функции до аналитических функций на $\mathbb{C}$ или его подмножество, например, так можно продолжить синус, косинус, тангенс и т.п.

Собственно, тригонометрические функции на самом деле определяются через уже изученную нами экспоненту, например $\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$. Первый вопрос, который при этом возникает - это вопрос о единственности такого продолжения.

Единственность аналитического продолжения

Если две аналитические функции $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ на области U совпадают на множестве, имеющем бесконечное пересечение с каким-то компактом $K \subset U$, то они совпадают на всей U .

Доказательство

В условиях теоремы функция $h = f - g$ аналитическая.

Из представления непостоянной аналитической функции в окрестности её нуля $h(z_0) = 0$

$$h(z) = (z - z_0)^k m(z)$$

с $m(z_0) \neq 0$ следует, что её нуль изолирован, так как $m(z)$ также будет ненулевой в некоторой окрестности z_0 .

По предположению противного, множество нулей h имеет предельную точку $z_0 \in K \subset U$, а значит, по замечанию об изолированности нуля, обращается в нуль в некоторой её окрестности.

Обозначим $V \subseteq U$ внутренность множества нулей h , по нашим предположениям V не пусто.

Если h не везде равна нулю, то из связности U найдётся точка $z \in \partial V \cap U$.

По непрерывности h мы имеем $h(z) = 0$, причём по выбору z этот нуль не изолирован, следовательно, h обращается в нуль в окрестности z и на самом деле $z \in V$, противоречие с выбором z .

Theory

Доказанная теорема показывает, что с интервала в $\mathbb{R}$ функция аналитически продолжается однозначно. Но могут быть некоторые нюансы. Мы уже видели примеры аналитического продолжения функции действительного аргумента на $\mathbb{C}$ или его открытое подмножество.

В случае логарифма нам приходилось рассматривать «многозначную функцию», точнее говоря функцию на универсальном накрытии $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, которая уже оказывается единственным продолжением логарифма.

Аналогично, для функции

$$f(z) = z^{1/n} = e^{\frac{\operatorname{Ln} z}{n}}$$

аналитическое продолжение возможно в универсальное накрытие $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (и по непрерывности в 0).

Если n - натуральное число, то для такой функции не обязательно брать универсальное накрытие, а достаточно рассмотреть n -кратное накрытие

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto z^n$$

Заметим, что для разложения аналитической функции по формуле Тейлора с центром в z_0 достаточно проверить её аналитичность в круге $|z - z_0| < R$.

Если же функция продолжена на круг с некоторыми особыми точками (полюсами, существенными особенностями или даже точками, при обходе вокруг которых аналитическое продолжение меняется), то радиус сходимости будет в точности равен расстоянию от z_0 до ближайшей существенной особенности r .

Действительно, по теореме 10.13 он не менее r , а по теореме о единственности продолжения он и не более r .

Это позволяет находить радиус сходимости без использования формул типа Коши-Адамара и вообще без особых вычислений.

Задача

10.34.

Найдите радиус сходимости ряда Δ , для $\operatorname{tg} z$ с центром в нуле.

||

Найдите ближайшую особенность.

||

В общем случае нет какого-то однозначного рецепта продолжения аналитической функции с одной области на большую область, в каждом конкретном случае используются разные методы. При этом, и при рассмотрении конформных отображений, иногда бывает полезно следующее утверждение.

Склеивание аналитических функций

Если функция $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на и аналитична на области U , кроме быть может множества $X \in U$, состоящего из конечного объединения гладких кривых, пересекающихся в конечном числе точек, то f на самом деле аналитична на всей U .

Доказательство

Потеря аналитичности на конечном множестве гладких кривых не влияет на действительность интегральной теоремы Коши и интегральной формулы

Коши, так как контур интегрирования можно сдвинуть так, чтобы он пересекал X лишь конечное число раз.

Непрерывность f при этом позволяет заключить, что интеграл изменится на произвольно малое число и утверждения теорем будут получаться предельным переходом.

При этом, например, для доказательства интегральной теоремы Коши можно разрезать область, ограниченную контуром интегрирования, на конечное число частей кривыми из X , применить теорему для каждой части и собрать нуль на исходном контуре, используя сокращение значений интегралов на разрезах.

Продолжение гамма функции

Проверьте, что

$$\gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

корректно определяет гамма-функцию при $\operatorname{Re} z > 0$ как аналитическую функцию, если мы считаем $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$.

Докажите, что она продолжается до аналитической функции, определённой для всех комплексных чисел, кроме полюсов в неположительных целых числах.

||

Используйте верную при $\operatorname{Re} z > 0$ формулу $z\gamma(z) = \gamma(z+1)$, чтобы последовательно строить продолжение на области $\operatorname{Re} z > -n$; или используйте формулу дополнения $\gamma(z)\gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$.

Продолжение дзета-функции Римана

Проверьте, что

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

корректно определяет дзета-функцию при $\operatorname{Re} z > 1$ как аналитическую функцию, если мы считаем $n^z = e^{z \ln n}$.

Докажите, что её можно продолжить на область $\operatorname{Re} z > 0$ так, что у неё будет только один полюс в $z = 1$.

||

Рассмотрите разность $\zeta(z) - \int_1^{+\infty} x^{-z} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-z} - \int_n^{n+1} x^{-z} dx \right)$ и докажите, что она сходится к аналитической при $\operatorname{Re} z > 0$ функции.

||

Преобразование Фурье аналитически продолжает некоторые функции

Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель, то её преобразование Фурье аналитически продолжается на $\mathbb{C}$.

||

Проверьте абсолютную сходимость и комплексную дифференцируемость для интеграла в определении преобразования Фурье.

||

Преобразование Фурье аналитически продолжает некоторые ещё функции (?)

Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ обращается в нуль при $x > 0$, то её преобразование Фурье даёт аналитическую в верхней полуплоскости $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функцию, которая непрерывно продолжается до $\partial H = \mathbb{R}$ и стремится к нулю, когда $z \rightarrow \infty$

||

Проверьте абсолютную сходимость и комплексную дифференцируемость для интеграла в определении преобразования Фурье, также вспомните лемму Римана об осцилляции.

||

7.0.8 Openness and Maximum Principle

Локальная структура аналитического отображения

Если у аналитической в окрестности z_0 функции производные $f'(z_0), \dots, f^{(k-1)}(z_0)$ равны нулю, $af^{(k)}(z_0) \neq 0$, то ограничение f на некоторую окрестность $V \ni z_0$ образует накрытие $V \setminus \{z_0\} \rightarrow f(V) \setminus f(z_0)$ кратности k .

Доказательство

Условия теоремы означают, что первый после $f(z_0)$ ненулевой коэффициент ряда Тейлора f стоит при $(z - z_0)^k$, то есть в окрестности z_0 имеет место представление

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k g(z)$$

где g аналитическая и $g(z_0) \neq 0$.

После сдвига будем считать, что $z_0 = f(z_0) = 0$, это упростит формулы.

Так как $g(0) \neq 0$, то в некоторой окрестности нуля однозначно определена

$$h(z) = g(z)^{1/k} = e^{\frac{\operatorname{Ln} g(z)}{k}},$$

тогда мы можем написать

$$f(z) = z^k g(z) = z^k h(z)^k = (zh(z))^k$$

Так как $h(0) \neq 0$, то $\varphi(z) = zh(z)$ имеет ненулевую производную в нуле и по теореме об обратном отображении взаимно однозначно отображает некоторую $V \ni 0$ на $V' \ni 0$, при этом f является композицией $\psi \circ \varphi$, где $\psi : z \mapsto z^k$.

Очевидно, ψ на всяком проколоте круге с центром в нуле даёт накрытие другого проколотого круга с центром в нуле кратности k .

Если мы сузим V' до открытого круга с центром в нуле и соответственно изменим $V = \varphi^{-1}(V')$, то мы поймём, что на $V \setminus \{0\}$ и $f = \psi \circ \varphi$ даёт накрытие кратности k . Заметим, что теорема о структуре аналитических отображений может быть обобщена на случай, когда f имеет в z_0 полюс порядка k .

Тогда применение уже доказанного варианта к функции $1/f(z)$ показывает, что образ некоторой проколотой окрестности z_0 покрывает некоторую проколотую окрестность ∞ (то есть множество вида $|z| > R$) с кратностью k .

Принцип сохранения области

Непостоянная аналитическая функция переводит область в область.

Доказательство

Теорема о локальной структуре показывает, что непостоянная аналитическая функция переводит открытое множество в открытое. Также всякое непрерывное отображение переводит связное множество в связное, в итоге получаем утверждение.

Принцип максимума

Для аналитической функции f на области U локальный максимум $|f|$ может находиться в U только если f постоянна.

Аналогично с заменой $|f|$ на $\operatorname{Re} f$ или $\operatorname{Im} f$.

Доказательство

Предположим противное, что f непостоянна и $z_0 \in U$ даёт локальный максимум $|f|$.

Пусть $f(z_0) = a$; из открытости f мы знаем, что для всякой $U_\delta(z_0)$ найдётся

$$U_\sigma(a) \subseteq f(U_\delta(z_0))$$

Это значит, что в произвольно малой окрестности z_0 функция принимает, в частности, значения с $|f(z)| > |a| = |f(z_0)|$.

Доказательство для мнимой и вещественной частей f аналогично.

О применениях (!?)

(!? вроде применений много очень.)

Локальный минимум аналитической функции

докажите, что для аналитической $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ локальный минимум $|f(z)|$ может достигаться только при $f(z) = 0$.

[[

действуйте аналогично доказательству принципа максимума.

]]

Задача

10.44.

докажите, что для аналитической $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ функция $|f(z)|$ субгармоническая, то есть для оператора Лапласа выполняется

$$\Delta |f(z)| \geq 0$$

[[

Можно заметить для начала, что $\ln |f(z)|$ является гармонической.

]]

Задача

10.45.

Пусть $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z| < R$.

Докажите, что функция действительного аргумента

$$g(x) = \ln \sup_{|z|=e^x} |f(z)|$$

выпукла на $(\ln r, \ln R)$.

[[

Заметьте, что функция $\ln |z|^\alpha |f(z)|$ гармоническая и примените для неё принцип максимума при подходящих $\alpha \in \mathbb{R}$.]]

7.0.9 Compactness Property for Analytic Functions

Докажем, что оценка на модуль аналитической функции влечёт оценку на модуль её производной.

Лемма Шварца

Если аналитическая функция ограничена в круге $U_R(z_0)$ по модулю числом M и $f(z_0) = 0$, то выполняется

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$$

сравнением только в случае, если $f(z) = a(z - z_0) c |a| = M/R$ Доказательство.

Заметим, что

(????)

где $g(z)$ аналитическая и удовлетворяет неравенству

$$|g(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|}$$

Значит верхний предел $|g(z)|$ при $|z - z_0| \rightarrow R$ равен M и на самом деле по принципу максимума $|g|$ не может быть больше M/R в $U_R(z_0)$, так как иначе $|g|$ имел бы локальный максимум в этом круге.

Тогда мы получаем

$$|f'(z_0)| = |g(z_0)| \leq \frac{M}{R}$$

В случае равенства $|g(z_0)| = M/R$ является локальным максимумом и g должна быть постоянной, то есть f должна быть линейной указанного в формулировке теоремы вида.

Задача

10.47.

Докажите, что условие $f(z_0) = 0$ в формулировке теоремы не требуется.

[[

Можно взять композицию f с конформным преобразованием круга $U_M(0)$, переводящим $f(z_0)$ в 0, см.

раздел 10.10.]]

Компактность в пространстве аналитических функций

Теорема:

Пусть множество X аналитических на области U функций равномерно ограничено, то есть выполняется $|f(z)| \leq M$ для любой $f \in X$ и $z \in U$.

Тогда в этом множестве можно выбрать последовательность (f_n) , которая сходится к аналитической $f_0 : U \rightarrow \mathbb{C}$ равномерно на любом компакте $K \subset U$ и для всякого $k \in \mathbb{Z}^+$ последовательность производных $(f_n^{(k)})$ тоже сходится к $f_0^{(k)}$ равномерно на любом компакте $K \subset U$.

Из доказательства будет ясно, что вместо равномерной ограниченности достаточно требовать равномерной ограниченности на каждом компакте $K \subset U$ (константой M_K , зависящей только от K), мы не пишем это в формулировке теоремы, так как она и так получилась достаточно тяжеловесной.

Доказательство

Представим U в виде объединения счётной последовательности компактов (K_m) , в которой каждый следующий компакт содержит предыдущий в своей внутренней части.

Рассмотрим один из них.

Так как расстояние от K_m до дополнения $\mathbb{C} \setminus U$ положительно, то K_m лежит в U вместе со своей ε -окрестностью.

Тогда по лемме Шварца производные всех $f \in X$ на K_m ограничены по модулю M/ε .

Значит ограничения $f \in X$ на K_m равномерно непрерывны и по теореме Арцела-Асколи 9.50 мы можем составить из них последовательность, сходящуюся равномерно на K_m .

Таким образом для K_1 мы можем найти последовательность $(f_n) \subseteq X$, равномерно сходящуюся на K_1 .

Переходя к K_2 , мы найдём в ней подпоследовательность σ_2 , сходящуюся и на K_2 .

Далее, мы получим последовательность вложенных подпоследовательностей

$$\sigma_1 = (f_n) \supseteq \sigma_2 \supseteq \sigma_3 \supseteq \dots$$

такую что подпоследовательность σ_m равномерно сходится на K_m .

Теперь сделаем «диагональную процедуру», выберем f_{n_m} в подпоследовательности σ_m так, чтобы номера n_m возрастали, получим подпоследовательность исходной последовательности (f_n) , обладающую тем свойством, что для достаточно больших m' (а именно $m' \geq m$) её элементы $f_{n'_m}$ являются элементами подпоследовательности σ_m .

Следовательно, эта подпоследовательность сходится к некоторой непрерывной f равномерно на каждом из K_m .

Обозначим эту подпоследовательность опять (f_n) для простоты.

Любой другой компакт $K \subset U$ покрыт внутренностями $\text{int } K_m$, а значит содержится полностью внутри одного из K_m , следовательно, построенная последовательность сходится равномерно на любом компакте в U .

Во всякой формуле Коши

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

можно перейти к равномерному пределу и убедиться, что для предельной функции f_0 эта формула также верна, следовательно f_0 является аналитической.

Рассматривая формулы

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

и переходя к равномерному пределу в правой части мы увидим, что и k -е производные $f_n^{(k)}$ тоже стремятся к некоторому значению равномерно на компактах, и оно обязано оказаться равным $f_0^{(k)}$.

О применении леммы Шварца

(напишу потом)

7.0.10 Introduction to Conformal Mappings

(!!! соединю потом с конформными отображениями в комплане, тут как раз только введение в то, что там!)

Будем рассматривать конформные отображения между областями $f : U \rightarrow V$, то есть аналитические биективные отображения U на V .

Необходимо пояснить обратимость таких отображений:

Теорема

Обратная для аналитической инъективной функции тоже аналитическая.

Доказательство

Если в какой-то точке производная f' обращается в нуль, то теорема о локальной структуре 10.40 показывает, что в окрестности этой точки отображение не инъективно.

Тогда по теореме об обратном отображении обратная функция является бесконечно гладкой, а рассмотрение его производной показывает, что обратное отображение

дифференцируемо в комплексном смысле и следовательно аналитично. Также иногда полезно знать, что происходит с границей области при конформном отображении, если оно непрерывно и инъективно продолжается на границу.

Теорема о ограниченности образа области при отображении (???)

(?? очевидно же???)

Если область U ограничена простой кусочно гладкой кривой и конформное отображение $f : U \rightarrow V$ непрерывно продолжается до инъективного $f : \partial U \rightarrow \mathbb{C}$, то $V = f(U)$ является областью, ограниченной кривой $f(\partial U)$.

Доказательство

Для $a \notin f(\partial U)$ можно найти количество решений уравнения $f(z) = a$ из принципа аргумента

$$n_a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz$$

Правая часть этого выражения непрерывно зависит от $a \in \mathbb{C} \setminus f(\partial U)$, а так как это всегда целое число, то оно локально постоянно зависит от a .

По теореме Жордана (мы её не доказывали, но в конкретных случаях её всегда можно проверить непосредственно), множество $\mathbb{C} \setminus f(\partial U)$ имеет неограниченную компоненту связности, на которой рассмотрение очень больших a и компактность $f(U \cup \partial U)$ гарантирует $n_a \equiv 0$, а также имеет одну ограниченную компоненту связности, для которой остаётся вариант $n_a \equiv 1$

Задача

10.51.

Докажите, что:

Если аналитическая функция $f : U \rightarrow V$ биективна, то можно взять замкнутый контур $\gamma \subset V$ и на внутренности $f(\gamma)$ будет верна формула

$$f^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z) - \zeta} dz$$

||

Это на самом деле обобщение принципа аргумента Для решения уравнений $f(z) = \zeta$; иначе эту формулу можно рассматривать как формулу Коши Для f^{-1} с заменённой переменной.

||

Типичные конформные отображения (??)

Теперь мы займёмся описанием конкретных конформных отображений.

для начала опишем конформные преобразования $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Из их обратимости и биективности следует, что при $z \rightarrow \infty$ должно выполняться $f(z) \rightarrow \infty$.

Следовательно, особенность такого f в бесконечности является не более чем полюсом, а значит его ряд Тейлора (Лорана) является конечной суммой, то есть f - это многочлен.

По принципу аргумента (или по "основной теореме алгебры») только многочлен первой степени может быть биективным, то есть остаются только варианты

$$f(z) = az + b, \quad a \neq 0$$

У комплексной плоскости оказалось не слишком много конформных преобразований.

Часто комплексную плоскость расширяют до сферы Римана S , добавляя бесконечно удалённую точку ∞ .

Для функций без существенных особенностей (в том числе на бесконечности) можно корректно говорить о случаях $f(z) = \infty$ (полнос) и о значении $f(\infty)$.

Можно построить дробно-линейные конформные преобразования $S \rightarrow S$ по формулам

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

и доказать, что других на самом деле нет.

Действительно, для всякого конформного преобразования $f : S \rightarrow S$ можно взять его композицию с дробно-линейным

$$g(z) = \varphi(f(z))$$

так, что $g(\infty) = \infty$.

После этого g даёт конформное преобразование $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, и значит является линейным.

Явная подстановка показывает, что

$$f(z) = \varphi^{-1}(g(z))$$

тоже оказывается дробно-линейным.

Определение группы Мебиуса

Группа конформных преобразований S называется группой Мёбиуса.

Полезно рассмотреть антиконформные отображения сферы Римана, заданные по формуле

$$f(z) = z_0 + \frac{R^2}{z - z_0}.$$

При таком отображении всякая точка окружности $|z - z_0| = R$ остаётся на месте и в целом отображение выглядит как «отражение» относительно окружности.

Такое отображение называется инверсия относительно окружности.

Инверсия является антиконформным отображением, но композиция двух инверсий уже будет сохранять ориентацию, то есть будет конформным отображением.

Задача

10.53.

докажите, что конформные преобразования $f : S \rightarrow S$ могут перевести любую упорядоченную тройку попарно различных точек $\{a, b, c\} \subset S$ в любую другую упорядоченную тройку попарно различных точек $\{a', b', c'\} \subset S$, и что конформное преобразование $f : S \rightarrow S$ однозначно определяется упорядоченным набором

$$\{\{a, b, c\}, \{f(a), f(b), f(c)\}\}.$$

||

Переведите одну точку в нуль, другую в бесконечность, и посмотрите, что делать с оставшейся точкой, если нуль и бесконечность уже нельзя двигать.

||

Конформные преобразования $f : S \rightarrow S$ сохраняют $D(a, b, c, d) = \frac{(d-a)(b-c)}{(b-a)(d-c)}$

Докажите, что конформные преобразования $f : S \rightarrow S$ сохраняют двойное отношение (ангармоническое отношение) упорядоченной четвёрки попарно различных точек

$$D(a, b, c, d) = \frac{(d-a)(b-c)}{(b-a)(d-c)}$$

||

Заметьте, что это достаточно доказать для преобразований вида $z \mapsto az+b$ (выражение очевидно сохраняется) и отображения $z \mapsto 1/z$.

Заметьте также, что $D(a, b, c, d) \in S$ по непрерывности можно определить для случаев $d = a, d = b, d = c$, если a, b, c остаются попарно различными.

||

$D(a, b, c, d) = \frac{(d-a)(b-c)}{(b-a)(d-c)}$ **определяет прямую или окружность, проходящую через a, b, c**

Докажите, что при фиксированных попарно различных $a, b, c \in S$ условие

$$D(a, b, c, z) \in \mathbb{R}$$

определяет прямую или окружность, проходящую через a, b, c .

Выведите, что конформные преобразования S переводят прямую или окружность в прямую или окружность.

||

Можно посчитать в координатах, а можно для начала перевести a, b, c на действительную прямую.

||

Задача

10.56.

Пусть конформное отображение переводит кольцо $r < |z| < R$ в другое кольцо на комплексной плоскости и продолжается до непрерывного отображения границы кольца в границу нового кольца.

докажите, что отношение R/r при таком отображении сохраняется.

||

С помощью инверсий и теоремы о склеивании продолжите f на всю сферу Римана S .

||

(??? это какой-то целочисленный инвариант?? у него есть применения?)

Об отображении единичного круга

Введём ещё одну интересную для нас область - открытый единичный круг D .

Рассмотрение сферы Римана уже даёт соображения о том, как построить конформные преобразования $f : D \rightarrow D$.

Нужно рассмотреть дробно-линейные отображения, оставляющие на месте окружность ∂D , то есть

$$f(z) = b \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1, |b| = 1$$

Как видно из формулы, такое отображение переводит точку $a \in D$ в нуль, а значит может перевести любую точку D в любую другую (так как композиция двух отображений такого вида является отображением такого же вида).

Покажем, что все конформные преобразования $f : D \rightarrow D$ имеют такой вид.

Действительно, взяв композицию f с подходящим дробно-линейным φ можно считать, что

$$g(z) = \varphi(f(z))$$

переводит нуль в нуль.

Тогда по лемме Шварца для g и g^{-1}

$$|g'(0)| \leq 1, \quad |(g^{-1}(0))'| \leq 1$$

Так как левые части этих неравенств взаимно обратны, то на самом деле выполняется равенство и по описанию случая равенства в лемме Шварца мы получаем

$$g(z) = az, \quad |a| = 1$$

Значит исходное f тоже было дробно-линейным.

Задача

10.57.

Докажите, что найденные конформные отображения $D \rightarrow D$ сохраняют риманову метрику

$$g(X, Y) = \frac{(X, Y)}{(1 - |z|^2)^2}$$

если вектора X, Y находятся в точке z .

||

Выпишите производную дробно-линейного f и найдите её детерминант как действительномвумерного линейного оператора.

||

Задача

10.58.

Пусть при конформном отображении $f : Q \rightarrow \mathbb{C}$ образ единичного квадрата Q (мы считаем отображение непрерывно продолженным на границу) имеет площадь S , и пусть I и J две его противоположные стороны.

докажите, что

$$\text{dist}(f(I), f(J)) \leq \sqrt{S}$$

||

Заметьте, что за изменение длины кривой при конформном отображении отвечает $|f'(z)|$, за изменение площади — $|f'(z)|^2$.

Задача

10.59.

Пусть f — аналитическая функция на единичном круге.

Докажите, что Алина кривой $\gamma_r = \{f(re^{i\varphi})\}_{\varphi=0}^{2\pi}$ монотонно возрастает с ростом $r \in [0, 1)$.

||

Выпишите явную формулу для длины и заметьте, что $|f'(z)|$ является субгармонической.

||

7.0.11 Riemann Mapping Theorem

Теорема Римана об отображении

Для всякой односвязной $U \subset \mathbb{C}$ не равной $\mathbb{C}$ существует конформное отображение U на D .

(????)

С другой стороны: рассмотрим односвязные области. Заметим, что $\mathbb{C}$ и D не являются конформно эквивалентными хотя бы потому, что на $\mathbb{C}$ всякая ограниченная аналитическая функция является постоянной, а на D существует огромное количество ограниченных аналитических функций. Согласно теореме Римана, других примеров конформно неэквивалентных односвязных областей в $\mathbb{C}$ нет.

Доказательство

Построим сначала хотя бы инъективное отображение $f : U \rightarrow D$.

По предположению существует точка $c \in \mathbb{C}$, не принадлежащая U , без ограничения общности пусть это 0.

Тогда $\operatorname{Ln} z$ в силу односвязности может быть однозначно определён на U , иначе говоря, найдётся $U' \subset \mathbb{C}$ такое, что экспонента $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ даёт биективное отображение $U' \rightarrow U$.

Если a лежит в U' вместе со своей δ -окрестностью, то из инъективности экспоненты на U' следует, что $b = a + 2\pi i$ и её δ -окрестность не пересекаются с U' .

Тогда функция

$$g(z) = \frac{\delta}{z - b}$$

даёт инъективное отображение U' в D , а

$$f(z) = g(\operatorname{Ln} z)$$

даёт инъективное отображение $U \rightarrow D$. С помощью конформного преобразования D можно добиться, что найдётся $p \in U$, такая что $f(p) = 0$.

Теперь зафиксируем точку $p \in U$ и для всех инъективных аналитических $f : U \rightarrow D$, таких что $f(p) = 0$, рассмотрим $\sup_f |f'(p)|$.

По неравенству Шварца для некоторой окрестности p этот супремум конечен.

По свойству компактности мы можем выбрать последовательность (f_n) таких инъективных отображений, которая будет сходиться к некоторой аналитической $f_0 : U \rightarrow D$ и при этом будет выполняться

$$|f'_0(p)| = \sup_f |f'(p)|$$

Докажем, что f_0 на самом деле тоже инъективна, будем обозначать её просто f .

Если это не так и имеет место $f(z') = f(z'') = a$, то для количества решений уравнения $f(z) = a$ в некотором контуре $\gamma \subset U$ мы будем иметь

$$n_a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz \geq 2$$

Так как правая часть этого равенства является пределом соответствующих выражений для f_n , то и для какой-то из f_n мы будем иметь $n_a > 1$, что противоречит её инъективности; значит f инъективна.

Итак, теперь у нас есть инъективное аналитическое отображение $f : U \rightarrow D$ с максимально возможным $|f'(p)|$ и $f(p) = 0$.

Используем свойство максимальности чтобы доказать, что оно должно быть сюръективным.

Предположим $a \notin f(U)$, но $a \in D$.

Рассмотрим дробно-линейное

$$\varphi(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

которое переводит a в нуль.

Область $\varphi(f(U))$ односвязна и не содержит начала координат.

На ней можно некоторым образом однозначно определить $\operatorname{Ln} z$, а значит и один из вариантов квадратного корня

$$\sigma(z) = e^{\frac{\operatorname{Ln} z}{2}}$$

Найдём дополнительно дробно-линейное $\psi : D \rightarrow D$ так, чтобы композиция $x = \psi \circ \sigma \circ \varphi$ переводила нуль в нуль.

Эта композиция определена и инъективна на образе $f(U)$, а вот обратное к ней отображение

$$x^{-1} = \varphi^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \psi^{-1}$$

определено на всём D , аналитически переводит его в себя и не является инъективным, так как σ^{-1} - это просто возведение в квадрат.

По лемме Шварца для x^{-1} имеет место строгое неравенство

$$\left| (x^{-1}(0))' \right| < 1 \rightarrow |x'(0)| > 1.$$

Следовательно, композиция $x \circ f$ имеет большую производную в точке p , чем f , продолжая при этом инъективно отображать U в D и отображать p в нуль.

Противоречие доказывает, что $f(U) = D$.

Конформное отображение верхней полуплоскости на единичный круг (?)

Найдите какое-нибудь конформное отображение $H \rightarrow D$, где H - верхняя полуплоскость $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

[[
Поищите среди дробно-линейных.
]]

Отображение полукруга на круг

Найдите какое-нибудь конформное отображение для полукруга, $H \cap D \rightarrow D$.

[[
Дробно-линейным образом превратите полукруг в квадрант $\{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$.
Примените $\sqrt{z}$ и далее действуйте дробно-линейно.
]]

Конформные преобразования верхней полуплоскости

Докажите, что конформные преобразования верхней полуплоскости H имеют вид

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0$$

[[
Можно воспользоваться тем, что H конформно эквивалентна D .
]]

7.0.12 Universal Covering and Fundamental Group

Давайте более систематически изучим накрытия многообразий вообще.

На самом деле накрытия можно изучать не только для многообразий, но и для многообразий с краем или даже более общих (локально стягиваемых) топологических пространств.

Однако уже для областей в $\mathbb{C}$ эти утверждения нетривиальны, поэтому читатель может представлять себе такие области и их накрытия.

Определение

64.

Гладкое отображение непустых многообразий $\pi : M \rightarrow N$ называется накрытием, если у всякой $p \in N$ есть окрестность $V \ni p$, прообраз которой $\pi^{-1}(V)$ является несвязным объединением открытых множеств $\{U_\alpha\}$, каждое из которых диффеоморфно N с помощью $\pi : U_\alpha \rightarrow V$.

В комплексном случае мы будем требовать, чтобы диффеоморфизмы были аналитическими.

Определение

Универсальным накрытием связного многообразия N с выделенной точкой $p \in N$ называется множество кривых $\gamma \subset N$ с началом в p , с точностью до сохраняющей концы гомотопии.

Отображение $\pi : \tilde{N} \rightarrow N$ ставит в соответствие кривой её конец.

Теорема об том, что универсальное накрытие это тоже многообразие, $\pi : \tilde{N} \rightarrow N$ является накрытием, и комплексно-аналитическая структура наследуется

Универсальное накрытие многообразия является многообразием той же размерности и отображение $\pi : \tilde{N} \rightarrow N$ является накрытием. Комплексно-аналитическая структура также наследуется накрытием.

Доказательство

Действительно, для точки $p' \in N$ можно рассмотреть координатную окрестность $V \subset N$, которая вместе с каждой $y \in V$ содержит и отрезок $[p', y]$.

Тогда Для каждой $\gamma \in \pi^{-1}(p')$ можно построить гомеоморфную $\hat{V}$ окрестность как

$$U_\gamma = \{\gamma \diamond [p', y] : y \in V\}$$

две такие окрестности не пересекаются, так как из гомотопности кривых $\gamma \diamond [p', y]$ и $\gamma' \diamond [p', y]$ следует гомотопность

$$\gamma \diamond [p', y] \diamond [y, p'] \sim \gamma' \diamond [p', y] \diamond [y, p'],$$

но легко доказать, что также имеет место гомотопность

$$\gamma \sim \gamma \diamond [p', y] \diamond [y, p'], \quad \gamma' \sim \gamma' \diamond [p', y] \diamond [y, p']$$

так как кривая $[p', y] \diamond [y, p']$ легко стягивается в точку (проверьте самостоятельно).

Построенные окрестности U_γ на самом деле дают гладкую (или даже комплексную) структуру на M , так как функции перехода между окрестностями такого вида те же, что и между исходными $V' \subset N$; и π тогда даёт диффеоморфизмы $U_\gamma \rightarrow V$, которые при наличии комплексной структуры будут аналитическими.

Теорема об односвязности универсального накрытия

Универсальное накрытие $\widetilde{N}$ односвязно.

Доказательство

Посмотрим, что такое замкнутая кривая в $\widetilde{N}$ с началом и концом в тождественной кривой $\gamma_0 \equiv p$ по определению.

Если мы параметризуем кривые отрезком $[0, 1]$, то это непрерывное отображение

$$\lambda : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow N$$

такое что $\lambda(0, s) \equiv p$, $\lambda(t, 0) \equiv p$ и $\lambda(t, 1) \equiv p$.

Тогда для $u \in [0, 1]$ ограничение

$$\lambda_u(t, s) = \lambda(ut, s)$$

тоже даёт петлю в $\widetilde{N}$, эта петля непрерывно зависит от u и при u равном 0 является тождественным отображением в p .

Таким образом петля в $\widetilde{N}$ стянута в одну точку.

Теорема о существовании поднятия кривой

Для накрытия $\pi : M \rightarrow N$, всякой кривой γ в N с началом p и данной $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ однозначно определено поднятие кривой γ в M как кривая $\tilde{\gamma}$ в M , такая что её начало в $\tilde{p}$ и $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Доказательство

Если кривая не выходит из небольшой окрестности $V \ni p$, взятой из определения накрытия, то существование и единственность накрытия очевидны.

Произвольную кривую можно поднимать за несколько шагов, покрыв её (из компактности) конечным числом таких окрестностей.

Задача

10.69.

Докажите, что для накрытия $\pi : M \rightarrow N$ при связном N кратность накрытия над всеми точками N одна и та же.

||

Постройте биекцию между $\pi^{-1}(p)$ и $\pi^{-1}(p')$ с помощью поднятия какого-то пути γ из p в p' .

||

Теорема о гомеоморфности и кратности 1 накрытия

Если отображение связных многообразий $\pi : M \rightarrow N$ является накрытием и односвязно, то это накрытие имеет кратность 1, то есть является гомеоморфизмом.

Доказательство

Зафиксируем $p \in N$ и возьмём некоторую $\tilde{p} \in \pi^{-1}(M)$.

Поднятие кривых с началом в p в M и взятие их конца даёт отображение $\sigma : \tilde{N} \rightarrow M$.

Отображение σ само по себе является накрытием.

Действительно, если $\tilde{q} \in M$ имеет окрестность U из определения накрытия и $\bar{V} = \pi(U)$ является соответствующей окрестностью $\pi(\tilde{q}) = q$, то мы можем уменьшить V до того, чтобы она стала содержать вместе со всякой $y \in V$ и отрезок $[q, y]$.

Тогда $\sigma^{-1}(V)$ состоит из объединения некоторого количества соответствующих окрестностей в $\tilde{N}$.

В условиях теоремы $N = \tilde{N}$, то есть σ является накрытием $N \rightarrow M$ и образ $\sigma(N)$ должен оказаться связной компонентой M .

Так как M связно, то $\sigma(N) = M$, а так как по построению $\pi \circ \sigma = \text{id}_N$, то π и σ взаимно обратны и являются диффеоморфизмами.

Теорема

10.71.

Если отображение связных многообразий $\pi : M \rightarrow \mathbb{A}$ является накрытием и M односвязно, то оно гомеоморфно универсальному накрытию $\tilde{N}$.

Доказательство

Опять возьмём накрытие $\sigma : \tilde{N} \rightarrow M$, построенное в предыдущем доказательстве.

Так как M односвязно, то предыдущая теорема говорит о том, что σ является диффеоморфизмом. Для понимания дальнейшего материала от читателя будет требоваться знакомство с алгебраическим понятием «группа».

О применениях накрытий (?)

7.0.13 Fundamental Group

Фундаментальная группа $\pi_1(M)$ связного многообразия M с выделенной точкой p - это группа петель $\gamma \subset M$ с началом и концом в точке p , с точностью до гомотопии с фиксированными концами.

Групповое произведение петель γ_1 и γ_2 определяется как их конкатенация $\gamma_1 \diamond \gamma_2$, единица группы определяется как постоянная петля, а групповое обратное - с помощью прохода той же петли в обратном порядке.

Можно проверить, что определения групповых операций согласованы с отношением гомотопности петель, то есть при деформации γ_1 и γ_2 из конкатенация $\gamma_1 \diamond \gamma_2$ тоже непрерывно деформируется, то же для обратного γ^{-1} .

Теорема

10.73.

Пусть M - связное многообразие с выделенной точкой p и $q \in M$ - ещё одна его точка.

Прообразы $\pi^{-1}(q)$ точки q при универсальном накрытии $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\pi_1(M)$.

Более того, $\pi_1(M)$ вполне разрывно действует на $\tilde{M}$ диффеоморфизмами и $\tilde{M}$ является фактором $\tilde{M}$ по этому действию.

Если M является областью в $\mathbb{C}$, то эти диффеоморфизмы аналитические.

Напомним, что действие группы является свободным, если $gx \neq x$ при условии $g \neq e$ (e - единица группы).

Иначе говоря, действие свободно, если всякая орбита $\{gx : g \in G\}$ этого действия находится (не канонически) во взаимно однозначном соответствии с G ; также можно сказать, что всякий нетривиальный элемент группы действует без неподвижных точек.

В сформулированной теореме мы требуем еще более сильное свойство, чем свободное действие, сформулируем соответствующее определение:

Определение

74.

$G = \pi_1(M)$ действует на $\widetilde{M}$ вполне разрывно, если у всякой $\tilde{q} \in \bar{M}$ есть окрестность U , образы которой при действии G , $\{gU\}_{g \in G}$, попарно не пересекаются.

Набросок доказательства теоремы 10.73.

Теорема

является стандартным фактом алгебраической топологии и заинтересованный читатель может более глубоко изучить соответствующие понятия, например, по книге [11], мы же приводим краткое изложение.

Действие $\pi_1(M)$ на $\widetilde{M}$ определим так.

для представителя λ (петли с началом и концом в p) и представителя γ (кривой с началом в p) определим действие одного на другое как конкатенацию $\lambda \diamond \gamma$.

Читатель может проверить, что это определение совместимо с отношением гомотопности в определениях $\pi_1(M)$ и $\widetilde{M}$.

Для двух кривых с одним и тем же концом γ_1 и γ_2 рассмотрим петлю $\lambda = \gamma_2 \diamond \gamma_1^{-1}$.

Можно заметить, что

$$\lambda \diamond \gamma_1 = \gamma_2 \diamond \gamma_1^{-1} \diamond \gamma_1 \sim \gamma_2$$

так как $\gamma_1^{-1} \diamond \gamma_1$ является стягиваемой петлей.

Следовательно, $\pi_1(M)$ действует транзитивно на множестве $\pi^{-1}(q)$.

Рассмотрим координатную окрестность $V \ni q$, такую что при $y \in V$ отрезок $[q, y]$ тоже лежит в V .

Для всякого пути γ из p в q окрестность поднимается до окрестности γ в $\widetilde{M}$

$$U(\gamma) = \{\gamma \diamond [q, y] : y \in V\} / \sim$$

Можно заметить, что при замене γ на $\lambda \diamond \gamma$ с $\lambda \neq e \in \pi_1(M)$ мы получим другую окрестность $U(\lambda \diamond \gamma)$, не пересекающуюся с исходной, так как наличие пересечения означало бы, что

$$\lambda \diamond \gamma \diamond [q, y] \sim \gamma \diamond [q, y] \rightarrow \lambda \diamond \gamma \sim \gamma \rightarrow \lambda \sim e$$

Приведённые построения означают вполне разрывное действие $\pi_1(M)$ на $\bar{M}$ и тот факт, что M является фактормножеством $\bar{M}$ по отношению эквивалентности, заданному действием группы $\pi_1(M)$ как

$$\tilde{q} \sim g\tilde{q}, \quad \tilde{q} \in \widetilde{M}, g \in \pi_1(M)$$

Что касается аналитичности действия G при наличии комплексной структуры у M , то отождествления $\pi : U(\gamma) \rightarrow V$ задают карты на U с аналитическими функциями перехода между картами, а действие $\pi_1(M)$ этим карты просто переставляет.

Изложенные выше факты позволяют свести нахождение фундаментальной группы многообразия к нахождению его односвязного накрытия.

В следующих задачах читателю предлагается это сделать.

Задача

10.75.

Докажите, что сфера $\mathbb{S}^n$ односвязна при $n \geq 2$.Что происходит при $n = 1$?

||

Приблизьте произвольную петлю гладкой, или даже ломаной, а потом стяните её.

||

Фундаментальная группа проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ при $n \geq 2$ Найдите фундаментальную группу проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ при $n \geq 2$.

||

Вспомните его определение и накройте его сферой.

||

Задача

10.77.

Найдите фундаментальную группу тора $T^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_n$.

||

Придумайте универсальное накрытие для тора.

||

Задача

10.78.

Докажите, что группа собственных вращений трёхмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(3)$ имеет фундаментальную группу $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$ из 1 вух элементов.

||

Рассмотрите группу единичных кватернионов

$$\mathrm{Sp}(1) = \{a + bi + cj + dk : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

умножение в которой определяется с помощью продолженных по линейности формул

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

Заметьте, что $\mathrm{Sp}(1)$ односвязна и для $q \in \mathrm{Sp}(1)$ отображение $v \mapsto qvq^{-1}$ является собственным ортогональным вращением пространства мнимых кватернионов $\{xi + yj + zk\}$.

||

Задача

10.79.

* Докажите, что группа собственных вращений четырёхмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(4)$ тоже имеет фундаментальную группу $\pi_1(\mathrm{SO}(4))$ из двух элементов.

||

Определите действие $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$ на всех кватернионах как $v \mapsto q_1 v q_2^{-1}$ и докажите, что так получаются все собственные четырёхмерные вращения.

Определите неоднозначность такого представления вращений.

||

Задача

10.80.

Чтобы универсальное накрытие $\bar{M}$ связного гладкого многообразия M можно было считать абстрактным многообразием по определению, необходимо доказать, что $\pi_1(M)$ счётна.

Сделайте это.

||

Покройте M счётным числом координатных карт, каждая из которых диффеоморфна шару и пересечения каждой пары которых тоже диффеоморфно шару.

Далее в каждом классе гомотопии петель найдите представителя, который описывается в терминах порядка прохождения этих окрестностей и пересечений между ними.

||

О применениях фундаментальной группы (?)

7.0.14 General Riemann Theorem and Picard Theorem

В этом разделе мы схематично обсудим некоторые методы, которые имеют развитие в теории комплексных кривых (многообразий, локально диффеоморфных $\mathbb{C}$ с аналитическими функциями перехода между картами) и не только.

Мы возвращаемся к работе с областью $U \subseteq \mathbb{C}$ и рассматриваем её универсальное накрытие.

Про универсальное накрытие $\tilde{U}$ известно, что оно является односвязным одномерным (в комплексном смысле) комплексным многообразием.

общая

Теорема

Римана об отображении классифицирует такие многообразия:

Теорема

10.81 (общая

Теорема

Римана).

Односвязные одномерные комплексные многообразия аналитически диффеоморфны одному из трёх вариантов: $\mathbb{C}$, S и D . Доказательство общей теоремы Римана находится за пределами наших возможностей, так как оно довольно длинное и использует разнообразные свойства оператора Лапласа и гармонических функций.

Трудность заключается в том, что рассматриваемое в ней многообразие не лежит в $\mathbb{C}$ и строить на нём аналитические функции явно не получается.

Один из вариантов доказательства этой теоремы содержится в [10, глава 10]

Принимая общую теорему Римана без доказательства, мы можем в каждом конкретном случае понять, к какому из трёх типов относится универсальное накрытие нашей области.

для этого надо описать группу $\pi_1(U)$ и посмотреть, может ли эта группа вполне разрывно действовать на S и $\mathbb{C}$, если нет, то тогда для универсального накрытия останется только вариант D .

Если мы выбросили из $\mathbb{C}$ одну точку, получив $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то универсальное накрытие задаётся экспонентой $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Теорема

10.73 тогда показывает, что $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$, и образующая $\pi_1(U)$ - это любая окружность с центром в нуле.

Если мы выбросили две точки, $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, то ситуация становится интереснее.

Ясно, что $\pi_1(U)$ содержит два экземпляра $\mathbb{Z}$, C' и C'' , соответствующих обходам вокруг нуля и вокруг единицы.

Оказывается, $\pi_1(U)$ является свободным произведением, $\pi_1(U) = C'C''$, то есть группой, состоящей из всех строк (пустая строка даёт единичный элемент) (10.1) $a_1b_1\dots a_nb_n, a_1b_1\dots b_{n-1}a_n, b_1a_2\dots a_nb_n, b_1a_2\dots a_n$, $a_i \in C' \setminus \{e\}, b_i \in C'' \setminus \{e\}$ которые перемножаются так: сначала берётся конкатенация строк, потом делаются замены стоящих рядом элементов одной и той же группы на их групповое произведение $aa' \mapsto (aa')$ или $bb' \mapsto (bb')$ и удаления получающихся единичных элементов, пока это возможно.

Более подробные сведения о свободных произведениях и свободных группах читатель может найти в учебниках по алгебре или алгебраической топологии, или может поразмышлять самостоятельно в рамках следующей задачи:

Задача

10.82.

докажите, что $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ можно непрерывно деформировать в «восьмёрку» E , которая является парой окружностей, склеенных по одной точке.

Фундаментальная группа, являющаяся гомотопическим инвариантом, при этом не изменится, проверьте явно, что $\pi_1(E)$ описывается так, как мы описали свободную группу $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$.

||

для описания $\pi_1(E)$ посмотрите, в каком порядке петля идёт по двум окружностям восьмёрки E , получив запись в виде строки типа (10.1).

Проверьте, как может меняться этот порядок при гомотопии петли, получив из этого описанные выше преобразования строк и обратные к ним.

||

Можно резюмировать, что $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ является свободной группой на двух элементах F_2 .

На самом деле нам от группы $\pi_1(U) = F_2$ потребуется только отсутствие коммутативности умножения, которое проверить несколько проще, чем свободу этой группы.

Теорема

10.83.

Некоммутативная группа G не может вполне разрывно и конформно действовать на $\mathbb{C}$; и следовательно универсальное накрытие $\widehat{\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}}$ аналитически диффеоморфно D .

Доказательство

Заметим, что $\triangle$ для $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ универсальное накрытие $\tilde{U}$ содержит бесконечное замкнутое множество $\pi^{-1}(z)$, в котором в силу вполне разрывности каждая точка покрыта своей индивидуальной окрестностью и из этого покрытия очевидно нельзя оставить конечное подпокрытие.

Следовательно $\pi^{-1}(z)$ не компактно и всё $\tilde{U}$ тоже.

Это исключает случай S в общей теореме Римана и остаётся исключить случай $\mathbb{C}$.

Используем классификацию аналитических диффеоморфизмов (конформных преобразований) $\mathbb{C}$ как $z \mapsto az + b$.

Можно заметить, что те из них, которые не имеют неподвижных точек, являются сдвигами.

Так как вполне разрывное действие исключает неподвижные точки, то G должна действовать сдвигами, но всякие Δ и сдвига коммутируют между собой.

Теорема Пикара

Непостоянная аналитическая функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является сюръекцией кроме может быть одной точки.

Доказательство

Если f не принимает какие-то два значения, то взяв её композицию с линейной функцией мы добьёмся того, что эти значения - 0 и 1, и

$$f : \mathbb{C} \rightarrow U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

Рассмотрев для всякой $z \in \mathbb{C}$ отрезок $[0, z]$, мы получим для неё элемент $f([0, z]) \in \tilde{U}$, то есть отображение $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{U}$, такое что $f = \pi \circ \tilde{f}$.

Отображение $\tilde{f}$ тоже аналитическое,

а так как существует аналитический диффеоморфизм $u : \tilde{U} \rightarrow D$, то мы получаем аналитическое отображение $u \circ \tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow D$.

Но ограниченная и определённая на всём $\mathbb{C}$ аналитическая функция $u \circ \tilde{f}$ должна быть константой, следовательно $\tilde{f}$ константа и сама f тоже константа.

существует другой подход к доказательству теореме Пикара, с помощью сравнительно явного построения функции $\pi : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, которая является универсальным накрытием.

Рассуждения с использованием общей теоремы Римана показывают, что такая функция должна быть инвариантна относительно некоторого вполне разрывного действия свободной группы F_2 на D .

Конформно заменив D на верхнюю полуплоскость H , мы можем отождествить группу всех конформных преобразований H_c

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

Задача

10.85.

Докажите, что $z \mapsto z + 2$ и $z \mapsto \frac{z}{2z+1}$ порождают свободную группу из двух элементов.

||

Для этого достаточно описать какую-нибудь орбиту действия порождённой этими элементами группы.

||

Далее возникает вопрос о построении мероморфных функций (аналитических кроме дискретного множества точек, в котором они имеют полюса), инвариантных относительно действия F_2 на H .

На самом деле обычно рассматривают группу

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad-bc \neq 0 \right\}$$

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad-bc \neq 0 \right\}$$

и её подгруппы и изучают мероморфные функции на H , инвариантные относительно её действия или действия её подгрупп, они называются модлярные функции.

При этом возникают интересные идеи и методы, которые уже не влезают в этот раздел, но читатель может прочесть про это и многое другое, например, в книге [9].

Мы оставляем пару задач для развития интуиции по рассмотренному в этом разделе кругу вопросов.

Задача

10.86.

докажите, что группа $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ не может вполне разрывно конформно действовать на D или H .

||

Классифицируйте конформные преобразования $H \rightarrow H$, которые не имеют неподвижных точек, потом опишите пары коммутирующих преобразований.

||

Задача

10.87.

докажите, что всякая комплексная структура на торе T^2 происходит из комплексной структуры $\mathbb{C}$ после взятия фактора по некоторой решетке $L \subset \mathbb{C}$, то есть дискретной подгруппы, изоморфной $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

||

Заметьте, что $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и выведите утверждение из общей теоремы Римана об отображении и предыдущей задачи.

||

группа $\mathrm{SO}(3)$ содержит свободную группу F_2

докажите, что группа $\mathrm{SO}(3)$ содержит свободную группу F_2 .

||

Можно строить такую F_2 вручную, можно использовать рациональные кватернионы, можно заметить, что комплексификации $\mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ совпадают и поэтому в обеих группах нет нетривиальных соотношений на пару элементов.

||

8 Functions of Many Variables

(по идее это уже написано, да???)

(мб иванова с физтеха добавлю про это, если не найду что-то лучшее про это)

8.1 Coordinate systems

8.1.1 Spherical coordinate system

8.1.2 Polar coordinate system

The line element is

$$d\mathbf{r} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\hat{\mathbf{z}}.$$

The volume element is

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

The surface element in a surface of constant radius ρ (a vertical cylinder) is

$$dS_\rho = \rho d\varphi dz.$$

The surface element in a surface of constant azimuth φ (a vertical half-plane) is

$$dS_\varphi = d\rho dz$$

The surface element in a surface of constant height z (a horizontal plane) is

$$dS_z = \rho d\rho d\varphi$$

The del operator in this system leads to the following expressions for gradient, divergence, curl and Laplacian:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

8.1.3 Cylindrical coordinate system

8.2 Vector Analysis (!!!!!)

(!!! сюда многое перенесу из дополнений, потому что тема рил важная.)

(maybe I'll create later a whole new part about it, but maybe it is better to write it in the diff geom)

Равенство определений дивергенции

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

Здесь предполагается, что объем ΔV стягивается в точку M ; кружок на знаке интеграла означает замкнутую поверхность.

Пример 1.5. Убедиться в том, что определения (1.67) и (1.69) при использовании декартовых координат эквивалентны. Для этого выбрать объем $\Delta V = dV = dx dy dz$ в

виде малого прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz и вычислить предел (1.69).

Решение. Воспользовавшись малостью граней параллелепипеда, запишем приближенное выражение для поверхностного интеграла:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx [A_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) - A_x(x, \bar{y}, \bar{z})] dydz + [A_y(\bar{x}, y+dy, \bar{z}) - A_y(\bar{x}, y, \bar{z})] dx dz + [A_z(\bar{x}, \bar{y}, z+dz) - A_z(\bar{x}, \bar{y}, z)] dx dy \approx \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV.$$

9 Special Topics about Basic Functions

Here, I'll discuss special topics about basic functions. I'll not discuss "special functions", by which one understands some functions, which are defined as a complicated series or integral and which can't be expressed in terms of functions that are studied in school. These are a topic for another my note.

(maybe I'll add some of them at some sections in the end of this note, but it will be later)

9.1 Very Specific Functions

9.1.1 Continued Fractions

Непрерывная дробь (или цепная дробь) - это конечное или бесконечное математическое выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

где a_0 есть целое число, а все остальные a_n - натуральные числа (положительные целые) [1]. При этом числа $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ называются неполными частными или элементами цепной дроби [2].

Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально.

Главное (но далеко не единственное) назначение непрерывных дробей состоит в том, что они позволяют находить хорошие приближения вещественных чисел в виде обычных дробей. Непрерывные дроби широко используются в теории чисел и вычислительной математике, а их обобщения оказались чрезвычайно полезны в математическом анализе и других разделах математики. Используются также в физике, небесной механике, технике и других прикладных сферах деятельности.

О приложениях (!???)

(оказывается, они используются. но пока я хз, где.)

9.2 Approximation of functions

9.2.1 Approximation by Piecewise Linear Functions and Polynomials

(? указано выше, что суммы степенных рядов - бесконечно дифференцируемые функции??)

(!!! в 1 часть обзор соберу!!!)

Носитель и компактный носитель

Начнём с использования равномерной непрерывности и утверждения про непрерывные функции на прямой с компактным носителем, то есть равные нулю за пределами некоторого отрезка.

вообще по определению носитель функции - это дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых функция равна нулю.

Иначе говоря, носитель - это замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю.

Лемма о приближении $\sqrt{x}$ многочленами (????)

Функцию $\sqrt{x}$ можно равномерно приблизить многочленами на любом фиксированном отрезке $[0, a]$.

Доказательство

Заметим, что функции $f_\delta(x) = \sqrt{x + \delta}$ равномерно стремятся к $\sqrt{x}$ на отрезке $[0, a]$ при $\delta \rightarrow +0$, это то же свойство равномерной непрерывности из предыдущей леммы.

Заменив переменную $x = a - y$, мы сведём вопрос к функции

$$g(y) = \sqrt{a + \delta - y} = \sqrt{a + \delta} \sqrt{1 - \frac{y}{a + \delta}},$$

которая раскладывается в степенной ряд при $|y| \leq a + \delta$ (Теорема.50), причём если $|y| \leq a$, то этот степенной ряд сходится равномерно.

Значит $g(y)$ приближается равномерно многочленом на $[0, a]$, а значит и $\sqrt{x}$ тоже.

О применениях

(я так предполагаю, что это супер фундаментальная лемма, из которой все дальше будет следовать??)

Лемма о возможности равномерно приближения $|x|$ многочленами

Функцию $|x|$ можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке $[-a, a]$.

Доказательство

(??? так с чего по итогу стартуем??)

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0, a^2]$ мы приближаем $\sqrt{t}$ многочленом

$$|\sqrt{t} - P(t)| < \varepsilon$$

Подставим $x = \sqrt{t}$, тогда при $x \in [0, a]$ у нас будет неравенство

$$|x - P(x^2)| < \varepsilon$$

Его можно продолжить на $[-a, a]$, если мы продолжим x чётным образом как $|x|$, получив

$$||x| - P(x^2)| < \varepsilon$$

Теорема о возможности равномерного приближения любой кусочно-линейной на отрезке функции

Всякую кусочно-линейную на отрезке $[a, b]$ функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.

Доказательство

Пусть наша функция f в точке x_i имеет скачок производной на Δ .

Тогда функция $f(x) - \Delta/2 |x - x_i|$ уже не будет иметь скачка производной в x_i .

Сделав так несколько раз, мы представим кусочно-линейную на отрезке функцию в виде

$$f(x) = \sum_i c_i |x - x_i| + ax + b$$

Так как по предыдущей лемме мы каждое слагаемое можем приблизить многочленом равномерно сколь угодно близко и количество слагаемых конечно, то и всю функцию мы можем приблизить многочленом сколь угодно близко.

Функция $\varphi_\delta(x)$

Определим функции для положительных δ

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x < -\delta \\ 1 - |x|/\delta, & |x| \leq \delta \\ 0, & x > \delta \end{cases}$$

Такая функция кусочно линейная, непрерывная, и её носитель - это отрезок $[-\delta, \delta]$.

Такие функции на конечном отрезке мы уже умеем приближать многочленами.

докажем, что линейными комбинациями этих функций (то есть кусочно-линейными функциями) можно приблизить любую непрерывную функцию на отрезке:

Лемма о последовательности равномерных функций к непрерывной

Пусть дана непрерывная функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Последовательность функций

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m f(k/m) \varphi_{1/m}(x - k/m)$$

равномерно стремится к f .

(то есть суть в том, что вот эта последовательность, в итоге доказали?? важно тут идею акцентировать!)

Доказательство

Воспользуемся тождеством для $x \in [0, 1]$

$$\sum_{k=0}^m \varphi_{1/m}(x - k/m) = 1$$

это на самом деле частный случай разбиения единицы.

Для его доказательства достаточно заметить, что сумма кусочно линейна и имеет скачки производной только в точках вида $k/m, k = 0, \dots, m$ причём во всех таких точках её значения равны 1.

Умножим тождество разбиения единицы на $f(x)$ и вычтем из него определение $f_m(x)$:

$$f(x) - f_m(x) = \sum_{k=0}^m (f(x) - f(k/m)) \varphi_{1/m}(x - k/m).$$

При фиксированном x , в правой части этого выражения, из определения $\varphi_{1/m}$, будет не более двух ненулевых слагаемых, у которых $|x - k/m| < 1/m$.

Тогда правую часть можно оценить через модуль непрерывности как $2\omega_f(1/m)$, что стремится к нулю по свойству равномерной непрерывности f при $m \rightarrow \infty$

Лемма о последовательности равномерных функций к непрерывной нескольких переменных

Пусть дана непрерывная функция $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Докажите, что последовательность функций $f_m(x) = \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_n \leq m} f(k_1/m, \dots, k_n/m) \varphi_{1/m}(x_1 - k_1/m) \varphi_{1/m}(x_2 - k_2/m) \dots \varphi_{1/m}(x_n - k_n/m)$ равномерно стремится к f .

||

Аналогично предыдущей задаче, сначала заметьте, что для равной единице функции f в правой части тоже получится единица.

||

Теорема о возможности приблизить любую непрерывную многочленом (??)

Всякую непрерывную $f : [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.

(? что именно многочленом - новое, да? и по идее все полностью готово к этому?)

Доказательство

Сначала можно масштабировать параллелепипед $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ в единичный куб, это не влияет на непрерывность и оставляет многочлен многочленом.

Потом можно равномерно приблизить непрерывную функцию комбинацией произведений кусочно-линейных функций отдельных переменных, как в лемме выше.

А потом все эти кусочно-линейные функции одной переменной можно равномерно приблизить многочленами.

приложения в двух словах

9.2.2 Approximation by Trigonometric Polynomials and Stone-Weierstrass Theorem

При изучении рядов Фурье нам будет полезно знать следующее утверждение:

Теорема Вейерштрасса для тригонометрических многочленов

Всякую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию f , для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно сколь угодно близко равномерно приблизить тригонометрическими многочленами вида

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Доказательство

Заметим, что из тригонометрических формул следует, что произведение тригонометрических многочленов является тригонометрическим многочленом.

Отсюда следует, что если мы можем равномерно приближать тригонометрическим многочленом функции f и g , то мы можем равномерно приближать и их произведение fg .

Более того, если мы можем равномерно приближать f , то мы можем равномерно приближать $g(f)$ при любой непрерывной g .

Действительно, область значений f на компакте лежит в некотором отрезке $[A, B]$ и нам достаточно приблизить g на этом отрезке многочленом P , тогда $g(f)$ будет приближена $P(f)$.

Из сказанного следует, что мы уже умеем приближать любую функцию вида $g(\cos x)$ с непрерывной g .

В частности, мы можем приблизить 2π -периодическую функцию (φ_δ - кусочно-линейная функция с носителем на $[-\delta, \delta]$ из предыдущего раздела)

$$\psi_\delta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_\delta(x - 2\pi k)$$

так как она нечётна и 2π -периодична, а значит зависит только от $\cos x$ непрерывно (можно в качестве упражнения выписать явную формулу этой зависимости).

Далее любую непрерывную 2π -периодическую f мы будем равномерно приближать суммами

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m f(2\pi k/m) \psi_{2\pi/m}(x - 2\pi k/m)$$

как в лемме 4.65.

Теорема Стоуна-Вейерштрасса

Пусть у нас зафиксирован компакт K и дана алгебра непрерывных функций A на этом компакте, которая разделяет точки, то есть для любых $x \neq y \in K$ найдётся $f \in A$, такая что $f(x) \neq f(y)$.

Тогда всякую непрерывную на K функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из A .

Здесь алгеброй функций называется множество, содержащее все постоянные функции и замкнутое относительно операций сложения и умножения, очевидно, эти операции сохраняют непрерывность.

Свойство разделения точек в этом случае означает, что при фиксированной паре точек $x \neq y \in K$ пара значений $(f(x), f(y))$ может быть любой.

Подкомпактом в этой теореме подразумевается любое компактное топологическое пространство, однако читатель может считать K компактным метрическим пространством.

Доказательство теоремы Стоуна-Вейерштрасса (!?!?!?)

(очень большое, пока вообще не врубаюсь.)

Мы будем действовать как в задаче 4.66, пытаясь строить достаточно произвольно мелкое разбиение единицы из функций, которые мы уже умеем приближать.

Те функции, которые можно сколь угодно хорошо приблизить элементами A .

На самом деле образуют алгебру непрерывных функций B и эта алгебра уже замкнута не только относительно сложения и умножения, но и относительно операции перехода к равномерному пределу, читатель может проверить это в качестве упражнения.

Если $f \in B$, а $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то $g(f) \in B$, так как $g(f)$ можно равномерно приближать выражениями $P(f)$, где P -многочлен, и $P(f) \in B$, так как в алгебре можно складывать и умножать.

Заметим, что если $f \in B$, то обрезанная функция

$$f^{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0, & f(x) < 0 \\ f(x), & f(x) \in [0, 1] \\ 1, & f(x) > 1 \end{cases}$$

тоже лежит в B , так как представляется в виде $h(f)$ с непрерывной (и даже кусочнолинейной) h .

Возьмём теперь некоторую точку $x \in K$ и её окрестность $U(x)$.

Для всякой $y \notin U(x)$ найдём по свойству разделения точек $f_y \in B$ такую, что $f_y(x) > 1$, а $f_y(y) < 0$.

Обрежем её и получим $g_y(x)$, она тождественно равна 1 в некоторой окрестности x и тождественно равна 0 в некоторой окрестности $V(y) \ni y$.

Такие окрестности $V(y)$ покрывают компакт $K \setminus U(x)$, и мы можем оставить из них конечное число покрывающих, обозначим соответствующие функции $g_1, \dots, g_N$.

Тогда произведение

$$g(y) = g_1(y) \dots g_N(y)$$

тождественно равно 1 в некоторой окрестности $W(x) \subset U(x)$ и тождественно равно 0 в $K \setminus U(x)$.

В остальных местах её значение между 0 и 1.

Итак, мы научились для всякой точки $x \in K$ и её окрестности $U(x) \ni x$ строить функцию $g_x : K \rightarrow [0, 1]$, которая тождественно равна 1 в некоторой меньшей окрестности $W(x) \ni x$ и равна нулю за пределами $U(x)$.

Положим теперь

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) h_i(x)$$

и оценим разность

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \sum_{i=1}^N (f(x_i) - f(x)) h_i(x).$$

Для всякой $x \in K$ слагаемые разности отличны от нуля лишь при условии $x \in U_i$.

По выбору U_i , в этих слагаемых $|f(x_i) - f(x)| < \varepsilon$, а сумма всех h_i всегда равна 1.

Следовательно

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для любого $x \in K$.

Очевидно, $f_\varepsilon \in B$, то есть мы приближаем f с любой точностью равномерно.

О применениях (!?!?!)

(Карасев про них говорил, мне же никак не заходили еще)

Следствие

4.70.

Если $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то всякая непрерывная функция на X может быть сколь угодно близко равномерно приближена многоиленом от n переменных.

В следующих задачах мы выясним некоторые алгебраические свойства алгебры $C(X)$ непрерывных функций на компактном пространстве X .

Задача (????)

Докажите, что если непрерывные функции $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ не имеют общих нулей на X , то найдутся $g_1, \dots, g_n \in C(X)$, такие что

$$g_1 f_1 + \dots + g_n f_n = 1.$$

||
Достаточно положить $g_i = f_i / (f_1^2 + \dots + f_n^2)$
||

Задача

72.

для компактного X докажите, что для всякого гомоморфизма алгебр $P: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, то есть линейного отображения, совместимого с умножением по формулам $P(fg) = P(f)P(g)$ и $P(1) = 1$, найдётся точка $x \in X$ такая, что для любой $f \in C(X)$ оказывается

$$P(f) = f(x).$$

||
Рассмотрите множество функций $\mathfrak{m} = \{f \in C(X) : P(f) = 0\}$.

Выведите из предыдущей задачи, что любой конечный набор $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}$ имеет общий нуль.

Заклучите из компактности, что все функции из $\mathfrak{m}$ имеют общий нуль $x \in X$, а потом установите действие отображения P на функции, не содержащиеся в $\mathfrak{m}$.

||

Задача (!?!?!?!?!?)

докажите утверждение предыдущей задачи для необязательно компактного метрического пространства X .

||
(вообще хз и максимально не до этого)

Рассматривая лишь ограниченные непрерывные функции, можно описать гомоморфизмы в духе задачи 9.153 (модифицировав понятие ультрафильтра до элемента компактификации Стоуна-Чеха топологического пространства).

Потом можно выяснить, что расширение гомоморфизма на неограниченные функции возможно только если гомоморфизм соответствует элементу X .||

Частный случай теоремы Урысона (???)

докажите, что для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдётся непрерывная функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, которая равна единице на K и равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

||
Посмотрите на функцию расстояния $\text{dist}(x, K)$.||

Частный случай теоремы Титце (???)

докажите, что непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ функцию можно продолжить непрерывно на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она будет равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

||

Один из вариантов решения: положить $L = \mathbb{R}^n \setminus U_\varepsilon(K)$, $V = \mathbb{R}^n \setminus (K \cup L)$ и продолжить f на L нулём.

Потом сделать разбиение единицы $1 = \sum_n \rho_n(x)$ на V так, чтобы диаметр носителя ρ_n был не более его расстояния до $K \cup L$.

Потом домножить ρ_n на значение в ближайшей к носителю ρ_n точке $K \cup L$ и сложить результаты.

Аругой вариант: вывести эту теорему из теоремы Урысона и непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций, таким образом доказав полный вариант теоремы Титце для нормальных топологических пространств.

||

Задача

76.

Докажите, что функцию на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, которая является 1-липшицевой ($|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$), можно продолжить на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она останется 1-липшицевой.

||

Докажите, что можно продолжить 1-липшицевым образом на ещё одну точку $x \notin X$.

Потом продолжайте по одной точке на счётное плотное в $\mathbb{R}^n \setminus X$ подмножество, а на всё $\mathbb{R}^n$ продолжите по непрерывности

||

Теорема Киршбрауна о продолжении 1-липшицева отображения

** докажите, что отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, которое является 1-липшицевым ($|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ для любых $x, y \in X$), можно продолжить до $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ так, что оно останется 1-липшицевым.

||

Аналогично, достаточно продолжить на одну точку, но в этой теореме это посложнее.

||

О применениях (!!???)**9.2.3 Other on Approximations (??)**

(вообще много ещё теории, так что тут укажу ее)

9.3 Inequalities

(много отдельных задач про это есть, большой раздел.)

(???? I'll study it later, maybe)

9.4 Counterexamples about Functions and Limits

Introduction

In this chapter it will be necessary to extend some of the definitions of Chapter 1, or to introduce new ones. Unless a specific statement to the contrary is made, all sets under consideration will be assumed to be subsets of $\mathcal{R}$, the real number system, and all functions will be assumed to be real-valued functions of a real variable.

We start by extending unions and intersections to infinite collections of sets $A_1, A_2, \dots$:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \equiv \{x | x \in A_n \text{ for at least one } n = 1, 2, \dots\}, +\infty$$

$$\bigcap_{n=1} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \equiv \{x | x \in A_n \text{ for every } n = 1, 2, \dots\}.$$

A set A is closed iff it contains all its limit points; that is, iff there is no point of A' that is a limit point of A . A set A is open iff every point of A has a neighborhood lying entirely in A . A point p is a frontier point of a set A iff every neighborhood of p contains at least one point of A and at least one point of A' . The set of all frontier points of A is called the frontier of A , and is denoted $F(A)$. A point p is a ninterior point of a set A iff there exist a neighborhood of p that lies entirely in A . The set of interior points of A is called the interior of A , and is denoted $I(A)$. Any closed set A is the union of its interior and its frontier: $A = I(A) \cup F(A)$. The closure of A , denoted $\bar{A}$, is the union of the set A and the set of all limit points of A . An open covering of a set A is a family $\{U_\alpha\}$ of open sets U_α whose union contains A ; in this case $\{U_\alpha\}$ covers A . A set A is compact iff every open covering of A contains a finite subfamily that covers A . In the space $\mathcal{R}$ a set is compact iff it is closed and bounded. (This is the Heine-Borel theorem and its converse; cf. [34], p. 202.)

A set A is countable iff A is finite or there exists a one-to-one correspondence whose domain is $\mathfrak{N}$, the set of natural numbers, and whose range is A .

An important property of the real number system is that, for any real number x , there exists a unique integer n such that

$$n \leq x < n + 1, \text{ or } x - 1 < n \leq x.$$

Since n is determined uniquely as the greatest integer less than or equal to x , a function f is thereby defined, known as the greatest integer function or the bracket function, denoted $f(x) = [x]$, and equivalently defined as the integer $[x]$ satisfying

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad \text{or} \quad x - 1 < [x] \leq x.$$

Square brackets should be interpreted as indicating the bracket function only when an explicit statement to that effect is made.

A function f on $\mathcal{R}$ into $\mathcal{R}$ is periodic with period p iff $f(x + p) = f(x)$ for all $x \in \mathcal{R}$. A function is periodic iff it is periodic with period p for some nonzero p .

Let a be a limit point of the domain D of a function f , and assume that $f(x)$ is bounded in some neighborhood of a , for $x \in D$. The limit superior and limit inferior of f at a , denoted $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, respectively, are defined in terms of the functions ϕ and ψ as follows: For $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \phi(\delta) &\equiv \sup\{f(x) | x \in D \cap D(a, \delta)\} \\ \psi(\delta) &\equiv \inf\{f(x) | x \in D \cap D(a, \delta)\} \\ \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) &\equiv \lim_{\delta \rightarrow 0+} \phi(\delta) = \inf\{\phi(\delta) | \delta > 0\} \\ \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) &\equiv \lim_{\delta \rightarrow 0+} \psi(\delta) = \sup\{\psi(\delta) | \delta > 0\} \end{aligned}$$

A function f is upper semicontinuous at a point $a \in D$ iff $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \leq f(a)$; f is lower semicontinuous at a iff $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a)$; f is semicontinuous at a iff f is either upper semicontinuous at a or lower semicontinuous at a .

A function f is locally bounded at a point a that is either a point or a limit point of the domain of f iff there exists a neighborhood of a on which f is bounded; f is locally bounded on a subset A of its domain iff f is locally bounded at every point of A .

Infinite limits $\pm\infty$, and limits of $f(x)$ as $x \rightarrow \pm\infty$, are defined as in the case of $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, except that (deleted) neighborhoods of infinity are used:

$$\begin{aligned} D(+\infty, N) &\equiv (N, +\infty), \\ D(-\infty, N) &\equiv (-\infty, N). \end{aligned}$$

For example:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty &\quad \text{iff} \quad \forall K \exists \delta > 0 \ni f(D \cap D(a, \delta)) \subset D(+\infty, K), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b &\quad \text{iff} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \ni f(D \cap D(-\infty, N)) \subset N(b, \varepsilon). \end{aligned}$$

Basic definitions of convergence and uniform convergence of infinite series, and the Weierstrass M -test for uniform convergence, will be assumed as known (cf. [34], pp. 381, 444, 445).

A nowhere continuous function whose absolute value is everywhere continuous.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ -1 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

A function continuous at one point only.

(Cf. Example 22.)

$$f(x) \equiv \begin{cases} x & \text{if } x \text{ is rational} \\ -x & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

The only point of continuity is 0 .

3. For an arbitrary noncompact set, a continuous and unbounded function having the set as domain.

(a) If A is an unbounded set of real numbers, let

$$f(x) \equiv x, \quad x \in A.$$

(b) If A is a bounded set of real numbers that is not closed, let c be a limit point of A but not a member of A , and let

$$f(x) \equiv \frac{1}{x - c}, \quad x \in A$$

If f is continuous on a compact set A , then f is bounded there (cf. [36], p. 80).

4. For an arbitrary noncompact set, an unbounded and locally bounded function having the set as domain.

Example 3.

If f is locally bounded on a compact set A , then f is bounded there.

5. A function that is everywhere finite and everywhere locally unbounded.

If x is a rational number equal to m/n , where m and n are integers such that the fraction m/n is in lowest terms and $n > 0$, then m and n are uniquely determined (cf. [35], p. 53). Therefore the following function is well defined:

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{if } x \text{ is rational, } x = m/n \text{ in lowest terms, } n > 0 \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

If f were bounded in $N(a, \varepsilon)$, then for all m/n in $N(a, \varepsilon)$ the denominators n would be bounded, and hence the numerators m would be too. But this would permit only finitely many rational numbers in the interval $N(a, \varepsilon)$. (Contradiction.) (Cf. Example 27, Chapter 8, for a function incorporating these and more violent pathologies. Also cf. Example 29, Chapter 8.)

6. For an arbitrary noncompact set, a continuous and bounded function having the set as domain and assuming no extreme values.

(a) If A is an unbounded set of real numbers, let

I. Functions of a Real Variable

$$f(x) \equiv \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in A$$

Then $f(x)$ has no maximum value on A . If $f(x)$ is defined

$$f(x) \equiv (-1)^{\|x\|} \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in A$$

where $\|x\|$ is the greatest integer less than or equal to $|x|$, then $f(x)$ has neither a maximum value nor a minimum value on A .

(b) If A is a bounded set of real numbers that is not closed, let c be a limit point of A but not a member of A , and let

$$f(x) \equiv -|x - c|, \quad x \in A$$

Then $f(x)$ has no maximum value on A . If $f(x)$ is defined

$$f(x) = (-1)^{[1/|x-c|]} \{L - |x - c|\},$$

where brackets are once again used to represent the "bracket function," and L is the length of some interval containing A , then $f(x)$ has neither a maximum nor a minimum value on A .

7. A bounded function having no relative extrema on a compact domain.

Let the compact domain be the closed interval $[0, 1]$, and for $x \in [0, 1]$, define

$$f(x) \equiv \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{n+1} & \text{if } x \text{ is rational, } x = m/n \text{ in lowest terms, } n > 0 \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

Then in every neighborhood of every point of $[0, 1]$ the values of f come arbitrarily close to the numbers 1 and -1 while always lying between them. (Cf. [14], p. 127.)

8. A bounded function that is nowhere semicontinuous.

The function of Example 7 is nowhere upper semicontinuous since $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$ is everywhere equal to 1 and therefore nowhere $\leq f(a)$. Similarly, this function is nowhere lower semicontinuous. (Notice that the function of Example 1 is upper semicontinuous at a iff a is rational and lower semicontinuous at a iff a is irrational.)

9. A nonconstant periodic function without a smallest positive period.

The periods of the function of Example 1 are the rational numbers.

The periods of any real-valued function with domain $\mathcal{R}$ form an additive group (that is, the set of periods is closed with respect to subtraction). This group is either dense (as in the present example) or discrete, consisting of all integral multiples of a least positive member. This latter case always obtains for a nonconstant periodic function with domain $\mathcal{R}$ that has at least one point of continuity. (Cf. [36], p. 549.)

10. An irrational function.

The function $\sqrt{x}$ is not a rational function (cf. Example 4, Chapter 1) since it is undefined for $x < 0$.

The function $[x]$ is not a rational function since it has discontinuities at certain points where it is defined.

The function $|x|$ is not a rational function since it fails to have a derivative at a point at which it is defined.

The function $\sqrt{x^2 + 1}$ is not a rational function. This can be seen as follows: If $\sqrt{x^2 + 1} = f(x)/g(x)$ for all x , then $\sqrt{x^2 + 1}/x = f(x)/xg(x)$ for all $x \neq 0$, and hence $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/xg(x) = 1$. This means that $f(x)$ and $xg(x)$ are polynomials of the same degree, and therefore $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/xg(x) = 1$, whereas $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1}/x = -1$. (Contradiction.)

11. A transcendental function.

A function f is algebraic iff $\exists$ a polynomial $p(u) = \sum_{k=0}^n a_k(x)u^k$, whose coefficients $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ are real polynomials (that is, their coefficients are all real) not all of which are identically zero and such that the composite function $p(f(x))$ vanishes identically on the domain of f . A function is transcendental iff it is not algebraic.

An example of a transcendental function is e^x , for if it is assumed that

$$a_0(x) + a_1(x)e^x + \dots + a_n(x)e^{nx}$$

where $a_0(x)$ is not the zero polynomial, vanishes identically, a contradiction is got by taking the limit as $x \rightarrow -\infty$ and using l'Hospital's rule on indeterminate forms to infer the impossible conclusion

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_0(x) = 0$$

Another example is $\sin x$, since if

$$b_0(x) + b_1(x)\sin x + \dots + b_n(x)\sin^n x$$

where $b_0(x)$ is not the zero polynomial, vanishes identically, then $b_0(k\pi) = 0$ for all integral k . (Contradiction.)

Other examples (for similar reasons) are $\ln x$ (the inverse of e^x) and the remaining trigonometric functions.

The following functions listed under Example 10 as irrational are algebraic: $\sqrt{x}$, $|x|$ ($|x| = \sqrt{x^2}$), and $\sqrt{x^2 + 1}$.

12. Functions $y = f(u)$, $u \in \mathcal{R}$, and $u = g(x)$, $x \in \mathcal{R}$, whose composite function $y = f(g(x))$ is everywhere continuous, and such that $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = c$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \neq c$.

If

$$f(u) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } u \neq 0, \\ 1 & \text{if } u = 0, \end{cases} \quad u \in \mathcal{R},$$

then $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0$. If $g(x) \equiv 0$ for all $x \in \mathcal{G}$, then, $f(g(x)) = 1$ for all x , and hence $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$.

This counterexample becomes impossible in case the following condition is added: $x \neq a \Rightarrow g(x) \neq b$.

13. Two uniformly continuous functions whose product is not uniformly continuous.

The functions x and $\sin x$ are uniformly continuous on $\mathcal{R}$ since their derivatives are bounded, but their product $x \sin x$ is not uniformly continuous on $\mathcal{R}$.

In case both functions f and g are bounded on a common domain D and uniformly continuous on D , their product fg is also uniformly continuous on D . Since any function uniformly continuous on a bounded set is bounded there, it follows that the present counterexample is possible only when the common domain under consideration is unbounded and at least one of the functions is unbounded.

14 A function continuous and one-to-one on an interval and whose inverse is not continuous

For this example it is necessary that the interval not be a closed bounded interval (cf. [34], p. 192), and that the function not be strictly real-valued (cf. [34], p. 50, p. 52, Ex. 25). Our example in this case is a complex-valued function $z = f(x)$ of the real variable x , with continuity defined exactly as in the case of a real-valued function of a real variable, where the absolute value of the complex number $z = (a, b)$ is defined

$$|z| = |(a, b)| \equiv (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Let the function $z = f(x)$ be defined:

$$z = f(x) \equiv (\cos x, \sin x), \quad 0 \leq x < 2\pi$$

Then f maps the half-open interval $[0, 2\pi)$ onto the unit circle $|z| = 1$ continuously and in a one-to-one manner. Since the unit circle is compact the inverse mapping cannot be continuous (cf. [34], p. 192), and fails to be continuous at the point $(1, 0)$.

15. A function continuous at every irrational point and discontinuous at every rational point.

If x is a rational number equal to m/n , where m and n are integers such that the fraction m/n is in lowest terms and $n > 0$, let $f(x)$ be defined to be equal to $1/n$. Otherwise, if x is irrational, let $f(x) \equiv 0$. (Cf. [34], p. 124.)

It will be shown in Example 10, Chapter 8, that there does not exist a function continuous at every rational point and discontinuous at every irrational point.

16. A semicontinuous function with a dense set of points of discontinuity.

The function of Example 15 is upper semicontinuous at every point a , since

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \leq f(a).$$

17 A function with a dense set of points of discontinuity every one of which is removable.

If a is a rational number and if the function of Example 15 is redefined at a to have the value zero, then, since

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a),$$

as redefined, f becomes continuous at a .

18. A monotonic function whose points of discontinuity form an arbitrary countable (possibly dense) set.

If A is an arbitrary nonempty countable set of real numbers, $a_1, a_2, a_3, \dots$, let $\sum p_n$ be a finite or convergent infinite series of positive numbers with sum p (the series being finite iff A is finite, and having as many terms as A has members). If A is bounded below and $x <$ every point of A , let $f(x) \equiv 0$. Otherwise, define $f(x)$ to be the sum of all terms p_m of $\sum p_n$ such that $a_m \leq x$. Then f is increasing on $\mathcal{R}$, continuous at every point not in A , and discontinuous with a jump equal to p_n at each point a_n (that is, $\lim_{x \rightarrow a_n+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a_n-} f(x) = p_n$).

It should be noted that for monotonic functions this example illustrates the most that can be attained by way of discontinuities: for any monotonic function the set of points of discontinuities is countable (cf. [36], p. 59, Ex. 29). Example 1 shows that without monotonicity the set of points of discontinuity may be the entire domain.

19. A function with a dense set of points of continuity, and a dense set of points of discontinuity no one of which is removable.

In Example 18, let the set A be the set $\mathcal{Q}$ of all rational numbers.

20. A one-to-one correspondence between two intervals that is nowhere monotonic.

Let $f(x)$ be defined for $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x) \equiv \begin{cases} x & \text{if } x \text{ is rational,} \\ 1 - x & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

Then there is no subinterval of $[0, 1]$ on which f is monotonic. The range of f is again the interval $[0, 1]$, and f is one-to-one.

A function having these properties and mapping the interval $[a, b]$ onto the interval $[c, d]$ is

$$g(x) \equiv \begin{cases} c + (d - c) \frac{x - a}{b - a} & \text{if } \frac{x - a}{b - a} \text{ is rational,} \\ d + (c - d) \frac{x - a}{b - a} & \text{if } \frac{x - a}{b - a} \text{ is irrational.} \end{cases}$$

21. A continuous function that is nowhere monotonic.

Let $f_1(x) \equiv |x|$ for $|x| \leq \frac{1}{2}$, and let $f_1(x)$ be defined for other values of x by periodic continuation with period 1, i.e., $f_1(x+n) = f_1(x)$ for every real number x and integer n . For $n > 1$ define $f_n(x) \equiv 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x)$, so that for every positive integer n , f_n is a periodic function of period 4^{-n+1} , and maximum value $\frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$. Finally, define f with domain $\mathcal{R}$:

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}$$

Since $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$, by the Weierstrass M -test this series converges uniformly on $\mathcal{R}$, and f is everywhere continuous. For any point a of the form $a = k \cdot 4^{-m}$, where k is an integer and m is a positive integer, $f_n(a) = 0$ for $n > m$, and hence $f(a) = f_1(a) + \cdots + f_m(a)$. For any positive integer m , let h_m be the positive number 4^{-2m-1} . Then $f_n(a+h_m) = 0$ for $n > 2m+1$, and hence

$$\begin{aligned} f(a+h_m) - f(a) &= [f_1(a+h_m) - f_1(a)] + \cdots \\ &\quad + [f_m(a+h_m) - f_m(a)] \\ &\quad + f_{m+1}(a+h_m) + \cdots + f_{2m+1}(a+h_m) \\ &\geq -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0 \end{aligned}$$

Similarly,

$$f(a-h_m) - f(a) \geq -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0.$$

Since members of the form $a = k \cdot 4^{-m}$ are dense, it follows that in no open interval is f monotonic.

The above typifies constructions involving the condensation of singularities.

22 A function whose points of discontinuity form an arbitrary given closed set.

If A is a closed set, define the set B :

$$x \in B \text{ iff } \begin{cases} x \in F(A) \text{ or} \\ x \in I(A) \cap Q \end{cases}$$

and define the function f :

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B, \\ 0 & \text{if } x \notin B. \end{cases}$$

If $c \in A$, f is discontinuous at c : if $c \in F(A)$ then $f(c) = 1$ while x is a limit point of the set $\mathcal{R} \setminus A$, on which f is identically 0; if $c \in I(A) \cap Q$ then $f(c) = 1$ while c is a limit point of the set $I(A) \setminus Q$, on which f is identically 0; if $c \in I(A) \setminus Q$, then $f(c) = 0$ while c is a limit point of the set $I(A) \cap Q$, on which f is identically 1. The function f is continuous on the set $\mathcal{R} \setminus A$, since this set is open and f is a constant there.

23. A function whose points of discontinuity form an arbitrary given F_σ set. (Cf. Example 8, Chapter 4, and Examples 8, 10, and 22, Chapter 8.)

A set A is said to be an F_σ set iff it is a countable union of closed sets (cf. Example 8, Chapter 8). For a given F_σ set $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, where $A_1, A_2, \cdots$ are closed and $A_n \subset A_{n+1}$ for $n = 1, 2, \cdots$, let A_0 denote the empty set $\emptyset$, and define the disjoint sets B_n , $n = 1, 2, \cdots$:

$$x \in B_n \text{ iff } \begin{cases} x \in (A_n \setminus A_{n-1}) \setminus I(A_n \setminus A_{n-1}) \text{ or} \\ x \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q. \end{cases}$$

Let the function f be defined:

$$f(x) \equiv \begin{cases} 2^{-n} & \text{if } x \in B_n, \\ 0 & \text{if } x \notin B_1 \cup B_2 \cup \dots \end{cases}$$

If $c \in A$, f is discontinuous at c : if $c \in (A_n \setminus A_{n-1}) \setminus I(A_n \setminus A_{n-1})$ then $f(c) = 2^{-n}$ while c is a limit point of a set on which f has values differing from 2^{-n} by at least 2^{-n-1} ; if $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q$ then $f(c) = 2^{-n}$ while c is a limit point of the set $I(A_n \setminus A_{n-1}) \setminus Q$ on which f is identically 0; if $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \setminus Q$ then $f(c) = 0$ while c is a limit point of the set $I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q$ on which f is identically 2^{-n} . If $c \notin A$, f is continuous at c : if $\varepsilon > 0$ is given, choose N such that $2^{-N} < \varepsilon$; then choose a neighborhood of c that excludes $A_1, A_2, \dots, A_N$ and inside which, therefore, $f(x) < 2^{-N} < \varepsilon$.

It should be noted that for any function f on $\mathfrak{R}$ into $\mathfrak{R}$ the set of points of discontinuity is an F_σ set (cf. [36], p. 84, Exs. 30-33, p. 332, Ex. 41).

24. A function that is not the limit of any sequence of continuous functions. (Cf. Example 10, Chapter 4.)

The function f in Example 1 has the property that there is no sequence $\{f_n\}$ of continuous functions such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ for all real x , but the proof is not elementary. For a discussion and references, see [10], pp. 99-102. The idea is that f is everywhere discontinuous, while any function that is the limit of a sequence of continuous functions must have a dense set of points of continuity.

The characteristic function of the set Q of rational numbers is the limit of a sequence $\{g_n\}$ of functions each of which is the limit of a sequence $\{h_n\}$ of continuous functions, as follows: If $\{r_n\}$ is a sequence that is a one-to-one correspondence with domain $\mathfrak{R}$ and range Q define

$$g_n(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } x = r_1, r_2, \dots, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Each function g_n is the limit of a sequence of continuous functions each of which is equal to 1 where $g_n(x) = 1$, equal to 0 on closed subintervals interior to the intervals between consecutive points where $g_n(x) = 1$, and linear between consecutive points that are either endpoints of such closed subintervals or points where $g_n(x) = 1$. Notice that for each x , $\{g_n(x)\}$ is increasing, while the sequence that converges to $g_n(x)$ can be chosen to be decreasing.

25. A function with domain $[0, 1]$ whose range for every nondegenerate subinterval of $[0, 1]$ is $[0, 1]$. (Cf. Example 27, Chapter 8.)

A function having this property was constructed by H. Lebesgue (cf. [28], p. 90) and is described in [10], p. 71. (Also cf. [14], p. 228.)

If x is an arbitrary number in $[0, 1]$, let its decimal expansion be

$$x = 0.a_1a_2a_3 \dots$$

where, in case x can be expressed ambiguously by either a terminating decimal or one with indefinitely repeated 9's, it is immaterial which expansion is chosen. For definiteness suppose the terminating expansion is consistently chosen. The value $f(x)$ depends on whether or not the decimal $0.a_1a_3a_5 \dots$ is repeating or not - that is, on whether the number $0.a_1a_3a_5 \dots$ is rational or not (cf. [35], p. 178):

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } 0.a_1a_3a_5 \dots \text{ is irrational,} \\ 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4} \dots & \text{if } 0.a_1a_3a_5 \dots \text{ is rational with its} \\ & \text{first repeating segment beginning} \\ & \text{with } a_{2n-1}. \end{cases}$$

Let I be an arbitrary subinterval of $[0, 1]$, and choose the digits $a_1, a_2, \dots, a_{2n-2}$ so that both $0.a_1a_2 \dots a_{2n-2}0$ and $0.a_1a_2 \dots a_{2n-2}1$ belong to I and such that a_{2n-3} is different from both 0 and 1. If $y = 0.b_1b_2b_3 \dots$ is an arbitrary point in $[0, 1]$, we have only to define $a_{2n-1} = a_{2n+1} = \dots = a_{4n-5} = 0$ and $a_{4n-3} = 1$, with subsequent a 's with odd subscripts defined by cyclic repetition in groups of n , to obtain a number

$$x = 0.a_1a_2a_3 \dots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3} \dots$$

belonging to the interval I and such that the expansion

$$0.a_1a_3a_5 \dots a_{2n-3}a_{2n-1}a_{2n+1} \dots$$

is a periodic decimal whose first period starts with a_{2n-1} , and consequently such that

$$f(x) = 0.b_1b_2b_3 \dots$$

The graph of f is dense in the unit square $[0, 1] \times [0, 1]$, although each vertical segment $\{x\} \times [0, 1]$ meets the graph in exactly one point.

A function whose range on every nonempty open interval is a and that is equal to zero almost everywhere (and hence is measurable) is given in Example 27, Chapter 8. (Also cf. Example 26, below.)

Since the unit interval $[0, 1]$ contains infinitely many disjoint open intervals (no two have a point in common—for example, $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \dots$)—the function f of the present example takes on every one of its values infinitely many times. Another example of a function that assumes every value infinitely many times is given in Example 9, Chapter 10.

26. A discontinuous linear function.

A function f on $\mathcal{R}$ into $\mathcal{R}$ is said to be linear iff $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for all $x, y \in \mathcal{R}$. A function that is linear and not continuous must be very discontinuous indeed. In fact, its graph must be dense in the plane $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$. For a discussion of this phenomenon, and further references, see [10], pp. 108-113. In case f is continuous it must have the form $f(x) = cx$, as can be shown by considering in succession the following classes of numbers: $\mathfrak{J}, \mathfrak{L}, \mathfrak{S}, \mathfrak{Q}, \mathcal{R}$.

Construction of a discontinuous linear function can be achieved by use of a Hamel basis for the linear space of the real numbers $\mathcal{R}$ over the rational numbers Q (cf. references 29, 30, and 32 of [10]). The idea is that this process provides a set $S = \{r_\alpha\}$ of real numbers r_α such that every real number x is a unique linear combination of a finite number of members of S with rational coefficients p_α : $x = p_{\alpha_1}r_{\alpha_1} + \dots + p_{\alpha_k}r_{\alpha_k}$. The function f can now be defined:

$$f(x) \equiv p_{\alpha_1} + \dots + p_{\alpha_k}$$

since the representation of x as a linear combination is unique. The linearity of f follows directly from the definition, and the fact that f is not continuous follows from the fact that its values are all rational but not all equal (f fails to have the intermediate value property).

27. For each $n \in \mathfrak{N}$, $n(2n+1)$ functions $\phi_{ij}(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, 2n+1$, satisfying:

(a) All $\phi_i(x_j)$ are continuous on $[0, 1]$.

(b) For any function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ continuous for $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$, there are $2n+1$ functions ψ_i , $i = 1, 2, \dots, 2n+1$, each continuous on Q , such that

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \psi_i \left(\sum_{j=1}^n \phi_{ij}(x_j) \right).$$

This theorem is due to A. N. Kolmogorov [26] and resolves a famous problem posed by D. Hilbert. Stated as a solution of Hilbert's (thirteenth) problem, the above result reads: Every continuous function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ of n real variables, $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$, may be expressed as a sum (the sum $\sum_{i=1}^{2n+1}$ above) of the composites of continuous functions of single variables and sums of continuous functions of single variables (the sums $\sum_{j=1}^n$ above).

The proof is highly ingenious, although it is accessible to any reader with the patience to trace through a rather straightforward multiple induction.

We note only that the functions ϕ_{ij} are universal in that they do not depend on f . The functions ψ_i , while not independent of f , are not uniquely determined by f (even after the functions ϕ_{ij} have been constructed). Details will be found in the cited reference.

9.5 Counterexamples about Differentiation

Introduction

In some of the examples of this chapter the word derivative is permitted to be applied to the infinite limits

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\infty.$$

However, the term differentiable function is used only in the strict sense of a function having a finite derivative at each point of its domain. A function is said to be infinitely differentiable iff it has (finite) derivatives of all orders at every point of its domain.

The exponential function with base e is alternatively denoted e^x and $\exp(x)$.

As in Chapter 2, all sets, including domains and ranges, will be assumed to be subsets of $\mathcal{R}$ unless explicit statement to the contrary is made. This assumption will remain valid through Part I of this book, that is, through Chapter 8.

1. A function that is not a derivative.

The signum function (cf. the Introduction, Chapter 1) or, indeed, any function with jump discontinuities, has no primitive - that is, fails to be the derivative of any function - since it fails to have the intermediate value property enjoyed by continuous functions and derivatives alike (cf. [34], p. 84, Ex. 40). An example of a discontinuous derivative is given next.

A differentiable function with a discontinuous derivative.

The function

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

has as its derivative the function

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

which is discontinuous at the origin.

3. A discontinuous function having everywhere a derivative (not necessarily finite).

For such an example to exist the definition of derivative must be extended to include the limits $\pm\infty$. If this is done, the discontinuous signum function (Example 1) has the derivative

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq 0 \\ +\infty & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

A differentiable function having an extreme value at a point where the derivative does not make a simple change in sign.

The function

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

has an absolute minimum value at $x = 0$. Its derivative is

$$f'(x) \equiv \begin{cases} x^2 \left[4x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}\right] & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

which has both positive and negative values in every neighborhood of the origin. In no interval of the form $(a, 0)$ or $(0, b)$ is f monotonic.

A differentiable function whose derivative is positive at a point but which is not monotonic in any neighborhood of the point.

The function

$$f(x) \equiv \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

has the derivative

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0, \\ 1 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

In every neighborhood of 0 the function $f'(x)$ has both positive and negative values.

6. A function whose derivative is finite but unbounded on a closed interval.

The function

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

has the derivative

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

which is unbounded on $[-1, 1]$.

7. A function whose derivative exists and is bounded but possesses no (absolute) extreme values on a closed interval.

The function

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^4 e^{-\frac{1}{4}x^2} \sin \frac{8}{x^3} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

has the derivative

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-3x^2} \left[\left(4x^3 - \frac{1}{2}x^5 \right) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right] & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

In every neighborhood of the origin this derivative has values arbitrarily near both 24 and -24. On the other hand, for $0 < h \equiv |x| \leq 1$ (cf. [34], p. 83, Ex. 29),

$$0 < e^{-\frac{3}{2}x^2} < 1 - \frac{1}{4}h^2 e^{-3h^2} < 1 - \frac{3}{16}h^2$$

and

$$\left| \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^5 \right) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right| \leq 24 + \frac{9}{2}h^3$$

Therefore $0 < h \leq 1$ implies

$$|f'(x)| < \left(1 - \frac{3}{16}h^2 \right) \left(24 + \frac{9}{2}h^3 \right) < 24 - \frac{9}{2}h^2(1 - h) \leq 24.$$

Therefore, on the closed interval $[-1, 1]$ the range of the function f' has supremum equal to 24 and infimum equal to -24, and neither of these numbers is assumed as a value of f' .

8. A function that is everywhere continuous and nowhere differentiable.

The function $|x|$ is everywhere continuous but it is not differentiable at $x = 0$. By means of translates of this function it is possible to define everywhere continuous functions that fail to be differentiable at each point of an arbitrarily given finite set. In the following paragraph we shall discuss an example using an infinite set of translates of the function $|x|$.

The function of Example 21, Chapter 2, is nowhere differentiable. To see this let a be an arbitrary real number, and for any positive integer n , choose h_n to be either 4^{-n-1} or -4^{-n-1} so that $|f_n(a + h_n) - f_n(a)| = |h_n|$. Then $|f_m(a + h_n) - f_m(a)|$ has this same value $|h_n|$ for all $m \leq n$, and vanishes for $m > n$. Hence the difference quotient $(f(a + h_n) - f(a))/h_n$ is an integer that is even if n is even and odd if n is odd. It follows that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a + h_n) - f(a)}{h_n}$$

cannot exist, and therefore that $f'(a)$ cannot exist as a finite limit.

The first example of a continuous nondifferentiable function was given by K. W. T. Weierstrass (German, 1815-1897):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

where b is an odd integer and a is such that $0 < a < 1$ and $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. The example presented above is a modification of one given in 1930 by B. L. Van der Waerden (cf. [48],

p. 353). There are now known to be examples of continuous functions that have nowhere a one-sided finite or infinite derivative. For further discussion of these examples, and references, see [48], pp. 350-354, [10], pp. 61-62, 115, 126, and [21], vol. II, pp. 401-412.

The present example, as described in Example 21, Chapter 2, was shown to be nowhere monotonic. For an example of a function that is everywhere differentiable and nowhere monotonic, see [21], vol. II, pp. 412-421. Indeed, this last example gives a very elaborate construction of a function that is everywhere differentiable and has a dense set of relative maxima and a dense set of relative minima.*

9. A differentiable function for which the law of the mean fails.

Again, we must go beyond the real number system for the range of such a function. The complex-valued function of a real variable x ,

$$f(x) \equiv \cos x + i \sin x$$

is everywhere continuous and differentiable (cf. [34], pp. 509-513), but there exist no a, b , and ξ such that $a < \xi < b$ and

$$(\cos b + i \sin b) - (\cos a + i \sin a) = (-\sin \xi + i \cos \xi)(b - a).$$

Assuming that the preceding equation is possible, we equate the squares of the moduli (absolute values) of the two members:

I. Functions of a Real Variable

$$(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = (b - a)^2$$

or, with the aid of elementary identities:

$$\sin^2 \frac{b-a}{2} = \left(\frac{b-a}{2} \right)^2.$$

Since there is no positive number h such that $\sin h = h$ (cf. [34] p. 78), a contradiction has been obtained.

10. An infinitely differentiable function of x that is positive for positive x and vanishes for negative x .

The function

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

is infinitely differentiable, all of its derivatives at $x = 0$ being equal to 0 (cf. [34], p. 108, Ex. 52).

11. An infinitely differentiable function that is positive in the unit interval and vanishes outside.

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x^2(1-x)^2} & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

12. An infinitely differentiable "bridging function," equal to 1 on $[1, +\infty)$, equal to 0 on $(-\infty, 0]$, and strictly monotonic on $[0, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} \exp \left[-\frac{1}{x^2} \exp \left(-\frac{1}{(1-x)^2} \right) \right] & \text{if } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{if } x \leq 0, \\ 1 & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$

*See also A. Denjoy, Bull. Soc. Math. France, 43 (1915), pp. 161-248 (228ff.).

13. An infinitely differentiable monotonic function f such that

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0.$$

If the word monotonic is deleted there are trivial examples for instance $(\sin x^2) / x$. For a monotonic example, let $f(x)$ be defined to be equal to 1 for $x \leq 1$, equal to $1/n$ on the closed interval $[2n-1, 2n]$, for $n = 1, 2, \dots$, and on the intervening intervals $(2n, 2n+1)$ define $f(x)$ by translations of the bridging function of Example 12, with appropriate negative factors for changes in the vertical scale.

9.6 19 Asymptotic Expansions

The majority of phenomena that we have to deal with can be characterized mathematically by a certain set of numerical parameters having rather complicated interrelations. However the description of a phenomenon as a rule becomes significantly simpler if it is known that some of these parameters or some combination of them is very large or, contrariwise, very small.

9.6.1 Introduction

Example

1. In describing relative motions occurring with speeds v that are much smaller than the speed of light ($|v| \ll c$) we may use, instead of the Lorentz transformations (Example 3 of Sect. 1.3)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

the Galilean transformation

$$x' = x - vt, \quad t' = t$$

since $v/c \approx 0$.

Example

2. The period

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

of oscillations of a pendulum is connected with the maximal angle of deviation φ_0 from its equilibrium position via the parameter $k^2 = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ (see Sect. 6.4). If the oscillations are small, that is, $\varphi_0 \approx 0$, we obtain the simple formula

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

for the period of such oscillations.

Example

3. Suppose a restoring force acting on a particle m is returning it to its equilibrium position and that the force is proportional to the displacement (a spring with spring constant k , for example). Suppose also that the resisting force of the medium is proportional to the square of the velocity (with coefficient of proportionality α). The equation of motion in that case has the following form (see Sect. 5.6):

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x}^2 + kx = 0.$$

If the medium "rarifies", then $\alpha \rightarrow 0$ and one may assume that the motion is approximated by the motion described by the equation

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

(harmonic oscillations with frequency $\sqrt{\frac{k}{m}}$), and if the medium "condenses", then $\alpha \rightarrow \infty$, and, dividing by α , we find in the limit the equation $\dot{x}^2 = 0$, that is, $x(t) \equiv \text{const.}$

Example

4. If $\pi(x)$ is the number of primes not larger than $x \in \mathbb{R}$, then, as is known (see Sect. 3.2), for large x the quantity $\pi(x)$ can be found with small relative error by the formula

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

Example

5. It would be difficult to find more trivial, yet nevertheless important relations than

$$\sin x \approx x \text{ or } \ln(1+x) \approx x,$$

in which the relative error becomes smaller as x approaches 0 (see Sect. 5.3). These relations can be made more precise if desired, namely

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3, \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2,$$

by adjoining one or more of the following terms obtained from the Taylor series.

Thus the problem is to find a clear, convenient, and essentially correct description of a phenomenon being studied using the specifics of the situation that arises when some parameter (or combination of parameters) that characterizes the phenomenon is small (tends to zero) or, contrariwise, large (tends to infinity).

Hence, we are once again essentially discussing the theory of limits.

Problems of this type are called asymptotic problems. They arise, as one can see, in practically all areas of mathematics and natural science.

The solution of an asymptotic problem usually consists of the following stages: passing to the limit and finding the (main term of the) asymptotics, that is, a convenient simplified description of the phenomenon; estimating the error that arises in using the asymptotic formula so found, and determining its range of applicability; then sharpening the main term of the asymptotics, analogous to the process of adjoining the next term in Taylor's formula (but far from being equally algorithmic in every case).

The methods of solving asymptotic problems (called asymptotic methods) are usually closely connected with the specifics of a problem. Among the few rather general and at the same time elementary asymptotic methods one finds Taylor's formula, one of the most important relations in differential calculus.

The present chapter should give the reader a beginning picture of the elementary asymptotic methods of analysis.

In the first section we shall introduce the general concepts and definitions relating to elementary asymptotic methods; in the second we shall use them in discussing Laplace's method of constructing the asymptotic expansion of Laplace transforms. This method, which was discovered by Laplace in his research on the limit theorems of probability theory, is an important component of the saddle-point method later developed by Riemann, usually discussed in a course of complex analysis. Further information on various asymptotic methods of analysis can be found in the specialized books cited in the bibliography. These books also contain an extensive bibliography on this circle of questions.

9.6.2 19.1 Asymptotic Formulas and Asymptotic Series

9.6.3 19.1.1 Basic Definitions

a. Asymptotic Estimates and Asymptotic Equalities

For the sake of completeness we begin with some recollections and clarifications.

Definition 1. Let $f : X \rightarrow Y$ and $g : X \rightarrow Y$ be real- or complex- or in general vector-valued functions defined on a set X and let $\mathcal{B}$ be a base in X . Then the relations

$$\begin{array}{lll} f = O(g) & \text{or} & f(x) = O(g(x)) \quad x \in X \\ f = O(g) & \text{or} & f(x) = O(g(x)) \quad \text{over the base } \mathcal{B} \\ f = o(g) & \text{or} & f(x) = o(g(x)) \quad \text{over the base } \mathcal{B} \end{array}$$

mean by definition that in the equality $|f(x)| = \alpha(x)|g(x)|$, the real-valued function $\alpha(x)$ is respectively bounded on X , ultimately bounded over the base $\mathcal{B}$, and infinitesimal over the base $\mathcal{B}$.

These relations are usually called asymptotic estimates (of f). The relation

$$f \sim g \text{ or } f(x) \sim g(x) \text{ over the base } \mathcal{B}$$

which by definition means that $f(x) = g(x) + o(g(x))$ over the base $\mathcal{B}$, is usually called asymptotic equivalence or asymptotic equality¹ of the functions over the base $\mathcal{B}$.

Asymptotic estimates and asymptotic equalities unite in the term asymptotic formulas.

Wherever it is not important to indicate the argument of a function the abbreviated notations $f = o(g)$, $f = O(g)$, or $f \sim g$ are used, and we shall make systematic use of this abbreviation.

If $f = O(g)$ and simultaneously $g = O(f)$, we write $f \asymp g$ and say that f and g are quantities of the same order over the given base.

In what we are going to be doing below, $Y = \mathbb{C}$ or $Y = \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{C}$ or $X \subset \mathbb{R}$; $\mathcal{B}$ as a rule is one of the bases $X \ni x \rightarrow 0$ or $X \ni x \rightarrow \infty$. Using this notation one can write in particular that

$$\begin{aligned}
\cos x &= O(1), \quad x \in \mathbb{R}, \\
\cos z &\neq O(1), \quad z \in \mathbb{C}, \\
\ln e^z &= 1 + z + o(z) \text{ as } z \rightarrow 0, \quad z \in \mathbb{C}, \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) \text{ as } x \rightarrow 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\pi(x) &= \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \text{ as } x \rightarrow +\infty, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Remark 1. In regard to asymptotic equalities it is useful to note that they are only limiting relations whose use is permitted for computational purposes, but only after some additional work is done to find an estimate of the remainder. We have already mentioned this when discussing Taylor's formula. In addition, one must keep in mind that asymptotic equivalence in general makes it possible to compute with small relative error, but not small absolute error. Thus, for example, as $x \rightarrow +\infty$, the difference $\pi(x) - \frac{x}{\ln x}$ does not tend to zero, since $\pi(x)$ jumps by 1 at each prime integer value of x . At the same time, the relative error in replacing $\pi(x)$ by $\frac{x}{\ln x}$ tends to zero:

$$\frac{o\left(\frac{x}{\ln x}\right)}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)} \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow +\infty$$

This circumstance, as we shall see below, leads to asymptotic series that have computational importance when one considers the relative error but not the absolute error; for that reason these series are often divergent, in contrast to classical series, for which the absolute value of the difference between the function being approximated and the n th partial sum of the series tends to zero as $n \rightarrow +\infty$.

Let us consider some examples of ways of obtaining asymptotic formulas.

Example

6. The labor involved in computing the values of $n!$ or $\ln n!$ increase as $n \in \mathbb{N}$ increases. We shall use the fact that n is large, however, and obtain under that assumption a convenient asymptotic formula for computing $\ln n!$ approximately.

It follows from the obvious relations

$$\int_1^n \ln x \, dx = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln x \, dx < \sum_{k=1}^n \ln k < \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \ln x \, dx = \int_2^{n+1} \ln x \, dx$$

that

$$0 < \ln n! - \int_1^n \ln x \, dx < \int_1^2 \ln x \, dx + \int_n^{n+1} \ln x \, dx < \ln 2(n+1)$$

But

$$\int_1^n \ln x \, dx = n(\ln n - 1) + 1 = n \ln n - (n - 1)$$

and therefore as $n \rightarrow \infty$

$$\ln n! = \int_1^n \ln x \, dx + O(\ln 2(n+1)) =$$

$$= n \ln n - (n - 1) + O(\ln n) = n \ln n + O(n)$$

⁰¹ It is also useful to keep in mind the symbol $\simeq$ often used to denote asymptotic equivalence.

Since $O(n) = o(n \ln n)$ when $n \rightarrow +\infty$, the relative error of the formula $\ln n! \approx n \ln n$ tends to zero as $n \rightarrow +\infty$.

Example

7. We shall show that as $x \rightarrow +\infty$ the function

$$f_n(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^n} dt \quad (n \in \mathbb{R})$$

is asymptotically equivalent to the function $g_n(x) = x^{-n}e^x$. Since $g_n(x) \rightarrow +\infty$ as $x \rightarrow +\infty$, applying L'Hôpital's rule we find

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'_n(x)}{g'_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-n}e^x}{x^{-n}e^x - nx^{-n-1}e^x} = 1$$

Example

8. Let us find the asymptotic behavior of the function

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

more precisely. It differs from the exponential integral

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

only by a constant term.

Integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} f(x) &= \left. \frac{e^t}{t} \right|_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \left(\frac{e^t}{t} + \frac{e^t}{t^2} \right) \Big|_1^x + \int_1^x \frac{2e^t}{t^3} dt = \\ &= \left(\frac{e^t}{t} + \frac{1!e^t}{t^2} + \frac{2!e^t}{t^3} \right) \Big|_1^x + \int_1^x \frac{3!e^t}{t^4} dt = \\ &= e^t \left(\frac{0!}{t} + \frac{1!}{t^2} + \frac{2!}{t^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{t^n} \right) \Big|_1^x + \int_1^x \frac{n!e^t}{t^{n+1}} dt \end{aligned}$$

This last integral, as shown in Example 7, is $O(x^{-(n+1)}e^x)$ as $x \rightarrow +\infty$. Including in the term $O(x^{-(n+1)}e^x)$ the constant $-e \sum_{k=1}^n (k-1)!$ obtained when $t=1$ is substituted, we find that

$$f(x) = e^x \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{x^k} + O\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) \text{ as } x \rightarrow +\infty.$$

The error $O\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right)$ in the approximate equality

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{x^k} e^x$$

is asymptotically infinitesimal compared with each term of the sum, including the last. As the same time, as $x \rightarrow +\infty$ each successive term of the sum is infinitesimal compared with its predecessor; therefore it is natural to write the continually sharper sequence of such formulas as a series generated by f :

$$f(x) \simeq e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

We note that this series obviously diverges for every value of $x \in \mathbb{R}$, so that we cannot write

$$f(x) = e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Thus we are dealing here with a new and clearly useful asymptotic interpretation of a series connected, in contrast with the classical case, with the relative rather than the absolute error of approximation of the function. The partial sums of such a series, in contrast to the classical case, are used not so much to approximate the values of the function at specific points as to describe their collective behavior under the limiting passage in question (which in the present example occurs as $x \rightarrow +\infty$).

b. Asymptotic Sequences and Asymptotic Series

Definition 2. A sequence of asymptotic formulas

$$\begin{aligned} f(x) &= \psi_0(x) + o(\psi_0(x)) \\ f(x) &= \psi_0(x) + \psi_1(x) + o(\psi_1(x)) \\ &\dots\dots\dots \\ f(x) &= \psi_0(x) + \psi_1(x) + \dots + \psi_n(x) + o(\psi_n(x)) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

that are valid over a base $\mathcal{B}$ in the set X where the functions are defined, is written as the relation

$$f(x) \simeq \psi_0(x) + \psi_1(x) + \dots + \psi_n(x) + \dots$$

or, more briefly, as $f(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x)$. It is called an asymptotic expansion of f in the given base $\mathcal{B}$.

It is clear from this definition that in asymptotic expansions we always have

$$o(\psi_n(x)) = \psi_{n+1}(x) + o(\psi_{n+1}(x)) \text{ over the base } \mathcal{B}$$

and hence for any $n = 0, 1, 2, \dots$ we have

$$\psi_{n+1}(x) = o(\psi_n(x)) \text{ over the base } \mathcal{B}$$

that is, each successive term of the expansion contributes its correction, which is asymptotically more precise in comparison with its predecessor.

Asymptotic expansions usually arise in the form of a linear combination

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

of functions of some sequence $\{\varphi_n(x)\}$ that is convenient for the specific problem.

Definition 3. Let X be a set with a base $\mathcal{B}$ defined on it. The sequence $\{\varphi_n(x)\}$ of functions defined on X is called an asymptotic sequence over the base $\mathcal{B}$ if $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ over the base $\mathcal{B}$ (for any two adjacent terms φ_n and φ_{n+1} of the sequence) and if none of the functions $\varphi_n \in \{\varphi_n(x)\}$ is identically zero on any element of $\mathcal{B}$.

Remark 2. The condition that $(\varphi_n|_B)(x) \neq 0$ on the elements B of the base $\mathcal{B}$ is natural, since otherwise all the functions $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots$ would also be zero on B and the system $\{\varphi_n\}$ would be trivial in respect to its asymptotics.

Example

9. The following sequences are obviously asymptotic:

- a) $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ as $x \rightarrow 0$;
- b) $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^n}, \dots$ as $x \rightarrow \infty$;
- c) $x^{p_1}, x^{p_2}, \dots, x^{p_n}, \dots$

in the base $x \rightarrow 0$ if $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$, in the base $x \rightarrow \infty$ if $p_1 > p_2 > \dots > p_n > \dots$;

d) the sequence $\{g(x)\varphi_n(x)\}$ obtained from an asymptotic sequence through multiplication of all its terms by the same function.

Definition 4. If $\{\varphi_n\}$ is an asymptotic sequence over the base $\mathcal{B}$, then an asymptotic expansion of the form

$$f(x) \simeq c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots$$

is called an asymptotic expansion or asymptotic series of the function f with respect to the asymptotic sequence $\{\varphi_n\}$ over the base $\mathcal{B}$.

Remark 3. The concept of an asymptotic series (in the context of power series) was stated by Poincaré (1886), who made vigorous use of asymptotic expansions in his work on celestial mechanics. But asymptotic series themselves, like some of the methods of obtaining them, had been encountered earlier. In regard to the possible generalization of the concept of an asymptotic expansion in the sense of Poincaré (which we have discussed in Definitions 2-4) see Problem 5 at the end of this section.

9.6.4 19.1.2 General Facts about Asymptotic Series

a. Uniqueness of an Asymptotic Expansion

When we speak of the asymptotic behavior of a function over a base $\mathcal{B}$, we are interested only in the nature of the limiting behavior of the function, so that if two generally different functions f and g are equal on some element of the base $\mathcal{B}$, they have the same asymptotic behavior over $\mathcal{B}$ and should be considered equal in the asymptotic sense.

Moreover, if we fix in advance some asymptotic sequence $\{\varphi_n\}$ in terms of which it is desirable to carry out an asymptotic expansion, we must reckon with the limited possibilities of any such system of functions $\{\varphi_n\}$. To be specific, there will be functions that are infinitesimal with respect to every term φ_n of the given asymptotic system.

Example

10. Let $\varphi_n(x) = \frac{1}{x^n}, n = 0, 1, \dots$; then $e^{-x} = o(\varphi_n(x))$ as $x \rightarrow +\infty$.

For that reason it is natural to adopt the following definitions.

Definition 5. If $\{\varphi_n(x)\}$ is an asymptotic sequence over the base $\mathcal{B}$, a function f such that $f(x) = o(\varphi_n(x))$ over $\mathcal{B}$ for each $n = 0, 1, \dots$ is called an asymptotic zero with respect to $\{\varphi_n(x)\}$.

Definition 6. Functions f and g are asymptotically equal over the base $\mathcal{B}$ with respect to a sequence of functions $\{\varphi_n\}$ that is asymptotic over $\mathcal{B}$ if the difference $f - g$ is an asymptotic zero with respect to $\{\varphi_n\}$.

Proposition 1.

(Uniqueness of an asymptotic expansion). Let $\{\varphi_n\}$ be an asymptotic sequence of functions over a base $\mathcal{B}$.

- a) If a function f admits an asymptotic expansion with respect to the sequence $\{\varphi_n\}$ over $\mathcal{B}$,

then that expansion is unique.

b) If the functions f and g admit an asymptotic expansion in the system $\{\varphi_n\}$, then these expansions are the same if and only if the functions f and g are asymptotically equal over $\mathcal{B}$ with respect to $\{\varphi_n\}$

Proof. a) Suppose the function φ is not identically zero on any element of $\mathcal{B}$.

We shall show that if $f(x) = o(\varphi(x))$ over $\mathcal{B}$, and at the same time $f(x) = c\varphi(x) + o(\varphi(x))$ over $\mathcal{B}$, then $c = 0$.

Indeed, $|f(x)| \geq |c\varphi(x)| - |o(\varphi(x))| = |c||\varphi(x)| - o(|\varphi(x)|)$ over $\mathcal{B}$, and so if $|c| > 0$, there exists $B_1 \in \mathcal{B}$ at each point of which $|f(x)| \geq \frac{|c|}{2}|\varphi(x)|$. But if $f(x) = o(\varphi(x))$ over $\mathcal{B}$, then there exists $B_2 \in \mathcal{B}$ at each point of which $|f(x)| \leq \frac{|c|}{3}|\varphi(x)|$. Hence at each point $x \in B_1 \cap B_2$ we would have to have $\frac{|c|}{2}|\varphi(x)| \leq \frac{|c|}{3}|\varphi(x)|$ or, assuming $|c| \neq 0$, $3|\varphi(x)| \leq 2|\varphi(x)|$. But this is impossible if $\varphi(x) \neq 0$ at even one point of $B_1 \cap B_2$.

Now let us consider the asymptotic expansion of a function f with respect to the sequence $\{\varphi_n\}$.

Let $f(x) = c_0\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$ and $f(x) = \tilde{c}_0\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$ over $\mathcal{B}$. Subtracting the second equality from the first, we find that $0 = (c_0 - \tilde{c}_0)\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$ over $\mathcal{B}$. But $0 = o(\varphi_0(x))$ over $\mathcal{B}$ and so, by what has been proved, $c_0 - \tilde{c}_0 = 0$.

If we have proved that $c_0 = \tilde{c}_0, \dots, c_{n-1} = \tilde{c}_{n-1}$ for two expansions of the function f in the system $\{\varphi_n\}$, then by the equalities

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0\varphi_0(x) + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)) \\ f(x) &= c_0\varphi_0(x) + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \tilde{c}_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)) \end{aligned}$$

we find in the same way that $c_n = \tilde{c}_n$.

By induction we now conclude that a) is true.

b) If $f(x) = c_0\varphi_0(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x))$ and $g(x) = c_0\varphi_0(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x))$ over $\mathcal{B}$, then $f(x) - g(x) = o(\varphi_n(x))$ over $\mathcal{B}$ for each $n = 0, 1, \dots$, and hence the functions f and g are asymptotically equal with respect to the sequence $\{\varphi_n(x)\}$.

The converse follows from a), since an asymptotic zero, which we take to be the difference $f - g$, can have only the zero asymptotic expansion.

Remark 4. We have discussed the question of uniqueness of an asymptotic expansion. We emphasize, however, that an asymptotic expansion of a function with respect to a preassigned asymptotic sequence is by no means always possible. Two functions f and g in general need not always be connected by one of the asymptotic relations $f = O(g)$, $f = o(g)$ or $f \sim g$ over a base $\mathcal{B}$.

The very general asymptotic Taylor formula, for example, exhibits a specific class of functions (having derivatives of order up to n at $x = 0$), each of which admits the asymptotic representation

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$$

as $x \rightarrow 0$. But even the function $x^{1/2}$ cannot be expanded asymptotically in the system $1, x, x^2, \dots$. Thus one must not identify an asymptotic sequence and an asymptotic expansion with any canonical base and the expansion of any asymptotic in it. There are many more possible types of asymptotic behavior than can be described by any fixed asymptotic sequence, so that the description of the asymptotic behavior of a function is not so much an expansion in terms of a preassigned asymptotic system as it is the search for such a system. One cannot, for example, when computing the indefinite integral of an elementary function, require in advance that the result be a composition of certain elementary functions, because it may not be an elementary function at all. The search for asymptotic formulas, like the computation of indefinite integrals, is of interest only to the extent that the result is simpler

and more accessible to investigation than the original expression.

b. Admissible Operations with Asymptotic Formulas

The elementary arithmetic properties of the symbols o and O (such properties as $o(g) + o(g) = o(g)$, $o(g) + O(g) = O(g) + O(g) = O(g)$, and the like) have been studied along with the theory of limits (Proposition 4 of Sect. 3.2). The following obvious proposition follows from these properties and the definition of an asymptotic expansion.

Proposition 2.

(Linearity of asymptotic expansions). If the functions f and g admit asymptotic expansions $f \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$ and $g \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n$ with respect to the asymptotic sequence $\{\varphi_n\}$ over the base $\mathcal{B}$, then a linear combination of them $\alpha f + \beta g$ admits such an expansion, and $(\alpha f + \beta g) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \varphi_n$.

Further properties of asymptotic expansions and asymptotic formulas in general will involve more and more specialized cases.

Proposition 3.

(Integration of asymptotic equalities). Let f be a continuous function on the interval $I = [a, \omega[$ (or $I =]\omega, a]$).

a) If the function $g(x)$ is continuous and nonnegative on I and the integral $\int_a^\omega g(x)dx$ diverges, then the relations

$$f(x) = O(g(x)), \quad f(x) = o(g(x)), \quad f(x) \sim g(x) \text{ as } I \ni x \rightarrow \omega$$

imply respectively that

$$F(x) = O(G(x)), \quad F(x) = o(G(x)), \quad \text{and } F(x) \sim G(x)$$

where

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{and} \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt$$

b) If the functions $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, which are continuous and positive on $I = [a, \omega[$ form an asymptotic sequence as $I \ni x \rightarrow \omega$ and the integrals $\Phi_n(x) = \int_x^\omega \varphi_n(t)dt$ converge for $x \in I$, then the functions $\Phi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ also form an asymptotic sequence over the base $I \ni x \rightarrow \omega$.

c) If the integral $\mathcal{F}(x) = \int_x^\omega f(t)dt$ converges and f has the asymptotic expansion $f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ as $I \ni x \rightarrow \omega$ with respect to the asymptotic sequence $\{\varphi_n(x)\}$ of b), then $\mathcal{F}(x)$ has the asymptotic expansion $\mathcal{F}(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$.

Proof. a) If $f(x) = O(g(x))$ as $I \ni x \rightarrow \omega$, there exists $x_0 \in I$ and a constant M such that $|f(x)| \leq M g(x)$ for $x \in [x_0, \omega[$. It follows that $|\int_a^x f(t)dt| \leq |\int_a^{x_0} f(t)dt| + M \int_{x_0}^x g(t)dt = O(\int_a^x g(t)dt)$.

To prove the other two relations one can use L'Hôpital's rule (as in Example 7), taking account of the relation $G(x) = \int_a^x g(t)dt \rightarrow \infty$ as $I \ni x \rightarrow \omega$. As a result, we find

$$\lim_{I \ni x \rightarrow \omega} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{I \ni x \rightarrow \omega} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{I \ni x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)}$$

b) Since $\Phi_n(x) \rightarrow 0$ as $I \ni x \rightarrow \omega$ ($n = 0, 1, \dots$) applying L'Hôpital's rule again, we find that

$$\lim_{I \ni x \rightarrow \omega} \frac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)} = \lim_{I \ni x \rightarrow \omega} \frac{\Phi'_{n+1}(x)}{\Phi'_n(x)} = \lim_{I \ni x \rightarrow \omega} \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)} = 0.$$

c) The function $r_n(x)$ in the relation

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + r_n(x)$$

being the difference of continuous functions on I , is itself continuous on I , and we obviously have $R_n(x) = \int_x^\omega r_n(t)dt \rightarrow 0$ as $I \ni x \rightarrow \omega$. But $r_n(x) = o(\varphi_n(x))$ as $I \ni x \rightarrow \omega$ and $\Phi_n(x) \rightarrow 0$ as $I \ni x \rightarrow \omega$. Therefore, again by L'Hôpital's rule, it follows that in the equality

$$\mathcal{F}(x) = c_0\Phi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + \cdots + c_n\Phi_n(x) + R_n(x)$$

the quantity $R_n(x)$ is $o(\Phi_n(x))$ as $I \ni x \rightarrow \omega$.

Remark 5. Differentiation of asymptotic equalities and asymptotic series is generally not legitimate.

Example

11. The function $f(x) = e^{-x} \sin(e^x)$ is continuously differentiable on $\mathbb{R}$ and is an asymptotic zero with respect to the asymptotic sequence $\{\frac{1}{x^n}\}$ as $x \rightarrow +\infty$. The derivatives of the functions $\frac{1}{x^n}$, up to a constant factor, again have the form $\frac{1}{x^k}$. However the function $f'(x) = -e^x \sin(e^x) + \cos(e^x)$ not only fails to be an asymptotic zero; it doesn't even have an asymptotic expansion with respect to the sequence $\{\frac{1}{x^n}\}$ as $x \rightarrow +\infty$.

9.6.5 19.1.3 Asymptotic Power Series

In conclusion, let us examine asymptotic power series in some detail, since they are encountered relatively often, although in a rather generalized form, as was the case in Example 8.

We shall study expansions with respect to the sequence $\{x^n; n = 0, 1, \dots\}$, which is asymptotic as $x \rightarrow 0$ and with respect to $\{\frac{1}{x^n}; n = 0, 1, \dots\}$, which is asymptotic as $x \rightarrow \infty$. Since these are both the same object up to the change of variable $x = \frac{1}{u}$, we state the next proposition only for expansions with respect to the first sequence and then note the specifics of certain of the formulations given in the case of expansions with respect to the second sequence.

Proposition 4. Let 0 be a limit point of E and let

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots, \\ g(x) &\simeq b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \end{aligned} \quad \text{as } E \ni x \rightarrow 0.$$

Then as $E \ni x \rightarrow 0$,

- a) $(\alpha f + \beta g) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$;
- b) $(f \cdot g)(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, where $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$, $n = 0, 1, \dots$;
- c) if $b_0 \neq 0$, then $(\frac{f}{g})(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, where the coefficients d_n can be found from the recurrence relations

$$a_0 = b_0 d_0, \quad a_1 = b_0 d_1 + b_1 d_0, \dots, \quad a_n = \sum_{k=0}^n b_k d_{n-k}, \dots$$

d) if E is a deleted neighborhood or one-sided neighborhood of 0 and f is continuous on E , then

$$\int_0^x f(t)dt \simeq a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

e) if in addition to the assumptions of d) we also have $f \in C^{(1)}(E)$ and

$$f'(x) \simeq a'_0 + a'_1x + \cdots$$

then $a'_n = (n+1)a_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$

Proof. a) This is a special case of

Proposition 2.

b) Using the properties of $o()$ (see Proposition 4 of Sect. 3.2), we find that

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = \\ &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)) (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)) = \\ &= (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

as $E \ni x \rightarrow 0$.

c) If $b_0 \neq 0$, then $g(x) \neq 0$ for x close to zero, and therefore we can consider the ratio $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$. Let us verify that if the coefficients $d_0, \dots, d_n$ in the representation $h(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + r_n(x)$ have been chosen in accordance with c), then $r_n(x) = o(x^n)$ as $E \ni x \rightarrow 0$. From the identity $f(x) = g(x)h(x)$, we find that

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n) &= \\ &= (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)) (d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + r_n(x)) = \\ &= (b_0d_0) + (b_0d_1 + b_1d_0)x + \cdots + (b_0d_n + b_1d_{n-1} + \cdots + b_nd_0)x^n + \\ &\quad + b_0r_n(x) + o(r_n(x)) + o(x^n), \end{aligned}$$

from which it follows that $o(x^n) = b_0r_n(x) + o(r_n(x)) + o(x^n)$, or $r_n(x) = o(x^n)$ as $E \ni x \rightarrow 0$, since $b_0 \neq 0$.

d) This follows from part c) of Proposition 3 if we set $\omega = 0$ there and recall that $-\int_x^0 f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$.

e) Since the function $f'(x)$ is continuous on $]0, x]$ (or $[x, 0[$) and bounded (it tends to a'_0 as $x \rightarrow 0$), the integral $\int_0^x f'(t)dt$ exists. Obviously $f(x) = a_0 + \int_0^x f'(t)dt$, since $f(x) \rightarrow a_0$ as $x \rightarrow 0$. Substituting the asymptotic expansion of $f'(x)$ into this equality and using what was proved in d), we find that

$$f(x) \simeq a_0 + a'_0x + \frac{a'_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a'_{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

It now follows from the uniqueness of asymptotic expansions (Proposition 1) that $a'_n = (n+1)a_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$

Corollary 1. If U is a neighborhood (or one-sided neighborhood) of infinity in $\mathbb{R}$ and the function f is continuous in U and has the asymptotic expansion

$$f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \text{ as } U \ni x \rightarrow \infty$$

then the integral

$$\mathcal{F}(x) = \int_x^\infty \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt$$

over an interval contained in U converges and has the following asymptotic expansion:

$$\mathcal{F}(x) \simeq \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \cdots + \frac{a_n}{nx^n} + \cdots \text{ as } U \ni x \rightarrow \infty.$$

Proof. The convergence of the integral is obvious, since

$$f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \sim \frac{a_2}{t^2} \text{ as } U \ni t \rightarrow \infty.$$

It remains only to integrate the asymptotic expansion

$$f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \simeq \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \cdots + \frac{a_n}{t^n} \cdots \text{ as } U \ni t \rightarrow \infty,$$

citing, for example, Proposition 3d).

Corollary 2. If in addition to the hypotheses of Corollary 1 it is known that $f \in C^{(1)}(U)$ and f' admits the asymptotic expansion

$$f'(x) \simeq a'_0 + \frac{a'_1}{x} + \frac{a'_2}{x^2} + \cdots + \frac{a'_n}{x^n} + \cdots \text{ as } U \ni x \rightarrow \infty,$$

then this expansion can be obtained by formally differentiating the expansion of the function f , and

$$a'_n = -(n-1)a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \quad \text{and} \quad a'_0 = a'_1 = 0$$

Proof. Since $f'(x) = a'_0 + \frac{a'_1}{x} + O(1/x^2)$ as $U \ni x \rightarrow \infty$, we have

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt = a'_0 x + a'_1 \ln x + O(1)$$

as $U \ni x \rightarrow \infty$; and since $f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$ and the sequence $x, \ln x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots$ is an asymptotic sequence as $U \ni x \rightarrow \infty$, Proposition 1 enables us to conclude that $a'_0 = a'_1 = 0$. Now, integrating the expansion $f'(x) \simeq \frac{a'_2}{x^2} + \frac{a'_3}{x^3} + \cdots$, by Corollary 1 we obtain the expansion of $f(x)$, and by the uniqueness of the expansion we arrive at the relations $a'_n = -(n-1)a_{n-1}$ for $n = 2, 3, \dots$.

9.6.6 19.1.4 Problems and Exercises

3.y.1

a) Let $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ for $|z| > R, z \in \mathbb{C}$. Show that then $h(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ as $\mathbb{C} \ni z \rightarrow \infty$.

b) Assuming that the required solution $y(x)$ of the equation $y'(x) + y^2(x) = \sin \frac{1}{x^2}$ has an asymptotic expansion $y(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}$ as $x \rightarrow \infty$, find the first three terms of this expansion.

c) Prove that if $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ for $|z| < r, z \in \mathbb{C}$, and $g(z) \simeq b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ as $\mathbb{C} \ni z \rightarrow 0$, then the function $f \circ g$ is defined in some deleted neighborhood of $0 \in \mathbb{C}$ and $(f \circ g)(z) \simeq c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ as $\mathbb{C} \ni z \rightarrow 0$, where the coefficients $c_0, c_1, \dots$ can be obtained by substituting the series in the series, just as for convergent power series.

3.y.2

Show the following.

a) If f is a continuous, positive, monotonic function for $x \geq 0$, then

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + O(f(n)) + O(1) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

- b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + c + o(1)$ as $n \rightarrow \infty$.
 c) $\sum_{k=1}^n k^\alpha (\ln k)^\beta \sim \frac{n^{\alpha+1} (\ln n)^\beta}{\alpha+1}$ as $n \rightarrow \infty$ for $\alpha > -1$.

3.y.3

Through integration by parts find the asymptotic expansions of the following functions as $x \rightarrow +\infty$:

- a) $\Gamma_s(x) = \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ - the incomplete gamma function;
 b) $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt$ - the probability error function (we recall that $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ is the Euler-Poisson integral).
 c) $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ if $\alpha > 0$.

3.y.4.

Using the result of the preceding problem, find the asymptotic expansions of the following functions as $x \rightarrow +\infty$:

- a) $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ - the sine integral (we recall that $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ is the Dirichlet integral).
 b) $C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt, S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt$ - the Fresnel integrals (we recall that $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$).

3.y.5

The following generalization of the concept of an expansion in an asymptotic sequence $\{\varphi_n(x)\}$ introduced by Poincaré and studied above is due to Erdlyi.²

Let X be a set, $\mathcal{B}$ a base in X , $\{\varphi_n(x)\}$ an asymptotic sequence of functions on X . If the functions $f(x), \psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ are such that the equality

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \psi_k(x) + o(\varphi_n(x)) \text{ over the base } \mathcal{B}$$

holds for every $n = 0, 1, \dots$, we write

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \quad \{\varphi_n(x)\} \text{ over the base } \mathcal{B}$$

and we say that we have the asymptotic expansion of the function f over the base $\mathcal{B}$ in the sense of Erdlyi.

- a) Please note that in Problem 4 you obtained the asymptotic expansion in the sense of Erdlyi if you assume $\varphi_n(x) = x^{-n}, n = 0, 1, \dots$.
 b) Show that asymptotic expansions in the sense of Erdlyi do not have the property of uniqueness (the functions ψ_n can be changed).
 c) Show that if a set X , a base $\mathcal{B}$ in X , a function f on X , and sequences $\{\mu_n(x)\}$ and $\{\varphi_n(x)\}$, the second of which is asymptotic over the base $\mathcal{B}$, are given, then the expansion

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_n(x), \quad \{\varphi_n(x)\} \text{ over the base } \mathcal{B}$$

where a_n are numerical coefficients, is either impossible or unique.

⁰² A. Erdlyi (1908-1977) - Hungarian/British mathematician.

3.y.6

Uniform asymptotic estimates. Let X be a set and $\mathcal{B}_X$ a base in X , and let $f(x, y)$ and $g(x, y)$ be (vector-valued) functions defined on X and depending on the parameter $y \in Y$. Set $|f(x, y)| = \alpha(x, y)|g(x, y)|$. We say that the asymptotic relations

$$f(x, y) = o(g(x, y)), \quad f(x, y) = O(g(x, y)), \quad f(x, y) \sim g(x, y)$$

are uniform with respect to the parameter y on the set Y if (respectively) $\alpha(x, y) \rightrightarrows 0$ on Y over the base $\mathcal{B}_X$; $\alpha(x, y)$ is ultimately bounded over the base $\mathcal{B}_X$ uniformly with respect to $y \in Y$; and finally $f = \alpha \cdot g + o(g)$, where $\alpha(x, y) \rightrightarrows 1$ on Y over the base $\mathcal{B}_X$.

Show that if we introduce the base $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_x \times Y\}$ in $X \times Y$ whose elements are the direct products of the elements B_x of the base $\mathcal{B}_X$ and the set Y , then these definitions are equivalent respectively to the following:

$$f(x, y) = o(g(x, y)), \quad f(x, y) = O(g(x, y)), \quad f(x, y) \sim g(x, y)$$

over the base $\mathcal{B}$.

3.y.7

Uniform asymptotic expansions. The asymptotic expansion

$$f(x, y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \varphi_n(x) \text{ over the base } \mathcal{B}_X$$

is uniform with respect to the parameter y on Y if the estimate $r_n(x, y) = o(\varphi_n(x))$ over the base $\mathcal{B}_X$ in X holds uniformly on Y in the equalities

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k(y) \varphi_k(x) + r_n(x, y), \quad n = 0, 1, \dots$$

a) Let Y be a (bounded) measurable set in $\mathbb{R}^n$, and suppose that for each fixed $x \in X$ the functions $f(x, y), a_0(y), a_1(y), \dots$ are integrable over Y . Show that if the asymptotic expansion $f(x, y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \varphi_n(x)$ over the base $\mathcal{B}_X$ is uniform with respect to the parameter $y \in Y$, then the following asymptotic expansion also holds

$$\int_Y f(x, y) dy \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_Y a_n(y) dy \right) \varphi_n(x) \text{ over the base } \mathcal{B}_X$$

b) Let $Y = [c, d] \subset \mathbb{R}$. Assume that the function $f(x, y)$ is continuously differentiable with respect to y on the closed interval Y for each fixed $x \in X$ and for some $y_0 \in Y$ admits the asymptotic expansion

$$f(x, y_0) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y_0) \varphi_n(x) \text{ over the base } \mathcal{B}_X$$

Prove that if the asymptotic expansion

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y) \varphi_n(x) \text{ over the base } \mathcal{B}_X$$

holds uniformly with respect to $y \in Y$ with coefficients $\alpha_n(y)$ that are continuous in $y, n = 0, 1, \dots$, then the original function $f(x, y)$ has an asymptotic expansion

$f(x, y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \varphi_n(x)$ over the base $\mathcal{B}_X$ that is uniform with respect to $y \in Y$, its coefficients $a_n(y)$, $n = 0, 1, \dots$ are smooth functions of y on the interval Y and $\frac{da_n}{dy}(y) = \alpha_n(y)$.

3.y.8

Let $p(x)$ be a smooth function that is positive on the closed interval $c \leq x \leq d$.

- Solve the equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \lambda) = \lambda^2 p(x) u(x, \lambda)$ in the case when $p(x) \equiv 1$ on $[c, d]$.
- Let $0 < m \leq p(x) \leq M < +\infty$ on $[c, d]$ and let $u(c, \lambda) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial x}(c, \lambda) = 0$. Estimate the quantity $u(x, \lambda)$ from above and below for $x \in [c, d]$.
- Assuming that $\ln u(x, \lambda) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) \lambda^{1-n}$ as $\lambda \rightarrow +\infty$, where $c_0(x), c_1(x), \dots$ are smooth functions and, using the fact that $\left(\frac{u'}{u}\right)' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2$, show that $c_0''(x) = p(x)$ and $(c_{n-1}'' + \sum_{k=0}^n c_k' \cdot c_{n-k}') (x) = 0$.

9.7 19.2 The Asymptotics of Integrals (Laplace's Method)

9.7.1 19.2.1 The Idea of Laplace's Method

In this subsection we shall discuss Laplace's method - one of the few reasonably general methods of constructing the asymptotics of an integral depending on a parameter. We confine our attention to integrals of the form

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (19.1)$$

where $S(x)$ is a real-valued function and λ is a parameter. Such integrals are usually called Laplace integrals.

Example

- The Laplace transform

$$L(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\xi x} dx$$

is a special case of a Laplace integral.

Example

- Laplace himself applied his method to integrals of the form $\int_a^b f(x) \varphi^n(x) dx$, where $n \in \mathbb{N}$ and $\varphi(x) > 0$ on $]a, b[$. Such an integral is also a special case of a general Laplace integral (19.1), since $\varphi^n(x) = \exp(n \ln \varphi(x))$.

We shall be interested in the asymptotics of the integral (19.1) for large values of the parameter λ , more precisely as $\lambda \rightarrow +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

So as not to become distracted with secondary issues when describing the basic idea of Laplace's method, we shall assume that $[a, b] = I$ is a finite closed interval in the integral (19.1), that the functions $f(x)$ and $S(x)$ are smooth on I , and that $S(x)$ has a unique, strict maximum $S(x_0)$ at the point $x_0 \in I$. Then the function $\exp(\lambda S(x))$ also has a strict maximum at x_0 , which rises higher above the other values of this function on the interval I as the value of the parameter λ increases. As a result, if $f(x) \not\equiv 0$ in a neighborhood of x_0 , the entire integral (19.1) can be replaced by the integral over an arbitrarily small neighborhood of x_0 ,

thereby admitting a relative error that tends to zero as $\lambda \rightarrow +\infty$. This observation is called the localization principle. Reversing the historical sequence of events, one might say that this localization principle for Laplace integrals resembles the principal of local action of approximate identities and the δ -function.

Now that the integral is being taken over only a small neighborhood of x_0 , the functions $f(x)$ and $S(x)$ can be replaced by the main terms of their Taylor expansions as $I \ni x \rightarrow x_0$.

It remains to find the asymptotics of the resulting canonical integral, which can be done without any particular difficulty.

It is in the sequential execution of these steps that the essence of Laplace's method of finding the asymptotics of an integral is to be found.

Example

3. Let $x_0 = a$, $S'(a) \neq 0$, and $f(a) \neq 0$, which happens, for example, when the function $S(x)$ is monotonically decreasing on $[a, b]$. Under these conditions $f(x) = f(a) + o(1)$ and $S(x) = S(a) + (x - a)S'(a) + o(1)$, as $I \ni x \rightarrow a$. Carrying out the idea of Laplace's method, for a small $\varepsilon > 0$ and $\lambda \rightarrow +\infty$, we find that

$$F(\lambda) \sim \int_a^{a+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)} dx \sim f(a)e^{\lambda S(a)} \int_0^\varepsilon e^{\lambda t S'(a)} dt = -\frac{f(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} (1 - e^{\lambda S'(a)\varepsilon})$$

Since $S'(a) < 0$, it follows that in the case in question

$$F(\lambda) \sim -\frac{f(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.2)$$

Example

4. Let $a < x_0 < b$. Then $S'(x_0) = 0$, and we assume that $S''(x_0) \neq 0$, that is, $S''(x_0) < 0$, since x_0 is a maximum.

Using the expansions $f(x) = f(x_0) + o(x - x_0)$ and $S(x) = S(x_0) + \frac{1}{2}S''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$, which hold as $x \rightarrow x_0$, we find that for small $\varepsilon > 0$ and $\lambda \rightarrow +\infty$

$$F(\lambda) \sim \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)} dx \sim f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \int_{-\varepsilon}^\varepsilon e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2} dt$$

Making the change of variable $\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2 = -u^2$ (since $S''(x_0) < 0$), we obtain

$$\int_{-\varepsilon}^\varepsilon e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2} dt = \sqrt{-\frac{2}{\lambda S''(x_0)}} \int_{-\varphi(\lambda, \varepsilon)}^{\varphi(\lambda, \varepsilon)} e^{-u^2} du$$

where $\varphi(\lambda, \varepsilon) = \sqrt{-\frac{\lambda S''(x_0)}{2}}\varepsilon \rightarrow +\infty$ as $\lambda \rightarrow +\infty$.

Taking account of the equality

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

we now find the principal term of the asymptotics of the Laplace integral in this case:

$$F(\lambda) \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.3)$$

Example

5. If $x_0 = a$, but $S'(x_0) = 0$ and $S''(x_0) < 0$, then, reasoning as in Example 4, we find this time that

$$F(\lambda) \sim \int_a^{a+\varepsilon} f(x) e^{\lambda S(x)} dx \sim f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \int_0^\varepsilon e^{\frac{1}{2} \lambda S''(x_0) t^2} dt$$

and so

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.4)$$

We have now obtained on a heuristic level the three very useful formulas (19.2)-(19.4) involving the asymptotics of the Laplace integral (19.1).

It is clear from these considerations that Laplace's method can be used successfully in the study of the asymptotics of any integral

$$\int_X f(x, \lambda) dx \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.5)$$

provided (a) the localization principle holds for the integral, that is, the integral can be replaced by one equivalent to it as $\lambda \rightarrow +\infty$ extending over arbitrarily small neighborhoods of the distinguished points, and (b) the integrand in the localized integral can be replaced by a simpler one for which the asymptotics is on the one hand the same as that of the integral being investigated and on the other hand easy to find.

If, for example, the function $S(x)$ in the integral (19.1) has several local maxima $x_0, x_1, \dots, x_n$ on the closed interval $[a, b]$, then, using the additivity of the integral, we replace it with small relative error by the sum of similar integrals taken over neighborhoods $U(x_j)$ of the maxima $x_0, x_1, \dots, x_n$ so small that each contains only one such point. The asymptotic behavior of the integral

$$\int_{U(x_j)} f(x) e^{\lambda S(x)} dx \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty$$

as already mentioned, is independent of the size of the neighborhood $U(x_j)$ itself, and hence the asymptotic expansion of this integral as $\lambda \rightarrow +\infty$ is denoted $F(\lambda, x_j)$ and called the contribution of the point x_j to the asymptotics of the integral (19.1).

In its general formulation the localization principle thus means that the asymptotic behavior of the integral (19.5) is obtained as the sum $\sum_j F(\lambda, x_j)$ of the contributions of all the points of the integrand that are critical in some respect.

For the integral (19.1) these points are the maxima of the function $S(x)$, and, as one can see from formulas (19.2)-(19.4), the main contribution comes entirely from the local maximum points at which the absolute maximum of $S(x)$ on $[a, b]$ is attained.

In the following subsections of this section we shall develop the general considerations stated here and then consider some useful applications of Laplace's method. For many applications what we have already discussed is sufficient. It will also be shown below how to obtain not only the main term of the asymptotics, but also the entire asymptotic series.

9.7.2 19.2.2 The Localization Principle for a Laplace Integral

Lemma 1. (Exponential estimate). Let $M = \sup_{a < x < b} S(x) < \infty$, and suppose that for some value $\lambda_0 > 0$ the integral (19.1) converges absolutely. Then it converges absolutely for every $\lambda \geq \lambda_0$ and the following estimate holds for such values of λ :

$$|F(\lambda)| \leq \int_a^b |f(x)e^{\lambda S(x)}| dx \leq Ae^{\lambda M} \quad (19.6)$$

where $A \in \mathbb{R}$.

Proof. Indeed, for $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\begin{aligned} |F(\lambda)| &= \left| \int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)} dx \right| = \left| \int_a^b f(x)e^{\lambda_0 S(x)} e^{(\lambda - \lambda_0)S(x)} dx \right| \leq \\ &\leq e^{(\lambda - \lambda_0)M} \int_a^b |f(x)e^{\lambda_0 S(x)}| dx = \left(e^{-\lambda_0 M} \int_a^b |f(x)e^{\lambda_0 S(x)}| dx \right) e^{\lambda M} \end{aligned}$$

Lemma 2. (Estimate of the contribution of a maximum point). Suppose the integral (19.1) converges absolutely for some value $\lambda = \lambda_0$, and suppose that in the interior or on the boundary of the interval I there is a point x_0 at which $S(x_0) = \sup_{a < x < b} S(x) = M$. If $f(x)$ and $S(x)$ are continuous at x_0 and $f(x_0) \neq 0$, then for every $\varepsilon > 0$ and every sufficiently small neighborhood $U_I(x_0)$ of x_0 in I we have the estimate

$$\left| \int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)} dx \right| \geq Be^{\lambda(S(x_0) - \varepsilon)} \quad (19.7)$$

with a constant $B > 0$, valid for $\lambda \geq \max\{\lambda_0, 0\}$.

Proof. For a fixed $\varepsilon > 0$ let us take any neighborhood $U_I(x_0)$ inside which $|f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(x_0)|$ and $S(x_0) - \varepsilon \leq S(x) \leq S(x_0)$. Assuming that f is realvalued, we can now conclude that f is of constant sign inside $U_I(x)$. This enables us to write for $\lambda \geq \max\{\lambda_0, 0\}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)} dx \right| &= \int_{U_I(x_0)} |f(x)|e^{\lambda S(x)} dx \geq \\ &\geq \int_{U_I(x_0)} \frac{1}{2}|f(x_0)|e^{\lambda(S(x_0) - \varepsilon)} dx = Be^{\lambda(S(x_0) - \varepsilon)} \end{aligned}$$

Proposition 1.

(Localization principle). Suppose the integral (19.1) converges absolutely for a value $\lambda = \lambda_0$, and suppose that inside or on the boundary of the interval I of integration the function $S(x)$ has a unique point x_0 of absolute maximum, that is, outside every neighborhood $U(x_0)$ of the point x_0 we have

$$\sup_{I \setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0)$$

If the functions $f(x)$ and $S(x)$ are continuous at x_0 and $f(x_0) \neq 0$, then

$$F(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda) (1 + O(\lambda^{-\infty})) \quad \text{as } \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.8)$$

where $U_I(x_0)$ is an arbitrary neighborhood of x_0 in I ,

$$F_{U_I(x_0)}(\lambda) := \int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)} dx$$

and $O(\lambda^{-\infty})$ denotes a function that is $o(\lambda^{-n})$ as $\lambda \rightarrow +\infty$ for every $n \in \mathbb{N}$.

Proof. It follows from Lemma 2 that if the neighborhood $U_I(x_0)$ is sufficiently small, then the following inequality holds ultimately as $\lambda \rightarrow +\infty$ for every $\varepsilon > 0$

$$|F_{U_I(x_0)}(\lambda)| > e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)} \quad (19.9)$$

At the same time, by Lemma 1 for every neighborhood $U(x_0)$ of the point x_0 we have the estimate

$$\int_{I \setminus U(x_0)} |f(x)| e^{\lambda S(x)} dx \leq A e^{\lambda \mu} \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.10)$$

where $A > 0$ and $\mu = \sup_{x \in I \setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0)$.

Comparing this estimate with inequality (19.9), it is easy to conclude that inequality (19.9) holds ultimately as $\lambda \rightarrow +\infty$ for every neighborhood $U_I(x_0)$ of x_0 .

It now remains only to write

$$F(\lambda) = F_I(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda) + F_{I \setminus U(x_0)}(\lambda)$$

and, citing estimates (19.9) and (19.10), conclude that (19.8) holds.

Thus it is now established that with a relative error of the order $O(\lambda^{-\infty})$ as $\lambda \rightarrow +\infty$ when estimating the asymptotic behavior of the Laplace integral, one can replace it by the integral over an arbitrarily small neighborhood $U_I(x_0)$ of the point x_0 where the absolute maximum of $S(x)$ occurs on the interval I of integration.

9.7.3 19.2.3 Canonical Integrals and their Asymptotics

Canonical form of the function in the neighborhood of a critical point

If the real-valued function $S(x)$ has smoothness $C^{(n+k)}$ in a neighborhood (or one-sided neighborhood) of a point $x_0 \in \mathbb{R}$, and

$$S'(x_0) = \dots = S^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad S^{(n)}(x_0) \neq 0$$

and $k \in \mathbb{N}$ or $k = \infty$, then there exist neighborhoods (or one-sided neighborhoods) I_x of x_0 and I_y of 0 in $\mathbb{R}$ and a diffeomorphism $\varphi \in C^{(k)}(I_y, I_x)$ such that

$$S(\varphi(y)) = S(x_0) + sy^n, \text{ when } y \in I_y \text{ and } s = \operatorname{sgn} S^{(n)}(x_0)$$

Here

$$\varphi(0) = x_0 \quad \text{and} \quad \varphi'(0) = \left(\frac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|} \right)^{1/n}$$

Proof. Using Taylor's formula with the integral form of the remainder,

$$S(x) = S(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!} \int_0^1 S^{(n)}(x_0 + t(x-x_0)) (1-t)^{n-1} dt$$

we represent the difference $S(x) - S(x_0)$ in the form

$$S(x) - S(x_0) = (x-x_0)^n r(x)$$

where the function

$$r(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 S^{(n)}(x_0 + t(x-x_0)) (1-t)^{n-1} dt$$

by virtue of the theorem on differentiation of an integral with respect to the parameter x , belongs to class $C^{(k)}$, and $r(x_0) = \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) \neq 0$. Hence the function $y = \psi(x) =$

$(x - x_0) \sqrt[n]{|r(x)|}$ also belongs to $C^{(k)}$ in some neighborhood (or one-sided neighborhood) I_x of x_0 and is even monotonic, since

$$\psi'(x_0) = \sqrt[n]{|r(x_0)|} = \left(\frac{|S^{(n)}(x_0)|}{n!} \right)^{1/n} \neq 0$$

In this case the function ψ on I_x has an inverse $\psi^{-1} = \varphi$ defined on the interval $I_y = \psi(I_x)$ containing the point $0 = \psi(x_0)$. Here $\varphi \in C^{(k)}(I_y, I_x)$.

Further, $\varphi'(0) = (\psi'(x_0))^{-1} = \left(\frac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|} \right)^{1/n}$. Finally, by construction $S(\varphi(y)) = S(x_0) + sy^n$, where $s = \operatorname{sgn} r(x_0) = \operatorname{sgn} S^{(n)}(x_0)$.

Remark 1. The cases $n = 1$ or $n = 2$ and $k = 1$ or $k = \infty$ are usually the ones of most interest.

Proposition 2.

(Reduction). Suppose the interval of integration $I = [a, b]$ in the integral (19.1) is finite and the following conditions hold:

- a) $f, S \in C(I, \mathbb{R})$;
- b) $\max_{x \in I} S(x)$ is attained only at the one point $x_0 \in I$;
- c) $S \in C^{(n)}(U_I(x_0), \mathbb{R})$ in some neighborhood $U_I(x_0)$ of x_0 (inside the interval I);
- d) $S^{(n)}(x_0) \neq 0$ and if $1 < n$, then $S^{(1)}(x_0) = \dots = S^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Then as $\lambda \rightarrow +\infty$ the integral (19.1) can be replaced by an integral of the form

$$R(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \int_{I_y} r(y) e^{-\lambda y^n} dy$$

with a relative error defined by the localization principle (19.8), where $I_y = [-\varepsilon, \varepsilon]$ or $I_y = [0, \varepsilon]$, ε is an arbitrarily small positive number, and the function r has the same degree of smoothness I_y that f has in a neighborhood of x_0 .

Proof. Using the localization principle, we replace the integral (19.1) with the integral over a neighborhood $I_x = U_I(x_0)$ of x_0 in which the hypotheses of Lemma 3 hold. Making the change of variable $x = \varphi(y)$, we obtain

$$\int_{I_x} f(x) e^{\lambda S(x)} dx = \left(\int_{I_y} f(\varphi(y)) \varphi'(y) e^{-\lambda y^n} dy \right) e^{\lambda S(x_0)} \quad (19.11)$$

The negative sign in the exponent $(-\lambda y^n)$ comes from the fact that by hypothesis $x_0 = \varphi(0)$ is a maximum.

The asymptotic behavior of the canonical integrals to which the Laplace integral (19.1) reduces in the main cases is given by the following lemma.

Lemma 4. (Watson³). Let $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < a \leq \infty$, and $f \in C([0, a], \mathbb{R})$. Then with respect to the asymptotics of the integral

$$W(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx \quad (19.12)$$

as $\lambda \rightarrow +\infty$, the following assertions hold:

- a) The main term of the asymptotics of (19.12) has the form

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha} f(0) \Gamma(\beta/\alpha) \lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} + O\left(\lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}}\right) \quad (19.13)$$

if it is known that $f(x) = f(0) + O(x)$ as $x \rightarrow 0$.

b) If $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + O(x^{n+1})$ as $x \rightarrow 0$, then

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^n a_k \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} + O\left(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}\right) \quad (19.14)$$

c) If f is infinitely differentiable at $x = 0$, then the following asymptotic expansion holds:

$$W(\lambda) \simeq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} \quad (19.15)$$

which can be differentiated any number of times with respect to λ .

Proof. We represent the integral (19.12) as a sum of integrals over the interval $]0, \varepsilon]$ and $[\varepsilon, a[$, where ε is an arbitrarily small positive number.

By Lemma 1

$$\left| \int_{\varepsilon}^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^{\alpha}} dx \right| \leq A e^{-\lambda \varepsilon^{\alpha}} = O(\lambda^{-\infty}) \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty$$

and therefore

$$W(\lambda) = \int_0^{\varepsilon} x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^{\alpha}} dx + O(\lambda^{-\infty}) \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty$$

In case b) we have $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + r_n(x)$, where $r_n \in C[0, \varepsilon]$ and $|r_n(x)| \leq Cx^{n+1}$ on the interval $[0, \varepsilon]$. Hence

$$W(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{\varepsilon} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^{\alpha}} dx + c(\lambda) \int_0^{\varepsilon} x^{n+\beta} e^{-\lambda x^{\alpha}} dx + o(\lambda^{-\infty}),$$

where $c(\lambda)$ is bounded as $\lambda \rightarrow +\infty$.

By Lemma 1, as $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$\int_0^{\varepsilon} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^{\alpha}} dx = \int_0^{+\infty} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^{\alpha}} dx + O(\lambda^{-\infty})$$

But

$$\int_0^{+\infty} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^{\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}$$

from which formula (19.14) and the special case of it, formula (19.13), now follow.

The expansion (19.15) now follows from (19.14) and Taylor's formula.

The possibility of differentiating (19.15) with respect to λ follows from the fact that the derivative of the integral (19.12) with respect to the parameter λ is an integral of the same type as (19.12) and for $W'(\lambda)$ one can use formula (19.15) to present explicitly an asymptotic expansion as $\lambda \rightarrow +\infty$ that is the same as the one obtained by formal differentiation of the original expansion (19.15).

⁰³ G.H. Watson (1886-1965) - British mathematician.

Example

6. Consider the Laplace transform

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx$$

which we have already encountered in Example 1. If this integral converges absolutely for some value $\lambda = \lambda_0$ and the function f is infinitely differentiable at $x = 0$, then by formula (19.15) we find that

$$F(\lambda) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \lambda^{-(k+1)} \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty$$

9.7.4 19.2.4 The Principal Term of the Asymptotics of a Laplace Integral

Theorem 1. (A typical principal term of the asymptotics). Suppose the interval of integration $I = [a, b]$ in the integral (19.1) is finite, $f, S \in C(I, \mathbb{R})$, and $\max_{x \in I} S(x)$ is attained only at one point $x_0 \in I$.

Suppose it is also known that $f(x_0) \neq 0$, $f(x) = f(x_0) + O(x - x_0)$ for $I \ni x \rightarrow x_0$, and the function S belongs to $C^{(k)}$ in a neighborhood of x_0 .

The following statements hold.

a) If $x_0 = a$, $k = 2$, and $S'(x_0) \neq 0$ (that is, $S'(x_0) < 0$), then

$$F(\lambda) = \frac{f(x_0)}{-S'(x_0)} e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-1} [1 + O(\lambda^{-1})] \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty \quad (I)$$

b) if $a < x_0 < b$, $k = 3$, and $S''(x_0) \neq 0$ (that is, $S''(x_0) < 0$), then

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-1/2} [1 + O(\lambda^{-1/2})] \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty;$$

c) if $x_0 = a$, $k = 3$, $S'(a) = 0$, and $S''(a) \neq 0$ (that is, $S''(a) < 0$), then

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{-2S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-1/2} [1 + O(\lambda^{-1/2})] \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Proof. Using the localization principle and making the change of variable $x = \varphi(y)$ shown in Lemma 3, according to the reduction in Proposition 2, we arrive at the following relations:

$$a) F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \left(\int_0^\varepsilon (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y} dy + O(\lambda^{-\infty}) \right);$$

$$b) F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \left(\int_{-\varepsilon}^\varepsilon (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y^2} dy + O(\lambda^{-\infty}) \right) =$$

$$= e^{\lambda S(x_0)} \left(\int_0^\varepsilon ((f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) + (f \circ \varphi)(-y) \varphi'(-y)) e^{-\lambda y^2} dy + O(\lambda^{-\infty}) \right)$$

$$c) F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \left(\int_0^\varepsilon (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y^2} dy + O(\lambda^{-\infty}) \right)$$

Under the requirements stated above, the function $(f \circ \varphi) \varphi'$ satisfies all the hypotheses of Watson's lemma. It now remains only to apply Watson's lemma (formula (19.14) for $n = 0$) and to recall the expressions for $\varphi(0)$ and $\varphi'(0)$ indicated in Lemma 3.

Thus we have justified formula (19.2)-(19.4) together with the remarkably simple, clear and effective recipe that led us to these formulas in Sect. 19.1.

Now let us consider some examples of the application of this theorem.

Example

7. The asymptotics of the gamma function. The function

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t} dt \quad (\lambda > -1)$$

can be represented as a Laplace integral

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{\lambda \ln t} dt$$

and if for $\lambda > 0$ we make the change of variable $t = \lambda x$, we arrive at the integral

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x - \ln x)} dx$$

which can be studied using the methods of the theorem.

The function $S(x) = \ln x - x$ has a unique maximum $x = 1$ on the interval $]0, +\infty[$, and $S''(1) = -1$. By the localization principle (Proposition 1) and assertion b) of Theorem 1, we conclude that

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \left[1 + O\left(\lambda^{-1/2}\right)\right] \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty$$

In particular, recalling that $\Gamma(n + 1) = n!$ for $n \in \mathbb{N}$, we obtain the classical Stirling's formula⁴

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n \left[1 + O\left(n^{-1/2}\right)\right] \text{ as } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

Example

8. The asymptotics of the Bessel function

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos n\theta d\theta$$

where $n \in \mathbb{N}$. Here $f(\theta) = \cos n\theta$, $S(\theta) = \cos \theta$, $\max_{0 \leq \theta \leq \pi} S(\theta) = S(0) = 1$, $S'(0) = 0$, and $S''(0) = -1$, so that by assertion c) of Theorem 1

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + O\left(x^{-1/2}\right)\right] \text{ as } x \rightarrow +\infty$$

Example

9. Let $f \in C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$, $S \in C^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$, with $S(x) > 0$ on $[a, b]$, and $\max_{a \leq x \leq b} S(x)$ is attained only at the one point $x_0 \in [a, b]$. If $f(x_0) \neq 0$, $S'(x_0) = 0$, and $S''(x_0) \neq 0$, then, rewriting the integral

$$\mathcal{F}(\lambda) = \int_a^b f(x) [S(x)]^\lambda dx$$

in the form of a Laplace integral

⁰⁴ See also Problem 10 of Sect. 7.3.

$$\mathcal{F}(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda \ln S(x)} dx$$

on the basis of assertions b) and c) of Theorem 1, we find that as $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{F}(\lambda) = \varepsilon f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}} [S(x_0)]^{\lambda+1/2} \lambda^{-1/2} \left[1 + O(\lambda^{-1/2})\right]$$

where $\varepsilon = 1$ if $a < x_0 < b$ and $\varepsilon = 1/2$ if $x_0 = a$ or $x_0 = b$.

Example

10. The asymptotics of the Legendre polynomials

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^n d\theta$$

in the domain $x > 1$ as $n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}$, can be obtained as a special case of the preceding example when $f \equiv 1$,

$$\begin{aligned} S(\theta) &= x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta, \quad \max_{0 \leq \theta \leq \pi} S(\theta) = S(0) = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ S'(0) &= 0, \quad S''(0) = -\sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Thus,

$$P_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi n} \sqrt{x^2 - 1}} \left[1 + O(n^{-1/2})\right] \text{ as } n \rightarrow +\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

9.7.5 19.2.5* Asymptotic Expansions of Laplace Integrals

Theorem 1 gives only the principal terms of the characteristic asymptotics of a Laplace integral (19.1) and even that under the condition that $f(x_0) \neq 0$. On the whole this is of course a typical situation, and for that reason Theorem 1 is undoubtedly a valuable result. However, Watson's lemma shows that the asymptotics of a Laplace integral can sometimes be brought to an asymptotic expansion. Such a possibility is especially important when $f(x_0) = 0$ and Theorem 1 gives no result.

It is naturally impossible to get rid of the hypothesis $f(x_0) \neq 0$ completely, without replacing it with anything, while remaining within the limits of Laplace's method: after all, if $f(x) \equiv 0$ in a neighborhood of a maximum x_0 of the function $S(x)$ or if $f(x)$ tends to zero very rapidly as $x \rightarrow x_0$, then x_0 may not be responsible for the asymptotics of the integral. Now that we have arrived at a certain type of asymptotic sequence $\{e^{\lambda c} \lambda^{-p_k}\}, (p_0 < p_1 < \dots)$ as $\lambda \rightarrow +\infty$ as a result of the considerations we have studied, we can speak of an asymptotic zero in relation to such a sequence and, without assuming that $f(x_0) \neq 0$, we can state the localization principle as follows: *Up* to an asymptotic zero with respect to the asymptotic sequence $\{e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-p_k}\}, (p_0 < p_1 < \dots)$ the asymptotic behavior of the Laplace integral (19.1) as $\lambda \rightarrow +\infty$ equals the asymptotics of the portion of this integral taken over an arbitrarily small neighborhood of the point x_0 , provided that this point is the unique maximum of the function $S(x)$ on the interval of integration.

However, we shall not go back and re-examine these questions in order to sharpen them. Rather, assuming f and S belong to $C^{(\infty)}$, we shall give a derivation of the corresponding

asymptotic expansions using Lemma 1 on the exponential estimate, Lemma 3 on the change of variable, and Watson's lemma (Lemma 4).

Theorem 2. (Asymptotic expansion). Let $I = [a, b]$ be a finite interval, $f, S \in C(I, \mathbb{R})$, and assume $\max_{x \in I} S(x)$ is attained only at the point $x_0 \in I$ and $f, S \in C^{(\infty)}(U_I(x_0), \mathbb{R})$ in some neighborhood $U_I(x_0)$ of x_0 . Then in relation to the asymptotics of the integral (19.1) the following assertions hold.

a) If $x_0 = a$, $S^{(m)}(a) \neq 0$, $S^{(j)}(a) = 0$ for $1 \leq j < m$, then

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-1/m} e^{\lambda S(a)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k/m} \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.16)$$

where

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1} m^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) \left(h(x, a) \frac{d}{dx}\right)^k (f(x) h(x, a)) \Big|_{x=a}$$

$$h(x, a) = (S(a) - S(x))^{1-1/m} / S'(x)$$

b) If $a < x_0 < b$, $S^{(2m)}(x_0) \neq 0$, and $S^{(j)}(x_0) = 0$ for $1 \leq j < 2m$, then

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-1/2m} e^{\lambda S(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-k/m} \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty \quad (19.17)$$

where

$$c_k = 2 \frac{(-1)^{2k+1} (2m)^{2k}}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \left(h(x, x_0) \frac{d}{dx}\right)^{2k} (f(x) h(x, x_0)) \Big|_{x=x_0}$$

$$h(x, x_0) = (S(x_0) - S(x))^{1-\frac{1}{2m}} / S'(x)$$

c) If $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ and $f(x) \sim \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n$ as $x \rightarrow x_0$, then the main term of the asymptotics in the cases a) and b) respectively has the form

$$F(\lambda) = \frac{1}{m} \lambda^{-\frac{n+1}{m}} e^{\lambda S(a)} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) \left(\frac{m!}{|S^m(a)|}\right)^{\frac{n+1}{m}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + O\left(\lambda^{-\frac{n+1}{m}}\right) \right] \quad (19.18)$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{m} \lambda^{-\frac{n+1}{2m}} e^{\lambda S(x_0)} \Gamma\left(\frac{n+1}{2m}\right) \left(\frac{(2m)!}{|S^{2m}(x_0)|}\right)^{\frac{n+1}{2m}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + O\left(\lambda^{-\frac{n+1}{2m}}\right) \right] \quad (19.19)$$

d) The expansions (19.16) and (19.17) can be differentiated with respect to λ any number of times.

Proof. It follows from Lemma 1 that under these hypotheses the integral (19.1) can be replaced by an integral over an arbitrarily small neighborhood of x_0 up to a quantity of the form $e^{\lambda S(x_0)} O(\lambda^{-\infty})$ as $\lambda \rightarrow \infty$.

Making the change of variable $x = \varphi(y)$ from Lemma 3 in such a neighborhood, we bring the last integral into the form

$$e^{-\lambda S(x_0)} \int_{I_y} (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y^\alpha} dy \quad (19.20)$$

where $I_y = [0, \varepsilon]$, $\alpha = m$ if $x_0 = a$, and $I_y = [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\alpha = 2m$ if $a < x_0 < b$.

The neighborhood in which the change of variable $x = \varphi(y)$ took place can be assumed so small that both functions f and S are infinitely differentiable in it. Then the resulting integrand $(f \circ \varphi)(y)\varphi'(y)$ in the integral (19.20) can also be assumed infinitely differentiable.

If $I_y = [0, \varepsilon]$, that is, when $x_0 = a$, Watson's lemma is immediately applicable to the integral (19.20) and the existence of the expansion (19.16) is thereby proved.

If $I_y = [-\varepsilon, \varepsilon]$, that is, in the case $a < x_0 < b$, we bring the integral (19.20) into the form

$$e^{\lambda S(x_0)} \int_0^\varepsilon [(f \circ \varphi)(y)\varphi'(y) + (f \circ \varphi)(-y)\varphi'(-y)] e^{-\lambda y^{2m}} dy \quad (19.21)$$

and, once again applying Watson's lemma, we obtain the expansion (19.17).

The possibility of differentiating the expansions (19.16) and (19.17) follows from the fact that under our assumptions the integral (19.1) can be differentiated with respect to λ to yield a new integral satisfying the hypotheses of the theorem. We write out the expansions (19.16) and (19.17) for it, and we can verify immediately that these expansions really are the same as those obtained by formal differentiation of the expansions (19.16) and (19.17) for the original integrals.

We now take up the formulas for the coefficients a_k and c_k . By Watson's lemma $a_k = \frac{1}{k!m} \frac{d^k \Phi}{dy^k}(0) \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right)$, where $\Phi(y) = (f \circ \varphi)(y)\varphi'(y)$.

However, taking account of the relations

$$\begin{aligned} S(\varphi(y)) - S(a) &= -y^m \\ S'(x)\varphi'(y) &= -my^{m-1} \\ \varphi'(y) &= -m(S(a) - S(x))^{1-\frac{1}{m}}/S'(x) \\ \frac{d}{dy} &= \varphi'(y) \frac{d}{dx} \\ \Phi(y) &= f(x)\varphi'(y) \end{aligned}$$

we obtain

$$\frac{d^k \Phi}{dy^k}(0) = (-m)^{k+1} \left(h(x, a) \frac{d}{dx} \right)^k (f(x)h(x, a)) \Big|_{x=a},$$

where $h(x, a) = (S(a) - S(x))^{1-\frac{1}{m}}/S'(x)$.

Formulas for the coefficients c_k can be obtained similarly by applying Watson's lemma to the integral (19.21).

Setting $\psi(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y) + f(\varphi(-y))\varphi'(-y)$, we can write, as $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$\int_0^\varepsilon \psi(y) e^{-\lambda y^{2m}} dy \simeq \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{2m}\right) \lambda^{-\frac{n+1}{2m}}.$$

But, $\psi^{(2k+1)}(0) = 0$ since $\psi(y)$ is an even function; therefore this last asymptotic expansion can be rewritten as

$$\int_0^\varepsilon \psi(y) e^{-\lambda y^{2m}} dy \simeq \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(2k)}(0)}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \lambda^{-\frac{2k+1}{2m}}.$$

It remains only to note that $\psi^{(2k)}(0) = 2\Phi^{(2k)}(0)$, where $\Phi(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$. The formula for c_k can now be obtained from the already established formula for a_k by replacing k with $2k$ and doubling the result of the substitution.

To obtain the principal terms (19.18) and (19.19) in the asymptotic expansions (19.16) and (19.17) under the condition $f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n + O((x - x_0)^{n+1})$ indicated in c), where $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, it suffices to recall that $x = \varphi(y)$, $x_0 = \varphi(0)$, $x - x_0 = \varphi'(0)y + O(y^2)$, that is ,

$$(f \circ \varphi)(y) = y^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (\varphi'(0))^n + O(y) \right)$$

and

$$(f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) = y^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (\varphi'(0))^{n+1} + O(y) \right)$$

as $y \rightarrow 0$, since $\varphi'(0) = \left(\frac{m!}{|S^{(m)}(a)|} \right)^{1/m} \neq 0$ if $x_0 = a$ and $\varphi'(0) = \left(\frac{(2m)!}{|S^{(2m)}(x_0)|} \right)^{1/2m} \neq 0$ if $a < x_0 < b$.

It now remains only to substitute these expressions into the integrals (19.20) and (19.21) respectively and use formula (19.13) from Watson's lemma.

Remark 2. We again get formula (19.2') from formula (19.18) when $n = 0$ and $m = 1$.

Similarly, when $n = 0$ and $m = 1$ formula (19.19) yields (19.3') again.

Finally, Eq. (19.4') comes from Eq. (19.18) with $n = 0$ and $m = 2$.

All of this, of course, assumes the hypotheses of Theorem 2.

Remark 3. Theorem 2 applies to the case where the function $S(x)$ has a unique maximum on the interval $I = [a, b]$. If there are several such points $x_1, \dots, x_n$, the integral (19.1) is partitioned into a sum of such integrals, each of whose asymptotics is described by Theorem 2. That is, in this case the asymptotic behavior is obtained as the sum $\sum_{j=1}^n F(\lambda, x_j)$ of the contributions of these maximum points.

It is easy to see that when this happens, some or even all of the terms may cancel one another.

Example

11. If $S \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and $S(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow \infty$, then

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S'(x) e^{\lambda S(x)} dx \equiv 0 \text{ for } \lambda > 0$$

Hence, in this case such an interference of the contributions must necessarily occur. From the formal point of view this example may seem unconvincing, since previously we had been considering the case of a finite interval of integration. However, those doubts are removed by the following important remark.

Remark 4. To simplify what were already very cumbersome statements in Theorems 1 and 2 we assumed that the interval of integration I was finite and that the integral (19.1) was a proper integral. In fact, however, if the inequality $\sup S(x) < S(x_0)$ holds outside an interval $U(x_0)$ of the maxi

$I \setminus U(x_0)$ of the maximum point $x_0 \in I$, then Lemma 1 enables us to conclude that the integrals over intervals strictly outside of $U(x_0)$ are exponentially small in comparison with $e^{\lambda S(x_0)}$ as $\lambda \rightarrow +\infty$ (naturally, under the assumption that the integral (19.1) converges absolutely for at least one value $\lambda = \lambda_0$).

Thus both Theorem 1 and Theorem 2 are also applicable to improper integrals if the conditions just mentioned are met.

Remark 5. Due to their cumbersome nature, the formulas for the coefficients obtained in Theorem 2 can normally be used only for obtaining the first few terms of the asymptotics

needed in specific computations. It is extremely rare that one can obtain the general form of the asymptotic expansion of even a simpler function than appears in Theorem 2 from these formulas for the coefficients a_k and c_k . Nevertheless, such situations do arise. To clarify the formulas themselves, let us consider the following examples.

Example

12. The asymptotic behavior of the function

$$\text{Erf}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du$$

as $x \rightarrow +\infty$ is easy to obtain through integration by parts:

$$\text{Erf}(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} u^{-2} e^{-u^2} du = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{3e^{-x^2}}{2^2 x^3} + \int_x^{+\infty} u^{-4} e^{-u^2} du = \dots,$$

from which, after obvious estimates, it follows that

$$\text{Erf}(x) \simeq \frac{e^{-x^2}}{2x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k} x^{-2k} \text{ as } x \rightarrow +\infty. \quad (19.22)$$

Let us now obtain this expansion from Theorem 2.

By the change of variable $u = xt$ we arrive at the representation

$$\text{Erf}(x) = x \int_1^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt$$

Setting $\lambda = x^2$ here and denoting the variable of integration, as in Theorem 2, by x , we reduce the problem to finding the asymptotic behavior of the integral

$$F(\lambda) = \int_1^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx \quad (19.23)$$

since $\text{Erf}(x) = xF(x^2)$.

When Remark 4 is taken into account, the integral (19.23) satisfies the hypotheses of Theorem 2: $S(x) = -x^2$, $S'(x) = -2x < 0$ for $1 \leq x < +\infty$, $S'(1) = -2$, $S(1) = -1$.

Thus, $x_0 = a = 1$, $m = 1$, $f(x) \equiv 1$, $h(x, a) = \frac{1}{-2x}$, $h(x, a) \frac{d}{dx} = \frac{1}{-2x} \frac{d}{dx}$.

Hence,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{-2x} \frac{d}{dx} \right)^0 \left(-\frac{1}{2x} \right) &= -\frac{1}{2x} = \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-1} \\ \left(\frac{1}{-2x} \frac{d}{dx} \right)^1 \left(-\frac{1}{2x} \right) &= -\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2x} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 (-1) x^{-3} \\ \left(\frac{1}{-2x} \frac{d}{dx} \right)^2 \left(-\frac{1}{2x} \right) &= \left(-\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \right)^1 \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^2 (-1) x^{-3} \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2} \right)^3 (-1)(-3) x^{-5} \\ \left(\frac{1}{-2x} \frac{d}{dx} \right)^k \left(-\frac{1}{2x} \right) &= -\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} x^{-(2k+1)}. \end{aligned}$$

Setting $x = 1$, we find that

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \Gamma(k+1) \left(-\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \right) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}.$$

Now writing out the asymptotic expansion (19.16) for the integral (19.23) taking account of the relations $\operatorname{Erf}(x) = xF(x^2)$, we obtain the expansion (19.22) for the function $\operatorname{Erf}(x)$ as $x \rightarrow +\infty$.

Example

13. In Example 7, starting from the representation

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x - \ln x)} dx \quad (19.24)$$

we obtained the principal term of the asymptotics of the function $\Gamma(\lambda + 1)$ as $\lambda \rightarrow +\infty$. Let us now sharpen the formula obtained earlier, using Theorem 2b).

To simplify the notation a bit, let us replace x by $x + 1$ in the integral (19.24). We then find that

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^{+\infty} e^{\lambda(\ln(1+x) - x)} dx$$

and the question reduces to studying the asymptotics of the integral

$$F(\lambda) = \int_{-1}^{+\infty} e^{\lambda(\ln(1+x) - x)} dx \quad (19.25)$$

as $\lambda \rightarrow +\infty$. Here $S(x) = \ln(1+x) - x$, $S'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$, $S'(0) = 0$, that is, $x_0 = 0$, $S''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $S''(0) = -1 \neq 0$. That is, taking account of Remark 4, we see that the hypotheses b) of Theorem 2 are satisfied, where we must also set $f(x) \equiv 1$ and $m = 1$, since $S''(0) \neq 0$.

In this case the function $h(x, x_0) = h(x)$ has the following form:

$$h(x) = -\frac{1+x}{x} (x - \ln(1+x))^{1/2}.$$

If we wish to find the first two terms of the asymptotics, we need to compute the following at $x = 0$:

$$\begin{aligned} \left(h(x) \frac{d}{dx}\right)^0 (h(x)) &= h(x) \\ \left(h(x) \frac{d}{dx}\right)^1 (h(x)) &= h(x) \frac{dh}{dx}(x) \\ \left(h(x) \frac{d}{dx}\right)^2 (h(x)) &= \left(h(x) \frac{d}{dx}\right) \left(h(x) \frac{dh}{dx}(x)\right) = \\ &= h(x) \left[\left(\frac{dh}{dx}\right)^2(x) + h(x) \frac{d^2h}{dx^2}(x) \right] \end{aligned}$$

This computation, as one can see, is easily done if we find the values $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$, which in turn can be obtained from the Taylor expansion of $h(x)$, $x \geq 0$ in a neighborhood of 0:

$$\begin{aligned}
h(x) &= -\frac{1+x}{x} \left[x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5) \right) \right]^{1/2} = \\
&= -\frac{1+x}{x} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + O(x^5) \right]^{1/2} = \\
&= -\frac{1+x}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{4}x^2 + O(x^3) \right]^{1/2} = \\
&= -\frac{1+x}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + O(x^3) \right) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{5}{36\sqrt{2}}x^2 + O(x^3).
\end{aligned}$$

Thus, $h(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $h'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $h''(0) = \frac{5}{18\sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned}
\left(h(x) \frac{d}{dx} \right)^0 (h(x)) \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\left(h(x) \frac{d}{dx} \right)^1 (h(x)) \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{3}, \\
\left(h(x) \frac{d}{dx} \right)^2 (h(x)) \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{12\sqrt{2}}, \\
c_0 &= -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2\pi}, \\
c_1 &= -2\frac{2^2}{2!}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{12\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{12}.
\end{aligned}$$

Hence, as $\lambda \rightarrow \infty$,

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi}\lambda^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{12}\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \right)$$

that is, as $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e} \right)^\lambda \left(1 + \frac{1}{12}\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \right). \quad (19.26)$$

It is useful to keep in mind that the asymptotic expansions (19.16) and (19.17) can also be found by following the proof of Theorem 2 without invoking the expressions for the coefficients shown in the statement of Theorem 2.

As an example, we once again obtain the asymptotics of the integral (19.25), but in a slightly different way.

Using the localization principle and making a change of variable $x = \varphi(y)$ in a neighborhood of zero such that $0 = \varphi(0)$, $S(\varphi(y)) = \ln(1 + \varphi(y)) - \varphi(y) = -y^2$, we reduce the problem to studying the asymptotics of the integral

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi'(y) e^{-\lambda y^2} dy = \int_0^{\varepsilon} \psi(y) e^{-\lambda y^2} dy$$

where $\psi(y) = \varphi'(y) + \varphi'(-y)$. The asymptotic expansion of this last integral can be obtained from Watson's lemma

$$\int_0^\varepsilon \psi(y) e^{-\lambda y^2} dy \simeq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \lambda^{-(k+1)/2} \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty$$

which by the relations $\psi^{(2k+1)}(0) = 0$, $\psi^{(2k)}(0) = 2\varphi^{(2k+1)}(0)$ yields the asymptotic series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k!)} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda^{-(k+1/2)} = \lambda^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{k! 2^{2k}} \lambda^{-k}.$$

Thus for the integral (19.25) we obtain the following asymptotic expansion

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-1/2} \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{k! 2^{2k}} \lambda^{-k}, \quad (19.27)$$

where $x = \varphi(y)$ is a smooth function such that $x - \ln(1+x) = y^2$ in a neighborhood of zero (for both x and y).

If we wish to know the first two terms of the asymptotics, we must put the specific values $\varphi'(0)$ and $\varphi^{(3)}(0)$ into formula (19.27).

It may be of some use to illustrate the following device for computing these values, which can be used generally to obtain the Taylor expansion of an inverse function from the expansion of the direct function.

Assuming $x > 0$ and $y > 0$, from the relation

$$x - \ln(1+x) = y^2$$

we obtain successively

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right) &= y^2, \\ x &= \sqrt{2}y \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right)^{-1/2} = \\ &= \sqrt{2}y \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}x^2 + O(x^3)\right) = \\ &= \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{3}yx - \frac{\sqrt{2}}{12}yx^2 + O(yx^3). \end{aligned}$$

But $x \sim \sqrt{2}y$ as $y \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), and therefore, using the representation of x already found, one can continue this computation and find that as $y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{3}y \left(\sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{3}yx + O(y^3)\right) - \frac{\sqrt{2}}{12}y(\sqrt{2}y)^2 + O(y^4) = \\ &= \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{2}{9}y^2x - \frac{\sqrt{2}}{6}y^3 + O(y^4) = \\ &= \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{2}{9}y^2(\sqrt{2}y) - \frac{\sqrt{2}}{6}y^3 + O(y^4) = \\ &= \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{18}y^3 + O(y^4) \end{aligned}$$

Thus for the quantities $\varphi'(0)$ and $\varphi^{(3)}(0)$ of interest to us we find the following values: $\varphi'(0) = \sqrt{2}$, $\varphi^{(3)}(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Substituting them into formula (19.27), we find that

$$F(\lambda) = \lambda^{-1/2} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12} \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2}) \right) \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty$$

from which we again obtain formula (19.26).

In conclusion we shall make two more remarks on the problems discussed in this section.

Remark 6. (Laplace's method in the multidimensional case). We note that Laplace's method can also be successfully applied in studying the asymptotics of multiple Laplace integrals

$$F(\lambda) = \int_X f(x) e^{\lambda S(x)} dx$$

in which $x \in \mathbb{R}^n$, X is a domain in $\mathbb{R}^n$, and f and S are real-valued functions in X .

Lemma 1 on the exponential estimate holds for such integrals, and by this lemma the study of the asymptotics of such an integral reduces to studying the asymptotics of a part of it

$$\int_{U(x_0)} f(x) e^{\lambda S(x)} dx$$

taken over a neighborhood of a maximum point x_0 of the function $S(x)$.

If this is a nondegenerate maximum, that is, $S''(x_0) \neq 0$, then by Morse's lemma (see Sect. 8.6 of Part 1) there exists a change of variable $x = \varphi(y)$ such that $S(x_0) - S(\varphi(y)) = |y|^2$, where $|y|^2 = (y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2$. Thus the question reduces to the canonical integral

$$\int_I (f \circ \varphi)(y) \det \varphi'(y) e^{-\lambda |y|^2} dy$$

which in the case of smooth functions f and S can be studied by applying Fubini's theorem and using Watson's lemma proved above (see Problems 8-11 in this connection).

Remark 7. (The stationary phase method). In a wider interpretation, Laplace's method, as we have already noted, consists of the following:

- 1⁰ a certain localization principle (Lemma 1 on the exponential estimate),
- 2⁰ a method of locally reducing an integral to canonical form (Morse's lemma), and
- 3⁰ a description of the asymptotics of canonical integrals (Watson's lemma).

We have met the idea of localization previously in our study of approximate identities, and also in studying Fourier series and the Fourier transform (the Riemann-Lebesgue lemma, smoothness of a function and the rate at which its Fourier transform decreases, convergence of Fourier series and integrals).

Integrals of the form

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_X f(x) e^{i\lambda S(x)} dx$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, called Fourier integrals, occupy an important place in mathematics and its applications. A Fourier integral differs from a Laplace integral only in the modest factor i in the exponent. This leads, however, to the relation $|e^{i\lambda S(x)}| = 1$ when λ and $S(x)$ are real, and hence the idea of a dominant maximum is not applicable to the study of the asymptotics of a Fourier integral.

Let $X = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$, $f \in C_0^{(\infty)}([a, b], \mathbb{R})$, (that is, f is of compact support on $[a, b]$), $S \in C^{(\infty)}([a, b], \mathbb{R})$ and $S'(x) \neq 0$ on $[a, b]$.

Integrating by parts and using the Riemann-Lebesgue lemma (see Problem 12), we find that

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx &= \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{f(x)}{S'(x)} d e^{i\lambda S(x)} = \\
&= -\frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{S'} \right) (x) e^{i\lambda S(x)} dx = \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_a^b f_1(x) e^{i\lambda S(x)} dx = \cdots = \frac{1}{\lambda^n} \int_a^b f_n(x) e^{i\lambda S(x)} dx = \\
&= o(\lambda^{-n}) \text{ as } \lambda \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Thus if $S'(0) \neq 0$ on the closed interval $[a, b]$, then because of the constantly increasing frequencies of oscillation of the function $e^{i\lambda S(x)}$ as $\lambda \rightarrow \infty$, the Fourier integral over the closed interval $[a, b]$ turns out to be a quantity of type $O(\lambda^{-\infty})$.

The function $S(x)$ in the Fourier integral is called the phase function. Thus the Fourier integral has its own localization principle called the stationary phase principle. According to this principle, the asymptotic behavior of the Fourier integral as $\lambda \rightarrow \infty$ (when $f \in C_0^{(\infty)}$) is the same as the asymptotics of the Fourier integral taken over a neighborhood $U(x_0)$ of a stationary point x_0 of the phase function (that is, a point x_0 at which $S'(x_0) = 0$) up to a quantity $O(\lambda^{-\infty})$.

After this, by a change of variable the question reduces to the canonical integral

$$E(\lambda) = \int_0^\varepsilon f(x) e^{i\lambda x^\alpha} dx$$

whose asymptotic behavior is described by a special lemma of Erdlyi, which plays the same role for the Fourier integral that Watson's lemma plays for the Laplace integral.

This scheme for investigating the asymptotics of a Fourier integral is called the stationary phase method.

The nature of the localization principle in the stationary phase method is completely different from its nature in the case of the Laplace integral, but the general scheme of Laplace's method, as one can see, remains applicable even here.

Certain details relating to the stationary phase method will be found in Problems 12-17.

9.7.6 19.2.6 Problems and Exercises

Laplace's method in the one-dimensional case.

3.y.1

a) For $\alpha > 0$ the function $h(x) = e^{-\lambda x^\alpha}$ attains its maximum when $x = 0$. Here $h(x)$ is a quantity of order 1 in a δ -neighborhood of $x = 0$ of size $\delta = O(\lambda^{-1/\alpha})$.

Using Lemma 1, show that if $0 < \delta < 1$, then the integral

$$W(\lambda) = \int_{c(\lambda, \delta)}^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx$$

where $c(\lambda, \delta) = \lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}}$ has order $O(e^{-A\lambda^\delta})$ as $\lambda \rightarrow +\infty$, A being a positive constant.

b) Prove that if the function f is continuous at $x = 0$, then

$$W(\lambda) = \alpha^{-1} \Gamma(\beta/\alpha) [f(0) + o(1)] \lambda^{-\beta/\alpha} \text{ as } \lambda \rightarrow +\infty$$

c) In Theorem 1 a), the hypothesis $f(x) = f(x_0) + O(x - x_0)$ can be weakened and replaced by the condition that f be continuous at x_0 . Show that when this is done the same

principal term of the asymptotics is obtained, but in general not Eq. (19.2') itself, in which $O(x - x_0)$ is now replaced by $o(1)$.

3.y.2

a) The Bernoulli numbers B_{2k} are defined by the relations

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, \quad |t| < 2\pi$$

It is known that

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) = \ln x + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}}\right) e^{-tx} dt$$

Show that

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) \simeq \ln x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k} x^{-2k} \text{ as } x \rightarrow +\infty$$

Part VI

Series and Sequences

Обсудим все про ряды и последовательности.

10 Fundamentals of Series

Обсудим подробно числовые ряды.

10.1 General Analysis of Series

(тут итак понятная или просто базовая теория, которую вообще мало смысла смотреть. нужно будет - доразбираю.)

10.1.1 Concept of a Numerical Series (??)

(по идее тут все про них будет)

Block-stacking problem

(про эту задачу напишу, типичная, просто не до нее пока.)

10.1.2 Geometric Progression

Теория

Примеры геометрических прогрессий

Самые интересные примеры это:

Overview of applications of geometrical progressions

(examples in applications in life, physics, so on)

10.1.3 Concept of a Functional Series

(тут по идее ничего особенного, про них тут будет теория.)

(???? do we need it at all???)

Определение

Работаем с последовательностью функций $f_n(x)$, определенных на некотором множестве M .

Определение 10.1. Функциональная последовательность сходится в точке $x_0 \in M$, если числовая последовательность $f_n(x_0)$ сходится.

Функциональная последовательность сходится на множестве M - если она сходится в каждой точке множества M .

Если суммировать все функции с ростом $n \rightarrow \infty$, то получаем *функциональный ряд*

Обзор

10.1.4 Summation of Absolutely Convergent Series

(очень мощный раздел!!)

(??? тут и для числовых и для функциональных одновременно???)

Определения

Обсудим понятие суммы бесконечного количества чисел.

Определение частичной суммы

Если дана последовательность (a_n) действительных или комплексных чисел, то суммой ряда называется

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

Выражения под знаком предела называются частичными суммами ряда.

Определение сходящегося ряда

Ряд называется сходящимся, если его сумма конечна.

Линейность и монотонность

Заметим, что для комплексных чисел суммирование ряда по сути сводится к суммированию действительных и мнимых частей по отдельности.

Для такого способа суммирования выполняются линейность

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n) = A \sum_{n=1}^{\infty} a_n + B \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и монотонности

$$a_n \leq b_n (\forall n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Также можно рассматривать суммы, индексы которых начинаются не с единицы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Здесь из сходимости ряда в правой части следует сходимость ряда в левой части и наоборот.

(?? очевидно, что тут доказывать?)

Это стандартное определение приемлемо во многих ситуациях, но у него есть один недостаток: сумма ряда может зависеть от порядка суммирования, то есть не выполняется свойство «от перемены мест слагаемых сумма не меняется».

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (?)

Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

||

Используйте неравенство $1/n \geq \ln(1 + 1/n)$.

||

(!! круто было бы это уметь доказывать, пока хз)

Ряд, сумма которого меняется при изменении порядка суммирования

Приведите пример ряда, у которого сумма (как предел частичных сумм) меняется при изменении порядка суммирования.

||

Важно, чтобы элементы ряда стремились к нулю, сумма положительных членов ряда была $+\infty$, а сумма отрицательных членов была $-\infty$, тогда подходящим образом переставляя члены ряда можно будет сделать сумму любой.

||

Описанная в предыдущей задаче ситуация называется условная сходимость ряда и мы по возможности будем её избегать, хотя в разделах 4.3 и 4.5 мы не будем исключать переставлять слагаемые в суммах и производить другие естественные операции, которые возможны только тогда, когда мы можем по отдельности суммировать положительные и отрицательные слагаемые ряда.

Для этого мы начнём с утверждения про сумму ряда неотрицательных чисел, из которого будет ясна независимость этой суммы от перестановки.

Лемма

6.

Сумма ряда из неотрицательных чисел равна точной верхней грани сумм конечного числа элементов ряда, сумма ряда из неположительных чисел равна точной нижней грани сумм конечного числа элементов ряда.

Доказательство

Без ограничения общности рассмотрим ряд из неотрицательных чисел. Частичные суммы ряда возрастают и предел на самом деле равен точной верхней грани сумм начальных отрезков ряда.

Если мы рассмотрим теперь сумму конечного числа элементов ряда, взятых из ряда в произвольных местах, то пусть максимальный номер элемента в этой сумме равен n , так как все члены ряда неотрицательны.

Следовательно, точная верхняя грань по всевозможным конечным подсуммам ряда не более точной верхней грани по начальным отрезкам ряда.

Обратно неравенство тривиально, так как всякая частичная сумма ряда - это частный случай суммы конечного числа элементов ряда.

В итоге получаем требуемое равенство. перестановки элементов ряда, то мы получаем:

Следствие

Сумма ряда из чисел одного знака не меняется при перестановке её элементов.

Для суммы ряда из неотрицательных элементов возможен случай, когда сумма равна $+\infty$, приведённые выше утверждения работают в этом случае.

Из предыдущих наблюдений догично сделать вывод, что правильный способ суммирования - это рассматривать отдельно сумму положительных и отдельно - сумму отрицательных элементов ряда.

После некоторого размышления, это приводит к следующему определению:

Абсолютно сходящийся ряд

Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если сходится сумма модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Нам надо обосновать это определение, показав, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Ясно, что если сумма модулей ряда комплексных чисел сходится, то сходятся и суммы модулей действительных и мнимых частей элементов ряда.

Перейдя к абсолютному суммированию действительных чисел, мы замечаем, что конечны оказываются по отдельности суммы положительных и суммы отрицательных элементов ряда.

Обратно, если для ряда действительных чисел суммы положительных элементов и суммы отрицательных элементов конечны, то сумма модулей элементов ряда будет просто суммой модулей этих двух сумм.

Более аккуратно, всякую последовательность (a_n) действительных чисел мы можем представить в виде

$$a_n = a_n^+ + a_n^-, \quad a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2},$$

по сути (a_n^+) получается из (a_n) заменой отрицательных чисел на нули, а (a_n^-) - заменой положительных чисел на нули.

Абсолютная сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ означает сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, а линейность суммы ряда показывает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от перестановки слагаемых

Для рядов с действительными элементами (a_n) отдельно сумма положительных (a_n^+) и сумма отрицательных элементов (a_n^-) не зависят от перестановок по следствию 4.17. Для комплексных рядов абсолютно сходятся суммы отдельно действительных и мнимых частей, которые можно переставлять по аоказанному Аая действительных сумм.

Задаиа 4.20. Аокажите, что если ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_n$ сходится условно (то есть сходится, но не абсолютно), то переставляя его слагаемые, можно получить любое число, а также $-\infty$ и $+\infty$ Агя действительного А выпиcывайте чмены ряда так: если частичная сумма меньше А, то добанияяе к ней следующий положительный член, если больше ими ранва А- то добавляйте смедупоший непоможительный чмен. Для $A = \pm\infty$ поправьте эту конструкцию соответственно.]

Мы по возможности будем избегать условной сходимости, хотя в разделах 4.3 и 4.6 мы не будем исключать условную сходимость Аля функциональных рядон.

Аалее мы будем проводить рассуждения аля рядов действительных чисел, имея в виАу, что для рядов комплексных чисел достаточно отдельно рассмотреть действительные и мнимые части. Нам понадобится свойство повторного суммирования. Понятие абсолютного суммирования позволяет говорить о суммах любого счётного набора действительных чисел, не обязательно индексированного натуральными числами, так как порядок элементов в сумме не важен.

Теорема Фубини аля рядов

Пусть сумма $\sum_{m,m=1}^{\infty} a_{mm}$ (индексированная счётным множеством $N \times N$) сходится абсолютно. Тогда

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \right).$$

правая части равны $+\infty$, при этом считаем, что если мы суммируем неотрицательные числа и среди них встретилась $+\infty$, то общая сумма равна $+\infty$.

Доказательство.

Из абсолютной сходимости суммы $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ и рассуждений перед формулировкой теоремы последует, что эту сумму можно разложить в разность двух сходящихся сумм по индексам n и m , каждая из которых состоит из неотрицательных чисел. Поэтому доказательство первого утверждения теоремы сводится к случаю $a_{nm} \geq 0$, что мы и будем предполагать. Тогда мы заодно будем доказывать и второе утверждение теоремы, если опустим предположение о том, что сумма неотрицательных чисел $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ сходится.

Выражение слева является супремумом конечных сумм некоторых чисел из a_{nm} . Но каждая конечная сумма (Амя конечного $X \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

$$\sum_{(n,m) \in X} a_{nm}$$

разбивается на наборы сумм с разными n (в конечном числе), что даёт оценки снизу на внутренние суммы в правой части

$$\forall n \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \geq \sum_{m|(n,m) \in X} a_{nm}.$$

которые в свою очередь суммируются в оценки снизу для полной суммы в правой части

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \right) \geq \sum_{(n,m) \in X} a_{nm}$$

Это доказывает, что правая часть не менее левой. Обратное неравенство докажем от противного: пусть правая часть больше S , а левая меньше S .

Тогда мы найдём N , такое что в правой части можно оставить конечную сумму, так что

$$\sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \right) > S$$

и даже

$$\sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \right) > S + \delta$$

Для некоторого $\delta > 0$.

После этого мы можем найти конечное M , такое что для любого $n \leq N$

$$\sum_{m=1}^M a_{nm} > \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} - \delta/(2N)$$

если сумма справа в этом неравенстве конечна, либо

$$\sum_{m=1}^M a_{nm} > S$$

если правая сумма бесконечна.

Складывая такие неравенства, получим

$$\sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^M a_{nm} \right) = \sum_{n \leq N, m \leq M} a_{n,m} > S.$$

А это означает, что левая часть тоже больше S как супремум всех конечных сумм - противоречие.

Примеры, когда условие теоремы Фубини не выполнено(???)

Теорема о перемножении абсолютно сходящихся рядов

Если суммы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{s=2}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{s-1} a_n b_{s-n} \right).$$

Доказательство

Напишем по определению суммы и пределу произведения:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N |a_n| \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^N |b_m| \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |a_n b_m| = \sum_{n,m=1}^{\infty} |a_n b_m| < +\infty$$

Значит в следующем выражении суммирование будет абсолютным

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^N b_m \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n b_m = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m,$$

а также мы можем суммировать в любом порядке, например сначала выписать члены с $s = n + m = 2$, потом с $s = n + m = 3$ и т.д.

Тогда получается запись

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{s=2}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{s-1} a_n b_{s-n} \right)$$

которую мы потом будем использовать для степенных рядов. В следующих задачах приводятся типичные примеры абсолютно сходящихся рядов.

Теорема о сравнении абсолютно сходящихся рядов

Если $a_n = O(b_n)$ при $n \rightarrow \infty$, то из абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство

Сходимость и абсолютная сходимость ряда не меняется при отбрасывании конечного числа членов в начале ряда (проверьте это по определению).

По определению символа O , после отбрасывания конечного числа слагаемых будет выполняться оценка $|a_n| \leq C |b_n|$ с некоторой константой C .

Следовательно, Для рядов с отброшенными начальными членами в пределе получится

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq C \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |b_n| < +\infty$$

Признак Коши абсолютной сходимости ряда

Если у ряд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in [0, +\infty]$$

где $a_n \geq 0$. Тогда при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а при $q < 1$ - сходится.

Доказательство

||

Заметьте, что по определению верхнего предела для любого $Q < q$ неравенство $\sqrt[n]{a_n} > Q$ выполняется бесконечно много раз, и при любом $Q > q$ неравенство $\sqrt[n]{a_n} < Q$ выполняется для всех достаточно больших n .

||

Если $q > 1$, то по определению верхнего предела неравенство

$$|a_n|^{1/n} > 1 \Leftrightarrow |a_n| > 1$$

выполняется бесконечно много раз. Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости $a_n \rightarrow 0$ и ряд расходится.

Если $q < 1$, то возьмём какое-то $Q \in (q, 1)$. Тогда неравенство $|a_n|^{1/n} < Q$ выполняется для достаточно больших n , иначе можно было бы найти частичный предел, больший q . То есть выполняется неравенство $|a_n| < Q^n$, и наша сумма сходится из сравнения с геометрической прогрессией.

О применениях (??)**Признак Даламбера абсолютной сходимости ряда**

Пусть для последовательности положительных чисел (a_n) существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in [0, +\infty].$$

Тогда при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а при $q < 1$ - сходится.

(?? почему формула радиуса сходимости в разделе про степенные ряды???? чего бы тут её не написать??)

Доказательство (??)

[[Аналогично признаку Коши, сравните с геометрической прогрессией.]]

О применениях (??)

Сумма геометрической прогрессии (??)

(пока не умею доказывать, нужно потренироваться!)

Докажите, что для $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

[[

Запишите частичную сумму в явном виде.

]]

Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$

докажите, что для $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

[[

Можно написать $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^n$ и просуммировать повторно.

]]

О ряде $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ (???)

Пусть последовательность положительных чисел (a_n) убывает.

Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty$$

[[

Оцените одно через другое и наоборот, используя очевидное неравенство $a_{2^{k-1}} \geq a_n \geq a_{2^k}$ при условии $2^{k-1} \leq n \leq 2^k$

]]

(это могла бы быть легкая разминка, но пока я хз, как решать это)

О ряде дзета-функции $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < +\infty \leftrightarrow s > 1$ (??!!!)

О сходимости

Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < +\infty \leftrightarrow s > 1$$

||

Используйте две предыдущие задачи.

||

(??? должен такое доказывать!!!)

О свойстве дзета-функции (?)

Докажите, что при $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

где произведение берётся по простым числам и бесконечное произведение понимается как предел частичных произведений.

||

В конечном произведении раскройте скобки и перейдите к пределу по количеству скобок.

||

Сумма обратных простых чисел (???)

Сумма

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

расходится.

||

Возьмите логарифм в формуле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

(?????)

||

О приложениях абсолютно сходящихся рядов (??)

10.1.5 Analysis of Divergent Series (???)

(пока хз, что сказать)

О применении расходящихся рядов

О применении в КТП (???)

10.1.6 Uniform Convergence

Обсудим равномерную сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Изучим последовательности и ряды, состоящие из функций, определённых на одном и том же множестве. Фиксируя элемент этого множества, мы получаем последовательность или ряд, состоящий уже не из функций, а из чисел.

Определения

Определение поточечной сходимости

Если при каждом фиксированном аргументе последовательность значений сходится к некоторому числу (зависящему от аргумента функции),

$$f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

то мы будем говорить, что имеет место поточечная сходимость.

Определение равномерной сходимости последовательности из функций

Последовательность функций $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно на множестве X к функции f_0 , если

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f_0(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

В этом определении множество X может быть произвольной природы.

Это более сильное условие, чем поточечная.

В случае, когда мы захотим говорить о непрерывности функций, мы будем считать X для определённости метрическим пространством.

Определение равномерной сходимости ряда из функций

Ряд из функций $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

сходится равномерно на множестве X , если последовательность его частичных сумм

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

сходится равномерно на X к некоторой функции $S : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Мы конечно будем стараться работать с абсолютно сходящимися рядами, но не исключаем в дальнейшем и условной сходимости, как следует из определения.

О применениях равномерной сходимости (?!?!?!?)

(пока не так знаю.)

Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций (!!!!!)

Для последовательности функций $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N(\varepsilon), \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

тогда и только тогда, когда последовательность равномерно на X сходится к некоторой функции.

Это критерий равномерной сходимости, не включающий в себя предельную функцию.

Доказательство (!!!!!)

(!! разберу его потом)

В одну сторону доказательство очевидно следует из неравенства

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_0(x)| + |f_m(x) - f_0(x)|,$$

у которого супремум правой части по x стремится к нулю при $n, m \rightarrow \infty$.

В обратную сторону, при каждом фиксированном $x \in X$ мы имеем фундаментальную последовательность $(f_n(x))$ и у неё есть предел $f_0(x)$.

Теперь в формулировке критерия Коши мы можем фиксировать n и устремить $m \rightarrow \infty$, получая таким образом:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon$$

что фактически означает требуемое.

Для рядов

Для рядов можно переформулировать критерий Коши в виде:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N(\varepsilon), \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Для рядов критерий Коши намного более актуален, так как сумму ряда обычно в явном виде найти сложно или вообще невозможно.

Необходимое условие сходимости функционального ряда

Для равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X необходимо, чтобы последовательность функций (u_n) стремилась к нулю равномерно на X .

Доказательство

Поставим в критерий Коши $n + 1 = m$ и получим

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall m > N(\varepsilon), \sup_{x \in X} |u_m(x)| < \varepsilon$$

что означает равномерную сходимость u_n к нулю.

О применениях (?)

Признак Вейерштрасса сходимости рядов

Если ряд из функций $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, мажорируется на множестве X сходящимся рядом из неотрицательных чисел, то есть

$$\forall x \in X, \forall n, |u_n(x)| \leq a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

то ряд из функций сходится равномерно и абсолютно на X .

Доказательство

Воспользуемся критерием Коши и заметим, что всегда выполняется

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \right| \leq \sum_{k=n+1}^m a_k,$$

а для ряда из чисел a_n выполняется критерий Коши сходимости ряда с некоторой $N(\varepsilon)$, в котором мы просто можем заменить a_n на $|u_n(x)|$ и получить верное утверждение.

О применениях (?)

Теорема о непрерывности предела непрерывных функций

Пусть последовательность $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно на X к функции f_0 и все функции f_n непрерывны, тогда f_0 тоже непрерывна.

Доказательство

Возьмём точку $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$.

Для любого положительного ε мы можем найти f_n , которая отклоняется от f_0 не более чем на ε на всём X .

В некоторой окрестности $U(x_0) \ni x_0$ выполняется

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon,$$

а значит в той же окрестности выполняется

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

что и означает непрерывность по определению.

О случаях применения

Эта теорема крайне полезна для анализа непрерывности функций, заданных в виде равномерного предела последовательности или в виде суммы равномерно сходящегося ряда.

О контрпримерах, когда условие невыполнено (!?!?!)

(тут найдется контрпример!!!)

Теорема о связи равномерной сходимости последовательности и её производных

Пусти последовательность дифференцируемых функций $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ сходится в точке x_0 , а последовательность производных f'_n сходится равномерно на $[a, b]$ к функции g . Тогда (f_n) равномерно сходится к некоторой f и $f' = g$ на всём отрезке $[a, b]$.

О применениях (!!!?)

Также полезно иметь возможность переставлять местами операцию взятия первообразной и бесконечного суммирования.

Доказательство

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ f'_n(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

Все эти функции непрерывны, и в точке x_0 мы имеем $\varphi_n(x) \rightarrow g(x_0)$.

Посмотрим на критерий Коши в других точках:

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| &= \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \right| = \\ &= \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0} \right| = |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \end{aligned}$$

для некоторого ξ между x_0 и x по теореме о среднем Лагранжа для функции $f_n(x) - f_m(x)$.

Следовательно, из выполнения критерия Коши для равномерной сходимости f'_n на всём отрезке следует выполнение критерия Коши Для φ_n на всём отрезке с той же $N(\varepsilon)$ Тогда мы знаем, что $\varphi_n(x) \rightarrow \psi(x)$ равномерно на отрезке и ψ непрерывна.

Но тогда из ограниченности $|x - x_0|$ последовательность (f_n) будет равномерно на отрезке стремиться к

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \psi(x),$$

откуда также следует тот факт, что $f'(x_0) = \psi(x_0) = g(x_0)$.

Переносим точку x_0 в другую точку отрезка и повторяя рассуждения, получаем равенство $f' = g$ в любой точке отрезка.

Задача

36.

Проверьте, что если в теореме о дифференцировании последовательности функций отрезок $[a, b]$ заменить на неограниченный промежуток, то сходимость $(f_n(x))$ может и не быть равномерной.

||

Достаточно рассмотреть случай, когда f'_n являются константами.

||

Теорема о дифференцировании функциональных последовательностей

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на отрезке, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке отрезка, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке и выполняется

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

(?? как доказать???)

(?? пример и контрпример???)

Пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции (??)

(??? что он в этом разделе делает??? в 0ю часть добавлю тоже!!!)

Пусть функция $\varphi(x)$ равна 0 в чётных целых числах, 1 в нечётных целых числах, непрерывна и линейна между целыми числами (её график выглядит как пила). Сумма ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} \varphi(4^n x)$$

непрерывна, но нигде не дифференцируема.

||

Непрерывность следует из признака Вейерштрасса и непрерывности равномерного предела.

Для анализа дифференцируемости в точке x_0 , для $n \in \mathbb{Z}^+$ рассмотрим приближения

$$a_n = m4^{-n} \leq x_0 \leq (m+1)4^{-n} = b_n$$

и изучите приращение $f(b_n) - f(a_n)$

||

10.1.7 Overview of Types of Series

(complex ones, there are a lot of their types. An overview of it is useful! There are really a lot of them!)

10.1.8 Power Series

Определения

Определение степенного ряда

Ряд из функций $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ называется степенным рядом.

Степенные ряды можно рассматривать с комплексными коэффициентами и подставлять в них комплексные значения z . Поэтому в утверждениях о степенных рядах числа считаем комплексными, если не указано обратное.

Это усиление ряда Тейлора (???)

Теорема о существовании радиуса сходимости

Для всякого степенного ряда существует радиус сходимости $R \in [0, +\infty]$, такой что ряд расходится при $|z - z_0| > R$ и равномерно и абсолютно сходится при $|z - z_0| \leq r$ при всяком фиксированном $0 < r < R$.

Доказательство

Положим $z_0 = 0$, это не уменьшает общности.

Если имеется сходимость ряда в точке z , то $a_n z^n \rightarrow 0$ по необходимому условию сходимости ряда, а значит последовательность $a_n z^n$ ограничена некоторым числом M .

Тогда взяв число $r < |z|$, для любого $|x| \leq r$ мы получим оценку

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n \leq \frac{r^n}{|z|^n} M$$

При этом по формуле суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{|z|^n} M = M \frac{1}{1 - \frac{r}{|z|}} < +\infty$$

Следовательно, имеется равномерная сходимость при $|x| \leq r$ по признаку Вейерштрасса.

Теперь понятно, что $\triangle \wedge$ я

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ сходится} \right\}$$

утверждение теоремы о расходимости выполняется по выбору R , а утверждение о сходимости доказано выше.

Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости

Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ радиус сходимости можно найти как

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n},$$

считая $\frac{1}{0} = +\infty$ и $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Доказательство

доказательство является некоторой модификацией решения задачи 4.24.

Если найденное по формуле R конечно и положительно, то при $|z - z_0| > R$ по определению верхнего предела бесконечно много раз будет выполняться

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|z - z_0|} \rightarrow |a_n|^{1/n} |z - z_0| > 1 \rightarrow |a_n (z - z_0)^n| > 1$$

что противоречит необходимому условию сходимости ряда.

То же самое будет выполняться для любого z при $R = 0$.

Если же $|z - z_0| < R$, то найдём r , такое что $|z - z_0| < r < R$.

Тогда при достаточно больших n по определению верхнего предела будет выполняться

$$|a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{r} \rightarrow |a_n|^{1/n} |z - z_0| \leq \frac{|z - z_0|}{r} \rightarrow |a_n (z - z_0)^n| \leq \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n$$

то есть ряд оценивается сходящейся геометрической прогрессией и сходится.

Формула Даламбера для радиуса сходимости

докажите, что для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ радиус сходимости можно найти как

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

если предел существует.

||

Сравните сумму ряда из модулей с геометрической прогрессией.

||

Задача

43.

Приведите пример степенного ряда, который расходится во всякой граничной точке круга сходимости и пример степенного ряда, который сходится равномерно на замыкании круга сходимости.

||

Используйте формулу Коши-Адамара и наблюдение, что $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

||

Теорема о радиусе сходимости продифференцированного ряда и возможности переставлять суммирование (?)

Радиус сходимости не меняется при взятии поэлементной производной и в степенных рядах можно переставлять суммирование и дифференцирование в пределах области

$$|z - z_0| < R$$

Доказательство

Утверждение для действительных рядов следует из общих сведений о мов мы можем заметить, что ряды состоят из многочленов, которые имеют производную в комплексном смысле.

Теорема 4.35 верна в этом случае, так как в её доказательстве теорема о среднем Лагранжа (равенство) может быть заменена на теорему о среднем для кривых с неравенством $\leq |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|$ Для некоторого ξ на отрезке между z_0 и z .

мости исходного ряда не менее, чем продифференцированного.

На самом деле он и не более, так как из сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ следует сХодИмость $\sum_{n=0}^{\infty} |n a_n x^{n-1}|$ при $|x| < |z|$ по признаку Вейерштрасса аналогично доказательству равномерной сходимости степенного ряда.

Также равенство радиусов сходимости исходного и продифференцированного рядов можно установить по формуле Коши-Адамара с учётом $n^{1/n} \rightarrow 1$ и с учётом того, что по определению радиуса сходимости умножение и деление всего ряда на $z - z_0$ радиус сходимости не меняет.

Теорема о ряде Тейлора

Если $f(z)$ представлена в окрестности z_0 степенным рядом с положительным радиусом сходимости, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

это называется ряд Тейлора.

То есть ряд Тейлора есть частный случай степенного ряда.

Доказательство

Если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

то очевидно $f(z_0) = a_0$.

Равенства $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ получаются почленным дифференцированием ряда и подстановкой $z = z_0$ после дифференцирования.

(!?!?!?!? проделаю это!!!)

10.1.9 Conditional Convergence of Series

(в 1 часть обзор пропишу их!!!)

Теорема о непрерывности степенной функции на отрезке до точки, в которой она сходится

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится (не обязательно абсолютно), то функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

непрерывна на $[0, 1]$.

Доказательство (?? через преобразование Абеля??)

Положим $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, тогда $R_n \rightarrow 0$ и $a_n = R_n - R_{n+1}$.

Тогда посмотрим на отрезок ряда для f и сделаем преобразование Абеля

$$\sum_{k=n}^m (R_k - R_{k+1}) x^k = R_n x^n - R_{m+1} x^m + \sum_{k=n+1}^m R_k (x^k - x^{k-1})$$

Мы можем выбрать такое N , что при $k \geq N$ будет $|R_k| < \varepsilon$; взяв также $m \geq n \geq N$, мы получим

$$\begin{aligned} \left| R_n x^n - R_{m+1} x^m + \sum_{k=n+1}^m R_k (x^k - x^{k-1}) \right| &\leq \varepsilon x^n + \varepsilon x^m + \varepsilon \sum_{k=n+1}^m |x^k - x^{k-1}| = \\ &= \varepsilon (x^n + x^m + x^n - x^m) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Значит по критерию Коши равномерной сходимости ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[0, 1]$ и его предельная функция непрерывна.

О применениях (!?!??)

Если мы хотим установить формулы с условной сходимостью

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

то нам нужно знать о применимости ряда Тейлора на конце интервала сходимости.

В духе предыдущей теоремы можно изучать и не обязательно абсолютную сходимость более общих функциональных и числовых последовательностей и рядов.

(???)

Понятие равномерной ограниченности

Определение

Здесь равномерная ограниченность последовательности функций (f_n) на множестве X - это существование такого числа M , что для любых $x \in X$ и $n \in N$ выполняется $|f_n(x)| \leq M$.

О случае применений

В признаке Дирихле и Абеля используется.

Признак Абеля равномерной сходимости ряда

Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно по $x \in X$ сходится, а последовательность $(g_n(x))$ монотонна по n и равномерно ограничена, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$$

тоже равномерно сходится. (Здесь равномерная ограниченность последовательности функций (f_n) на множестве X - это существование такого числа M , что для любых $x \in X$ и $n \in N$ выполняется $|f_n(x)| \leq M$.) Все функции считаем определёнными на некотором множестве X .

Доказательство

||

Доказательство предыдущей теоремы работает после замены a_n на $f_n(x)$ и x^n на $g_n(x)$.

Заметьте, что $\sum_{n=N}^{\infty} |g_n(x) - g_{n+1}(x)| \leq 2M$ при условии, что $|g_n(x)| \leq M$ и выражение $g_n(x)$ монотонно по n .

О случаях применения (!!?)

Признак Дирихле равномерной сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ имеет равномерно ограниченные частичные суммы, а последовательность $(g_n(x))$ монотонна по n и равномерно по $x \in X$ стремится к нулю

при $n \rightarrow \infty$, тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$$

тоже равномерно сходится.

Все функции считаем определёнными на X .

Доказательство

Обозначим $F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, тогда $f_n(x) = F_n(x) - F_{n-1}(x)$.

Равномерная ограниченность означает оценку $|F_n(x)| \leq M$, не зависящую от n и x . Посмотрим на отрезок суммы ряда и сделаем преобразование Абеля

$$\sum_{k=n}^m (F_k(x) - F_{k-1}(x)) g_k(x) = F_m(x)g_m(x) - F_{n-1}(x)g_n(x) + \sum_{k=n}^{m-1} F_k(x) (g_k(x) - g_{k+1}(x))$$

С учётом постоянства знака разностей $(g_k(x) - g_{k+1}(x))$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n}^{m-1} |g_k(x) - g_{k+1}(x)| = |g_m(x) - g_n(x)|.$$

и можно оценить модуль интересующего нас выражения как

$$\left| \sum_{k=n}^m (F_k(x) - F_{k-1}(x)) g_k(x) \right| \leq M |g_m(x)| + M |g_n(x)| + M |g_m(x) - g_n(x)|.$$

Из равномерной сходимости $g \rightarrow 0$ следует, что при достаточно больших n будет выполняться $|g_n(x)| < \varepsilon$ независимо от $x \in X$, а значит

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x)g_k(x) \right| < 2M\varepsilon$$

что доказывает равномерную сходимость ряда из сумм по критерию Коши.

О случаях применения (!!!)

Признак Лейбница равномерной сходимости ряда

Если $a_n(x) \rightarrow 0$ равномерно на X и монотонно по n , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n(x)$ сходится равномерно. Обратите внимание, что это следствие устанавливает сходимость сумм

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \arctg 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

которую требуется обосновать перед применением теоремы 4.53 для вычисления значений этих сумм.

Доказательство (??)

(Карасев вообще опустил, потому что думает, что просто, я все еще же не освоил)

О случаях применения (!!?)

О рядах типа $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$

Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$$

сходятся при $\alpha > 0$ равномерно на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, но при $\alpha \in (0, 1]$ сходимость будет условной и не равномерной на $(0, 2\pi)$.

||
(док-во?????)

Примените признак Дирихле, посчитав суммы $\sum_{k=1}^n \sin kx$ и $\sum_{k=1}^n \cos kx$, которые являются мнимой и действительной частью геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^n e^{ikx}$.

Для доказательства отсутствия абсолютной сходимости оцените $|\sin x| \geq \sin^2 x$ и $|\cos x| = \cos^2 x$.

Для доказательства отсутствия равномерной сходимости в окрестности нуля примените критерий Коши равномерной сходимости.

||

Как мы уже обратили внимание, суммирование условно сходящихся рядов ведёт себя менее предсказуемо по сравнению с суммированием абсолютно сходящихся рядов.

Более того, суммирование условно сходящихся рядов может быть определено разными способами.

Например, пытаясь просуммировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мы могли бы рассмотреть функциональный ряд

$$S(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

Для $q \in (0, 1)$, который имеет больше шансов сойтись абсолютно, а потом перейти к пределу $q \rightarrow 1 - 0$.

Теорема о непрерывности степенной функции на отрезке до точки, в которой она сходится, показывает, что для сходящегося в обычном смысле ряда мы получим тот же результат.

Рассмотрим в задачах еще один вариант, который потом будет применяться в суммировании тригонометрических рядов по Фейеру.

Задача

58.

Последовательность a_n сходится в среднем к числу a , если последовательность

$$\bar{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

сходится к a в обычном смысле.

докажите, что если $a_n \rightarrow a$, то $\bar{a}_n \rightarrow a$.

||

Сначала рассмотрите сходимость к нулю, в общем случае представьте последовательность как сумму постоянной и бесконечно малой.

||

Задача

59.

Опишите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, «непрерывные в среднем», то есть такие, для которых сходимость в среднем x_n к x_0 влечёт сходимость в среднем $f(x_n)$ к $f(x_0)$.

||

Обратите внимание, что последовательность (x_n) , принимающая только два значения a и b , может сойтись в среднем к любой точке между a и b .||

Задача

4.60.

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с частичными суммами

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

сходится в среднем (или сходится по Чезаро) к числу S , если последовательность (S_n)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx, \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

||

Для вычислений удобно воспользоваться $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и суммировать геометрические прогрессии.

||

10.1.10 Series with Terms of Constant Sign

соберем чисто для знакопостоянных рядов все методы.

10.1.11 Alternating Series

очень интересный раздел

(?? чего еще не написано нигде, писал ведь?)

10.1.12 Taylor Series for Elementary Functions

(collection of proofs that they are such)

Заметим, что из правил дифференцирования степенного ряда следует, что у степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ с радиусом сходимости $R > 0$ есть первообразная

$$F(x) = \text{const} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$$

с тем же радиусом сходимости.

Далее мы увидим, что все элементарные функции представляются степенными рядами в окрестности точек из внутренней своей области определения, а значит имеют первообразные.

Теорема об ряде экспоненты

Для всех $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Доказательство

(?? и что не очевидно???)

Это следует из теоремы 4.51, но можно считать эту формулу просто определением экспоненты.

действительно, при $n \geq 2|x|$ следующее слагаемое как минимум в два раза меньше предыдущего и сумма остатка ряда оценивается суммой геометрической прогрессии.

(????)

Об элементарных свойствах экспоненты, рассматривая её как ряд (!?)

Оперируя абсолютно сходящимися рядами, можно получить

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0, \ell=0}^{\infty} \frac{x^k y^{\ell}}{k! \ell!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^{\ell}}{\ell!} \right) = \exp(x) \exp(y).$$

Также из дифференцирования рядов мы получим $\exp(x)' = \exp(x)$.

Этими свойствами экспонента определяется однозначно.

О синусах и косинусах из ряда экспоненты (??)

Определите косинус и синус через подстановку комплексного числа в экспоненту

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

проверьте их основные свойства исходя из такого определения, выпишите их ряды Тейлора.

Теорема о ряде логарифма

Для $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

Доказательство

Формула для суммы геометрической прогрессии показывает, что

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

с радиусом сходимости 1.

Так как $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, мы получаем формулу для логарифма из теоремы о дифференцировании степенных рядов.

Формула $\ln e^z = z$ (??)

(потом потренируюсь)

Используя ряды для e^z и $\ln(1+z)$ как определения этих функций, докажите формулу $\ln e^z = z$ для достаточно близких к нулю комплексных z .

||

Сначала напишите

$$(e^z - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{kz} = \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{k^m z^m}{m!},$$

а потом

$$\ln e^z = \sum_{1 \leq k \leq n \leq m} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{n} \frac{k^m z^m}{m!} = \sum_{1 \leq k \leq n \leq m} \binom{n-1}{k-1} (-1)^{k+1} \frac{k^{m-1} z^m}{m!}$$

просуммируйте сначала по n , потом по k .

||

ТеоремаДля $|x| < 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

радиусом сходимости не менее 1.

где определим биномиальный коэффициент для не обязательно целой степени $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Доказательство

По определению мы знаем, что

$$(1+x)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\ln(1+x))^n.$$

Если $|x| \leq r < 1$, то мы знаем, что сумма модулей в ряде для $\ln(1+x)$ будет не более $|\ln(1-r)|$ (если все знаки поменять на плюс, так и получится).

Это означает, что воспользовавшись возможностью перемножения и повторного суммирования абсолютно сходящихся рядов, мы получим Для $(1+x)^\alpha$ выражение в виде некоего ряда с суммой модулей слагаемых не более

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{n!} |\ln(1-r)|^n = e^{|\alpha| |\ln(1-r)|} < +\infty$$

Приведя в этом выражении подобные слагаемые с одной и той же степенью x (на самом деле при каждой степени будет лишь конечное число слагаемых), мы получим степенной ряд сходящийся при $|x| < 1$.

Таким способом трудно узнать его коэффициенты, но их можно узнать из формулы для ряда Тейлора, дифференцируя $(1+x)$ несколько раз и подставляя $x = 0$.

:

Теорема достаточной сходимости при ограниченности производных (???)

Пусть в ограниченной окрестности $U(x_0) \ni x_0$ функция f действительного аргумента бесконечно дифференцируема и её производные в этой окрестности оцениваются как $|f^{(n)}(x)| \leq C^n$. Тогда ряд Тейлора f по степеням $x - x_0$ сходится к f на $U(x_0)$.

Доказательство

Пусть $U(x_0) \subseteq (x_0 - M, x_0 + M)$.

Воспользуемся формой Лагранжа остаточного члена:

$$|r_{n-1}(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{(CM)^n}{n!} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Так как оценка остаточного члена формулы Тейлора равномерно стремится к нулю, то это означает равномерную сходимость соответствующего ряда Тейлора.

О следствиях и границах применения (??)

Оно не работает для логарифма и функции $(1+x)^\alpha$

Из этой теоремы следует, что ряды Тейлора для экспоненты, синуса и косинуса имеют бесконечный радиус сходимости и сходятся к своим функциям.

Выпишем их явно

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Формула $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ теперь может быть проверена как равенство рядов Тейлора, в которые можно подставлять и комплексную переменную.

Задача

52.

Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ряд Тейлора которой сходится, но не к f .

||

Используйте функцию из задачи 2.80.

||

О подходе с понятием голоморфности (??)

Следует отметить, что правильный подход к рядам Тейлора связан с понятием аналитичности (голоморфности) функции.

(?? почему??)

На самом деле для сходимости ряда Тейлора функции f в круге $|z - z_0| < R$ на комплексной плоскости достаточно, чтобы эта функция была дифференцируема в этом круге в комплексном смысле, то есть выполнялось бы

$$f(z+t) = f(z) + f'(z)t + o(|t|)$$

для всякого фиксированного z из открытого круга и комплексных $t \rightarrow 0$.

Для функции, которая аналитически продолжена на круг с центром в z_0 с особенностями, радиус сходимости просто равен расстоянию до ближайшей особенности;

это наблюдение очень помогает при нахождении радиуса сходимости степенного ряда без выписывания формул.

Более подробно методы комплексного анализа освещаются в разделе 10.

Пока же мы будем называть функцию действительного переменного аналитической на интервале (a, b) , если для любой точки $x_0 \in (a, b)$ она раскладывается в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)^n$, сходящийся в некоторой окрестности $U(x_0) \ni x_0$.

10.1.13 Taylor Formula for Functions of Several Variables

докажем некоторые стандартные факты про производные высшего порядка для функций нескольких переменных.

Лемма о равенстве вторых частных производных

Если функция $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) , то для вторых производных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

(?? мб Лемма Шварца??)

Доказательство

Выражение $g(x, y) = f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)$ можно двумя применениями теоремы о среднем Лагранжа привести к виду

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta')(x - x_0)(y - y_0)$$

для некоторых ξ' между x и x_0 и η' между y и y_0 .

(!! проделаю это потом)

Делая то же самое в другом порядке, можно получить аналогичное выражение

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi'', \eta'')(x - x_0)(y - y_0)$$

При $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ получается равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi'', \eta'')$$

и в нём достаточно перейти к пределу $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ (а значит $(\xi', \eta') \rightarrow (x_0, y_0)$ и $(\xi'', \eta'') \rightarrow (x_0, y_0)$)

(??? почти догнал идею, но не совсем)

Контрпримеры для случая невыполнения условия этой леммы (!!???)

(интересно кстати???)

Формула Тейлора для функций нескольких переменных

Если функция $f \in \mathbb{R}^n$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности $U_\varepsilon(x)$, то для любого $\xi \in U_\varepsilon(x)$ выполняется (суммирование по неотрицательным целым k_i)

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{k_1+\dots+k_n \leq m} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x) \cdot (\xi_1 - x_1)^{k_1} \dots (\xi_n - x_n)^{k_n} + \\ &+ \sum_{k_1+\dots+k_n=m} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x + \vartheta(\xi - x)) \cdot (\xi_1 - x_1)^{k_1} \dots (\xi_n - x_n)^{k_n} = \\ &= \sum_{k_1+\dots+k_n \leq m} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x) \cdot (\xi_1 - x_1)^{k_1} \dots (\xi_n - x_n)^{k_n} + o(|\xi - x|^m). \end{aligned}$$

для некоторого $\vartheta \in (0, 1)$.

(??? вроде все просто, но запись жуть какая сложная)

Доказательство

Достаточно рассмотреть функцию одной переменной $f(x + t(\xi - x))$ и выписать для неё формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для значений $t = 0$ и $t = 1$.

Конкретнее, если мы продифференцируем выражение $f(x + t(\xi - x))$ по переменной t , то мы получим по формуле для производной по направлению

$$\frac{d}{dt} f(x + t(\xi - x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(\xi - x)) (\xi_i - x_i)$$

При дифференцировании в следующий раз и далее мы применяем эту формулу и подставляем её в саму себя, получая

$$\frac{d^k}{dt^k} f(x + t(\xi - x)) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x + t(\xi - x)) (\xi_{i_1} - x_{i_1}) \dots (\xi_{i_k} - x_{i_k})$$

Эту формулу можно переписать иначе, учитывая установленный факт, что частные дифференцирования коммутируют друг с другом.

Считая суммы не по порядку дифференцирования, а по тому, сколько раз дифференцировалась каждая переменная, $x_1 - k_1$ раз, ..., $x_n - k_n$ раз, мы можем написать в виде суммы по неотрицательным $k_1, \dots, k_n$

$$\frac{d^k}{dt^k} f(x + t(\xi - x)) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \binom{k}{k_1 \dots k_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x + t(\xi - x)) (\xi_1 - x_1)^{k_1} \dots (\xi_n - x_n)^{k_n}$$

Здесь

$$\binom{k}{k_1 \dots k_n} = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}$$

это мультиномиальный коэффициент, показывающий, сколькими способами мы можем переставить k_1 единиц, k_2 двоек, ..., k_n чисел n в последовательности - что соответствует порядку дифференцирований по соответствующим переменным.

Выражение через факториалы получается из того факта, что всю последовательность можно переставить $k!$ способами, но при этом $k_1!$ способов переставить единицы её не меняют, $k_2!$ способов переставить двойки тоже её не меняют и т.д.

Таким образом мы доказали первый вариант формулы, с остаточным членом в форме Лагранжа.

Второй вариант формулы (с остаточным членом в форме Пеано) следует из равенства

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x + \vartheta(\xi - x)) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x) + o(1)$$

О разных видах формулы Тейлора (??)

Для формулы Тейлора и производных высших порядков придуманы обозначения $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ для вектора из неотрицательных целых чисел, $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n$, суммы его координат, $\mathbf{k}! = k_1! \dots k_n!$, а также для вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ из действительных чисел, его возведения в степень и производной

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}} = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

Тогда формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано начинает выглядеть так:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} \frac{1}{\mathbf{k}!} \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{k}} + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^m)$$

Эти обозначения удобно использовать при работе с частными производными высших порядков, но для первой и второй производных мы не будем ими злоупотреблять.

Можно заметить, что формула Тейлора начинается с

$$f(\xi) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(\xi_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)(\xi_n - x_n) + o(|\xi - x|)$$

то есть с постоянного члена и линейной части - первого дифференциала.

следующие слагаемые можно (с точностью до множителя) называть вторым дифференциалом и т.п.

Второй дифференциал, например, является квадратичной формой от $\xi - x$, то есть можно написать

$$f(\xi) = f(x) + df_x(\xi - x) + \frac{1}{2}d_2f_x(\xi - x) + o(|\xi - x|^2)$$

при условии дважды непрерывной дифференцируемости.

Второй дифференциал также называется гессоном функции.

Мы будем писать d_2 вместо d^2 , так как в дальнейшем мы расширим определение d так, что всегда будет выполняться $d^2 = 0$.

Хз о чем Карасев (!?!?!?!?)

Нас интересуют вопросы преобразования разных выражений при криволинейной замене координат и в частности, преобразование формулы Тейлора.

Если мы делаем гладкую подстановку $x = \varphi(t)$ и её производная в точке есть $D\varphi$, то при замене координат по теореме о дифференцировании композиции df заменится на $df \circ D\varphi$.

Это означает, что первый дифференциал меняется как положено меняться линейной форме при линейной замене координат отображением $D\varphi$.

Для второго дифференциала всё не так просто. Уже в одномерном случае можно убедиться, что

$$\frac{d^2 f \circ \varphi}{dt^2} = f'' (\varphi')^2 + f' \varphi''$$

то есть вторая производная в новых координатах зависит и от первой производной в старых.

Лемма об изменении второго дифференциала (?????)

Однако в одном важном для нас случае гессиан оказывается инвариантным:

Если $df_{x_0} = 0$, то при любой замене координат $x = \varphi(t)$ второй дифференциал в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ меняется так:

$$d_2(f \circ \varphi)_{t_0}(\Delta t) = d_2 f_{x_0}(D\varphi_{t_0}(\Delta t))$$

Доказательство

Надо дифференцировать композицию один раз, а потом еще один раз.

Помимо выписанных слагаемых со вторыми производными f и первыми производными φ могли бы появиться слагаемые с первыми производными f и вторыми производными φ .

Но по условию в точке x_0 первые производные f равны нулю.

10.1.14 Overview of Refinements of the Taylor Formula

Падение аппроксимация как улучшение рядов Тейлора (!?!?!?)

(подробнее об этом в вычитках, тут укажу только, что такое есть.)

10.1.15 Other Expansions

(something else)

10.2 Series of Harmonic Analysis

10.2.1 Convergence of Fourier Series in the Mean-Square Sense

мотивация и примеры применения

Теория

Заметим, что по теореме 8.15 всякую (возможно, комплекснозначную) функцию $f \in L_2[-\pi, \pi]$ можно сколь угодно близко в норме $\|\cdot\|_2$ приблизить бесконечно гладкой функцией с носителем строго в $(-\pi, \pi)$.

Такая функция продолжается до бесконечно гладкой 2π -периодической функции на всей прямой и её по теореме 4.68 можно равномерно приблизить тригонометрическим полиномом с комплексными коэффициентами, записанным в комплексной форме как

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

Равномерное приближение также является приближением по норме L_2 , так как на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеется неравенство $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_C$.

Далее нам надо изучить, каким именно тригонометрическим многочленом надо приближать функцию.

Ответ на этот вопрос зависит от того, в какой норме мы собираемся приближать, самый простой случай даёт норма L_2 и следующая теорема.

Оптимальность коэффициентов Фурье

Для всякой $f \in L_2[-\pi, \pi]$ и данного числа n лучшее по норме L_2 приближение f тригонометрическим n -многоиленом

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

дают коэффициент Фурье

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Доказательство

Воспользуемся скалярным произведением в $L_2[-\pi, \pi]$

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

для которого $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$.

Занумеруем наши функции e^{ikx} в некотором порядке как $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, в наших рассуждениях будет важна лишь ортогональность этих функций относительно введённого скалярного произведения и больше ничего (проверьте ортогональность функций e^{ikx} в $L_2[-\pi, \pi]$ самостоятельно).

Пусть мы приближаем нашу f выражением $\sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$ и оптимизируем коэффициенты a_k , рассмотрим квадрат разности

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N \bar{a}_k (f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^N a_k (\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^N |a_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2$$

Используя определение коэффициентов Фурье в виде $(f, \varphi_k) = c_k \|\varphi_k\|_2^2$, получим

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N (\bar{a}_k c_k + a_k \bar{c}_k - |a_k|^2) \|\varphi_k\|_2^2 = \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2 + \sum_{k=1}^N |c_k - a_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2 \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что для приближения оптимально положить $a_k = c_k$. Последняя формула предыдущего доказательства в оптимальном случае имеет вид

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2,$$

что доказывает также неравенство Бесселя

$$\|f\|_2^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2$$

которое для тригонометрической системы записывается в виде:

$$\|f\|_2^2 \geq 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Если нас интересует представление действительной функции в виде ряда Фурье, то ряд Фурье можно переписать в виде (проверьте это)

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

в котором коэффициенты также действительные,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \geq 1.$$

Неравенство Бесселя тогда записывается так:

$$\|f\|_2^2 \geq 2\pi |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном

Для всякой комплекснозначной $f \in L_2[-\pi, \pi]$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Доказательство

Из замечания в начале раздела следует, что функцию f можно сколь угодно точно по норме $\|\cdot\|_2$ приблизить тригонометрическим многочленом.

Из оптимальности коэффициентов Фурье можно предполагать, что это приближение дано конечным отрезком ряда Фурье.

Формула для квадрата точности приближения

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{k=1}^N |c_k|^2 < \varepsilon$$

показывает, что следующие приближения (при увеличении количества слагаемых в ряде Фурье) будут не хуже данного, это означает сходимость ряда Фурье по норме $\|\cdot\|_2$ по определению.

Также эта формула показывает, что в пределе в неравенстве Бесселя будет равенство (Парсеваля).

В этой теореме мы просуммировали, как положено в теории рядов Фурье, «симметрично»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

иначе это называется сумма в смысле главного значения и обозначается

$$\text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Хотя на самом деле конкретно в данной теореме любой порядок суммирования даёт тот же результат, для поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье суммирование в смысле главного значения будет важно.

Заметим, что для доказательства неравенства Бесселя от тригонометрической системы требовалась только её ортогональность, тогда как для сходимости и равенства Парсеваля потребовалось нетривиальное свойство этой системы, полнота, как возможность приблизить любую функцию в пространстве L_2 линейной комбинацией функций нашей системы сколь угодно точно.

Другое замечание относится к тому, как надо понимать эту формулу. Из сходимости ряда в среднеквадратичном в принципе может и не следовать его сходимость хотя бы в одной точке (см. задачу 8.13), то есть мы не доказали, что в эту формулу можно подставить хоть одно конкретное значение x .

Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi, \pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлесоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лаузина.

10.2.2 Uniform and Pointwise Convergence of a Trigonometric Fourier Series

Мы заметили, что сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном устанавливается легко, а теперь разовьём более сложную технику для анализа сходимости в точке или равномерной сходимости на отрезке.

Обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье для 2π -периодической функции f как

$$T_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$$

Сейчас мы получим полезное выражение для этой суммы:

лемма 8

.47.

Для n -й частичной суммы ряда Фурье 2π -периодической функции имеет место формула в виде свёртки

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

с ядром Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin t/2}$$

Доказательство

Подставим определение коэффициентов Фурье в формулу

$$T_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

и получим

$$T_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{ikx - ik\xi} d\xi$$

Сделаем замену $\xi = x + t$ и заметим, что все функции 2π -периодические и поэтому интегралы по любому отрезку $[a, a + 2\pi]$ не будут зависеть от a .

Тогда

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} \right) dt$$

Сумму в скобках можно найти как сумму геометрической прогрессии

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{2\pi (e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin t/2}.$$

Изучим некоторые свойства ядра Дирихле.

лемма 8.48 (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле).

Существует такая константа C , что

$$\left| \int_a^b D_n(t) dt \right| \leq C$$

для любых $a, b \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство

Внесем из-под интеграла монотонное и ограниченное на $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$ выражение $\frac{t}{\sin t/2}$ по второй теореме о среднем, сведя таким образом утверждение к оценке интеграла Дирихле

$$\left| \int_a^b \frac{\sin(n + 1/2)x}{x} dx \right| \leq C.$$

После замены $t = (n + 1/2)x$ мы должны оценить интегралы

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \right|$$

независимо от a и b .

существование такой оценки следует из сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ по признаку Дирихле. Из формулы

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt}$$

следует формула для интеграла от ядра Дирихле

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$$

Она позволяет записать отклонение частичной суммы ряда Фурье от функции как

$$T_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt.$$

Главный инструмент исследования этого выражения даёт:

Теорема

8.49 (Равномерный принцип локализации).

Запишем для $\delta \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned} T_n(f, x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt = \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt \end{aligned}$$

Если $f \in L_1[-\pi, \pi]$, то

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Если f ограничена на отрезке $[a, b]$, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a, b]$.

Доказательство

С помощью второй теоремы о среднем вынесем монотонный множитель $\frac{1}{2\pi \sin t/2}$ из интеграла (он ограничен при $\delta \leq |t| \leq \pi$).

Второе слагаемое в оставшемся выражении, имеющее вид

$$- \int_c^d f(x) \sin(n + 1/2)t dt$$

стремится к нулю из предполагаемой ограниченности $f(x)$ и, например, явного выражения для интеграла от синуса.

В слагаемом с $f(x+t)$ можно вернуться к комплексной записи

$$\int_c^d f(x+t) \sin(n+1/2)t dt = \frac{1}{2i} \left(\int_c^d f(x+t) e^{i(n+1/2)t} dt - \int_c^d f(x+t) e^{-i(n+1/2)t} dt \right)$$

и далее переписать на примере одного из двух слагаемых

$$\left| \int_{x+c}^{x+d} f(\xi) e^{i(n+1/2)\xi - i(n+1/2)x} d\xi \right| = \left| e^{-i(n+1/2)x} \int_{x+c}^{x+d} f(\xi) e^{i(n+1/2)\xi} d\xi \right| = \left| \int_{x+c}^{x+d} f(\xi) e^{i(n+1/2)\xi} d\xi \right|$$

В последнем выражении пределы интегрирования заведомо лежат в диапазоне $[-2\pi, 2\pi]$, на котором $|f|$ имеет конечный интеграл, поэтому лемма о равномерной осцилляции применима и даёт равномерное стремление к нулю.

Теперь мы готовы доказать (равномерную) сходимость ряда Фурье к достаточно хорошим функциям.

определение...

Определение 8.50.

Функция f называется гёльдеровой степени $\alpha > 0$, если для любых x, y из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

с некоторой константой C .

Признак Липшица сходимости ряда Фурье

Для абсолютно интегрируемой 2π -периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми $C, \alpha > 0$ на интервале $(A, B) \supset [a, b]$

$$T_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство

Оценим локальную часть $T_n(f, x) - f(x)$ как

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt \right| \leq C \int_{-\delta}^{\delta} |t|^\alpha \frac{1}{2\pi |\sin t/2|} dt \leq C \int_{-\delta}^{\delta} |t|^\alpha \frac{1}{2|t|} dt = \frac{C}{\alpha} |\delta|^\alpha,$$

здесь было использовано неравенство $\pi |\sin t/2| \geq |t|$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Из произвольности ди равномерного принципа локализации следует, что $T_n(f, x) - f(x)$ может быть равномерно сделано сколь угодно маленьким при подходящем $\delta > 0$ и достаточно большом n .

Признак Дирихле сходимости ряда Фурье

Для абсолютно интегрируемой 2π -периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$

$$T_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство

По лемме 8.18 представим f как разность монотонных и непрерывных на (A, B) функций и будем доказывать утверждение для монотонных и непрерывных f .

Тогда по второй теореме о среднем и лемме 8.48 для локальной части $T_n(f, x) - f(x)$

$$\left| \int_0^\delta (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt \right| = \left| (f(x+\delta) - f(x)) \int_0^\delta D_n(t) dt \right| \leq C |f(x+\delta) - f(x)|$$

и аналогично для интеграла от $-\delta$ до 0.

Полученная оценка равномерно стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$ из равномерной непрерывности f в некоторой окрестности отрезка $[a, b]$.

Признак Дирихле сходимости ряда Фурье в точке

Согласно признаку Дирихле, если абсолютно интегрируемая 2π -периодическая функция непрерывна в точке x и имеет ограниченную вариацию в окрестности x , то её ряд Фурье сходится к её значению в x .

Доказательство

||

Заметьте, что при представлении функции в виде суммы монотонных полученные монотонные функции тоже будут непрерывны в точке x .

||

Признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке

Согласно признаку Липшица, если абсолютно интегрируемая 2π -периодическая функция f удовлетворяет условию Гёльдера в точке x : $|f(x+t) - f(x)| \leq C|t|^\alpha$ для достаточно малых t и фиксированных положительных C и α , то её ряд Фурье сходится к её значению в x .

Доказательство

||

Заметьте, что приведённое выше доказательство равномерного варианта работает.

||

О случаях применения (?)**Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке**

Согласно признаку Дини, если интеграл $\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt$ сходится, то и ряда Фурье сходится к значению функции в точке x ,

Доказательство

||
 Замените $\sin t/2$ на t в знаменателе интеграла в свёртке с ядром Дирихле с помощью второй теоремы о среднем.
 ||

О случаях применения (?)**10.2.3 Poisson summation formula****Theory from Wiki**

Consider an aperiodic function $s(x)$ with Fourier transform $S(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-i2\pi fx}dx$, alternatively designated by $\hat{s}(f)$ and $\mathcal{F}\{s\}(f)$.

The basic Poisson summation formula is: ^[1]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k)$$

Also consider periodic functions, where parameters $T > 0$ and $P > 0$ are in the same units as x :

$$s_P(x) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(x \pm nP) \quad \text{and} \quad S_{1/T}(f) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(f \pm k/T)$$

Then Eq. 1 is a special case ($P = 1, x = 0$) of this generalization: ^{[2][3]}

$$s_P(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{P} \cdot S\left(\frac{k}{P}\right)}_{S[k]} e^{i2\pi \frac{k}{P}x},$$

which is a Fourier series expansion with coefficients that are samples of the function $S(f)$. Similarly:

$$S_{1/T}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{T \cdot s(nT)}_{s[n]} e^{-i2\pi nTf}$$

also known as the important Discrete-time Fourier transform.

Derivations

A proof may be found in either Pinsky ^[2] or Zygmund. ^[3] Eq.2, for instance, holds in the sense that if $s(x) \in L_1(\mathbb{R})$, then the right-hand side is the (possibly divergent) Fourier series of the left-hand side. It follows from the dominated convergence theorem that $s_P(x)$ exists and is finite for almost every x . Furthermore it follows that s_P is integrable on any interval of length P . So it is sufficient to show that the Fourier series coefficients of $s_P(x)$ are $\frac{1}{P}S\left(\frac{k}{P}\right)$. Proceeding from the definition of the Fourier coefficients we have:

$$\begin{aligned}
S[k] &\triangleq \frac{1}{P} \int_0^P s_P(x) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{P}x} dx \\
&= \frac{1}{P} \int_0^P \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(x+nP) \right) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{P}x} dx \\
&= \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^P s(x+nP) \cdot e^{-i2\pi \frac{k}{P}x} dx
\end{aligned}$$

where the interchange of summation with integration is once again justified by dominated convergence. With a change of variables ($\tau = x + nP$) this becomes:

$$S[k] = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nP}^{nP+P} s(\tau) e^{-i2\pi \frac{k}{P}\tau} \underbrace{e^{i2\pi kn}}_1 d\tau = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-i2\pi \frac{k}{P}\tau} d\tau \triangleq \frac{1}{P} \cdot S\left(\frac{k}{P}\right)$$

Applications

(I know that it is very useful)

10.2.4 Examples of transformations

Integration of Fourier Series, Expansion of Cotangent and Cosecant into Simple Fractions, and the Complementary Formula for the Beta Function

(??? is it a good idea to keep them in one section? I'll think later)

мотивация и примеры применения

Теория

докажем возможность почленно интегрировать ряд Фурье.

Собственно, следующая теорема показывает, что ряд Фурье можно почленно интегрировать и получать равномерно сходящийся ряд даже если про сходимость исходного ряда ничего не было известно.

Почленное интегрирование ряда Фурье

Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$ соответствует не обязательно сходящийся ряд Фурье, записанный в действительном виде как

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Тогда ряд Фурье можно почленно интегрировать, то есть выполняется формула

$$\int_a^b f(x) dx = a_0(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n} \right) \Bigg|_a^b$$

Доказательство

Можно вычесть из функции константу, тогда из ряда Фурье вычтется та же константа и равенство не потеряется, поэтому считаем, что $a_0 = 0$ и интеграл f на отрезке $[-\pi, \pi]$ равен нулю.

Также ясно, что достаточно доказать утверждение для интеграла от $-\pi$ до любого числа ξ , поэтому положим

$$F(\xi) = \int_{-\pi}^{\xi} f(x) dx$$

Эта функция имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-\pi, \pi]$ (равную L_1 норме f) и равные значения на концах (так как $a_0 = 0$), поэтому её ряд Фурье сходится к ней равномерно.

Посчитаем её коэффициенты Фурье при $n \neq 0$ с точностью до постоянного множителя:

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(F) &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi) e^{-in\xi} d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\xi} f(x) e^{-in\xi} dx d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\int_x^{\pi} e^{-in\xi} d\xi \right) dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{-inx} - e^{-in\pi}}{in} dx = \frac{2\pi c_n(f)}{in} - \frac{e^{-in\pi}}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2\pi c_n(f)}{in}, \end{aligned}$$

в последнем равенстве использовано равенство нулю интеграла от f по отрезку $[-\pi, \pi]$.

Значит равномерно по ξ выполняется равенство

$$F(\xi) = c_0(F) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{c_n(f)}{in} e^{in\xi}$$

в котором мы не находили постоянный коэффициент.

Иначе говорят, выполняется

$$F(\xi) = F(\xi) - F(-\pi) = C + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\xi} c_n(f) e^{inx} dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n} \right) \Big|_{-\pi}^{\xi}$$

причём подстановка $\xi = -\pi$ показывает, что константа равна нулю.

Это и есть требуемое равенство.

Задача

57.

Предположим, что последовательность (a_n) убывает и стремится к нулю.

Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

равномерно сходится на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ для любого положительного δ .

Приведите пример, когда нет равномерной сходимости на всём периоде $[-\pi, \pi]$.

||

Напишите $\cos nx = \frac{\sin(n+1/2)x - \sin(n-1/2)x}{2 \sin x/2}$ и примените признак Дирихле равномерной сходимости ряда 4.55.

Пример достаточно привести с расходимостью в нуле.

||

Задача

58.

Предположим, что последовательность (b_n) убывает и стремится к нулю.

Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

равномерно сходится на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ для любого положительного δ .Приведите пример, когда нет равномерной сходимости на $[-\pi, \pi]$.

||

Напишите $\sin nx = \frac{\cos(n-1/2)x - \cos(n+1/2)x}{2 \sin x/2}$ и примените признак Дирихле равномерной сходимости ряда 4.55.

При построении примера неравномерной сходимости примените критерий Коши равномерной сходимости ряда.

||

Задача

59.

Докажите, что выражение

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

||

Что будет, если мы его проинтегрируем? ||

В следующей задаче получаются формулы, которые можно интерпретировать как разложение некоторых тригонометрических функций в (бесконечную) сумму элементарных дробей, или как разложение в бесконечное произведение линейных функций.

Так как суммы бесконечны, то эти утверждения далеко не так очевидны, как их конечные аналоги для рациональных функций и многочленов.

Напомним, что мы используем обозначение

$$\text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cdots = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \cdots$$

Разложения, следующие из Фурье разложения $\cos ax$ Разложите функцию $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$, в ряд Фурье.

Выведите из полученного выражения формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= \text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \pi k} \\ \frac{1}{\sin x} &= \text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k} \\ \sin x &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } \text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n a_k.$$

Задача

61.

Докажите формулу дополнения для бета-функции при $p \in (0, 1)$:

$$B(p, 1 - p) = \int_0^1 t^{p-1} (1 - t)^{-p} dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

||

С помощью замены переменной напишите

$$B(p, 1 - p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x} dx.$$

Разложите в сумму $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ и переставьте сумму с интегралом по теореме о монотонной сходимости (это можно, если считать бесконечную сумму пределом частичных сумм с чётным количеством слагаемых).

Потом воспользуйтесь одним из равенств в предыдущей задаче.

Другое доказательство этой формулы см.

в разделе 10.6.

||

Задача

62.

Докажите формулу для $0 < |x| < \pi$

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n,k \geq 1} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k} n^{2k}},$$

выведите из неё значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

||

Используйте разложение котангенса на элементарные дроби из задачи 8.60.

||

10.2.5 Summation of Trigonometric Series by Fejér**мотивация и примеры применения****Теория**

существует явный способ приблизить любую непрерывную 2π -периодическую функцию тригонометрическими рядами, которые будут сходиться к ней равномерно.

Как показывает теорема 9.16, частичные суммы ряда Фурье для этого не годятся и надо действовать хитрее.

Определение ядра Фейера

Мы будем отталкиваться от ядра Дирихле для частичной суммы ряда Фурье и определим ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx}$$

усреднением ядер Дирихле.

Соответствующая сумма Фейера будет соответствовать усреднению первых $n+1$ частичных сумм ряда Фурье,

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \xi) \Phi_n(\xi) d\xi = \frac{T_0(f, x) + \cdots + T_n(f, x)}{n+1}$$

Записав

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\pi \sin t/2} = \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{4\pi \sin^2 t/2}$$

и суммируя, мы легко получим формулу

$$\Phi_n(t) = \frac{1 - \cos(n+1)t}{4\pi(n+1) \sin^2 t/2} = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2\pi(n+1) \sin^2 t/2}$$

С помощью этой формулы доказывается полезное свойство сумм Фейера:

Теорема

Для непрерывной 2π -периодической f

$$S_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

равномерно.

Доказательство

Так как ядра Фейера являются усреднением ядер Дирихле, то мы получаем нормировку

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = 1$$

Также мы будем использовать оценки из явной формулы для ядра Фейера

$$0 \leq \Phi_n(t) \leq \frac{1}{2\pi(n+1) \sin^2 t/2}$$

Запишем

$$S_n(f, x) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) \Phi_n(t) dt + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} (f(x+t) - f(x)) \Phi_n(t) dt$$

В первом интеграле воспользуемся модулем непрерывности $\omega_f(\delta)$ функции f , а во втором просто ограничим разность значений функции выражением $2\|f\|_C$, тогда

$$\begin{aligned} |S_n(f, x) - f(x)| &\leq \omega_f(\delta) \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) dt + 4\|f\|_C \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) dt \leq \\ &\leq \omega_f(\delta) + 4\|f\|_C \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{2\pi(n+1) \sin^2 t/2} = \omega_f(\delta) + 4\|f\|_C \frac{1}{\pi(n+1)} \operatorname{ctg} \delta/2 \end{aligned}$$

Ясно, что при фиксированном дв (частичном) пределе $n \rightarrow \infty$ получится не более $\omega_f(\delta)$.

Из равномерной непрерывности f следует, что эта оценка произвольно мала при достаточно малом δ , то есть на самом деле оценка стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. далее мы приводим задачи для самостоятельного решения на суммы Фейера, ядро Фейера и близкие вопросы.

Задача

64.

* Докажите, что для $f \in L_1[-\pi, \pi]$

$$S_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

в смысле сходимости в $L_1[-\pi, \pi]$ (в среднем).

||

Запишите интеграл от $|S_n(f, x) - f|$ и поработайте с ним.

||

Задача

65.

Посчитайте сумму для $r \in [0, 1)$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ikx}$$

||

Вспомните про сумму геометрической прогрессии.

||

Задача

66.

* Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел убывает, стремится к нулю и выпукла (в смысле $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \geq 0$ при $n \geq 1$).

Докажите, что сумма

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

неотрицательна (в некоторых точках может быть $+\infty$).

||

Воспользуйтесь преобразованием Абеля для рядов и обнаружьте ядро Фейера.

||

10.2.6 Szegő limit theorems

Overview and main result of Szegő limit theorems

In mathematical analysis, the Szegő limit theorems describe the asymptotic behaviour of the determinants of large Toeplitz matrices. ^{[1][2][3]} They were first proved by Gábor Szegő.

Let w be a Fourier series with Fourier coefficients c_k , relating to each other as

$$w(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\theta) e^{-ik\theta} d\theta$$

such that the $n \times n$ Toeplitz matrices $T_n(w) = (c_{k-l})_{0 \leq k, l \leq n-1}$ are Hermitian, i.e., if $T_n(w) = T_n(w)^*$ then $c_{-k} = \overline{c_k}$. Then both w and eigenvalues $(\lambda_m^{(n)})_{0 \leq m \leq n-1}$ are real-valued and the determinant of $T_n(w)$ is given by

$$\det T_n(w) = \prod_{m=1}^{n-1} \lambda_m^{(n)}$$

Szegő theorem [edit] Under suitable assumptions the Szegő theorem states that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} F(\lambda_m^{(n)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(w(\theta)) d\theta$$

for any function F that is continuous on the range of w . In particular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_m^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\theta) d\theta < \infty$$

such that the arithmetic mean of $\lambda^{(n)}$ converges to the integral of w .^[4]

First Szegő theorem The first Szegő theorem ^{[1][3][5]} states that, if right-hand side of (1) holds and $w \geq 0$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\det T_n(w))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det T_n(w)}{\det T_{n-1}(w)} = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log w(\theta) d\theta \right)$$

holds for $w > 0$ and $w \in L_1$. The RHS of (2) is the geometric mean of w (well-defined by the arithmetic-geometric mean inequality).

Second Szegő theorem Let $\hat{c}_k$ be the Fourier coefficient of $\log w \in L^1$, written as

$$\hat{c}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(w(\theta)) e^{-ik\theta} d\theta$$

The second (or strong) Szegő theorem ^{[1][6]} states that, if $w \geq 0$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\det T_n(w)}{e^{(n+1)\hat{c}_0}} = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |\hat{c}_k|^2 \right)$$

Overview of applications of Szegő limit theorems

(see statistical physics)

10.2.7 Toeplitz matrix

(see wiki)

Short description

In linear algebra, a "Toeplitz matrix" or "diagonal-constant matrix", named after Otto Toeplitz, is a matrix in which each descending diagonal from left to right is constant. For instance, the following matrix is a Toeplitz matrix:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ i & h & g & f & a \end{bmatrix}.$$

Any $n \times n$ matrix A of the form

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

is a "Toeplitz matrix". If the i, j element of A is denoted $A_{i,j}$ then we have

$$A_{i,j} = A_{i+1,j+1} = a_{i-j}.$$

A Toeplitz matrix is not necessarily square.

Solving a Toeplitz system

A matrix equation of the form

$$Ax = b$$

is called a "Toeplitz system" if A is a Toeplitz matrix. If A is an $n \times n$ Toeplitz matrix, then the system has at most only $2n - 1$ unique values, rather than n^2 . We might therefore expect that the solution of a Toeplitz system would be easier, and indeed that is the case.

Toeplitz systems can be solved by algorithms such as the [[Schur class|Schur algorithm]] or the [[Levinson recursion|Levinson algorithm]] in $O(n^2)$ time.

Variants of the latter have been shown to be weakly stable (i.e. they exhibit [[numerical stability]] for [[Condition number|well-conditioned]] [[system of linear equations|linear systems]]). The algorithms can also be used to find the [[determinant]] of a Toeplitz matrix in [[Big O notation| $O(n^2)$]] time.

A Toeplitz matrix can also be decomposed (i.e. factored) in [[Big O notation| $O(n^2)$ time]]. The Bareiss algorithm <!--this is not "the" [[Bareiss algorithm]] --> for an [[LU decomposition]] is stable. An LU decomposition gives a quick method for solving a Toeplitz system, and also for computing the determinant.

General properties

* An $n \times n$ Toeplitz matrix may be defined as a matrix A where $A_{i,j} = c_{i-j}$, for constants $c_{1-n}, \dots, c_{n-1}$. The [[set (mathematics)|set]] of $n \times n$ Toeplitz matrices is a [[linear subspace|subspace]] of the [[vector space]] of $n \times n$ matrices (under matrix addition and scalar multiplication).

* Two Toeplitz matrices may be added in $O(n)$ time (by storing only one value of each diagonal) and [[matrix multiplication|multiplied]] in $O(n^2)$ time.

* Toeplitz matrices are [[persymmetric matrix|persymmetric]]. [[Symmetric matrix|Symmetric]] Toeplitz matrices are both [[centrosymmetric matrix|centrosymmetric]] and [[bisymmetric matrix|bisymmetric]].

* Toeplitz matrices are also closely connected with [[Fourier series]], because the [[multiplication operator]] by a [[trigonometric polynomial]], [[compression (functional analysis)|compressed]] to a finite-dimensional space, can be represented by such a matrix. Similarly, one can represent linear convolution as multiplication by a Toeplitz matrix.

* Toeplitz matrices commute [[asymptotic analysis|asymptotically]]. This means they [[Diagonalizable matrix|diagonalize]] in the same [[basis (linear algebra)|basis]] when the row and column dimension tends to infinity.

* For symmetric Toeplitz matrices, there is the decomposition

$$\frac{1}{a_0}A = GG^T - (G - I)(G - I)^T$$

:where G is the lower triangular part of $\frac{1}{a_0}A$.

* The [[inverse matrix|inverse]] of a [[nonsingular matrix|nonsingular]] symmetric Toeplitz matrix has the representation

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha_0}(BB^T - CC^T)$$

:where B and C are [[triangular matrix|lower triangular]] Toeplitz matrices and C is a strictly lower triangular.

Discrete convolution

The [[convolution]] operation can be constructed as a matrix multiplication, where one of the inputs is converted into a Toeplitz matrix. For example, the convolution of h and x can be formulated as:

$$y = h * x = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & & \vdots & \vdots \\ h_3 & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & h_3 & \cdots & h_1 & 0 \\ h_{m-1} & \vdots & \ddots & h_2 & h_1 \\ h_m & h_{m-1} & & \vdots & h_2 \\ 0 & h_m & \ddots & h_{m-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{m-1} & h_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & h_m & h_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y^T = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{m-1} & h_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix}.$$

This approach can be extended to compute [[autocorrelation]], [[cross-correlation]], [[moving average]] etc.

Infinite Toeplitz matrix

A bi-infinite Toeplitz matrix (i.e. entries indexed by $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) A induces a [[linear operator]] on ℓ^2 .

$$A = \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \cdots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

The induced operator is [[bounded operator|bounded]] if and only if the coefficients of the Toeplitz matrix A are the Fourier coefficients of some [[Essential range|essentially bounded]] function f .

In such cases, f is called the '''symbol''' of the Toeplitz matrix A , and the spectral norm of the Toeplitz matrix A coincides with the L^∞ norm of its symbol.

10.3 Other Special Methods of Summation

10.3.1 Ewald summation

Theory from Wiki

10.3.2 Euler–Maclaurin formula

Theory from Wiki

If m and n are natural numbers and $f(x)$ is a real or complex valued continuous function for real numbers x in the interval $[m, n]$, then the integral

$$I = \int_m^n f(x) dx$$

can be approximated by the sum (or vice versa)

$$S = f(m+1) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

(see rectangle method). The Euler-Maclaurin formula provides expressions for the difference between the sum and the integral in terms of the higher derivatives $f^{(k)}(x)$ evaluated at the endpoints of the interval, that is to say $x = m$ and $x = n$.

Explicitly, for p a positive integer and a function $f(x)$ that is p times continuously differentiable on the interval $[m, n]$, we have

$$S - I = \sum_{k=1}^p \frac{B_k}{k!} \left(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m) \right) + R_p$$

where B_k is the k th Bernoulli number (with $B_1 = \frac{1}{2}$) and R_p is an error term which depends on n, m, p , and f and is usually small for suitable values of p .

The formula is often written with the subscript taking only even values, since the odd Bernoulli numbers are zero except for B_1 . In this case we have ^{[1][2]}

$$\sum_{i=m}^n f(i) = \int_m^n f(x) dx + \frac{f(n) + f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m) \right) + R_p$$

or alternatively

$$\sum_{i=m+1}^n f(i) = \int_m^n f(x) dx + \frac{f(n) - f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m) \right) + R_p$$

Applications

Basel problem

The Basel problem is to determine the sum

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Euler computed this sum to 20 decimal places with only a few terms of the Euler-Maclaurin formula in 1735. This probably convinced him that the sum equals $\frac{\pi^2}{6}$, which he proved in the same year. ^[4]

Sums involving a polynomial

If f is a polynomial and p is big enough, then the remainder term vanishes. For instance, if $f(x) = x^3$, we can choose $p = 2$ to obtain, after simplification,

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Approximation of integrals [edit] The formula provides a means of approximating a finite integral. Let $a < b$ be the endpoints of the interval of integration. Fix N , the number of points to use in the approximation, and denote the corresponding step size by $h = \frac{b-a}{N-1}$. Set $x_i = a + (i-1)h$, so that $x_1 = a$ and $x_N = b$. Then: ^[5]

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x) dx \\
&\sim h \left(\frac{f(x_1)}{2} + f(x_2) + \cdots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right) + \frac{h^2}{12} [f'(x_1) - f'(x_N)] - \\
&\quad - \frac{h^4}{720} [f'''(x_1) - f'''(x_N)] + \cdots
\end{aligned}$$

10.3.3 Darboux's formula

Theory from Wiki

In mathematical analysis, Darboux's formula is a formula introduced by Gaston Darboux (1876) for summing infinite series by using integrals or evaluating integrals using infinite series. It is a generalization to the complex plane of the Euler-Maclaurin summation formula, which is used for similar purposes and derived in a similar manner (by repeated integration by parts of a particular choice of integrand). Darboux's formula can also be used to derive the Taylor series from calculus

Statement

If $\varphi(t)$ is a polynomial of degree n and f an analytic function then

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^n (-1)^m (z-a)^m \left[\varphi^{(n-m)}(1) f^{(m)}(z) - \varphi^{(n-m)}(0) f^{(m)}(a) \right] \\
&= (-1)^n (z-a)^{n+1} \int_0^1 \varphi(t) f^{(n+1)}[a + t(z-a)] dt.
\end{aligned}$$

The formula can be proved by repeated integration by parts.

10.3.4 Matsubara's summations

Theory

10.4 Other Properties of Series

10.4.1 Expansion into Series in Half-Integer Powers

(я хз, не знаю, я тупой)

10.4.2 Expansion into Series in Almost Half-Integer Powers

(я хз, не знаю, я тупой)

10.4.3 On Series Whose Sums Can Be Arbitrary

Сумма всех чисел до $+$ бесконечности

Вычисление

Обсуждение

О приложениях (?)

В эффекте Казимира. (???)

10.5 18.2 Trigonometric Fourier Series

(Zorich's book, p 525 and so on)

10.5.1 18.2.1 Basic Types of Convergence of Classical Fourier Series

a. Trigonometric Series and Trigonometric Fourier Series

A classical trigonometric series is a series of the form ¹⁴

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (18.32)$$

obtained on the basis of the trigonometric system $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$. The coefficients $\{a_0, a_k, b_k; k \in \mathbb{N}\}$ here are real or complex numbers. The partial sums of the trigonometric series (18.32) are the trigonometric polynomials

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (18.33)$$

corresponding to degree n .

If the series (18.32) converges pointwise on $\mathbb{R}$, its sum $f(x)$ is obviously a function of period 2π on $\mathbb{R}$. It is completely determined by its restriction to any closed interval of length 2π .

Conversely, given a function of period 2π on $\mathbb{R}$ (oscillations, a signal, and the like) that we wish to expand into a sum of certain canonical periodic functions, the first claimants for such canonical status are the simplest functions of period 2π , namely $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$, which are simple harmonic oscillations of corresponding degree n , with frequencies that are multiples of the lowest frequency.

Suppose we have succeeded in representing a continuous function as the sum

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (18.34)$$

of a trigonometric series that converges uniformly to it. Then the coefficients of the expansion (18.34) can be easily and uniquely found.

Multiplying Eq. (18.34) successively by each function of the system

$$\{1, \cos ks, \sin ks; k \in \mathbb{N}\},$$

using the fact that termwise integration is possible in the resulting uniformly convergent series, and taking account of the relations

⁰¹⁴ Writing the constant term in the form $a_0/2$, which is convenient for Fourier series, is not obligatory here.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx &= 2\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \text{ for } m \neq n, m, n \in \mathbb{N} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

we find the coefficients

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, \dots \quad (18.35)$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18.36)$$

of the expansion (18.34) of the function f in a trigonometric series.

We have arrived at the same coefficients that we would have had if we had regarded (18.34) as the expansion of the vector $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ in the orthogonal system $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$. This is not surprising, since the uniform convergence of the series (18.34) of course implies convergence in the mean on the closed interval $[-\pi, \pi]$, and then the coefficients of (18.34) must be the Fourier coefficients of the function f in the given orthogonal system (see Sect. 18.1).

Definition 1. If the integrals (18.35) and (18.36) have meaning for a function f , then the trigonometric series

$$f \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \quad (18.37)$$

assigned to f is called the trigonometric Fourier series of f .

Since there will be no Fourier series in this section except trigonometric Fourier series, we shall occasionally allow ourselves to drop the word "trigonometric" and speak of just "the Fourier series of f ."

In the main we shall be dealing with functions of class $\mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, or, slightly more generally, with functions whose squared absolute values are integrable (possibly in the improper sense) on the open interval $] -\pi, \pi[$. We retain our previous notation $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ to denote the vector space of such functions with the standard inner product

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} dx \quad (18.38)$$

Bessel's inequality

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x) dx \quad (18.39)$$

which holds for every function $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, shows that by no means every trigonometric series (18.32) can be the Fourier series of some function $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$.

Example

1. The trigonometric series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$$

as we already know (see Example 7 of Sect. 16.2) converges on $\mathbb{R}$, but is not the Fourier series of any function $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, since the series $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ diverges.

Thus, arbitrary trigonometric series (18.32) will not be studied here, only Fourier series (18.37) of functions in $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, and functions that are absolutely integrable on $]-\pi, \pi[$.

b. Mean Convergence of a Trigonometric Fourier Series

Let

$$S_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \quad (18.40)$$

be the n th partial sum of the Fourier series of the function $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$. The deviation of S_n from f can be measured both in the natural metric of the space $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ induced by the inner product (18.38), that is, in the sense of the mean-square deviation

$$\|f - S_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n|^2(x) dx} \quad (18.41)$$

of S_n from f on the interval $[-\pi, \pi]$, and in the sense of pointwise convergence on that interval.

The first of these two kinds of convergence was studied for an arbitrary series in Sect. 18.1. Making the results obtained there specific in the context of a trigonometric Fourier series involves first of all noting that the trigonometric system $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ is complete in $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$. (This has already been noted in Sect. 18.1 and will be proved independently in Subsect. 18.2.4 of the present section.)

Hence, the fundamental theorem of Sect. 18.1 enables us to say in the present case that the following theorem is true.

Theorem 1. (Mean convergence of a trigonometric Fourier series). The Fourier series (18.37) of any function $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ converges to the function in the mean (18.41), that is,

$$f(x) \underset{\mathcal{R}_2}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$$

and Parseval's equality holds:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x) dx = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \quad (18.42)$$

We shall often use the more compact complex notation for trigonometric polynomials and trigonometric series, based on the Euler formulas $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Using them, we can write the partial sum (18.40) of the Fourier series as

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (I)$$

and the series (18.37) itself as

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (r)$$

where

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & \text{if } k > 0, \\ \frac{1}{2}a_0, & \text{if } k = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & \text{if } k < 0, \end{cases} \quad (18.43)$$

that is,

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (18.44)$$

and hence the numbers c_k are simply the Fourier coefficients of f in the system $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$.

We call attention to the fact that summation of the Fourier series (18.37') is understood in the sense of the convergence of the sums (18.40').

In complex notation Theorem 1 means that for every function $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

$$f(x) \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

and

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \quad (18.45)$$

c. Pointwise Convergence of a Trigonometric Fourier Series Theorem 1 gives a complete solution to the problem of mean convergence of a Fourier series (18.37), that is, convergence in the norm of the space $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$. The remainder of this section will be mainly devoted to studying the conditions for and the nature of pointwise convergence of a trigonometric series. We shall consider only the simplest aspects of this problem. The study of pointwise convergence of a trigonometric series, as a rule, is such a delicate matter that, despite the traditional central position occupied by Fourier series after the work of Euler, Fourier, and Riemann, there is still no intrinsic description of the class of functions that can be represented by trigonometric series converging to them at every point (the Riemann problem). Until recently it was not even known whether the Fourier series of a continuous function must converge to it almost everywhere (it was known that convergence need not occur at every point). Previously A.N. Kolmogorov¹⁵ had even given an

example of a function $f \in L[-\pi, \pi]$ whose Fourier series diverged everywhere (where $L[-\pi, \pi]$ is the space of Lebesgue-integrable functions on the interval $[-\pi, \pi]$, obtainable as the metric completion of the space $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$), and D.E. Men'shov¹⁶ constructed a trigonometric series (18.32) with coefficients not all zero that nevertheless converged to zero almost everywhere (Men'shov's null-series). The problem posed by N.N. Luzin¹⁷ (Luzin's problem) of determining whether the Fourier series of every function $f \in L_2[-\pi, \pi]$ converges almost everywhere (where $L_2[-\pi, \pi]$ is the metric completion of $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$) was answered in the affirmative only in 1966 by L. Carleson.¹⁸ It follows in particular from Carleson's result that the Fourier series of every function $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ (for example a continuous function) must converge at almost all points of the closed interval $[-\pi, \pi]$.

¹⁵ A.N. Kolmogorov (1903-1987) - outstanding Soviet scholar, who worked in probability theory, mathematical statistics, theory of functions, functional analysis, topology, logic, differential equations, and applied mathematics.

10.5.2 18.2.2 Investigation of Pointwise Convergence of a Trigonometric Fourier Series

a. Integral Representation of the Partial Sum of a Fourier Series

Let us now turn our attention to the partial sum (18.40) of the Fourier series (18.37) and, using the complex notation (18.40') for the expression (18.44) for the Fourier coefficients, we make the following transformations:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) dt \end{aligned} \quad (18.46)$$

But

$$D_n(u) := \sum_{k=-n}^n e^{iku} = \frac{e^{i(n+1)u} - e^{-inu}}{e^{iu} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})u} - e^{-i(n+\frac{1}{2})u}}{e^{i\frac{1}{2}u} - e^{-i\frac{1}{2}u}}, \quad (18.47)$$

and, as can be seen from the very definition, $D_n(u) = (2n+1)$ if $e^{iu} = 1$.
Hence

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u}, \quad (18.48)$$

where the ratio is regarded as $2n+1$ when the denominator of the fraction becomes zero. Continuing the computation (18.46), we now have

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \quad (18.49)$$

We have thus represented $S_n(x)$ as the convolution of the function f with the function (18.48), which is called the Dirichlet kernel.

As can be seen from the original definition (18.47) of the function $D_n(u)$, the Dirichlet kernel is of period 2π and even, and, in addition

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) du = 1 \quad (18.50)$$

Assuming the function f is of period 2π on $\mathbb{R}$ or is extended from $[-\pi, \pi]$ to $\mathbb{R}$ so as to have period 2π , and making a change of variable in (18.49), we obtain

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t} dt \quad (18.51)$$

In carrying out the change of variable here, we used the fact that the integral of a periodic function is the same over every interval whose length equals a period.

⁰¹⁶ D.E. Men'shov (1892-1988) - Soviet mathematician, one of the greatest specialists in the theory of functions of a real variable.

¹⁷ N.N. Luzin (1883-1950) - Russian/Soviet mathematician, one of the greatest specialists in the theory of functions of a real variable, founder of the large Moscow mathematical school ("Lusitania").

¹⁸ L. Carleson (b. 1928) - outstanding Swedish mathematician whose main works are in various areas of modern analysis.

Taking account of the fact that $D_n(t)$ is an even function, we can rewrite Eq. (18.51) as

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt \end{aligned} \quad (18.52)$$

b. The Riemann-Lebesgue Lemma and the Localization Principle

The representation (18.52) for the partial sum of a trigonometric Fourier series, together with an observation of Riemann stated below, forms the basis for studying the pointwise convergence of a trigonometric Fourier series.

Lemma 1. (Riemann-Lebesgue). If a locally integrable function $f:]\omega_1, \omega_2[\rightarrow \mathbb{R}$ is absolutely integrable (perhaps in the improper sense) on an open interval $]\omega_1, \omega_2[$, then

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) e^{i\lambda x} dx \rightarrow 0 \text{ as } \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (18.53)$$

Proof. If $]\omega_1, \omega_2[$ is a finite interval and $f(x) \equiv 1$, then Eq. (18.53) can be verified by direct integration and passage to the limit.

We shall reduce the general case to this simplest one.

Fixing an arbitrary $\varepsilon > 0$, we first choose an interval $[a, b] \subset]\omega_1, \omega_2[$ such that for every $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \varepsilon \quad (18.54)$$

In view of the estimates

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &\leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) e^{i\lambda x}| dx + \int_b^{\omega_2} |f(x) e^{i\lambda x}| dx = \int_a^b |f|(x) dx + \int_b^{\omega_2} |f|(x) dx \end{aligned}$$

and the absolute integrability of f on $]\omega_1, \omega_2[$, there does of course exist such a closed interval $[a, b]$.

Since $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ (more precisely $f|_{[a, b]} \in \mathcal{R}([a, b])$), there exists a lower Darboux sum $\sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j$, where $m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$, such that

$$0 < \int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^n m_j \Delta x_j < \varepsilon$$

Now introducing the piecewise constant function $g(x) = m_j$ for $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$, we find that $g(x) \leq f(x)$ on $[a, b]$ and

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| |e^{i\lambda x}| dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx < \varepsilon \end{aligned} \quad (18.55)$$

but

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x} dx = \\
&= \frac{1}{i\lambda} \sum_{j=1}^n (m_j e^{i\lambda x}) \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \rightarrow 0 \text{ as } \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{18.56}$$

Comparing relations (18.53)-(18.56), we find what was asserted.

Remark 1. Separating the real and imaginary parts in (18.53), we find that

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) \cos \lambda x dx \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) \sin \lambda x dx \rightarrow 0 \tag{18.57}$$

as $\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{R}$. If the function f in the preceding integrals had been complex, then, separating the real and imaginary parts in them, we would have found that relations (18.57), and consequently (18.53), would actually be valid for complex-valued functions $f :]\omega_1, \omega_2[\rightarrow \mathbb{C}$.

Remark 2. If it is known that $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, then by Bessel's inequality (18.39) we can conclude immediately that

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}$. Theoretically, we could have gotten by with just this discrete version of the Riemann-Lebesgue lemma for the elementary investigations of the classical Fourier series that will be carried out here.

Returning now to the integral representation (18.52) of the partial sum of a Fourier series, we remark that if the function f satisfies the hypotheses of the Riemann-Lebesgue lemma, then, since $\sin \frac{1}{2}t \geq \sin \frac{1}{2}\delta > 0$ for $0 < \delta \leq t \leq \pi$, we can use (18.57) to write

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt + o(1) \text{ as } n \rightarrow \infty \tag{18.58}$$

The important conclusion one can deduce from (18.58) is that the convergence or divergence of a Fourier series at a point is completely determined by the behavior of the function in an arbitrarily small neighborhood of the point.

We state this principle as the following proposition.

Localization principle

Let f and g be real- or complex-valued locally integrable functions on $] -\pi, \pi[$ and absolutely integrable on the whole interval (possibly in the improper sense).

If the functions f and g are equal in any (arbitrarily small) neighborhood of the point $x_0 \in] -\pi, \pi[$, then their Fourier series

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(g) e^{ikx}$$

either both converge or both diverge at x_0 . When they converge, their limits are equal. ¹⁹

Remark 3. As can be seen from the reasoning used in deriving Eqs. (18.52) and (18.58), the point x_0 in the localization principle may also be an endpoint of the closed interval $[-\pi, \pi]$,

but then (and this is essential!) in order for the periodic extensions of the functions f and g from the closed interval $[-\pi, \pi]$ to $\mathbb{R}$ to be equal on a neighborhood of x_0 it is necessary (and sufficient) that the original functions be equal on a neighborhood of both endpoints of the closed interval $[-\pi, \pi]$.

c. Sufficient Conditions for a Fourier Series to Converge at a Point

Definition 2. A function $f : \dot{U} \rightarrow \mathbb{C}$ defined on a deleted neighborhood of a point $x \in \mathbb{R}$ satisfies the Dini conditions at x if

a) both one-sided limits

$$f(x_-) = \lim_{t \rightarrow +0} f(x - t), \quad f(x_+) = \lim_{t \rightarrow +0} f(x + t)$$

exist at x ;

b) the integral

$$\int_{+0} \frac{(f(x - t) - f(x_-)) + (f(x + t) - f(x_+))}{t} dt$$

converges absolutely.²⁰

Example

2. If f is a continuous function in $U(x)$ satisfying the Hlder condition

$$|f(x + t) - f(x)| \leq M|t|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

then, since the estimate

$$\left| \frac{f(x + t) - f(x)}{t} \right| \leq \frac{M}{|t|^{1-\alpha}}$$

now holds, the function f satisfies the Dini conditions at x .

It is also clear that if a continuous function f defined in a deleted neighborhood $\dot{U}(x)$ of x has one-sided limits $f(x_-)$ and $f(x_+)$ and satisfies one-sided Hlder conditions

$$\begin{aligned} |f(x + t) - f(x_+)| &\leq Mt^\alpha \\ |f(x - t) - f(x_-)| &\leq Mt^\alpha \end{aligned}$$

where $t > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, and M is a positive constant, then f will satisfy the Dini conditions for the same reason as above.

¹⁹ Although the limit need not be $f(x_0) = g(x_0)$.

²⁰ What is meant is that the integral $\int_0^\varepsilon$ converges absolutely for some value $\varepsilon > 0$.

Definition 3. We shall call a real- or complex-valued function f piecewisecontinuous on the closed interval $[a, b]$ if there is a finite set of points $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ in this interval such that f is defined on each interval $]x_{j-1}, x_j[$, $j = 1, \dots, n$, and has one-sided limits on approach to its endpoints.

Definition 4. A function having a piecewise-continuous derivative on a closed interval is piecewise continuously differentiable on that interval.

Example

3. If a function is piecewise continuously differentiable on a closed interval, then it satisfies the Hlder conditions with exponent $\alpha = 1$ at every point of the interval, as follows from Lagrange's finite-increment (mean-value) theorem. Hence, by Example 1, such a function satisfies Dini's conditions at every point of the interval. At the endpoints of the interval, of course only the corresponding one-sided pair of Dini's conditions needs to be verified.

Example

4. The function $f(x) = \operatorname{sgn} x$ satisfies Dini's conditions at every point $x \in \mathbb{R}$, even at zero.

Theorem 3. (Sufficient conditions for convergence of a Fourier series at a point). Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ be a function of period 2π that is absolutely integrable on the closed interval $[-\pi, \pi]$. If f satisfies the Dini conditions at a point $x \in \mathbb{R}$, then its Fourier series converges at that point, and

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} \quad (18.59)$$

Proof. By relations (18.52) and (18.50)

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(f(x-t) - f(x_-)) + (f(x+t) - f(x_+))}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \end{aligned}$$

Since $2 \sin \frac{1}{2}t \sim t$ as $t \rightarrow +0$, by the Dini conditions and the Riemann-Lebesgue lemma we see that this last integral tends to zero as $n \rightarrow \infty$.

Remark 4. In connection with the theorem just proved and the localization principle, we note that changing the value of the function at a point has no influence on the Fourier coefficients or the Fourier series or the partial sums of the Fourier series. Therefore the convergence and the sum of such a series at a point is determined not by the particular value of the function at the point, but by the integral mean of its values in an arbitrarily small neighborhood of the point. It is this fact that is reflected in Theorem 3.

Example

5. In Example 6 of Sect. 18.1 we found the Fourier series

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx \quad (18.60)$$

for the function $f(x) = x$ on the closed interval $[-\pi, \pi]$. Extending the function $f(x)$ periodically from the interval $]-\pi, \pi[$ to the whole real line, we may assume that the series (18.60) is the Fourier series of this extended function. Then, on the basis of Theorem 3 we find that

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \begin{cases} x, & \text{if } |x| < \pi \\ 0, & \text{if } |x| = \pi \end{cases}$$

In particular, for $x = \frac{\pi}{2}$ it follows from this relation that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Example

6. Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and $|\alpha| < 1$. Consider the 2π -periodic function $f(x)$ defined on the closed interval $[-\pi, \pi]$ by the formula $f(x) = \cos \alpha x$.

By formulas (18.35) and (18.36) we find its Fourier coefficients

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n \sin \pi \alpha}{\pi} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \sin nx \, dx = 0 \end{aligned}$$

By Theorem 3 the following equality holds at each point $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \pi \alpha}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right)$$

When $x = \pi$, this relation implies

$$\cot \pi \alpha - \frac{1}{\pi \alpha} = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \quad (18.61)$$

If $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1$, then $\left| \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - \alpha_0^2}$, and hence the series on the right-hand side of Eq. (18.61) converges uniformly with respect to α on every closed interval $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1$. Hence it is legitimate to integrate it termwise, that is,

$$\int_0^{\pi} \left(\cot \pi \alpha - \frac{1}{\pi \alpha} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{2\alpha \, d\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

and

$$\ln \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \Big|_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln |\alpha^2 - n^2| \Big|_0^{\pi}$$

yielding

$$\ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$$

and finally,

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \quad \text{when } |x| < 1 \quad (18.62)$$

We have thus proved relation (18.62), which we mentioned earlier when deriving the complement formula for Euler's function $\Gamma(x)$ (Sect. 17.3).

d. Fejr's Theorem.

Let us now consider the sequence of functions

$$\sigma_n(x) := \frac{S_0(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}$$

that are the arithmetic means of the corresponding partial sums $S_0(x), \dots, S_n(x)$ of the trigonometric Fourier series (18.37) of a function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ of period 2π .

From the integral representation (18.51) of the partial sum of the Fourier series we have

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \mathcal{F}_n(t) dt$$

where

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{1}{n+1} (D_0(t) + \cdots + D_n(t)).$$

Recalling the explicit form (18.48) of the Dirichlet kernel and taking account of the relation

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{1}{2}t\right)^{-1} \sum_{k=0}^n (\cos kt - \cos(k+1)t) = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{1}{2}t}$$

we find

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{(n+1) \sin^2 \frac{1}{2}t}$$

The function $\mathcal{F}_n$ is called the Fejr kernel, more precisely the n th Fejr kernel.²¹

Taking account of the original definition (18.47) of the Dirichlet kernel D_n , one can conclude that the Fejr kernel is a smooth function of period 2π whose value equals $(n+1)$ where the denominator of this last fraction equals zero.

The properties of the Fejr and Dirichlet kernels are similar in many ways, but in contrast to the Dirichlet kernel, the Fejr kernel is also nonnegative, so that we have the following lemma.

Lemma 2. The sequence of functions

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_n(x), & \text{if } |x| \leq \pi \\ 0, & \text{if } |x| > \pi \end{cases}$$

is an approximate identity on $\mathbb{R}$.

Proof. The nonnegativity of $\Delta_n(x)$ is clear.

Equality (18.50) enables us to conclude that

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{k=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Finally, for every $\delta > 0$

$$0 \leq \int_{-\infty}^{-\delta} \Delta_n(x) dx = \int_{\delta}^{+\infty} \Delta_n(x) dx = \int_{\delta}^{\pi} \Delta_n(x) dx \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2}x} \rightarrow 0$$

⁰²¹ L. Fejr (1880-1956) - well-known Hungarian mathematician.

as $n \rightarrow +\infty$.

Theorem 4. (Fejr). Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ be a function of period 2π that is absolutely integrable on the closed interval $[-\pi, \pi]$. If

a) f is uniformly continuous on the set $E \subset \mathbb{R}$, then

$$\sigma_n(x) \Rightarrow f(x) \text{ on } E \text{ as } n \rightarrow \infty;$$

b) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, then

$$\sigma_n(x) \Rightarrow f(x) \text{ on } \mathbb{R} \text{ as } n \rightarrow \infty;$$

c) f is continuous at the point $x \in \mathbb{R}$, then

$$\sigma_n(x) \rightarrow f(x) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Proof. Statements b) and c) are special cases of a).

Statement a) itself is a special case of the general Proposition 5 of Sect. 17.4 on the convergence of a convolution, since

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \mathcal{F}_n(t) dt = (f * \Delta_n)(x)$$

Corollary 1. (Weierstrass' theorem on approximation by trigonometric polynomials). If a function $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ is continuous on the closed interval $[-\pi, \pi]$ and $f(-\pi) = f(\pi)$, then this function can be approximated uniformly on the closed interval $[-\pi, \pi]$ with arbitrary precision by trigonometric polynomials.

Proof. Extending f as a function of period 2π , we obtain a continuous 2π -periodic function on $\mathbb{R}$, to which the trigonometric polynomials $\sigma_n(x)$ converge uniformly by Fejr's theorem.

Corollary 2. If f is continuous at x , its Fourier series either diverges at x or converges to $f(x)$.

Proof. Only the case of convergence requires formal verification. If the sequence $S_n(x)$ has a limit as $n \rightarrow \infty$, then the sequence $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}$ has that same limit. But by Fejr's theorem $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ as $n \rightarrow \infty$, and hence $S_n(x) \rightarrow f(x)$ also whenever the limit $S_n(x)$ exists as $n \rightarrow \infty$.

Remark 5. We note that the Fourier series of a continuous function really can diverge at some points.

10.5.3 18.2.3 Smoothness of a Function and the Rate of Decrease of the Fourier Coefficients

a. An Estimate of the Fourier Coefficients of a Smooth Function

We begin with a simple, yet important and useful lemma.

Lemma 3. (Differentiation of a Fourier series). If a continuous function $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ assuming equal values at the endpoints of the closed interval $[-\pi, \pi]$ is piecewise continuously differentiable on $[-\pi, \pi]$, then the Fourier series of its derivative

$$f' \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f') e^{ikx}$$

can be obtained by differentiating formally the Fourier series

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

of the function itself, that is,

$$c_k(f') = ikc_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (18.63)$$

Proof. Starting from the definition of the Fourier coefficients (18.44), we find through integration by parts that

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = ikc_k(f),$$

since $f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi} = 0$.

Proposition 1.

(Connection between smoothness of a function and the rate of decrease of its Fourier coefficients). Let $f \in C^{(m-1)}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ and $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. If the function f has a piecewisecontinuous derivative $f^{(m)}$ of order m on the closed interval $[-\pi, \pi]$, then

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (18.64)$$

and

$$|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{|k|^m} = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \text{ as } k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (18.65)$$

moreover, $\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$.

Proof. Relation (18.64) follows from an m -fold application of Eq. (18.63):

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)c_k(f^{(m-1)}) = \dots = (ik)^m c_k(f)$$

Setting $\gamma_k = |c_k(f^{(m)})|$ and using Bessel's inequality

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f^{(m)})|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}|^2(x) dx$$

we obtain (18.65) from (18.64).

Remark 6. In the proposition just proved, as in Lemma 3, instead of assuming the conditions $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, we could have assumed that f is a function of period 2π on the entire line.

Remark 7. If a trigonometric Fourier series were written in the form (18.37), rather than in the complex form (18.37'), it would be necessary to replace the simple relations (18.64) by noticeably more cumbersome equalities, whose meaning, however, would be the same: under these hypotheses a Fourier series can be differentiated termwise whichever from it is written in, (18.37) or (18.37'). As for the estimates of the Fourier coefficients, $a_k(f)$ and $b_k(f)$ of (18.37), since $a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f)$ and $b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f))$, (see formulas (18.43)) it follows from (18.65) that if a function f satisfies the hypotheses of the proposition, then

$$|a_k(f)| = \frac{\alpha_k}{k^m}, \quad |b_k(f)| = \frac{\beta_k}{k^m}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (18.64')$$

where $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ and $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, and we can assume that $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$.

b. Smoothness of a Function and the Rate of Convergence of its Fourier Series

Theorem 5. If the function $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ is such that

- a) $f \in C^{(m-1)}[-\pi, \pi]$, $m \in \mathbb{N}$,
- b) $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$,

c) f has a piecewise continuous m th derivative $f^{(m)}$ on $[-\pi, \pi]$, $m \geq 1$, then the Fourier series of f converges absolutely and uniformly on $[-\pi, \pi]$ to f , and the deviation of the n th partial sum $S_n(x)$ of the Fourier series from $f(x)$ has the following estimate on the entire interval:

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}$$

where $\{\varepsilon_n\}$ is a sequence of positive numbers tending to zero.

Proof. We write the partial sum (18.40) of the Fourier series in the compact notation (18.40'):

$$S_n(x) = \sum_{-n}^n c_k(f) e^{ikx}$$

According to the assumptions on the function f and Proposition 1 we have $|c_k(f)| = \gamma_k/|k|^m$, and $\sum \gamma_k/|k|^m < \infty$: since $0 \leq \gamma_k/|k|^m \leq \frac{1}{2}(\gamma_k^2 + 1/k^{2m})$ and $m \geq 1$, we have $\sum \gamma_k/|k|^m < \infty$. Hence the sequence $S_n(x)$ converges uniformly on $[-\pi, \pi]$ (by the Weierstrass M -test for series and the Cauchy criterion for sequences).

By Theorem 3 the limit $S(x)$ of $S_n(x)$ equals $f(x)$, since the function f satisfies the Dini conditions at each point of the closed interval $[-\pi, \pi]$ (see Example 3). And, since $f(-\pi) = f(\pi)$, the function f can be extended to $\mathbb{R}$ as a periodic function with the Dini conditions holding at each point $x \in \mathbb{R}$.

Now, using relation (18.63), we can proceed to obtain an estimate:

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(x)| &= |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{\pm k=n+1}^{\infty} c_k(f) e^{ikx} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\pm k=n+1}^{\infty} |c_k(f)| = \sum_{\pm k=n+1}^{\infty} \gamma_k/|k|^m \leq \\ &\leq \left(\sum_{\pm k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\pm k=n+1}^{\infty} 1/k^{2m} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

The first factor on the right-hand side of the Cauchy-Bunyakovskii inequality here tends to zero as $n \rightarrow \infty$, since $\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$.

Next (see Fig. 18.2)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k^{2m} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}}$$

We thus obtain the assertion of Theorem 5.

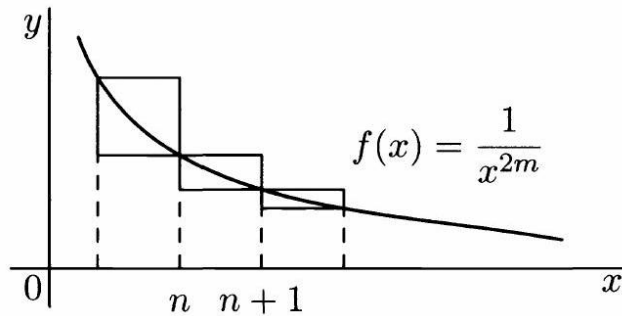


Fig. 18.2.

In connection with these results we now make a number of useful remarks.

Remark 8. One can now easily obtain again the Weierstrass approximation theorem stated in Corollary 1 from Theorem 5 (and Theorem 3, of which essential use was made in the proof of Theorem 5), independently of Fejér's theorem.

Proof. It suffices to prove this result for real-valued functions. Using the uniform continuity of f on $[-\pi, \pi]$, we approximate f on this closed interval uniformly within $\varepsilon/2$ by a piecewise-linear continuous function $\varphi(x)$ assuming the same values as f at the endpoints, that is, $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = f(\pi)$ (Fig. 18.3). By Theorem 5 the Fourier series of φ converges to φ uniformly on the closed interval $[-\pi, \pi]$. Taking a partial sum of this series that dif-

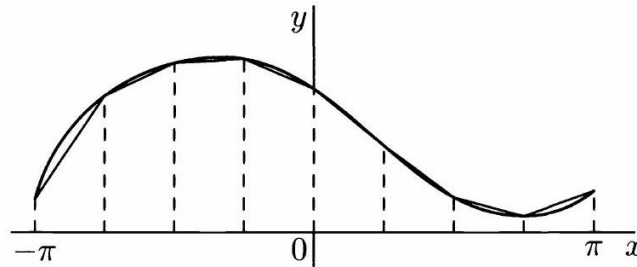


Fig. 18.3.

fers from $\varphi(x)$ by less than $\varepsilon/2$, we obtain a trigonometric polynomial that approximates the original function f within ε on the whole interval $[-\pi, \pi]$.

Remark 9. Let us assume that we have succeeded in representing a function f having a jump singularity as the sum $f = \varphi + \psi$ of a certain smooth function ψ and a simple function φ having the same singularity as f (Fig. 18.4 a, c, b). Then the Fourier series of f is the sum of the Fourier series of ψ , which converges rapidly and uniformly by Theorem 5, and the Fourier series of the function φ . The latter can be regarded as known, if we take the standard function φ (shown in the figure as $\varphi(x) = -\pi - x$ for $-\pi < x < 0$ and $\varphi(x) = \pi - x$ for $0 < x < \pi$).

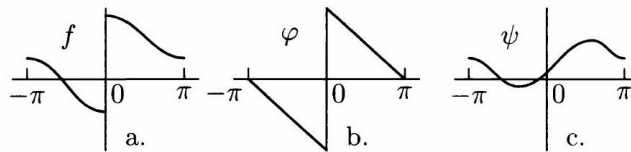


Fig. 18.4.

This observation can be used both in theoretical and computational problems connected with series (it is Krylov's ²² method of separating singularities and improving the convergence of series) and in the theory of trigonometric Fourier series itself (see for example the Gibbs ²³ phenomenon, described below in Problem 11).

Remark 10. (Integration of a Fourier series). By Theorem 5 we can state and prove the following complement to Lemma 3 on differentiation of a Fourier series.

Proposition 2.

If the function $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ is piecewise continuous, then after integration the correspondence $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$ becomes the equality

$$\int_0^x f(t) dt = c_0(f)x + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_k(f)}{ik} (e^{ikx} - 1)$$

²² A.N. Krylov (1863-1945) - Russian/Soviet specialist in mechanics and mathematics, who made a large contribution to computational mathematics, especially in methods of computing the elements of ships.

²³ J.W. Gibbs (1839-1903) - American physicist and mathematician, one of the founders of thermodynamics and statistical mechanics.

where the prime indicates that the term with index $k = 0$ is omitted from the sum; the summation is the limit of the symmetric partial sums $\sum_{-n}^n$, and the series converges uniformly on the closed interval $[-\pi, \pi]$.

Proof. Consider the auxiliary function

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - c_0(f)x$$

on the interval $[-\pi, \pi]$. Obviously $F \in C[-\pi, \pi]$. Also $F(-\pi) = F(\pi)$, since

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - 2\pi c_0(f) = 0$$

as follows from the definition of $c_0(f)$. Since the derivative $F'(x) = f(x) - c_0(f)$ of the function F is piecewise continuous, its Fourier series $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$ converges uniformly to F on the interval $[-\pi, \pi]$ by Theorem 5. By Lemma 3 we have $c_k(F) = \frac{c_k(F')}{ik}$ for $k \neq 0$. But $c_k(F') = c_k(F)$ if $k \neq 0$. Now writing the equality $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$ in terms of the function f and noting that $F(0) = 0$, we obtain the assertion of the proposition.

10.5.4 18.2.4 Completeness of the Trigonometric System

a. The Completeness Theorem

In conclusion we return once again from pointwise convergence of the Fourier series to its mean convergence (18.41). More precisely, using the facts we have accumulated on the nature of pointwise convergence of the Fourier series, we now give a proof of the completeness of the trigonometric system $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ independent of the proof already given in the problems. In doing so, as in Subsect. 18.2.1, we take $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ or $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ to mean the vector space of real- or complex-valued functions that are locally integrable on $] -\pi, \pi[$ and whose squared absolute values are integrable on $] -\pi, \pi[$ (possibly in the improper sense). This vector space is assumed to be endowed with the standard inner product (18.38) generating the norm in terms of which convergence is mean convergence (18.41).

The theorem we are about to prove asserts simply that the system of trigonometric functions is complete in $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. But we shall state the theorem in such a way that the statement itself will contain the key to the proof. It is based on the obvious fact that the property of completeness is transitive: if A approximates B and B approximates C , then A approximates C .

Theorem 6. (Completeness of the trigonometric system). Every function $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ can be approximated arbitrarily closely in mean

- by functions of compact support in $] -\pi, \pi[$ that are Riemann integrable over the closed interval $[-\pi, \pi]$;
- by piecewise-constant functions of compact support on the closed interval $[-\pi, \pi]$;
- by piecewise-linear continuous functions of compact support on the closed interval $[-\pi, \pi]$;
- by trigonometric polynomials.

Proof. Since it obviously suffices to prove the theorem for real-valued functions, we confine ourselves to this case.

- It follows from the definition of the improper integral that

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} f^2(x)dx$$

Hence, for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that the function

$$f_{\delta}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } |x| < \pi - \delta \\ 0 & \text{if } \pi - \delta \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

will differ in mean from f on $[-\pi, \pi]$ by less than ε , since

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f - f_{\delta})^2(x) dx = \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} f^2(x) dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} f^2(x) dx$$

b) It suffices to verify that every function of the form f_{δ} can be approximated in $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ by piecewise-constant functions of compact support in $[-\pi, \pi]$. But the function f_{δ} is Riemann-integrable on $[-\pi + \delta, \pi - \delta]$. Hence it is bounded there by a constant M and moreover there exists a partition $-\pi + \delta = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi - \delta$ of this closed interval such that the corresponding lower Darboux sum $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ of the function f_{δ} differs from the integral of f_{δ} over $[-\pi + \delta, \pi - \delta]$ by less than $\varepsilon > 0$.

Now setting

$$g(x) = \begin{cases} m_i, & \text{if } x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad i = 1, \dots, n, \\ 0, & \text{at all other points of } [-\pi, \pi], \end{cases}$$

we obtain

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_{\delta} - g)^2(x) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f_{\delta} - g| \left(|f_{\delta} + g| \right) (x) dx \leq 2M \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} (f_{\delta} - g)(x) dx \leq 2M\varepsilon$$

and hence f_{δ} really can be approximated arbitrarily closely in the mean on $[-\pi, \pi]$ by piecewise-constant functions on the interval that vanish in a neighborhood of the endpoints of the interval.

c) It now suffices to learn how to approximate the functions in b) in mean. Let g be such a function. All of its points of discontinuity $x_1, \dots, x_n$ lie in the open interval $] - \pi, \pi[$. There are only finitely many of them, so that for every $\varepsilon > 0$ one can choose $\delta > 0$ so small that the δ -neighborhoods of the points $x_1, \dots, x_n$ are disjoint and contained strictly inside the interval $] - \pi, \pi[$, and $2\delta nM < \varepsilon$, where $M = \sup_{|x| \leq \pi} |g(x)|$. Now replacing the function g on $[x_i - \delta, x_i + \delta]$, $i = 1, \dots, n$, by the linear interpolation between the values $g(x_i - \delta)$ and $g(x_i + \delta)$ that g assumes at the endpoints of this interval, we obtain a piecewise linear continuous function g_{δ} that is of compact support in $[-\pi, \pi]$. By construction $|g_{\delta}(x)| \leq M$ on $[-\pi, \pi]$, so that

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (g - g_{\delta})^2(x) dx &\leq 2M \int_{-\pi}^{\pi} |g - g_{\delta}|(x) dx = \\ &= 2M \sum_{i=1}^n \int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} |g - g_{\delta}|(x) dx \leq 2M \cdot (2M \cdot 2\delta) \cdot n < 4M\varepsilon \end{aligned}$$

and the possibility of the approximation is now proved.

d) It remains only to show that one can approximate any function of class c) in mean on $[-\pi, \pi]$ by a trigonometric polynomial. But for every $\varepsilon > 0$ and every function of type g_{δ} , Theorem 5 enables us to find a trigonometric polynomial T_n that approximates g_{δ} uniformly within ε on the closed interval $[-\pi, \pi]$. Hence $\int_{-\pi}^{\pi} (g_{\delta} - T_n)^2 dx < 2\pi\varepsilon^2$, and the possibility of an arbitrarily precise approximation in mean by trigonometric polynomials on $[-\pi, \pi]$ for any function of class c) is now established.

By the triangle inequality in $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ we now conclude that all of Theorem 6 on the completeness of these classes in $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ is also proved.

b. The Inner Product and Parseval's Equality

Now that the completeness of the trigonometric system in $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ has been proved, we can use Theorem 1 to assert that

$$f = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \quad (18.66)$$

for every function $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, or, in complex notation,

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx} \quad (18.67)$$

where the convergence is understood as convergence in the norm of $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, that is, as mean convergence, and the limiting passage in (18.67) is the limit of sums of the form $S_n(x) = \sum_{-n}^n c_k(f) e^{ikx}$ as $n \rightarrow \infty$.

If we rewrite Eqs. (18.66) and (18.67) as

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} f = \frac{a_0(f)}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + b_k(f) \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad (r)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad (r')$$

then the right-hand sides contain series in the orthonormal systems

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx; k \in \mathbb{N} \right\}$$

and $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Hence by the general rule for computing the inner product of vectors from their coordinates in an orthonormal basis, we can assert that the equality

$$\frac{1}{\pi} \langle f, g \rangle = \frac{a_0(f) \bar{a}_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \bar{a}_k(g) + b_k(f) \bar{b}_k(g) \quad (18.68)$$

holds for functions f and g in $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, or, in other notation,

$$\frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) \bar{c}_k(g), \quad (18.69)$$

where, as always,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{g}(x) dx$$

In particular, if $f = g$, we obtain the classical Parseval equality from (18.68) and (18.69) in two equivalent forms:

$$\frac{1}{\pi} \|f\|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \quad (18.70)$$

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \quad (18.71)$$

We have already noted that from the geometric point of view Parseval's equality can be regarded as an infinite-dimensional version of the Pythagorean theorem.

Parseval's relation provides the basis for the following useful proposition.

Uniqueness of Fourier series

Let f and g be two functions in $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$. Then

a) if the trigonometric series

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad \left(= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \right)$$

converges in mean to f on the interval $[-\pi, \pi]$ it is the Fourier series of f ;

b) if the functions f and g have the same Fourier series, they are equal almost everywhere on $[-\pi, \pi]$, that is, $f = g$ in $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$.

Proof. Assertion a) is actually a special case of the general fact that the expansion of a vector in an orthogonal system is unique. The inner product, as we know (see Lemma 1b) shows immediately that the coefficients of such an expansion are the Fourier coefficients and no others.

Assertion b) can be obtained from Parseval's equality taking account of the completeness of the trigonometric system in $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, which was just proved.

Since the difference $(f - g)$ has a zero Fourier series, it follows from Parseval's equality that $\|f - g\|_{\mathcal{R}_2} = 0$. Hence the functions f and g are equal at all points of continuity, that is, almost everywhere.

Remark 11. When studying Taylor series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$ we noted previously that different functions of class $C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ can have the same Taylor series (at some points $a \in \mathbb{R}$). This contrast with the uniqueness theorem just proved for the Fourier series should not be taken too seriously, since every uniqueness theorem is a relative one in the sense that it involves a particular space and a particular type of convergence.

For example, in the space of analytic functions (that is, functions that can be represented as power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converging to them pointwise), two different functions have distinct Taylor series about every point.

If, in turn, in studying trigonometric series we abandon the space $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ and study pointwise convergence of a trigonometric series, then, as already noted (p. 531) one can construct a trigonometric series not all of whose coefficients are zero, which nevertheless converges to zero almost everywhere. According to Proposition 3 such a null-series of course does not converge to zero in the mean-square sense.

In conclusion, we illustrate the use of the properties of trigonometric Fourier series obtained here by studying the following derivation, due to Hurwitz,²⁴ of the classical isoperimetric inequality in the two-dimensional case. In order to avoid cumbersome expressions and accidental technical difficulties, we shall use complex notation.

Example

7. Between the volume V of a domain in the Euclidean space E^n , $n \geq 2$, and the $(n - 1)$ -dimensional surface area F of the hypersurface that bounds it, the following relation holds:

$$n^n v_n V^{n-1} \leq F^n, \quad (18.72)$$

called the isoperimetric inequality. Here v_n is the volume of the n -dimensional unit ball in E^n . Equality in the isoperimetric inequality (18.72) holds only for the ball.

The name "isoperimetric" comes from the classical problem of finding the closed plane curve of a given length L that encloses the largest area S . In this case inequality (18.72) means that

$$4\pi S \leq L^2 \quad (18.73)$$

It is this inequality that we shall now prove, assuming that the curve in question is smooth and is defined parametrically as $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, where s is arc length along the curve and φ and ψ belong to $C^{(1)}[0, L]$. The condition that the curve be closed means that $\varphi(0) = \varphi(L)$ and $\psi(0) = \psi(L)$.

We now pass from the parameter s to the parameter $t = 2\pi \frac{s}{L} - \pi$, which ranges from $-\pi$ to π , and we shall assume that our curve is defined parametrically as

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi, \quad (18.74)$$

with

$$x(-\pi) = x(\pi), \quad y(-\pi) = y(\pi) \quad (18.75)$$

We write (18.74) as a single complex-valued function

$$z = z(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi, \quad (18.74')$$

where $z(t) = x(t) + iy(t)$ and by (18.75) $z(-\pi) = z(\pi)$.

We remark that

$$|z'(t)|^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

and hence under our choice of parameter

$$|z'(t)|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \quad (18.76)$$

Next, taking into account the relations $\bar{z}z' = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - x'y)$, and using Eqs. (18.75), we write the formula for the area of the region bounded by the closed curve (18.74):

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (xy' - yx') (t) dt = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} z'(t) \bar{z}(t) dt \quad (18.77)$$

We now write the Fourier series expansion of the function (18.74'):

$$z(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

Then

$$z'(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikt}$$

Equalities (18.76) and (18.77) mean in particular that

$$\frac{1}{2\pi} \|z'\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2 dt = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

and

⁰²⁴ A. Hurwitz (1859-1919) - German mathematician, a student of F. Klein.

$$\frac{1}{2\pi} \langle z', z \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z'(t) \bar{z}(t) dt = \frac{i}{\pi} S$$

In terms of Fourier coefficients, as follows from Eqs. (18.69) and (18.71), these relations assume the form

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |kc_k|^2$$

$$S = \pi \sum_{-\infty}^{\infty} kc_k \bar{c}_k$$

Thus,

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} (k^2 - k) |c_k|^2$$

The right-hand side of this equality is obviously nonnegative and vanishes only if $c_k = 0$ for all $k \in \mathbb{Z}$ except $k = 0$ and $k = 1$.

Thus, inequality (18.73) is proved, and at the same time we have found the equation

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it}, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

of the curve for which it becomes equality. This is the complex form of the parametric equation of a circle with center at c_0 in the complex plane and radius $|c_1|$.

10.5.5 18.2.5 Problems and Exercises

3.y.1

a) Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \text{ for } 0 < x < 2\pi$$

and find the sum of the series at all other points of $\mathbb{R}$.

Using the preceding expansion and the rules for operating with trigonometric Fourier series, now show that the following equalities are true.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ for $0 < x < \pi$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ for $0 < x < \pi$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = \frac{x}{2}$ for $|x| < \pi$.

e) $x^2 = \frac{\pi}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$ for $|x| < \pi$.

f) $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ for $0 \leq x \leq \pi$.

g) $\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ for $0 \leq x \leq \pi$.

h) Sketch the graph of the sums of the trigonometric series here over the entire real line $\mathbb{R}$.

Using the results obtained, find the sums of the following numerical series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

3.y.2

Show that:

- if $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ is an odd (resp. even) function, then its Fourier coefficients have the following property: $a_k(f) = 0$ (resp. $b_k(f) = 0$) for $k = 0, 1, 2, \dots$;
- if $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ has period $2\pi/m$ then its Fourier coefficients $c_k(f)$ can be nonzero only when k is a multiple of m ;
- if $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ is real-valued, then $c_k(f) = \bar{c}_{-k}(f)$ for all $k \in \mathbb{N}$;
- $|a_k(f)| \leq 2 \sup_{|x| < \pi} |f(x)|$, $|b_k(f)| \leq 2 \sup_{|x| < \pi} |f(x)|$, $|c_k(f)| \leq \sup_{|x| < \pi} |f(x)|$.

3.y.3

- Show that each of the systems $\{\cos kx; k = 0, 1, \dots\}$ and $\{\sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ is complete in the space $\mathcal{R}_2[a, a + \pi]$ for any value of $a \in \mathbb{R}$.
- Expand the function $f(x) = x$ in the interval $[0, \pi]$ with respect to each of these two systems.
- Draw the graphs of the sums of the series just found over the entire real line.
- Exhibit the trigonometric Fourier series of the function $f(x) = |x|$ on the closed interval $[-\pi, \pi]$ and determine whether it converges uniformly to this function on the entire closed interval $[-\pi, \pi]$.

3.y.4

The Fourier series $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikt}$ of a function f can be regarded as a special case of a power series $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$ ($= \sum_{-\infty}^{-1} c_k z^k + \sum_0^{\infty} c_k z^k$), in which z is restricted to the unit circle in the complex plane, that is, $z = e^{it}$.

Show that if the Fourier coefficients $c_k(f)$ of the function $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ vanish so rapidly that $\lim_{k \rightarrow -\infty} |c_k(f)|^{1/k} = c_- > 1$ and $\lim_{k \rightarrow +\infty} |c_k(f)|^{1/k} = c_+ < 1$, then

- the function f can be regarded as the image of the unit circle under a function represented in the annulus $c_-^{-1} < |z| < c_+^{-1}$ by the series $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$;
- for $z = x + iy$ and $\ln \frac{1}{c_-} < y < \ln \frac{1}{c_+}$ the series $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$ converges absolutely (and, in particular, its sum is independent of the order of summation of the terms).
- in any strip of the complex plane defined by the conditions $a \leq \operatorname{Im} z \leq b$, where $\ln \frac{1}{c_-} < a < b < \ln \frac{1}{c_+}$, the series $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$ converges absolutely and uniformly;
- using the expansion $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$ and Euler's formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, show that

$$1 + \frac{\cos x}{1!} + \dots + \frac{\cos nx}{n!} + \dots = e^{\cos x} \cos(\sin x)$$

$$\frac{\sin x}{1!} + \dots + \frac{\sin nx}{n!} + \dots = e^{\cos x} \sin(\sin x)$$

- using the expansions $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$ and $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$, verify that

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)!} = \sin(\cos x) \cosh(\sin x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)!} = \sin(\cos x) \sinh(\sin x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2nx}{(2n)!} = \cos(\cos x) \cosh(\sin x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2nx}{(2n)!} = \cos(\cos x) \sinh(\sin x)$$

3.y.5

Verify that

- a) the systems $\{1, \cos k \frac{2\pi}{T}x, \sin k \frac{2\pi}{T}x; k \in \mathbb{N}\}$ and $\{e^{ik \frac{2\pi}{T}x}; k \in \mathbb{Z}\}$ are orthogonal in the space $\mathcal{R}_2([a, a+T], \mathbb{C})$ for every $a \in \mathbb{R}$;
 b) the Fourier coefficients $a_k(f)$, $b_k(f)$, and $c_k(f)$ of a T -periodic function f in these systems are the same whether the Fourier expansion is done on the interval $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ or any other closed interval of the form $[a, a+T]$;
 c) if $c_k(f)$ and $c_k(g)$ are the Fourier coefficients of T -periodic functions f and g , then

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) \bar{g}(x) dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) \bar{c}_k(g);$$

- d) the Fourier coefficients $c_k(h)$ normalized by the factor $\frac{1}{T}$ of the "convolution"

$$h(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x-t)g(t)dt$$

of T -periodic smooth functions f and g and the coefficients $c_k(f)$ and $c_k(g)$ of the functions themselves are related by $c_k(h) = c_k(f)c_k(g)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.y.6

Prove that if α is incommensurable with π , then

- a) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{ik(x+n\alpha)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt$;
 b) for every continuous 2π -periodic function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x+n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

3.y.7

Prove the following propositions.

- a) If the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is absolutely integrable on $\mathbb{R}$, then

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x) \right| dx.$$

- b) If the functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ and $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ are absolutely integrable on $\mathbb{R}$ and g is bounded in absolute value on $\mathbb{R}$, then

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)g(t)e^{i\lambda t} dt =: \varphi_{\lambda}(x) \Rightarrow 0 \text{ on } \mathbb{R} \text{ as } \lambda \rightarrow \infty$$

- c) If $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is a 2π -periodic function that is absolutely integrable over a period, then the remainder $S_n(x) - f(x)$ of its trigonometric Fourier series can be represented as

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\Delta^2 f)(x, t) D_n(t) dt$$

where D_n is the n th Dirichlet kernel, and $(\Delta^2 f)(x, t) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)$.

- d) For every $\delta \in]0, \pi[$ the formula for the remainder just obtained can be brought into the form

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin nt}{t} (\Delta^2 f)(x, t) dt + o(1)$$

where $o(1)$ tends to zero as $n \rightarrow \infty$, and uniformly on each closed interval $[a, b]$ on which f is bounded.

e) If the function $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ satisfies the Hlder condition $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha$ on $[-\pi, \pi]$ (where M and α are positive numbers) and in addition $f(-\pi) = f(\pi)$, then the Fourier series of f converges to it uniformly on the entire interval.

3.y.8.

a) Prove that if $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a 2π -periodic function having a piecewise continuous derivative $f^{(m)}$ of order $m(m \in \mathbb{N})$, then f can be represented as

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_m(t-x) f^{(m)}(t) dt$$

where $B_m(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(ku + \frac{m\pi}{2})}{k^m}$, $m \in \mathbb{N}$.

b) Using the Fourier series expansion obtained in Problem 1 for the function $\frac{\pi-x}{2}$ on the interval $[0, 2\pi]$, prove that $B_1(u)$ is a polynomial of degree 1 and $B_m(u)$ is a polynomial of degree m on the interval $[0, 2\pi]$. These polynomials are called the Bernoulli polynomials.

c) Verify that $\int_0^{2\pi} B_m(u) du = 0$ for every $m \in \mathbb{N}$.

3.y.9.

a) Let $x_m = \frac{2\pi m}{2n+1}$, $m = 0, 1, \dots, 2n$. Verify that

$$\begin{aligned} \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{2n} \cos kx_m \cos lx_m &= \delta_{kl} \\ \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{2n} \sin kx_m \sin lx_m &= \delta_{kl} \\ \sum_{m=0}^{2n} \sin kx_m \cos lx_m &= 0 \end{aligned}$$

where k and l are nonnegative integers, $\delta_{kl} = 0$ for $k \neq l$, and $\delta_{kl} = 1$ for $k = l$.

b) Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a 2π -periodic function that is absolutely integrable over a period. Let us partition the closed interval $[0, 2\pi]$ into $2n+1$ equal parts by the points $x_m = \frac{2\pi m}{2n+1}$, $m = 0, 1, \dots, 2n$. Let us compute the integrals

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

approximately using the rectangular method corresponding to this partition of the interval $[0, 2\pi]$. We obtain the quantities

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k(f) &= \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{2n} f(x_m) \cos kx_m \\ \tilde{b}_k(f) &= \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{2n} f(x_m) \sin kx_m \end{aligned}$$

which we place in the n th partial sum $S_n(f, x)$ of the Fourier series of f instead of the respective coefficients $a_k(f)$ and $b_k(f)$.

Prove that when this is done the result is a trigonometric polynomial $\tilde{S}_n(f, x)$ of order n that interpolates the function f at the nodes $x_m, m = 0, 1, \dots, 2n$, that is, at these points $f(x_m) = \tilde{S}_n(x, m)$.

3.y.10.

a) Suppose the function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and piecewise differentiable, and suppose that the square of its derivative f' is integrable over the interval $]a, b[$. Using Parseval's equality, prove the following:

a) if $[a, b] = [0, \pi]$, then either of the conditions $f(0) = f(\pi) = 0$ or $\int_0^\pi f(x) dx = 0$ implies Steklov's inequality

$$\int_0^\pi f^2(x) dx \leq \int_0^\pi (f')^2(x) dx$$

in which equality is possible only for $f(x) = a \cos x$;

b) if $[a, b] = [-\pi, \pi]$ and the conditions $f(-\pi) = f(\pi)$ and $\int_{-\pi}^\pi f(x) dx = 0$ both hold, then Wirtinger's inequality holds:

$$\int_{-\pi}^\pi f^2(x) dx \leq \int_{-\pi}^\pi (f')^2(x) dx$$

where equality is possible only if $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

3.y.11.

The Gibbs phenomenon is the behavioral property of the partial sums of a trigonometric Fourier series described below, first observed by Wilbraham (1848) and later (1898) rediscovered by Gibbs (Mathematical Encyclopedia, Vol. 1, Moscow, 1977).

a) Show that

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \text{ for } |x| < \pi.$$

b) Verify that the function $S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ has a maximum at $x = \frac{\pi}{2n}$ and that as $n \rightarrow \infty$

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}}{(2k-1)\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{n} \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.179$$

Thus the oscillation of $S_n(x)$ near $x = 0$ as $n \rightarrow \infty$ exceeds the jump of the function $\operatorname{sgn} x$ itself at that point by approximately 18% (the jump of $S_n(x)$ "due to inertia").

c) Describe the limit of the graphs of the functions $S_n(x)$ in problem b).

Now suppose that $S_n(f, x)$ is the n th partial sum of the trigonometric Fourier series of a function f and suppose that $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ in a deleted neighborhood $0 < |x - \xi| < \delta$ of the point ξ as $n \rightarrow \infty$ and that f has one-sided limits $f(\xi_-)$ and $f(\xi_+)$ at ξ . For definiteness we shall assume that $f(\xi_-) \leq f(\xi_+)$.

We say that Gibbs' phenomenon occurs for the sums $S_n(f, x)$ at the point ξ if $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) < f(\xi_-) \leq f(\xi_+) < \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x)$.

d) Using Remark 9 show that Gibbs' phenomenon occurs at the point ξ for every function of the form $\varphi(x) + c \operatorname{sgn}(x - \xi)$, where $c \neq 0$, $|\xi| < \pi$, and $\varphi \in C^{(1)}[-\pi, \pi]$.

3.y.12.

Multiple trigonometric Fourier series. a) Verify that the system of functions $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx}$, where $k = (k_1, \dots, k_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $kx = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$, and $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, is orthonormal on any n -dimensional cube $I = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j \leq x_j \leq a_j + 2\pi, j = 1, 2, \dots, n\}$.

b) To a function f that is integrable over I we assign the sum $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$, which is called the Fourier series of f in the system $\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} \right\}$, if $c_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_I f(x) e^{-ikx} dx$. The numbers $c_k(f)$ are called the Fourier coefficients of f in the system $\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} \right\}$.

In the multidimensional case the Fourier series is often summed via the partial sums

$$S_N(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k(f) e^{ikx}$$

where $|k| \leq N$ means that $N = (N_1, \dots, N_n)$ and $|k_j| \leq N_j, j = 1, \dots, n$.

Show that for every function $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ that is 2π -periodic in each variable $S_n(x) = \frac{1}{\pi^n} \int_I \prod_{j=1}^n D_{N_j}(t_j - x_j) f(t) dt = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f(t - x) \prod_{j=1}^n D_{N_j}(t_j) dt_1 \dots dt_n$, where $D_{N_j}(u)$ is the N_j th one-dimensional Dirichlet kernel.

c) Show that the Fejr sum

$$\sigma_N(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(x) = \frac{1}{(N_1+1) \cdot \dots \cdot (N_n+1)} \sum_{k_1=0}^{N_1} \dots \sum_{k_n=0}^{N_n} S_{k_1 \dots k_n}(x)$$

of a function $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ that is 2π -periodic in each variable can be represented as

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi^n} \int_I f(t - x) \Phi_N(t) dt$$

where $\Phi_N(u) = \prod_{j=1}^n \mathcal{F}_{N_j}(u_j)$ and $\mathcal{F}_{N_j}$ is the N_j th one-dimensional Fejr kernel.

d) Now extend Fejer's theorem to the n -dimensional case.

e) Show that if a function f that is 2π -periodic in each variable is absolutely integrable over a period I , possibly in the improper sense, then $\int_I |f(x+u) - f(x)| dx \rightarrow 0$ as $u \rightarrow 0$ and $\int_I |f - \sigma_N|(x) dx \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$.

f) Prove that two functions f and g that are absolutely integrable over the cube I can have equal Fourier series (that is, $c_k(f) = c_k(g)$ for every multi-index k) only if $f(x) = g(x)$ almost everywhere on I . This is a strengthening of Proposition 3 on uniqueness of Fourier series.

g) Verify that the original orthonormal system $\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx} \right\}$ is complete in $\mathcal{R}_2(I)$, so that the Fourier series of every function $f \in \mathcal{R}_2(I)$ converges to f in the mean on I .

h) Let f be a function in $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ of period 2π in each variable. Verify that $c_k(f^{(\alpha)}) = i^{|\alpha|} k^\alpha c_k(f)$, where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$, $k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot k_n^{\alpha_n}$, and α_j are nonnegative integers.

i) Let f be a function of class $C^{(mn)}(\mathbb{R}^n)$ of period 2π in each variable. Show that if the estimate

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_I |f^{(\alpha)}|^2(x) dx \leq M^2$$

holds for each multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ such that α_j is 0 or m (for every $j = 1, \dots, n$), then

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{CM}{N^{m-\frac{1}{2}}}$$

where $\underline{N} = \min \{N_1, \dots, N_n\}$ and C is a constant depending on m but not on N or $x \in I$.

j) Notice that if a sequence of continuous functions converges in mean on the interval I to a function f and simultaneously converges uniformly to φ , then $f(x) = \varphi(x)$ on I .

Using this observation, prove that if a function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ of period 2π in each variable belongs to $C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, then the trigonometric Fourier series of f converges to f uniformly on the entire space $\mathbb{R}^n$.

3.y.13.

Fourier series of generalized functions. Every 2π -periodic function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ can be regarded as a function $f(s)$ of a point on the unit circle Γ (the point is fixed by the value of the arc-length parameter s , $0 \leq s \leq 2\pi$).

Preserving the notation of Sect. 17.4, we consider the space $\mathcal{D}(\Gamma)$ on Γ consisting of functions in $C^{(\infty)}(\Gamma)$ and the space $\mathcal{D}'(\Gamma)$ of generalized functions, that is, continuous linear functionals on $\mathcal{D}(\Gamma)$. The value of the functional $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ on the function $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ will be denoted $F(\varphi)$, so as to avoid the symbol $\langle F, \varphi \rangle$ used in the present chapter to denote the Hermitian inner product (18.38).

Each function f that is integrable on Γ can be regarded as an element of $\mathcal{D}'(\Gamma)$ (a regular generalized function) acting on the function $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ according to the formula

$$f(\varphi) = \int_0^{2\pi} f(s)\varphi(s)ds$$

Convergence of a sequence $\{F_n\}$ of generalized functions in $\mathcal{D}'(\Gamma)$ to a generalized function $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, as usual, means that for every function $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = F(\varphi)$$

a) Using the fact that by Theorem 5 the relation $\varphi(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\varphi)e^{iks}$ holds for every function $\varphi \in C^{(\infty)}(\Gamma)$, and, in particular, $\varphi(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\varphi)$, show that in the sense of convergence in the space of generalized functions $\mathcal{D}'(\Gamma)$ we have

$$\sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} e^{iks} \rightarrow \delta \text{ as } n \rightarrow \infty$$

Here δ is the element of $\mathcal{D}'(\Gamma)$ whose effect on the function $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ is defined by $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

b) If $f \in \mathcal{R}(\Gamma)$, the Fourier coefficients of the function f in the system $\{e^{iks}\}$ defined in the standard manner, can be written as

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)e^{-iks} dx = \frac{1}{2\pi} f(e^{-iks})$$

By analogy we now define the Fourier coefficients $c_k(F)$ of any generalized function $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ by the formula $c_k(F) = \frac{1}{2\pi} F(e^{-iks})$, which makes sense because $e^{-iks} \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

Thus to every generalized function $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ we assign the Fourier series

$$F \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{iks}$$

Show that $\delta \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{iks}$.

c) Prove the following fact, which is remarkable for its simplicity and the freedom of action that it provides: the Fourier series of every generalized function $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ converges to F (in the sense of convergence in the space $\mathcal{D}'(\Gamma)$).

d) Show that the Fourier series of a function $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ (like the function F itself, and like every convergent series of generalized functions) can be differentiated termwise any number of times.

e) Starting from the equality $\delta = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{iks}$, find the Fourier series of δ' .

f) Let us now return from the circle Γ to the line $\mathbb{R}$ and study the functions e^{ikx} as regular generalized functions in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (that is, as continuous linear functionals on the space $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ of functions in the class $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ of infinitely differentiable functions of compact support in $\mathbb{R}$).

Every locally integrable function f can be regarded as an element of $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (a regular generalized function in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) whose effect on the function $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ is given by the rule $f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$. Convergence in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ is defined in the standard way:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F \right) := \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = F(\varphi) \right)$$

Show that the equality

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k)$$

holds in the sense of convergence in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. In both sides of this equality a limiting passage is assumed as $n \rightarrow \infty$ over symmetric partial sums $\sum_{-n}^n$, and $\delta(x - x_0)$, as always, denotes the δ -function of $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ shifted to the point x_0 , that is, $\delta(x - x_0)(\varphi) = \varphi(x_0)$.

10.6 18.3 The Fourier Transform

10.6.1 18.3.1 Representation of a Function by Means of a Fourier Integral

a. The Spectrum and Harmonic Analysis of a Function

Let $f(t)$ be a T -periodic function, for example a periodic signal with frequency $\frac{1}{T}$ as a function of time. We shall assume that the function f is absolutely integrable over a period. Expanding f in a Fourier series (when f is sufficiently regular, as we know, the Fourier series converges to f) and transforming that series,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos k\omega_0 t + b_k(f) \sin k\omega_0 t = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega_0 t} = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(k\omega_0 t + \arg c_k) \end{aligned} \quad (18.78)$$

we obtain a representation of f as a sum of a constant term $\frac{a_0}{2} = c_0$ - the mean value of f over a period - and sinusoidal components with frequencies $\nu_0 = \frac{1}{T}$ (the fundamental frequency), $2\nu_0$ (the second harmonic frequency), and so on. In general the k th harmonic component $2|c_k| \cos(k\frac{2\pi}{T}t + \arg c_k)$ of the signal has frequency $k\nu_0 = \frac{k}{T}$, cyclic frequency $k\omega_0 = 2\pi k\nu_0 = \frac{2\pi}{T}k$, amplitude $2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, and phase $\arg c_k = -\arctan \frac{b_k}{a_k}$.

The expansion of a periodic function (signal) into a sum of simple harmonic oscillations is called the harmonic analysis of f . The numbers $\{c_k(f); k \in \mathbb{Z}\}$ or $\{a_0(f), a_k(f), b_k(f); k \in \mathbb{N}\}$

are called the spectrum of the function (signal) f . A periodic function thus has a discrete spectrum.

Let us now set out (on a heuristic level) what happens to the expansion (18.78) when the period T of the signal increases without bound.

Simplifying the notation by writing $l = \frac{T}{2}$ and $\alpha_k = k\frac{\pi}{l}$, we rewrite the expansion

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{l}t}$$

as follows:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(c_k \frac{l}{\pi} \right) e^{ik\frac{\pi}{l}t} \frac{\pi}{l} \quad (18.79)$$

where

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\alpha_k t} dt$$

and hence

$$c_k \frac{l}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\alpha_k t} dt$$

Assuming that in the limit as $l \rightarrow +\infty$ we arrive at an arbitrary function f that is absolutely integrable over $\mathbb{R}$, we introduce the auxiliary function

$$c(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \quad (18.80)$$

whose values at points $\alpha = \alpha_k$ differ only slightly from the quantities $c_k \frac{l}{\pi}$ in formula (18.79). In that case

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} c(\alpha_k) e^{i\alpha_k t} \frac{\pi}{l} \quad (18.81)$$

where $\alpha_k = k\frac{\pi}{l}$ and $\alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{l}$. This last integral resembles a Riemann sum, and as the partition is refined, which occurs as $l \rightarrow \infty$, we obtain

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha \quad (18.82)$$

Thus, following Fourier, we have arrived at the expansion of the function f into a continuous linear combination of harmonics of variable frequency and phase.

The integral (18.82) will be called the Fourier integral below. It is the continuous equivalent of a Fourier series. The function $c(\alpha)$ in it is the analog of the Fourier coefficient, and will be called the Fourier transform of the function f (defined on the entire line $\mathbb{R}$). Formula (18.80) for the Fourier transform is completely equivalent to the formula for the Fourier coefficients. It is natural to regard the function $c(\alpha)$ as the spectrum of the function (signal) f . In contrast to the case of a periodic signal f considered above and the discrete spectrum (of Fourier coefficients) corresponding to it, the spectrum $c(\alpha)$ of an arbitrary signal may be nonzero on whole intervals and even on the entire line (continuous spectrum).

Example

1. Let us find the function having the following spectrum of compact support:

$$c(\alpha) = \begin{cases} h, & \text{if } |\alpha| \leq a \\ 0, & \text{if } |\alpha| > a \end{cases} \quad (18.83)$$

Proof. By formula (18.82) we find, for $t \neq 0$

$$f(t) = \int_{-a}^a h e^{i\alpha t} d\alpha = h \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{it} = 2h \frac{\sin at}{t} \quad (18.84)$$

and when $t = 0$, we obtain $f(0) = 2ha$, which equals the limit of $2h \frac{\sin at}{t}$ as $t \rightarrow 0$.

The representation of a function in the form (18.82) is called its Fourier integral representation. We shall discuss below the conditions under which such a representation is possible. Right now, we consider another example.

Example

2. Let P be a device having the following properties: it is a linear signal transform, that is, $P(\sum_j a_j f_j) = \sum_j a_j P(f_j)$, and it preserves the periodicity of a signal, that is, $P(e^{i\omega t}) = p(\omega)e^{i\omega t}$, where the coefficient $p(\omega)$ depends on the frequency ω of the periodic signal $e^{i\omega t}$.

We use the compact complex notation, although of course everything could be rewritten in terms of $\cos \omega t$ and $\sin \omega t$.

The function $p(\omega) =: R(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ is called the spectral characteristic of the device P . Its absolute value $R(\omega)$ is usually called the frequency characteristic and its argument $\varphi(\omega)$ the phase characteristic of the device P . A signal $e^{i\omega t}$, after passing through the device, emerges transformed into the signal $R(\omega)e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}$, its amplitude changed as a result of the factor $R(\omega)$ and its phase shifted due to the presence of the term $\varphi(\omega)$.

Let us assume that we know the spectral characteristic $p(\omega)$ of the device P and the signal $f(t)$ that enters the device; we ask how to find the signal $x(t) = P(f)(t)$ that emerges from the device.

Representing the signal $f(t)$ as the Fourier integral (18.82) and using the linearity of the device and the integral, we find

$$x(t) = P(f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)p(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

In particular, if

$$p(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\omega| \leq \Omega \\ 0 & \text{for } |\omega| > \Omega \end{cases} \quad (18.85)$$

then

$$x(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} c(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

and, as one can see from the spectral characteristics of the device,

$$P(e^{i\omega t}) = \begin{cases} e^{i\omega t} & \text{for } |\omega| \leq \Omega, \\ 0 & \text{for } |\omega| > \Omega. \end{cases}$$

A device P with the spectral characteristic (18.85) transmits (filters) frequencies not greater than Ω without distortion and truncates all of the signal involved with higher frequencies (larger

than Ω). For that reason, such a device is called an ideal low-frequency filter (with upper frequency limit Ω) in radio technology.

Let us now turn to the mathematical side of the matter and to a more careful study of the concepts that arise.

b. Definition of the Fourier Transform and the Fourier Integral

In accordance with formulas (18.80) and (18.82) we make the following definition.

Definition 1. The function

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (18.86)$$

is the Fourier transform of the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

The integral here is understood in the sense of the principal value

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) e^{-i\xi x} dx$$

and we assume that it exists.

If $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is absolutely integrable on $\mathbb{R}$, then, since $|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)|$ for $x, \xi \in \mathbb{R}$, the Fourier transform (18.86) is defined, and the integral (18.86) converges absolutely and uniformly with respect to ξ on the entire line $\mathbb{R}$.

Definition 2. If $c(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$ is the Fourier transform of $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, then the integral assigned to f ,

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (18.87)$$

understood as a principal value, is called the Fourier integral of f .

The Fourier coefficients and the Fourier series of a periodic function are thus the discrete analog of the Fourier transform and the Fourier integral respectively.

Definition 3. The following integrals, understood as principal values,

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x dx \quad (18.88)$$

$$\mathcal{F}_s[f](\xi) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x dx \quad (18.89)$$

are called respectively the Fourier cosine transform and the Fourier sine transform of the function f .

Setting $c(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$, $a(\xi) = \mathcal{F}_c[f](\xi)$, and $b(\xi) = \mathcal{F}_s[f](\xi)$, we obtain the relation that is already partly familiar to us from Fourier series

$$c(\xi) = \frac{1}{2}(a(\xi) - ib(\xi)) \quad (18.90)$$

As can be seen from relations (18.88) and (18.89),

$$a(-\xi) = a(\xi), \quad b(-\xi) = -b(\xi) \quad (18.91)$$

Formulas (18.90) and (18.91) show that Fourier transforms are completely determined on the entire real line $\mathbb{R}$ if they are known for nonnegative values of the argument.

From the physical point of view this is a completely natural fact - the spectrum of a signal needs to be known for frequencies $\omega \geq 0$; the negative frequencies α in (18.80) and (18.82) - result from the form in which they are written. Indeed,

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A c(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= \left(\int_{-A}^0 + \int_0^A \right) c(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_0^A (c(\xi) e^{ix\xi} + c(-\xi) e^{-ix\xi}) d\xi = \\ &= \int_0^A (a(\xi) \cos x\xi + b(\xi) \sin x\xi) d\xi \end{aligned}$$

and hence the Fourier integral (18.87) can be represented as

$$\int_0^\infty (a(\xi) \cos x\xi + b(\xi) \sin x\xi) d\xi \quad (r)$$

which is in complete agreement with the classical form of a Fourier series. If the function f is real-valued, it follows from formulas (18.90) and (18.91) that

$$c(-\xi) = \overline{c(\xi)} \quad (18.92)$$

since in this case $a(\xi)$ and $b(\xi)$ are real-valued functions on $\mathbb{R}$, as one can see from their definitions (18.88) and (18.89). On the other hand, under the assumption $\bar{f}(x) = f(x)$, Eq. (18.92) can be obtained immediately from the definition (18.86) of the Fourier transform, if we take into account that the conjugation sign can be moved under the integral sign. This last observation allows us to conclude that

$$\mathcal{F}[\bar{f}](-\xi) = \overline{\mathcal{F}[f](\xi)} \quad (18.93)$$

for every function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

It is also useful to note that if f is a real-valued even function, that is, $\overline{f(x)} = f(x) = f(-x)$, then

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}_c[f](\xi)} &= \mathcal{F}_c[f](\xi), \quad \mathcal{F}_s[f](\xi) \equiv 0 \\ \overline{\mathcal{F}[f](\xi)} &= \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi) \end{aligned} \quad (18.94)$$

and if f is a real-valued odd function, that is, $\overline{f(x)} = f(x) = -f(-x)$, then

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c[f](\xi) &\equiv 0, \quad \overline{\mathcal{F}_s[f](\xi)} = \mathcal{F}_s[f](\xi) \\ \overline{\mathcal{F}[f](\xi)} &= -\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi) \end{aligned} \quad (18.95)$$

and if f is a purely imaginary function, that is, $\overline{f(x)} = -f(x)$, then

$$\mathcal{F}[\bar{f}](-\xi) = -\overline{\mathcal{F}[f](\xi)} \quad (18.96)$$

We remark that if f is a real-valued function, its Fourier integral (18.87') can also be written as

$$\int_0^\infty \sqrt{a^2(\xi) + b^2(\xi)} \cos(x\xi + \varphi(\xi)) d\xi = 2 \int_0^\infty |c(\xi)| \cos(x\xi + \varphi(\xi)) d\xi$$

where $\varphi(\xi) = -\arctan \frac{b(\xi)}{a(\xi)} = \arg c(\xi)$.

Example

3. Let us find the Fourier transform of $f(t) = \frac{\sin at}{t}$ (assuming $f(0) = a \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\alpha) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\sin at}{t} e^{-i\alpha t} dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\sin at \cos \alpha t}{t} dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin at \cos \alpha t}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(a+\alpha)t}{t} + \frac{\sin(a-\alpha)t}{t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} (\operatorname{sgn}(a+\alpha) + \operatorname{sgn}(a-\alpha)) \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{sgn} a, & \text{if } |\alpha| \leq |a| \\ 0, & \text{if } |\alpha| > |a| \end{cases}\end{aligned}$$

since we know the value of the Dirichlet integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} \quad (18.97)$$

Hence if we assume $a \geq 0$ and take the function $f(t) = 2h \frac{\sin at}{t}$ of Eq. (18.84), we find, as we should have expected, that the Fourier transform is the spectrum of this function exhibited in relations (18.83).

The function f in Example 3 is not absolutely integrable on $\mathbb{R}$, and its Fourier transform has discontinuities. That the Fourier transform of an absolutely integrable function has no discontinuities is attested by the following lemma.

Lemma 1. If the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is locally integrable and absolutely integrable on $\mathbb{R}$, then

- a) its Fourier transform $\mathcal{F}[f](\xi)$ is defined for every value $\xi \in \mathbb{R}$;
- b) $\mathcal{F}[f] \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;
- c) $\sup_\xi |\mathcal{F}[g](\xi)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx$;
- d) $\mathcal{F}[f](\xi) \rightarrow 0$ as $\xi \rightarrow \infty$.

Proof. We have already noted that $|f(x)e^{ix\xi}| \leq |f(x)|$, from which it follows that the integral (18.86) converges absolutely and uniformly with respect to $\xi \in \mathbb{R}$. This fact simultaneously proves parts a) and c).

Part d) follows from the Riemann-Lebesgue lemma (see Sect. 18.2).

For a fixed finite $A \geq 0$, the estimate

$$\left| \int_{-A}^A f(x) (e^{-ix(\xi+h)} - e^{-ix\xi}) dx \right| \leq \sup_{|x| \leq A} |e^{-ixh} - 1| \int_{-A}^A |f(x)| dx$$

establishes that the integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A f(x) e^{-ix\xi} dx$$

is continuous with respect to ξ ; and the uniform convergence of this integral as $A \rightarrow +\infty$ enables us to conclude that $\mathcal{F}[f] \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Example

4. Let us find the Fourier transform of the function $f(t) = e^{-t^2/2}$:

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos \alpha t dt$$

Differentiating this last integral with respect to the parameter α and then integrating by parts, we find that

$$\frac{d\mathcal{F}[f]}{d\alpha}(\alpha) + \alpha\mathcal{F}[f](\alpha) = 0,$$

or

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \mathcal{F}[f](\alpha) = -\alpha$$

It follows that $\mathcal{F}[f](\alpha) = ce^{-\alpha^2/2}$, where c is a constant which, using the Euler-Poisson integral (see Example 17 of Sect. 17.2) we find from the relation

$$c = \mathcal{F}[f](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

Thus we have found that $\mathcal{F}[f](\alpha) = \sqrt{2\pi}e^{-\alpha^2/2}$, and simultaneously shown that $\mathcal{F}_c[f](\alpha) = \sqrt{2\pi}e^{-\alpha^2/2}$ and $\mathcal{F}_s[f](\alpha) \equiv 0$.

c. Normalization of the Fourier Transform We obtained the Fourier transform (18.80) and the Fourier integral (18.82) as the natural continuous analogs of the Fourier coefficients $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx$ and the Fourier series $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ of a periodic function f in the trigonometric system $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$. This system is not orthonormal, and only the ease of writing a trigonometric Fourier series in it has caused it to be used traditionally instead of the more natural orthonormal system $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$. In this normalized system the Fourier series has the form $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$, and the Fourier coefficients are defined by the formulas $\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx$.

The continuous analogs of such natural Fourier coefficients and such a Fourier series would be the Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (18.98)$$

and the Fourier integral

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (18.99)$$

which differ from those considered above only in the normalizing coefficient.

In the symmetric formulas (18.98) and (18.99) the Fourier "coefficient" and the Fourier "series" practically coalesce, and so in the future we shall essentially be interested only in the properties of the integral transform (18.98), calling it the normalized Fourier transform or, where no confusion can arise, simply the Fourier transform of the function f .

In general the name integral operator or integral transform is customarily given to an operator A that acts on a function f according to a rule

$$A(f)(y) = \int_X K(x, y)f(x)dx$$

where $K(x, y)$ is a given function called the kernel of the integral operator, and $X \subset \mathbb{R}^n$ is the set over which the integration extends and on which the integrands are assumed to be defined. Since y is a free parameter in some set Y , it follows that $A(f)$ is a function on Y .

In mathematics there are many important integral transforms, and among them the Fourier transform occupies one of the most key positions. The reasons for this situation go very deep and involve the remarkable properties of the transformation (18.98), which we shall to some extent describe and illustrate in action in the remaining part of this section.

Thus, we shall study the normalized Fourier transform (18.98).

Along with the notation $\widehat{f}$ for the normalized Fourier transform, we introduce the notation

$$\widetilde{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx \quad (18.100)$$

that is, $\widetilde{f}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$.

Formulas (18.98) and (18.99) say that

$$\widetilde{\widetilde{f}} = \widehat{\widehat{f}} = f, \quad (18.101)$$

that is, the integral transforms (18.98) and (18.99) are mutually inverse to each other. Hence if (18.98) is the Fourier transform, then it is natural to call the integral operator (18.100) the inverse Fourier transform.

We shall discuss in detail below certain remarkable properties of the Fourier transform and justify them. For example

$$\begin{aligned} \widehat{f^{(n)}}(\xi) &= (i\xi)^n \widehat{f}(\xi) \\ \widehat{f * g} &= \sqrt{2\pi} \widehat{f} \cdot \widehat{g} \\ \|\widehat{f}\| &= \|f\| \end{aligned}$$

That is, the Fourier transform maps the operator of differentiation into the operator of multiplication by the independent variable; the Fourier transform of the convolution of functions amounts to multiplying the transforms; the Fourier transform preserves the norm (Parseval's equality), and is therefore an isometry of the corresponding function space.

But we shall begin with the inversion formula (18.101).

For another convenient normalization of the Fourier transform see Problem 10 below.

d. Sufficient Conditions for a Function to be Representable as a Fourier Integral We shall now prove a theorem that is completely analogous in both form and content to the theorem on convergence of a trigonometric Fourier series at a point. To preserve the familiar appearance of our earlier formulas and transformations to the maximum extent, we shall use the nonnormalized Fourier transform $c(\xi)$ in the present part of this subsection, together with its rather cumbersome but sometimes convenient notation $\mathcal{F}[f](\xi)$. Afterwards, when studying the integral Fourier transform as such, we shall as a rule work with the normalized Fourier transform $\widehat{f}$ of the function f .

Theorem 1. (Convergence of the Fourier integral at a point). Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ be an absolutely integrable function that is piecewise continuous on each finite closed interval of the real axis $\mathbb{R}$.

If the function f satisfies the Dini conditions at a point $x \in \mathbb{R}$, then its Fourier integral ((18.82), (18.87), (18.87'), (18.99)) converges at that point to the value $\frac{1}{2}(f(x_-) + f(x_+))$, equal to half the sum of the left and right-hand limits of the function at that point.

Proof. By Lemma 1 the Fourier transform $c(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$ of the function f is continuous on $\mathbb{R}$ and hence integrable on every interval $[-A, A]$. Just as we transformed the partial sum of the Fourier series, we now carry out the following transformations of the partial Fourier integral:

$$\begin{aligned}
S_A(x) &= \int_{-A}^A c(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{-A}^A \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\xi} dt \right) e^{ix\xi} d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-A}^A e^{i(x-t)\xi} d\xi \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{i(x-t)A} - e^{-i(x-t)A}}{i(x-t)} dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(x-t)A}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(x-u) + f(x+u)) \frac{\sin Au}{u} du
\end{aligned}$$

The change in the order of integration at the second equality from the beginning of the computation is legal. In fact, in view of the piecewise continuity of f , for every finite $B > 0$ we have the equality

$$\int_{-A}^A \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B f(t) e^{-it\xi} dt \right) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B f(t) \left(\int_{-A}^A e^{i(x-t)\xi} d\xi \right) dt$$

from which as $B \rightarrow +\infty$, taking account of the uniform convergence of the integral $\int_{-B}^B f(x) e^{-it\xi} dt$ with respect to ξ , we obtain the equality we need.

We now use the value of the Dirichlet integral (18.97) and complete our transformation:

$$\begin{aligned}
S_A(x) - \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} &= \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(f(x-u) - f(x_-)) + (f(x+u) - f(x_+))}{u} \sin Au du
\end{aligned}$$

The resulting integral tends to zero as $A \rightarrow \infty$. We shall explain this and thereby finish the proof of the theorem.

We represent this integral as the sum of the integrals over the interval $]0, 1]$ and over the interval $[1, +\infty[$. The first of these two integrals tends to zero as $A \rightarrow +\infty$ in view of the Dini conditions and the Riemann-Lebesgue lemma, B. (????) The second integral is the sum of four integrals corresponding to the four terms $f(x-u)$, $f(x+u)$, $f(x_-)$ and $f(x_+)$. The Riemann-Lebesgue lemma applies to the first two of these four integrals, and the last two can be brought into the following form, up to a constant factor:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin Au}{u} du = \int_A^{+\infty} \frac{\sin v}{v} dv$$

But as $A \rightarrow +\infty$ this last integral tends to zero, since the Dirichlet integral (18.97) converges.

Remark 1. In the proof of Theorem 1 we have actually studied the convergence of the integral as a principal value. But if we compare the notations (18.87) and (18.87'), it becomes obvious that it is precisely this interpretation of the integral that corresponds to convergence of the integral (18.87').

From this theorem we obtain in particular

Corollary 1. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ be a continuous absolutely integrable function.

If the function f is differentiable at each point $x \in \mathbb{R}$ or has finite onesided derivatives or satisfies a Hlder condition, then it is represented by its Fourier integral.

Hence for functions of these classes both equalities (18.80) and (18.82) or (18.98) and (18.99) hold, and we have thus proved the inversion formula for the Fourier transform for such functions.

Let us consider several examples.

Example

5. Assume that the signal $v(t) = P(f)(t)$ emerging from the device P considered in Example 2 is known, and we wish to find the input signal $f(t)$ entering the device P .

In Example 2 we have shown that f and v are connected by the relation

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)p(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

where $c(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$ is the spectrum of the signal F (the nonnormalized Fourier transform of the function f) and p is the spectral characteristic of the device P . Assuming all these functions are sufficiently regular, from the theorem just proved we conclude that then

$$c(\omega)p(\omega) = \mathcal{F}[v](\omega).$$

From this we find $c(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$. Knowing $c(\omega)$, we find the signal f using the Fourier integral (18.87).

Example

6. Let $a > 0$ and

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Then

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a + i\xi}$$

In discussing the definition of the Fourier transform, we have already noted a number of its obvious properties in Part b of the present subsection. We note further that if $f_-(x) := f(-x)$, then $\mathcal{F}[f_-](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi)$. This is an elementary change of variable in the integral.

We now take the function $e^{-a|x|} = f(x) + f(-x) =: \varphi(x)$.

Then

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) + \mathcal{F}[f](-\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + \xi^2}$$

If we now take the function $\psi(x) = f(x) - f(-x)$, which is an odd extension of the function e^{-ax} , $x > 0$, to the entire real line, then

$$\mathcal{F}[\psi](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) - \mathcal{F}[f](-\xi) = -\frac{i}{\pi} \frac{\xi}{a^2 + \xi^2}$$

Using Theorem 1, or more precisely the corollary to it, we find that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{a + i\xi} d\xi &= \begin{cases} e^{-ax}, & \text{if } x > 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{if } x = 0 \\ 0, & \text{if } x < 0 \end{cases} \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ae^{ix\xi}}{a^2 + \xi^2} d\xi &= e^{-a|x|}; \\ \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi e^{ix\xi}}{a^2 + \xi^2} d\xi &= \begin{cases} e^{-ax}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ -e^{ax}, & \text{if } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

All the integrals here are understood in the sense of the principal value, although the second one, in view of its absolute convergence, can also be understood in the sense of an ordinary improper integral.

Separating the real and imaginary parts in these last two integrals, we find the Laplace integrals we have encountered earlier

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\xi}{a^2 + \xi^2} d\xi &= \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|} \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\xi}{a^2 + \xi^2} d\xi &= \frac{\pi}{2} e^{-a|x|} \operatorname{sgn} x\end{aligned}$$

Example

7. On the basis of Example 4 it is easy to find (by an elementary change of variable) that if

$$f(x) = e^{-a^2 x^2}, \quad \text{then} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}$$

It is very instructive to trace the simultaneous evolution of the graphs of the functions f and $\widehat{f}$ as the parameter a varies from $1/\sqrt{2}$ to 0. The more "concentrated" one of the functions is, the more "smeared" the other is. This circumstance is closely connected with the Heisenberg uncertainty principle in quantum mechanics. (In this connection see Problems 6 and 7.)

Remark 2. In completing the discussion of the question of the possibility of representing a function by a Fourier integral, we note that, as Examples 1 and 3 show, the conditions on f stated in Theorem 1 and its corollary are sufficient but not necessary for such a representation to be possible.

10.6.2 18.3.2 The Connection of the Differential and Asymptotic Properties of a Function and its Fourier Transform

a. Smoothness of a Function and the Rate of Decrease of its Fourier Transform

It follows from the Riemann-Lebesgue lemma that the Fourier transform of any absolutely integrable function on $\mathbb{R}$ tends to zero at infinity. This has already been noted in Lemma 1 proved above. We now show that, like the Fourier coefficients, the smoother the function, the faster its Fourier transform tends to zero. The dual fact is that the faster a function tends to zero, the smoother its Fourier transform.

We begin with the following auxiliary proposition.

Lemma 2. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ be a continuous function having a locally piecewise continuous derivative f' on $\mathbb{R}$. Given this,

- a) if the function f' is integrable on $\mathbb{R}$, then $f(x)$ has a limit both as $x \rightarrow -\infty$ and as $x \rightarrow +\infty$;
- b) if the functions f and f' are integrable on $\mathbb{R}$, then $f(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$.

Proof. Under these restrictions on the functions f and f' the Newton-Leibniz formula holds

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

In conditions a) the right-hand side of this equality has a limit both as $x \rightarrow +\infty$ and as $x \rightarrow -\infty$.

If a function f having a limit at infinity is integrable on $\mathbb{R}$, then both of these limits must obviously be zero.

We now prove

Proposition 1.

(Connection between the smoothness of a function and the rate of decrease of its Fourier transform.) If $f \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ($k = 0, 1, \dots$) and all the functions $f, f', \dots, f^{(k)}$ are absolutely integrable on $\mathbb{R}$, then

a) for every $n \in \{0, 1, \dots, k\}$

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi) \quad (18.102)$$

b) $\widehat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^k}\right)$ as $\xi \rightarrow 0$.

Proof. If $k = 0$, then a) holds trivially and b) follows from the Riemann-Lebesgue lemma.

Let $k > 0$. By Lemma 2 the functions $f, f', \dots, f^{(k-1)}$ tend to zero as $x \rightarrow \infty$. Taking this into account, we integrate by parts,

$$\begin{aligned} \widehat{f^{(k)}}(\xi) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{-i\xi x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f^{(k-1)}(x) e^{-i\xi x} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} + (i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(x) e^{-i\xi x} dx \right) = \dots \\ &\dots = \frac{(i\xi)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Thus Eq. (18.102) is established. This is a very important relation, and we shall return to it.

We have shown that $\widehat{f}(\xi) = (i\xi)^{-k} \widehat{f^{(k)}}(\xi)$, but by the Riemann-Lebesgue lemma $\widehat{f^{(k)}}(\xi) \rightarrow 0$ as $\xi \rightarrow 0$ and hence b) is also proved.

b. The Rate of Decrease of a Function and the Smoothness of its Fourier Transform

In view of the nearly complete identity of the direct and inverse Fourier transforms the following proposition, dual to Proposition 1, holds.

Proposition 2.

(The connection between the rate of decrease of a function and the smoothness of its Fourier transform). If a locally integrable function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is such that the function $x^k f(x)$ is absolutely integrable on $\mathbb{R}$, then

a) the Fourier transform of f belongs to $C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b) the following equality holds:

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (-i)^k \widehat{x^k f(x)}(\xi) \quad (18.103)$$

Proof. For $k = 0$ relation (18.103) holds trivially, and the continuity of $\widehat{f}(\xi)$ has already been proved in Lemma 1. If $k > 0$, then for $n < k$ we have the estimate $|x^n f(x)| \leq |x^k f(x)|$ at infinity, from which it follows that $x^n f(x)$ is absolutely integrable. But $|x^n f(x) e^{-i\xi x}| = |x^n f(x)|$, which enables us to invoke the uniform convergence of these integrals with respect to the parameter ξ and successively differentiate them under the integral sign:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ \widehat{f}'(\xi) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &\dots\dots\dots \\ \widehat{f}^{(k)}(\xi) &= \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) e^{-i\xi x} dx\end{aligned}$$

By Lemma 1 this last integral is continuous on the entire real line. Hence indeed $\widehat{f} \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

c. The Space of Rapidly Decreasing Functions

Definition 4. We denote the set of functions $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ satisfying the condition

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\beta f^{(\alpha)}(x)| < \infty$$

for all nonnegative integers α and β by $S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ or more briefly by S . Such functions are called rapidly decreasing functions (as $x \rightarrow \infty$).

The set of rapidly decreasing functions obviously forms a vector space under the standard operations of addition of functions and multiplication of a function by a complex number.

Example

8. The function e^{-x^2} or, for example, all functions of compact support in $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ belong to S .

Lemma 3. The restriction of the Fourier transform to S is a vector-space automorphism of S .

Proof. We first show that $(f \in S) \Rightarrow (\widehat{f} \in S)$.

To do this we first remark that by Proposition 2a we have $\widehat{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

We then remark that the operation of multiplication by x^α ($\alpha \geq 0$) and the operation D of differentiation do not lead outside the class of rapidly decreasing functions. Hence, for any nonnegative integers α and β the relation $f \in S$ implies that the function $D^\beta(x^\alpha f(x))$ belongs to the space S . Its

Fourier transform tends to zero at infinity by the Riemann-Lebesgue lemma. But by formulas (18.102) and (18.103)

$$D^\beta \left(\widehat{x^\alpha f(x)} \right) (\xi) = i^{\alpha+\beta} \xi^\beta \widehat{f^{(\alpha)}}(\xi)$$

and we have shown that $\xi^\beta \widehat{f^{(\alpha)}}(\xi) \rightarrow 0$ as $\xi \rightarrow \infty$, that is, $\widehat{f} \in S$.

We now show that $\widehat{\widehat{f}} = f$, that is, that the Fourier transform maps S onto the whole space S .

We recall that the direct and inverse Fourier transforms are connected by the simple relation $\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$. Reversing the sign of the argument of the function obviously is an operation that maps the set S into itself. Hence the inverse Fourier transform also maps S into itself.

Finally, if f is an arbitrary function in S , then by what has been proved $\varphi = \widehat{\widehat{f}} \in S$ and by the inversion formula (18.101) we find that $f = \widehat{\varphi}$.

The linearity of the Fourier transform is obvious, so that Lemma 3 is now completely proved.

10.6.3 18.3.3 The Main Structural Properties of the Fourier Transform

a. Definitions, Notation, Examples

We have made a rather detailed study above of the Fourier transform of a function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ defined on the real line. In particular, we have clarified the connection that exists between the regularity properties of a function and the corresponding properties of its Fourier transform. Now that this question has been theoretically answered, we shall study the Fourier transform only of sufficiently regular functions so as to exhibit the fundamental technical properties of the Fourier transform in concentrated form and without technical complications. In compensation we shall consider not only one-dimensional but also the multi-dimensional Fourier transform and derive its basic properties practically independently of what was discussed above.

Those wishing to confine themselves to the one-dimensional case may assume that $n = 1$ below.

Definition 5. Suppose $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ is a locally integrable function on $\mathbb{R}^n$. The function

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\xi, x)} dx \quad (18.104)$$

is called the Fourier transform of the function f .

Here we mean that $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$, and the integral is regarded as convergent in the following sense of principal value:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \cdots \int_{-A}^A \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

In this case the multidimensional Fourier transform (18.104) can be regarded as n one-dimensional Fourier transforms carried out with respect to each of the variables $x_1, \dots, x_n$.

Then, when the function f is absolutely integrable, the question of the sense in which the integral (18.104) is to be understood does not arise at all.

Let $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ and $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ be multi-indices consisting of nonnegative integers $\alpha_j, \beta_j, j = 1, \dots, n$, and suppose, as always, that D^α denotes the differentiation operator $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ of order $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ and $x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$.

Definition 6. We denote the set of functions $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ satisfying the condition

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty$$

for all nonnegative multi-indices α and β by the symbol $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, or by S where no confusion can arise. Such functions are said to be rapidly decreasing (as $x \rightarrow \infty$).

The set S with the algebraic operations of addition of functions and multiplication of a function by a complex number is obviously a vector space.

Example

9. The function $e^{-|x|^2}$, where $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, and all the functions in $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ of compact support belong to S .

If $f \in S$, then integral in relation (18.104) obviously converges absolutely and uniformly with respect to ξ on the entire space $\mathbb{R}^n$. Moreover, if $f \in S$, then by standard rules this integral can be differentiated as many times as desired with respect to any of the variables

$\xi_1, \dots, \xi_n$. Thus if $f \in S$, then $\widehat{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Example

10. Let us find the Fourier transform of the function $\exp(-|x|^2/2)$. When integrating rapidly decreasing functions one can obviously use Fubini's theorem and if necessary change the order of improper integrations without difficulty.

In the present case, using Fubini's theorem and Example 4, we find

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2} \cdot e^{-i(\xi, x)} dx &= \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_j^2/2} e^{-i\xi_j x_j} dx_j = \prod_{j=1}^n e^{-\xi_j^2/2} = e^{-|\xi|^2/2} \end{aligned}$$

We now state and prove the basic structural properties of the Fourier transform, assuming, so as to avoid technical complications, that the Fourier transform is being applied to functions of class S . This is approximately the same as learning to operate (compute) with rational numbers rather than the entire space $\mathbb{R}$ all at once. The process of completion is of the same type. On this account, see Problem 5.

b. Linearity

The linearity of the Fourier transform is obvious; it follows from the linearity of the integral.

c. The Relation between Differentiation and the Fourier Transform

The following formulas hold

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \quad (18.105)$$

$$\widehat{(x^\alpha f(x))}(\xi) = (i)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{f}(\xi) \quad (18.106)$$

Proof. The first of these can be obtained, like formula (18.102), via integration by parts (of course, with a preliminary use of Fubini's theorem in the case of a space $\mathbb{R}^n$ of dimension $n > 1$).

Formula (18.106) generalizes relation (18.103) and is obtained by direct differentiation of (18.104) with respect to the parameters $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Remark 3. In view of the obvious estimate

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < +\infty$$

it follows from (18.105) that $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ as $\xi \rightarrow \infty$ for every function $f \in S$, since $D^\alpha f \in S$. Next, the simultaneous use of formulas (18.105) and (18.106) enables us to write that

$$D^\beta \widehat{(x^\alpha f(x))}(\xi) = (i)^{|\alpha|+|\beta|} \xi^\beta D^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

from which it follows that if $f \in S$, then for any nonnegative multi-indices α and β we have $\xi^\beta D^\alpha \widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ when $\xi \rightarrow \infty$ in $\mathbb{R}^n$. Thus we have shown that

$$(f \in S) \Rightarrow (\widehat{f} \in S)$$

d. The Inversion Formula

Definition 7. The operator defined (together with its notation) by the equality

$$\widetilde{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(\xi, x)} dx \quad (18.107)$$

is called the inverse Fourier transform.

The following Fourier inversion formula holds:

$$\widetilde{\widetilde{f}} = \widehat{\widehat{f}} = f \quad (18.108)$$

or in the form of the Fourier integral:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \quad (18.109)$$

Using Fubini's theorem one can immediately obtain formula (18.108) from the corresponding formula (18.101) for the one-dimensional Fourier transform, but, as promised, we shall give a brief independent proof of the formula.

Proof. We first show that

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\xi) f(x + y) dy \quad (18.110)$$

for any functions $f, g \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Both integrals are defined, since $f, g \in S$ and so by Remark 3 we also have $\widehat{f}, \widehat{g} \in S$.

Let us transform the integral on the left-hand side of the equality to be proved:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(\xi, y)} dy \right) e^{i(x, \xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-i(\xi, y-x)} d\xi \right) f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y) f(x+y) dy \end{aligned}$$

There is no doubt as to the legitimacy of the reversal in the order of integration, since f and g are rapidly decreasing functions. Thus (18.110) is now verified.

We now remark that for every $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon\xi) e^{i(y, \xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(u) e^{-i(y, u/\varepsilon)} du = \varepsilon^{-n} \widehat{g}(y/\varepsilon)$$

so that, by Eq. (18.110)

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \widehat{g}(y/\varepsilon) f(x+y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(u) f(x+\varepsilon u) du$$

Taking account of the absolute and uniform convergence with respect to ε of the extreme integrals in the last chain of equalities, we find, as $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(u) du$$

Here we set $g(x) = e^{-|x|^2/2}$. In Example 10 we saw that $\widehat{g}(u) = e^{-|u|^2/2}$. Recalling the Euler-Poisson integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ and using Fubini's theorem, we conclude that $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^2/2} du = (2\pi)^{n/2}$, and as a result, we obtain Eq. (18.109).

Remark 4. In contrast to the single equality (18.109), which means that $\widetilde{\widehat{f}} = f$, relations (18.108) also contain the equality $\widehat{\widetilde{f}} = f$. But this relation follows immediately from the one proved, since $\widetilde{f}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ and $\widehat{f(-x)} = \widetilde{f(x)}$.

Remark 5. We have already seen (see Remark 3) that if $f \in S$, then $\widehat{f} \in S$, and hence $\widetilde{\widehat{f}} \in S$ also, that is, $\widehat{S} \subset S$ and $\widetilde{S} \subset S$. We now conclude from the relations $\widetilde{\widehat{f}} = \widehat{\widetilde{f}} = f$ that $\widehat{S} = \widetilde{S} = S$.

e. Parseval's Equality This is the name given to the relation

$$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle, \quad (18.111)$$

which in expanded form means that

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \quad (1)$$

It follows in particular from (18.111) that

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle = \|\widehat{f}\|^2. \quad (18.112)$$

From the geometric point of view, Eq. (18.111) means that the Fourier transform preserves the inner product between functions (vectors of the space S), and hence is an isometry of S .

The name "Parseval's equality" is also sometimes given to the relation

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx \quad (18.113)$$

which is obtained from (18.110) by setting $x = 0$. The main Parseval equality (18.111) is obtained from (18.113) by replacing g with $\overline{\widehat{g}}$ and using the fact that $\widehat{\widehat{g}} = g$, since $\widehat{\widehat{f}} = \widetilde{f}$ and $\widetilde{\widetilde{g}} = g$.

f. The Fourier Transform and Convolution The following important relations hold

$$\widehat{(f * g)} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f} \cdot \widehat{g} \quad (18.114)$$

$$\widehat{(f \cdot g)} = (2\pi)^{-n/2} \widehat{f} * \widehat{g} \quad (18.115)$$

(sometimes called Borel's formulas), which connect the operations of convolution and multiplication of functions through the Fourier transform.

Let us prove these formulas:

Proof.

$$\begin{aligned}
(\widehat{f * g})(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-i(\xi, x)} dx = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-i(\xi, x)} dx = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi, y)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i(\xi, x-y)} dx \right) dy = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi, y)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i(\xi, u)} du \right) dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi, y)} \widehat{f}(\xi) dy = (2\pi)^{n/2} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

The legitimacy of the change in order of integration is not in doubt, given that $f, g \in S$.

Formula (18.115) can be obtained by a similar computation if we use the inversion formula (18.109). However, Eq. (18.115) can be derived from relation (18.114) already proved if we recall that $\widehat{\widehat{f}} = \widetilde{\widetilde{f}} = f$, $\widetilde{\widetilde{f}} = \widehat{\widehat{f}}$, $\widetilde{f} = \widehat{\widehat{f}}$, and that $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$, $\overline{u * v} = \bar{u} * \bar{v}$.

Remark 6. If we set $\widetilde{f}$ and $\widetilde{g}$ in place of f and g in formulas (18.114) and (18.115) and apply the inverse Fourier transform to both sides of the resulting equalities, we arrive at the relations

$$\widetilde{\widehat{f \cdot g}} = (2\pi)^{-n/2} (\widetilde{f} * \widetilde{g}) \quad (r)$$

$$\widehat{\widetilde{f * g}} = (2\pi)^{n/2} (\widehat{f} \cdot \widehat{g}) \quad (r')$$

10.6.4 18.3.4 Examples of Applications

Let us now illustrate the Fourier transform (and some of the machinery of Fourier series) in action.

a. The Wave Equation

The successful use of the Fourier transform in the equations of mathematical physics is bound up (in its mathematical aspect) primarily with the fact that the Fourier transform replaces the operation of differentiation with the algebraic operation of multiplication.

For example, suppose we are seeking a function $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the equation

$$a_0 u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n u(x) = f(x)$$

where $a_0, \dots, a_n$ are constant coefficients and f is a known function. Applying the Fourier transform to both sides of this equation (assuming that the functions u and f are sufficiently regular), by relation (18.105) we obtain the algebraic equation

$$(a_0 (i\xi)^n + a_1 (i\xi)^{n-1} + \cdots + a_n) \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

for $\widehat{u}$. After finding $\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(i\xi)}$ from the equation, we obtain $u(x)$ by applying the inverse Fourier transform.

We now apply this idea to the search for a function $u = u(x, t)$ satisfying the one-dimensional wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a > 0)$$

and the initial conditions

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Here and in the next example we shall not take the time to justify the intermediate computations because, as a rule, it is easier simply to find the required function and verify directly that it solves the problem posed than to justify and overcome all the technical difficulties that arise along the way. As it happens, generalized functions, which have already been mentioned, play an essential role in the theoretical struggle with these difficulties.

Thus, regarding t as a parameter, we carry out a Fourier transform on x on both sides of the equation. Then, assuming on the one hand that differentiation with respect to the parameter under the integral sign is permitted and using formula (18.105) on the other hand, we obtain

$$\widehat{u}_{tt}(\xi, t) = -a^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, t)$$

from which we find

$$\widehat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos a\xi t + B(\xi) \sin a\xi t$$

By the initial conditions, we have

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi, 0) &= \widehat{f}(\xi) = A(\xi) \\ \widehat{u}'_t(\xi, 0) &= (\widehat{u'_t})(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi) = a\xi B(\xi) \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi, t) &= \widehat{f}(\xi) \cos a\xi t + \frac{\widehat{g}(\xi)}{a\xi} \sin a\xi t = \\ &= \frac{1}{2} \widehat{f}(\xi) (e^{ia\xi t} + e^{-ia\xi t}) + \frac{1}{2} \frac{\widehat{g}(\xi)}{ia\xi} (e^{ia\xi t} - e^{-ia\xi t}) \end{aligned}$$

Multiplying this equality by $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi}$ and integrating with respect to ξ in short, taking the inverse Fourier transform - and using formula (18.105) we obtain immediately

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2} \int_0^t (g(x - a\tau) + g(x + a\tau)) d\tau$$

b. The Heat Equation

Another element of the machinery of Fourier transforms (specifically, formulas (18.114') and (18.115')) which remained in the background in the preceding example, manifests itself quite clearly when we seek a function $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, that satisfies the heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad (a > 0)$$

and the initial condition $u(x, 0) = f(x)$ on all of $\mathbb{R}^n$.

Here, as always $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Carrying out a Fourier transform with respect to the variable $x \in \mathbb{R}^n$, we find by (18.105) the ordinary equation

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = a^2 (i)^2 (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) \widehat{u}(\xi, t)$$

from which it follows that

$$\widehat{u}(\xi, t) = c(\xi)e^{-a^2|\xi|^2t}$$

where $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$. Taking into account the relation $\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$, we find

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cdot e^{-a^2|\xi|^2t}$$

Now applying the inverse Fourier transform, taking account of (18.114'), we obtain

$$u(x, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) E_0(y - x, t) dy$$

where $E_0(x, t)$ is the function whose Fourier transform with respect to x is $e^{-a^2|\xi|^2t}$. The inverse Fourier transform with respect to ξ of the function $e^{-a^2|\xi|^2t}$ is essentially already known to us from Example 10. Making an obvious change of variable, we find

$$E_0(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}.$$

Setting $E(x, t) = (2\pi)^{-n/2} E_0(x, t)$, we find the fundamental solution

$$E(x, t) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}} \quad (t > 0),$$

of the heat equation, which was already familiar to us (see Example 15 of Sect. 17.4), and the formula

$$u(x, t) = (f * E)(x, t)$$

for the solution satisfying the initial condition $u(x, 0) = f(x)$.

c. The Poisson Summation Formula This is the name given to the following relation

$$\sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n) \quad (18.116)$$

between a function $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (assume $\varphi \in S$) and its Fourier transform $\widehat{\varphi}$. Formula (18.116) is obtained by setting $x = 0$ in the equality

$$\sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n) e^{inx}, \quad (18.117)$$

which we shall prove assuming that φ is a rapidly decreasing function.

Proof. Since φ and $\widehat{\varphi}$ both belong to S , the series on both sides of (18.117) converge absolutely (and so they can be summed in any order), and uniformly with respect to x on the entire line $\mathbb{R}$. Moreover, since the derivatives of a rapidly decreasing function are themselves in class S , we can conclude that the function $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n)$ belongs to $C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. The function f is obviously of period 2π . Let $\{\widehat{c}_k(f)\}$ be its Fourier coefficients in the orthonormal system $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}; k \in \mathbb{Z} \right\}$. then

$$\begin{aligned} \widehat{c}_k(f) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(x + 2\pi n) e^{-ikx} dx = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \varphi(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx =: \widehat{\varphi}(k). \end{aligned}$$

But f is a smooth 2π -periodic function and so its Fourier series converges to it at every point $x \in \mathbb{R}$. Hence, at every point $x \in \mathbb{R}$ we have the relation

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{c}_n(f) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n) e^{inx}$$

Remark 7. As can be seen from the proof, relations (18.116) and (18.117) by no means hold only for functions of class S . But if φ does happen to belong to S , then Eq. (18.117) can be differentiated termwise with respect to x any number of times, yielding as a corollary new relations between $\varphi, \varphi', \dots$, and $\widehat{\varphi}$.

d. Kotel'nikov's Theorem (Whittaker-Shannon Sampling Theorem)²⁵ This example, based like the preceding one on a beautiful combination of the Fourier series and the Fourier integral, has a direct relation to the theory of information transmission in a communication channel. To keep it from appearing artificial, we recall that because of the limited capabilities of our sense organs, we are able to perceive signals only in a certain range of frequencies. For example, the ear "hears" in the range from 20 Hz to 20 kHz. Thus, no matter what the signals are, we, like a filter (see Subsect. 18.3.1) cut out only a bounded part of their spectra and perceive them as band-limited signals (having a bounded spectrum).

For that reason, we shall assume from the outset that the transmitted or received signal $f(t)$ (where t is time, $-\infty < t < \infty$) is band-limited, the spectrum being nonzero only for frequencies whose magnitudes do not exceed a certain critical value $a > 0$. Thus $\widehat{f}(\omega) \equiv 0$ for $|\omega| > a$, and so for a band-limited function the representation

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

reduces to the integral over just the interval $[-a, a]$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (18.118)$$

On the closed interval $[-a, a]$ we expand the function $\widehat{f}(\omega)$ in a Fourier series

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\widehat{f}) e^{i\frac{\pi\omega}{a}k} \quad (18.119)$$

in the system $\{e^{i\frac{\pi\omega}{a}k}; k \in \mathbb{Z}\}$ which is orthogonal and complete in that interval. Taking account of formula (18.118), we find the following simple expression for the coefficients $c_k(\widehat{f})$ of this series:

$$c_k(\widehat{f}) := \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \widehat{f}(\omega) e^{-i\frac{\pi\omega}{a}k} d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f\left(-\frac{\pi}{a}k\right) \quad (18.120)$$

Substituting the series (18.119) into the integral (18.118), taking account of relations (18.120), we find

²⁵ V.A. Kotel'nikov (b. 1908) - Soviet scholar, a well-known specialist in the theory of radio communication. J.M. Whittaker (1905-1984) - British mathematician who worked mainly in complex analysis. C.E. Shannon (1916-2001) - American mathematician and engineer, one of the founders of information theory and inventor of the term "bit" as an abbreviation of "binary digit."

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) e^{i\omega t - i\frac{\pi k}{a}\omega} \right) d\omega = \\
&= \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \int_{-a}^a e^{i\omega(t - \frac{\pi}{a}k)} d\omega
\end{aligned}$$

Calculating these elementary integrals, we arrive at Kotel'nikov's formula

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \frac{\sin a\left(t - \frac{\pi}{a}k\right)}{a\left(t - \frac{\pi}{a}k\right)} \quad (18.121)$$

Formula (18.121) shows that, in order to reconstruct a message described by a band-limited function $f(t)$ whose spectrum is concentrated in the frequency range $|\omega| \leq a$, it suffices to transmit over the channel only the values $f(k\Delta)$ (called marker values) of the function at equal time intervals $\Delta = \pi/a$.

This proposition, together with formula (18.121) is due to V.A. Kotel'nikov and is called Kotel'nikov's theorem or the sampling theorem.

Remark 8. The interpolation formula (18.121) itself was known in mathematics before Kotel'nikov's 1933 paper, but this paper was the first to point out the fundamental significance of the expansion (18.121) for the theory of transmission of continuous messages over a communication channel. The idea of the derivation of formula (18.121) given above is also due to Kotel'nikov.

Remark 9. In reality the transmission and receiving time of a communication is also limited, so that instead of the entire series (18.121) we take one of its partial sums $\sum_{-N}^N$. Special research has been devoted to estimating the errors that thereby arise.

Remark 10. If it is known how much time is required to transmit one sample value of the communication $f(t)$ over a given communication channel, it is easy to estimate the number of such communications that can be transmitted in parallel over that channel. In other words, the possibility arises of estimating the transmitting capability of the channel (and moreover, as a function of the informational saturation of the communications that will affect the spectrum of the signal $f(t)$).

10.6.5 18.3.5 Problems and Exercises

3.y.1

- Write out the proof of relations (18.93)-(18.96) in detail.
- Regarding the Fourier transform as a mapping $f \mapsto \hat{f}$, show that it has the following frequently used properties:

$$f(at) \mapsto \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(the change of scale rule);

$$f(t - t_0) \mapsto \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t_0}$$

(time shift of the input signal - the Fourier preimage - or the translation theorem)

$$\begin{aligned}
[f(t + t_0) \pm f(t - t_0)] &\mapsto \begin{cases} \hat{f}(\omega) 2 \cos \omega t_0 \\ \hat{f}(\omega) 2 \sin \omega t_0 \end{cases} \\
f(t) e^{\pm i\omega_0 t} &\mapsto \hat{f}(\omega \pm \omega_0)
\end{aligned}$$

(frequency shift of the Fourier transform);

$$\begin{aligned} f(t) \cos \omega_0 t &\mapsto \frac{1}{2} [\widehat{f}(\omega - \omega_0) + \widehat{f}(\omega + \omega_0)] \\ f(t) \sin \omega_0 t &\mapsto \frac{1}{2} [\widehat{f}(\omega - \omega_0) - \widehat{f}(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

(amplitude modulation of a harmonic signal);

$$f(t) \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2} \mapsto \frac{1}{4} [2\widehat{f}(\omega) - \widehat{f}(\omega - \omega_0) - \widehat{f}(\omega + \omega_0)]$$

c) Find the Fourier transforms (or, as we say, the Fourier images) of the following functions:

$$\Pi_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & \text{for } |t| \leq A \\ 0 & \text{for } |t| > A \end{cases}$$

(the rectangular pulse);

$$\Pi_A(t) \cos \omega_0 t$$

(a harmonic signal modulated by a rectangular pulse);

$$\Pi_A(t + 2A) + \Pi_A(t - 2A)$$

(two rectangular pulses of the same polarity);

$$\Pi_A(t - A) - \Pi_A(t + A)$$

(two rectangular pulses of opposite polarity);

$$\Lambda_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{A} \left(1 - \frac{|t|}{A}\right) & \text{for } |t| \leq A, \\ 0 & \text{for } |t| > A \end{cases}$$

(a triangular pulse);

$$\begin{aligned} \cos at^2 \quad \text{and} \quad \sin at^2 \quad (a > 0) \\ |t|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad |t|^{-\frac{1}{2}} e^{-a|t|} \quad (a > 0) \end{aligned}$$

d) Find the Fourier preimages of the following functions:

$$\operatorname{sinc} \frac{\omega A}{\pi}, \quad 2i \frac{\sin^2 \omega A}{\omega A}, \quad 2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega A}{\pi},$$

where $\operatorname{sinc} \frac{x}{\pi} := \frac{\sin x}{x}$ is the sample function (cardinal sine).

e) Using the preceding results, find the values of the following integrals, which we have already encountered:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx$$

f) Verify that the Fourier integral of a function $f(t)$ can be written in any of the following forms:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{it\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega(x-t)} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\omega(x-t) dx \end{aligned}$$

3.y.2

Let $f = f(x, y)$ be a solution of the two-dimensional Laplace equation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ in the half-plane $y \geq 0$ satisfying the conditions $f(x, 0) = g(x)$ and $f(x, y) \rightarrow 0$ as $y \rightarrow +\infty$ for every $x \in \mathbb{R}$.

- Verify that the Fourier transform $\widehat{f}(\xi, y)$ of f on the variable x has the form $\widehat{g}(\xi)e^{-y|\xi|}$.
- Find the Fourier preimage of the function $e^{-y|\xi|}$ on the variable ξ .
- Now obtain the representation of the function f as a Poisson integral

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} g(\xi) d\xi$$

which we have met in Example 5 of Sect. 17.4.

3.y.3.

We recall that the n th moment of the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is the quantity $M_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$. In particular, if f is the density of a probability distribution, that is, $f(x) \geq 0$ and $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, then $x_0 = M_1(f)$ is the mathematical expectation of a random variable x with the distribution f and the variance $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) dx$ of this random variable can be represented as $\sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f)$.

Consider the Fourier transform

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

of the function f . By expanding $e^{-i\xi x}$ in a series, show that

- $\widehat{f}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n M_n(f)}{n!} \xi^n$ if, for example, $f \in S$.
- $M_n(f) = (i)^n \widehat{f}^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, \dots$
- Now let f be real-valued, and let $\widehat{f}(\xi) = A(\xi)e^{i\varphi(\xi)}$, where $A(\xi)$ is the absolute value of $\widehat{f}(\xi)$ and $\varphi(\xi)$ is its argument; then $A(\xi) = A(-\xi)$ and $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$. To normalize the problem, assume that $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Verify that in that case

$$\widehat{f}(\xi) = 1 + i\varphi'(0)\xi + \frac{A''(0) - (\varphi'(0))^2}{2}\xi^2 + o(\xi^2) \quad (\xi \rightarrow 0)$$

and

$$x_0 := M_1(f) = -\varphi'(0), \text{ and } \sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f) = -A''(0)$$

3.y.4

a) Verify that the function $e^{-a|x|}$ ($a > 0$), like all its derivatives, which are defined for $x \neq 0$, decreases at infinity faster than any negative power of $|x|$ and yet this function does not belong to the class S .

b) Verify that the Fourier transform of this function is infinitely differentiable on $\mathbb{R}$, but does not belong to S (and all because $e^{-a|x|}$ is not differentiable at $x = 0$).

3.y.5

a) Show that the functions of class S are dense in the space $\mathcal{R}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ of functions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ whose squares are absolutely integrable, endowed with the inner product $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \bar{g})(x) dx$ and the norm it generates $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2(x) dx \right)^{1/2}$ and the metric $d(f, g) = \|f - g\|$.

b) Now let us regard S as a metric space (S, d) with this metric d (convergence in the mean-square sense on $\mathbb{R}^n$). Let $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ or, more briefly, L_2 , denote the completion of the metric space (S, d) (see Sect. 9.5). Each element $f \in L_2$ is determined by a sequence $\{\varphi_k\}$ of functions $\varphi_k \in S$ that is a Cauchy sequence in the sense of the metric d .

Show that in that case the sequence $\{\widehat{\varphi}\}$ of Fourier images of the functions φ_k is also a Cauchy sequence in S and hence defines a certain element $\widehat{f} \in L_2$, which it is natural to call the Fourier transform of $f \in L_2$.

c) Show that a vector-space structure and an inner product can be introduced in a natural way on L_2 , and in these structures the Fourier transform $L_2 \xrightarrow{\widehat{}} L_2$ turns out to be a linear isometry of L_2 onto itself.

d) Using the example of the function $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, one can see that if $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ we do not necessarily have $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Nevertheless, if $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, then, since f is locally integrable, one can consider the function

$$\widehat{f}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Verify that $\widehat{f}_A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ and $\widehat{f}_A \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

e) Prove that $\widehat{f}_A$ converges in L_2 to some element $\widehat{f} \in L_2$ and $\|\widehat{f}_A\| \rightarrow \|\widehat{f}\| = \|f\|$ as $A \rightarrow +\infty$ (this is Plancherel's theorem ²⁶)

3.y.6.

The uncertainty principle. Let $\varphi(x)$ and $\psi(p)$ be functions of class S (or elements of the space L_2 of Problem 5), with $\psi = \widehat{\varphi}$ and $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2(p) dp = 1$. In this case the functions $|\varphi|^2$ and $|\psi|^2$ can be regarded as probability densities for random variables x and p respectively.

a) Show that by a shift in the argument of φ (a special choice of the point from which the argument is measured) one can obtain a new function φ such that $M_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x |\varphi|^2(x) dx = 0$ without changing the value of $\|\widehat{\varphi}\|$, and then, without changing the relation $M_1(\varphi) = 0$ one can, by a similar shift in the argument of ψ arrange that $M_1(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} p |\psi|^2(p) dp = 0$.

b) For real values of the parameter α consider the quantity

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x \varphi(x) + \varphi'(x)|^2 dx \geq 0$$

and, using Parseval's equality and the formula $\widehat{\varphi'}(p) = ip \widehat{\varphi}(p)$, show that $\alpha^2 M_2(\varphi) - \alpha + M_2(\psi) \geq 0$. (For the definitions of M_1 and M_2 see Problem 3.)

c) Obtain from this the relation

$$M_2(\varphi) \cdot M_2(\psi) \geq 1/4$$

This relation shows that the more "concentrated" the function φ itself is, the more "smeared" its Fourier transform, and vice versa (see Examples 1 and 7 and Problem 7b).

In quantum mechanics this relation, called the uncertainty principle, assumes a specific physical meaning. For example, it is impossible to measure precisely both the coordinate of a quantum particle and its momentum. This fundamental fact

(called Heisenberg's ²⁷ uncertainty principle), is mathematically the same as the relation between $M_2(\varphi)$ and $M_2(\psi)$ found above.

²⁶ M. Plancherel (1885-1967) - Swiss mathematician.

The next three problems give an elementary picture of the Fourier transform of generalized functions.

3.y.7.

- a) Using Example 1, find the spectrum of the signal expressed by the functions

$$\Delta_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & \text{for } |t| \leq \alpha \\ 0 & \text{for } |t| > \alpha \end{cases}$$

b) Examine the variation of the function $\Delta_\alpha(t)$ and its spectrum as $\alpha \rightarrow +0$ and tell what, in your opinion, should be regarded as the spectrum of a unit pulse, expressed by the δ -function.

c) Using Example 2, now find the signal $\varphi(t)$ emerging from an ideal lowfrequency filter (with upper frequency limit a) in response to a unit pulse $\delta(t)$.

d) Using the result just obtained, now explain the physical meaning of the terms in the Kotel'nikov series (18.121) and propose a theoretical scheme for transmitting a band-limited signal $f(t)$, based on Kotel'nikov's formula (18.121).

3.y.8.

The space of L. Schwartz. Verify that

- a) If $\varphi \in S$ and P is a polynomial, then $(P \cdot \varphi) \in S$;
 b) if $\varphi \in S$, then $D^\alpha \varphi \in S$ and $D^\beta (PD^\alpha \varphi) \in S$, where α and β are nonnegative multi-indices and P is a polynomial.
 c) We introduce the following notion of convergence in S . A sequence $\{\varphi_k\}$ of functions $\varphi_k \in S$ converges to zero if for all nonnegative multi-indices α and β the sequence of functions $\{x^\beta D^\alpha \varphi(x)\}$ converges uniformly to zero on $\mathbb{R}^n$. The relation $\varphi_k \rightarrow \varphi \in S$ will mean that $(\varphi - \varphi_k) \rightarrow 0$ in S .

The vector space S of rapidly decreasing functions with this convergence is called the Schwartz space.

Show that if $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in S , then $\widehat{\varphi}_k \rightarrow \widehat{\varphi}$ in S as $k \rightarrow \infty$. Thus the Fourier transform is a continuous linear operator on the Schwartz space.

3.y.9.

The space S' of tempered distributions. The continuous linear functionals defined on the space S of rapidly decreasing functions are called tempered distributions. The vector space of such functionals (the conjugate of S) is denoted S' . The value of the functional $F \in S'$ on a function $\varphi \in S$ will be denoted $F(\varphi)$.

- a) Let $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ be a polynomial in n variables and $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ a locally integrable function admitting the estimate $|f(x)| \leq |P(x)|$ at infinity (that is, it may increase as $x \rightarrow \infty$, but only moderately: not faster than power growth). Show that f can then be regarded as a (regular) element of S' if we set

$$f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in S)$$

²⁷ W. Heisenberg (1901-1976) - German physicist, one of the founders of quantum mechanics.

b) Multiplication of a tempered distribution $F \in S'$ by an ordinary function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ is defined, as always, by the relation $(fF)(\varphi) := F(f\varphi)$. Verify that for tempered distributions multiplication is well defined, not only by functions $f \in S$, but also by polynomials $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

c) Differentiation of tempered distributions $F \in S'$ is defined in the traditional way: $(D^\alpha F)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} F(D^\alpha \varphi)$.

Show that this is correctly defined, that is, if $F \in S'$, then $D^\alpha F \in S'$ for every nonnegative integer multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

d) If f and φ are sufficiently regular functions (for example, functions in S), then, as relation (18.113) shows, the following equality holds:

$$\widehat{f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx = f(\widehat{\varphi})$$

This equality (Parseval's equality) is made the basis of the definition of the Fourier transform $\widehat{F}$ of a tempered distribution $F \in S'$. By definition we set $\widehat{F}(\varphi) := F(\widehat{\varphi})$.

Due to the invariance of S under the Fourier transform, this definition is correct for every element $F \in S'$.

Show that it is not correct for generalized functions in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mapping the space $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ of smooth functions of compact support. This fact explains the role of the Schwartz space S in the theory of the Fourier transform and its application to generalized functions.

e) In Problem 7 we acquired a preliminary idea of the Fourier transform of the δ -function. The Fourier transform of the δ -function could have been sought directly from the definition of the Fourier transform of a regular function. In that case we would have found that

$$\widehat{\delta}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)e^{-i(\xi,x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$$

Now show that when we seek the Fourier transform of the tempered distribution $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$ correctly, that is, starting from the equality $\widehat{\delta}(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi})$, the result (still the same) is that $\delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$. (One can renormalize the Fourier transform so that this constant equals 1; see Problem 10).

f) Convergence in S' , as always in generalized functions, is understood in the following sense: $(F_n \rightarrow F)$ in S' as $n \rightarrow \infty := (\forall \varphi \in S (F_n(\varphi) \rightarrow F(\varphi) \text{ as } n \rightarrow \infty))$.

Verify the Fourier inversion formula (the Fourier integral formula) for the δ function:

$$\delta(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-A}^A \cdots \int_{-A}^A \widehat{\delta}(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi$$

g) Let $\delta(x - x_0)$, as usual, denote the shift of the δ -function to the point x_0 , that is, $\delta(x - x_0)(\varphi) = \varphi(x_0)$. Verify that the series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \quad \left(= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \delta(x - n) \right)$$

converges in $S'(\mathbb{R}^n)$. (Here $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$ and $n \in \mathbb{Z}$.)

h) Using the possibility of differentiating a convergent series of generalized functions termwise and taking account of the equality from Problem 13f of Sect. 18.2, show that if $F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$, then

$$\widehat{F} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

- i) Using the relation $\widehat{F}(\varphi) = F(\widehat{\varphi})$, obtain the Poisson summation formula from the preceding result.
- j) Prove the following relation (the θ -formula)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t}n^2} \quad (t > 0)$$

which plays an important role in the theory of elliptic functions and the theory of heat conduction.

3.y.10.

If the Fourier transform $\check{\mathcal{F}}[f]$ of a function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ is defined by the formulas

$$\check{f}(\nu) := \check{\mathcal{F}}[f](\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

many of the formulas relating to the Fourier transform become particularly simple and elegant.

a) Verify that $\widehat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \check{f}\left(\frac{u}{2\pi}\right)$.

b) Show that $\check{\mathcal{F}}[\check{\mathcal{F}}[f]](t) = f(-t)$, that is,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

This is the most natural form of the expansion of f in harmonics of different frequencies ν , and $\check{f}(\nu)$ in this expansion is the frequency spectrum of f .

c) Verify that $\check{\delta} = 1$ and $\check{1} = \delta$.

d) Verify that the Poisson summation formula (18.116) now assumes the particularly elegant form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{\varphi}(n)$$

11 Special Sums and Summation Methods

11.1 Ten Problems in Experimental Mathematics by Bailey, Borwein, et. al.

11.1.1 Introduction

This section was stimulated by the recent SIAM "100 Digit Challenge" of Nick Trefethen, beautifully described in [12] (see also [13]). Indeed, these ten numeric challenge problems are also listed in [15, pp. 22-26], where they are followed by the ten symbolic/numeric challenge problems that are discussed in this article. Our intent in [15] was to present ten problems that are characteristic of the sorts of problems that commonly arise in "experimental mathematics" [15][16]. The challenge in each case is to obtain a high precision numeric evaluation of the quantity, and then, if possible, to obtain a symbolic answer, ideally one with proof. Our goal in this article is to provide solutions to these ten problems, and at the same time, to present a concise account of how one combines symbolic and numeric computation, which may be termed "hybrid computation," in the process of mathematical discovery.

The passage from object α to answer ω often relies on being able to compute the object to sufficiently high precision, for example, to determine numerically whether α is algebraic or is a rational combination of known constants. While some of this is now automated in mathematical computing software such as Maple and Mathematica, in most cases intelligence is needed, say in choosing the search space and in deciding the degree of polynomial to hunt for. In a similar sense, using symbolic computing tools such as those incorporated in Maple and Mathematica often requires significant human interaction to produce material results. Such matters are discussed in greater detail in [15] and [16].

Integer relation detection. Several of these solutions involve the usage of integer relation detection schemes to find experimentally a likely relationship. For a given real vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ an integer relation algorithm is a computational scheme that either finds the n -tuple of integers $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, not all zero, such that $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ or else establishes that there is no such integer vector within a ball of some radius about the origin, where the metric is the Euclidean norm $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}$.

At the present time, the best known integer relation algorithm is the PSLQ algorithm [25] of Helaman Ferguson, who is well known in the community for his mathematical sculptures. Simple formulations of the PSLQ algorithm and several variants are given in [7]. Another widely used integer relation detection scheme involves the Lenstra-LenstraLovasz (LLL) algorithm. The PSLQ algorithm, together with related lattice reduction schemes such as LLL, was recently named one of ten "algorithms of the century" by the publication *Computing in Science and Engineering* [3].

Perhaps the best-known application of PSLQ is the 1995 discovery, by means of a PSLQ computation, of the "BBP" formula for π :

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

This formula permits one to calculate directly binary or hexadecimal digits beginning at the n th digit, without the need to calculate any of the first $n-1$ digits [6]. This result has, in turn, led to more recent results that suggest a possible route to a proof that π and some other mathematical constants are 2-normal (i.e., that every m -long binary string occurs in the binary expansion with limiting frequency b^{-m} [8][9]). The BBP formula even has some practical applications: it is used, for example, in the g95 compiler for transcendental function evaluations [34].

All integer relation schemes require very high precision arithmetic, both in the input data and in the operation of the algorithms. Simple reckoning shows that if an integer relation solution vector $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ has Euclidean norm 10^d , then the input data must be specified to at least dn digits, lest the true solution be lost in a sea of numerical artifacts. In some cases, including one mentioned at the end of the next section, thousands of digits are required before a solution can be found with these methods. This is the principal reason for the great interest in high-precision numerical evaluations in experimental mathematics research. It is the also the motivation behind this set of ten challenge problems.

11.1.2 2. The bifurcation point B_3 .

Problem 1. Compute the value of r for which the chaotic iteration $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$, starting with some x_0 in $(0, 1)$, exhibits a bifurcation between four-way periodicity and eight-way periodicity. Extra credit: This constant is an algebraic number of degree not exceeding twenty. Find the minimal polynomial with integer coefficients that it satisfies.

History and context. The chaotic iteration $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ has been studied since the early days of chaos theory in the 1950s. It is often called the "logistic iteration," since

it mimics the behavior of an ecological population that, if its growth one year outstrips its food supply, often falls back in numbers for the following year, thus continuing to vary in a highly irregular fashion. When r is less than one iterates of the logistic iteration converge to zero. For r in the range $1 < r < B_1 = 3$ iterates converge to some nonzero limit. If $B_1 < r < B_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.449489\dots$, the limiting behavior bifurcates - every other iterate converges to a distinct limit point. For r with $B_2 < r < B_3$ iterates hop between a set of four distinct limit points; when $B_3 < r < B_4$, they select between a set of eight distinct limit points; this pattern repeats until $r > B_\infty = 3.569945672\dots$, when the iteration is completely chaotic (see Figure 1). The limiting ratio $\lim_n (B_n - B_{n-1}) / (B_{n+1} - B_n) = 4.669201\dots$ is known as Feigenbaum's delta constant.

A very readable description of the logistic iteration and its role in modern chaos theory are given in Gleick's book [26]. Indeed, John von Neumann had suggested using the logistic map as a random number generator in the late 1940s. Work by W. Ricker in

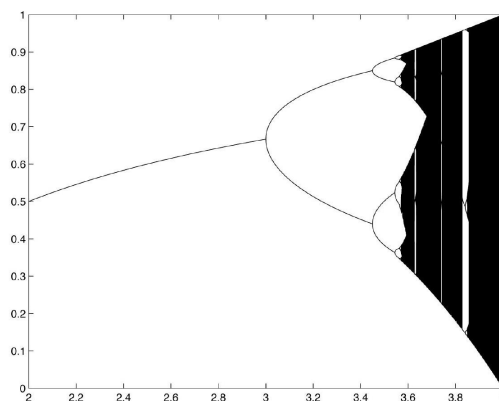


Figure 1: Bifurcation in the logistic iteration.

1954 and detailed analytic studies of logistic maps beginning in the 1950s with Paul Stein and Stanislaw Ulam showed the existence of complicated properties of this type of map beyond simple oscillatory behavior [35, pp. 918-919].

Solution. We first describe how to obtain a highly accurate numerical value of B_3 using a relatively straightforward search scheme. Other schemes could be used to find B_3 ; we present this one to underscore the fact that computational results sufficient for the purposes of experimental mathematics can often be obtained without resorting to highly sophisticated techniques.

Let $f_8(r, x)$ be the eight-times iterated evaluation of $rx(1-x)$, and let $g_8(r, x) = f_8(r, x) - x$. Imagine a three-dimensional graph, where r ranges from left to right and x ranges from bottom to top (as in Figure 1), and where $g_8(r, x)$ is plotted in the vertical (out-of-plane) dimension. Given some initial r slightly less than B_3 , we compute a "comb" of function values at n evenly spaced x values (with spacing h_x) near the limit of the iteration $x_{n+1} = f_8(r, x_n)$. In our implementation, we use $n = 12$, and we start with $r = 3.544$, $x = 0.364$, $h_r = 10^{-4}$, and $h_x = 5 \times 10^{-4}$. With this construction, the comb has $n/2$ negative function values, followed by $n/2$ positive function values. We then increment r by h_r and reevaluate the "comb," continuing in this fashion until two sign changes are observed among the n function values of the "comb." This means that a bifurcation occurred just prior to the current value of r , so we restore r to its previous value (by subtracting h_r), reduce h_r , say by a factor of four, and also reduce the h_x roughly by a factor of 2.5. We continue in this fashion, moving the value of r and its associated "comb" back and forth near the bifurcation point with progressively smaller intervals h_r . The center of the comb in the x -direction must be adjusted periodically to ensure that $n/2$ negative function values are followed by $n/2$ positive function values, and the spacing parameter h_x must be adjusted as well to ensure that two sign changes are disclosed when this occurs. We quit when the smallest of the n function values is within two or three orders of magnitude of the

"epsilon" of the arithmetic (e.g., for 2000-digit working precision, "epsilon" is 10^{-2000}). The final value of r is then the desired value B_3 , accurate to within a tolerance given by the final value of r_h . With 2000-digit working precision, our implementation of this scheme finds B_3 to 1330-digit accuracy in about five minutes on a 2004-era computer. The first hundred digits are as follows:

$$B_3 = 3.544090359551922853615965986604804540583099845444573675457812530 \\ 3058429428588630122562585664248917999626...$$

With even a moderately accurate value of r in hand (at least two hundred digits or so), one can use a PSLQ program (such as the PSLQ programs available at the URL <http://crd.lbl.gov/dhbailey/mpdist>) to check whether r is an algebraic constant. This is done by computing the vector $(1, r, r^2, \dots, r^n)$ for various n , beginning with a small value such as two or three, and then searching for integer relations among these $n+1$ real numbers. When $n \geq 12$, the relation

$$0 = r^{12} - 12r^{11} + 48r^{10} - 40r^9 - 193r^8 + 392r^7 + 44r^6 + 8r^5 - 977r^4 \\ - 604r^3 + 2108r^2 + 4913 \quad (1)$$

can be recovered.

A symbolic solution that explicitly produces the polynomial (1) can be obtained as follows. We seek a sequence $x_1, x_2, \dots, x_4$ that satisfies the equations

$$x_2 = rx_1(1 - x_1), x_3 = rx_2(1 - x_2), x_4 = rx_3(1 - x_3), x_1 = rx_4(1 - x_4)$$

and

$$1 = \left| \prod_{i=1}^4 r(1 - 2x_i) \right|$$

The first four conditions represent a period-4 sequence in the logistic equation $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, and the last condition represents the stability of the cycle, which must be 1 or -1 for a bifurcation point (see [33] for details).

First, we deal with the system corresponding to $1 + \prod_{i=1}^4 r(1 - 2x_i) = 0$. We compute the lexicographic Groebner basis in Maple:

`with(Groebner):`

```
L:= [x2 - r*x1*(1-x1), x3 - r*x2*(1-x2), x4 - r*x3*(1-x3),
x1 - r*x4*(1-x4), r~4*(1-2*x1)*(1-2*x2)*(1-2*x3)*(1-2*x4)+1];
gbasis(L,plex(x1,x2,x3,x4,r));
```

After a cup of coffee, we discover the univariate element

$$(r^4 + 1)(r^4 - 8r^3 + 24r^2 - 32r + 17) \times (r^4 - 4r^3 - 4r^2 + 16r + 17) \times \\ (r^{12} - 12r^{11} + 48r^{10} - 40r^9 - 193r^8 + 392r^7 + 44r^6 + 8r^5 - 977r^4 \\ - 604r^3 + 2108r^2 + 4913)$$

in the Groebner basis, in which the monomial ordering is lexicographical with r last.

The first three of these polynomials have no real roots, and the fourth has four real roots. Using trial and error, it is easy to determine that B_3 is the root of the minimal polynomial

$$r^{12} - 12r^{11} + 48r^{10} - 40r^9 - 193r^8 + 392r^7 + 44r^6 + 8r^5 - 977r^4 \\ - 604r^3 + 2108r^2 + 4913$$

which has the numerical value stated earlier. The corresponding Mathematica code reads:

```
GroebnerBasis[{x2 - r x1(1 - x1), x3 - r x2(1 - x2),
  x4 - r x3(1 - x3), x1 - r x4(1 - x4),
  r^4(1-2x1)(1-2x2)(1-2x3)(1-2x4) + 1},
  r,
  {x1, x2, x3, x4}, MonomialOrder -> EliminationOrder] // Timing
```

This requires only 1.2 seconds on a 3 GHz computer. These computations can also be recreated very quickly in Magma, an algebraic package available at <http://magma.maths.usyd.edu.au/magma>:

```
Q:= RationalField(); P<x,y,z,w,r>:= PolynomialRing(Q,5);
I:= ideal<P| y - r*x*(1-x), z - r*y*(1-y), w - r*z*(1-z),
  x - r*w*(1-w), r^4*(1-2*x)*(1-2*y)*(1-2*z)*(1-2*\textrm{w})+1>;
time B:= GroebnerBasis(I);
```

This took 0.050 seconds on a 2.4 Ghz Pentium 4.

The significantly more challenging problem of computing and analyzing the constant $B_4 = 3.564407266095\dots$ is discussed in [7]. In this study, conjectural reasoning suggested that B_4 might satisfy a 240-degree polynomial, and, in addition, that $\alpha = -B_4(B_4 - 2)$ might satisfy a 120-degree polynomial. The constant α was then computed to over 10,000-digit accuracy, and an advanced three-level multi-pair PSLQ program was employed, running on a parallel computer system, to find an integer relation for the vector $(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{120})$. A numerically significant solution was obtained, with integer coefficients descending monotonically from 257^{30} , which is a 73 -digit integer, to the final value, which is one (a striking result that is exceedingly unlikely to be a numerical artifact). This experimentally discovered polynomial was recently confirmed in a large symbolic computation [30].

Additional information on the Logistic Map is available at <http://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html>.

11.1.3 3. Madelung's constant

$$\sum_{(m,n,p) \neq 0} \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$\sum_{(m,n,p) \neq 0} \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \quad (2)$$

where convergence means the limit of sums over the integer lattice points enclosed in increasingly large cubes surrounding the origin. Extra credit: Usefully identify this constant.

History and context. Highly conditionally convergent sums like this are very common in physical chemistry, where they are usually written down with no thought of convergence. The sum in question arises as an idealization of the electrochemical stability of NaCl. One computes the total potential at the origin when placing a positive or negative charge at each nonzero point of the cubic lattice [16, chap. 4].

Solution. It is important to realize that this sum must be viewed as the limit of the sum in successively larger cubes. The sum diverges when spheres are used instead. To clarify this consider, for complex s , the series

$$b_2(s) = \sum_{(m,n) \neq 0} \frac{(-1)^{m+n}}{(m^2+n^2)^{s/2}}, \quad b_3(s) = \sum_{(m,n,p) \neq 0} \frac{(-1)^{m+n+p}}{(m^2+n^2+p^2)^{s/2}} \quad (3)$$

These converges in two and three dimensions, respectively, over increasing "cubes," provided that $\operatorname{Re} s > 0$. When $s = 1$, one may sum over circles in the plane but not spheres in three-space, and one may not sum over diamonds in dimension two. Many chemists do not know

that $b_3(1) \neq \sum_n (-1)^n r_3(n)/\sqrt{n}$, a series that arises by summing over increasing spheres but that diverges. Indeed, the number $r_3(n)$ of representations of n as a sum of three squares is quite irregular - no number of the form $8n + 7$ has such a representation and is not $O(n^{1/2})$. This matter is somewhat neglected in the discussion of Madelung's constant in Julian Havil's deservedly popular recent book *Gamma: Exploring Euler's Constant*, [27], which contains a wealth of information related to each of our problems in which Euler had a hand.

Straightforward methods to compute (3) are extremely unproductive. Such techniques produce at most three digits - indeed, the physical model should have a solar-system sized salt crystal to justify ignoring the boundary. Thus, we are led to using more sophisticated methods. We note

$$b_3(s) = \sum' \frac{(-1)^{i+j+k}}{(i^2 + j^2 + k^2)^{s/2}}$$

where $\sum'$ signifies a sum over $\mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, and let $M_s(f)$ denote the Mellin transform

$$M_s(f) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx$$

The quantity that we wish to compute is $b_3(1)$. It follows by symmetry that

$$\begin{aligned} b_3(1) &= \sum' \frac{(-1)^{i+j+k} (i^2 + j^2 + k^2)}{(i^2 + j^2 + k^2)^{3/2}} \\ &= 3 \sum' \frac{(-1)^i (i^2) (-1)^{j+k}}{(i^2 + j^2 + k^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (4)$$

We note that $M_s(e^{-t}) = \Gamma(s)$, so

$$M_{3/2}(q^{n^2+j^2+k^2}) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (n^2 + j^2 + k^2)^{-3/2}$$

where n, j , and k are arbitrary integers and $q = e^{-t}$. Continuing, we rewrite equation (4) as

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) b_3(1) = 3M_{3/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n n^2 q^{n^2} \theta_4^2(x) \right]$$

where $\theta_4(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{n^2}$ is the usual Jacobi theta-function. Since the theta transform-a form of Poisson summation-yields $\theta_4(e^{-\pi/s}) = \sqrt{s} \theta_2(e^{-s\pi})$, it follows that

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) b_3(1) = 3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 M_{3/2} \left(\sum (-1)^n n^2 q^{n^2} \frac{\pi}{x} \theta_2^2\left(\frac{\pi^2}{x}\right) \right)$$

Also, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}/2$, so

$$b_3(1) = 12\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sum_{(j,k) \text{ odd}} \int_0^\infty \left[e^{-n^2 x - (\pi^2/4x)(j^2+k^2)} \right] x^{-1/2} dx$$

The integral is evaluated in [19, Exercise 4, sec. 2.2] and is $(\pi/n^2)^{1/2} e^{-\pi n \sqrt{j^2+k^2}}$, whence

$$b_3(1) = 48\pi \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-\pi n \sqrt{(2j+1)^2 + (2k+1)^2}}$$

Finally, when $a > 0$,

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-an} = \frac{4e^{-a}}{(1 + e^{-a})^2} = \operatorname{sech}^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

from which we obtain

$$b_3(1) = 12\pi \sum_{\substack{m,n \geq 1 \\ m,n \text{ odd}}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi}{2} (m^2 + n^2)^{1/2}\right) \quad (5)$$

Summing m and n from 1 up to 81 in (5) gives

$$b_3(1) = 1.74756459463318219063621203554439740348516143662474175 \\ 8152825350765040623532761179890758362694607891...$$

It is possible to accelerate the convergence further still. Details can be found in [19],[16].

There are closed forms for sums with an even number of variables, up to 24 and beyond. For example, $b_2(2s) = -4\alpha(s)\beta(s)$, where

$$\alpha(s) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n / (n+1)^s$$

and

$$\beta(s) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n / (2n+1)^s$$

In particular, $b_2(2) = -\pi \log 2$. No such closed form for b_3 is known, while much work has been expended looking for one. The formula for b_2 is due to Lorenz (1879). It was rediscovered by G. H. Hardy and is equivalent to Jacobi's Lambert series formula for $\theta_3^2(q)$:

$$\theta_3^2(q) - 1 = 4 \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}}$$

This, in turn, is equivalent to the formula for the number $r_2(n)$ of representations of n as a sum of two squares, counting order and sign,

$$r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$$

where d_k is the number of divisors of n congruent to k modulo four. The analysis of three squares is notoriously harder.

Additional information on Madelung's constant and lattice sums is available at

<http://mathworld.wolfram.com/MadelungConstants.html> and

<http://mathworld.wolfram.com/LatticeSum.html>.

11.1.4 4. Double Euler sums.

Problem 3. Evaluate the sum

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{k}\right)^2 \frac{1}{(k+1)^3} \quad (6)$$

Extra credit: Evaluate this constant as a multiterm expression involving well-known mathematical constants. This expression has seven terms and involves π , $\log 2$, $\zeta(3)$, and $\text{Li}_5(1/2)$, where $\text{Li}_n(x) = \sum_{k>0} x^n/n^k$ is the n th polylogarithm. (Hint: The expression is "homogenous," in the sense that each term has the same total "degree." The degrees of π and $\log 2$ are each 1, the degree of $\zeta(3)$ is 3, the degree of $\text{Li}_5(1/2)$ is 5, and the degree of α^n is n times the degree of α .)

History and context. In April 1993, Enrico Au-Yeung, an undergraduate at the University of Waterloo, brought to the attention of one of us (Borwein) the curious result

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)^2 k^{-2} = 4.59987\ldots \approx \frac{17}{4}\zeta(4) = \frac{17\pi^4}{360} \quad (7)$$

The function $\zeta(s)$ in (7) is the classical Riemann zeta-function:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Euler had solved Bernoulli's Basel problem when he showed that, for each positive integer n , $\zeta(2n)$ is an explicit rational multiple of π^{2n} [16, sec. 3.2].

Au-Yeung had computed the sum in (7) to 500,000 terms, giving an accuracy of five or six decimal digits. Suspecting that his discovery was merely a modest numerical coincidence, Borwein sought to compute the sum to a higher level of precision. Using Fourier analysis and Parseval's equation, he obtained

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t)^2 \log^2 \left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)^2}{(n+1)^2} \quad (8)$$

The idea here is that the series on the right of (8) permits one to evaluate (7), while the integral on the left can be computed using the numerical quadrature facility of Mathematica or Maple. When he did this, Borwein was surprised to find that the conjectured identity holds to more than thirty digits. We should add here that, by good fortune, $17/360 = 0.047222\ldots$ has period one and thus can plausibly be recognized from its first six digits, so that Au-Yeung's numerical discovery was not entirely far-fetched.

Solution. We define the multivariate zeta-function by

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k > 0} \prod_{j=1}^k n_j^{-|s_j|} \sigma_j^{-n_j}$$

where the $s_1, s_2, \dots, s_k$ are nonzero integers and $\sigma_j = \text{signum}(s_j)$. A fast method for computing such sums based on Hölder convolution is discussed in [20] and implemented in the EZFace+ interface, which is available as an online tool at the URL

<http://www.cecm.sfu.ca/projects/ezface+>. Expanding the squared term in (6), we have

$$C = \sum_{0 < i, j < k} \frac{(-1)^{i+j}}{ijk^3} = 2\zeta(3, -1, -1) + \zeta(3, 2) \quad (9)$$

Evaluating this in EZFace+ we quickly obtain

$$C = 0.156166933381176915881035909687988193685776709840303872957529354 \\ 497075037440295791455205653709358147578...$$

Given this numerical value, PSLQ or some other integer-relation-finding tool can be used to see if this constant satisfies a rational linear relation with the following constants (as suggested in the hint): $\pi^5, \pi^4 \log(2), \pi^3 \log^2(2), \pi^2 \log^3(2), \pi \log^4(2), \log^5(2), \pi^2 \zeta(3), \pi \log(2) \zeta(3), \log^2(2) \zeta(3), \zeta(5), \text{Li}_5(1/2)$. The result is quickly found to be

$$C = 4 \text{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{30} \log^5(2) - \frac{17}{32} \zeta(5) - \frac{11}{720} \pi^4 \log(2) + \frac{7}{4} \zeta(3) \log^2(2) \\ + \frac{1}{18} \pi^2 \log^3(2) - \frac{1}{8} \pi^2 \zeta(3)$$

This result has been proved in various ways, both analytic and algebraic. Indeed, all evaluations of sums of the form $\zeta(\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_m)$ with weight $w = \sum_k a_m, (k < 8)$, as in (9) have been established.

Further history and context. What Borwein did not know at the time was that AuYeung's suspected identity follows directly from a related result proved by De Doelder in 1991. In fact, it had cropped up even earlier as a problem in this Monthly, but the story goes back further still. Some historical research showed that Euler considered these summations. In response to a letter from Goldbach, he examined sums that are equivalent to

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{k^m}\right) \frac{1}{(k+1)^n} \quad (10)$$

The great Swiss mathematician was able to give explicit values for certain of these sums in terms of the Riemann zeta-function.

Starting from where we left off in the previous section provides some insight into evaluating related sums. Recall that the Taylor expansion of $f(x) = -\frac{1}{2} \log(1-x) \log(1+x)$ takes the form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2k-1}\right) \frac{x^{2k}}{2k}$$

Applying Parseval's identity to $f(e^{it})$, we have an effective way of computing

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2k-1}\right)^2}{(2k)^2}$$

in terms of an integral that can be rapidly evaluated in Maple or Mathematica. Alternatively, we may compute

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right)^2}{k^2}$$

The Fourier expansions of $(\pi - t)/2$ and $-\log|2 \sin(t/2)|$ are

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}, \quad (0 < t < 2\pi)$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n} = -\log |2 \sin(t/2)|, \quad (0 < t < 2\pi) \quad (11)$$

respectively. Multiplying these together, simplifying, and doing a partial fraction decomposition gives

$$-\log |2 \sin(t/2)| \cdot \frac{\pi - t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sin(nt)$$

on $(0, 2\pi)$. Applying Parseval's identity results in

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t)^2 \log^2(2 \sin(t/2)) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})^2}{(n+1)^2}$$

The integral may be computed numerically in Maple or Mathematica, delivering an approximation to the sum.

The Clausen functions defined by

$$\text{Cl}_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}, \quad \text{Cl}_3(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^3}, \quad \text{Cl}_4(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^4}, \dots$$

arise as repeated antiderivatives of (11). They are useful throughout harmonic analysis and elsewhere. For example, with $\alpha = 2 \arctan \sqrt{7}$, one discovers with the aid of PSLQ that

$$6\text{Cl}_2(\alpha) - 6\text{Cl}_2(2\alpha) + 2\text{Cl}_2(3\alpha) \stackrel{?}{=} 7\text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 7\text{Cl}_2\left(\frac{4\pi}{7}\right) - 7\text{Cl}_2\left(\frac{6\pi}{7}\right) \quad (12)$$

(here the question mark is used because no proof is yet known) or, in what can be shown to be equivalent, that

$$\frac{24}{7\sqrt{7}} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \log \left(\left| \frac{\tan(t) + \sqrt{7}}{\tan(t) - \sqrt{7}} \right| \right) dt \stackrel{?}{=} L_{-7}(2) = 1.151925470... \quad (13)$$

This arises from the volume of an ideal tetrahedron in hyperbolic space [15, pp. 90-91]. (Here $L_{-7}(s) = \sum_{n>0} \chi_{-7}(n)n^{-s}$ is the primitive L -series modulo seven, whose character pattern is 1, 1, -1, 1, -1, -1, 0, which is given by

$$\chi_{-7}(k) = 2(\sin(k\tau) + \sin(2k\tau) - \sin(3k\tau))/\sqrt{7}$$

with $\tau = 2\pi/7$.)

Although (13) has been checked to twenty thousand decimal digits, by using a numerical integration scheme we shall describe in section 8, and although it is known for K -theoretic reasons that the ratio of the left- and right-hand sides of (12) is rational [14], to the best of our knowledge there is no proof of either (12) or (13). We might add that recently two additional conjectured identities related to (13) have been discovered by PSLQ computations. Let I_n be the definite integral of (13), except with limits $n\pi/24$ and $(n+1)\pi/24$. Then

$$\begin{aligned}
 -2I_2 - 2I_3 - 2I_4 - 2I_5 + I_8 + I_9 - I_{10} - I_{11} &\stackrel{?}{=} 0 \\
 I_2 + 3I_3 + 3I_4 + 3I_5 + 2I_6 + 2I_7 - 3I_8 - I_9 &\stackrel{?}{=} 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Readers who attempt to calculate numerical values for either the integral in (13) or the integral I_9 in (14) should note that the integrand has a nasty singularity at $t = \arctan \sqrt{7}$.

In retrospect, perhaps it was for the better that Borwein had not known of De Doelder's and Euler's results, because Au-Yeung's intriguing numerical discovery launched a fruitful line of research by a number of researchers that has continued until the present day. Sums of this general form are known nowadays as "Euler sums" or "Euler-Zagier sums." Euler sums can be studied through a profusion of methods: combinatorial, analytic, and algebraic. The reader is referred to [16, chap. 3] for an overview of Euler sums and their applications. We take up the story again in Problem 9.

Additional information on Euler sums is available at <http://mathworld.wolfram.com/EulerSum.html>.

11.1.5 5. Khintchine's constant $K_0 = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{k(k+2)}\right]^{\log_2 k}$

$$K_0 = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{k(k+2)}\right]^{\log_2 k} = \prod_{k=1}^{\infty} k^{\left[\log_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)\right]} \tag{15}$$

Extra credit: Evaluate this constant in terms of a less-well-known mathematical constant.

History and context. Given some particular continued fraction expansion $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$, consider forming the limit

$$K_0(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 a_1 \cdots a_n)^{1/n}$$

Based on the Gauss-Kuzmin distribution, which establishes that the digit distribution of a random continued fraction satisfies $\text{Prob}\{a_k = n\} = \log_2(1 + (k(k+2))^{-1})$, Khintchine showed that the limit exists for almost all continued fractions and is a certain constant, which we now denote K_0 . This circle of ideas is accessibly developed in [27]. As such a constant has an interesting interpretation, computation seems like the next step.

Taking logarithms of both sides of (15) and simplifying, we have

$$\log 2 \cdot \log K_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \log n \cdot \log \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$$

Such a series converges extremely slowly. Computing the sum of the first 10000 terms gives only two digits of $\log 2 \cdot \log K_0$. Thus, direct computation again proves to be quite difficult.

Solution. Rewriting $\log n$ as the telescoping sum

$$\log n = (\log n - \log(n-1)) + \cdots + (\log 2 - \log 1) = \sum_{k=2}^n \log \left(\frac{k}{k-1}\right)$$

we see that

$$\log 2 \cdot \log K_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^n \log \frac{k}{k-1} \cdot \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

We interchange the order of summation to obtain

$$\log 2 \cdot \log K_0 = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \log \frac{k}{k-1}. \quad (16)$$

But

$$\sum_{n=k}^{\infty} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \log \frac{(k+1)}{k} = \log \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

so (16) transforms into

$$\log 2 \cdot \log K_0 = - \sum_{k=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{k}\right) \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (17)$$

The Maclaurin series for $-\log(1-x)\log(1+x)$ is

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1}\right) \frac{x^{2k}}{k}$$

This allows us to rewrite $\log 2 \cdot \log K_0$ as

$$\begin{aligned} \log 2 \log K_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1}\right) \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1}\right) \frac{1}{k} (\zeta(2k) - 1) \end{aligned}$$

Appealing to either Maple or Mathematica, we can easily compute this sum. Taking the first 161 terms, we obtain one hundred digits of K_0 :

$$\begin{aligned} K_0 = & 2.68545200106530644530971483548179569382038229399446295 \\ & 3051152345557218859537152002801141174931847709... \end{aligned}$$

However, faster convergence is possible, and the constant has now been computed to more than seven thousand places. Moreover, the harmonic and other averages are similarly treated. It appears to satisfy its own predicted behavior (for details, see [5],[32]). Correspondingly, using 10^8 terms one can obtain the approximation $K_0(\pi) \approx 2.675...$. Note however that $K_0(e) = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3n]{(2n)!}$, since e is a member of the measure zero set of exceptions not having $K_0(\alpha) = K_0$, as a result of the non-Gauss-Kuzmin distribution of terms in the continued fraction $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$.

We emphasize that while it is known that almost all numbers α have limits $K_0(\alpha)$ that equal K_0 , this has not been exhibited for any explicit number α , excluding artificial examples constructed using their continued fractions [5].

11.1.6 6. Ramanujan's AGM continued fraction

Problem 5. For positive real numbers a, b , and η define $R_\eta(a, b)$ by

$$R_\eta(a, b) = \frac{a}{\eta + \frac{b^2}{\eta + \frac{4a^2}{\eta + \frac{9b^2}{\eta + \ddots}}}}$$

Calculate $R_1(2, 2)$. Extra credit: Evaluate this constant as a two-term expression involving a well-known mathematical constant.

History and context. This continued fraction arises in Ramanujan's Notebooks. He discovered the beautiful fact that

$$\frac{R_\eta(a, b) + R_\eta(b, a)}{2} = R_\eta\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$$

The authors wished to record this in [15] and to check the identity computationally. A first attempt to find $R_1(1, 1)$ by direct numerical computation failed miserably, and with some effort only three reliable digits were obtained: 0.693.... With hindsight, it was realized that the slowest convergence of the fraction occurs in the mathematically simplest case, namely, when $a = b$. Indeed, $R_1(1, 1) = \log 2$ as the first primitive numerics had tantalizingly suggested.

Solution. Attempting a direct computation of $R_1(2, 2)$ using a depth of twenty thousand gives only two digits. Thus we must seek more sophisticated methods. From [16, (1.11.70)] we learn that when $0 < b < a$,

$$\mathcal{R}_1(a, b) = \frac{\pi}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{aK(k)}{K^2(k) + a^2 n^2 \pi^2} \operatorname{sech}\left(n\pi \frac{K(k')}{K(k)}\right) \quad (18)$$

where $k = b/a = \theta_2^2/\theta_3^2$ and $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Here θ_2 and θ_3 are Jacobian theta-functions, and K is a complete elliptic integral of the first kind.

Writing (18) as a Riemann sum, we find that

$$\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}_1(a, a) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sech}(\pi x/(2a))}{1+x^2} dx = 2a \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{1+(2k-1)a} \quad (19)$$

where the final equality follows from the Cauchy-Lindelöf theorem. This sum may also be written as

$$\mathcal{R}(a) = \frac{2a}{1+a} {}_2F_1\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2a} + \frac{3}{2}; -1\right)$$

where ${}_2F_1(\cdot)$ denotes the hypergeometric function [1, p. 556]. The latter form is what we use in Maple or Mathematica to determine

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(2) = & 0.97499098879872209671990033452921084400592021999471060574526825 \\ & 1285877387455708594352325320911129362... \end{aligned}$$

This constant, as written, is a bit difficult to recognize, but if one first divides by $\sqrt{2}$ and exploits the Inverse Symbolic Calculator, an online tool available at the URL <http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/ISCmain.html>, it becomes apparent that the quotient is $\pi/2 - \log(1 + \sqrt{2})$. Thus we conclude, experimentally, that

$$\mathcal{R}(2) = \sqrt{2}[\pi/2 - \log(1 + \sqrt{2})]$$

Indeed, it follows (see [18]) that

$$\mathcal{R}(a) = 2 \int_0^1 \frac{t^{1/a}}{1+t^2} dt$$

Note that $\mathcal{R}(1) = \log 2$. No nontrivial closed-form expression is known for $\mathcal{R}(a, b)$ when $a \neq b$, although

$$\mathcal{R}_1\left(\frac{1}{4\pi}\beta\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \frac{\sqrt{2}}{8\pi}\beta\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\operatorname{sech}(n\pi)}{1+n^2}$$

is almost closed. It would be pleasant to find a direct proof of (19). Further details are to be found in [18], [17], and [16].

11.1.7 7. Expected distance on a unit square

Problem 6. Calculate the expected distance E_2 between two random points on different sides of the unit square:

$$E_2 = \frac{2}{3} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy + \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + (u - v)^2} du dv \quad (20)$$

Extra credit: Express this constant as a three-term expression involving algebraic constants and an evaluation of the natural logarithm with an algebraic argument.

History and context. This evaluation and the next were discovered, in slightly more complicated form, by James D. Klein [16, p. 66]. He computed the numerical integral and compared it with the result of a Monte Carlo simulation. Indeed, a straightforward approach to a quick numerical value for an arbitrary iterated integral is to use a Monte-Carlo simulation, which entails approximating the integral by a sum of function values taken at pseudo-randomly generated points within the region. It is important to use a good pseudo-random number generator for this purpose. We tried doing a Monte Carlo evaluation for this problem, using a pseudo-random number generator based on the recently discovered class of provably normal numbers [9], [15, pp. 169-70]. The results we obtained for the two integrals in question, with 10^8 pseudo-random pairs, are 0.765203... and 1.076643..., respectively, yielding an expected distance of 0.869017... Unfortunately, none of these three values immediately suggests a closed form, and they are not sufficiently accurate (because of statistical limitations) to be suitable for PSLQ or other constant recognition tools. More digits are needed.

Solution. It is possible to calculate high-precision numerical values for these two integrals using a two-dimensional quadrature (numerical integration) program. In our program, we employed a two-dimensional version of the "tanh-sinh" quadrature algorithm, which we will discuss in more detail in Problem 8. Two-dimensional quadrature is usually much more expensive than one-dimensional quadrature, at a given precision level, because many more function evaluations must be performed. Often a highly parallel computer system must be used to obtain a high-precision result in reasonable run time [11]. Nonetheless, in this case we were able to evaluate the first of the two integrals to 108-digit accuracy in twenty-one minutes runtime on a 2004-era computer, and the second to 118-digit accuracy in just twenty seconds. The first is more difficult due to nondifferentiability of the integrand at the origin.

Indeed, in this case both Maple and Mathematica are able to evaluate each of these integrals numerically, as is, to more than one hundred decimal digit accuracy in just a few minutes run time, either by evaluating the inner integral symbolically and the outer integral numerically or else by performing full two-dimensional numerical quadrature. Maple, Mathematica, and the two-dimensional quadrature program all agreed on the following numerical value for the expected distance:

$$\alpha = 0.86900905527453446388497059434540662485671927963168056 \\ 9660350864584179822174693053113213554875435754...$$

497075037440295791455205653709358147578....

Using PSLQ, with the basis elements $\alpha, \sqrt{2}, \log(\sqrt{2} + 1)$, and 1, we obtain

$$\alpha = \frac{1}{9}\sqrt{2} + \frac{5}{9}\log(\sqrt{2} + 1) + \frac{2}{9} \quad (21)$$

An alternate solution is to attempt to evaluate the integrals symbolically! In fact, in this case Version 5.1 of Mathematica can do both the integrals "out of the box," whereas in the first case Maple appears to need coaxing, for instance, by converting to polar coordinates:

$$2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} r^2 dr d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{6}\log(2) + \frac{1}{3}\log(2 + \sqrt{2})$$

since the radius for a given θ is $1/\cos \theta$. As for the second integral, Maple and Mathematica both give

$$-\frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{2}\log(1 + \sqrt{2}) + \frac{2}{3}$$

To obtain the second integral analytically, write it as $2 \int_0^1 \int_0^u \sqrt{1 + (u - v)^2} dv du$. Now change variables (set $t = u - v$) to obtain $1/2 \int_0^1 \{u\sqrt{1 + u^2} + \operatorname{arcsinh} u\} du$. Thus, the expected distance is

$$\frac{1}{9}\sqrt{2} - \frac{1}{9}\log(2) + \frac{2}{9}\log(2 + \sqrt{2}) - \frac{1}{6}\log(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{6}\log(1 + \sqrt{2}) + \frac{2}{9}$$

which can be simplified to the formula (21) above.

Additional information on the problem is available at <http://mathworld.wolfram.com/SquareLinePicking.html>.

11.1.8 8. Expected distance on a unit cube

Problem 7. Calculate the expected distance between two random points on different faces of the unit cube. (Hint: This can be expressed in terms of integrals as

$$E_3 := \frac{4}{5} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - w)^2} dw dx dy dz + \frac{1}{5} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + (y - u)^2 + (z - w)^2} du dw dy dz \Bigg)$$

Extra credit: Express this constant as a six-term expression involving algebraic constants and two evaluations of the natural logarithm with algebraic arguments.

History and context. As we noted earlier, this evaluation was discovered, in essentially the same form, by Klein [16, p. 66]. As with Problem 6, a Monte Carlo integration scheme can be used to obtain a quick approximation to the integrals. The values we obtained were 0.870792... and 1.148859..., respectively, yielding an expected distance of 0.926406.... Once again, however, these numerical values do not immediately suggest a closed-form evaluation, yet the accuracy is too low to apply PSLQ or other constant recognition schemes. What's more, in this case, unlike Problem 6, neither Maple nor Mathematica are able to evaluate these four-fold integrals directly-though Mathematica comes close. As in most cases "help" is needed, in the form of

mathematical manipulation to render these integrals in a form where mathematical computing software can evaluate them-numerically or symbolically.

Solution. Let ${}_2F_1(\cdot)$ again denote the hypergeometric function [1, p. 556]. One may show that the first integral evaluates to

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{{}_2F_1(1/2, -n+2; 3/2; 1/2)}{(2n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(5/2-n)} + \frac{4}{15}\sqrt{2} + \frac{2}{5}\log(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{75}\pi$$

and the second generalized hypergeometric function formally evaluates to

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}_4F_3(1, 1/2, -1/2-n, -n-1; 2, 1/2-n, 3/2; -1)}{(2n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(3/2-n)} \\ & - \frac{2}{25} + \frac{\sqrt{2}}{50} + \frac{1}{10}\log(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

(Although the second diverges as a Riemann sum, both Maple and Mathematica can handle it, with some human help, producing numerical values of the corresponding Borel sum.) Both expressions are consequences of the binomial theorem, modulo an initial integration with respect to z in the first case. These expansions allow one to compute the expectation to high precision numerically and to express both of the individual integrals in terms of the same set of constants. The numerical value of the desired expectation is

0.926390055174046729218163586547779014444960190107335046732521921271418
504594036683829313473075349968212...

An integer relation search in the span of $\{1, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \log(1+\sqrt{2}), \log(2+\sqrt{3})\}$ produces

$$\frac{4}{75} + \frac{17}{75}\sqrt{2} - \frac{2}{25}\sqrt{3} - \frac{7}{75}\pi + \frac{7}{25}\log(1+\sqrt{2}) + \frac{7}{25}\log(7+4\sqrt{3})$$

With substantial effort we were able to nurse the symbolic integral out of Maple. We started, as in the previous problem, by integrating with respect to w over $[0, z]$, doubling, and continuing in this fashion until we reduced the problem to showing that

$$\begin{aligned} & 3 \int_0^1 \frac{-(x^2+1)\ln(\sqrt{2+x^2}-1) + \ln(\sqrt{2}-1)}{x^2(x^2+1)} dx \\ & - \int_0^1 (2x^3+6x^2+3)\ln(\sqrt{2+x^2}-1) dx = \\ & -\frac{5}{3}\pi + \frac{7}{6}\sqrt{2} + \frac{7}{2}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{3}{2}\ln(2) + \ln(1+\sqrt{3}) + \frac{37}{24} + \frac{3}{4}\ln(1+\sqrt{2})\pi \end{aligned}$$

which we leave to the reader to establish.

Mathematica was more helpful: consider

```
4/5 Integrate[Sqrt[x^2 + y^2 + (z - w)^2], {x, 0, 1}, {y, 0, 1},
{w, 0, 1}, {z, 0, 1}] // Timing
{52.483021*Second, (168*Sqrt[2] - 24*Sqrt[3] - 44*Pi + 72*ArcSinh[1] +
162*ArcSinh[1/Sqrt[2]] + 24*Log[2] - 240*Log[-1 + Sqrt[3]] +
192*Log[1 + Sqrt[3]] + 20*Log[26 + 15*Sqrt[3]] + 3*Log[70226 +
40545*Sqrt[3]])/900}
```

This form is what the shipping version of Mathematica 5.1 returns on a 3.0 GHz Pentium 4. It evaluates the first integral directly, while the second one can be done with a little help. The combined outcomes can then be simplified symbolically to the result shown.

There is also an ingenious method due to Michael Trott using a Laplace transform to reduce the four-dimensional integrals to integrals over one-dimensional integrands. It proceeds by eliminating the square roots (which cause most of the difficulty in symbolic evaluation of the multiple integrals) at the expense of introducing one additional (but "easy") integral. The original problem can then be written in terms of the single integral

$$\int_0^\infty \left[-\frac{14}{25}e^{-z^2}\sqrt{\pi}\operatorname{erf}^2(z) + \frac{28e^{-2z^2}\operatorname{erf}(z)}{25z} + \frac{7e^{-z^2}\operatorname{erf}(z)}{25z} - \frac{12e^{-3z^2}}{25\sqrt{\pi}} + \frac{68e^{-2z^2}}{75\sqrt{\pi}} + \frac{8e^{-z^2}}{75\sqrt{\pi}} \right] dz,$$

which can be evaluated directly in Mathematica to produce the symbolic expression for E_3 .

Nonetheless, we must emphasize that (i) one needs to proceed with confidence, since such symbolic computations can take several minutes, and (ii) phrases like "Maple can not" or "Mathematica can" are release-specific and may also depend on the skill of the human user to make use of expert knowledge in mathematics, symbolic computation, or both, in order to produce a form of the problem that is most amenable to computation in a given software system. This explains our desire to illustrate various solution paths here and elsewhere.

Additional information on this problem is available at

<http://mathworld.wolfram.com/CubeLinePicking.html>. For more information about the Laplace transform trick applied to the related problem of expected distance in a unit hypercube, see <http://mathworld.wolfram.com/HypercubeLinePicking.html>.

11.1.9 9. An infinite cosine product $\pi_2 = \int_0^\infty \cos(2x) \prod_{n=1}^\infty \cos\left(\frac{x}{n}\right) dx$

$$\pi_2 = \int_0^\infty \cos(2x) \prod_{n=1}^\infty \cos\left(\frac{x}{n}\right) dx$$

History and context. The challenge of showing that $\pi_2 < \pi/8$ was posed by Bernard Mares, Jr., along with the problem of demonstrating that

$$\pi_1 = \int_0^\infty \prod_{n=1}^\infty \cos\left(\frac{x}{n}\right) dx < \frac{\pi}{4}$$

This is indeed true, although the error is remarkably small, as we shall see.

Solution. The computation of a high-precision numerical value for this integral is rather challenging, owing in part to the oscillatory behavior of $\prod_{n \geq 1} \cos(x/n)$ (see Figure 2) but mostly because of the difficulty of computing high-precision evaluations of the integrand. Note that evaluating thousands of terms of the infinite product would produce only a few correct digits. Thus it is necessary to rewrite the integrand in a form more suitable for computation.

Let $f(x)$ signify the integrand. We can express $f(x)$ as

$$f(x) = \cos(2x) \left[\prod_{k=1}^m \cos(x/k) \right] \exp(f_m(x)) \quad (22)$$

where we choose m greater than x and where

$$f_m(x) = \sum_{k=m+1}^\infty \log \cos\left(\frac{x}{k}\right) \quad (23)$$

The k th summand can be expanded in a Taylor series [1, p. 75], as follows:

$$\log \cos\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^j 2^{2j-1} (2^{2j} - 1) B_{2j}}{j(2j)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2j}$$

in which B_{2j} are Bernoulli numbers. Observe that since $k > m > x$ in (23), this series converges. We can then write

$$f_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j 2^{2j-1} (2^{2j} - 1) B_{2j}}{j(2j)!} \left(\frac{x}{k}\right)^{2j} \quad (24)$$

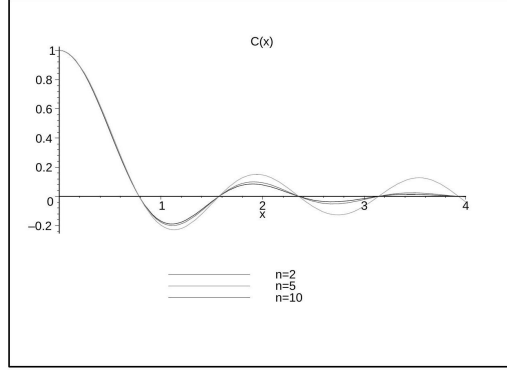


Figure 2: Approximations to $\prod_{n \geq 1} \cos(x/n)$.
After applying the identity [1, p. 807]

$$B_{2j} = \frac{(-1)^{j+1} 2(2j)! \zeta(2j)}{(2\pi)^{2j}}$$

and interchanging the sums, we obtain

$$f_m(x) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2^{2j} - 1) \zeta(2j)}{j \pi^{2j}} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j}} \right] x^{2j}$$

Note that the inner sum can also be written in terms of the zeta-function, as follows:

$$f_m(x) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2^{2j} - 1) \zeta(2j)}{j \pi^{2j}} \left[\zeta(2j) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^{2j}} \right] x^{2j}$$

This can now be reduced to a compact form for purposes of computation as

$$f_m(x) = - \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_{j,m} x^{2j} \quad (25)$$

where

$$a_j = \frac{(2^{2j} - 1) \zeta(2j)}{j \pi^{2j}} \quad (26)$$

$$b_{j,m} = \zeta(2j) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^{2j}} \quad (27)$$

We remark that $\zeta(2j)$, a_j , and $b_{j,m}$ can all be precomputed, say for j up to some specified limit and for a variety of m . In our program, which computes this integral to 120-digit accuracy, we precompute $b_{j,m}$ for $m = 1, 2, 4, 8, 16, \dots, 256$ and for j up to 300. During the quadrature computation, the function evaluation program picks m to be the first power of two greater than the argument x , and then applies formulas (22) and (25). It is not necessary to compute

$f(x)$ for x larger than 200, since for these large arguments $|f(x)| < 10^{-120}$ and thus may be presumed to be zero.

The computation of values of the Riemann zeta-function can be done using a simple algorithm due to Peter Borwein [21] or, since what we really require is the entire set of values $\{\zeta(2j) : 1 \leq j \leq n\}$ for some n , by a convolution scheme described in [5]. It is important to note that the computation of both the zeta values and the $b_{j,m}$ must be done with a much higher working precision (in our program, we use 1600-digit precision) than the 120-digit precision required for the quadrature results, since the two terms being subtracted in formula (27) are very nearly equal. These values need to be calculated to a relative precision of 120 digits.

With this evaluation scheme for $f(x)$ in hand, the integral (22) can be computed using, for instance, the tanh-sinh quadrature algorithm, which can be implemented fairly easily on a personal computer or workstation and is also well suited to highly parallel processing [10], [11], [16, p. 312]. This algorithm approximates an integral $f(x)$ on $[-1, 1]$ by transforming it to an integral on $(-\infty, \infty)$ via the change of variable $x = g(t)$, where $g(t) = \tanh(\pi/2 \cdot \sinh t)$:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(g(t)) g'(t) dt = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j f(x_j) + E(h) \quad (28)$$

Here $x_j = g(hj)$ and $w_j = g'(hj)$ are abscissas and weights for the tanh-sinh quadrature scheme (which can be precomputed), and $E(h)$ is the error in this approximation.

The function $g'(t) = \pi/2 \cdot \cosh t \cdot \operatorname{sech}^2(\pi/2 \cdot \sinh t)$ and its derivatives tend to zero very rapidly for large $|t|$. Thus, even if the function $f(t)$ has an infinite derivative, a blow-up discontinuity, or oscillatory behavior at an endpoint, the product function $f(g(t))g'(t)$ is in many cases quite well behaved, going rapidly to zero (together with all of its derivatives) for large $|t|$. In such cases, the Euler-Maclaurin summation formula [2, p. 180] can be invoked to conclude that the error $E(h)$ in the approximation (28) decreases very rapidly - faster than any power of h . In many applications, the tanh-sinh algorithm achieves quadratic convergence (i.e., reducing the size h of the interval in half produces twice as many correct digits in the result).

The tanh-sinh quadrature algorithm is designed for a finite integration interval. In this problem, where the interval of integration is $[0, \infty)$, it is necessary to convert the integral to a problem on a finite interval. This can be done with the simple substitution $s = 1/(x + 1)$, which yields an integral from 0 to 1.

In spite of the substantial computation required to construct the zeta- and b -arrays, as well as the abscissas x_j and weights w_j needed for tanh-sinh quadrature, the entire calculation requires only about one minute on a 2004-era computer, using the ARPREC arbitrary precision software package available at <http://crd.lbl.gov/dhbailey/mpdist>. The first hundred digits of the result are the following:

0.392699081698724154807830422909937860524645434187231595926812285162
093247139938546179016512747455366777....

A Mathematica program capable of producing 100 digits of this constant is available on Michael Trott's website:

http://www.mathematicaguidebooks.org/downloads/N_2_01_Evaluated.nb.

Using the Inverse Symbolic Calculator, for instance, one finds that this constant is likely to be $\pi/8$. But a careful comparison with a high-precision value of $\pi/8$, namely,

0.392699081698724154807830422909937860524646174921888227621868074038
477050785776124828504353167764633497...,

reveals that they are not equal-the two values differ by approximately 7.407×10^{-43} . Indeed, these two values are provably distinct. This follows from the fact that

$$\sum_{n=1}^{55} 1/(2n+1) > 2 > \sum_{n=1}^{54} 1/(2n+1)$$

See [16, chap. 2] for additional details. We do not know a concise closed-form expression for this constant.

Further history and context. Recall the sinc function

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

and consider, the seven highly oscillatory integrals:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} \operatorname{sinc} x dx = \frac{\pi}{2} \\ I_2 &= \int_0^{\infty} \operatorname{sinc} x \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) dx = \frac{\pi}{2} \\ I_3 &= \int_0^{\infty} \operatorname{sinc} x \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right) dx = \frac{\pi}{2} \\ &\vdots \\ I_6 &= \int_0^{\infty} \operatorname{sinc} x \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \cdots \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{11}\right) dx = \frac{\pi}{2} \\ I_7 &= \int_0^{\infty} \operatorname{sinc} x \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \cdots \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{13}\right) dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

It comes as something of a surprise, therefore, that

$$\begin{aligned} I_8 &= \int_0^{\infty} \operatorname{sinc} x \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \cdots \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{15}\right) dx \\ &= \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000} \pi \approx 0.499999999992646\pi \end{aligned}$$

When this was first discovered by a researcher, using a well-known computer algebra package, both he and the software vendor concluded there was a "bug" in the software. Not so! It is fairly easy to see that the limit of the sequence of such integrals is $2\pi_1$. Our analysis, via Parseval's theorem, links the integral

$$I_N = \int_0^{\infty} \operatorname{sinc}(a_1 x) \operatorname{sinc}(a_2 x) \cdots \operatorname{sinc}(a_N x) dx$$

with the volume of the polyhedron P_N described by

$$P_N = \left\{ x : \left| \sum_{k=2}^N a_k x_k \right| \leq a_1, |x_k| \leq 1, 2 \leq k \leq N \right\}$$

for $x = (x_2, x_3, \dots, x_N)$. If we let

$$C_N = \{(x_2, x_3, \dots, x_N) : -1 \leq x_k \leq 1, 2 \leq k \leq N\}$$

then

$$I_N = \frac{\pi}{2a_1} \frac{\text{Vol}(P_N)}{\text{Vol}(C_N)}$$

Thus, the value drops precisely when the constraint $\sum_{k=2}^N a_k x_k \leq a_1$ becomes active and bites the hypercube C_N . That occurs when $\sum_{k=2}^N a_k > a_1$. In the foregoing,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{13} < 1$$

but on addition of the term $1/15$, the sum exceeds 1, the volume drops, and $I_N = \pi/2$ no longer holds. A similar analysis applies to π_2 . Moreover, it is fortunate that we began with π_1 or the falsehood of $\pi_2 = 1/8$ would have been much harder to see.

Additional information on this problem is available at

<http://mathworld.wolfram.com/InfiniteCosineProductIntegral.html> and

<http://mathworld.wolfram.com/BorweinIntegrals.html>.

11.1.10 10. A multivariate zeta-function $\sum_{i>j>k>l>0} \frac{1}{i^3 j k^3 l}$

$$\sum_{i>j>k>l>0} \frac{1}{i^3 j k^3 l}$$

Extra credit: Express this constant as a single-term expression involving a well-known mathematical constant.

History and context. We resume the discussion from Problem 3. In the notation introduced there, we ask for the value of $\zeta(3, 1, 3, 1)$. The study of such sums in two variables, as we noted, originates with Euler. These investigations were apparently due to a serendipitous mistake. Goldbach wrote to Euler [15, pp. 99-100]:

When I recently considered further the indicated sums of the last two series in my previous letter, I realized immediately that the same series arose due to a mere writing error, from which indeed the saying goes, "Had one not erred, one would have achieved less [Si non errasset, fecerat ille minus]."

Euler's reduction formula is

$$\zeta(s, 1) = \frac{s}{2} \zeta(s+1) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s-2} \zeta(k+1) \zeta(s+1-k)$$

which reduces the given double Euler sums to a sum of products of classical ζ -values. Euler also noted the first reflection formulas

$$\zeta(a, b) + \zeta(b, a) = \zeta(a) \zeta(b) - \zeta(a+b)$$

certainly valid when $a > 1$ and $b > 1$. This is an easy algebraic consequence of adding the double sums. Another marvelous fact is the sum formula

$$\sum_{\sum a_i = n, a_i \geq 0} \zeta(a_1 + 2, a_2 + 1, \dots, a_r + 1) = \zeta(n + r + 1) \quad (29)$$

for nonnegative integers n and r . This, as David Bradley observes, is equivalent to the generating function identity

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^r (n-x)} = \sum_{k_1 > k_2 > \dots > k_r > 0} \prod_{j=1}^r \frac{1}{k_j - x}$$

The first three nontrivial cases of (29) are $\zeta(3) = \zeta(2, 1)$, $\zeta(4) = \zeta(3, 1) + \zeta(2, 2)$, and $\zeta(2, 1, 1) = \zeta(4)$.

Solution. We notice that such a function is a generalization of the zeta-function. Similar to the definition in section 4, we define

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k; x) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k > 0} \frac{x_1^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} \quad (30)$$

for $s_1, s_2, \dots, s_k$ nonnegative integers. We see that we are asked to compute $\zeta(3, 1, 3, 1; 1)$. Such a sum can be evaluated directly using the EZFace+ interface at

<http://www.cecm.sfu.ca/projects/ezface+>, which employs the Hölder convolution, giving us the numerical value

$$\begin{aligned} &0.005229569563530960100930652283899231589890420784634635522547448 \\ &97214886954466015007497545432485610401627... \end{aligned} \quad (31)$$

Alternatively, we may proceed using differential equations. It is fairly easy to see [16, sec. 3.7] that

$$\frac{d}{dx} \zeta(n_1, n_2, \dots, n_r; x) = \frac{1}{x} \zeta(n_1 - 1, n_2, \dots, n_r; x), \quad (n_1 > 1) \quad (32)$$

$$\frac{d}{dx} \zeta(n_1, n_2, \dots, n_r; x) = \frac{1}{1-x} \zeta(n_2, \dots, n_r; x), \quad (n_1 = 1) \quad (33)$$

with initial conditions $\zeta(n_1; 0) = \zeta(n_1, n_2; 0) = \dots = \zeta(n_1, \dots, n_r; 0) = 0$, and $\zeta(\cdot; x) \equiv 1$. Solving

```
$>$ dsys1 $=$
$>\text{\texttt{\textbackslash opn{diff}}}(y\ 3131(x),\ x)
=y\ 2131(x) / x$
$>\text{\texttt{\textbackslash opn{diff}}}(\text{\texttt{\textbackslash mathrm{y}}}\ 2131(\text{\texttt{\textbackslash mathrm{x}}}),\ \text{\texttt{\textbackslash mathrm{x}}})
=
\text{\texttt{\textbackslash mathrm{y}}}\ 1131(\text{\texttt{\textbackslash mathrm{x}}}) / \text{\texttt{\textbackslash mathrm{x}}}$,
$>$ diff(y1131(x),x) = 1/(1-x)*y131(x),
$>$ diff(y131(x),x) = 1/(1-x)*y31(x),
$>\text{\texttt{\textbackslash opn{diff}}}(y\ 31(x),\ x)
=y\ 21(x) / x$
$>\text{\texttt{\textbackslash opn{diff}}}(y\ 21(x),\ x)
=y\ 11(x) / x$
$>\text{\texttt{\textbackslash opn{diff}}}(\text{\texttt{\textbackslash mathrm{y}}}\ 11(\text{\texttt{\textbackslash mathrm{x}}}),\ \text{\texttt{\textbackslash mathrm{x}}})
=
\text{\texttt{\textbackslash mathrm{y}}}\ 1(\text{\texttt{\textbackslash mathrm{x}}}) / (1-\text{\texttt{\textbackslash mathrm{x}}})$,
$>\text{\texttt{\textbackslash opn{diff}}}(y\ 1(x),\ x)
=1 / (1-x)$;
$>$ init1 $=
```

```

\mathrm{y} 3131(0)
=0, \mathrm{y} 2131(0)
=0, \mathrm{y} 1131(0)
=0$,
$>\quad \mathrm{y} 131(0)
=0, \mathrm{y} 31(0)
=0, \mathrm{y} 21(0)
=0, \mathrm{y} 11(0)
=0, \mathrm{y} 1(0)
=0$;

```

in Maple, we obtain 0.005229569563518039612830536519667669502942 (this is valid to thirteen decimal places). Maple's identify command is unable to identify portions of this number, and the inverse symbolic calculator does not return a result. It should be mentioned that both Maple and the ISC identified the constant $\zeta(3, 1)$ (see the remark under the "history and context" heading). From the hint for this question, we know this is a single-term expression. Suspecting a form similar to $\zeta(3, 1)$, we search for constants c and d such that $\zeta(3, 1, 3, 1) = c\pi^d$. This leads to $c = 1/81440 = 2/10!$ and $d = 8$.

Further history and context. We start with the simpler value, $\zeta(3, 1)$. Notice that

$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

so

$$\begin{aligned} f(x) &= -\log(1-x)/(1-x) = x + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n \geq m > 0} \frac{x^n}{m} \end{aligned}$$

As noted in the section on double Euler sums,

$$\frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m)} \int_0^1 x^n \log^{m-1} x dx = \frac{1}{(n+1)^m}$$

so integrating f using this transform for $m = 3$, we obtain

$$\begin{aligned} \zeta(3, 1) &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \log^2 x dx \\ &= 0.270580808427784547879000924... \end{aligned}$$

The corresponding generating function is

$$\sum_{n \geq 0} \zeta(\{3, 1\}_n) x^{4n} = \frac{\cosh(\pi x) - \cos(\pi x)}{\pi^2 x^2}$$

equivalent to Zagier's conjectured identity

$$\zeta(\{3, 1\}_n) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)}$$

Here $\{3, 1\}_n$ denotes n -fold concatenation of $\{3, 1\}$.

The proof of this identity (see [16, p. 160]) derives from a remarkable factorization of the generating function in terms of hypergeometric functions:

$$\sum_{n \geq 0} \zeta(\{3, 1\}_n) x^{4n} = {}_2F_1\left(x \frac{(1+i)}{2}, -x \frac{(1+i)}{2}; 1; 1\right) {}_2F_1\left(x \frac{(1-i)}{2}, -x \frac{(1-i)}{2}; 1; 1\right)$$

Finally, it can be shown in various ways that

$$\zeta(\{3\}_n) = \zeta(\{2, 1\}_n)$$

for all n , while a proof of the numerically-confirmed conjecture

$$\zeta(\{2, 1\}_n) \stackrel{?}{=} 2^{3n} \zeta(\{-2, 1\}_n) \quad (34)$$

remains elusive. Only the first case of (34), namely,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \quad (= \zeta(3))$$

has a self-contained proof [16]. Indeed, the only other established case is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{q} = 64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{(-1)^p}{p^2} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{q} \quad (= \zeta(3, 3))$$

This is an outcome of a complete set of equations for multivariate zeta functions of depth four.

There has been abundant evidence amassed to support identity (34) since it was found in 1996. For example, very recently Petr Lisonek checked the first eighty-five cases to one thousand places in about forty-one hours with only the expected roundoff error. And he checked $n = 163$ in ten hours. This is the only identification of its type of an Euler sum with a distinct multivariate zeta-function.

11.1.11 11. A Watson integral

Problem 10. Evaluate

$$W = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} dx dy dz \quad (35)$$

History and context. The integral arises in Gaussian and spherical models of ferromagnetism and in the theory of random walks. It leads to one of the most impressive closed-form evaluations of an equivalent multiple integral due to G. N. Watson:

$$\begin{aligned} \widehat{W} &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} dx dy dz \\ &= \frac{1}{96} (\sqrt{3} - 1) \Gamma^2\left(\frac{1}{24}\right) \Gamma^2\left(\frac{11}{24}\right) \\ &= 4\pi (18 + 12\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 7\sqrt{6}) K^2(k_6) \end{aligned} \quad (36)$$

where $k_6 = (2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ is the sixth singular value. The most self-contained derivation of this very subtle result is due to Joyce and Zucker in [28] and [29], where more background can also be found.

Solution. In [31], it is shown that a simplification can be obtained by applying the formula

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0) \quad (37)$$

to W_3 . The three-dimension integral is then reducible to a single integral by using the identity

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(t \cos \theta) d\theta = I_0(t) \quad (38)$$

in which $I_0(t)$ is the modified Bessel function of the first kind. It follows from this that $W = \int_0^{\infty} \exp(-3t) I_0^3(t) dt$. This integral can be evaluated to one hundred digits in Maple, giving

$$\begin{aligned} W_3 = & 0.50546201971732600605200405322714025998512901481742089 \\ & 21889934878860287734511738168005372470698960380... \end{aligned} \quad (39)$$

Finally, an integer relation hunt to express $\log W$ in terms of $\log \pi, \log 2, \log \Gamma(k/24)$, and $\log(\sqrt{3} - 1)$ will produce (36).

We may also write W_3 as a product solely of values of the gamma function. This is what our Mathematician's ToolKit returned:

$$\begin{aligned} 0 = & -1.* \log[w3] + -1.* \log[\text{gamma}[1/24]] + 4.* \log[\text{gamma}[3/24]] + \\ & -8.* \log[\text{gamma}[5/24]] + 1.* \log[\text{gamma}[7/24]] + 14.* \log[\text{gamma}[9/24]] + \\ & -6.* \log[\text{gamma}[11/24]] + -9.* \log[\text{gamma}[13/24]] + 18.* \log[\text{gamma}[15/24]] + \\ & -2.* \log[\text{gamma}[17/24]] + -7.* \log[\text{gamma}[19/24]] \end{aligned}$$

Proving this is achieved by comparing the result with (36) and establishing the implicit gamma representation of $(\sqrt{3} - 1)^2/96$.

Similar searches suggest there is no similar four-dimensional closed form—the relevant Bessel integral is $W_4 = \int_0^{\infty} \exp(-4t) I_0^4(t) dt$. (N.B. $\int_0^{\infty} \exp(-2t) I_0^2(t) dt = \infty$.) In this case it is necessary to compute $\exp(-t) I_0(t)$ carefully, using a combination of the formula

$$\exp(-t) I_0(t) = \exp(-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

for t up to roughly $1.2 \cdot d$, where d is the number of significant digits desired for the result, and

$$\exp(-t) I_0(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=0}^N \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)^2}{(8t)^n n!}$$

for large t , where the upper limit N of the summation is chosen to be the first index n such that the summand is less than 10^{-d} (since this is an asymptotic expansion, taking more terms than N may increase, not decrease the error). We have implemented this as 'besselexp' in our Mathematician's ToolKit, available at <http://crd.lbl.gov/~dhbailey/mpdist>. Using this

software, which includes a PSLQ facility, we found that W_4 is not expressible as a product of powers of $\Gamma(k/120)$ ($0 < k < 120$) with coefficients having fewer than 80 digits. This result does not, of course, rule out the possibility of a larger relation, but it does cast some doubt, in an experimental sense, that such a relation exists. Enough to stop looking.

Additional information on this problem is available at

<http://mathworld.wolfram.com/WatsonsTripleIntegrals.html>.

12. CONCLUSION. While all the problems described herein were studied with a great deal of experimental computation, clean proofs are known for the final results given (except for Problem 7), and in most cases a lot more has by now been proved. Nonetheless, in each case the underlying object suggests plausible generalizations that are still open.

The "hybrid computations" involved in these solutions are quite typical of modern experimental mathematics. Numerical computations by themselves produce no insight, and symbolic computations frequently fail to produce full-fledged, closed-form solutions. But when used together, with significant human interaction, they are often successful in discovering new facts of mathematics and in suggesting routes to formal proof.

11.2 Special functions for summations

11.2.1 Sums by Polylogarithms (??)

(до этого дошел, но так успешно и не посчиталась сумма. потом додумаю, не такая простая теория. формул то полно в общем виде...)

11.3 Sums and Summation for QFT

(there are many of them, first I'll use them in physics, later I'll collect some of them here. This will also be in the problem-solution section.)

11.4 Sums and Summation for Statistical physics

(there are many of them, first I'll use them in physics, later I'll collect some of them here. This will also be in the problem-solution section.)

11.5 Counterexamples about Sums

11.5.1 Counterexamples about Sequences

Introduction

The concepts of sequence, Cauchy sequence, convergence, and divergence are defined in the Introduction to Chapter 1. Limits superior and inferior at a (finite) point for functions are defined in the Introduction to Chapter 2. The corresponding formulations for sequences of real numbers will be assumed as known. The first six examples of the present chapter are concerned only with sequences of real numbers. For such sequences it should be emphasized that although the word limit is sometimes used in conjunction with the word infinite, the word convergent always implies a finite limit. It will be assumed (in Example 7) that the reader is familiar with the definition and elementary properties of uniform convergence of functions. Convergence and divergence for sequences of sets are defined with Example 8 for use with Examples 8 and 9. Throughout this book the single word sequence will be used to mean infinite sequence unless it is otherwise specifically modified.

1. Bounded divergent sequences.

The simplest example of a bounded divergent sequence is possibly

$$0.1, 0, 1, \dots,$$

or $\{a_n\}$, where $a_n = 0$ if n is odd and $a_n = 1$ if n is even. Equivalently, $a_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$.

A more extreme example is the sequence $\{r_n\}$ of rational numbers in $[0, 1]$ - that is, $\{r_n\}$ is a one-to-one correspondence with domain $\mathfrak{N}$ and range $\mathcal{Q} \cap [0, 1]$.

2. For an arbitrary closed set, a sequence whose set of limit points is that set.

Any point that is the limit of a subsequence of a sequence $\{a_n\}$ is called a limit point or subsequential limit of the sequence. Any limit point of the range of a sequence is a limit point of the sequence, but the converse statement is not generally true. Counterexample: the alternating sequence $0, 1, 0, 1, \dots$ has two limit points, 0 and 1, but its range has none.

Since the set of all limit points of a sequence $\{a_n\}$ is the closure of the range of $\{a_n\}$, this set is always closed. The following example shows that every closed set A can be got in this way; in fact, that A is the set of limit points of a sequence $\{a_n\}$ of distinct points. It will follow that A is not only the set of limit points of the sequence $\{a_n\}$, but the set of limit points of its range as well.

If A is the empty set, let $a_n \equiv n$ for $n = 1, 2, \dots$. Now let A be an arbitrary nonempty closed set (of real numbers), and let $\{r_n\}$ be an arrangement into a sequence of distinct terms of the set $\mathcal{Q}$ of all rational numbers ($\{r_n\}$ is a one-to-one correspondence with range $\mathcal{Q}$). The sequence $\{a_n\}$ whose set of limit points is A will be a subsequence of $\{r_n\}$ defined recursively as follows: We start by partitioning $\mathcal{R}$ into the four disjoint intervals $(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$ and $[1, +\infty)$. If $A \cap (-\infty, -1) \neq \emptyset$, let a_1 be the first term of the sequence $\{r_n\}$ belonging to $(-\infty, -1)$; if $A \cap (-\infty, -1) = \emptyset$ and $A \cap [-1, 0) \neq \emptyset$, let a_1 be the first term $\in [-1, 0)$; if $A \cap (-\infty, 0) = \emptyset$, and $A \cap [0, 1) \neq \emptyset$, let a_1 be the first term $\in [0, 1)$; finally, if $A \cap (-\infty, 1) = \emptyset$, let a_1 be the first term $\in [1, +\infty)$. After a_1 is selected, a_2 distinct from a_1 is determined in like fashion by considering the intervals $[-1, 0)$, $[0, 1)$, and $[1, +\infty)$ in turn - unless $A \cap [-1, +\infty) = \emptyset$, in which case only a_1 is determined at this stage. In any case, at least one term a_1 and at most four terms a_1, a_2, a_3, a_4 of the sequence $\{a_n\}$ are thus defined. The second stage proceeds similarly, in terms of the partition of $\mathcal{R}$ into the $2 \cdot 2^2 + 2 = 10$ intervals $(-\infty, -2)$, $[-2, -\frac{3}{2})$, $\dots$, $[\frac{3}{2}, 2)$, $[2, +\infty)$. At each step, after $a_1, a_2, \dots, a_n$ are chosen, the term a_{n+1} is chosen from an interval I in case $A \cap I \neq \emptyset$, a_{n+1} being the first term of r_n distinct from those already selected and belonging to I . The k th set of $k \cdot 2^k + 2$ intervals consists of $(-\infty, -k)$, $[-k, -k + 2^{-k+1})$, $\dots$, $[k - 2^{-k+1}, k)$, $[k, +\infty)$. It is not difficult to show that the sequence $\{a_n\}$, thus defined recursively, has the properties claimed. Notice that if $A = \mathcal{R}$, then $\{a_n\}$ is a one-to-one correspondence with range $\mathcal{Q}$ - presumably distinct from $\{r_n\}$.

3. A divergent sequence $\{a_n\}$ for which $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ for every positive integer p .

Let a_n be the n th partial sum of the harmonic series:

$$a_n \equiv 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Then $\{a_n\}$ is divergent, but for $p > 0$,

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \leq \frac{p}{n+1} \rightarrow 0$$

It is important to note that the zero limit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ is not uniform in p . In fact, for the stated properties to hold, this zero limit cannot be uniform in p since the statement that it is uniform in p is equivalent to the Cauchy criterion for convergence of a sequence (cf. [34], p. 447, Ex. 43).

One form of expressing the principal idea of the preceding paragraph is the following: If $\{a_n\}$ diverges, then there exists a strictly increasing sequence $\{p_n\}$ of positive integers such that $(a_{n+p_n} - a_n) \not\rightarrow 0$. For the particular sequence of the partial sums of the harmonic series the sequence $\{p_n\}$ can be chosen to be $\{n\}$, since in this case

$$a_{n+p_n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

The following example is related to another aspect of this question (with $\phi(n) = n + p_n$).

4. For an arbitrary strictly increasing sequence $\{\phi_n\} = \{\phi(n)\}$ of positive integers, a divergent sequence $\{a_n\}$ such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{\phi(n)} - a_n) = 0$.

By induction, $\phi(n) \geq n$ for all $n = 1, 2, \dots$, and more generally, $\phi(n+k) \geq n + \phi(k)$ for all n and $k = 1, 2, \dots$. Therefore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(n) = +\infty$. There are two cases to consider.

If $\phi(n) - n$ is bounded, say $\phi(n) - n \leq K$ for all $n = 1, 2, \dots$, then the sequence $\{a_n\}$ can be chosen to be the sequence of partial sums of the harmonic series, since

$$a_{\phi(n)} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{\phi(n)} \leq \frac{K}{n+1} \rightarrow 0.$$

If $\phi(n) - n$ is unbounded, let k be the smallest positive integer such that $\phi(k) > k$, and define a_n to be equal to 1 if $n = k, \phi(k), \phi(\phi(k)), \dots$, and equal to 0 otherwise. Since $\{\phi(n)\}$ is strictly increasing there exists a subsequence of $\{a_n\}$ identically equal to 1, and since $\phi(n) - n$ is unbounded there exists a subsequence of $\{a_n\}$ identically equal to 0. Therefore $\{a_n\}$ diverges. On the other hand, $a_{\phi(n)} = a_n$ for every $n = 1, 2, \dots$, and therefore $a_{\phi(n)} - a_n \rightarrow 0$.

This example can be generalized in various ways. For example, it is sufficient to assume merely that $\phi(n) \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$, and it is possible at the same time to require that $\{a_n\}$ be unbounded. Space does not permit inclusion of the details.

5. Sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ such that $\lim a_n + \lim b_n < \underline{\lim} (a_n + b_n) < \underline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n < \overline{\lim} (a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$.

Let $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ be the sequences repeating in cycles of 4:

$$\begin{aligned} \{a_n\} &: 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots, \\ \{b_n\} &: 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots \end{aligned}$$

Then the inequality statement specified above becomes

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4$$

6. Sequences $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}, \dots$ **such that** $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_{1n} + a_{2n} + \dots) > \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{1n} + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} + \dots$.

Such an example is given by $a_{mn} = 1$ if $m = n$ and $a_{mn} = 0$ if $m \neq n, m, n = 1, 2, \dots$, where all infinite series involved converge. The inequality stated above becomes $1 > 0$.

It should be noted that the inequality exhibited in this example is impossible if there are only finitely many sequences. For example,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

(Cf. [34], p. 59, Ex. 19.)

7. Two uniformly convergent sequences of functions the sequence of whose products does not converge uniformly.

On any common domain D let f be any unbounded function and let the sequences $\{f_n\}$ and $\{g_n\}$ be defined:

$$f_n(x) \equiv f(x), \quad g_n(x) \equiv 1/n.$$

Then $f_n \rightarrow f$ and $g_n \rightarrow 0$ uniformly on D , but $f_n g_n \rightarrow 0$ nonuniformly on D . A specific example is $D = \mathcal{Q}, f(x) = x$.

It should be noted that if both sequences are bounded and converge uniformly on D , then the product sequence also converges uniformly on D .

8. A divergent sequence of sets.

The limit superior and limit inferior of a sequence $\{A_n\}$ of sets are defined and denoted:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \right], \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m \right]$$

respectively. A sequence $\{A_n\}$ is convergent iff $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$ and, in this case, converges to this common value. A sequence of sets is divergent iff it fails to be convergent. Since $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \{x | x \in \text{infinitely many } A_n\}$ and $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \{x | x \in \text{all but a finite number of } A_n\}$, the oscillating sequence $A, B, A, B, A, B, \dots$ has limit superior equal to the union $A \cup B$ and limit inferior equal to the intersection $A \cap B$. Such a sequence therefore converges iff $A = B$.

The close analogy between this example and the alternating sequence $\{a, b, a, b, \dots\}$ of numbers (cf. Example 1, above) should not escape notice.

9. A sequence $\{A_n\}$ of sets that converges to the empty set but whose cardinal numbers $\rightarrow +\infty$.

Let A_n be defined to be the set of n positive integers greater than or equal to n and less than $2n$:

$$A_n \equiv \{m | m \in \mathfrak{V}, n \leq m < 2n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Then, since no positive integer belongs to infinitely many of the sets of $\{A_n\}$, the limit superior and limit inferior are both empty.

The preceding example can be visualized in terms of placing pairs of billiard balls, which bear numbers $0, 1, 2, \dots$, into a bag while repeatedly withdrawing one. For example, at one minute before noon balls numbered 0 and 1 are placed in the bag and ball number 0 is removed. At $\frac{1}{2}$ minute before noon balls numbered 2 and 3 are added, and ball number 1 is removed. At $\frac{1}{3}$ minute before noon balls 4 and 5 are added and ball number 2 is taken out. This process is continued, and the question is asked: "How many balls are in the bag at noon?" Answer: "None."

Since the natural numbers can be put into a one-to-one correspondence with their reciprocals, and since as subsets of $\mathcal{Q}$ all finite sets are compact (closed and bounded), all of the sets A_n of this example are compact, and can even be assumed to be uniformly bounded (contained in the same bounded interval). If the sequence $\{A_n\}$ is assumed to be decreasing ($A_{n+1} \subset A_n$ for $n = 1, 2, \dots$), then the limit $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ is the same as the intersection $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, and may be empty even though the cardinal number of every A_n is infinite and even though every A_n is bounded (example: $\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\}$) or closed (example: $\{n, n+1, \dots\}$) but not both. (Cf. [34], p. 201.)

11.5.2 Counterexamples about Infinite Series

Introduction

Unless explicit statement to the contrary is made, all series considered in this chapter will be assumed to be real, that is, consisting of terms that are real numbers. If $\{s_n\}$ is the sequence of partial sums of an infinite series $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, that is, $s_n = a_1 + \dots + a_n$ for $n = 1, 2, \dots$, the series $\sum a_n$ is said to converge iff $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ exists and is finite. This limit s is called the sum of the series $\sum a_n$, with the alternative notations:

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$$

The series $\sum a_n$ is said to diverge iff it fails to converge, that is, iff $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ is infinite or fails to exist. The statement $\sum a_n = +\infty$ means that $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$. A sequence $\{a_n\}$ or a series $\sum a_n$ is nonnegative or positive iff $a_n \geq 0$ for every n or $a_n > 0$ for every n , respectively. For a nonnegative series $\sum a_n$, the statement $\sum a_n < +\infty$ means that the series converges, and the statement $\sum a_n = +\infty$ means that the series diverges.

For certain purposes series may start with a term a_0 , in which case $\sum a_n$ should be interpreted to mean $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, or the sum of this series. For a power series $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, the term $a_0 x^0$ should be understood to mean a_0 even when $x = 0$; that is, for present purposes $0^0 \equiv 1$. For a Maclaurin series

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

the term for $n = 0$ is $f(0)$; in other words, $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$.

1. A divergent series whose general term approaches zero.

The harmonic series $\sum 1/n$. That is very well-known.

2. A convergent series $\sum a_n$ and a divergent series $\sum b_n$ such that $a_n \geq b_n, n = 1, 2, \dots$

Let $a_n \equiv 0$ and $b_n \equiv -1/n, n = 1, 2, \dots$.

3. A convergent series $\sum a_n$ and a divergent series $\sum b_n$ such that $|a_n| \geq |b_n|, n = 1, 2, \dots$

Let $\sum a_n$ be the conditionally convergent alternating harmonic series $\sum (-1)^{n+1}/n$, and let $\sum b_n$ be the divergent harmonic series $\sum 1/n$.

4. For an arbitrary given positive series, either a dominated divergent series or a dominating convergent series.

A nonnegative series $\sum a_n$ is said to dominate a series $\sum b_n$ iff $a_n \geq |b_n|$ for $n = 1, 2, \dots$. If the given positive series is $\sum b_n$, let $a_n \equiv b_n$ for $n = 1, 2, \dots$. Then if $\sum b_n$ diverges it dominates the divergent series $\sum a_n$, and if $\sum b_n$ converges it is dominated by the convergent series $\sum a_n$. The domination inequalities can all be made strict by means of factors $\frac{1}{2}$ and 2 .

This simple result can be framed as follows: There exists no positive series that can serve simultaneously as a comparison test series for convergence and as a comparison test series for divergence. (Cf. Example 19, below.)

5. A convergent series with a divergent rearrangement.

With any conditionally convergent series $\sum a_n$, such as the alternating harmonic series $\sum (-1)^{n+1}/n$, the terms can be rearranged in such a way that the new series is convergent to any given sum, or is divergent. Divergent rearrangements can be found so that the sequence $\{s_n\}$ of partial sums has the limit $+\infty$, the limit $-\infty$, or no limit at all. In fact, the sequence $\{s_n\}$ can be determined in such a way that its set of limit points is an arbitrary given closed interval, bounded or not (cf. Example 2, Chapter 5). The underlying reason that this is possible is that the series of positive terms of $\sum a_n$ and the series of negative terms of $\sum a_n$ are both divergent.

To be specific we shall indicate a rearrangement of the series $\sum (-1)^{n+1}/n$ such that the sequence $\{s_n\}$ of partial sums has the closed interval $[a, b]$ as its set of limit points. We start with the single term 1 , and then attach negative terms:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2j}$$

until the sum first is less than a . Then we add on unused positive terms:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2j} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k+1}$$

until the sum first is greater than b . Continuing with this idea we adjoin negative terms until the sum first is less than a ; then positive terms until the sum first exceeds b ; then negative terms, etc., ad infinitum. Since the absolute value $1/n$ of the general term $(-1)^{n+1}/n$ approaches zero, it follows that every number of the closed interval $[a, b]$ is approached arbitrarily closely by partial sums s_n of the rearranged series, for arbitrarily large n . Furthermore, for no number outside the interval $[a, b]$ is this true.

In the procedure just described, if the partial sums are permitted to go just above 1 , then just below -2 , then just above 3 , then just below -4 , etc., the sequence of partial sums of the rearranged series has the entire real number system as its set of limit points.

W. Sierpinski (cf. [43]) has shown that if $\sum a_n$ is a conditionally convergent series with sum s , and if $s' < s$, then for some rearrangement involving the positive terms only (leaving the negative terms in their original positions) the rearranged series has sum s' . A similar remark applies to numbers $s'' > s$ and rearrangements involving only negative terms. This is clearly an extension of the celebrated "Riemann derangement theorem" (cf. [36], p. 232, Theorem III), illustrated in all its essentials by the discussion in Example 5.

In a different direction, there is an extension that reads: If $\sum a_n$ is a conditionally convergent series of complex numbers then the sums obtainable by all possible rearrangements that are either convergent or divergent to ∞ constitute a set that is either a single line in the complex plane (including the point at infinity) or the complex plane in toto (including the point at infinity). Furthermore, if $\sum v_n$ is a conditionally convergent series of vectors in a finite-dimensional space, then the sums obtainable by all possible rearrangements constitute a set that is some linear variety in the space (cf. [47]).

6. For an arbitrary conditionally convergent series $\sum a_n$ and an arbitrary real number x , a sequence $\{\varepsilon_n\}$, where $|\varepsilon_n| = 1$ for $n = 1, 2, \dots$, such that $\sum \varepsilon_n a_n = x$.

The procedure here is similar to that employed in Example 5. Since $\sum |a_n| = +\infty$, we may attach factors ε_n of absolute value 1 in such a fashion that $\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n = |a_1| + \dots + |a_n| > x$. Let n_1 be the least value of n that ensures this inequality. We then provide factors ε_n , of absolute value 1, for the next terms in order to obtain (for the least possible n_2):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_{n_2} a_{n_2} &= |a_1| + \dots + |a_{n_1}| \\ &\quad - |a_{n_1+1}| - \dots - |a_{n_2}| < x. \end{aligned}$$

If this process is repeated, with partial sums alternately greater than x and less than x , a series $\sum \varepsilon_n a_n$ is obtained which, since $a_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$, must converge to x .

7. Divergent series satisfying any two of the three conditions of the standard alternating series theorem.

The alternating series theorem referred to states that the series $\sum \varepsilon_n c_n$, where $|\varepsilon_n| = 1$ and $c_n > 0, n = 1, 2, \dots$, converges provided

- (i) $\varepsilon_n = (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$,
- (ii) $c_{n+1} \leq c_n, \quad n = 1, 2, \dots$,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

No two of these three conditions by themselves imply convergence; that is, no one can be omitted. The following three examples demonstrate this fact:

- (i): Let $\varepsilon_n \equiv 1, c_n \equiv 1/n, n = 1, 2, \dots$. Alternatively, for an example that is, after a fashion, an "alternating series" let $\{\varepsilon_n\}$ be the sequence repeating in triplets: $1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots$.
- (ii): Let $c_n \equiv 1/n$ if n is odd, and let $c_n \equiv 1/n^2$ if n is even.
- (iii): Let $c_n \equiv (n+1)/n$ (or, more simply, let $c_n \equiv 1$), $n = 1, 2, \dots$.

8. A divergent series whose general term approaches zero and which, with a suitable introduction of parentheses, becomes convergent to an arbitrary sum.

Introduction of parentheses in an infinite series means grouping of consecutive finite sequences of terms (each such finite sequence consisting of at least one term) to produce a new series, whose sequence of partial sums is therefore a subsequence of the sequence of partial

sums of the original series. For example, one way of introducing parentheses in the alternating harmonic series gives the series

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\ = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} + \cdots. \end{aligned}$$

Any series derived from a convergent series by means of introduction of parentheses is convergent, and has a sum equal to that of the given series.

The final rearranged series described under Example 5 has the stated property since, for an arbitrary real number, a suitable introduction of parentheses gives a convergent series whose sum is the given number.

9. For a given positive sequence $\{b_n\}$ with limit inferior zero, a positive divergent series $\sum a_n$ whose general term approaches zero and such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = 0$.

Choose a subsequence $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k}, \dots$ of nonconsecutive terms of $\{b_n\}$ such that $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = 0$, and let $a_{n_k} \equiv b_{n_k}^2$ for $k = 1, 2, \dots$. For every other value of $n : n = m_1, m_2, m_3, \dots, m_j, \dots$, let $a_{m_j} \equiv 1/j$. Then $a_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$, $\sum a_n$ diverges, and $a_{n_k}/b_{n_k} = b_{n_k} \rightarrow 0$ as $k \rightarrow +\infty$.

This example shows (in particular) that no matter how rapidly a positive sequence $\{b_n\}$ may converge to zero, there is a positive sequence $\{a_n\}$ that converges to zero slowly enough to ensure divergence of the series $\sum a_n$, and yet has a subsequence converging to zero more rapidly than the corresponding subsequence of $\{b_n\}$.

10. For a given positive sequence $\{b_n\}$ with limit inferior zero, a positive convergent series $\sum a_n$ such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = +\infty$.

Choose a subsequence $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k}, \dots$ of $\{b_n\}$ such that for each positive integer k , $b_{n_k} < k^{-3}$, and let $a_{n_k} \equiv k^{-2}$ for $k = 1, 2, \dots$. For every other value of n let $a_n \equiv n^{-2}$. Then $\sum a_n < +\infty$, while $a_{n_k}/b_{n_k} = k \rightarrow +\infty$.

This example shows (in particular) that no matter how slowly a positive sequence $\{b_n\}$ may converge to zero, there is a sequence $\{a_n\}$ of positive numbers that converges to zero rapidly enough to ensure convergence of the series $\sum a_n$, and yet has a subsequence converging to zero more slowly than the corresponding subsequence of $\{b_n\}$.

11. For a positive sequence $\{c_n\}$ with limit inferior zero, a positive convergent series $\sum a_n$ and a positive divergent series $\sum b_n$ such that $a_n/b_n = c_n; n = 1, 2, \dots$

Choose a subsequence $c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_k}, \dots$ of $\{c_n\}$ such that for each positive integer k , $c_{n_k} < k^{-2}$, and let $a_{n_k} \equiv c_{n_k}$, $b_{n_k} \equiv 1$ for $k = 1, 2, \dots$. For every other value of n let $a_n \equiv n^{-2}$, $b_n \equiv (n^2 c_n)^{-1}$. Then $\sum a_n$ converges, $\sum b_n$ diverges since $b_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$, and $a_n/b_n = c_n$ for $n = 1, 2, \dots$.

This example shows (in particular) that no matter how slowly a positive sequence $\{c_n\}$ may converge to zero, there exist positive series of which one is convergent and the other is divergent, the quotient of whose n th terms is c_n .

12. A function positive and continuous for $x \geq 1$ and such that $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converges and $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ diverges.

Example 12, Chapter 4.

13. A function positive and continuous for $x \geq 1$ and such that $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverges and $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converges.

For each $n > 1$ let $g(n) \equiv 0$, and on the closed intervals $[n - n^{-1}, n]$ and $[n, n + n^{-1}]$ define g to be linear and equal to 1 at the nonintegral endpoints. Finally, define $g(x)$ to be 1 for $x \geq 1$ where $g(x)$ is not already defined. Then the function

$$f(x) \equiv g(x) + \frac{1}{x^2}$$

is positive and continuous for $x \geq 1$, $\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$, and $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} < +\infty$.

14. Series for which the ratio test fails.

For a positive series $\sum a_n$ the ratio test states (cf. [34], p. 390) that if the limit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

exists in the finite or infinite sense ($0 \leq \rho \leq +\infty$), then

(i) if $0 \leq \rho < 1$, $\sum a_n$ converges;

(iv) if $1 < \rho \leq +\infty$, $\sum a_n$ diverges.

The statement that if $\rho = 1$ the test fails is more than an empty statement. It means that there exist both convergent and divergent positive series for each of which $\rho = 1$. Examples are

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

respectively.

The ratio test may also fail by virtue of the nonexistence of the limit ρ . Examples of convergent and divergent positive series are respectively

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^{n-n}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

where

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}$$

and

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-(-1)^n} = 2^2 + 2^1 + 2^4 + 2^3 + 2^6 + 2^5 + \cdots$$

where

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 8 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

A refined form of the ratio test states that if

- (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\sum a_n$ converges;
- (iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $\sum a_n$ diverges.

This form of the ratio test may fail as a result of the inequalities

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Examples for which both equalities and strict inequalities occur are given above.

15. Series for which the root test fails.

For a nonnegative series $\sum a_n$ the simplest form of the root test states (cf. [34], p. 392) that if

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sigma$$

exists in the finite or infinite sense ($0 \leq \sigma \leq +\infty$), then

- (i) if $0 \leq \sigma < 1$, $\sum a_n$ converges;
- (ii) if $1 < \sigma \leq +\infty$, $\sum a_n$ diverges.

The ratio test and the root test are related by the fact that if $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1}/a_n)$ exists in the finite or infinite sense, then $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ exists and is equal to it (cf. [34], p. 394, Ex. 31). Consequently, if the ratio test in the form (i) or (ii), Example 14, is successful, the root test is also. Furthermore, the first two examples illustrating failure of the ratio test (Example 14) also serve to exemplify failure of the root test for the same reason. The last two examples of the failure of the ratio test illustrate the possibility of success for the root test (cf. Example 16). The root test, as stated above, fails for the convergent series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5 + (-1)^n}{2} \right)^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \cdots$$

since $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ and $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}$. It also fails for the divergent series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5 + (-1)^n}{2} \right)^n,$$

since $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$ and $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$.

A refined form of the root test states that if

- (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, $\sum a_n$ converges;
- (iv) $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, $\sum a_n$ diverges.

This form of the root test is at least as strong as (actually stronger than - cf. Example 16) the refined form of the ratio test (Example 14), since (cf. [34], p. 394, Ex. 31)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

The refined form of the root test establishes convergence and divergence for the preceding two examples, since $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ is equal to $\frac{1}{2}$ and 3, respectively, for these two series.

The refined form of the root test can fail only by virtue of the equation $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Examples of this type of failure have already been given.

16. Series for which the root test succeeds and the ratio test fails.

The convergent series $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n}$ for which the ratio test fails (Example 14) is one for which the root test succeeds. Indeed,

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{(-1)^n - n}{n}} \rightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1$$

Similarly, for the divergent series $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n-(-1)^n}$, of Example 14,

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{n-(-1)^n}{n}} \rightarrow 2^1 = 2 > 1$$

17. Two convergent series whose Cauchy product series diverges.

The Cauchy product series of the two series $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ is defined to be the series $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, where

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

The theorem of Mertens (cf. [36], p. 239, Ex. 20) states that if $\sum a_n$ converges to A , if $\sum b_n$ converges to B , and if one at least of these convergences is absolute, then the product series $\sum c_n$ converges to AB .

Let $\sum a_n$ and $\sum b_n$ be the identical series

$$a_n = b_n = (-1)^n (n+1)^{-1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Then $\sum a_n$ and $\sum b_n$ converge by the alternating series test (Example 7), while $\sum c_n$ diverges since

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \\ &\geq \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

the first inequality holding since $\sqrt{(1+x)(n+1-x)}$ on the closed interval $[0, n]$ is maximized when $x = \frac{1}{2}n$.

18. Two divergent series whose Cauchy product series converges absolutely.

The Cauchy product series of the two series

$$\begin{aligned} &2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + \cdots, n = 1, 2, \dots \\ &-1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1^n + \cdots, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

is

$$-2 + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0^n + \cdots, \quad n = 1, 2, \dots$$

More generally, if $a_n = a^n$ for $n \geq 1$ and if $b_n = b^n$ for $n \geq 1$, and if $a \neq b$, the term c_n of the product series of $\sum a_n$ and $\sum b_n$, for $n \geq 1$, is

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b^n + b_0 a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + a^{n-3} b^3 + \cdots + a b^{n-1} \\ &= a_0 b^n + b_0 a^n - a^n - b^n + (a^{n+1} - b^{n+1}) / (a - b) \\ &= \{a^n [a + (b_0 - 1)(a - b)] - b^n [b + (1 - a_0)(a - b)]\} / (a - b), \end{aligned}$$

and therefore $c_n = 0$ in case $a = (1 - b_0)(a - b)$ and $b = (a_0 - 1)(a - b)$. If a and b are chosen so that $a - b = 1$, then a_0 and b_0 are given by $a_0 = b + 1 = a$, $b_0 = 1 - a = -b$.

19. For a given sequence $\{\sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{mn}\}$, $n = 1, 2, \dots$, of positive convergent series, a positive convergent series $\sum_{m=1}^{+\infty} m = 1a_m$ that does not compare favorably with any series of $\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\}$.

The statement that the series $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ compares favorably with the series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}$, for a fixed positive integer n , means:

$$\exists M \in \mathfrak{N} \ni m > M \Rightarrow a_m \leq a_{mn},$$

and therefore the statement that such comparison does not obtain means:

$$\forall M \in \mathfrak{N} \exists m > M \ni a_m > a_{mn}.$$

For all positive integers M and n , define the positive numbers S_n , S_{Mn} , and R_{Mn} :

$$S_n \equiv \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}, \quad S_{Mn} \equiv \sum_{m=1}^M a_{mn}, \quad R_{Mn} \equiv \sum_{m=M+1}^{+\infty} a_{mn}$$

and for each $n \in \mathfrak{J}$ choose $M(n)$ so that $1 \leq M(1) < M(2) < \dots$ and

$$\begin{aligned} R_{M(1),1} &< 2^{-1}, \\ \max(R_{M(2),1}, R_{M(2),2}) &< 2^{-2}, \\ &\dots \\ \max(R_{M(n),1}, \dots, R_{M(n),n}) &< 2^{-n}. \end{aligned}$$

For any positive integer m , define a_m as follows:

$$a_m = \begin{cases} 2a_{m1} & \text{if } 1 \leq m \leq M(2) \\ (k+1) \max(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mk}) & \text{if } M(k) < m \leq M(k+1) \text{ for } k > 1 \end{cases}$$

In order to prove that $\sum a_m$ converges, we first establish an inequality for the (finite) sum of the terms of this series for $M(k) < m \leq M(k+1)$, where $k > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m &\leq \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} \left[(k+1) \sum_{n=1}^k a_{mn} \right] \\ &= (k+1) \sum_{n=1}^k \left[\sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_{mn} \right] \leq (k+1) \sum_{n=1}^k R_{M(k),n} \\ &\leq (k+1) \sum_{n=1}^k 2^{-k} < (k+1)^2 2^{-k} \end{aligned}$$

We therefore have

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} a_m &= \sum_{m=1}^{M(2)} a_m + \sum_{m=M(2)+1}^{M(3)} a_m \cdots \\
&\leq 2 \sum_{m=1}^{M(2)} a_m + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m \\
&< 2S_{M(2),1} + \sum_{k=2}^{+\infty} (k+1)^2 2^{-k} < +\infty.
\end{aligned}$$

On the other hand, for any fixed n , whenever $k \geq n$ and $m > M(k)$, $a_m/a_{mn} \geq k+1$, whence $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m/a_{mn} = +\infty$. Therefore the series $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ does not compare favorably with the series $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$. In fact, the series $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ does not compare favorably with the series $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$ even when such favorable comparison is defined:

$$\exists M \text{ and } K \in \mathfrak{I} \ni m > M \Rightarrow a_m \leq K a_{mn},$$

or equivalently, when failure to have favorable comparison means:

$$\forall M \text{ and } K \in \mathfrak{I} \exists m > M \ni a_m > K a_{mn}.$$

A sequence of positive convergent series is called a universal comparison sequence if and only if it has the property that a given positive series converges if and only if it compares favorably with at least one series of the universal comparison sequence. That is, a sequence of positive convergent series is a universal comparison sequence if and only if the convergence or divergence of every positive series can be established by comparison with some member series of the sequence. Example 19 shows that no such universal comparison sequence exists.

20. A Toeplitz matrix T and a divergent sequence that is transformed by $\mathbf{T}$ into a convergent sequence.

An infinite matrix is a real-valued or complex-valued function on $\mathfrak{U} \times \mathfrak{I}$, denoted $T = (t_{ij})$, where i and $j \in \mathfrak{I}$. In case the infinite series $\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} a_j$, where $\{a_j\}$ is a given sequence of numbers, converges for every $i \in \mathfrak{I}$, the sequence $\{b_i\}$, defined by

$$b_i \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} a_j$$

is called the transform of $\{a_j\}$ by T . An infinite matrix $T = (t_{ij})$ is called a Toeplitz matrix $\dagger$ iff for every convergent sequence $\{a_j\}$ the sequence $\{b_i\}$ is well defined, and the limit $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_i$ exists and is equal to the limit $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j$. An important basic fact in the theory of Toeplitz matrices is that the following three properties form a necessary and sufficient set of conditions for an infinite matrix $T = (t_{ij})$ to be a Toeplitz matrix (for a proof see [49]):

$$\exists M \in \mathfrak{R} \ni \forall i \in \mathfrak{I}, \sum_{j=1}^{+\infty} |t_{ij}| \leq M, \quad (1)$$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1, \quad (2)$$

$$\forall j \in \mathfrak{I}, \lim_{i \rightarrow +\infty} t_{ij} = 0. \quad (3)$$

Let T be the Toeplitz matrix (t_{ij}) , where $t_{ij} \equiv 1/i$ if $1 \leq j \leq i$ and $t_{ij} \equiv 0$ if $i < j$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

The sequence $\{a_j\} = 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$, does not converge, but its transform by T ,

$$\{b_i\} = 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2i}, \dots,$$

converges to 0 .

More generally, if $\{a_n\}$ is any divergent sequence each of whose terms is either 1 or -1 , there exists a Toeplitz matrix T that transforms $\{a_n\}$ into a convergent sequence. In fact, T can be defined so that $\{a_n\}$ is transformed into the sequence every term of which is 0 . Such a matrix $T = (t_{ij})$ can be defined as follows: Let $\{n_i\}$ be a strictly increasing sequence of positive integers such that a_{n_i} and a_{n_i+1} have opposite signs for $i = 1, 2, \dots$, and let

$$t_{ij} \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } j = n_i \quad \text{or} \quad j = n_i + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then T is a Toeplitz matrix that transforms $\{a_n\}$ into $0, 0, \dots$

† Named after the German mathematician Otto Toeplitz (1881-1940).

21. For a given Toeplitz matrix $T = (t_{ij})$, a sequence $\{a_j\}$ where for each j , $a_j = \pm 1$, such that the transform $\{b_i\}$ of $\{a_j\}$ by T diverges.

By reference to conditions (1)-(3) of Example 20, we choose two sequences $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$, $j_1 < j_2 < j_3 < \dots$ as follows. Let i_1 be such that, in accordance with (2), if $i \geq i_1$,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{1i}, \quad |e_{1i}| < 0.05$$

Then let j_1 be such that according to (1) and (2),

$$\sum_{j=1}^{j_1} t_{i_1 j} = 1 + d_1 \quad \text{and} \quad \sum_{j=j_1+1}^{+\infty} |t_{i_1 j}| < 0.05$$

where $|d_1| < 0.1$.

Next choose $i_2 > i_1$ so that for $i \geq i_2$, according to (2) and (3),

$$\sum_{j=1}^{j_1} |t_{ij}| < (0.05) \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{2i}, \quad |e_{2i}| < (0.05)^2$$

and then choose $j_2 > j_1$ so that according to (1) and (2),

$$\sum_{j=1}^{j_2} t_{i_2 j} = 1 + d_2 \quad \text{and} \quad \sum_{j=j_2+1}^{+\infty} |t_{i_2 j}| < (0.05)^2$$

where $|d_2| < 2(0.05)^2$.

Having chosen $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ and $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, choose $i_{k+1} > i_k$ so that according to (2) and (3), for $i \geq i_{k+1}$,

$\sum_{j=1}^{j_k} |t_{ij}| < (0.05)^k$ and $\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{k+1,i}$, $|e_{k+1,i}| < (0.05)^{k+1}$, and then choose $j_{k+1} > j_k$ so that according to (1) and (2),

$$\sum_{j=1}^{j_{k+1}} t_{i_{k+1}j} = 1 + d_{k+1}, \quad \text{and} \quad \sum_{j=j_{k+1}+1}^{+\infty} |t_{i_{k+1}j}| < (0.05)^{k+1},$$

where $|d_{k+1}| < 2(0.05)^{k+1}$.

Define the sequence $\{a_j\}$ by the prescription:

$$a_j \equiv \begin{cases} 1 & \text{for } 1 \leq j \leq j_1, j_2 < j \leq j_3, \dots \\ -1 & \text{for } j_1 < j \leq j_2, j_3 < j \leq j_4, \dots \end{cases}$$

If k is odd and $k > 1$, then

$$\begin{aligned} b_{i_k} &= \sum_{j=1}^{j_1} t_{i_k j} - \sum_{j=j_1+1}^{j_2} t_{i_k j} + \sum_{j=j_2+1}^{j_3} t_{i_k j} - \dots + \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} t_{i_k j} + \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{i_k j} a_j \\ &= \sum_{j=1}^{j_1} t_{i_k j} - \left(\sum_{j=1}^{j_2} t_{i_k j} - \sum_{j=1}^{j_1} t_{i_k j} \right) + \left(\sum_{j=1}^{j_3} t_{i_k j} - \sum_{j=1}^{j_2} t_{i_k j} \right) \\ &\quad - \dots + \left(\sum_{j=1}^{j_k} t_{i_k j} - \sum_{j=1}^{j_{k-1}} t_{i_k j} \right) + \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{i_k j} a_j. \end{aligned}$$

All quantities $\sum_{j=1}^{j_r} t_{i_k j}$, except $\sum_{j=1}^{j_k} t_{i_k j} = 1 + d_k$, are less than $(0.05)^{k-1}$ in absolute value. Thus, since

$$\left| \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{i_k j} a_j \right| \leq \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} |t_{i_k j}| < (0.05)^k$$

we see that

$$\begin{aligned} b_{i_k} &> 1 - 2(0.05)^{k-1} - 2(k-1)(0.05)^{k-1} - (0.05)^k \\ &= 1 - [2(k-1) + 2.05](0.05)^{k-1}. \end{aligned}$$

Methods of calculus show that the function of k defined on the last line above is an increasing function for $k \geq 1$, and therefore takes on its least value if $k \geq 3$ at the point where $k = 3$. Therefore, if k is an odd integer greater than 1:

$$b_{i_k} > 1 - [4 + 2.05](0.05)^2 > 0.9.$$

Similarly, for k even, it can be shown that $b_{i_k} < -0.7$. Therefore the sequence $\{b_i\}$ diverges.

Examples 20 and 21 show that although some Toeplitz matrices transform some sequences whose terms are all ± 1 into convergent sequences, no Toeplitz matrix transforms all such sequences into convergent sequences.

A refinement of the preceding technique permits the following conclusion: If $\{T_m\}$ is a sequence of Toeplitz matrices, there is a sequence $\{a_n\}$ such that $|a_n| = 1$ for $n = 1, 2, \dots$ and such that for each m the transform of $\{a_n\}$ by T_m is divergent. Indeed, in the context preceding, let $\{i_k\}$ and $\{j_k\}$ be strictly increasing sequences of positive integers chosen so that the related properties hold as follows: We choose i_1 and j_1 so that the related properties hold for T_1 ; then i_2 and j_2 so that the related properties hold for both T_1 and T_2 ; etc. Let the sequence $\{a_n\}$ be defined as in Example 21. For any fixed m the sequence $\{a_n\}$ is transformed

into a sequence $\{b_{mn}\}$ and, since the numbers i_k and j_k for $k > m$ constitute sequences valid for the counterexample technique applied to T_m , it follows that $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{mn}$ does not exist for any m .

22. A power series convergent at only one point. (Cf. Example 24.)

The series $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$ converges for $x = 0$ and diverges for $x \neq 0$.

23. A function whose Maclaurin series converges everywhere but represents the function at only one point.

The function

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is infinitely differentiable, all of its derivatives at $x = 0$ being equal to 0 (cf. Example 10, Chapter 3). Therefore its Maclaurin series

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0$$

converges for all x to the function that is identically zero, and hence represents (converges to) the given function f only at the single point $x = 0$.

24. A function whose Maclaurin series converges at only one point.

A function with this property is described in [10], p. 153. The function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos n^2 x,$$

because of the factors e^{-n} present in all of the series obtained by successive term-by-term differentiation (which therefore all converge uniformly), is an infinitely differentiable function. Its Maclaurin series has only terms of even degree, and the absolute value of the term of degree $2k$ is

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2k} e^{-n} n^{4k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2 x}{2k} \right)^{2k} e^{-n}$$

for every $n = 0, 1, 2, \dots$, and in particular for $n = 2k$. For this value of n and, in terms of any given nonzero x , with k any integer greater than $e/2x$, we have

$$\left(\frac{n^2 x}{2k} \right)^{2k} e^{-n} = \left(\frac{2kx}{e} \right)^{2k} > 1.$$

This means that for any nonzero x the Maclaurin series for f diverges.

The series $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$ was shown in Example 22 to be convergent at only one point, $x = 0$. It is natural to ask whether this series is the Maclaurin series for some function $f(x)$, since an affirmative answer would provide another example of a function of the type described in the present instance. We shall now show that it is indeed possible to produce an infinitely differentiable function $f(x)$ having the series given above as its Maclaurin series. To do this, let $\phi_{n0}(x)$ be defined as follows: For $n = 1, 2, \dots$, let

$$\phi_{n0}(x) \equiv \begin{cases} ((n-1)!)^2 & \text{if } 0 \leq |x| \leq 2^{-n}/(n!)^2 \\ 0 & \text{if } |x| \leq 2^{-n+1}/(n!)^2 \end{cases}$$

where, by means of the type of "bridging functions" constructed for Example 12, Chapter 3, $\phi_{n0}(x)$ is made infinitely differentiable everywhere. Let $f_1(x) \equiv \phi_{10}(x)$, and for $n = 2, 3, \dots$, let

$$\begin{aligned}
\phi_{n1}(x) &\equiv \int_0^x \phi_{n0}(t) dt \\
\phi_{n2}(x) &\equiv \int_0^x \phi_{n1}(t) dt \\
&\vdots \\
f_n(x) &\equiv \phi_{n,n-1}(x) \equiv \int_0^x \phi_{n,n-2}(t) dt
\end{aligned}$$

Thus $f_n'(x) = \phi_{n,n-2}(x)$, $f_n''(x) = \phi_{n,n-3}(x)$, $\dots$, $f_n^{(n-1)}(x) = \phi_{n0}(x)$, $f_n^{(n)}(x) = \phi_{n0'}(x)$. For any x and $0 \leq k \leq n-2$, $|f_n^{(k)}(x)| \leq (2^{-n+1}/n^2) |x|^{n-k-2}/(n-k-2)!$ since

$$\begin{aligned}
|\phi_{n1}(x)| &\leq 2^{-n+1}/n^2 \\
|\phi_{n2}(x)| &\leq [2^{-n+1}/n^2] \cdot |x| \\
&\vdots \\
|\phi_{n,n-1}(x)| &\leq (2^{-n+1}/n^2) \cdot |x|^{n-2}/(n-2)!.
\end{aligned}$$

The series $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$, for each $k = 0, 1, 2, \dots$, converges uniformly in every closed finite interval. Indeed, if $|x| \leq K$,

$$\sum_{n=k+2}^{+\infty} |f_n^{(k)}(x)| \leq \sum_{n=k+2}^{+\infty} \frac{K^{n-k-2}}{n^2 \cdot 2^{n-1} \cdot (n-k-2)!},$$

and uniform convergence follows from the Weierstrass M-test (cf. [34], p. 445). Hence we see that

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

is an infinitely differentiable function such that for $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$$

For $k \geq n \geq 1$, $f_n^{(k)}(0) = \phi_{n0}^{(k-n+1)}(0) = 0$. For $n \geq 1$ and $k = n-1$, $f_n^{(k)}(0) = \phi_{n0}(0) = ((n-1)!)^2$. For $0 \leq k < n-1$, $f_n^{(k)}(0) = 0$. Thus the Maclaurin series for $f(x)$ is $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$.

25. A convergent trigonometric series that is not a Fourier series.

We shall present two examples, one in case the integration involved is that of Riemann, and one in case the integration is that of Lebesgue.

The series $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, where $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, converges for every real number x , as can be seen (cf. [34], p. 533) by an application of a convergence test due to N. H. Abel (Norwegian, 1802-1829). However, this series cannot be the Fourier series of any Riemann-integrable function $f(x)$ since, by Bessel's inequality (cf. [34], p. 532), for $n = 1, 2, \dots$,

$$\frac{1}{1^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{2\alpha}} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$$

Since $f(x)$ is Riemann-integrable so is $[f(x)]^2$, and the right-hand side of the preceding inequality is finite, whereas if $\alpha \leq \frac{1}{2}$ the left-hand side is unbounded as $n \rightarrow +\infty$. (Contradiction.)

The series $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ also converges for every real number x . Let

$$f(x) \equiv \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}.$$

If $f(x)$ is Lebesgue-integrable, then the function

$$F(x) \equiv \int_0^x f(t) dt$$

is both periodic and absolutely continuous. Since $f(x)$ is an odd function ($f(x) = -f(-x)$), we see that $F(x)$ is an even function ($F(x) = F(-x)$) and thus the Fourier series for $F(x)$ is of the form

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

where $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(x) dx$, and for $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F'(x) \frac{\sin nx}{n} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \frac{\sin nx}{n} dx = -\frac{1}{n \ln n}. \end{aligned}$$

($F'(x)$ exists and is equal to $f(x)$ almost everywhere.) Since $F(x)$ is of bounded variation, its Fourier series converges at every point, and in particular at $x = 0$, from which we infer that $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ converges. But since $a_n = -1/(n \ln n)$, and $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1/(n \ln n))$ diverges, we have a contradiction to the assumption that $f(x)$ is Lebesgue-integrable.

Finally, to show that the trigonometric series $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ is not the Fourier series of any Lebesgue-integrable function we need the following theorem (for a proof see [52] and [53]): If a trigonometric series is the Fourier series of a Lebesgue-integrable function g , and if it converges almost everywhere to a function f , then $f(x) = g(x)$ almost everywhere and therefore f is Lebesgue-integrable and the given trigonometric series is the Fourier series of f .

26. An infinitely differentiable function $f(x)$ such that

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

and that is not the Fourier transform of any Lebesgue-integrable function.

Let $\{c_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, be a doubly infinite sequence such that

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

converges for all x but does not represent a function Lebesgue-integrable on $[-\pi, \pi]$ (cf. Example 25). We shall show that if $h(x)$ is any infinitely differentiable function that vanishes outside $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, if $h(0) = 2\pi$, and if

$$f(x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h(x - n),$$

then $f(x)$ is a function of the required kind.

Since $h(x)$ vanishes outside $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, the series that defines $f(x)$ has only finitely many nonzero

terms for any fixed x . Hence, the series converges for all x and represents some function $f(x)$. By the same argument, the series converges uniformly in every finite interval as does the series arising by termwise differentiation any finite number of times, and furthermore

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h^{(k)}(x - n)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$.

If $F(t)$ is Lebesgue-integrable and satisfies

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-itx} dt = f(x)$$

let

$$g(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t + 2\pi m).$$

Since $F(t)$ is Lebesgue integrable, $g(t)$ is defined for almost every t , $g(t + 2\pi) = g(t)$, and $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| dt \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t + 2\pi m)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < +\infty$. (For references on the preceding facts and the following equality, see [29], pp. 130-132, pp. 152-153.) We compute:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t + 2\pi m) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t + 2\pi m) e^{-in(t+2\pi m)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} f(n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k h(n - k) = \frac{c_n}{2\pi} h(0) = c_n. \end{aligned}$$

In other words, the c_n are Fourier coefficients of the Lebesgue-integrable function $g(t)$. This contradiction establishes the fact that $F(x)$ is not the Fourier transform of a Lebesgue-integrable function.

27. For an arbitrary countable set $E \subset [-\pi, \pi]$, a continuous function whose Fourier series diverges at each point of E and converges at each point of $[-\pi, \pi] \setminus E$.

The idea behind this example goes back to Fejér and Lebesgue. An exposition of the details is given in [52], pp. 167-173, where references to the original papers are also to be found.

28. A (Lebesgue-) integrable function on $[-\pi, \pi]$ whose Fourier series diverges everywhere.

This example is due to A. Kolmogorov. Details are given in [52], pp. 175-179, together with references.

29. A sequence $\{a_n\}$ of rational numbers such that for every function f continuous on $[0, 1]$ and vanishing at 0 ($f(0) = 0$) there exists a strictly increasing sequence $\{n_\nu\}$ of positive integers such that, with $n_0 \equiv 0$:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} a_n x^n \right),$$

the convergence being uniform on $[0, 1]$.

We make a preliminary observation:

For any positive integer m , the set of all polynomials with rational coefficients and involving only powers x^n such that $n \geq m$ is dense in the space $C_0([0, 1])$ of all functions continuous on $[0, 1]$ and vanishing at 0, in the "uniform topology" given by the distance and norm formula:

$$\rho(f, g) = \|f - g\| \equiv \max\{|f(x) - g(x)| \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

This follows from the Stone-Weierstrass theorem (cf. [42], p. 288, and [29], pp. 9-10).

Now let $\{f_n\}$ be an enumeration of a countable dense set of functions in $C_0([0, 1])$. For example, $\{f_n\}$ might be a sequence consisting of all polynomials with rational coefficients and zero constant term. Let P_1 be such a polynomial for which $\rho(f_1, P_1) = \|f_1 - P_1\| < 1$. Let P_2 be such a polynomial for which, among the terms with nonzero coefficients, the least exponent exceeds the degree of P_1 , and for which $\rho(f_2 - P_1, P_2) = \|f_2 - (P_1 + P_2)\| < \frac{1}{2}$. Having defined polynomials $P_1, P_2, \dots, P_n$ in $C_0([0, 1])$ such that their coefficients are rational and such that:

(a) the "least exponent of P_{k+1} " $> \deg P_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$,

(b) $\|f_k - \sum_{i=1}^k P_i\| < \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots, n$,

choose a polynomial P_{n+1} in $C_0([0, 1])$ with rational coefficients and such that

(a') the "least exponent of P_{n+1} " $> \deg P_n$,

(b') $\|f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} P_i\| < \frac{1}{n+1}$.

Let $m_j \equiv$ "least exponent of P_j ", and let $M_j \equiv \deg P_j$ for every $j \in \mathfrak{K}$. Then $m_j \leq M_j < m_{j+1}$, for $j \in \mathfrak{K}$. The sequence $\{a_n\}$ is now defined as follows: $a_1 = a_2 = \dots = a_{m_1-1} \equiv 0$, $a_{m_1} \equiv$ coefficient of x^{m_1} in P_1 , $a_{m_1+1} \equiv$ coefficient of x^{m_1+1} in P_1 , $\dots$, $a_{M_1} \equiv$ coefficient of x^{M_1} in P_1 . In general for $M_j < n < m_{j+1}$ let $a_n \equiv 0$; for $m_{j+1} \leq n \leq M_{j+1}$, let $a_n \equiv$ coefficient of x^n in P_j . If $f \in C_0([0, 1])$, let $0 < k_1 < k_2 < \dots$ be such that $\|f - f_{k_\mu}\| < 1/\mu$ for every $\mu \in \mathfrak{K}$. Then

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k_\mu} P_i \right\| \leq \|f - f_{k_\mu}\| + \left\| f_{k_\mu} - \sum_{i=1}^{k_\mu} P_i \right\| < \frac{1}{\mu} + \frac{1}{k_\mu} \leq \frac{2}{\mu}.$$

Hence if $n_0 \equiv 0$ and $n_\nu \equiv M_{k_\nu}$ for $\nu \in \mathfrak{I}$, then

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} a_n x^n \right)$$

where the (grouped) series on the right converges uniformly in $[0, 1]$.

This startling result is due to W. Sierpinski. Its close similarity to Example 5, last paragraph, should be noted. In this latter case, a single series of numbers is obtained, as the result of a rearrangement, having the property that corresponding to an arbitrary real number x there exists a subsequence of partial sums - and hence a method for introducing parentheses in the series - that gives convergence to x . In the present case there is a single power series having the property that corresponding to an arbitrary member of $C_0([0, 1])$ there exists a subsequence of partial sums - and hence a method of introducing parentheses in the series - that gives uniform convergence to f .

11.5.3 Counterexamples about Uniform Convergence

Introduction

The examples of this chapter deal with uniform convergence - and convergence that is not uniform - of sequences of functions on certain sets. The basic definitions and theorems will be assumed to be known (cf. [34], pp. 441-462, [36], pp. 270-292).

1. A sequence of everywhere discontinuous functions converging uniformly to an everywhere continuous function.

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1/n & \text{if } x \text{ is rational,} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

Clearly, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ uniformly for $-\infty < x < +\infty$.

This simple example serves to illustrate the following general principle: Uniform convergence preserves good behavior, not bad behavior. This same principle will be illustrated repeatedly in future examples.

2. A sequence of infinitely differentiable functions converging uniformly to zero, the sequence of whose derivatives diverges everywhere.

If $f_n(x) \equiv (\sin nx)/\sqrt{n}$, then since $|f_n(x)| \leq 1/\sqrt{n}$ this sequence converges uniformly to 0. To see that the sequence $\{f'_n(x)\}$ converges nowhere, let x be fixed and consider

$$b_n = f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx.$$

If $x = 0$, $b_n = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$. We shall show that for any $x \neq 0$ the sequence $\{b_n\}$ is unbounded, and hence diverges, by showing that there are arbitrarily large values of n such that $|\cos nx| \geq \frac{1}{2}$. Indeed, for any positive integer m such that $|\cos mx| < \frac{1}{2}$,

$$|\cos 2mx| = |2\cos^2 mx - 1| = 1 - 2\cos^2 mx > \frac{1}{2},$$

so that there exists an $n > m$ such that $|\cos nx| > \frac{1}{2}$.

3. A nonuniform limit of bounded functions that is not bounded.

Each function

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \min\left(n, \frac{1}{x}\right) & \text{if } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is bounded on the closed interval $[0, 1]$, but the limit function $f(x)$, equal to $1/x$ if $0 < x \leq 1$ and equal to 0 if $x = 0$, is unbounded there.

Let it be noted that for this example to exist, the limit cannot be uniform.

4. A nonuniform limit of continuous functions that is not continuous.

A trivial example is given by

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \min(1, nx) & \text{if } x \geq 0, \\ \max(-1, nx) & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

whose limit is the signum function (Example 3, Chapter 3), which is discontinuous at $x = 0$.

A more interesting example is given by use of the function f (cf. Example 15, Chapter 2) defined:

$$f(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{if } x = \frac{p}{q} \text{ in lowest terms, where } p \text{ and } q \text{ are integers} \\ & \text{and } q > 0. \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

For an arbitrary positive integer n , define $f_n(x)$ as follows: According to each point $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{q}\right)$, where $1 \leq q < n, 0 \leq p \leq q$, in each interval of the form $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2n^2}, \frac{p}{q}\right)$ define

$$f_n(x) \equiv \min\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} + 2n^2\left(x - \frac{p}{q}\right)\right);$$

in each interval of the form $\left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2n^2}\right)$ define

$$f_n(x) \equiv \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} - 2n^2\left(x - \frac{p}{q}\right)\right);$$

and at every point x of $[0, 1]$ at which $f_n(x)$ has not already been defined, let $f_n(x) \equiv 1/n$. Outside $[0, 1]$ $f_n(x)$ is defined so as to be periodic with period one. The graph of $f_n(x)$, then, consists of an infinite polygonal arc made up of segments that either lie along the horizontal line $y = 1/n$ or rise with slope $\pm 2n^2$ to the isolated points of the graph of f . (Cf. Fig. 2.) As n increases, these "spikes" sharpen, and the base approaches the x axis. As a consequence, for each $x \in \mathcal{G}$ and $n = 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x),$$

and

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x),$$

as defined above. Each function f_n is everywhere continuous, but the limit function f is discontinuous on the dense set Q of rational numbers. (Cf. Example 24, Chapter 2.)

5. A nonuniform limit of Riemann-integrable functions that

is not Riemann-integrable. (Cf. Example 33, Chapter 8.) Each function g_n , defined for Example 24, Chapter 2, when restricted to the closed interval $[0, 1]$ is Riemann-integrable there, since it is bounded there and has only a finite number of points of discontinuity. The sequence $\{g_n\}$ is an increasing sequence ($g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ for each x and $n = 1, 2, \dots$) converging to the function f of Example 1, Chapter 4, that is equal to 1 on $Q \cap [0, 1]$ and equal to 0 on $[0, 1] \setminus Q$.

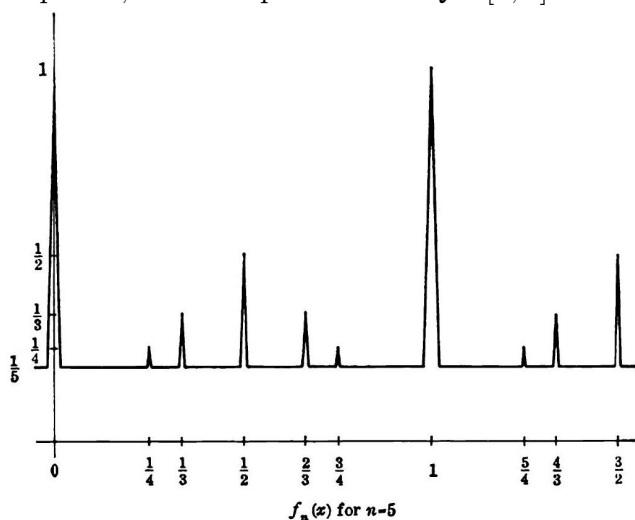


Figure 2

6. A sequence of functions for which the limit of the integrals is not equal to the integral of the limit.

Let

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 2n^2x & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ n - 2n^2\left(x - \frac{1}{2n}\right) & \text{if } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{if } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Then

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

but

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

Another example is the sequence $\{f_n(x)\}$ where $f_n(x) = nxe^{-nx}$, $0 \leq x \leq 1$.

A more extreme case is given by

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 2n^8x & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ n^2 - 2n^3\left(x - \frac{1}{2n}\right) & \text{if } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{if } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

in which case, for any $b \in (0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$$

while

$$\int_0^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^b 0 dx = 0$$

7. A sequence of functions for which the limit of the derivatives is not equal to the derivative of the limit.

If $f_n(x) \equiv x/(1 + n^2x^2)$ for $-1 \leq x \leq 1$ and $n = 1, 2, \dots$, then $f(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ exists and is equal to 0 for all $x \in [-1, 1]$ (and this convergence is uniform since the maximum and minimum values of $f_n(x)$ on $[-1, 1]$ are $\pm 1/2n$). The derivative of the limit is identically equal to 0. However, the limit of the derivatives is

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2} = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } 0 < |x| \leq 1 \end{cases}$$

8. Convergence that is uniform on every closed subinterval but not uniform on the total interval.

Let $f_n(x) \equiv x^n$ on the open interval $(0, 1)$.

9. A sequence $\{f_n\}$ converging uniformly to zero on $[0, +\infty)$ but such that $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \rightarrow 0$.

$$\text{Let } f_n(x) \equiv \begin{cases} 1/n & \text{if } 0 \leq x \leq n, \\ 0 & \text{if } x > n. \end{cases}$$

Then f_n converges uniformly to 0 on $[0, +\infty)$, but

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 1 \rightarrow 1$$

A more extreme case is given by

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1/n & \text{if } 0 \leq x \leq n^2 \\ 0 & \text{if } x > n^2 \end{cases}$$

Then $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = n \rightarrow +\infty$.

10. A series that converges nonuniformly and whose general term approaches zero uniformly.

The series $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n$ on the half-open interval $[0, 1)$ has these properties. Since the general term is dominated by $1/n$ on $[0, 1)$ its uniform convergence to zero there follows immediately. The convergence of the series follows from its domination by the series $\sum x^n$, which converges on $[0, 1)$. The nonuniformity of this convergence is a consequence of the fact that the partial sums are not uniformly bounded (the harmonic series diverges; cf. [34], p. 447, Exs. 31, 32).

11. A sequence converging nonuniformly and possessing a uniformly convergent subsequence.

On the real number system $\mathbb{Q}$, let

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \frac{x}{n} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{1}{n} & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

The convergence to zero is nonuniform, but the convergence of the subsequence $\{f_{2n}(x)\} = \{1/2n\}$ is uniform.

12. Nonuniformly convergent sequences satisfying any three of the four conditions of Dini's theorem.

Dini's theorem states that if $\{f_n\}$ is a sequence of functions defined on a set A and converging on A to a function f , and if

- (i) f_n is continuous on $A, n = 1, 2, \dots$,
- (ii) f is continuous on A ,

(iii) the convergence is monotonic,

(iv) A is compact,

then the convergence is uniform.

No three of these conditions imply uniform convergence. In other words, no one of the four hypotheses can be omitted. The following four examples demonstrate this fact.

$$(i): f_n(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \text{ or } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{if } 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Then $\{f_n(x)\}$ is a decreasing sequence for each x , converging nonuniformly to the continuous function 0 on the compact set $[0, 1]$.

(ii): The sequence $\{x^n\}$ converges decreasingly and nonuniformly to the discontinuous function

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

on the compact set $[0, 1]$.

(iii): Example 6.

(iv): The sequence $\{x^n\}$ on $[0, 1]$.

12 Real Infinite Series by Bonar, Khoury

12.1 Introduction

12.1.1 Definitions

1.1.2 Infinite Series

Pseudo-Definition 1.33 A (real) infinite series is obtained by taking the terms of an infinite sequence and connecting them with plus signs rather than commas. The resulting expression is written

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

or occasionally

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots,$$

where the index of summation is allowed to begin at values other than 0.

Definition 1.34 With each infinite series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ we associate two distinct sequences. First is the sequence of terms, which is simply $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Second, the sequence of partial sums $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ is defined by

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_k &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=0}^k a_n \end{aligned}$$

We define the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ to be convergent if and only if $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ exists (and is finite). We define the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ to be divergent (not convergent) if and only if $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$ or $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = -\infty$ or $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ fails to exist.

Definition 1.35 In the case that $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges to a limit S (i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$), we call this limit the sum of the series and write

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

We may also extend this convention to the divergent cases where

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty \text{ (or } -\infty \text{)}$$

and write

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \text{ (or } -\infty \text{)}.$$

The reader should notice that the $\sum$ symbols that appear here do not actually represent summation in the ordinary finite sense, but in fact are a special case of the limit concept treated earlier. In particular, we can work with these in all the same ways we worked with ordinary limits. The results of Proposition 1.8 are "inherited" by sums of series, as summarized here.

Proposition 1.36 (Basic Properties of Series) The following properties of series hold.

1. A convergent series has a unique sum.
2. A convergent series does not also diverge.
3. If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, then $\sum_{n=0}^{\infty} (ka_n) = kA$. This includes the case when A is infinite, provided $k \neq 0$.
4. If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, then $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$. This includes the case when A or B is infinite, provided A and B are not both infinite and opposite in sign.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ have the same limit behavior for any N , except they will in general have different sums in the case when both converge. The latter series is called a tail for the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, and any tail contains all the information about the limit behavior of a series. In the case when $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges or diverges to ∞ , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$.

1.2 Special Series

1.2.1 Geometric Series

Example 1.37 Analyze the behavior of the infinite series

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Solution. By definition, the behavior of this series is just the behavior of its sequence of partial sums. We evaluate by hand the first few of these.

$$s_0 = 1 = 2 - 1$$

$$s_1 = 1 + 1/2 = 3/2 = 1.5 = 2 - 1/2$$

$$s_2 = 1 + 1/2 + 1/4 = 7/4 = 1.75 = 2 - 1/4$$

$$s_3 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 15/8 = 1.875 = 2 - 1/8$$

We see that, in general, these partial sums appear to be approaching 2. In fact a careful look at these special cases may lead us to suspect the general pattern

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

We could try to show this by induction, but instead we will use a clever trick.

$$\begin{aligned}s_n &= 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2^n \\ 2s_n &= 2 + 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^{n-1}\end{aligned}$$

Now, all the terms except two are the same in the right-hand sides of these two equations. Subtracting the first from the second,

$$\begin{aligned}s_n &= 2s_n - s_n \\ &= (2 + 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^{n-1}) - (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2^n) \\ &= 2 - 1/2^n,\end{aligned}$$

as desired. Finally,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$$

We should pause for a moment here. This example is classical, and many readers will have seen it, even those who may not have seen the definition of an infinite series. We should really be careful to understand what it is we are doing when we claim to have added an infinite collection of numbers. Although in giving our formal definitions, we have spoken of interpreting a sum of an infinite sequence of terms, this is the first concrete example. We are familiar with adding in the finite sense, but how do we know what we should mean by this infinite sum? There is no question of "proving" that the definition we gave is right, since right and wrong are not applicable to a definition. (In a sense, of course, we could define a sum of a series any way we pleased.)¹ Although we have seen in Proposition 1.36 that this definition of infinite series convergence has some properties that we would expect, and we will go further in this direction in Chapter 4; on a practical level the authors realize we are asking a lot of the reader's intuition. To that end, we make this example more concrete yet. In Figure 1.1 we begin with a 2 by 1 rectangle and divide it into various rectangles having areas $1, 1/2, 1/4, \dots$, that is, the terms of the series above. We notice that they fit together to make the larger rectangle, whose area we can compute to be 2. Empirically, then, if the sum of this series should have any meaning at all, our intuition would demand that the sum be 2. So in this case at least our definition gives us an answer that we "like."

The technique that we used to sum this series depended essentially on the fact that multiplying by 2 and subtracting eliminated all the intermediate terms. This, in turn, was successful because each term differed from the following term by the same fixed ratio. Evidently we could use the same technique to sum any series in which the terms have a constant ratio. We capture this tentative observation in a definition and a theorem.

⁰¹ Indeed, there do exist other related notions of summing series with interesting properties in their own right.

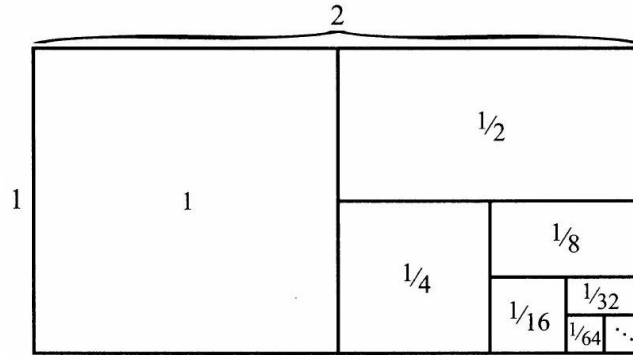


FIGURE 1.1

A Geometric Series of Areas

Definition 1.38 A geometric series is a series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ with $a_n = a_0 r^n$ for some number r . r is called the common ratio of the series and is, when $r \neq 0$, the ratio of any term to its immediate predecessor (i.e., a_{n+1}/a_n).

Theorem 1.39 Let $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ be a geometric series with $a \neq 0$.

1. If $-1 < r < 1$, then the series converges, and the sum is $a/(1 - r)$.
2. If $|r| \geq 1$, then the series diverges.

Proof 1. Note that the theorem is trivial in the cases $r = 0$ and $r = 1$ (in the latter case, all the terms are the same), so suppose $r \neq 0$. As usual let $\{s_k\}$ be the sequence of partial sums for the geometric series. Then we claim

$$s_n = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

We prove this claim by induction. In the case $n = 0$, we have

$$s_0 = a_0 = a = a(1 - r)/(1 - r)$$

as desired. Now suppose that, for some $n = k \geq 0$,

$$s_k = a \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

then for $n = k + 1$,

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = a \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} + ar^{k+1} = \frac{a - ar^{k+1} + ar^{k+1} - ar^{k+2}}{1 - r} = a \frac{1 - r^{k+2}}{1 - r}$$

completing the induction. Now, in the case $|r| < 1$, we notice that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r^{n+1}) = \frac{a}{1 - r}$$

showing the first statement of the theorem. The opposite case is analogous—we note that $\{r^n\}$, and hence s_n , diverges.

Proof 2. We prove this claim in a fashion similar to our earlier development.

$$\begin{aligned} s_n &= a(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) \\ rs_n &= a(r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}) \end{aligned}$$

Therefore we have that $(1 - r)s_n = a(1 - r^{n+1})$ and if $|r| < 1$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right) = \frac{a}{1 - r}$$

If $|r| \geq 1$ clearly $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)$ does not exist.

The above theorem has many implications in the theory of infinite series, for two basic reasons. First, many naturally arising series in applications turn out to be geometric, or combinations of geometric series. Second, the well-understood behavior of geometric series will become the basis of two major tests in Section 1.4.

We also remark that we can use this formula even when the series is not indexed to begin at 0. By a similar argument that the reader can verify, we have

$$\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = \frac{ar^k}{1 - r}$$

This can be remembered as the single pseudo-formula

$$\sum (\text{Geometric Series}) = \frac{\text{first term}}{1 - \text{common ratio}}$$

which holds regardless of how the series is indexed.

Example 1.40 Analyze the behavior of the infinite series

$$8 + \frac{32}{3} + \frac{128}{9} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 8 \left(\frac{4}{3} \right)^n$$

Solution. We might first find partial sums:

$$s_0 = 8$$

$$s_1 = 8 + 32/3 = 56/3$$

$$s_2 = 8 + 32/3 + 128/9 = 296/9$$

and discover no obvious pattern. In fact, the partial sums appear to be increasing rapidly. Instead we notice that this series is in fact a geometric series with common ratio $r = 4/3$. Since $r > 1$, Theorem 1.39 shows that the series diverges.

Example 1.41 Interpret the repeating decimal 0.4242424242... as an infinite series whose sum is a rational number.

Solution. We can write the given number, where 42 repeats infinitely often, in the form

$$0.4242424242\ldots = 0.42 + 0.0042 + 0.000042 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (0.42)(0.01)^n$$

so we see that the series is geometric with $a = 0.42$, $r = 0.01$. By Theorem 1.39, the series converges to a sum of

$$\frac{0.42}{1 - 0.01} = \frac{0.42}{0.99} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}.$$

Therefore, we conclude that the natural meaning to give to the repeating decimal 0.4242424242... must be $14/33$. (The reader should notice that every repeating decimal can be interpreted as an initial decimal, then a purely repeating part that can be considered as a geometric series; the reader may wish to verify that this corresponds exactly to the algorithm we all learned in school for converting certain decimals to fractions. As an example, if $x = 0.99999\ldots$ then $10x = 9.9999\ldots$, hence $9x = 10x - x = 9$ thus $x = 1$.)

1.2.2 Telescoping Series

Example 1.42 Analyze the behavior of the series

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

Solution 1. We might first take partial sums,

$$s_1 = 1/2$$

$$s_2 = 1/2 + 1/6 = 4/6 = 2/3$$

$$s_3 = 1/2 + 1/6 + 1/12 = 9/12 = 3/4$$

$$s_4 = 1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 = 16/20 = 4/5$$

and discover the pattern $s_n = n/(n+1)$. To prove this conjecture we can use induction. The base cases have just been taken care of, so we move to the inductive case. Assume that $s_k = k/(k+1)$. Then we can write

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + a_{k+1} = s_k + \frac{1}{(k+1)^2 + k + 1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k^2 + 3k + 2} \\ &= \frac{k(k+2) + 1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

completing the induction. We conclude that $s_n = n/(n+1)$. Finally,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Solution 2. We first manipulate the terms of the series, to make the pattern in the partial sums more obvious.

$$a_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Now we can quickly see

$$s_1 = 1 - 1/2$$

$$s_2 = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) = 1 - 1/3$$

$$s_3 = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) = 1 - 1/4$$

⋮

$$s_n = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \cdots + (1/n - 1/(n+1)) = 1 - 1/(n+1)$$

Notice that we can directly compute any partial sum by realizing that most of the terms cancel with one another, collapsing the many-term sum into a simple sum. Mathematicians say that this series telescopes or collapses, the former term referring to the way an old-fashioned telescope folds up, with each segment disappearing as it fits inside the next. As in Solution 1, we again see $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$.

This telescoping behavior is central to many series whose sum we can actually compute numerically. (This includes the geometric series of Section 1.2.1; can you see how to rewrite a geometric series so that it telescopes?) Since using the definition of infinite series directly requires a precise knowledge about the partial sums, we must use some strategy to collapse the nonclosed definition of the partial sum into a closed form. The preceding example is probably the most common telescoping series in the literature, and indeed the telescoping behavior is very

commonly accomplished by decomposing the terms of a series into partial fractions. However, the reader should be alert to use this technique, even on series where the decomposition is less immediately obvious.

Example 1.43 Analyze the behavior of the series

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Solution. We first rationalize the denominator to make the terms of the series more workable.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \end{aligned}$$

Again we can find the telescoping behavior

$$\begin{aligned} s_0 &= \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1 \\ s_1 &= (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) = \sqrt{2} \\ s_2 &= (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3} \\ &\vdots \\ s_n &= (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1}, \end{aligned}$$

which gives us all the partial sums. Applying the definition of series convergence and divergence,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = \infty$$

so that the series diverges to ∞ .

12.1.2 1.3 Intuition and Infinity

1.3.1 Zeno's Paradox

The notion of infinity and of infinite processes has been confusing on an intuitive level throughout mathematical history. The reader is almost certainly familiar with Zeno's First Paradox, or at least an unsophisticated interpretation of it, as one "application" of the idea of infinite series. In a sense this is fortunate because the reader knows a bit of the struggle that early intellectuals had with the infinite. Yet, as Pope said, a little knowledge is a dangerous thing, and people have gone on to claim that Zeno's arguments actually show lots of things that are ridiculous. So we should go no further before discussing Zeno's claims in some depth-what they imply and what they don't imply. In deference to ancient Greek tradition, we do this in the form of a dialogue between Alice, a modern mathematician, and Zed, descendant and follower of Zeno. Zed's errors represent common and very reasonable misconceptions about the nature of infinite processes. (Zed's second speech is the content of Zeno's First Paradox, in more or less the form that Zeno would have argued it.)

Alice: You say you think that motion is impossible?

ZED: That's right, just as Zeno explained it. People have said that he was wrong, but I've never understood why. Suppose that a runner, let's say Achilles-

Alice: Let's say Alice.

Zed: Okay, let's say Alice. Suppose you want to run some distance, let's say a mile. In order to run that mile, you must first cover half the distance. After that, you must go another quarter-mile to get half-way to the finish line. After crossing each half-way point, there is always another half-way point to cross. Since you have an infinite number of half-way points to cross, it would take you forever to run the mile—you couldn't actually do it. So motion is impossible.

Alice: You can't possibly believe that.

Zed: Why not?

Alice: For one thing, you've seen me run a mile. And you know that motion is possible. I would trust my senses and what I can observe more than an iffy verbal argument any day.

Zed: Well, so would I. I guess that Zeno's work just goes to show that you can't trust reasoning about infinity.

Alice: Not exactly. You can't trust bad reasoning about infinity, any more than you can trust bad reasoning about anything else.

ZED: But Zeno's argument doesn't seem like bad reasoning. It's perfectly good logic.

Alice: Well, it's sometimes hard to tell whether English speech is good logic or bad logic. Let's try to be as precise as we can about what you and Zeno are saying. To run the mile, we must first accomplish the subtask T_1 of going half the distance, then the subtask T_2 of travelling to the next halfway point, and so on. Our original task, then, breaks up into a sequence of subtasks

$$T_1, T_2, T_3, \dots$$

Now why don't you think I can ever do all of these tasks? Be as clear as you can be.

ZED: Well, each of the tasks T_i will take you a certain positive amount of time t_i . The whole task would take forever because you would have to add an infinite number of positive numbers.

Alice: But we can't add an infinite number of numbers like that—

Zed: That's just my point!

Alice: Not quite. You want to conclude that the total time is actually infinite, which suggests that you have some way of interpreting the sum. I say we can't add them all directly because addition doesn't make sense that way; we'd have to use infinite series. If we have a convergent infinite series then good fortune has fallen our way.

ZED: Hmmm. That's true. Okay, then we'll use a series. The total time should be

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i.$$

That must be infinite because, um, because, it just has to be.

Alice: You're making the same assumption that Zeno did; indeed, that Greek mathematicians all did. You're assuming that any series of positive terms has to diverge. They never state that assumption because they did not have the vocabulary at that point in the history of mathematics. But basically that's the fallacious "fact" that you and Zeno are invoking.

Zed: Seems reasonable.

Alice: But we know that isn't true. Back in Example 1.42, we found a convergent series.

Zed: Oh. Right. Okay, so maybe Zeno's reasoning about infinity wasn't valid. But why should I believe that your definition of infinite series is any more sensible? It sounds fine, but Zeno's Paradox sounded fine to me yesterday.

Alice: That's a good question. Of course, as a mathematical definition, it's just as good as any other definition. Strictly speaking, it doesn't have to make "sense" as long as it isn't evidently inconsistent. But in this case, the notion of summing an infinite series does have a meaningful interpretation, even in Zeno's example. Let's suppose that I can run about 10 mph, and I

want to know how long it would take to run the mile.

Zed: Six minutes!

Alice: Don't interrupt. You've followed Zeno this far, let's follow him all the way, and this time use the definition to try to sum the series. The first task T_1 involves running $1/2$ mile, so I can do it in $(1/2 \text{ mile})/(10\text{mph}) = 1/20 \text{ hours} = 3 \text{ minutes}$. Then $t_1 = 3 \text{ minutes}$. T_2 is to run half as far, so $t_2 = 1.5 \text{ minutes}$. In general, T_n is to run $1/2^n$ miles, and $t_n = 6/2^n \text{ minutes}$. We want the summation

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{2^n}$$

which is geometric with first term 3 and common ratio $1/2$. Using what we know about geometric series, this sum is $3/(1 - 1/2)$.

ZED: Six minutes, as I said in the first place.

Alice: Right. Reasoning about infinite series will give you the answers you were expecting to questions you could answer already; however, in some cases, these definitions will let you solve problems you couldn't solve without resorting to an infinite process.

Note: Let us return to Alice's next to last statement and observe that the initial half mile required three minutes running time and likewise three minutes running time for the remaining half mile. If we view the one mile run as an infinite number of tasks, then the required time would be $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$ minutes. These two observations are often represented by the equation $3 + 3 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$. Zeno saw this as paradoxical. Zeno assumed a priori that no actual infinity exists, hence no infinite process could be completed and consequently no equivalence between a finite and infinite process could be allowed.

1.3.2 Series vs. Addition

As the previous section indicates, it is possible to get in a lot of logical trouble if we are not careful about how we manipulate and interpret infinite series. We are both helped and hindered by the connection between infinite series and addition. For most readers, addition was the first mathematical operation learned. Ever since kindergarden ("If Joelle has five apples and...") we have dealt with addition tables and a widening variety of addition problems and applications. In fact, because of this depth of personal experience, the properties of addition are very seldom thought about in any sort of explicit way. We just "know" how addition works. When working with series, we have to remember that we are "overloading" the $\sum$ and $+$ operators by defining series notation as we have. Despite being defined by analogy with and in terms of ordinary addition, series summation is not ordinary addition. In the equations

$$5 + 2 = 7 \text{ and } 1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + \dots = 1,$$

the $+$ represents a different operation with different properties.

We know that series summation is not ordinary addition because, ultimately, addition is a binary operation. We only really know how to add numbers two at a time. Poppycrack, you may be saying, because we all have seen sums like

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

However, this "10-ary" form of addition is really constructed by inductively using binary addition. When interpreting a summation like this, we really say, " $1 + 2 = 3, 3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10, \dots$," adding two at a time. We cannot use this recursive process to define an ∞ -ary addition. However, notice that the definition of summation does parallel this process-the partial sums represent all the intermediate answers we would get by blithely trying to add the infinite list of terms.

It is true that many of the familiar properties of addition, now second nature due to the reader's extensive personal experience with adding, apply in an analogous form to infinite series. For example, adding two convergent series, term by term, will form a new convergent series, and its sum will be the sum of the sums of the original series. However, nothing should go without saying. The reader should try now to prove the linearity property for series directly from the definition as a straightforward exercise. There are two very common errors when working with series that stem from abusing properties of addition, and they are worth mentioning explicitly. The following two properties should not be applied fast and loose to infinite series.

Addition is commutative. We know that we can exchange the positions of terms in a finite summation to our heart's content. However, at least a priori, order does matter in the definition of the partial sums. If we take a given series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and make a new series

$$a_{100} + a_1 + a_{435} + a_{21} + a_6 + \cdots$$

obtained by using each of the a_i in some order, the resulting series is called a rearrangement of the original series. In general, these two series do not necessarily both converge or both diverge, and even if both converge they may have different sums. In Chapter 4, we will learn more about the relationship between a series and its rearrangement.

Addition is associative. In a finite summation, we may insert and rearrange parentheses as desired. However, in moving from the expression

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots$$

to the expression

$$(a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots$$

we have changed it substantially. The $+$ symbols inside the parentheses now indicate ordinary addition, whereas they indicated series summation in the first expression. A series obtained by collapsing some adjacent terms into single terms (that is, inserting parentheses) is called a grouping of the original series. Again, we will see in Chapter 4 what sort of relationship a series has to its groupings. A particularly famous abuse of grouping and regrouping was used to show that $0 = 1$. The argument went as follows:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \end{aligned}$$

The creator of this reasoning error claimed it showed the existence of God. The authors of this book claim rather that it shows the importance of remembering the difference between finite addition and "infinite addition" by way of infinite series.

1.3.3 Qualitative Behavior of Series

Before undergoing any heavy analysis of infinite series, it may be worth taking a moment to imagine, at least in broad terms, what sorts of behavior infinite series can have. In thinking about series for the purpose of this section, we can for the most part disregard actual numbers and think only about behavior. Visualize a series as a sequence of steps on a number line, beginning at 0 before any terms are added. As each successive term a_n is added, the point marking the running total moves to the right or the left according as a_n is positive or negative.

First consider the case in which all the terms are positive. Then the running total must step from left to right, never moving back to the left. Then there are really only two things that can happen to the running total. Either the partial sums will increase without bound to

the right, meaning that the series will diverge to ∞ , or it will move to the right slowly enough that the partial sums will cluster at a point L , which would mean that the series converges to L .²

In the case that the series may have terms of both signs, then the running total may move in either direction. Again, the point may move off steadily to the right without limit (in which case the series sums to ∞), or it may move off steadily to the left without limit (in which case the series sums to $-\infty$). Also as before, the running total may get closer and closer to some specific point, in which case the series converges. However, we can also imagine some other cases: the running total may move to the right to a certain number A , then back to the left to approach B , then back toward A , and so on. We can think of this hypothetical series as going back and forth between A and B . Although there are many variations on this behavior, it seems that any behavior other than convergence or divergence to $\pm\infty$ must involve some sort of back and forth motion of the partial sum. It is this qualitative description that motivates the term "oscillation" defined earlier.

In every case, then, when the series converges, the partial sums must eventually all be arbitrarily close indeed to the limit. If the partial sums eventually all stay in small intervals centered on the limit, then no step (read: term) can be large enough to move us outside the interval. The following theorem makes this explicit and rigorous.

Theorem 1.44 Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a convergent series. Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Proof. Define as usual the sequence of partial sums

$$s_k = \sum_{n=0}^k a_n$$

By hypothesis, the series converges to a sum, which we call S . By definition we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$$

Now, we notice that $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = s_{n-1} + a_n$. Thus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

The simplicity of the statement of this theorem and the brevity of its proof may lead the reader to underestimate its value. To put a sharper point on the result, we rephrase it in contrapositive form.

Corollary 1.44.1 (Divergence Test) Suppose that $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is a series and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

(That is, the limit is not zero, which includes the possibility that the limit does not exist.) Then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges.

This theorem forms an efficient test to show that certain series diverge. It is generally straightforward to apply, and if the criterion $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ fails, computing the partial sums and any other analysis become superfluous.

⁰² The reader with a particularly vivid imagination may imagine that the running total moves to the right, staying always less than some bound, but without actually reaching any limit. However, this can never happen—it is a consequence of a property of the real numbers called "completeness." In this treatment, the property of completeness is assumed when we state that every set has a supremum and an infimum. We refer the reader to any text on analysis for more details.

On the other hand, we may wonder now about the converse of this theorem, whether any series whose terms tend to 0 must in fact converge. On the face of it, it seems that some variation on the proof of Theorem 1.44 might verify the converse. Theorem 1.39 shows that, at least for geometric series, the condition that the terms tend to 0 (i.e., $|r| < 1$) is necessary and sufficient for the series to converge. Unfortunately this is not true in general. In case you missed it the first time, this is not true in general. It is a very common error among students to apply the nonexistent converse of Theorem 1.44 to "show" convergence. Example 1.43, for example, offers a series that diverges even though its terms tend to 0. Loosely speaking, this series diverges because, although its terms go to 0, they decrease very slowly; a series of positive terms will converge if its terms tend to 0 fast enough. Many of the interesting theorems in the theory of infinite series deal with the question of how to determine if a series whose terms go to 0 converges or diverges.

However, there is another way to think about the terms of a sequence "eventually getting very close together." This concept, named for Cauchy, is very useful because it does provide a necessary and sufficient condition.

Definition 1.45 A sequence $\{a_n\}$ is called a Cauchy sequence if for every $\epsilon > 0$ there exists an integer N such that for all $n_0, n_1 \geq N$, we have

$$|a_{n_1} - a_{n_0}| < \epsilon$$

Theorem 1.46 (Cauchy Criterion) A sequence converges if and only if it is a Cauchy sequence.

Proof. To show the "if" case, assume that for every $\epsilon > 0$, there exists an integer N such that for all $n_0, n_1 \geq N$, we have

$$|a_{n_1} - a_{n_0}| < \epsilon$$

Write $L = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $R = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. If $L = R$, then $\{a_n\}$ converges to their common value. Assume for the sake of contradiction that $R - L = E > 0$. By hypothesis, we can find an N such that for every $n_1, n_0 \geq N$, $|a_{n_1} - a_{n_0}| < E/3$. Since L and R are limit points, we can find infinitely many indices i, j such that $|L - a_i| < E/3$, $|R - a_j| < E/3$. In particular we can choose $i, j > N + 1$, so that $|a_i - a_j| < E/3$. Then $R - L = |R - L| \leq |R - a_j| + |a_j - a_i| + |L - a_i| < E/3 + E/3 + E/3 = E = R - L$, a contradiction.

To show the "only if" case, suppose that $\{a_k\}$ converges to a limit a . Let $\epsilon > 0$ be given. Then there exists a positive integer N such that, for all $n > N$, $|a_n - a| < \epsilon/2$. Then, for all $n_1 \geq n_0 \geq N + 1$, we have

$$|a_{n_1} - a_{n_0}| \leq |a_{n_1} - a| + |a_{n_0} - a| < \epsilon.$$

12.1.3 1.4 Basic Convergence Tests

As the reader may have noticed, all the series that we have been able to sum exactly have been "special." In general, given a series, even one with very simply defined terms, such as $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 + 1)$, we cannot write the partial sums in an elementary closed form. As a result, it is usually too ambitious to expect to evaluate a series directly by the definition. This is typical in mathematics. For example, the definition of integral makes its connection to area and other applications much more evident than would, say, a definition by way of the Fundamental Theorem of Calculus, but is completely impractical to apply; how many definite integrals has the reader completed by decomposing an area into millions of tiny rectangles? In the same way we now develop theorems that allow us to reason about the behavior of series without using the well-motivated but hopelessly impractical definition.

In this section, we will concern ourselves exclusively with positive series, that is, series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in which $a_n \geq 0$ for all n . If we wish to require that in fact the terms be positive and not merely nonnegative, we will call such series strictly positive. We begin in this way because of the straightforward behavior anticipated in Section 1.3.3; first, we show that such a simple behavior actually occurs.

Proposition 1.47 Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive series. Then one of the following two cases occurs:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ for some $A \geq 0$, that is, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, that is, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges to ∞ .

Proof. Define $s_k = \sum_{n=0}^k a_n$ to be the sequence of partial sums, and observe that

$$s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k \leq s_{k+1} \leq \cdots$$

That is, $\{s_k\}$ is an increasing sequence. Hence we are really reinterpreting Fact 1.30 for series; bounded increasing sequences must converge. If $\{s_k\}$ is bounded above, then it converges to its least upper bound A , and $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$. On the other hand, if $\{s_k\}$ is not bounded above, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$.

We have remarked elsewhere that in general one must be careful about the order of the terms in an infinite series. Two series with the same terms in a different order are, in general, two different series with no a priori connection. However, the simplistic behavior of positive series guarantees that in this limited context we can be less careful.

Theorem 1.48 Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive series and let $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ be a rearrangement of the first series. Then the two series either both converge to the same sum or both diverge properly.

Proof. Using the previous theorem, we know these series cannot oscillate, so we boldly write

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A; \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$$

allowing that A or B may be ∞ . Let s_k be some partial sum of the first series. Since each term $a_0, a_1, \dots, a_k$ that is represented in the partial sum occurs as some b_{j_k} , we can (by considering $j = \max j_k$) find a partial sum of the second series that contains all the terms in s_k and in general some other terms. Since all the terms are positive,

$$\sum_{n=0}^k a_n \leq \sum_{n=0}^j b_n \leq B$$

That is, all the partial sums of the first series are bounded above by partial sums of the second series, hence by the sum of the second series. Since this inequality holds for all partial sums, it continues to hold when we pass to the limit, and $A \leq B$. (This is just our Fact 1.28 in action.) But we can use a symmetric argument to guarantee $B \leq A$. Hence $A = B$ as desired. (The reader may wish to take a moment to convince himself or herself that a similar argument goes through even when A and B are allowed to be infinite; the important modification is as follows: if $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ then the partial sums are not bounded, so $\sum_{n=0}^k a_n \leq B$ for all k means that B must be infinite.)

1.4.1 Comparison Test

Since we suggested earlier that a positive series will converge if its terms get small "quickly enough," it seems plausible that, if one series has smaller terms than another, the series whose terms are smaller is more likely to converge in some sense. In fact this can be formalized as

the most basic convergence test. Notice that this is our first result that can show convergence without computing the partial sums—the Divergence Test can only be used to show divergence.

Theorem 1.49 (Comparison Test) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ be positive series, and suppose that $a_n \leq b_n$ holds for all n greater than some integer N .

1. If $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converges, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges also.
2. If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverges also.

Proof. Because the behavior of any series is determined only by its tail, we may consider without loss of generality that $a_n \leq b_n$ for all n . Then, the partial sums for the two series satisfy the relationship

$$\sum_{n=0}^k a_n \leq \sum_{n=0}^k b_n$$

for all k . Since the right-hand side is bounded above, the left-hand side cannot go to infinity. By Proposition 1.47, $\sum_{n=0}^k a_n$ must also converge.

The second statement of the theorem is trivial, because it is the contrapositive of the first part.

Notice that we were able to prove a result about the series using a condition that only held for n sufficiently large. When a property does not necessarily hold for all n , but only for all $n > N$, with N some integer, we say that the property is true eventually. As suggested by the above proof, it is often sufficient in the study of infinite series to assume that properties of interest are true only eventually.

In the case where $a_n \leq b_n$ for all n , this argument actually shows that this inequality is inherited by the partial sums of the two series, and by extension their sums. In symbols,

$$a_n \leq b_n \quad \text{for all } n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

In fact this includes the case when either or both series diverge to ∞ ; this may be considered an abuse of notation, but it is a convenient and insightful one. The reader should also note well that this conclusion does not extend to series with both positive and negative terms, because then the series may have no sums at all, and the summation symbols no numerical interpretations. However, in the case when both series are known a priori to converge or diverge properly, this comparison result on their sums holds.

Example 1.50 Analyze the behavior of the series

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{9} + \frac{2}{17} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^n + 1}$$

Solution. We consider the two series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^n + 1} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^n}$$

where the $<$ sign holds because we have decreased the denominator. However, by Theorem 1.39, the right-hand series is a convergent geometric series. Hence the original series converges by the Comparison Test.

Example 1.51 Analyze the behavior of the series

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Solution. We first consider the two series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

where the $\geq$ sign holds because we have increased the denominator this time. But we already know that the right-hand series diverges—we have seen this series before in

Example 1.43. By the Comparison Test, the left-hand side diverges also. However, the series on the left is just a scalar multiple of the original series, and so they converge and diverge together. The original series diverges.

1.4.2 Limit Comparison Test

A drawback to the preceding theorem is that, if we have two series we wish to compare, we must prove that the inequality goes in the right direction for the terms. In the last example to that section, that was handled by inserting a factor of 2. Such a strategy often works, but finding the correct factor and showing that it actually works can be tedious and not insightful for complicated expressions. We want to be able to say that two series with "similar" terms should have the same behavior.

Theorem 1.52 (Limit Comparison Test) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ be two series with $a_n \geq 0, b_n > 0$, and assume that $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = L$, allowing the case $L = \infty$.

1. If $0 < L < \infty$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ either both converge or both diverge.
2. If $L = \infty$ and $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converges also.
3. If $L = 0$ and $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverges also.

Proof. Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ be two series with $a_n \geq 0$ and $b_n > 0$.

Case 1. $0 < L < \infty$. Let $\epsilon = L/2 > 0$ and choose N sufficiently large that for all $n > N$ we have

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \epsilon = \frac{L}{2}$$

or equivalently

$$-\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{L}{2},$$

hence $(\frac{1}{2}L)b_n < a_n < (\frac{3}{2}L)b_n$. Appealing to the (regular) Comparison Test, Theorem 1.49, we see that the first assertion follows.

Case 2. $L = \infty$. In this case we must eventually have $a_n/b_n > 1$, hence $a_n > b_n$, and again Theorem 1.49 ensures that if $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges then the "smaller series" $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converges as well.

Case 3. $L = 0$. In this case we must eventually have $a_n/b_n < 1$, hence $a_n < b_n$, and again Theorem 1.49 guarantees that if $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges then the "larger series" $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverges as well.

In deciding whether to use the comparison test or the limit comparison test people generally make the choice depending on their agility in handling inequalities versus handling limits.

Readers comfortable with limits superior and inferior will have no trouble adapting the proof to the following version of the Limit Comparison Test. This is the first of several such "strengthened" tests; in every case the proof of the strengthened version is a natural generalization of the proof of the basic theorem, so we will not give the proofs here. The reader who wishes to skip the strengthened versions may feel free to do so. The reason these tests are stronger is that they can cope with series whose terms "jump around" in which case the desired limits do not exist.

Theorem 1.53 (Limit Comparison Test Strengthened) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ be strictly positive series, and suppose that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = L_1 \quad \text{and} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = L_2.$$

1. If $L_2 < \infty$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges also.
2. If $L_1 > 0$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges also.

Example 1.54 Analyze the behavior of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n - 2}{3^n + 4n - 5}$$

Solution. Let the terms of the original series be a_n , and define a new series

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$$

Now

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n + n - 2}{3^n + 4n - 5}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n2^{-n} - 2(2^{-n})}{1 + 4n3^{-n} - 5(3^{-n})} = 1.$$

By Theorem 1.39, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is a convergent geometric series. By the Limit Comparison Test, then the original series converges.

1.4.3 Ratio Comparison Test

The following test is actually no stronger than the ordinary Comparison Test, but it is often more convenient to use in the case when the ratio between consecutive terms is simpler than the terms themselves. This is especially true when the terms are defined by products, as in Example 1.56. This test should not be confused with the Ratio Test, a very different technique that we present later.

Theorem 1.55 (Ratio Comparison Test) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ be strictly positive series, and suppose that $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ holds eventually.

1. If $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converges, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges also.
2. If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverges also.

Proof. Since the behavior of a series is dependent only on the behavior of its tail, we can assume without loss of generality that $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ universally. By multiplying these inequalities, we find that

$$\frac{a_n}{a_0} \leq \frac{b_n}{b_0} \Rightarrow a_n \leq \frac{a_0}{b_0} b_n$$

Now, consider the series with terms $c_n = (a_0/b_0)b_n$. Clearly $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ have the same behavior. The above inequality guarantees that $a_n \leq c_n$. This theorem, then, is equivalent to the ordinary Comparison Test.

Example 1.56 Analyze the behavior of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

where the terms are given by

$$a_1 = 1, a_n = \frac{1}{4} \frac{2}{5} \frac{3}{6} \cdots \frac{n-1}{n+2}$$

for $n > 1$.

Proof. In addition to the given series, consider also the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

This series is known to converge, as we learned in Example 1.42. The Ratio Comparison Test is a natural thing to consider here because the terms a_n are essentially defined by their ratio. We see that

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{4} \frac{3}{5} \frac{3}{6} \cdots \frac{n-1}{n+2} \frac{n}{n+3}}{\frac{1}{4} \frac{2}{5} \frac{3}{6} \cdots \frac{n-1}{n+2}} = \frac{n}{n+3}$$

and

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n}{n+2}$$

Since

$$\frac{n}{n+3} \leq \frac{n}{n+2}$$

we can apply the Ratio Comparison Test to see that the original series converges.

1.4.4 Integral Test

The description of an infinite series as describing the limit behavior of partial sums is motivated by the following line of thinking: "We can't actually sum an infinite list of terms, but we can add as many as we want, and we can consider the limit to generalize to the infinite case." Compare this with the transition from a proper integral to an improper integral: "We can't actually integrate over an infinite region, but we can integrate over very large regions, and we consider the limit to generalize to the infinite case." This suggests that there may be a connection between the two notions. Pictorially, we can see the relationship between the partial sums (interpreted as area) and the area measured by the integral.

Theorem 1.57 (Integral Test) Consider a series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, where $a_n = a(n)$ for some function $a(x)$ defined on $[1, \infty)$ that is continuous, positive, and decreasing. Then the infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges if and only if the improper integral

$$\int_1^{\infty} a(x) dx$$

converges.

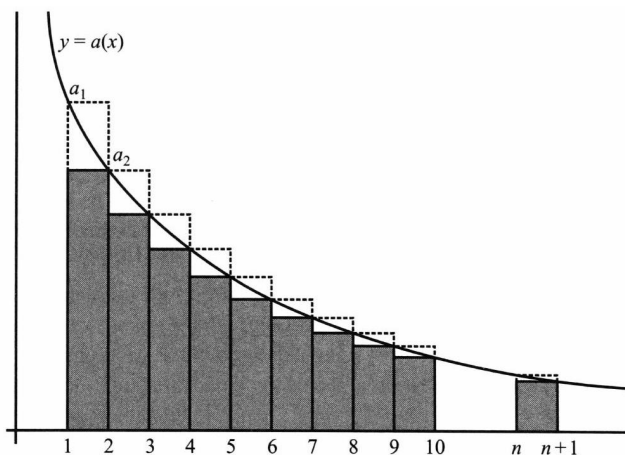


FIGURE 1.2

Partial Sums of an Infinite Series as Upper and Lower Riemann Sums

In the case of convergence, write S for the sum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and write I for the integral

$$\int_1^{\infty} a(x)dx$$

Then $S - a_1 < I < S$.

Proof. Let $\{a_n\}$ and the function a be as described in the hypotheses. Then define two auxiliary functions $\hat{a}$ and $\tilde{a}$ as

$$\hat{a}(x) = a(\lceil x \rceil), \tilde{a}(x) = a(\lfloor x \rfloor).$$

Remark. ($\lceil x \rceil$ and $\lfloor x \rfloor$ denote the round up, round down functions respectively; also known as ceiling and floor functions.) Because $\lceil x \rceil \geq x \geq \lfloor x \rfloor$, the decreasing nature of a guarantees

$$\hat{a}(x) = a(\lceil x \rceil) \leq a(x) \leq a(\lfloor x \rfloor) = \tilde{a}(x).$$

From this we have for each integer k ,

$$\int_1^k \hat{a}(x)dx \leq \int_1^k a(x)dx \leq \int_1^k \tilde{a}(x)dx$$

However, recall that for positive functions an integral measures the area under a curve. Since $\hat{a}, \tilde{a}$ are piecewise constant, this area is made of rectangles of width 1. If we write as usual s_k for the k th partial sum of the series, a little consideration shows that the previous compound inequality can be rewritten

$$s_k - s_1 \leq \int_1^k a(x)dx \leq s_{k-1}$$

Now by the definition of infinite series (resp. improper integral) the series (resp. integral) will diverge if and only if the $\{s_k\}$ (resp. $\int_1^k a(x)dx$) increase to infinity. If the integral diverges, the second inequality shows that the partial sums also increase to ∞ , and the series diverges. Conversely, if the series diverges, the first inequality forces the improper integral to diverge. We conclude that the series and integral must in fact have the same behavior. In the case when the series converges, the claimed inequality $S - a_1 < I < S$ follows from the above inequality by passing to the limit.

With this test we have a decided advantage over the previous tests. The other tests, powerful as they are, require the problem-solver to pull from his or her knowledge bank some other series that stands in some relationship to the given series—that is, the tests relate to things extrinsic

to the given series. Without access to divine inspiration or voodoo magic, such constructions are sometimes difficult to devise. This test is intrinsic to the series. Now, we may argue that in fact we did have to make an inspired choice in the Integral Test, namely to choose the function to integrate. Generally, however, there is only one obvious choice for the function. The tests in the next two sections (1.4.5 and 1.4.6) will be more purely intrinsic.

Example 1.58 (Example 1.43 Revisited) Analyze the behavior of the series

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Solution. In this case $a_n = a(n)$ for the function $a(x) = x^{-1/2}$. The reader can quickly verify that the function a is positive, continuous and decreasing, so the Integral Test guarantees that the infinite series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

will behave in the same way as

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

We evaluate this improper integral in the usual way:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} (2\sqrt{B} - 2) = \infty$$

Since the integral diverges, the series is also divergent to ∞ .

Theorem 1.59 (**p**-series) Consider the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

called a p -series, where p is a real constant.³

1. If $p > 1$, the series converges.
2. If $p \leq 1$, the series diverges.

Proof. In the case where $p \leq 0$, we trivially have divergence by the Divergence Test, so we can assume $p > 0$ in what follows. Under this hypothesis we notice that $1/x^p$ is a monotonically decreasing continuous positive function, so the hypotheses of the Integral Test are satisfied.

Case 1. $p > 1$.

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{B^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right) = 1/(p-1) < \infty$$

so that the p -series converges.

Case 2. $p = 1$.

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \log x \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \log B = \infty$$

⁰³ Saying that p is a fixed constant is strictly speaking redundant, but we wish to emphasize that this result does not extend to the case where $p = p_n$ depends on n , even if $p_n > 1$ for all n .

so that the p -series diverges.

Case 3. $p < 1$.

$$\int_1^\infty x^{-p} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{B^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right) = \infty$$

so that the p -series diverges.

The preceding theorem really comes into its own as a powerful tool when combined with the Limit Comparison Test. In fact, we can now analyze the behavior of any series whose terms are given by an algebraic function. The procedure is to compute the overall "degree" ⁴ of the terms (as a function of n), and to choose a p -series with the same overall degree; two examples should suffice to illustrate the method.

Example 1.60 Analyze the behavior of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n - 1}{23n^5 - n^4 + 3n^3 - 9n^2 + 6n - 11}$$

Solution. The numerator has degree 2 and the denominator has degree 5. Therefore we want a series with degree -3 and choose

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

which is a convergent p -series. Using the Limit Comparison Test, we find

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n - 1}{23n^5 - n^4 + 3n^3 - 9n^2 + 6n - 11} \right) / \left(\frac{1}{n^3} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^4 - n^3}{23n^5 - n^4 + 3n^3 - 9n^2 + 6n - 11} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^{-1} - n^{-2}}{23 - n^{-1} + 3n^{-2} - 9n^{-3} + 6n^{-4} - 11n^{-5}} = 1/23 \end{aligned}$$

and we see that the given series also converges.

Example 1.61 Analyze the behavior of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{(n^{1/3} + 19)^5}$$

Solution. The numerator has degree $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ and the denominator has degree $\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$. The overall series, then, has degree $-2/3$. This suggests the auxiliary series

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$$

which is a divergent p -series. Expecting to use the Limit Comparison Test, we write

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n^2+4}}{(n^{1/3}+19)^5}}{\frac{1}{n^{2/3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+4}n^{-1}}{(n^{1/3}+19)^5 n^{-5/3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+4n^{-2}}}{(1+19n^{-1/3})} = 1$$

and we see that the given series also diverges.

⁰⁴We are using a fairly liberal interpretation of the notion of degree. For example, it is perhaps not so unusual to say that $\sqrt{n}$ has degree $1/2$, but we will be bolder still and say that $\sqrt{n^3+1}$ has degree $3/2$, and that $\sqrt{n^3+1}/n$ has degree $3/2 - 1 = 1/2$, for example. In this way we can assign a degree to any algebraic expression. It can be shown that the degree of an expression is well-defined.

1.4.5 Ratio Test

The following test is perhaps the most memorable of the basic set of convergence tests, because it is intrinsic and easy to apply. It draws on the power we established with Theorem 1.39.

Theorem 1.62 (Ratio Test) Consider a strictly positive series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, and define

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

assuming that it exists.

1. If $r < 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.
2. If $r > 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges.
3. If $r = 1$, then the test is inconclusive.

Proof.

Case 1. $r < 1$. Choose some r' such that $r < r' < 1$. By the definition of limit and of r , we know that $a_{n+1}/a_n < r'$ for all n sufficiently large. For these large n , then, $a_{n+1}/a_n < (r')^{n+1}/r'^n$. Now the series $\sum_{n=0}^{\infty} (r')^n$ is a convergent geometric series, so we can apply the Ratio Comparison Theorem to the tail of our series to show convergence.

Case 2. $r > 1$. Choose some r' such that $r > r' > 1$. By the definition of limit and of r , we know that $a_{n+1}/a_n > r'$ for all n sufficiently large. For these large n , then, $a_{n+1}/a_n > (r')^{n+1}/(r')^n$. Now the series $\sum_{n=0}^{\infty} (r')^n$ is a divergent geometric series, so we can apply the Ratio Comparison Theorem to the tail of our series to show divergence.

Case 3. $r = 1$. Consider the series $\sum 1/n$ and $\sum 1/n^2$. As p -series, the first diverges and the second converges, but both have $r = 1$.

Theorem 1.63 (Ratio Test Strengthened) Consider a strictly positive series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, and define

$$r_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad r_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1. If $r_2 < 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.
2. If $r_1 > 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges.

Example 1.64 (Example 1.43 Revisited Again) Can we use the Ratio Test to analyze the behavior of the series

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}?$$

Solution. If we tried to apply the Ratio Test, we would find

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

so that neither the Ratio Test nor the Strengthened Ratio Test can resolve the series. Notice that this series does satisfy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

for all n , but this is not sufficient to establish convergence. In fact we already know that this series diverges. This is a special case of a more general phenomenon. Whenever the terms of an infinite series are given by an algebraic function, the Ratio Test will always fail with $r = 1$; the test of the next section will be similarly useless. This should not discourage the reader because such series can always be handled by the Limit Comparison Test and p -series, as mentioned earlier.

1.4.6 Root Test

The final test of this section is also an intrinsic test. While it is sometimes algebraically more difficult to apply than the preceding test, the reverse is also true, and we will see in Chapter 4 that this test is actually stronger than the Ratio Test. Notice that we are again exploiting the predictable behavior of the geometric series.

Theorem 1.65 (Root Test) Consider a positive series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, and define

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$$

if it exists.

1. If $\rho < 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.
2. If $\rho > 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges.
3. If $\rho = 1$, then the test is inconclusive.

Proof.

Case 1. $\rho < 1$. Choose some $\rho < \rho' < 1$. By the definition of limit and of ρ , we know that $a_n^{1/n} < \rho'$ for all n sufficiently large. For these large n , then, $a_n < (\rho')^n$. Now the series $\sum_{n=0}^{\infty} (\rho')^n$ is a convergent geometric series, so we can apply the Comparison Test to the tail of our series to show convergence.

Case 2. $\rho > 1$. By the definition of limit and of ρ , we know that $a_n^{1/n} > 1$ for all n sufficiently large. For these large n , then, $a_n > 1$, so we cannot have $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges by the Divergence Test.

Case 3. $\rho = 1$. Consider the series $\sum 1/n$ and $\sum 1/n^2$. As p -series, the first diverges and the second converges, but both have $\rho = 1$.

Example 1.66 Investigate the behavior of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n-4} \right)^n$$

Solution. The presence of an n th power in the term a_n suggests using the Root Test. We write

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{5n-4} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{5n-4} = \frac{2}{5} < 1$$

and we have immediately that the series converges, by the Root Test.

Theorem 1.67 (Root Test Strengthened) Consider a positive series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, and define

$$\rho_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}, \quad \rho_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$$

1. If $\rho_2 < 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.

2. If $\rho_1 > 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges.

Example 1.68 Investigate the behavior of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Solution. The Root Test appears to be a good choice as it was in Example 1.66. If we try, we find

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

so the Root Test is not immediately decisive. Because $\sqrt[n]{a_n}$ approaches 1 always from below and is therefore less than 1 for every n , we may well suspect that this series will converge for some reason similar to the proof of the Root Test. However, our intuition would be wrong in this. Notice that a familiar limit from calculus gives

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$$

so that this series actually fails even the crudest convergence criterion and diverges by the Divergence Test.

12.1.4 1.5 General Series

1.5.1 Absolute and Conditional Convergence

All of the preceding theorems are applicable to positive series or strictly positive series, so at present we know a fair bit about such series, but virtually nothing about general series. The desire to apply the tests we have learned in more general circumstances motivates considering the (positive) series we obtain by taking the absolute value of each term of a series.

Definition 1.69 A series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges absolutely if and only if $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converges. A series that converges absolutely is often called absolutely convergent.

Under this definition, all our theorems from the previous section become tests for absolute convergence of general series. Of course, there is no a priori reason to suppose that the behavior of the series of absolute values has any particular relationship to the original series. The next theorem shows that in fact they are related.

Theorem 1.70 A series that converges absolutely converges in the ordinary sense.

Proof. Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be an absolutely convergent series. Consider the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

Since $a_n + |a_n|$ is either 0 or $2|a_n|$ according as a_n is negative or positive, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ is a positive series. Using this information,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Now, the right-hand series converges by hypothesis, so $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converges by the Comparison Test. Finally, the original series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges because it is the difference of the convergent series $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Before moving on, we wish to emphasize the power of the algebraic trick used in the problem, that of studying a_n by means of $|a_n|$ and $a_n + |a_n|$, which of course are always positive quantities. This observation allows us to offer our next result, Theorem 1.71.

Theorem 1.71 Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be an absolutely convergent series and let $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ be a rearrangement of the first series. Then the two series both converge to the same sum.

Proof. Notice that the series $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ and $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n + |b_n|)$ are rearrangements of $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ and $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|)$. Since $\sum a_n$ is absolutely convergent, these latter two series converge. Using Theorem 1.48 and addition properties of series, we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + |b_n|) - \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Example 1.72 Investigate the behavior of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Solution. This is not a positive series, because the numerator changes sign from positive to negative in an erratic sort of way. Instead we consider the associated positive term series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Since the right-hand series is a convergent p -series, we can use the Comparison Test to show that the series of absolute values is convergent. We conclude that the original series is absolutely convergent, hence convergent in the ordinary sense by Theorem 1.70.

The optimistic reader may be hoping that the converse will also hold, that we can understand all series by understanding positive series. Unfortunately this is not the case, and we will see a counterexample in the next section. Series that converge without doing so absolutely have a special name, and we will see later on that they have special properties. In Chapter 3, we will find out that Theorem 1.71 fails to extend to this class of series, and in fact fails in a very dramatic way.

Definition 1.73 A series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges conditionally if it converges but does not converge absolutely.

1.5.2 Alternating Series

The reader may be wondering how we could ever know that a given series was conditionally convergent, if all of the tests we have devised for convergence apply only to positive series and are therefore tests for absolute convergence. In this section we give a handy and easy-to-apply test for diagnosing certain kinds of conditionally convergent series.

Definition 1.74 An alternating series is a series whose terms alternate in sign—it can be written in one of the forms $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ or $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, where $a_n \geq 0$.

Theorem 1.75 (Alternating Series Test) Consider an alternating series

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

and suppose that the terms a_n satisfy:

1. $\{a_n\}$ is nonincreasing eventually; i.e., for all $n \geq N$ for some integer $N > 0$ we have $a_{n+1} \leq a_n$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Then $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges to a sum S . Furthermore, assuming $k \geq N$ for some integer $N > 0$, we have

$$S_k \leq S \leq S_{k+1} \quad \text{or} \quad S_{k+1} \leq S \leq S_k$$

according to whether k is odd or even. (Consequently, S and S_k can never differ by more than a_{k+1} .)

Proof. Because we are concerned only with the behavior of the tail of any series, we lose no generality in supposing that $a_{n+1} \leq a_n$ holds universally. As usual let $\{s_k\}$ be the sequence of partial sums. Consider for the moment just the odd indexed sums $\{s_{2k+1}\}$, and write

$$s_{2k+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots + (a_{2k} - a_{2k+1}).$$

We can view the s_{2k+1} as the sequence of partial sums of a positive series, since the terms $a_n - a_{n+1}$ are nonnegative. On the other hand,

$$s_{2k+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - a_{2k+1} < a_0.$$

Since $\{s_{2k+1}\}$ is monotone increasing and bounded above it must converge to a real number S . Furthermore,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k+1} - a_{2k+1}) = S - 0 = S.$$

Since both even- and odd-indexed partial sums converge to S , the series converges. This quick argument demonstrates the convergence of the alternating series. To prove the latter half of the theorem, we will interpret the behavior of an alternating series in a more visual way (we encourage the reader to draw the picture based on this chain of inequalities). We have already shown

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots,$$

and if we look at the even partial sums in a similar way, we have

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_{2k+1} \leq S \leq s_{2k} \leq \cdots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

Example 1.76 Investigate the behavior of the series

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{12} - \frac{1}{19} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 3}$$

Solution. While the reader can verify that the Alternating Series Test does apply, something stronger is true. We test for absolute convergence by considering the associated positive term series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3}$$

However, in this form we obtain

$$\frac{1}{n^2 + 3} \leq 1/n^2$$

Since

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$$

is a convergent p -series, the basic Comparison Test shows that the associated positive term series is convergent. That is,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 3}$$

is absolutely convergent (and hence convergent).

Example 1.77 Investigate the behavior of the series

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{4}{17} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}$$

Solution. Unlike the previous example, we cannot establish convergence by considering the associated positive term series. Notice that the series has the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

By using (for example) the Limit Comparison Test with the divergent harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, we see that the original series fails to converge absolutely.

In this case we really do use the Alternating Series Test. There are two things to check.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} \\ &= \frac{(n+1)(n^2 + 1) - n(n^2 + 2n + 2)}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} \\ &= \frac{-n^2 - n + 1}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} \end{aligned}$$

Since this is negative when $n \geq 1$, the terms are decreasing in absolute value. Since in this case the terms

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

are given as a differentiable function of n , we can also check that they are decreasing by taking the derivative. Here, if we write

$$a(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

we have

$$a'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - 2x(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0$$

Also,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$$

as desired.

Thus the conditions for the Alternating Series Test are met, and the given series converges. Since the series failed to converge absolutely and does converge as given, it converges conditionally.

Example 1.78 Investigate the behavior of the series

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{5}{9} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n-1}$$

Solution. Recognizing this as an alternating series, we try to apply the Alternating Series Test. We have

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{n}{2n-1} = \frac{(n+1)(2n-1) - n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-1}{4n^2-1} < 0$$

so that the terms are decreasing in absolute value. However,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

so the terms do not converge to 0, hence the Alternating Series does not guarantee convergence. In fact, this forces the series to diverge by the Divergence Test.

Due to the power of the Divergence Test to be decisive very quickly, it is generally best to check $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ first to see if the answer is zero, and only then to check if

$$a_{n+1} - a_n \leq 0$$

12.2 More Sophisticated Techniques

It is an unfortunate truth that most students of calculus who encounter infinite series are given only a small collection of theorems about the convergence and divergence of infinite series. Students typically learn the Divergence Test, the Alternating Series Test, the Ratio Test, the Root Test, and some version of the Comparison Tests. Generally the message is that beyond these preliminary results the study of infinite series becomes very hard very fast. However, there are some easily constructed series that do not yield to any of the tests just listed. It is the learned response of calculus students to throw up their hands when the Ratio Test and Root Test give the inconclusive limit of 1. The authors certainly acknowledge that there does not exist a test or set of tests that can systematically determine whether every infinite series converges or diverges. However, we believe strongly that there are several more sophisticated and more powerful tests that are just as easy to use and that can decide the convergence of nearly all series that arise in practice. For whatever reason, these tests are not well known except among specialists of infinite series.

In this short chapter we include a small collection of more sophisticated tests. While some of these tests are slightly more difficult to apply than the tests of Chapter 1, these tests are generally both easy to use and powerful. Series that defy all of these tests do exist, but are generally quite pathological. It is our hope that the reader will no longer be in a position of despair when confronting a series for which the Root Test fails.

12.2.1 2.1 The Work of Cauchy

Theorem 2.1 (Cauchy Criterion) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be an infinite series. Then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges if and only if, for every $\epsilon > 0$, there exists a positive integer N with the property that, for every $n_1 \geq n_0 \geq N$,

$$\left| \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n \right| < \epsilon.$$

A series that satisfies this criterion is said to be a Cauchy series.

Proof. As always, we write $S_k = \sum_{n=0}^k a_n$ for the partial sums of the series. Then the series converges if and only if $\{S_k\}$ converges.

This is just a restatement of Theorem 1.46, translated into the language of series. However, because we are choosing to focus on infinite series in this book, we will prove it again here.

To show the "if" case, assume that for every $\epsilon > 0$, there exists a positive integer N with the property that, for every $n_1 \geq n_0 \geq N$,

$$\left| \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n \right| < \epsilon \Leftrightarrow |S_{n_1} - S_{n_0-1}| < \epsilon.$$

Write $L = \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n$, $R = \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n$. If $L = R$, then $\{S_n\}$ converges to their common value. Assume for the sake of contradiction that $R - L = E > 0$. By hypothesis, we can find an N such that for every $n_1 \geq n_0 \geq N$, $|S_{n_1} - S_{n_0-1}| < E/3$. Since L and R are limit points, we can find infinitely many indices i, j such that $|L - S_i| < E/3$, $|R - S_j| < E/3$. In particular we can choose $i, j > N + 1$, so that $|S_i - S_j| < E/3$. Then $R - L = |R - L| \leq |R - S_j| + |S_j - S_i| + |L - S_i| < E/3 + E/3 + E/3 = E = R - L$, a contradiction.

To show the "only if" case, suppose that $\{S_k\}$ converges to a limit S . Let $\epsilon > 0$ be given. Then there exists a positive integer N such that, for all $n > N$, $|S_n - S| < \epsilon/2$. Then, for all $n_1 \geq n_0 \geq N + 1$, we have

$$|S_{n_1} - S_{n_0-1}| \leq |S_{n_1} - S| + |S_{n_0-1} - S| < \epsilon$$

Remark. The content and proof of the above theorem can be summarized as follows. A series converges if and only if the associated sequence of partial sums converges if and only if the associated sequence of partial sums is Cauchy.

There are at least two ways to use this theorem. First, sometimes it is possible to estimate $|S_m - S_n|$ directly in terms of m and n and consider the limit. This is a bit optimistic for a complicated series, however. This theorem can also be used as a test for divergence. If a given series has arbitrarily many disjoint "blocks" of consecutive terms with a large sum (say, at least ϵ for some fixed $\epsilon > 0$), it must diverge, since the Cauchy criterion will fail for that same choice of ϵ . (This can be regarded as an upgraded version of the usual Divergence Test.)

Example 2.2 Suppose that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series of positive terms, and let $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ be the n th tail for each n . Write $b_n = a_n/r_n$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

diverges.

Solution. We will show that the Cauchy criterion is not satisfied. In particular, for any N , we will find a block of terms $b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n$ with $n > m > N$ such that $b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n > 1/2$. To this end, let N be given, and take any $m > N$. Then we have

$$r_m = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n).$$

In particular, for n large enough, we have

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n > \frac{r_m}{2}.$$

Then we can write, noticing that the sequence $\{r_n\}$ is strictly decreasing,

$$\begin{aligned} b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n &= \frac{a_m}{r_m} + \frac{a_{m+1}}{r_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \\ &\geq \frac{a_m}{r_m} + \frac{a_{m+1}}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_m} \\ &= \frac{a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n}{r_m} \\ &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Since the Cauchy Criterion fails, the series diverges.

Theorem 2.3 (Cauchy Condensation Test) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive infinite series, and suppose that the terms a_n are eventually decreasing. Then the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

either both converge or both diverge.

Proof. Since changing any finite number of terms in a series cannot change whether it converges or diverges, we may assume without loss of generality that the terms are decreasing throughout. Let

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k; \quad \text{and} \quad T_n = \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$$

be the partial sums of the series in question. Then we can write

$$\begin{aligned} S_1 &= a_0 + a_1 \\ &= a_0 + T_0 \\ S_3 &= S_1 + a_2 + a_3 \leq a_0 + T_0 + a_2 + a_2 \\ &= a_0 + T_0 + 2a_2 = a_0 + T_1 \\ S_7 &= S_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq a_0 + T_1 + 4a_4 \\ &= a_0 + T_2 \end{aligned}$$

and in general

$$S_{2^n-1} \leq a_0 + T_{n-1}.$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} S_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \geq a_1 + a_2 + a_2 = a_1/2 + a_2 + a_1/2 + a_2 \\ &= a_1/2 + a_2 + T_1/2 \\ S_4 &= S_2 + a_3 + a_4 \geq T_1 + a_4 + a_4 = a_1/2 + a_2 + T_1/2 + 2a_4 \\ &= a_1/2 + a_2 + T_2/2 \\ S_8 &= S_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq a_1/2 + a_2 + T_2/2 + 4a_8 \\ &= a_1/2 + a_2 + T_3/2 \end{aligned}$$

and in general

$$S_{2^n} \geq a_1/2 + a_2 + T_n/2$$

Since the two series in question are positive, they cannot oscillate. That is, the partial sums will either increase to a limit or diverge to infinity. If the sequence $\{S_n\}$ increases to infinity, then the first set of inequalities show that $\{T_n\}$ does also. Similarly, the second set of inequalities show that, if $\{T_n\}$ diverges to infinity, $\{S_n\}$ does also. That is, the two series converge or diverge together.

The classic application of this result is to show that the harmonic series diverges, which is our Proof 1 in Chapter 3.

Although the appearance of 2^n in the above theorem seems reasonable in light of the proof, it is in a sense arbitrary. Would 3^n work? Would n^2 ? The following generalization by Oscar Xavier Schlömilch (1823-1901) shows that we can do much better.

Theorem 2.4 (Schlömilch) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive infinite series, and suppose that the terms a_n are eventually decreasing. Let $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ be a strictly increasing sequence of positive integers such that $(n_{k+1} - n_k) / (n_k - n_{k-1})$ is bounded (as a function of k). Then the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (n_{k+1} - n_k) a_{n_k}$$

either both converge or both diverge.

Proof. Since changing any finite number of terms in a series cannot change whether it converges or diverges, we may assume without loss of generality that the terms are decreasing throughout. Let

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n a_k \\ T_n &= \sum_{k=0}^n (n_{k+1} - n_k) a_{n_k} \\ U_n &= \sum_{k=1}^n (n_k - n_{k-1}) a_{n_k} \end{aligned}$$

be the partial sums of the series in question. Then we can write

$$\begin{aligned} S_{n_1} &= S_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_{n_1} \geq S_{n_0} + (n_1 - n_0) a_{n_1} \\ &= S_{n_0} + U_1 \\ S_{n_2} &= S_{n_1} + a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2} \geq S_{n_0} + U_1 + (n_2 - n_1) a_{n_2} \\ &= S_{n_0} + U_2 \end{aligned}$$

and in general

$$S_{n_k} \geq S_{n_0} + U_k$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} S_{n_1-1} &= S_{n_0-1} + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1-1} \leq S_{n_0-1} + (n_1 - n_0) a_{n_0} \\ &= S_{n_0-1} + T_0 \\ S_{n_2-1} &= S_{n_1-1} + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2-1} \leq S_{n_0-1} + T_0 + (n_2 - n_1) a_{n_1} \\ &= S_{n_0-1} + T_1 \end{aligned}$$

and in general

$$S_{n_k-1} \leq S_{n_0-1} + T_{k-1}$$

Arguing as in the previous theorem, we see that, if $\{S_n\}$ diverges, $\{U_n\}$ diverges also, and further that if $\{T_n\}$ diverges, $\{S_n\}$ diverges. Then the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges if $\sum_{k=1}^{\infty} (n_k - n_{k-1}) a_{n_k}$ converges and only if $\sum_{k=0}^{\infty} (n_{k+1} - n_k) a_{n_k}$ converges. However, since $(n_{k+1} - n_k) / (n_k - n_{k-1})$ is bounded, we can apply the Strengthened Limit Comparison Test to the latter two series and conclude that they converge or diverge together. That is, all three series have the same limit behavior, as desired.

Example 2.5 Investigate the convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

Solution. Though this series resembles a geometric series, the presence of the square root complicates matters. If we attempt to apply the Ratio Test, we find much to our chagrin that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{\sqrt{n+1}}}}{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})} = 2^0 = 1,$$

giving us no information at all. The Root Test is similarly inconclusive.

The correct test is the Schlömilch Condensation Test. Let $n_k = k^2$, and notice that indeed $[(k+1)^2 - k^2] / [k^2 - (k-1)^2] = (2k+1)/(2k-1) \leq 3$ is bounded. Since the terms are positive and decreasing (check this), the test applies, and we can say that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

converges if and only if

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2 - k^2}{2^{\sqrt{k^2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k}$$

converges. However, now the Ratio Test will succeed because we have removed the square root.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2(k+1)+1}{2^{k+1}}}{\frac{2k+1}{2^k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2k+3}{4k+2} = 1/2 < 1$$

and the series converges.

12.2.2 2.2 Kummer's Results

In this section we give a strong criterion for convergence. This criterion comes essentially from a clever algebraic trick, which is due to Eduard Kummer (1810-1893).

Theorem 2.6 Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive infinite series, and let $\{\lambda_n\}$ be any sequence of positive numbers. If, eventually,

$$\lambda_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} \lambda_{n+1} \geq k > 0$$

for some constant k , then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.

Proof. As usual, we can assume without loss of generality that the eventual condition in fact holds everywhere.

Rearranging the given inequality, we have

$$\frac{1}{k} (a_n \lambda_n - a_{n+1} \lambda_{n+1}) \geq a_n$$

Summing this inequality for $n = 0, 1, \dots, m$, we obtain

$$\sum_{n=0}^m a_n \leq \frac{1}{k} (a_0 \lambda_0 - a_{m+1} \lambda_{m+1}) \leq \frac{1}{k} a_0 \lambda_0$$

That is, the partial sums of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ are bounded above. Since this series is positive, its partial sums are monotone increasing, and this suffices to show convergence.

Theorem 2.7 (Kummer's Test) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive infinite series, let $\sum_{n=0}^{\infty} 1/d_n$ be a divergent positive series, and define

$$\kappa_n = d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}$$

1. If, eventually, $\kappa_n > k > 0$ for some constant k , then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.
2. If, eventually, $\kappa_n \leq 0$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges.

Proof. Without loss of generality we drop the word "eventually" from the conditions given. The first half of the theorem merely restates the preceding theorem, so we consider the second half. If

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \leq 0$$

we can rearrange this to

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1/d_{n+1}}{1/d_n}$$

and the divergence of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ now follows from the Ratio Comparison Test.

Corollary 2.7.1 (Kummer's Test Simplified) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive infinite series, and let $\sum_{n=0}^{\infty} 1/d_n$ be a divergent positive series, and define

$$\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \right)$$

assuming that it exists. If $\kappa > 0$ (resp. $\kappa < 0$), then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges (resp. diverges).

Proof. We simply notice that, if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \right) = \kappa > 0$$

we must eventually have

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} > \frac{\kappa}{2}$$

Similarly, if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \right) = \kappa < 0$$

we must eventually have

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} < \frac{\kappa}{2}$$

In either case, we need only apply the preceding theorem.

Kummer's tests are valuable because they are extremely versatile. Indeed it is not difficult to show that every series can be shown to converge or diverge for a suitable choice of the d_n . It is precisely this statement of power that suggests the downfall of Kummer's tests: they are fundamentally extrinsic. The choice of d_n has to come from the solver, and usually there is no particular motivation.

However, Kummer's tests are of high practical value in proving some important intrinsic tests, viz. the ones in the coming section.

12.2.3 2.3 The Tests of Raabe and Gauss

The following test is due to the German mathematician and physicist Joseph Ludwig Raabe (1801-1859), who taught for much of his life at the Institute of Zurich. An essentially equivalent test was discovered (more or less simultaneously) by Farkas Bolyai (sometimes known as Wolfgang). Bolyai is principally remembered not for his inquiry into infinite series but for his study of geometry, on which he spent most of his professional time.

Theorem 2.8 (Raabe's Test) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive infinite series, and suppose we can write

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n},$$

where

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$$

1. If $\beta > 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.
2. If $\beta < 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges.

Proof. We first rewrite

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n} = \frac{n-1}{n} - \frac{\beta_n - 1}{n}$$

as

$$(n-1) - \frac{a_{n+1}}{a_n} n = \beta_n - 1$$

We can now take $d_n = n - 1$, noting that the series $\sum_{n=2}^{\infty} 1/d_n$ is the harmonic series, divergent by Theorem 1.59. The result is now seen as a special case of Kummer's Test.

Theorem 2.9 (Raabe's Test Strengthened) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive infinite series, and suppose we can write

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n}$$

where

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_{\uparrow}; \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_{\downarrow}$$

1. If $\beta_{\downarrow} > 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.
2. If $\beta_{\uparrow} < 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges.

Example 2.10 Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

diverges.

Solution. Because the ratios of consecutive terms are easy to compute, it is natural to try the Ratio Test. However, it will fail here. We use Raabe's Test. Writing

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

we have

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{n/(2n+2)}{n}$$

so that

$$\beta_n = \frac{n}{2n+2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

which is less than 1. The series diverges.

Example 2.11 Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(n+1)}$$

converges.

Solution. Again, the Ratio Test is not delicate enough for these series. We use Raabe's Test. Writing

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(n+1)}$$

we have

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+1)(n+2)}{(2n+2)(n+1)} = \frac{2n^2+5n+2}{2n^2+4n+2} = 1 + \frac{n}{2n^2+4n+2} \\ &= 1 - \frac{-n^2/(2n^2+4n+2)}{n} \end{aligned}$$

so that

$$\beta_n = \frac{-n^2}{2n^2+4n+2} \rightarrow \frac{-1}{2}$$

which is less than 1. The series converges.

A stronger test that copes with the $\beta = 1$ case of Raabe's Test follows. This test is due to the prolific mathematician Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

Theorem 2.12 (Gauss's Test) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a positive infinite series, and suppose we can write

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+k}},$$

where $\{\theta_n\}$ is a bounded sequence and $k > 0$.

1. If $\beta > 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges.
2. If $\beta \leq 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges.

Proof. In the case $\beta \neq 1$, we can write

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n},$$

where

$$\beta_n = \beta + \theta_n n^{-k} \rightarrow \beta$$

so that we can apply Raabe's Test directly.

Assume then that $\beta = 1$, so that

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+k}}.$$

We will take $\sum_{n=2}^{\infty} 1/d_n = \sum_{n=2}^{\infty} 1/n \log n$, which diverges by the Integral Test. With that in mind we rewrite the equation from Kummer's Test as

$$(n-1) \log n - n \log n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\theta_n \log n}{n^k}$$

and then

$$(n-1) \log(n-1) - n \log n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\theta_n \log n}{n^k} + (n-1)(\log(n-1) - \log n) = \kappa_n.$$

To apply Kummer's Test, we must take the limit of the right-hand side. Using L'Hopital's rule, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{kn^{k-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{kn^k} = 0$$

and

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)(\log(n-1) - \log n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n-1) - \log n)}{1/(n-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n-1) - 1/n}{1/(n-1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n-1}{n} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Since the θ_n are bounded, the first term in κ_n approaches 0. Since the second term approaches -1, the divergent case of Kummer's Test applies.

Example 2.13 Let $p > 0$. Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n-1)}{n!}$$

diverges.

Proof. We use Raabe's Test. Writing

$$a_n = \frac{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n-1)}{n!},$$

we compute the ratio

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p+n}{n+1} = 1 - \frac{1-p}{n+1} = 1 - \frac{(1-p)n/(n+1)}{n}$$

so that

$$\beta_n = \frac{(1-p)n}{n+1} \rightarrow 1-p$$

which is less than 1. The series diverges.

While the above series yielded to Raabe's Test, the following generalization requires Gauss's sharper test.

Example 2.14 Let $a, b > 0$. Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}{b(b+1)(b+2) \cdots (b+n-1)}$$

converges if $b-a > 1$ and diverges if $b-a \leq 1$.

Proof. First, we might try Raabe's Test; though this test would handle the cases $b-a > 1$, $b-a < 1$, it would not handle the boundary case. Writing

$$a_n = \frac{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)}{b(b+1)(b+2) \cdots (b+n-1)}$$

we compute the ratio

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{a+n}{b+n} = 1 - \frac{b-a}{n+b} = 1 - \frac{(b-a)n/(n+b)}{n} \\ &= 1 - \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)b/(n+b)}{n} = 1 - \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)bn/(n+b)}{n^2} \end{aligned}$$

so that, since the numbers $(b-a)bn/(n+b)$ are bounded, we have the kind of expression we need for Gauss's Test. Then the series converges if and only if $b-a > 1$.

12.2.4 2.4 Logarithmic Scales

In Chapter 1, we proved a variety of comparison tests in different forms. Extrinsic tests such as the comparison tests are only as valuable as the user's personal collection of known series. Here we give an important family of infinite series; many naturally arising series can be classified by comparing them with a series in the logarithmic scale. This scale of tests is named for the Norwegian mathematician Niels Abel (1802-1829) who gave his name to abelian groups, and the lesser-known Italian mathematician Ulisse Dini (1845-1918).

Notation 2.15 Define $\log_{(0)} x = x$, $\log_{(1)} x = \log x$, $\log_{(2)} x = \log(\log x)$, and, inductively, $\log_{(n+1)} x = \log(\log_{(n)} x)$. Here it is understood that these iterated logarithms are defined only eventually.

We first emphatically state that this notation conflicts with the usual usage of $\log_b$ to mean logarithm to the base b . However, we will never use logarithms to bases other than e , so we find this notation convenient.

Theorem 2.16 (Abel-Dini Scale) For each integer k , the series

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n \log_{(1)} n \log_{(2)} n \cdots \log_{(k)} n (\log_{(k+1)} n)^{\alpha}}$$

converges if $\alpha > 1$ and diverges if $\alpha \leq 1$, where N is taken large enough for the iterated logarithms to be defined.

Proof. If $k = 0$ and $\alpha < 0$, then the terms of the series tend to ∞ thus the series diverges. Otherwise, the terms are positive and eventually monotonically decreasing, so that Cauchy's Integral Test applies.

Letting $u = \log_{(k+1)}(x)$,

$$\begin{aligned} & \int_N^{\infty} \frac{dx}{x \log_{(1)} x \log_{(2)} x \cdots \log_{(k)} x (\log_{(k+1)}(x))^{\alpha}} \\ &= \int_N^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha}} = \begin{cases} (1-\alpha)^{-1} u^{1-\alpha} \Big|_N^{\infty} = \infty & \text{if } \alpha < 1 \\ \log u \Big|_N^{\infty} = \infty & \text{if } \alpha = 1 \\ (1-\alpha)^{-1} u^{1-\alpha} \Big|_N^{\infty} < \infty & \text{if } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

by basic limit properties, and the proposition follows.

We remark that this series in some sense generalizes our Theorem 1.59 for p -series. Like p -series, the series in the Abel-Dini Scale not only allow comparison with many naturally-arising series, but also appear directly in practical situations. For example, in our Chapter 4, we see series of this type in Gems 19, 32, and 101.

One sequence of tests that is particularly little-known was developed by Bertrand. Of the few books that even refer to Bertrand's Test, the vast majority state only one form of the tests, typically only stating the case $k = 0$ or $k = 1$. The proofs of the following three forms of Bertrand's Test are long and technical, and can be found at the end of the chapter. In essence the tests are proven using the Comparison Test using the Abel-Dini scale as the standard of reference. In a sense these tests can be considered an intrinsic version of the Abel-Dini scale. In some cases they are more straightforward to apply than the Abel-Dini scale because they deal directly with the ratio of the terms in the series.

Theorem 2.17 (Bertrand's Tests, First Form) Let $\sum_n^{\infty} a_n$ be a series of positive real numbers. Let k be a nonnegative integer, and define a sequence $\{b_n\}$ implicitly by

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \log n} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n \log n \log_{(2)} n \cdots \log_{(k-1)} n} + \frac{b_n}{n \log n \log_{(2)} n \cdots \log_{(k-1)} n \log_{(k)} n}. \end{aligned}$$

Then, if $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$, $\sum_n^{\infty} a_n$ converges; if $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$, $\sum_n^{\infty} a_n$ diverges. More generally, if $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$ (resp. $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$), $\sum_n^{\infty} a_n$ converges (resp. diverges).

Theorem 2.18 (Bertrand's Tests, Second Form) Let $\sum_n^{\infty} a_n$ be a series of positive real numbers. Let k be a nonnegative integer, and define a sequence $\{b_n\}$ implicitly by

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \log n} - \cdots \\ &\quad - \frac{1}{n \log n \log_{(2)} n \cdots \log_{(k-1)} n} - \frac{b_n}{n \log n \log_{(2)} n \cdots \log_{(k-1)} n \log_{(k)} n}. \end{aligned}$$

Then, if $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$, $\sum_n^{\infty} a_n$ converges; if $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$, $\sum_n^{\infty} a_n$ diverges. More generally, if $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$ (resp. $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$), $\sum_n^{\infty} a_n$ converges (resp. diverges).

One very positive aspect to these tests is that they are systematic. If Bertrand's Test is inconclusive for a particular k value, there is an obvious next test to try—Bertrand's Test for $k + 1$. At first glance the algebra involved in forming the relevant sequence $\{b_n\}$ for different k values is prohibitive. However, the following result shows that the work can be done by a simple algorithm that, in effect, constructs the sequences recursively, so that the algebraic effort involved in each test applies directly to subsequent tests. It is this property that gives the Bertrand tests their utility.

Theorem 2.19 (Bertrand Simplified) Define operators B^+, B^- that act on sequences by

$$B^+ \{b_n\}_{n=N}^\infty = \left\{ n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) \right\}_{n=N}^\infty$$

$$B^- \{b_n\}_{n=N}^\infty = \left\{ n \left(1 - \frac{b_{n+1}}{b_n} \right) \right\}_{n=N}^\infty$$

For each positive integer k , let R_k be the operator defined by

$$R_k \{b_n\}_{n=N}^\infty = \{ \log_{(k)}(n) (b_n - 1) \}_{n=N}^\infty$$

Let $\sum_{n=N}^\infty a_n$ be a series of positive real numbers. Let k be a nonnegative integer, and define a sequence $\{b_n\}_{n=N}^\infty$ by either

$$\{b_n\}_{n=N}^\infty = R_k R_{k-1} \cdots R_1 B^+ \{a_n\}_{n=N}^\infty$$

or

$$\{b_n\}_{n=N}^\infty = R_k R_{k-1} \cdots R_1 B^- \{a_n\}_{n=N}^\infty$$

Then, if $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$, $\sum_{n=N}^\infty a_n$ converges; if $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$, $\sum_{n=N}^\infty a_n$ diverges. More generally, if $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$ (resp. $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$), $\sum_{n=N}^\infty a_n$ converges (resp. diverges).

12.2.5 2.5 Tests of Abel

We turn now to a collection of tests that follow quickly from an algebraic manipulation due to Abel. Abelian summation has applications beyond infinite series. It is often applicable to the finite summations of combinatorics, for example. The name "summation by parts" comes from an analogy with the "integration by parts" technique of integral calculus. In so-called difference calculus, the analogue of integration is the partial sum, and the analogue of differentiation is the first difference. Viewed in that perspective, the following result has almost exactly the same form as integration by parts. It tends to be useful in the study of infinite series in much the same way that integration by parts is useful in calculus whenever series that are understood are combined by term-by-term multiplication.

Theorem 2.20 (Abel, Summation by Parts) Let $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty$ be arbitrary sequences, and write

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

for the partial sums of $\sum_{n=0}^\infty a_n$, where we include the degenerate case $A_{-1} = 0$. Then, for each $0 \leq m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \left[\sum_{k=m}^n A_k (b_k - b_{k+1}) \right] - A_{m-1} b_m + A_n b_{n+1}.$$

Proof. First write

$$a_k b_k = (A_k - A_{k-1}) b_k = A_k b_k - A_k b_{k+1} + (A_k b_{k+1} - A_{k-1} b_k).$$

The stated result follows by summing this equality from m to n and recognizing that the final two terms telescope.

Theorem 2.21 Let $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ be arbitrary sequences, and write

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

for the partial sums of $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, where we include the degenerate case $A_{-1} = 0$. Then, if $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$ converges and $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n b_{n+1}$ exists, then the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converges.

Proof. By the preceding theorem, the partial sums s_k for the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ are given by

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=0}^k a_n b_n = \left[\sum_{n=0}^k A_n (b_n - b_{n+1}) \right] - A_{-1} b_0 + A_k b_{k+1} \\ &= \left[\sum_{n=0}^k A_n (b_n - b_{n+1}) \right] + A_k b_{k+1}. \end{aligned}$$

Then the sequence of partial sums will certainly converge if each of the two summands on the right-hand side converges independently. But this is precisely the statement of the theorem.

There are a number of corollaries to this result, and it is no longer clear to whom each should rightly be attributed. Here we give some names commonly attached to these tests. In addition to Abel, we identify the mathematicians Richard Dedekind (1831-1916), Lejeune Dirichlet (1805-1859), and Paul David du Bois-Reymond (1831-1889).

Corollary 2.21.1 (Abel) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a convergent series, and let $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a bounded monotone sequence. Then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converges.

Proof. We will check the two hypotheses in order to apply Theorem 2.21. The A_n in that theorem are exactly the partial sums of the convergent series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, hence we can write

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Also, since $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ is monotone and bounded, it must be a convergent sequence, so we write

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

and notice that, by telescoping,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - B$$

is a convergent series.

Then, because the above series has terms all of the same sign, and because A_n is convergent (hence bounded), we can say that $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$ is also convergent by the Limit Comparison Test Strengthened. Finally,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n b_{n+1} = AB$$

so this limit also exists. We can now apply Theorem 2.21.

Example 2.22 (Compare Example 2.2) Suppose that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series of positive terms, and let $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ be the n th tail for each n .

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n$$

converges.

Solution. To use Corollary 2.21.1, we only have to notice that the sequence $\{r_k\}$ is monotone decreasing, and convergent to 0 (hence bounded). Since $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, the corollary applies and we are done.

Example 2.23 Suppose that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series of positive terms, and let $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ be the n th partial sum for each n .

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n$$

converges, and so also does

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$$

Solution. To use Corollary 2.21.1, we only have to notice that the sequence $\{s_k\}$ is monotone increasing, and convergent to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (hence bounded); also the series $\{1/s_k\}$ is monotone decreasing and bounded. Since $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, the corollary applies and we are done.

Corollary 2.23.1 (Dirichlet) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a series with bounded partial sums, and let $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a monotone sequence with $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converges.

Proof. We can show that $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$ converges by precisely the same argument as the last corollary. Now, because the A_n are bounded, there exist constants E_1, E_2 such that

$$E_1 b_{n+1} \leq A_n b_{n+1} \leq E_2 b_{n+1}$$

making it clear that $A_n b_{n+1} \rightarrow 0$ also.

Corollary 2.23.2 (Dedekind, Bois-Reymond) Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a convergent series, and let $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ be such that $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ converges absolutely. Then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converges.

Proof. Follow the proof of Abel's Corollary, except that now we can show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$$

is absolutely convergent by the Limit Comparison Test Strengthened.

Example 2.24 Investigate the convergence of

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tan^{-1}(n)}{n(\log n)^2}$$

Solution. We first recognize that the denominator of the expression for a general term resembles the Abel-Dini scale. This suggests writing out terms as a product of simpler expressions

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \tan^{-1}(n)$$

Since

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

converges and

$$\tan^{-1}(n)$$

is increasing in n with $\tan^{-1}(n) \leq \pi/2$, we can apply Corollary 2.21.1. For another example of this type of argument in action, see Gem 102.

Appendix to Chapter 2: Proofs of Bertrand's Tests

In this appendix, we give proofs for Theorems 2.17, 2.18, and 2.19. The proofs here are considerably longer and more technical than the other material in this book, so the reader should feel free to just skip this section and accept the truth of Bertrand's tests. This proof has been included for completeness, due to the lack of any good reference in the literature.

We begin with some notation and computation regarding iterated logarithms, some of them familiar.

Notation 2.25 Let $\log_{(k)} x$ be the iterated natural logarithm as defined earlier. We also write $\Lambda_{m,n}(x)$ for $\prod_{i=m}^n \log_{(i)} x$ and $\Omega_{m,n}(x)$ for

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{\Lambda_{0,k}(x)}$$

for nonnegative integers $m \leq n$.

Notation 2.26 It is understood that these functions (and any functions defined in terms of these) are only defined for x sufficiently large. Any relation in which such functions appear is to be interpreted only "eventually" with respect to the appropriate variable. In that spirit, lower bounds will typically be omitted from infinite integrals and summations, it being understood that the choice does not affect convergence.

Notation 2.27 An "empty" summation in which the lower limit exceeds the upper limit will be interpreted as having the value 0 ; an empty product has the value 1 . In particular we extend $\Lambda_{m,n}(x)$ and $\Omega_{m,n}(x)$ to include such cases.

Proposition 2.28

$$D_x \log_{(k)}(x) = \frac{1}{\Lambda_{0,k-1}(x)}$$

Proof. By induction on k . The cases $k = 0, 1$ are the trivial $D_x x = 1$ and $D_x(\log x) = 1/x$. Assume that the statement holds for some $k \geq 1$. Then by the Chain Rule,

$$\begin{aligned} (\log_{(k+1)})'(x) &= (\log \log_{(k)})'(x) = \frac{1}{\log_{(k)}(x)} (\log_{(k)})'(x) \\ &= \frac{1}{\log_{(k)}(x) \Lambda_{0,k-1}(x)} = \frac{1}{\Lambda_{0,k}(x)} \end{aligned}$$

completing the induction.

Proposition 2.29

$$D_x \Lambda_{m,n}(x) = \Lambda_{m,n}(x) \Omega_{m,n}(x)$$

Proof. We apply the Product Rule and the preceding proposition.

$$\begin{aligned}
D_x \Lambda_{m,n}(x) &= D_x \prod_{k=m}^n \log_{(k)}(x) \\
&= \sum_{j=m}^n \left[\left(\prod_{k=m}^{j-1} \log_{(k)}(x) \right) (D_x \log_j(x)) \left(\prod_{k=j+1}^n \log_{(k)}(x) \right) \right] \\
&= \sum_{j=m}^n \left[\left(\prod_{k=m}^{j-1} \log_{(k)}(x) \right) \left(\frac{1}{\Lambda_{0,j-1}(x)} \right) \left(\prod_{k=j+1}^n \log_{(k)}(x) \right) \right] \\
&= \sum_{j=m}^n \left[\left(\prod_{k=m}^{j-1} \log_{(k)}(x) \right) \left(\frac{\log_j(x)}{\Lambda_{0,j}(x)} \right) \left(\prod_{k=j+1}^n \log_{(k)}(x) \right) \right] \\
&= \sum_{j=m}^n \left(\prod_{k=m}^n \log_{(k)}(x) \frac{1}{\Lambda_{0,j}(x)} \right) = \Lambda_{m,n}(x) \Omega_{m,n}(x)
\end{aligned}$$

Proposition 2.30

$$D_x [\Lambda_{m,n}(x) (\log_{(n)} x)^\alpha] = \frac{\left[\left(\sum_{i=m}^{n-1} \Lambda_{i+1,n-1}(x) (\log_{(n)}(x))^\alpha \right) + \alpha (\log_{(n)}(x))^{\alpha-1} \right]}{\Lambda_{0,m-1}(x)}.$$

Proof. We apply the Product Rule, the Chain Rule, and the preceding propositions.

$$\begin{aligned}
D_x [\Lambda_{m,n}(x) (\log_{(n)} x)^\alpha] &= (\log_{(n)} x)^\alpha D_x \Lambda_{m,n}(x) + \Lambda_{m,n-1}(x) D_x (\log_{(n)} x)^\alpha \\
&= (\log_{(n)} x)^\alpha [\Lambda_{m,n-1}(x) \Omega_{m,n-1}(x)] \\
&\quad + \Lambda_{m,n-1}(x) (\log_{(n)} x)^{\alpha-1} \frac{\alpha}{\Lambda_{0,n-1}(x)} \\
&= \Lambda_{m,n-1}(x) (\log_{(n)} x)^\alpha \left(\Omega_{m,n-1}(x) + \frac{\alpha}{\Lambda_{0,n}(x)} \right) \\
&= \frac{\left[\left(\sum_{i=m}^{n-1} \Lambda_{i+1,n-1}(x) (\log_{(n)}(x))^\alpha \right) + \alpha (\log_{(n)}(x))^{\alpha-1} \right]}{\Lambda_{0,m-1}(x)}.
\end{aligned}$$

Notation 2.31 Let $f(x), g(x)$ be defined for all x sufficiently large, with $g(x)$ eventually positive. Then we write $f(x) = o(g(x))$ to mean

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Notation 2.32 Let $f(x), g(x)$ be defined for x sufficiently large, with $g(x)$ eventually positive. Then we write $f(x) = O(g(x))$ to mean that, for some constant C and for all x sufficiently large,

$$|f(x)| \leq Cg(x)$$

Proposition 2.33

$$(\log_{(m)} x)^\alpha = o((\log_{(n)} x)^\beta)$$

for any integers $m > n \geq 0$ and any exponents α, β provided $\beta > 0$.

Proof. If $\alpha \leq 0$, then this is trivial, so we suppose $\alpha > 0$. Using the substitution $u = \log_{(n)} x$ and L'Hôpital's rule,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log_{(m)} x)^\alpha}{(\log_{(n)} x)^\beta} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\log_{(m-n)} u)^\alpha}{u^\beta} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_{(m-n)} u}{u^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{\Lambda_{0,m-n-1}(u)}}{(\beta/\alpha)u^{\beta/\alpha-1}} \right)^\alpha \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(\beta/\alpha)\Lambda_{1,m-n-1}(u)u^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

as desired.

Proposition 2.34 Let k be a nonnegative integer and let α be real. Then

$$\frac{\Lambda_{0,k-1}(n+1) (\log_{(k)}(n+1))^\alpha}{\Lambda_{0,k-1}(n) (\log_{(k)} n)^\alpha} = 1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{\alpha}{\Lambda_{0,k}(n)} + o\left(\frac{1}{\Lambda_{0,k}(n)}\right)$$

Proof. In the case where $k = 0$, we use the Binomial Theorem to obtain

$$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Assume henceforth that $k > 0$. By the Mean Value Theorem and Proposition 2.30,

$$\begin{aligned} \Lambda_{0,k-1}(n+1) (\log_{(k)}(n+1))^\alpha &= \Lambda_{0,k-1}(n) (\log_{(k)} n)^\alpha \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_{i+1,k-1}(n') (\log_{(k)} n')^\alpha + \alpha (\log_{(k)} n')^{\alpha-1} \end{aligned}$$

for some $n < n' < n+1$. Another application of the Mean Value Theorem gives

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_{i+1,k-1}(n') (\log_{(k)} n')^\alpha &= \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_{i+1,k-1}(n) (\log_{(k)} n)^\alpha \\ &\quad + \left(\frac{(n' - n)}{\Lambda_{0,i}(n_i)} \left[\left(\sum_{j=i+1}^{k-1} \Lambda_{j+1,k-1}(n_i) (\log_{(k)} n_i)^\alpha \right) + \alpha (\log_{(k)} n_i)^\alpha \right] \right) \end{aligned}$$

for each $i = 0, 1, \dots, k-1$, where $n < n_i < n'$. But then using Proposition 2.33,

$$\Lambda_{i+1,k-1}(n') (\log_{(k)} n')^\alpha = \Lambda_{i+1,k-1}(n) (\log_{(k)} n)^\alpha + o\left((\log_{(k)} n)^{\alpha-1}\right)$$

Similarly, for some $n < n'' < n'$,

$$\begin{aligned} (\log_{(k)} n')^{\alpha-1} &= (\log_{(k)} n)^{\alpha-1} + (n' - n) \frac{(\alpha-1) (\log_{(k)}(n''))^{\alpha-1}}{\Lambda_{0,k-1} n''} \\ &= (\log_{(k)} n)^{\alpha-1} + O(n^{-1}) o(n^{-1/2}) \\ &= (\log_{(k)} n)^{\alpha-1} + o(n^{1/2}) \\ &= (\log_{(k)} n)^{\alpha-1} + o\left((\log_{(k)} n)^{\alpha-1}\right) \end{aligned}$$

Combining all these equations,

$$\begin{aligned}\Lambda_{0,k-1}(n+1) (\log_{(k)}(n+1))^\alpha &= \Lambda_{0,k-1}(n) (\log_{(k)} n)^\alpha \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_{i+1,k-1}(n') (\log_{(k)} n')^\alpha \\ &\quad + \alpha (\log_{(k)} n)^{\alpha-1} + o((\log_{(k)} n)^{\alpha-1})\end{aligned}$$

and dividing through by $\Lambda_{0,k-1}(n) (\log_{(k)} n)^\alpha$ gives exactly what is desired.

At last we are in position to prove Bertrand's sequence of tests.

Theorem 2.35 (Restatement of Theorem 2.17) Let $\sum_n^\infty a_n$ be a series of positive real numbers. Let k be a nonnegative integer, and define a sequence $\{b_n\}$ implicitly by

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{b_n}{\Lambda_{0,k}(n)}$$

Then if $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$, $\sum_n^\infty a_n$ converges; if $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$, $\sum_n^\infty a_n$ diverges.

Proof. We will consider only the convergence half of the theorem; the proof of the divergence half is analogous.

Suppose then that $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$. Then there exists a real number α such that $1 < \alpha < b_n$ eventually. By Theorem 2.16, the series $\sum_n^\infty c_n$ with

$$c_n = \frac{1}{\Lambda_{0,k-1}(n) (\log_{(k)} n)^\alpha}$$

converges. Since $\alpha < b_n$ eventually, by Proposition 2.34 we eventually have

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \left(1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{\alpha + o(1)}{\Lambda_{0,k}(n)}\right)^{-1} \\ &> \left(1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{b_n}{\Lambda_{0,k}(n)}\right)^{-1} \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_n}\end{aligned}$$

So $\sum_n^\infty a_n$ converges by the Ratio Comparison Test.

In a very similar fashion, we can prove the second form.

Proposition 2.36 Let k be a nonnegative integer and let α be real. Then

$$\frac{\Lambda_{0,k-1}(n) (\log_{(k)} n)^\alpha}{\Lambda_{0,k-1}(n+1) (\log_{(k)}(n+1))^\alpha} = 1 - \Omega_{0,k-1}(n) - \frac{\alpha}{\Lambda_{0,k}(n)} + o\left(\frac{1}{\Lambda_{0,k}(n)}\right)$$

Proof. The proof follows the same lines as Proposition 2.34, appealing to the Mean Value Theorem repeatedly. We will not repeat this work here.

Theorem 2.37 (Restatement of Theorem 2.18) Let $\sum_n^\infty a_n$ be a series of positive real numbers. Let k be a nonnegative integer, and define a sequence $\{b_n\}$ implicitly by

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \Omega_{0,k-1}(n) - \frac{b_n}{\Lambda_{0,k}(n)}$$

Then if $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$, $\sum_n^\infty a_n$ converges; if $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$, $\sum_n^\infty a_n$ diverges.

Proof. We will consider only the convergence half of the theorem; the proof of the divergence half is analogous.

Suppose then that $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$. Then there exists a real number α such that $1 < \alpha < b_n$ eventually. By Theorem 2.16, the series $\sum_n^\infty c_n$ with

$$c_n = \frac{1}{\Lambda_{0,k-1}(n) (\log_{(k)} n)^\alpha}$$

converges. Since $\alpha < b_n$ eventually, by Proposition 2.36 we eventually have

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(1 - \Omega_{0,k-1}(n) - \frac{\alpha + o(1)}{\Lambda_{0,k}(n)}\right) > \left(1 - \Omega_{0,k-1}(n) - \frac{b_n}{\Lambda_{0,k}(n)}\right) = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

So $\sum_n^\infty a_n$ converges by the Ratio Comparison Test.

Theorem 2.38 (Restatement of Theorem 2.19) Define operators B^+, B^- which act on sequences by

$$\begin{aligned} B^+ \{b_n\}_{n=N}^\infty &= \left\{ n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) \right\}_{n=N}^\infty \\ B^- \{b_n\}_{n=N}^\infty &= \left\{ n \left(1 - \frac{b_{n+1}}{b_n} \right) \right\}_{n=N}^\infty \end{aligned}$$

For each positive integer k , let R_k be the operator defined by

$$R_k \{b_n\}_n^\infty = \{\log_{(k)}(n) (b_n - 1)\}_n^\infty$$

Let $\sum_n^\infty a_n$ be a series of positive real numbers. Let k be a nonnegative integer, and define a sequence $\{b_n\}_n^\infty$ by either

$$\{b_n\}_{n=N}^\infty = R_k R_{k-1} \cdots R_1 B^+ \{a_n\}_{n=N}^\infty$$

or

$$\{b_n\}_{n=N}^\infty = R_k R_{k-1} \cdots R_1 B^- \{a_n\}_{n=N}^\infty$$

Then, if $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$, $\sum_{n=N}^\infty a_n$ converges; if $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$, $\sum_{n=N}^\infty a_n$ diverges. More generally, if $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 1$ (resp. $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$), $\sum_{n=N}^\infty a_n$ converges (resp. diverges).

Proof. First, observe that

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{R_k R_{k-1} \cdots R_1 B^+ \{a_n\}_{n=N}^\infty}{\Lambda_{0,k}(n)}$$

and that

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{R_k R_{k-1} \cdots R_1 B^- \{a_n\}_{n=N}^\infty}{\Lambda_{0,k}(n)}$$

These formal identities are totally straightforward to prove, once guessed, using induction on k . We will prove only the first one here, leaving the second to the reader.

The case $k = 0$ is merely the statement

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{n(a_n/a_{n+1} - 1)}{n} = 1 + \frac{B^+ (\{a_n\})}{n}.$$

Now suppose that the identity holds for some $k \geq 0$. Then

$$\begin{aligned}
& 1 + \Omega_{0,k}(n) + \frac{R_{k+1}R_k \cdots R_1 B^+ \{a_n\}_{n=N}^\infty}{\Lambda_{0,k+1}(n)} \\
&= 1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{1}{\Lambda_{0,k}(n)} + \frac{R_{k+1}R_k \cdots R_1 B^+ \{a_n\}_{n=N}^\infty}{\Lambda_{0,k+1}(n)} \\
&= 1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{1}{\Lambda_{0,k}(n)} + \frac{\log_{(k+1)}(n) [R_k \cdots R_1 B^+ \{a_n\}_{n=N}^\infty - 1]}{\Lambda_{0,k+1}(n)} \\
&= 1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{1}{\Lambda_{0,k}(n)} + \frac{R_k \cdots R_1 B^+ \{a_n\}_{n=N}^\infty - 1}{\Lambda_{0,k}(n)} \\
&= 1 + \Omega_{0,k-1}(n) + \frac{R_k \cdots R_1 B^+ \{a_n\}_{n=N}^\infty}{\Lambda_{0,k}(n)} \\
&= \frac{a_n}{a_{n+1}}
\end{aligned}$$

completing the induction.

In the light of this observation, the claim is just a rephrasing of the preceding two theorems.

12.3 The Harmonic Series and Related Results

This chapter is dedicated to the harmonic series, which is the series of reciprocals of the positive integers.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

The harmonic series has been the object of much interest and many interesting results, most likely because it is in many senses the series with the simplest possible terms whose terms converge to zero. This is interesting because, although the harmonic series has terms tending to zero, the series diverges. Before proceeding to some more curious results, we prove the divergence of this series in several ways. It is worth taking our time about this to ensure that the reader really believes and sees clearly why this series diverges. Calculus students first encountering infinite series tend to pass through two stages of faulty reasoning about series. The first stage is the belief that an infinite series cannot possibly have a finite sum, as discussed in Chapter 1 in the context of Zeno, who like the rest of his generation was still in this stage. The second stage is an overcompensation to the first—students in this stage believe not only the fact that the terms of a convergent series must approach zero but also its converse. However, we have already pointed out that the Divergence Test has a false converse. We present the harmonic series as the classic counterexample, though we have already seen other counterexamples. It is only after passing through both of these faulty stages that real intuitive reasoning about series can take place.

Though every book mentioning infinite series at all almost certainly mentions the harmonic series, very seldom is the origin of its name discussed. Naively, we would expect that the word "harmonic" has its roots in "harmony," and in fact this is correct. Consider a very simple musical instrument for the purposes of discussion, the 1-string harp. (That is, consider a vibrating string with both ends fixed.) When this string is plucked, we often visualize its vibration as a single wave. This is the simplest kind of vibration and is called the first harmonic. However, it is also possible for the string to vibrate in two pieces (the second harmonic). In this case the wavelength, which is directly related to the pitch of the sound, is $1/2$ the wavelength of the first harmonic. Indeed, for each integer n the string can vibrate so that n arcs are formed, and the wavelength will be $1/n$ times the wavelength for the first

harmonic. In this way the series of reciprocals relates to harmonics and harmonies. In fact it is possible for the same string to vibrate in combinations of these modes, in which (say) the third harmonic overlays the second harmonic. Combinations of this sort lead to multiple tones and hence to harmonies. In a sense looking at harmonics is the right way to look at harmony, because, if we change the length of the string, the tones associated to each harmonic change, but the tonic relationship of (say) the third and second harmonics remains analogous. We should also mention that the harmonic series is related to the harmonic mean. Just as each term of an arithmetic series is the arithmetic mean of the terms immediately preceding and following, each term in the harmonic series is the harmonic mean of the surrounding terms. The interested reader can read more about the origin of the term in an article entitled "What's Harmonic about the Harmonic Series?" by David E. Kullman in CMJ, May 2001, Vol. 32, No. 3, pp. 201-3. This article is reproduced in Appendix B of this book.

12.3.1 3.1 Divergence Proofs

As already mentioned, there are good intuitive reasons to suspect that the harmonic series converges. How could it diverge, the naive observer may well wonder, if the terms you are adding are getting smaller and smaller? To settle this question in the reader's mind once and for all, we include not one, not two, but twelve proofs that the harmonic series diverges. (One of the twelve proofs is later in the chapter.) The reader is invited to notice the range of techniques used by different mathematicians to show this fundamental result, and furthermore to notice the relative elegance of certain proofs over others.

Theorem 3.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

that is, the harmonic series diverges.

Proof 1. This is the standard proof exhibited by many calculus books, often called the Cauchy proof (because it is a special case of the proof of Cauchy's Condensation Test). However, this proof of the divergence of the harmonic series can actually be traced back to the Frenchman Nicole Oresme. The proof, like most proofs that we exhibit, demonstrates that the partial sums increase without bound. We denote the n th partial sum by S_n . Now we notice that

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ S_4 &= S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{3}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

Proceeding in the same way, we find that $S_{2^n} > (n+1)/2$. Since the right-hand side of this inequality clearly increases to infinity, the harmonic series cannot converge.

A more visually pleasing way to see this is as follows.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \cdots \\
\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots
\end{aligned}$$

to which we can apply the standard comparison test.

As remarked earlier, this is identical in substance to Cauchy's Condensation Test, and one can just apply that theorem instead of working through this proof.

Proof 2. We appeal directly to the Integral Test of Chapter 1. Observe that $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ is a divergent improper integral whose integrand is positive, continuous, and monotone decreasing, so $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ is a divergent series. (Note: This was the argument used in Chapter 1 to prove that the harmonic series diverged as a p -series with $p = 1$.)

Proof 3 [CMJ, 28:3, pp. 209-210]. Assume for the sake of contradiction that the harmonic series converges to a sum S . Consider two auxiliary series, the "odd harmonic" and "even harmonic" series, which have terms given (respectively) by

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Since $1/n \geq 1/(2n-1) > 1/(2n)$, we can use the original Comparison Test to see that, if the harmonic series converges to S these auxiliary series converge also to sums S_o, S_e satisfying

$$S \geq S_o > S_e$$

Each term in the harmonic series appears in exactly one of the auxiliary series, so we can see that

$$S = S_o + S_e$$

taking into account that we can freely scramble and group the terms in a convergent series of positive terms without affecting its convergence or its sum. On the other hand, each term in the even harmonic series is half the corresponding term in the harmonic series so that

$$S_e = \frac{1}{2}S$$

Putting these together gives

$$S_o = S - S_e = \frac{1}{2}S = S_e$$

a contradiction.

Proof 4 [CMJ, 30:1, p. 34]. First we make the computation

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{2n}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)/2} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Now as before we assume for the sake of contradiction that the harmonic series converges to a sum S . Then we can write:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{56}\right) + \cdots \\
&= S + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \cdots\right) \\
&> S
\end{aligned}$$

for our contradiction.

Proof 5. Once more we assume that the harmonic series converges with sum S . Remembering that grouping does not change the sum of a convergent series, we group the terms into blocks of n terms (where we can freely choose any $n \geq 2$). Choosing for example $n = 4$, we have

$$\begin{aligned}
S &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right) + \cdots \\
&> \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \\
&= S
\end{aligned}$$

for another contradiction.

Proof 6. This proof is known as Mengoli's Divergence proof and somewhat resembles the $n = 3$ case of the previous proof. Like Proof 4, the proof depends on an algebraic manipulation.

$$\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} = \frac{2p}{p^2-1} + \frac{1}{p} > \frac{2p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{3}{p}$$

Once again we assume for the sake of contradiction that the harmonic series converges to S , and rewrite as follows:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \cdots \\
&> 1 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right) + \cdots \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \\
&= 1 + S
\end{aligned}$$

Once more a contradiction arises from assuming that S is a finite number.

Proof 7. This proof originates with Jakob Bernoulli in 1689. We first observe that for any integer $p > 1$ we have

$$\sum_{n=p+1}^{p^2} \frac{1}{n} > \sum_{n=p+1}^{p^2} \frac{1}{p^2} = \frac{p^2 - p}{p^2} = 1 - \frac{1}{p}$$

so that in particular

$$\sum_{n=p}^{p^2} \frac{1}{n} > 1$$

The trick now is to group the terms into blocks so that the above observation applies to each block. To that end we define a sequence of numbers by $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Then, by grouping, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{n=a_1}^{a_1^2} \frac{1}{n} + \sum_{n=a_2}^{a_2^2} \frac{1}{n} + \sum_{n=a_3}^{a_3^2} \frac{1}{n} + \cdots > 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

so that the harmonic series diverges.

Proof 8 [CMJ, 18:1, pp. 18-23]. This proof is also due to a Bernoulli in 1689, this time Johann. Bernoulli made the observation that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

is a telescoping series that converges to $C = 1$ (see Example 1.42). We write

$$\begin{array}{ll} C &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots \\ D &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots \\ E &= \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots \\ F &= C - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ G &= D - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots = E - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{30} + \cdots = F - \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \end{array}$$

Summing the first and second columns, we have, combining like fractions,

$$C + D + E + F + G + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

On the other hand, summing the first and fourth columns gives

$$C + D + E + F + G + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

All the manipulations we have made so far are perfectly justified, where we interpret the summation as an infinite series and acknowledge the possibility that we may have infinite sums (all the appropriate terms are positive, so there cannot be divergence by oscillation). Since these two values of $C + D + E + F + G + \cdots$ differ by 1, we exclude the finite case. Thus the harmonic series diverges.

Proof 9. Recall the notion of a Cauchy sequence from Chapter 1 (Definition 1.45, Theorem 1.46). Let $\{S_n\}$ be the sequence of partial sums of the harmonic series, and assume for the sake of contradiction that the harmonic series converges, so that $\{S_n\}$ is Cauchy. Choose N so that for all $m, n \geq N$ we have $|S_m - S_n| < 1/2$. But for $m = 2N, n = N$,

$$|S_{2N} - S_N| = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2},$$

a contradiction.

Proof 10 [AMM, 107:7, p. 651]. We recall from calculus the inequality

$$x \geq \log(1+x)$$

that holds for all $x > -1$. This can be proven, for example, by considering the function $f(x) = x - \log(1+x)$. Since $f'(x) = 1 - 1/(x+1)$, we see that f is decreasing on $(-1, 0)$ and increasing on $(0, \infty)$; that is, f has an absolute minimum at 0. That is,

$$x - \log(1+x) \geq 0 - \log(1+0) = 0.$$

Using this, we can estimate the partial sums of the harmonic series as follows.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k) = \log(n+1)$$

However, $\log(n+1)$ goes to infinity for large n , so the partial sums of the infinite series are unbounded, and the harmonic series is divergent.

We can interpret this argument in a much more strikingly visual way as follows. Consider the following graph of the function $g(x) = \sin(\pi e^x)$, shown below. We consider g as a function only of positive reals. We know that this function is defined for arbitrarily large x . We also know that $\sin x$ is zero at integer multiples of π , so that g has zeros whenever e^x is integer-valued, which happens of course for x of the form $\log n$. The distance between consecutive zeros is of the form $\log(k+1) - \log k$, which by the argument above is a lower bound to $1/k$. This is the motivation for the choice of the function g —the oscillations make visible the segments between zeros, and the lengths of these segments estimate the terms of the harmonic series. If the harmonic series were to converge to some number N , then the length sum of all the segments between zeros of g , since they are smaller, would also be bounded above by N . Then g could have no further zeros right of the vertical line $x = N$, but we know this does not happen. Again we emphasize that this contains no mathematical content not present in the argument above, only a new way to make it tangible.

Proof 11. In Chapter 4, we show that if $\{a_n\}$ is monotone decreasing and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then in fact $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. (This is Gem 17.) If the harmonic series were to

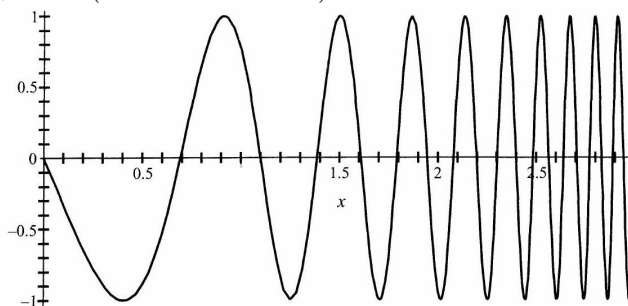


FIGURE 3.1

Visualizing the Divergence of the Harmonic Series

converge, then this gem would apply with $a_n = 1/n$. But in that case, $na_n = 1$ for all n , and it certainly does not converge to 0.

12.3.2 3.2 Rate of Growth

In this section we consider the question of how quickly the harmonic series diverges—more precisely, we ask how quickly the partial sums tend to infinity.

Definition 3.2 The partial sums of the harmonic series are called the harmonic numbers and they are denoted by H_n .

Theorem 3.3

$$H_n = \log n + \frac{1}{n} + \gamma_n$$

where $\{\gamma_n\}$ is a sequence converging to a constant γ .

Proof. As in the proof of the Integral Test, we see that

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{x} dx \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

Rewriting this, we have

$$H_{n-1} \geq \log n \geq H_n - 1$$

Thus from the right inequality we have

$$H_n - \log n \leq 1.$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} H_n - \log n &= H_n - \int_1^n \frac{1}{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \right) + \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Since the integrand is nonnegative, the final summation is actually the $(n-1)$ th partial sum of a positive series. However, this summation is bounded above by 1 (using the prior inequality), so that it in fact tends to a limit as n goes to ∞ . Trivially $1/n$ approaches the limit 0. Then, writing

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx$$

the conclusion follows. Please consult the accompanying figure if this is unclear.

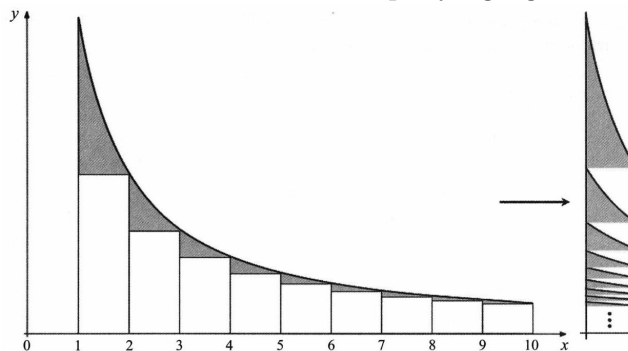


FIGURE 3.2

Estimating Partial Sums of the Harmonic Series; Viewing Gamma as an Area

The above result implies that the harmonic series diverges very slowly indeed with growth comparable to that of $\log n$. The number of terms required to reach a partial sum of A grows exponentially with A . For example, we know that $H_n > 100$ for sufficiently large n . However, we would by no means want to add terms by hand until we reached even a sum as large as

20 . It can be checked with computer calculation, for example, that it requires more than a quarter of a billion terms to reach a sum of 20 . To reach a partial sum larger than 100 requires approximately 1.5×10^{43} terms.

12.3.3 3.3 The Alternating Harmonic Series

In this section we consider a close relative of the harmonic series.

Definition 3.4 The alternating harmonic series is the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Theorem 3.5 The alternating harmonic series converges.

Proof. Apply the Alternating Series Test.

Although we said in Chapter 1 that it is in general extremely difficult to find the exact sum of a convergent series, we can in fact find the sum of the alternating harmonic series.

Theorem 3.6 The alternating harmonic series converges to $\log 2$.

Proof 1 . For this proof, we change notation and write H_n (resp. A_n) for the n th partial sum of the harmonic (resp. alternating harmonic) series.

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &= H_{2n} - H_n. \end{aligned}$$

Using Theorem 3.3, we have

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \left(\log(2n) + \gamma_{2n} + \frac{1}{2n} \right) - \left(\log n + \gamma_n + \frac{1}{n} \right) \\ &= (\log(2n) - \log n) + (\gamma_{2n} - \gamma_n) - \frac{1}{2n} \\ &= \log 2 + (\gamma_{2n} - \gamma_n) - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Taking the limit, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n} = \log 2$$

Thus the even partial sums of the alternating harmonic series tend to the desired limit. Notice that the difference between an odd partial sum and the nearest even partial sum is tending to zero (since the terms go to 0), so that in fact all partial sums go to $\log 2$, as desired. (We leave the details of this final observation to the reader.)

Proof 2. For this proof we assume a basic knowledge of Taylor Series (see any introductory calculus text). In particular we recall that the function $\log(1+x)$ has the Taylor Series

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

and that the expansion is valid on the interval $(-1, 1)$. Notice that in effect we are trying to extend this result to $x = 1$. However, standard Taylor Series results only apply to the interior

of the interval of convergence, so that it is not straightforward. In particular we cannot just set $x = 1$ and expect anything meaningful. We write

$$s_k(x) = \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

for the partial sums, where we explicitly acknowledge the dependence on x . We first do some algebra to obtain

$$\begin{aligned} s_k(1) - s_k(x) &= \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1} (1 - x^n)}{n} \\ &= (1 - x) \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})}{n} \end{aligned}$$

Let us examine the summation in the last line. It is in fact the k th partial sum of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})}{n}$$

Restrict our attention now to $x \in (0, 1)$. Then the above series is alternating. Furthermore, we have

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow x^{n-1} < x^{n-2} < \cdots < x < 1 \\ &\Rightarrow (n-1)x^{n-1} < 1 + x + \cdots + x^{n-2} \\ &\Rightarrow (n-1)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) < n(1 + x + \cdots + x^{n-2}) \\ &\Rightarrow \frac{(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})}{n} < \frac{(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2})}{n-1} \end{aligned}$$

so that the terms in the series are decreasing in absolute value. Then the proof of Theorem 1.75 guarantees that partial sums are bounded above by the first term and bounded below by the second partial sum.

$$0 < 1 - \frac{1+x}{2} < \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n+1} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})}{n} < 1.$$

Then

$$0 < s_k(1) - s_k(x) < 1 - x$$

or more simply

$$s_k(x) < s_k(1) < s_k(x) + 1 - x$$

Passing to the limit as $k \rightarrow \infty$, the above inequality will hold, possibly losing strictness, and

$$\log(1+x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq \log(1+x) + 1 - x$$

Since these bounds on our sum hold for all $x \in (0, 1)$, they hold also in the limit as $x \rightarrow 1$, giving

$$\log 2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq \log 2$$

and we are done.

Theorem 3.7 The alternating harmonic series can be rearranged to sum to any prescribed real number r . It can also be rearranged to diverge to ∞ or to $-\infty$ as well as to diverge by oscillation.

Proof. By the reasoning of Proof 3 that the harmonic series diverges, we see that the series consisting only of the positive terms in the alternating harmonic series is also divergent, and likewise with the negative terms. That is, no matter how many terms we have included from either class, there will always remain enough positive (or negative) terms to increase (decrease) the partial sums of the rearranged series as much as desired. Notice that we are not using the extent of our freedom in this result, since the rearrangement described in the following leave all the positive (resp. negative) terms in the same relative order. That is, we will always take the positive terms in order and likewise negative terms, but we will change the pattern of interweaving them.

Let r be a real number. To form our rearrangement, we add positive terms until the partial sum exceeds r for the first time. We then add negative terms until the partial sum becomes less than r . We then add positive terms until the partial sum becomes greater than r , and so on. We leave to the reader to check that all terms must eventually be used. Now, it remains only to show that the series converges to r . Consider the places where the sequence of partial sums "changes direction." Since each positive (resp. negative) term is less in absolute value than all those before it, it can be verified that the "overshoots" get smaller and smaller, and likewise the "undershoots." It follows that the partial sums do indeed approach r .

To effect divergence to ∞ , we add positive terms until the sum passes 1, then a single negative term. We add positive terms until the sum passes 2, then a single negative term. We add positive terms until the sum passes 3, then a single negative term, and so on. It is clear that this series diverges to ∞ . A similar strategy would solve the case of $-\infty$.

To effect divergence by oscillation, we add positive terms until the sum passes 1, then negative terms until the sum passes -2, then positive terms until the sum passes 3, and so on.

Theorem 3.8 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series with terms going to 0 and such that the subseries consisting of only positive or only negative terms would themselves diverge. This series can be rearranged to sum to any prescribed real number r . It can also be rearranged to diverge to ∞ or to $-\infty$ as well as to diverge by oscillation.

Proof. The proof follows the pattern of the special case already proven. We leave the details to the reader.

The following result shows that this is a special case of a more general result. In essence the following result says, in most cases, that either rearrangement has no effect on a series or it can have any conceivable effect on the series. Intermediate cases do not occur.

Theorem 3.9 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series whose terms go to 0. Then exactly one of the following holds.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely and all its rearrangements have the same sum.
- All rearrangements of the series diverge to ∞ .
- All rearrangements of the series diverge to $-\infty$.

- The series can be rearranged to sum to any prescribed real number r . It can also be rearranged to diverge to ∞ or to $-\infty$ as well as to diverge by oscillation.

Proof. Consider two subseries of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, the one consisting of exactly the positive terms and the one consisting of exactly the negative terms, with the understanding that one (but not both) of these might be finite. Now a priori either or both may converge. The reader can verify after a moment's thought that the last case will occur if both diverge by Theorem 3.8, the second will occur if only the positive subseries converges, and the third will occur if only the negative subseries converges. Furthermore, if both subseries converge, then $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converges to the sum of the absolute values of their sums, so the series is absolutely convergent, and we are in the first case.

We demonstrate the possibilities first with a single example.

Example 3.10 (compare Putnam 1954, Afternoon 2) The series $1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \cdots$ converges to $\frac{3}{2} \log 2$.

Solution. Let s_n be the n th partial sum of the alternating harmonic series, and let t_n be the n th partial sum of the above rearrangement of the alternating harmonic series. We make the following manipulation.

$$\begin{aligned} s_{4n} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \\ \frac{1}{2}s_{2n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-2} \\ s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

That is, $t_{3n} = s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n}$. By adding individual terms, we have

$$\begin{aligned} t_{3n} &= s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n} \\ t_{3n+1} &= s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n} + \frac{1}{4n+1} \\ t_{3n+2} &= s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3}. \end{aligned}$$

As n goes to ∞ , we see that all three right-hand sides tend to $\log 2 + \frac{1}{2} \log 2 = \frac{3}{2} \log 2$. Thus t_n also approaches this limit, and we are done.

Proof 12 (This is the final proof that the harmonic series diverges, as promised at the beginning of the chapter.) Notice that Example 3.10 gives a rearrangement of the alternating harmonic series with a different sum by explicit construction. By Theorem 1.71, the alternating harmonic series must converge conditionally. Since the alternating harmonic series does not converge absolutely, the harmonic series diverges.

Example 3.10 can actually be generalized considerably. For the generalization we use a proof that is more technical, relying on the technical proof of Theorem 3.3 rather than a slick manipulation.

Theorem 3.11 Consider the rearrangement of the alternating harmonic series consisting of p positive terms, then q negative terms, then p positive terms, then q negative terms, etc., where the positive (resp. negative) terms stay in the same relative order. (Example 3.10 is the special case $p = 2, q = 1$.) Then this series converges. Furthermore, its sum is $\log 2 + \frac{1}{2}(\log p - \log q)$.

Proof. We use Theorem 3.3. Let s_n be the partial sums of this rearrangement. Consider only partial sums that consist of entire "blocks" of terms. (That is, since the pattern of positive and negative terms has period $p + q$, we consider the partial sums $s_{(p+q)n}$. Since the sum for each block tends to 0 (an easy exercise), this is sufficient to demonstrate convergence of the series. We simply write

$$\begin{aligned}
s_{(p+q)n} &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2q} \right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{2p(n-1)+1} + \frac{1}{2p(n-1)+3} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2pn-1} - \frac{1}{2q(n-1)+2} - \frac{1}{2q(n-2)+4} - \cdots - \frac{1}{2qn} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2pn-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2qn} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2pn} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2pn} \right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2qn} \right) \\
&= H_{2pn} - \frac{1}{2}H_{pn} - \frac{1}{2}H_{qn} \\
&= \log(2pn) + \gamma_{2pn} + \frac{1}{2pn} - \frac{1}{2}\log(pn) - \frac{1}{2}\gamma_{pn} - \frac{1}{2pn} \\
&\quad - \frac{1}{2}\log(qn) - \frac{1}{2}\gamma_{qn} - \frac{1}{2qn} \\
&= \log 2 + \log p + \log n - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{2}\log q - \frac{1}{2}\log n \\
&\quad + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}\gamma_{pn} - \frac{1}{2}\gamma_{qn} - \frac{1}{2qn} \\
&= \log 2 + \frac{1}{2}(\log p - \log q) + \gamma_{2pn} - \frac{1}{2}\gamma_{pn} - \frac{1}{2}\gamma_{qn} - \frac{1}{2qn}.
\end{aligned}$$

In the limit, the γ_i terms cancel and the $1/2qn$ vanishes, and the desired result remains. The interested reader can learn more about the alternating harmonic series and its rearrangements by studying *CMJ*, Vol. 16 pp. 135-138; *AMM* Vol. 87 pp. 817-819; *AMM* Vol. 88 pp. 33-46; *MM* Vol. 54 pp. 244-246.

12.3.4 3.4 Selective Sums

In this section, we deal with the concept of selective sums. Loosely speaking, we consider the possibilities that result when we add only a subset of the terms in the series. We are more explicit in the following definitions.

Definition 3.12 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be an infinite series. Then a number r is a selective sum of this series if we can write $r = \sum_{n \in A} a_n$ for some suitably chosen nonempty subset A of the positive integers.

In the first subsection, we demonstrate that all positive numbers are in fact selective sums of the harmonic series, which is a considerably stronger result than its mere divergence. In the latter two subsections, we consider two particular selective sums of the harmonic series and investigate their convergence or divergence.

Existence Theorems

Theorem 3.13 Every positive number r is a selective sum for the harmonic series; furthermore the set of terms chosen can always be chosen infinite.

Proof. We apply the Greedy Algorithm, at each stage taking the largest possible next fraction. Explicitly, we construct our set recursively as follows, placing k into the set A if

$$\left(\sum_{n \in A; n < k} \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{k} < r.$$

Intuitively, we include a term if it is possible to do so subject to the constraint that all partial sums stay below our target r . Since our series consists of positive terms and all partial sums are bounded by r , the series must converge to a sum $s \leq r$. In fact we claim that $s = r$. Suppose for the sake of contradiction that $s < r$, and choose N sufficiently large that $1/N < r - s$. Then adding $1/N$ would not have caused us to reach or exceed r , so that $1/N$ must have been included in our summation. But this reasoning applies to all N sufficiently large. That is, for all N such that $1/N < r - s$, $1/N$ must already be in our summation. Then our summation must include a tail of the harmonic series. Since the harmonic series diverges, so must any tail and hence our series. But our series has bounded partial sums, a contradiction.

By construction, in the previous theorem the partial sums never actually equaled our target r , so that our selective sums originated from genuinely infinite series. One wonders under what circumstances we could have achieved our target sum with a finite series. Certainly the sum of a finite number of fractions would be a rational number. The following theorem shows that this constraint is also sufficient.

Theorem 3.14 (compare Putnam Problem [14, 1954, B2]) Every positive rational number r is a selective sum for the harmonic series consisting of finitely many terms.

Proof. We prove first the case $r < 1$, doing this by induction on the numerator of r . If r has numerator 1, then r is itself a term in the harmonic series and we are done.

Suppose that the conclusion holds for all numbers r with numerator less than p , and let $r = p/q$. Choose the largest possible fraction not exceeding r , so that

$$\frac{1}{n} \leq \frac{p}{q} < \frac{1}{n-1}$$

By the second inequality, $p(n-1) < q \Rightarrow pn - q < p$. However,

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{pn - q}{qn}$$

so that the remainder after including $1/n$ into the sum has numerator less than p . By the induction hypothesis, we can write this remainder as a finite sum of unit fractions (that is to say, fractions with numerator 1). Furthermore, since

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n}$$

the terms required to obtain $p/q - 1/n$ must not include $1/n$. Then appending $1/n$ to the sum for $p/q - 1/n$ gives the desired sum for r , completing the induction.

If $r \geq 1$, then consider the largest partial sum of the harmonic series not exceeding r . That is, find N so that

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq r < \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n}$$

and include the first N terms of the harmonic series in our sum. The remainder, if any, is therefore less than $1/N + 1$. By the above result it can be written with a finite number of unit fractions, and it is clear that they are sufficiently small not to have been previously included.

In any case, then, we can construct a finite series as desired.

We note that the above finite expansion of a rational number into unit fractions was the notation for rationals used in ancient Egypt. For this reason, forms like $1/2 + 1/3 + 1/19$ are called Egyptian fractions.

Example 3.15 Express $2/5$ as a finite selective sum of the harmonic series (i.e., as an Egyptian fraction).

Solution. Solving

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{n-1}$$

we see our first fraction should have $n = 3$. Now $2/5 - 1/3 = 1/15$. Hence $2/5 = 1/3 + 1/15$.

In fact we have much more freedom in choosing an expression, both in the infinite and finite case, than we are using. Since any tail of the harmonic series diverges, we can restrict our attention to such tails.

Theorem 3.16 Let N be an arbitrary positive integer. Then every positive number r is realizable as a selective sum of the harmonic series without using any of the first N terms of the harmonic series. If r is rational, the selective sum can be realized with finitely many terms.

Proof. Essentially identical to the given proofs. The details are left to the reader.

Casting Out Nines

Suppose that we remove from the harmonic series all terms that contain a 9 in their denominator. At first it seems that this cannot make too much difference in the sum of the series. Near the beginning of the series, after all, we are only removing every tenth term. Strikingly, however, this change is enough to make the series converge.

Theorem 3.17 Let B be the set of positive integers whose decimal representations do not contain the digit 9. Then the series

$$\sum_{n \in B} \frac{1}{n}$$

converges.

Proof. Let M_d be the contribution to the sum from terms in which the denominator is a d -digit number. For example,

$$M_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \leq 8.$$

To estimate M_2 , notice that there are 8 possible first digits for a two-digit number in B and 9 possible second digits. That is, there will be 72 terms with a two-digit denominator. Since each term is at most $1/10$, the total contribution is at most $72/10$.

More generally, consider the d -digit numbers in B . There are 8 ways to choose the first digit and 9 ways to choose each of the remaining $d - 1$ digits. That is, there will be $8(9)^{d-1}$ terms, each at most $1/10^{d-1}$. Totaling these, we have

$$M_d \leq 8(9)^{d-1} \left(\frac{1}{10^{d-1}} \right) = 8 \left(\frac{9}{10} \right)^{d-1}$$

We now notice that

$$\sum_{n \in B} \frac{1}{n} = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots \leq \sum_{d=1}^{\infty} 8 \left(\frac{9}{10} \right)^{d-1}$$

The infinite series on the right, however, is a convergent geometric series with common ratio $9/10$, so that this thinned harmonic series converges (perhaps unexpectedly).

This result is perhaps not so discordant with common sense if we examine it from a different perspective. The authors were deliberately manipulative in directing the reader's attention to the beginning of the series and the relative scarcity of numbers with 9's. Rather, recall that the end behavior of a series is determined by its tail, not its initial segment. If we look at numbers with, say, 100 digits or more, it is clear that nearly all of them will have 9's and thus will be excluded from the sum. We leave it to the reader to verify that the same result is true if the digit 9 is replaced by any other digit. In fact much more is true, as stated in the following theorem (the proof of which we omit).

Theorem 3.18 Let A be the set of positive integers whose decimal representations contain at least a_1 1's, at least a_2 2's, at least a_3 3's ..., at least a_9 9's, and at least a_0 0's, and let B be the complement of A in the set of positive integers. Then the series

$$\sum_{n \in B} \frac{1}{n}$$

converges.

Proof. We direct the reader to a selection of articles on these "thinned" harmonic series. See *The American Mathematical Monthly*, for example, Vol. 20 (pp. 48-50); Vol. 23 (pp. 149-152); Vol. 23 (pp. 302-303); Vol. 48 (pp. 93-97); Vol. 82 (pp. 931-933).

Prime Harmonic Series

Definition 3.19 An infinite product is an expression of the form

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n,$$

where $\{a_n\}$ is a sequence of positive numbers called factors. To this infinite product we associate the sequence of partial products

$$P_k = \prod_{n=1}^k a_n$$

As with infinite series, we say that the infinite product converges if the sequence of partial products converges. Otherwise, we say the product diverges.

Theorem 3.20 Let $\{a_n\}$ be a sequence of positive numbers. Then the infinite product $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ and the infinite sum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge or diverge together.

Proof. We will show that the convergence of either implies the convergence of the other. Denote the partial products and partial sums as follows:

$$P_k = \prod_{n=1}^k (1 + a_n)$$

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n$$

Now, it is clear that the sequences $\{P_k\}$ and $\{S_k\}$ increase with k , so that they will converge if and only if they are bounded above. We note first that

$$P_k = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_1 a_2 + \cdots \geq 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = 1 + S_k.$$

We also recall again from calculus the inequality

$$\log(1+x) \leq x$$

which holds for all $x > -1$.

With this in mind, we have

$$\log P_k = \sum_{n=1}^k \log(1+a_n) \leq \sum_{n=1}^k a_n = S_k$$

Combining these, we have

$$S_k + 1 \leq P_k \leq e^{S_k}$$

It follows that, if one of the sequences is bounded above, the other must be also.

Theorem 3.21 Let p_i be the i th prime number. (That is, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$) Then

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}$$

diverges.

Proof. Recall the Fundamental Theorem of Arithmetic, which says that each positive integer has a unique factorization into prime powers. Operating formally, if we expand the infinite product

$$P = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots\right),$$

we will obtain each unit fraction $1/n$ exactly once, so that by a rearrangement (legitimate because all the terms are positive)

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

so that in fact P diverges as an infinite product. On the other hand, each factor is a geometric series, and we can use Theorem 1.39 to write

$$\begin{aligned} P &= \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_i}{p_i - 1}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \end{aligned}$$

We know therefore that this product diverges. Using Theorem 3.20, we know also that

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i - 1}$$

diverges.

Finally, we use the Limit Comparison Test to relate this to the prime harmonic series. We simply note that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1/p_i}{1/(p_i - 1)} = \frac{p_i - 1}{p_i} = 1,$$

so that the prime harmonic series diverges as desired.

This result is interesting to number theorists because it gives some information about how the primes are distributed throughout the natural numbers. Loosely speaking, primes must be relatively common for the above subseries to diverge. We will settle here for the coarsest possible result.

Corollary 3.21.1 There are an infinite number of primes.

12.3.5 3.5 Unexpected Appearances

The harmonic series has a surprising habit of rearing its head in a wide variety of problems throughout mathematics. In this book we include three such examples of intriguing problems of the sort that could be given to a math student for exploration. (The third is elsewhere, and we leave it to the reader to find.) Of course, the reader will be less surprised than the authors were to find the harmonic series making an entrance in the following problems, since they appear neatly grouped in this chapter about harmonic series. Still, in each case, the reader will find that the divergence of the harmonic series plays a key role in the solution in forcing the (often counterintuitive) answer to the question. It is easy to just hear the sentence "The harmonic series diverges." without getting excited, because it is a technical sentence. However, the following results are often challenging to common sense. The reader can consider these problems as being concrete realizations of the bizarreness of the divergence of the harmonic series.

Example 3.22 Lucky the Worm is trying to cross an elastic rope. The rope is one foot long, and Lucky can crawl at a steady pace of one inch in a minute. However, at the end of each minute, Lucky takes a short breather while the rope is stretched an additional foot. We assume that the stretching is done uniformly across the rope, so that Lucky is the same fraction of the way along the rope both before and after the stretching. We also assume that Lucky himself has negligible length, and that he survives the stretchings (he's Lucky after all). Will Lucky be able to reach the far end of the rope?

Solution. At first glance, things don't look very good for Lucky. Length is being added to the rope at twelve times the rate that he is covering distance, so it doesn't seem like he could possibly progress much. However, we will show that in fact Lucky could cross the rope. In the first minute, Lucky will cover one inch of a foot long rope, accomplishing $1/12$ of his goal. In the second minute, Lucky will cover one inch out of a two foot rope, accomplishing $1/24$ of his goal. In the third minute, Lucky will cover one inch out of a three foot rope, accomplishing $1/36$ of his goal. The total progress in n minutes, then, is

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{12n} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

We recognize the harmonic series in the above. Since the harmonic series diverges, we can choose n large enough that the partial sum of the harmonic series exceeds 12. Lucky's total progress in n minutes, then, would reach the desired total of 1, that is 100% of the task, or the entire rope.

We wish to emphasize the counterintuitive nature of this example, possibly straining the reader's credulity further. Notice that there was nothing special about the number 12. If Lucky were trying to cross a mile-long rope that grew by a mile every minute, still crossing at a lowly inch per minute, he would be able to accomplish that as well. (The interested reader may wish to use Theorem 3.3 to estimate how long each of these tasks would take Lucky.)

Example 3.23 Is it possible to stack dominoes on a table in such a way that the top domino totally overhangs the table?

Solution. Without loss of generality suppose that the dominoes have length 2 units, so that each edge is 1 unit from the center of the domino. We claim that, in a stack of n dominoes, the

top domino can be placed so that its rightmost edge is H_n units beyond the edge of the table. Choosing n sufficiently large, we will have $H_n > 2$ as desired. In fact we can arrange things so that the top domino is as far away from the table as the patient stacker may wish.

To do this, we let the edge of the table be the origin of our number line, and number the dominoes from the top down so that domino n rests on the table. We place domino n so that it overhangs the table by $1/n$ units, and thereafter each domino k overhangs domino $k + 1$ by $1/k$ units. By construction, domino k will have its rightmost edge at

$$r_k = \sum_{i=k}^n \frac{1}{i}$$

and its center at

$$c_k = r_k - 1 = \sum_{i=k}^n \frac{1}{i} - 1$$

It is clear then that the right edge of the top domino will be at H_n as desired. What is unclear is whether the domino stack will fall. The domino stack will balance if the center of mass of the top k dominoes is over the $k + 1$ st domino, for every k (where the $(n + 1)$ st domino is in fact the table). The horizontal coordinate of the center of mass of several dominoes is just the average of the coordinates of the centers of mass of individual dominoes. Combining these observations, the dominoes will balance if and only if for all k ,

$$r_{k+1} \geq \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k c_n$$

where we put

$$r_{n+1} = \sum_{i=n+1}^n \frac{1}{i} = 0$$

We simply verify

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k c_j &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=j}^n \frac{1}{i} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^n \frac{1}{i} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=j}^k \frac{1}{i} + \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k \frac{1}{i} + \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i} - 1 \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k \frac{1}{i} - 1 + r_{k+1} \end{aligned}$$

Now, in the above double summation, each term $1/i$ appears once each when $j = 1, j = 2, j = 3, \dots, j = i$, a total of i times. Then we can write

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k c_j &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k \frac{1}{i} - 1 + r_{k+1} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i \left(\frac{1}{i} \right) - 1 + r_{k+1} \\
&= r_{k+1}
\end{aligned}$$

as desired. The fact that equality holds signals that we have positioned our dominoes optimally in the sense that placing any domino any further from the table will cause a collapse.

The reader can actually do this experiment if he or she desires. We illustrate the situation for six dominoes below. The x -coordinate for the center of mass for each of the dominoes

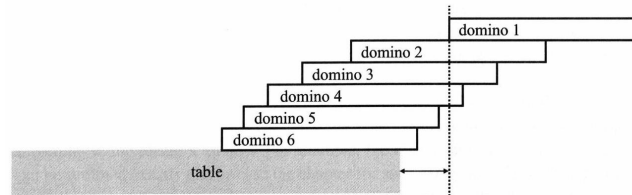


FIGURE 3.3

Stacking Dominoes

is (from bottom to top) $0, 1/5, 1/5 + 1/4, 1/5 + 1/4 + 1/3, 1/5 + 1/4 + 1/3 + 1/2, 1/5 + 1/4 + 1/3 + 1/2 + 1$. The x coordinate for the center of mass for the entire stack of six dominoes is

$$\frac{5(1/5) + 4(1/4) + 3(1/3) + 2(1/2) + 1}{6} = \frac{5}{6} < 1.$$

That is, the center of mass lies over the last domino, preventing tumbling. We remark that the top domino can be made to wholly overhang the table with as few as four dominoes, if your hand is steady.

4

12.4 Intriguing Results

The theory of infinite series is particularly interesting in mathematics due to its wealth of small and interesting results. While there is a definite fabric of results that form the standard theory, there are innumerable results that do not quite fit within a linear development but are no less interesting. For example, we have said earlier in the book that no general method exists for summing a particular convergent series. However, certain special series may be summable by a particularly clever or elegant method. Results of that form can be beautiful as well as instructive, often exhibiting clues to summing other similar series. In this chapter we include a collection of results that we find intriguing for one reason or another on their own merits, not because of their place in the larger fabric. (However, some of these results would certainly have a place in other authors' development of the theory.)

How, then, were results chosen for this chapter? On what basis do we call a result a gem? There are a number of reasons we may have labelled a result a gem. Gems may confirm a common intuitive notion with a clarifying proof, or may provide a counterexample to intuition. They may exhibit a particularly slick or unexpected proof technique. Some gems were chosen because they seemed to us at first astonishing but with a moment's study of the proof became almost common sense. With few exceptions the proofs of these results are elementary and can be appreciated by anyone who has successfully come this far through the book. In a sense that is one purpose of this chapter—to demonstrate that the theory of infinite series is full of surprising and intriguing gems that are above all accessible to the nonspecialist.

The reader should not feel any obligation to sit down and read all of these results in a sitting. Quite the contrary, this chapter is designed to be appreciated in bits and pieces, according to the reader's interest. For example, the reader interested in exotic series that can be summed exactly can browse the chapter for such examples. Most of the gems stand alone and apart from the rest of the gems in this chapter, though they may reference earlier chapters. In the cases where one gem depends on another or can be better interpreted in the context of other items in the chapter, this is always explicit. The reader is invited to sample this chapter freely; this chapter is by its very nature not exhaustive, so we welcome the reader to use these results as jumping-off points for intriguing results of his or her own.

12.4.1 4.1 Gems 1

Gem 1 Let $\{a_n\}$ be a sequence of terms such that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converges. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

converges absolutely.

Proof. Recall that $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ so that by rearranging we have $|a|^2 + |b|^2 \geq 2|a||b|$. Let a_n be given as above, and let $b_n = 1/n$. Applying this result to a_i, b_i for each $i = 1, 2, \dots, k$ and summing,

$$\sum_{n=1}^k a_n^2 + \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \geq 2 \sum_{n=1}^k \frac{|a_n|}{n}.$$

Since the two series on the left-hand side are convergent series of positive terms, the lefthand side is bounded above by the sum of their sums, independently of k . Thus the partial sums of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

are bounded above. Since this is a series of positive terms with bounded partial sums, it must converge. Thus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

converges absolutely, as desired. (This could also be done using the Cauchy-Schwartz Inequality.)

Gem 2 Let $\{a_n\}, \{b_n\}$ be two sequences of terms such that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ converge. Then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges absolutely.¹

Proof. We follow the proof of Gem 1. Again we have $|a|^2 + |b|^2 \geq 2|a||b|$. Applying this result to a_i, b_i for each $i = 1, 2, \dots, k$ and summing,

$$\sum_{n=1}^k a_n^2 + \sum_{n=1}^k b_n^2 \geq 2 \sum_{n=1}^k |a_n| |b_n|.$$

⁰¹ This relation between the convergence of the "square sums" of series and the convergence of their term-by-term product is important to the study of Hilbert spaces (which we do not discuss here). The sum of the term-by-term product forms what is called an inner product on a Hilbert space, and this gem and its generalizations guarantee its existence and describe some of its properties.

Since the two series on the left-hand side are convergent series of positive terms, the lefthand side is bounded above by the sum of their sums, independently of k . Thus the partial sums of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |b_n|$$

are bounded above. Since this is a series of positive terms with bounded partial sums, it must converge. Thus $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges absolutely, as desired.

Gem 3 The theory of infinite sequences and the theory of infinite series are logically equivalent in the sense that the behavior of any sequence is controlled by the behavior of an associated series, and vice versa.

Proof. In defining the convergence of infinite series we established a correspondence from infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ to infinite sequences of partial sums $\{S_n\}$. We make the observation that, since $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$ for $n > 1$, we have $a_n = S_n - S_{n-1}$ for $n > 1$ and also $a_1 = S_1$. That is, the terms $\{a_n\}$ are uniquely determined by the partial sums $\{S_n\}$. In other words, the correspondence from infinite series to infinite sequences is in fact a bijection.

In this development of infinite series, we have followed the standard route of defining infinite sequences and defining the behavior of infinite series in terms of the associated sequence of partial sums. Instead we could have defined the convergence of infinite series as our primitive concept. Then the convergence and divergence of infinite sequences could be defined in terms of the associated series. The next result makes this a bit more explicit.

Gem 4 Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers, and define $\{b_n\}$ by $b_n = a_{n+1} - a_n$. Then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges if and only if $\{a_n\}$ converges.

Proof. We essentially follow the definitions. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

converges if and only if $\sum_{n=1}^k (a_{n+1} - a_n) = (a_{k+1} - a_1)$ converges if and only if $\{a_{k+1}\}$ converges if and only if $\{a_n\}$ converges.

Gem 5 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ are convergent series of positive terms, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

converges also.

Proof. Since the terms are all positive we have

$$a_i^2 + b_i^2 < a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2 = (a_i + b_i)^2$$

we have, by the Comparison Test,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

The two series on the right side converge by hypothesis, so that the series on the left side converges also, as desired.

Gem 6 If $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutely.

Proof. This converse to Gem 5 is straightforward using the Comparison Test. We simply notice

$$0 \leq |a_n|, |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

and apply the Comparison Test.

Definition 4.1 Let I be any set, and let $\{a_i\}_{i \in I}$ be a sequence of real numbers indexed by I . Then we call the expression

$$\sum_{i \in I} a_i$$

an unordered series.² We say that the series converges to a real number S if and only if for each $\epsilon > 0$ there exists a finite set $J_0 \subset I$ with the property that, for every finite set J satisfying $J_0 \subset J \subset I$, we have

$$\left| \sum_{i \in J} a_i - S \right| < \epsilon$$

In this case we say S is the sum of the series. If the series does not converge to any number, it is said to diverge. If for every $N > 0$, there exists a finite set $J_0 \subset I$ with the property that, for every finite set J satisfying $J_0 \subset J \subset I$, we have

$$\sum_{i \in J} a_i > N$$

we say that the series diverges properly or diverges to ∞ .

Gem 7 Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers. Then $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ converges as an unordered series if and only if $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges absolutely, and furthermore the sums are the same. Here $\mathbf{N}$ means the set of natural numbers $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Proof. First suppose that $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges absolutely to a sum S . Let $\epsilon > 0$ be given. Since $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converges, we can find a number N such that

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \epsilon$$

Let $J_0 = \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Then if J is a finite set containing J_0 , we have

$$\left| S - \sum_{n \in J} a_n \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n \in J} a_n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - \sum_{n \in J \setminus J_0} a_n \right|.$$

The expression inside the absolute value bars on the right side is essentially a tail of our series, with a finite number of terms missing. Thus, we can certainly say,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n - \sum_{n \in J \setminus J_0} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n \in J \setminus J_0} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \epsilon,$$

as desired. (The differences of summations have the effect of removing certain terms from the infinite series.)

On the other hand, suppose that $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverges. Suppose for the sake of contradiction that $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ converges to a number S , and let J_0 be a finite set such that for every finite set J satisfying $J_0 \subset J \subset I$, we have

⁰² This notion of unordered series convergence is important in more complicated topological spaces where the ordinary notion of sequence is inadequate. The notion of net is closely related.

$$\left| \sum_{i \in J} a_i - S \right| < 1.$$

Now, since there are only finitely many terms in J_0 , $\sum |a_n|$ diverges even if we exclude the terms with indices in J_0 . Then we can find a finite collection of terms, indexed by a set K , disjoint from J_0 , whose sum is arbitrarily large in absolute value. Then K is a set such that

$$\left| \sum_{n \in K} a_n \right| > 2.$$

This is a contradiction, because,

$$2 < \left| \sum_{n \in K} a_n \right| = \left| \sum_{n \in J_0 \cup K} a_n - \sum_{n \in J_0} a_n \right| \leq \left| \sum_{i \in J_0 \cup K} a_i - S \right| + \left| \sum_{i \in J_0} a_i - S \right| < 1 + 1.$$

Gem 8 Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers, and suppose $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ diverges properly. Then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverges properly.

Proof. We appeal to the definitions. Let $N > 0$ be given. Since $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ diverges properly, there is a finite set $J_0 \subset \mathbf{N}$ with the property that, for every finite set J satisfying $J_0 \subset J \subset \mathbf{N}$, we have

$$\sum_{i \in J} a_i > N.$$

Then, if we choose M larger than the largest element of J_0 , then in particular this guarantees

$$\sum_{n=1}^M a_n > N.$$

By definition, this guarantees that $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$.

Gem 9 The converse to Gem 8 is false. That is, there are properly divergent series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ for which $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ does not diverge properly.

Proof. Consider the case $a_n = 1$ for n odd, $a_n = -1/2$ for n even.

Gem 10 Let I be an uncountable set, and let $\{a_i\}_{i \in I}$ be a sequence indexed by I , and suppose that $\sum_{i \in I} a_i$ converges. Then $a_i = 0$ for all but at most countably many i .

Proof. Suppose that $\sum_{i \in I} a_i$ converges, and choose some $\epsilon > 0$. Then, by definition we can find a J_0 such that for every finite set J satisfying $J_0 \subset J \subset I$, we have

$$\left| \sum_{i \in J} a_i - S \right| < \epsilon/2.$$

If in particular, $J = J_0 \cup \{i_0\}$ for some $i_0 \notin J_0$ we have

$$\epsilon > \left| \sum_{i \in J} a_i - S \right| + \left| \sum_{i \in J_0} a_i - S \right| \geq \left| \sum_{i \in J} a_i - \sum_{i \in J_0} a_i \right| = |a_{i_0}|.$$

That is, $|a_i| < \epsilon$ for all $i \notin J_0$; in other words there can be only finitely many i such that $|a_i| > \epsilon$ (because all such i must be in J_0). In other words

$$I_\epsilon = \{i \in I \mid |a_i| > \epsilon\}$$

is a finite set. But now we notice

$$\{i \in I \mid a_i \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{1/n}$$

and so $a_i = 0$ for all but a countable union of finite sets, which is hence countable.

Gem 11 Let $\{S_i\}_{i \in I}$ be a collection of pairwise disjoint sets, and let $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. Let $\{a_s\}_{s \in S}$ be a sequence of positive terms indexed by S . Then

$$\sum_{i \in I} \sum_{s \in S_i} a_s = \sum_{s \in S} a_s,$$

where we include the possibility that both sides are infinite.

Proof. Just observe that both sides of the equality are equal to

$$\sup_{J \subset S} \sum_{s \in J} a_s,$$

where the supremum is taken over all finite subsets J of S .

Gem 12 Let $\{S_i\}_{i \in I}$ be a collection of pairwise disjoint sets, and let $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. Suppose that $\sum_{s \in S} a_s$ converges as an unordered series. Then for each i , $\sum_{s \in S_i} a_s$ converges as well, and furthermore

$$\sum_{i \in I} \sum_{s \in S_i} a_s = \sum_{s \in S} a_s.$$

Proof. Based on Gem 10, we can assume that S is countable, so without loss of generality suppose that $S = \mathbf{N}$. By Gem 7, we know $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, so the sum will still be bounded if we restrict the summation to any of the S_i or any finite collection of S_i . Hence $\sum_{n=0; n \in S_i}^{\infty} |a_n| < \infty$, so $\sum_{s \in S_i} a_s$ converges by applying Gem 7 in the opposite direction, and so also $\sum_{i \in I} \sum_{s \in S_i} a_s$ for the same reason.

To see that the sums are equal, we appeal to a trick used in Chapter 1, namely writing $a_s = (a_s + |a_s|) - |a_s|$ as a difference of positive terms. Then our result follows by applying Gem 11 twice, obtaining

$$\sum_{i \in I} \sum_{s \in S_i} (a_s + |a_s|) = \sum_{s \in S} (a_s + |a_s|)$$

and

$$\sum_{i \in I} \sum_{s \in S_i} |a_s| = \sum_{s \in S} |a_s|.$$

Subtracting gives the desired result.

We remark that these last two results are very powerful, and are largely the reason why unordered series are worth considering. The reordering, regrouping, and rearranging of terms that is covered by this gem is a dramatic generalization of our result that absolutely convergent series can be rearranged without affecting their sum.

Gem 13 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a convergent series or a properly divergent series. Then every grouping of this series converges to the same sum (or is also properly divergent).

Proof. Recall that, to investigate an infinite series, we investigate its sequence of partial sums. The sequence of partial sums of a grouping of a series is just some subsequence of the partial sums of the original series, and every subsequence of a convergent or properly divergent sequence has the same behavior.

Gem 14 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a series, and consider some grouping of this series that is convergent or properly divergent. Suppose that the sum of the absolute values of the terms in the groups tends to 0. Then the original series converges to the same sum (or is also properly divergent).

Proof. Suppose that the terms of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ are grouped as follows,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{i-1}+1}^{n_i} a_n \right)$$

for some sequence of integers $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$. Then by hypothesis,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=n_{i-1}+1}^{n_i} |a_n| \right) = 0$$

and

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{i-1}+1}^{n_i} a_n \right)$$

exists. Now, for any N , we associate the integer I so that $n_I < N \leq n_{I+1}$. Then we can estimate partial sums of the original series as follows:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{i=1}^I \left(\sum_{n=n_{i-1}+1}^{n_i} a_n \right) \right| &= \left| \sum_{n=n_I+1}^N a_n \right| \\ &\leq \sum_{n=n_I+1}^N |a_n| \\ &\leq \sum_{n=n_I+1}^{n_{I+1}} |a_n| \end{aligned}$$

As N goes to infinity, so does I , so we can pass to the limit. The right-hand side is going to 0, so we conclude.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{i-1}+1}^{n_i} a_n \right)$$

Gem 15 Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be a series, and consider some grouping of this series that is convergent or properly divergent. Suppose that the terms a_n approach 0, and suppose that the number of terms in each group is bounded. Then the original series converges to the same sum (or is also properly divergent).

Proof. This is a corollary of Gem 14. In our grouping, say we never have more than N terms in a group, and choose any $\epsilon > 0$. Then eventually the terms are less than ϵ/N in absolute value, and from that point on the sum of absolute values for any group is less than $N\epsilon/N = \epsilon$. Apply the previous gem.

Gem 16 Let $\{a_n\}$ be a sequence of numbers greater than 1. Then the infinite series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$$

converges if and only if the infinite product

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

converges.

Proof. It is not hard to see that this is equivalent to our Theorem 3.20.

Gem 17 Let $\{a_n\}$ be a monotone decreasing sequence of positive real numbers and suppose that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges. Then we have $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

Proof. This result is a strengthening of Theorem 1.44, which would guarantee merely that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Since the series is convergent, it must be Cauchy. That is, for each $\epsilon > 0$, there exists an N such that for all $n > m > N$, $\sum_{k=m}^n a_k < \epsilon$. Then for each $n > N$, we have

$$\epsilon > \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n} = na_{2n}$$

so that $2na_{2n} < 2\epsilon$. Also $(2n+1)a_{2n+1} = 2na_{2n+1} + a_{2n+1} \leq 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon$, where the second term of the inequality follows from considering the term a_{2n+1} as the sum $\sum_{k=2n+1}^{2n+1} a_k$. Since we can take $\epsilon \rightarrow 0$, we see that for both even and odd n we can make na_n arbitrarily small, as desired.

Gem 18 The assumption of monotonicity is essential in Gem 17. That is, there are convergent series of positive numbers such that $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0$.

Proof. Let S be the set $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ of square numbers. We take the example

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{when } n \in S \\ \frac{1}{n^2} & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Clearly

$$\sum_{n \in S} a_n = \sum_{n \in S} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converges. On the other hand,

$$\sum_{n \notin S} a_n = \sum_{n \notin S} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

is a convergent p -series. Combining these we see that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cannot diverge to infinity. Since it has only positive terms it must converge. On the other hand, we notice that $na_n = 1$ for infinitely many n , so that $na_n \not\rightarrow 0$.

Gem 19 The plausible converse to Gem 17 is false. That is, there exists series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ of positive terms monotonically decreasing to 0 that diverge even though $na_n \rightarrow 0$.

Proof. We simply take $a_n = 1/(n \log n)$. This is defined only for $n > 1$, but we are as always concerned only with the end behavior. We can define $a_1 = 1$ if we please. By the Abel-Dini Scale, this is a divergent series. However,

$$na_n = \frac{1}{\log n}$$

and this clearly decreases monotonically to 0.

Gem 20 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ be absolutely convergent series. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges absolutely.

Proof. By Theorem 1.44, the terms of both series approach 0. Then for sufficiently large n , $|a_n| < 1$. Without loss of generality we can assume that this holds for all n . Then $|a_n b_n| < |b_n|$. The result then follows from the absolute convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ by the Comparison Test.

Gem 21 (CMJ, 16:2, p. 79) The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right)^p$$

converges if and only if $p > 2$.

Proof. We first point out that the Ratio Test would be the natural first choice because each term is defined by adding a new factor to the previous term, so that the ratio between consecutive terms is particularly easily to compute. However, for any p , the Ratio Test would give a limiting ratio of 1 and would therefore be inconclusive. Instead we do something a bit more clever. We introduce a second, similar series that will help us to estimate a_n . We let

$$a_n = \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right)^p$$

and

$$b_n = \left(\frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \right)^p$$

We make some observations. First, in the product $a_n b_n$, most factors appear in numerators and denominators, so that we are left with $a_n b_n = (2n)^{-p}$. Also, we have

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \cdots < \frac{2n-3}{2n-2} < \frac{2n-2}{2n-1}, \quad \text{and} \quad \frac{2n-1}{2n} < 1.$$

We combine these inequalities under multiplication to obtain

$$\left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) < \left(\frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \right)$$

and

$$\left(\frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \right) < \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right),$$

so that, on raising to the p power, $b_n/2 < a_n < b_n$. We now multiply by a_n to obtain

$$\frac{1}{2}(2n)^{-p} = \frac{a_n b_n}{2} < a_n^2 < a_n b_n = (2n)^{-p}$$

or more simply

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(2n)^{-p/2} < a_n < (2n)^{-p/2}.$$

Observe that the terms on the left and right side of this inequality are almost identical, differing only by a constant factor. We consider the three quantities being compared as the terms in infinite series, we then know that the left and right series would have the same behavior. By the Comparison Test then, the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ would have the same behavior also. In fact the outside series are both, up to a constant factor, p -series with exponent $p/2$. By Theorem 1.59, they converge if and only if $p/2 > 1 \Leftrightarrow p > 2$. We conclude that the given series converges under the same conditions.

Gem 22 (CMJ, 18:5, p. 410) For any $a > 0, b > 1$, the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^a}{n^b}$$

converges.

Proof. Intuitively, this result follows because the logarithm function grows much slower than any polynomial, so that even for a very large, the numerator is dominated by n^ϵ for any positive ϵ , so that we should not expect the presence of the numerator to change substantially the conclusion of Theorem 1.59.

To make this explicit, we recall the familiar inequality $\log x \leq x - 1$, which holds for all positive x . Taking $x = t^p$, where $t, p > 0$ gives the inequality

$$p \log t = \log(t^p) \leq t^p - 1 < t^p,$$

which we rewrite as $\log t < t^p/p$.

We then bound the terms of our series as follows,

$$\frac{(\log n)^a}{n^b} < \frac{(n^p/p)^a}{n^b} = \frac{1}{p^a n^{b-pa}}$$

We desire to show that the series with these terms converges. The p^a is just a constant multiplier and can be ignored. We see that we have effectively compared our series to a p -series with exponent $b - pa$. However, observe that in invoking the inequality we assumed only that $p > 0$. Then, since $b > 1$, we can choose p sufficiently small that $b - pa > 1$. Implicitly doing so, we can invoke the Comparison Test and we are done.

12.4.2 4.1 Gems 2

The following two gems are particularly famous series. As p -series, it is easy to show that they converge, for example by the Integral Test, but to evaluate their sum is quite another matter. Furthermore, notice the unexpected appearance of π in evaluating these sums. Unfortunately, proving in detail these evaluations is a bit beyond the spirit of this chapter, but there are a great variety of proofs in the literature, some quite short and some quite clever. We provide the following list.

In the AMM: Vol. 60, pp. 19-25; Vol. 80, pp. 424-425; Vol. 80, pp. 425-431; Vol. 94, pp. 662-663; Vol. 109, pp. 196-200; Vol. 110, pp. 540-541; Vol. 111, pp. 430-431. In the MM: Vol. 44, pp. 273-276; Vol. 45, pp. 148-149; Vol. 47, pp. 197-202; Vol. 72, pp. 317-319; Vol. 73, pp. 154-155.

Gem 23

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Gem 24

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Gem 25 (CMJ, 17:1, p. 98) Let S be the set of square numbers $\{1, 4, 9, \dots\}$. Then

$$\sum_{n \notin S} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2(15 - \pi^2)}{90}$$

Proof. Since all the series involved are convergent positive series, it is justified to divide the series as follows.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \notin S} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in S} \frac{1}{n^2}$$

Rearranging,

$$\begin{aligned} \sum_{n \notin S} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in S} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} \\ &= \frac{15\pi^2 - \pi^4}{90} \\ &= \frac{\pi^2(15 - \pi^2)}{90} \end{aligned}$$

as claimed.

Gem 26 (CMJ, 17:1, pp. 98-99) Let T be the set of square-free positive integers—that is, the set of positive integers not divisible by any square larger than 1. Then

$$\sum_{n \in T} \frac{1}{n^2} = \frac{15}{\pi^2}$$

Proof. We observe that every positive integer n has a unique factorization $n = m^2k$, where k is square-free. It follows that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k \in T} \frac{1}{m^4 k^2}$$

Since the series is known to be a convergent positive series, we can factor this in the natural way to get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sum_{k \in T} \frac{1}{k^2}$$

The sums over n and m are familiar and we have

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^4}{90} \sum_{k \in T} \frac{1}{k^2}$$

The claim follows.

Gem 27

$$1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{9}$$

where the series sums the terms $1/n^2$ over integers n that are not divisible by 2 or 3.

Proof. We will use the Principle of Inclusion-Exclusion. On the intuitive level, our series is formed by beginning with the series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ and removing the even terms and the multiples of 3. Multiples of 6 have now been eliminated twice, so we add them back once. More explicitly, let U be the set of nonmultiples of 2 and 3. Then we have

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in U; n \leq 6k} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{6k} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{3k} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{(3n)^2} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{(6n)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{6k} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{3k} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{36} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Since the series in question is positive, the partial sums form an increasing sequence. Our analysis technically applies only to the partial sums of our series that stop at or before a multiple of 6, but it is clear that this subcollection of the partial sums will have the same limit behavior as the whole collection. We can therefore allow $k \rightarrow \infty$ and, accordingly,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in U} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{36} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{36}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{\pi^2}{9}
\end{aligned}$$

where we have invoked Gem 23. Notice that this type of argument could easily be applied to a problem in which multiples of other combinations of numbers were removed.

Gem 28 Suppose that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges while $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverges. Then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges conditionally.

Proof. Assume for the sake of contradiction that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely, i.e., that $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converges. By Theorem 1.44, we must have $a_n \rightarrow 0$, so that eventually we have $|a_n| < 1$ and so $a_n^2 < |a_n|$. By the Comparison Test, we then have $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ as a convergent series, a contradiction.

Gem 29

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = \int_0^1 x^x dx$$

Proof. We require the power series for e^x , as well as the fact that we can integrate power series term by term.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x dx &= \int_0^1 e^{x \log x} dx \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \log x)^n}{n!} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x \log x)^n}{n!} dx
\end{aligned}$$

Writing $S_{j,k}(x) = x^j (\log x)^k$, we proceed to compute $\int_0^1 S_{j,k}(x) dx$. We claim that

$$\int_0^1 S_{j,k}(x) dx = \frac{(-1)^k k!}{(j+1)^{k+1}}$$

which we prove by induction on k . The case $k = 0$ is clear by the power rule. For the inductive step, we have, by integration by parts,

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_{j,k}(x)dx &= \left. \frac{1}{j+1} S_{j+1,k} \right]_0^1 - \frac{k}{j+1} \int_0^1 S_{j,k-1}(x)dx \\ &= \frac{-k}{j+1} \int_0^1 S_{j,k-1}(x)dx \\ &= \frac{-k}{j+1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(j+1)^k} \\ &= \frac{(-1)^k k!}{(j+1)^{k+1}}\end{aligned}$$

We are using here the easily proven fact that $\lim_{x \rightarrow 0^+} S_{j,k}(x) = 0$ for $j > 0$ and all k . We now finish the calculations as follows:

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 S_{n,n}(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

Gem 30 (AMM, 59:2, pp. 108-109)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^i}$$

Proof. We follow the line of Gem 29 and use freely the results proven there.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^x} &= \int_0^1 e^{-x \log x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \log x)^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x \log x)^n}{n!} dx\end{aligned}$$

We now finish the calculations as follows:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 S_{n,n}(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Gem 31

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$$

diverges.

Proof. We first note that $2^n > n$. The cases $n = 0, 1$ are easy to check. For $n \geq 2$, we write n as the product of n factors

$$n = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1}$$

and notice that each of the factors is less than 2 (except $2/1$, which equals 2), and we are done. (A more clever proof is to recognize this as a special case of the very well-known set theory result that the power set of a set is always strictly larger than the original set.)

Now we can bound our series from below using the Comparison Test.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n^{1/n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

This last series, though, is just half the divergent harmonic series. The given series is even larger, so it too must diverge.

Gem 32 A series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}}$$

with $a_n > 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ could converge or diverge.

Proof. This result is included to counter a common notion among calculus students. It is natural (but wrong) to view the series in the statement of the result as a p -series with exponent greater than 1. However, the statement and proof of that theorem relied on p being a constant. Combining this test with the Comparison Test, we conclude that a series of the form described above would certainly converge if the a_n had a lower bound larger than 0. However, nothing in the statement of the p -series test shows that the series described in the result should diverge. Still we might want to improve our proof technique to include this case. This result shows that no such result is possible because either behavior is possible. A divergent example was given in Gem 31. A convergent result comes by taking $a_n = 2 \log(\log n) / \log n$ so that $n^{a_n} = (\log n)^2$, where we have used basic properties of the logarithm. Of course we must restrict our attention now to n sufficiently large that the iterated logarithm is defined. We leave to the reader to show that these numbers are positive and tend to 0. However,

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}} &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^{a_n})} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \end{aligned}$$

which converges by the Abel-Dini Scale.

Gem 33

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

Proof. We recall the trigonometric identity

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

or equivalently

$$\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \left(\frac{x - y}{1 + xy} \right)$$

whenever $-\pi < \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y < \pi$. In particular

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctan} \frac{1}{2n-1} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{2n+1} &= \operatorname{Arctan} \left(\frac{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}}{1 + \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2n+1}} \right) \\
&= \operatorname{Arctan} \left(\frac{(2n+1) - (2n-1)}{(2n+1)(2n-1) + 1} \right) \\
&= \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{4n^2} \right) \\
&= \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{2n^2} \right)
\end{aligned}$$

We therefore write our series in the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{2n-1} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{2n+1} \right)$$

and notice that it telescopes. That is, writing S_n for the n th partial sum, we have

$$S_n = \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} \frac{1}{2n+1}$$

Since $\tan 0 = 0$, the right term vanishes in the limit, and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{2n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Gem 34 (CMJ, 21:3, pp. 253-254)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{n^2} \right) = \frac{3\pi}{4}$$

Proof. As in Gem 33, we have

$$\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \left(\frac{x-y}{1+xy} \right)$$

That is,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctan} \frac{1}{n-1} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n+1} &= \operatorname{Arctan} \left(\frac{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n-1} \frac{1}{n+1}} \right) \\
&= \operatorname{Arctan} \left(\frac{(n+1) - (n-1)}{(n+1)(n-1) + 1} \right) \\
&= \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{n^2} \right)
\end{aligned}$$

We therefore write our series in the form

$$\operatorname{Arctan} 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{n-1} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n+1} \right)$$

and notice that it telescopes. That is, writing S_n for the n th partial sum, we have

$$S_n = \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n+1}$$

Since $\tan 0 = 0$, the right terms vanish in the limit, and

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
&= \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} \\
&= \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

However, the inverse tangents of 2 and 1/2 are complementary angles! So we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{n^2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Gem 35

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} = 2$$

Proof. We just notice that

$$\frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} = \frac{(k+1)(k+2) - 1}{(k+2)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+2)!}$$

so that our series telescopes,

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

Passing to the limit,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2$$

as desired.

Gem 36 (MM, 32:4, p. 229)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6^{(2-3n-n^2)/2}$$

converges to an irrational number.

Proof. Convergence is evident from comparison with the convergent geometric series $\sum_{n=0}^{\infty} 6^{-n}$. To investigate irrationality, we operate in base 6. Then each term of the series contributes a 1 to the heximal expansion of the sum. We notice that the exponents in the terms are $-1, -4, -8, -13, \dots$. The difference between consecutive terms is constantly changing by -1. That is, the sum will be 0.1001000100001... where each successive block of zeros has one more zero. Suppose to the contrary that the sum is rational, so that this expansion is eventually repeating. However, if the eventual block has d digits, the block will eventually be entirely contained in a block of z zeros, where $z > 2d - 1$. Thus the digits of the expansion must be eventually constantly 0. But this is clearly false. Thus this series has an irrational sum. (Note the similarity to Liouville's irrational number, which is 0.101001000100001000001..., in base 10.)

Definition 4.2 A power series centered at a is a series of functions of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

for some constants $\{c_n\}$. For the purposes of this definition, $(x-a)^0$ is always taken to be 1, even in the case $x=a$. For our purposes, we will consider only the case when $a=0$.

We wish to use some basic facts about power series, not because this book intends to deal directly with series of functions, but because we can use power series as a vehicle to learn about series of constants. Because it is series of real constants that we wish to focus on here, we will not provide proofs for the following propositions or for Gems 37 through 41. The interested reader can consult any mainstream beginning calculus or advanced calculus textbook. We particularly recommend the excellent books by James Stewart and Witold Kosmala (included in our references).

Proposition 4.3 Let

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

be a power series. Then exactly one of the following occurs.

1. The series converges only for $x=0$.
2. There is a positive number R such that the series converges for $|x| < R$ and diverges for $|x| > R$.
3. The series converges for all x .

Proposition 4.4 A power series converges absolutely wherever it converges, except possibly at the endpoints of the interval of convergence.

Definition 4.5 If a power series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ is convergent for $|x| < r, r > 0$, and moreover

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

for some function f and all $|x| < r$, we say that the power series represents the function f .

Proposition 4.6 A function cannot be represented by distinct power series with the same center. That is, if

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

on some interval $|x| < r$, then $a_n = b_n$ for all n .

Proposition 4.7 If a function f is represented by a power series centered at 0 that converges for $|x| < r$, then f has continuous derivatives of all orders at 0, and

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$$

where $f^{(n)}$ denotes the n th derivative.

Proposition 4.8 Power series can be added and subtracted term by term. Power series can be multiplied using the Cauchy formula,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

Proposition 4.9 Power series can be differentiated term by term. If

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

for $|x| < R$, then

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{for } |x| < R$$

Proposition 4.10 Power series can be integrated term by term. If

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

for $|x| < R$, then

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{for } |x| < R$$

Gem 37

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{for all } x$$

Gem 38

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \text{for all } x$$

Gem 39

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad \text{for all } x$$

Gem 40

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \log(1+x) \quad \text{for all } -1 < x \leq 1$$

Gem 41

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{for all } -1 < x < 1$$

Gem 42 For any q satisfying $|q| > 1$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n} = \frac{q}{(q-1)^2}$$

Proof. Beginning with the result in Gem 41, we differentiate both sides to obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Multiplying by x , we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

This relation holds for all $|x| < 1$. In particular we can take $x = 1/q$, and obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n} = \frac{1/q}{(1-1/q)^2} = \frac{q}{(q-1)^2}$$

Gem 43 Let p be any polynomial function, and let c be any constant satisfying $|c| < 1$. Then the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)c^n$$

converges. Moreover, there is an algorithm for computing the sum in closed form. Furthermore, if p has rational coefficients and c is rational, the sum will also be rational.

Proof. Consider the polynomials

$$p_0(n) = 1, \quad p_k(n) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1).$$

We claim that any polynomial

$$p(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

can be expressed as a sum

$$p(n) = b_m p_m(n) + b_{m-1} p_{m-1}(n) + \cdots + b_1 p_1(n) + b_0 p_0(n),$$

and furthermore if the coefficients a_i are rational, so also are the b_i .

This is easily proven by induction on m . The base case $m = 0$ is trivial. Just take $b_0 = a_0$. Assume that the proposition holds for all $m < N$. Consider any polynomial

$$p(n) = a_N n^N + a_{N-1} n^{N-1} + \cdots + a_1 n + a_0.$$

It is clear that this polynomial has leading term $a_N n^N$, it is also clear that, if we expand $a_N p_N(n)$, its leading term will be the same. Further, the coefficients of $a_N p_N(n)$ are rational if a_N is. Then we can write

$$p(n) = a_N p_N(n) + q(n)$$

for some polynomial $q(n)$ of degree at most $N-1$, whose coefficients are rational if the a_i are. By induction, $q(n)$ can be expressed as a sum of the $p_m(n)$ in the desired way, and we are done with this claim. Notice that this proof gives the algorithm for computing the b_i . Take $b_m = a_m$, expand $b_m p_m(n)$, subtract to get a new polynomial; let b_{m-1} be the new leading coefficient, and so on.

Then every series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)c^n$$

will be a linear combination of series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_m(n)c^n$$

and it will suffice to prove that all of these sums converge, and that the sum is rational if c is.

Beginning with Gem 41, differentiate m times to pass from

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

to

$$\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)x^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} p_m(n)x^{n-m}.$$

Multiply by x^m to obtain

$$\frac{m!x^m}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} p_m(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)x^n$$

This holds for all x with $|x| < 1$, so we can in particular take $x = c$, to obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_m(n)c^n = \frac{m!c^m}{(1-c)^{m+1}}$$

Since we know all the values when $p = p_m$, and since any polynomial can be decomposed into a sum of p_i by a simple algorithm, the result is established.

12.4.3 4.1 Gems 3

Gem 44

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n!} = 6e^2$$

Proof. By Gem 37, we have

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Multiply by x to get

$$xe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n!}$$

Differentiate term-by-term, and then multiply by x for the following.

$$xe^x + e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{n!}$$

$$x^2 e^x + xe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}$$

The above equality holds for all real x , so we can specialize to $x = 2$ to conclude that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n!} = 6e^2$$

Gem 45 Let p be any polynomial function, and let c be any constant satisfying $|c| < 1$. Then the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) \frac{c^n}{n!}$$

converges. Moreover, there is an algorithm for computing the sum in closed form. Furthermore, if p has rational coefficients and c is rational, the sum will be a rational multiple of e^c .

Proof. Recall the polynomials $p_0(n) = 1, p_k(n) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$ from the proof of Gem 43. Using the work done in that proof, every series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) \frac{c^n}{n!}$$

will be a linear combination of series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_m(n) \frac{c^n}{n!}$$

and it will suffice to prove that all of these sums converge, and that the sum is a rational multiple of e^c when c is rational.

Beginning with Gem 37, differentiate m times to pass from

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

to

$$e^x = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) \frac{x^{n-m}}{n!} = \sum_{n=m}^{\infty} p_m(n) \frac{x^{n-m}}{n!}.$$

Multiply by x^m to obtain

$$x^m e^x = \sum_{n=m}^{\infty} p_m(n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) \frac{x^n}{n!}.$$

This holds for all x , so we can in particular take $x = c$, to obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_m(n) \frac{c^n}{n!} = c^m e^c$$

Since we know all the values when $p = p_m$, and since any polynomial can be decomposed into a sum of p_i by a simple algorithm, we have done all we claimed.

Gem 46 Consider the series

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$$

where we add reciprocals of primes. Then no partial sum can be an integer.

Proof. In fact we prove the stronger result that no finite collection of terms from this series can have an integer sum. Let $p_1, p_2, \dots, p_n$ be a collection of distinct primes, and let $N = p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$, where we say $N = 1$ if $n = 1$. Assume for the sake of contradiction that

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \cdots + \frac{1}{p_n}$$

is an integer. Then it will remain an integer after multiplying by the integer N to get

$$\frac{N}{p_1} + \frac{N}{p_2} + \frac{N}{p_3} + \cdots + \frac{N}{p_n}$$

However, in this expression all the terms are integers except the last one, which cannot be. Then the sum is not an integer.

Gem 47 (CMJ, 28:4, pp. 296-297) Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a convergent series of positive terms. Then there exists another convergent series $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ that decreases more slowly in the sense that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{a_n} = \infty$$

Proof. On an intuitive level, the Comparison Test guarantees that series of positive terms will converge if their terms go to 0 sufficiently quickly. That is, if two series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ satisfy $a_n/b_n \rightarrow \infty$, then the terms b_n go to 0 faster, and the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implies the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. We might desire a "slowest" convergent series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, with the property that any convergent positive series would then be shown to converge by the Ratio Comparison Test. This result shows in effect that this is unrealizable, because any convergent series is dominated by another series that also converges. Here we use "dominated" in a strong sense, namely that the limit of the ratio is infinite.

For the construction, we write t_n for the n th "tail" of the series, i.e., $t_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$, which all exist because the series converges. Then we notice that the sequence $\{t_n\}$ is a sequence of positive numbers decreasing to 0. Now we define $A_n = a_n/\sqrt{t_n}$. We

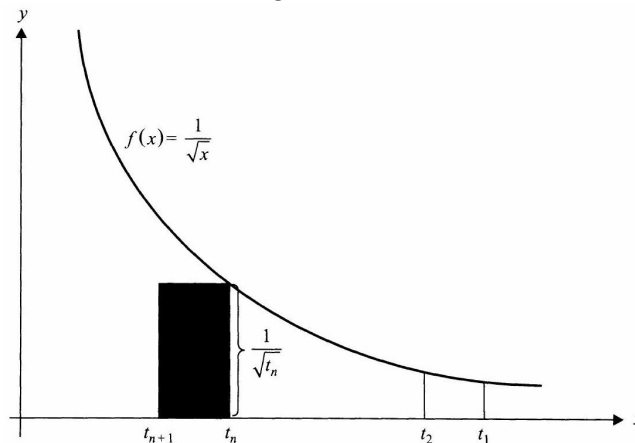


FIGURE 4.1

Viewing the Terms A_n as Rectangles in a Riemann Sum claim that these A_n satisfy the claim. First

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t_n}} = \infty$$

so that we need only show that $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ converges. The key is to interpret the sum as a Riemann sum. Since

$$A_n = \frac{a_n}{\sqrt{t_n}} = \frac{t_n - t_{n+1}}{\sqrt{t_n}}$$

each term in the series can be viewed as the area of a rectangle in Figure 4.1. As shown in the figure, each partial sum of $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ is bounded above by the area

$$\int_0^{t_1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{t_1}$$

The series is therefore positive with bounded partial sums, hence convergent.

Gem 48 (CMJ, 28:4, pp. 296-297) Let $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ be a divergent series of positive terms. Then there exists another divergent series $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ that is smaller in the sense that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{d_n} = \infty$$

Proof. This is of course the dual result to Gem 47. Here we show that there is no smallest divergent series. We use a dual construction to the one used there. Let s_n be the n th partial sum of $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$, and define $d_n = D_n/s_{n-1}$. We claim that this definition of d_n satisfies our claim. (This is not defined for $n = 1$. Here we will not concern ourselves with that. The reader who insists on remedying this may define d_1 any way he or she pleases.) First

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \infty$$

so that we need only show that $\sum_{n=2}^{\infty} d_n$ diverges. The key is to interpret the sum as a Riemann sum. Since

$$d_n = \frac{D_n}{s_{n-1}} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_{n-1}}$$

each term in the series can be viewed as the area of a rectangle in Figure 4.2. As shown in the figure, each partial sum of $\sum_{n=2}^{\infty} d_n$ is bounded below by the area

$$\int_{s_1}^{s_n} \frac{1}{x} dx = \log s_n - \log s_1$$

As $n \rightarrow \infty$, we see that this lower bound also increases without bound, so that this series diverges.

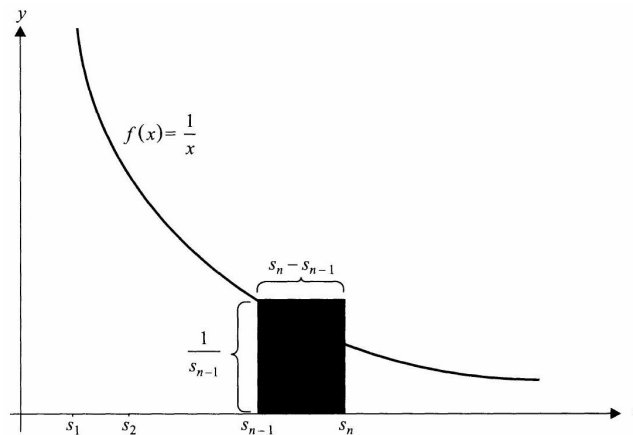


FIGURE 4.2

Viewing the Terms d_n as Rectangles in a Riemann Sum

Gem 49 Define a sequence by $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 1.$$

Proof. We notice that $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$, so that

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n(a_n - 1)} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$$

or equivalently

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

Noting that this telescopes, we have

$$S_n = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

It now suffices to show that the sequence $\{a_n\}$ increases without bound. Since it is a sequence of integers, it will suffice to show that it is increasing. However, $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 > 0$, and we are done.

Gem 50

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

converges to an irrational number.

Proof. First, this series clearly converges by comparison with the convergent series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Now suppose for the sake of contradiction that this series converges to a rational number p/q . Then

$$\begin{aligned} q[(q-1)!]^2 p &= (p/q)(q!)^2 \\ &= (q!)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q!}{n!}\right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^q \left(\frac{q!}{n!}\right)^2 + \sum_{n=q+1}^{\infty} \left(\frac{q!}{n!}\right)^2 \end{aligned}$$

Since the left-hand side and every term in the left summation are integers, we must also have the right summation be an integer. But

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_{n=q+1}^{\infty} \left(\frac{q!}{n!} \right)^2 \\
&= \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^2(q+2)^2} + \frac{1}{(q+1)^2(q+2)^2(q+3)^2} + \cdots \\
&< \frac{1}{(q+1)^2} \left(1 + \frac{1}{(q+2)^2} + \frac{1}{(q+2)^4} + \cdots \right) \\
&= \frac{1}{(q+1)^2} \left(\frac{1}{1 - 1/(q+2)^2} \right) \\
&= \frac{(q+2)^2}{(q+1)^2 [(q+2)^2 - 1]}
\end{aligned}$$

Since the denominator is quartic and the numerator is quadratic, this last fraction is eventually arbitrarily small; in particular, for q sufficiently large, it is too small to be a positive integer. However, by writing our rational number p/q in an unreduced form if necessary, q can be chosen arbitrarily large. Thus for that q ,

$$0 < \sum_{n=q+1}^{\infty} \left(\frac{q!}{n!} \right)^2 < 1,$$

a contradiction.

Gem 51 (MM, 17:7 pp. 292-295)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} = 18 - 24 \log 2$$

Proof. We first recall that

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

which can be proven in a straightforward way using mathematical induction. Thus we can write

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1} \right)
\end{aligned}$$

Writing S_n for the n th partial sum of the series, we can perform some manipulations on the partial sums as follows

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{6}{1} + \frac{6}{2} - \frac{24}{3} \right) + \left(\frac{6}{2} + \frac{6}{3} - \frac{24}{5} \right) + \left(\frac{6}{3} + \frac{6}{4} - \frac{24}{7} \right) \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1} \right) \\
&= 6 - \frac{24}{3} + \left(\frac{6}{2} + \frac{6}{2} \right) - \frac{24}{5} + \left(\frac{6}{3} + \frac{6}{3} \right) - \frac{24}{7} + \left(\frac{6}{4} + \frac{6}{4} \right) \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{6}{n} + \frac{6}{n} \right) - \frac{24}{2n+1} + \frac{6}{n+1} \\
&= 6 - 24 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots + \frac{1}{2n+1} \right) + \frac{6}{n+1}
\end{aligned}$$

We recognize the similarity between the expression in parentheses and the partial sums of the alternating harmonic series, which motivates us to write

$$S_n = 6 + \frac{24}{1} - \frac{24}{2} - 24 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{2n+1} \right) + \frac{6}{n+1}$$

Referencing Theorem 3.6, we can pass to the limit and write

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} = 18 - 24 \log 2$$

Gem 52

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n/2} = 4(1 - \log 2)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2 + n/2} &= \sum_{n=1}^k \frac{4}{(2n)(2n+1)} \\ &= 4 \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 4 \left(1 - \sum_{n=1}^{2k+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) \end{aligned}$$

We have thus reduced summing this series to summing the alternating harmonic series, which we have already effected by Theorem 3.6. Thus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n/2} = 4(1 - \log 2)$$

as desired.

Gem 53 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a convergent positive series, and define $t_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ to be the k th tail of the series. Suppose further that $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ converges. Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$$

Proof. Since the terms are positive, the tails form a monotone decreasing sequence (each tail includes one fewer positive term than the previous tail). Applying Gem 17, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n t_n = 0$$

We simply notice $0 < n a_n < n t_n$ and apply the Squeeze Principle.

(Note: An alternative proof of this result can be derived by combining Gem 54 and the Corollary 1.44.1.)

Gem 54 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a convergent positive series, and define $t_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ to be the k th tail of the series. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$$

where we include the possibility where both sides are infinite together.

Proof. We write

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k a_k$$

Now we notice that both of the above summations contain the same terms (a_k occurs in each summation for each combination $n \leq k$). Since all the terms are positive, the only possibilities are proper divergence or absolute convergence. In the former case, both summations will be infinite. In the latter case, the above rearrangements will not affect the sum.

Gem 55 (CMJ, 17:2, p. 188) Let H_n be the n th partial sum of the harmonic series, and let n_p be the smallest integer n satisfying $H_n \geq p$. Then

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = e$$

Proof. Intuitively this is plausible. By Theorem 3.3 we know that H_n grows like $\log n$, so that we would expect n_p , which is in a sense an "approximate inverse" to H_n , to grow like e^p . We justify this as follows. Since

$$H_{n_p} - \frac{1}{n_p} = H_{n_p-1} < p \leq H_{n_p}$$

we have $H_{n_p} = p - k_p$, where k_p is a nonnegative constant bounded above by $1/n_p$. In particular $k_p \rightarrow 0$. Recalling the notation of Theorem 3.3, we have

$$p = H_{n_p} + k_p = \log n_p + \frac{1}{n_p} + \gamma_{n_p} + k_p$$

from which it follows that

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (p - \log n_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n_p} + \gamma_{n_p} + k_p \right) = \gamma$$

Similarly we have also

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (p + 1 - \log n_{p+1}) = \gamma$$

Subtracting, we have

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [(p + 1 - \log n_{p+1}) - (p - \log n_p)] = 0$$

Rearranging,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 - \log \frac{n_{p+1}}{n_p} \right) = 0$$

which is equivalent to the proposed

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = e$$

Gem 56 Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a convergent series of positive terms. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

converges also.

Proof. By the familiar result that the arithmetic mean bounds above the geometric mean, we have

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2} (a_n + a_{n+1})$$

But $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and so also $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ converges. Thus $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})/2$ converges, so that the Comparison Test applies.

Gem 57 Suppose that $\{a_n\}$ is a monotone decreasing sequence of positive terms, and suppose that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

converges. Then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges also.

Proof. This is a weakened converse to Gem 56. We simply notice that $a_{n+1} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$ and apply the Comparison Test.

Gem 58 Suppose that $\{a_n\}$ is a sequence of positive terms, and suppose that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

converges. Then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ does not necessarily converge.

Proof. This result demonstrates that the potential converse to Gem 56 is actually false. Consider

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{1}{n^4} & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}.$$

Since the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

is positive, we can simply check that its partial sums are bounded. We have

$$\sum_{n=1}^k \sqrt{a_n a_{n+1}} < \sum_{n=1}^{2k} \sqrt{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2}$$

The right-hand side, however, is bounded because the summations are the partial sums of a convergent p -series. However, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges because its terms do not go to 0.

Gem 59 In Gems 56, 57, and 58, we can replace $\sqrt{a_n a_{n+1}}$ by the expression

$$\sqrt[p]{a_n a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+p-1}}$$

for each $p = 3, 4, \dots$. The analogues of these results continue to hold under these replacements.

Proof. The first two results hold with a virtually identical proof to that presented above. For the third, we proceed as above, using the following counterexample.

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is not a multiple of } p \\ \frac{1}{n^{2p}} & \text{if } n \text{ is a multiple of } p \end{cases}.$$

Gem 60

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sin 1$$

Proof. First, we recall a familiar result from trigonometry, the product-to-sum identity

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta - \alpha)].$$

Using this identity we can rewrite our series in a telescoping form.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{2^{n-1}} - \sin \frac{1}{2^n} \right)$$

Partial sums, then, have the form

$$\frac{1}{2} \left(\sin 1 - \sin \frac{1}{2^n} \right)$$

which tends to the claimed $(1/2) \sin 1$.

Gem 61

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} = \frac{1}{2}$$

Proof. Writing

$$a_n = \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

for the terms of our series, we can rewrite

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{(2n+1) - 1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2n+1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \right). \end{aligned}$$

Once again this series exhibits a telescoping behavior, so that our partial sums have the form

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \right)$$

As n goes to ∞ , this tends to a limit of $1/2$.

Gem 62 (CMJ, 15:5, pp. 448-450) For any positive integers n and p , we have

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)(m+2) \cdots (m+p)} = \frac{1}{pn(n+1)(n+2) \cdots (n+p-1)}$$

Proof. Once again, we manipulate the terms of the series into a telescoping form. If we write

$$a_m = \frac{1}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+p-1)}$$

we have

$$\begin{aligned} a_m - a_{m+1} &= \frac{1}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+p-1)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+p)} \\ &= \frac{m+p}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+p)} - \frac{m}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+p)} \\ &= \frac{p}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+p)} \end{aligned}$$

Using this, we can write

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+p)} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{p} (a_m - a_{m+1})$$

The partial sums, then, have the form

$$\sum_{m=n}^N \frac{1}{m(m+1)(m+2)\cdots(m+p)} = \frac{1}{p} (a_n - a_{N+1})$$

where we remember that in this case n is a constant. As $N \rightarrow \infty$, the second member on the right-hand side vanishes. Thus the sum of the series is

$$\frac{a_n}{p} = \frac{1}{pn(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}$$

Remark. We have used the phenomenon of telescoping to evaluate and diagnose a variety of series. In the next gem, we see that even in series that are merely similar to telescoping series, the telescoping can be exploited.

Gem 63

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$$

converges.

Proof. Although this series is erratic and does not telescope, we notice that the numerators have a telescoping form. Let

$$a_n = \sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1}$$

This telescopes, and we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sin 1$$

In particular the series converges. Since

$$a_n \geq \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} = \frac{\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$$

the claim follows from the Comparison Test.

Gem 64 The series

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$$

diverges properly.

Proof. Since the pattern of signs repeats every three terms, it is natural to consider only the partial sums that include entire blocks of three terms. (That is, we consider summations that terminate after a negative term.) We leave it to the reader to confirm that such an analysis is sufficient to understand the behavior of the series.

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{9k^2 - 2}{(3k-2)(3k-1)3k} \right).$$

Then our series will have the limit behavior of

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9k^2 - 2}{(3k-2)(3k-1)3k} \right)$$

however, this series diverges to ∞ by the Limit Comparison Test against the harmonic series.

Gem 65 The series

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \cdots$$

converges to $\log 3$.

Proof. As in Gem 64, we consider only partial sums of the form S_{3n} . In this case we have

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n} - \frac{3}{3} - \frac{3}{6} - \cdots - \frac{3}{3n} \\ &= \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Using Theorem 3.3, we have

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \log 3n + \gamma_{3n} + \frac{1}{3n} - \log n - \gamma_n - \frac{1}{n} \\ &= \log 3 + \gamma_{3n} - \gamma_n - \frac{2}{3n} \end{aligned}$$

In the limit, the γ expressions cancel and we have a sum of $\log 3$.

Gem 66 (MM, 60:2, p. 118) Let $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. Then the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kH_k}$$

diverges.

Proof. We will show that the series is not Cauchy. In particular, given any positive integer N we show there is an integer m such that

$$\sum_{k=N}^{N+m} \frac{1}{kH_k} > 1/2$$

The key is to notice the near-telescoping behavior of this series.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{N+m} \frac{1}{kH_k} &= \sum_{k=N}^{N+m} \frac{H_k - H_{k-1}}{H_k} \\
&\geq \sum_{k=N}^{N+m} \frac{H_k - H_{k-1}}{H_{N+m}} \\
&= \frac{H_{N+m} - H_{N-1}}{H_{N+m}} \\
&= 1 - \frac{H_{N-1}}{H_{N+m}}
\end{aligned}$$

which is certainly larger than $1/2$ for m large enough. (The harmonic series diverges, so H_{m+n} goes to infinity in m and is in particular eventually larger than $2H_{N-1}$.)

Gem 67 (Red Book, Problem 99) ³ Let $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6}$$

Proof. Let k be a positive integer. We have

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^k \frac{H_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{H_n}{n} - \frac{H_n}{n+1} \right) \\
&= \sum_{n=1}^k \frac{H_n}{n} - \sum_{n=2}^{k+1} \frac{H_{n-1}}{n} \\
&= H_1 + \sum_{n=2}^k \frac{H_n - H_{n-1}}{n} - \frac{H_k}{k+1} \\
&= 1 + \sum_{n=2}^k \frac{1}{n^2} - \frac{H_k}{k+1} \\
&= \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} - \frac{H_k}{k+1}
\end{aligned}$$

Passing to the limit, the first term in the above expression evaluates to $\pi^2/6$ by Gem 23. The second term goes to 0 because $H_k = \log k + \gamma_k + 1/k$ as in Theorem 3.3, which is essentially logarithmic and hence dominated by $k+1$.

Gem 68 (AMM, 59:7, p. 471) Writing as usual $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ and $H_0 = 0$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2}$$

Proof. It will be enough to prove the first and third expressions equal, since then we will be done by

⁰³ We wish to thank Dover Publications for allowing us to use three problems from The Red Book of Mathematical Problems and one problem from The Green Book of Mathematical Problems, both co-authored by Kenneth Williams and Kenneth Hardy. These appear as our Gems 67, 70, 71 and 72.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1} + 1/n}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}
\end{aligned}$$

To this end, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{nk(n+k)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k(n+k)^2} + \frac{1}{n(n+k)^2} \right) \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(n+k)^2}
\end{aligned}$$

by symmetry. We now change variables so that $k = R$ and $k + n = N + 1$. As k and n run over positive integers, N runs over the positive integers, and R runs over the positive integers strictly less than N , so we have

$$2 \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{R=1}^N \frac{1}{R(N+1)^2} = 2 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{H_N}{(N+1)^2}$$

Gem 69 (AMM, 59:7, pp. 471-472)

$$\sum_{K,N} \frac{1}{N^2 K} = 2$$

where the summation is taken over all positive integers K and N with $K \leq N$ and K relatively prime to N .

Proof. Every pair of positive integers (k, n) with $k \leq n$ can be uniquely expressed in the form (rK, rN) where $K \leq N$ and K is relatively prime to N . (Let r be the greatest common divisor of k and n .) Now, allowing ourselves to freely reorder the positive terms of this series, we use Gem 68 to obtain

$$\begin{aligned}
2 \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn^2} \\
&= \sum_{r,K,N} \frac{1}{(rK)(rN)^2} \\
&= \sum_{r,K,N} \frac{1}{r^3} \frac{1}{KN^2} \\
&= \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \right) \left(\sum_{K,N} \frac{1}{N^2 K} \right)
\end{aligned}$$

and we are done since all the series involved converge to finite positive sums. In executing the final factorization, we are using the observation that all r are possible, and that whether a particular pair K, N is included in the summation does not depend on r .

Gem 70 (Red Book, Problem 18) Let

$$a_n = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}$$

The series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges to $(3/2) \log 2$.

Proof. Let $s_N = \sum_{n=0}^N a_n$. Then

$$\begin{aligned}
s_N &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2} \right) \\
&= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4} + \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{4N+4} \frac{(-1)^{m-1}}{m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{m-1}}{m}
\end{aligned}$$

Passing to the limit of large N , each of these summations becomes the alternating harmonic series; we have

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \frac{3}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} = \frac{3}{2} \log 2$$

Gem 71 (Red Book, Problem 62) Let $a > 1$. Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n} + 1} = \frac{1}{a-1}$$

Proof. We have

$$\begin{aligned}
\frac{2^n}{a^{2^n} + 1} &= \frac{2^n (a^{2^n} - 1)}{a^{2^{n+1}} - 1} \\
&= \frac{2^n (a^{2^n} + 1) - 2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} - 1} \\
&= \frac{2^n}{a^{2^n} - 1} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} - 1}
\end{aligned}$$

so that we have a telescoping series as follows:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{a^{2^n} - 1} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} - 1} \right) = \frac{1}{a - 1}$$

(To verify that this is legitimate, we must check that $2^n / (a^{2^n} - 1)$ tends to 0 for large n . But then this is a subsequence of $N / (a^N - 1)$ and certainly the denominator, which grows exponentially since $a > 1$, dominates the linear numerator.)

Gem 72 (Green Book, Problem 16)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^3}{n!} = \frac{1}{1} - \frac{8}{1} + \frac{27}{2} - \frac{64}{6} + \cdots = -e^{-1}$$

Proof. We begin with the polynomial identity

$$(n+1)^3 = n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1$$

so that

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^3}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1}{n!} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-3)!} + 6 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)!} + 7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - 7 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= -e^{-1} \end{aligned}$$

Remark. The next results concern the Cauchy product of series. If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ are series, then it is natural to consider the product

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m b_n$$

However, this is a series indexed by pairs of natural numbers rather than by natural numbers. Since evaluating a series depends on the term order, this infinite summation is not obviously well-defined. Of course if all the terms are positive or more generally if $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_m b_n$ converges as an unordered series, we can avoid this issue. We would like, though, to distinguish one particular way of assigning meaning to $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_m b_n$ even when convergence is not absolute. The following definition is motivated by considering the manner in which like terms are grouped when multiplying polynomials and power series.

Definition 4.11 The Cauchy product of the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ is given by

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

where $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Gem 73 The Cauchy product of two convergent series may be divergent.

Proof. We take as our example $a_n = b_n = (-1)^{n+1}/\sqrt{n+1}$. By the Alternating Series Test, both of these series converge. Let $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, so that $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ is the Cauchy product in question, and indeed

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$$

Hence

$$|c_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} = 1,$$

so that the terms of the Cauchy product do not approach 0. The Cauchy series, it is now clear, diverges by oscillation.

Gem 74 The Cauchy product of two divergent series may converge absolutely.

Proof. Let $a_0 = 3$ and $a_n = 3^n$ for positive n . Let $b_0 = -2$ and $b_n = 2^n$ for positive n . Let $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, so that $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ is the Cauchy product in question. Then of course $c_0 = -6$, and for positive n ,

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= 3 \cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k 3^{n-k} - 2 \cdot 3^n \\ &= 3 \cdot 2^n + 3^n \sum_{k=1}^{n-1} (2/3)^k - 2 \cdot 3^n \\ &= 3 \cdot 2^n + 3^n [2/3 - (2/3)^n] / (1 - 2/3) - 2 \cdot 3^n \\ &= 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

so that the terms of the Cauchy product are 0 after the first, and so the product is absolutely convergent.

Gem 75 The Cauchy product of an absolutely convergent series and a convergent series will converge. Furthermore, its sum will be the ordinary product of the sums of the original series.

Proof. This is a classical result due to Mertens, and we do not prove it here. See, for example, T. M. Apostol's *Mathematical Analysis*, 2nd ed., pp. 204-205. (A full citation is given in the appendices.)

Gem 76 The Cauchy product is associative.

Proof. Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ be three series, and define new terms as follows.

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ e_n &= \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k} \end{aligned}$$

(That is, in the Cauchy sense $\sum d_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$ and $\sum e_n = (\sum b_n)(\sum c_n)$.)

$$f_n = \sum_{k=0}^n a_k e_{n-k}$$

$$g_n = \sum_{k=0}^n d_k c_{n-k}$$

(That is, in the Cauchy sense $\sum f_n = \sum a_n (\sum b_n \sum c_n)$ and $\sum g_n = (\sum a_n \sum b_n) \sum c_n$.) It will suffice now to show that $f_n = g_n$. But it is not hard to check that

$$f_n = \sum_{k=0}^n a_k e_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^{n-k} b_j c_{n-k-j} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} a_k b_j c_{n-k-j}$$

and

$$g_n = \sum_{k=0}^n d_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) c_{n-k} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} c_{n-k}$$

But each of these is just the same as $\sum_{j+k+l=n} a_j b_k c_l$.
Gem 77 (CMJ, 22:1, pp. 71-72) The infinite product

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 1)}{\sqrt{n^4 + 4}} = \sqrt{2}$$

Proof. First, we recall the factorization

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2) = [(n+1)^2 + 1][(n-1)^2 + 1].$$

Then we have

$$\prod_{n=1}^N \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^4 + 4}} = \prod_{n=1}^N \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{[(n+1)^2 + 1]}} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{[(n-1)^2 + 1]}}$$

We recognize this as a telescoping product.

$$\prod_{n=1}^N \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^4 + 4}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{N^2 + 1}}{\sqrt{(N+1)^2 + 1}}$$

Passing to the limit, we have

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^4 + 4}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}\sqrt{N^2 + 1}}{\sqrt{(N+1)^2 + 1}} = \sqrt{2}$$

Gem 78 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0$ for every nonnegative integer p .

Proof. We can regard this result as a strengthened version of Theorem 1.44, and also as a weakened but convenient version of the Cauchy criterion. Since this series converges, the Cauchy criterion applies. Then for every $\epsilon > 0$ there exists a positive integer N such that for all $m \geq n \geq N$ we have $|\sum_{k=n}^m a_k| < \epsilon$. In particular this is still true if we additionally stipulate that $m = n + p + 1$. Then eventually $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$. Thus the limit is 0, as desired.

This "miniature" Cauchy criterion is often useful because the sequence $\{(a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p})\}$ may be very well-behaved for some particular p even if $\{a_n\}$ is very badly behaved.

Gem 79 The converse to Gem 78 fails. There exist series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ that are divergent but such that $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0$ for every nonnegative integer p .

Proof. Take the harmonic series as a counterexample.

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p+1}{n} = 0$$

as desired, but of course the harmonic series is divergent.

Gem 80 (CMJ, 28:3, p. 232) Let $f(t) = t - at^2$ for some $a > 0$. Write f^n for the composition of f with itself n times, where by convention f^0 is the identity function, and f^1 is f itself. Then $\sum_{n=0}^{\infty} f^n(t)$ converges if and only if $t = 0$ or $t = 1/a$.

Proof. First of all, if $t = 0$ or $t = 1/a$, the terms in the series are eventually 0, so that the series converges.

Suppose $t > 1/a$. Then $f(t) = t - at^2 < 0$. But also, for any $x \neq 0$, $f(x) = x - ax^2 < x$. Inductively now we have

$$f^{n+1}(t) < f^n(t) < \cdots < f^2(t) < f(t) < 0$$

Thus the terms do not tend to 0, guaranteeing divergence. The same argument applies if $t < 0$.

We have only to consider now the case $0 < t < 1/a$. Then $0 < f(t) \leq 1/(4a)$. Then, choose N large enough that $1/(2Na) < f(t)$. Since f is strictly increasing on $(0, \frac{1}{4a}]$ (by observing that the derivative, $1 - 2at > 0$), we know

$$f^2(t) > f\left(\frac{1}{2Na}\right) = \frac{1}{2Na} - \frac{a}{4N^2a^2} = \frac{2N-1}{4N^2a} \geq \frac{1}{(2N+2)a}$$

By a straightforward induction, for $n \geq 1$ we have $f^n(t) \geq 1/[(2N+2n-2)a]$. The series then diverges by applying, say, the limit comparison test against the harmonic series.

Gem 81 (CMJ, 28:2, pp. 149-150) Let $p > 1$ and write $\zeta(p)$ for the value of the p -series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Then we can evaluate the following series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \right) = \frac{1}{2} [\zeta(p)^2 + \zeta(2p)]$$

Proof. By definition, $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$.

$$\begin{aligned} (\zeta(p))^2 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right)^2 \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^p n^p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} + 2 \sum_{n,m=1; n>m}^{\infty} \frac{1}{m^p n^p} \\ &= \zeta(2p) + 2 \sum_{n,m=1; n>m}^{\infty} \frac{1}{m^p n^p} \end{aligned}$$

Rearranging,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [(\zeta(p))^2 + \zeta(2p)] &= \zeta(2p) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^p n^p} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p n^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^p n^p} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^p n^p} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \right)
\end{aligned}$$

as desired.

Gem 82 (CMJ, 24:2, pp. 189-190)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{n(n+1)} = 2$$

Proof. This is another intriguing result involving the partial sums of the harmonic series. In evaluating this series, we must first recall that

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

so that by telescoping

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{k}$$

Taking this into account, and noting that we can freely rearrange the positive terms of the series,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} S &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Gem 83 (CMJ, 21:2, p. 151) For each integer $m > 0$, let $L(m)$ be the number of digits in the decimal representation of m that are at least 5. For example, $L(1) = 0$ and $L(23457126) = 3$. Then

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{L(2^t)}{2^t} = \frac{2}{9}$$

Proof. We decompose L into functions L_k as follows. $L_k(m)$ is 1 if the k th digit of m is at least 5 and 0 otherwise. Then by definition

$$L(m) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k(m)$$

where the apparently infinite sum is in fact a finite one since m has only finitely many nonzero digits. Making this substitution,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{L(2^t)}{2^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k(2^t)}{2^t} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{L_k(2^t)}{2^t}$$

We must now consider $L_k(m)$. The k th digit of m is precisely the digit in the tenths place of $m/10^k$, so it will be at least 5 exactly if $m/10^k + 0.5$ involves a carry. Indeed we have

$$L_k(m) = \left\lfloor \frac{m}{10^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{10^k} \right\rfloor$$

Using the well-known (and easily proven once-guessed) identity $\lfloor x + 0.5 \rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$ results in

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{L_k(2^t)}{2^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^t} \left\lfloor \frac{2^{t+1}}{10^k} \right\rfloor - \frac{1}{2^{t-1}} \left\lfloor \frac{2^t}{10^k} \right\rfloor \right)$$

which is telescoping and has as its n th partial sum

$$\frac{1}{2^n} \left\lfloor \frac{2^{n+1}}{10^k} \right\rfloor = \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^{n+1}}{10^k} - r_n \right)$$

where $0 \leq r_n < 1$. Passing to the limit as $n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{L_k(2^t)}{2^t} = \frac{2}{10^k}$$

Finally,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{L(2^t)}{2^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k(2^t)}{2^t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{10^k} = \frac{2}{9}$$

recognizing the ultimate series as geometric.

Gem 84 (CMJ, 11:1, p. 65) Let $a > 1$ be an integer. Then

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{a}} = \frac{a}{a-1}$$

where the symbol $\binom{n}{a}$ denotes the binomial coefficient.

Proof. We first make the observation

$$\binom{a+k}{a}^{-1} = \frac{a}{1-a} \left[\binom{a+k}{a-1}^{-1} - \binom{a+k-1}{a-1}^{-1} \right]$$

which follows by straightforward manipulation of the formula

$$\binom{a+k}{a} = \frac{(a+k)!}{a!k!}$$

Armed with this, we see that the series actually telescopes, and the partial sums have the form

$$\sum_{n=a}^{a+N} \frac{1}{\binom{n}{a}} = \frac{a}{1-a} \left[\binom{a+N}{a-1} - 1 \right]$$

and when we pass to the limit of large N , we get the desired sum.

Gem 85 (CMJ, 30:5, pp. 409-410)

$$\sum_{n=4}^{\infty} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{3}{2}$$

where the symbol $\binom{n}{a}$ denotes the binomial coefficient.

Proof. Since all the terms involved are positive, we can interchange the order of summation. (Regard the series as unordered as in Definition 4.1.)

$$\begin{aligned} \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{k!(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=k+2}^{\infty} \left(\frac{k!(n-k)!}{(k-1)(n-1)!} - \frac{k!(n-k+1)!}{(k-1)n!} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2k!}{(k-1)(k+1)!} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k-1)} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 + 1/2 \\ &= 3/2 \end{aligned}$$

Gem 86 (AMM, 65:6, pp. 452-453) Let $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ be integers greater than 1, and define x and y by the infinite series

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1^2 a_2} + \frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3} + \cdots \\ y &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1^3 a_2} + \frac{1}{a_1^3 a_2^3 a_3} + \cdots \end{aligned}$$

Then either x and y are both rational numbers or neither is.

Proof. First, observe that there is no question of convergence of the series defining x and y . Any number of tests will work, perhaps the simplest being the Ratio Test.

Now we prove a simple lemma on inequalities. Let $z = m/n$ be a positive rational number strictly between 0 and 1, and let $e \geq 2$. If the inequality $0 < (za - 1)a^{e-1} < 1$ has a positive integral solution a , it cannot have more than one. Suppose instead, if possible, that $a < b$ are two integral solutions, and then

$$\frac{n}{b} < m \leq m(b-a) < \frac{n}{a^{e-1}}$$

which is a contradiction, proving the lemma.

To prove the main claim, let e be an integer not less than 2, and set

$$z_i = a_i^{-1} + (a_i^e a_{i+1})^{-1} + (a_i^e a_{i+1}^e a_{i+2})^{-1} + \cdots$$

(Note that of course z_i depends on e , but we are suppressing that dependence in the notation.) Then $0 < z_i < 1$ because, term-by-term, the series defining it is less than the series $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 1$. Also $(z_i a_i - 1) a_i^{e-1} = z_{i+1}$. Suppose that z_1 is a rational number and can be written with denominator n . Then it is easy to see by induction using the recursion just given that all the z_i can be written with that same denominator. But there are only finitely many such fractions between 0 and 1, so we must have $z_j = z_{j+k}$ for some $j, k > 0$, and we call this common value z . Then $0 < z_{j+1}, z_{j+k+1} < 1$, so $0 < (z a_j - 1) a_j^{e-1} < 1$ and $0 < (z a_{j+k} - 1) a_{j+k}^{e-1} < 1$. By the lemma then $a_j = a_{j+k}$. Now, by the natural induction, we have $z_{t+k} = z_t$; $a_{t+k} = a_t$ for all $t \geq j$. Thus the sequence $\{a_n\}$ is eventually periodic. Conversely, if the sequence $\{a_n\}$ is eventually periodic, it is clear that all the z_i are rational. The proof parallels the proof that repeating decimals represent rational numbers in Gem 107. That is, z_1 is rational if and only if the sequence a_n is eventually periodic. This condition, however, does not depend on e . Setting $e = 2$ gives $z_1 = x$; setting $e = 3$ gives $z_1 = y$. Hence x and y are both irrational or both rational.

Gem 87 (AMM, 86:1, p. 58) For each positive integer n , let $f(n)$ be the number of zeros in the decimal representation of n . Choose $a > 0$ and consider the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$$

This series converges if $0 < a < 91$ and diverges for $a \geq 91$.

Proof. Consider now only the part of the sum over the $(m+1)$ -digit numbers n . That is, $10^m \leq n < 10^{m+1}$. Because our series consists of positive terms, we can group the terms in this way and sum over m without affecting the convergence behavior. For each k , there are $\binom{m}{k} 9^{m+1-k}$ numbers with $m+1$ digits that satisfy $f(n) = k$. (Choose which of the m digits other than the first are to be 0, then assign values to the other digits.) For each such n , we have

$$\frac{1}{10^{2m+2}} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{10^{2m}}$$

Using the binomial theorem, this portion of the original series is bounded below by

$$\frac{1}{10^{2m+2}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 9^{m+1-k} a^k = \frac{9}{100} \left(\frac{9+a}{100} \right)^m$$

and bounded above by

$$\frac{1}{10^{2m}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 9^{m+1-k} a^k = 9 \left(\frac{9+a}{100} \right)^m$$

By comparison, then, the original series converges if and only if

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9+a}{100} \right)^m$$

does. The geometric series converges for $0 < a < 91$ and diverges for $a \geq 91$.

Gem 88 (AMM, 107:6, p. 568) For $n > 1$, let $t(n)$ denote the number of unordered factorizations of n into divisors greater than 1, including the trivial factorization with only one factor. For example, $t(12) = 4$ because $12 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 2$. Then

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} = 1$$

Proof. This is interesting largely because we obtain this result even though it is virtually impossible to write down a formula for $t(n)$ itself.

Each factorization is completely specified by how many copies of each factor $r \geq 2$ are used. Rearranging this series of positive terms, we can regard it as a sum of copies of $1/n^2$, summing not over integers n but instead over factorizations of integers, so that multiplicity is properly counted.

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} &= \prod_{r=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} \right) \\ &= \prod_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - 1/r^2} \right) \\ &= \prod_{r=2}^{\infty} \left(\frac{r^2}{r^2 - 1} \right) \\ &= \prod_{r=2}^{\infty} \left(\frac{r^2}{(r+1)(r-1)} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{r=2}^N \left(\frac{r^2}{(r+1)(r-1)} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{N+1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

and the claim follows.

Gem 89 (AMM, 42:2, pp. 111-112)

$$\frac{1^2}{0!} + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \cdots = 5e$$

Proof. Consider the slightly more general series, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+k)^2/n!$, where k is any number. The Ratio Test shows that this series converges. To find its sum, we expand as follows:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)^2}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2 + 2kn + k^2)}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - n}{n!} + (2k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + (2k+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + (2k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= e + (2k+1)e + k^2e \end{aligned}$$

Taking $k = 1$, we obtain exactly

$$\frac{1^2}{0!} + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \cdots = 5e$$

Gem 90 (AMM, 58:2, pp. 116-117)

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left\lfloor \frac{\log n}{\log 2} \right\rfloor$$

where γ is Euler's constant.

Proof. By definition of γ , we have

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{s=1}^N \frac{1}{s} - \log N \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{s=1}^{2^n} \frac{1}{s} - \log 2^n \right) \end{aligned}$$

Now we focus on the expression in parentheses.

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{2^n} \frac{1}{s} - \log 2^n &= \sum_{s=1}^{2^n} \frac{1}{s} - \log 2 - \log 2^{n-1} \\ &= \sum_{s=1}^{2^n} \frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} - \log 2^{n-1} \\ &= \sum_{s=2; s \text{ even}}^{2^n} \frac{2}{s} - \log 2^{n-1} + \sum_{s=2^{n-1}+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} \\ &= \sum_{s=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{s} - \log 2^{n-1} + \sum_{s=2^{n-1}+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} \end{aligned}$$

Apply the same procedure to the first two terms of what results to obtain

$$\sum_{s=1}^{2^{n-2}} \frac{1}{s} - \log 2^{n-2} + \sum_{s=2^{n-3}+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} + \sum_{s=2^{n-1}+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s}$$

and repeat this until the logarithm term is exhausted, leaving us with

$$1 + \sum_{r=1}^n \sum_{s=2^{r-1}+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} = 1 + \sum_{r=1}^{n-1} \left(r \sum_{s=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{(-1)^s}{s} \right) + n \sum_{s=2^n+1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s}.$$

Recall that γ is the limit of this expression as n goes to ∞ . However, the last term is the product of n and a tail of the alternating harmonic series with magnitude less than $1/(2^n + 1)$, so the product tends to zero as n grows large. Passing to the limit then,

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(r \sum_{s=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{(-1)^s}{s} \right) \\ &= 1 + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} \left\{ \frac{\log s}{\log 2} \right\} \end{aligned}$$

where the curly braces denote the largest integer less than x . This is the same as the greatest integer function except when s is an exact power of 2. To remedy this, write the initial 1 as the sum $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$ and combine each of these terms with the corresponding member of the infinite series. This gives exactly the desired

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left\lfloor \frac{\log n}{\log 2} \right\rfloor,$$

once we realize that the $n = 1$ term is zero and can be neglected.

Gem 91 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a conditionally convergent series and if r is an arbitrary real number, then there exists a sequence ϵ_n with $\epsilon_n = \pm 1$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n = r$. That is, it is possible to redefine the signs of the terms of the series so that it has sum r , leaving the magnitudes of the terms and their order intact.

Proof. On the surface, this resembles the result in Chapter 3 that a conditionally convergent series has a rearrangement that converges to any given sum. The proof of this result follows the same basic lines. We require only two basic facts about the sequence of magnitudes $b_n = |a_n|$. First, $b_n \rightarrow 0$ because the initial series is convergent. Furthermore any tail $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ is divergent because the convergence of the original series is not absolute. (In fact these are the only properties of the sequence $\{a_n\}$ we use. We could have assumed them directly and dispensed with the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, but the statement as given seemed in some sense more natural.)

We carry out the construction as follows. Initially, choose $\epsilon_n a_n = b_n$, that is, take the terms positive, until the partial sums first increase above r (if $r < 0$, then we skip this step). Then take ϵ_n so that $\epsilon_n a_n = -b_n$, adding negative terms to decrease the partial sums until they first drop below r . Proceed in this way, alternating between strings of positive and negative terms. Is this always possible? Yes—because every tail $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ diverges, no matter how many terms have already been added, adding (or subtracting) the remaining terms in turn will eventually bring the sum above (or below) r .

Why does this converge to r ? Consider first only the partial sums that immediately precede sign changes, which we will call turning points. By construction, such partial sums will differ from r , at most, by the last term added. Since the terms tend to 0, the turning points converge to r . However, any other partial sum must lie between two consecutive turning points, so it is straightforward to check that the sequence of partial sums tends to r , just as claimed.

Gem 92 Let $\{a_n\}$ be a strictly increasing sequence of positive integers with the property that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

diverges. Then there are among the prime factors of the various a_n infinitely many distinct primes.

Proof. Suppose for the sake of contradiction that there are only finitely many primes $p_1, p_2, \dots, p_k$. Then each a_n has the form $\prod p_i^{e_i}$. Now consider the series

$$S = \sum_{e_1=0}^{\infty} \sum_{e_2=0}^{\infty} \sum_{e_3=0}^{\infty} \cdots \sum_{e_k=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^k p_i^{e_i}}$$

On the one hand, this series diverges, because all its terms are positive and it must contain at least all the terms of the divergent series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$. On the other hand, this expression factors as a finite product of convergent geometric series,

$$S = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{e_i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{e_i}} \right) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{p_i}{p_i - 1} \right) < \infty.$$

Gem 93 Let $a_{m,n} > 0$ be a doubly-indexed sequence of positive terms. Suppose that they are increasing in m in the sense that

$$a_{m+1,n} \geq a_{m,n}$$

for each m, n . Write $b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n}$. Also write $A_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$, and write $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Then $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = B$, with the understanding that any of the limits involved may be infinite. That is,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n}$$

Proof. This is an example of a circumstance in which we can safely interchange a limit and a summation. In general, situations in which two infinite processes can be interchanged are special, and considerable effort has been dedicated to their study. Here we reduce the situation to more familiar territory by converting the limit to a summation.

Write $c_{m,n} = a_{m,n} - a_{m-1,n}$, where $a_{0,n} = 0$ for each n . Then notice that the $a_{m,n}$ are just the partial sums of the $c_{m,n}$ with respect to m , and use this to rewrite the two expressions that we want to show equal.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m c_{k,n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n}$$

and also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m c_{k,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,n}$$

However, the hypothesis of increasing terms guarantees that each $c_{m,n}$ is nonnegative. Then, we can regard both series in the context of unordered sums, and see that both of these expressions are equal to

$$\sum_{k,n \geq 1} c_{k,n}.$$

Gem 94 The hypothesis of increasing terms is essential in Gem 93. That is, there exist real numbers $a_{m,n} > 0$ such that, with all notation as before, $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m \neq B$ even though all limits exist and are finite.

Proof. Take as a counterexample $a_{n,n} = 1$, and $a_{m,n} = 0$ if $m \neq n$. Then it is easy to see that $A_m = 1$ for every m , but $b_n = 0$ for every n .

We remark that, in light of the way Gem 93 was proven, this gem is just restating the fact that double summations cannot be rearranged freely if the terms are both positive and negative.

Gem 95 (AMM, 63:1, p. 48) Show that

$$\frac{1 - 2^{-2} + 4^{-2} - 5^{-2} + 7^{-2} - 8^{-2} + \dots}{1 + 2^{-2} - 4^{-2} - 5^{-2} + 7^{-2} + 8^{-2} - \dots} = \frac{2}{3}.$$

Here the numerator consists of terms n^{-2} where n is not a multiple of 3, with alternating signs. The denominator consists of the same terms, but now there is a pair of positive terms, a pair of negative terms, and so on.

Proof. Write N for the numerator and D for the denominator. Then both sums are finite because it is easy to see that convergence is absolute (compare to a p -series).

$$\begin{aligned}
N - D &= 2(-2^{-2} + 4^{-2} - 8^{-2} + 10^{-2} - 14^{-2} + 16^{-2} - \dots) \\
&= -2 \frac{1}{4} N \\
&= \frac{-1}{2} N.
\end{aligned}$$

That is, $3N = 2D$, so that $N/D = 2/3$.

Gem 96 Assume that the series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ has both positive and negative terms. Let s_n , p_{n_1} , and q_{n_2} be the n th partial sum, the sum of the positive terms among s_n , and the sum of the negative terms of s_n . ($n = n_1 + n_2$). The behavior of $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ can be characterized as follows.

1. If $p_{n_1} \rightarrow p$ and $q_{n_2} \rightarrow q$, the series converges absolutely to $p + q$.
2. If $p_{n_1} \rightarrow \infty$ and $q_{n_2} \rightarrow -\infty$, and also $a_n \rightarrow 0$, then the series converges conditionally.
3. If $p_{n_1} \rightarrow \infty$ and $q_{n_2} \rightarrow -\infty$, and also $a_n \not\rightarrow 0$, then the series diverges.
4. If $p_{n_1} \rightarrow \infty$ and $q_{n_2} \rightarrow q$, then the series diverges properly to ∞ .
5. If $p_{n_1} \rightarrow p$ and $q_{n_2} \rightarrow -\infty$, then the series diverges properly to $-\infty$.

Proof. If there are only finitely many positive terms or only finitely many negative terms, the matter is trivial. In the first case, we have

$$\sum_{n=1}^N |a_n| = p_{n_1} - q_{n_2} < p - q < \infty$$

so that we have absolute convergence. Since $s_n = p_{n_1} + q_{n_2}$, we know the sum is $p + q$. We also know that $\sum_{n=1}^{\infty} |a_k| = p - q$. The second case was already handled in Chapter 3. In the third case, we apply the converse to the Divergence Theorem. In the fourth case, since eventually $p_{n_1} \rightarrow \infty$ and q_{n_2} is bounded below by q , we see that $s_n = p_{n_1} + q_{n_2}$ goes to infinity. The fifth case is analogous.

Gem 97 A conditionally convergent series cannot be rearranged to form an absolutely convergent series.

Proof. If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ could be rearranged to form an absolutely convergent series, then every rearrangement of that series converges to the same sum. This violates the fact that $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, a conditionally convergent series, can be rearranged to sum to any preselected number.

Gem 98 If $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges and $b_n > 0$, then necessarily

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{1 + b_n}$$

also diverges.

Proof. If b_n does not approach 0, then simple algebra shows that $b_n/(1 + b_n)$ does not approach 0 either, so that the second series would have to diverge. If on the other hand b_n approaches 0, then for n large enough, $b_n < 1$, so that $b_n/(1 + b_n) > b_n/2$. By the comparison test,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{1 + b_n}$$

diverges.

Gem 99 If $\sum a_n$ is conditionally convergent, then the terms can be grouped so as to form an absolutely convergent series.

Proof. Let $\{s_n\}$ be the sequence of partial sums for our series, with $s_n \rightarrow s$. Choose an increasing sequence $0 = n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ such that for $k > 0$,

$$s - \frac{1}{2^k} < s_{n_k} < s + \frac{1}{2^k}$$

and group the series as $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$, where the b_i are

$$b_i = \sum_{n=n_{i-1}+1}^{n_i} a_n$$

Notice that $b_i = s_{n_i} - s_{n_{i-1}}$, so that for $i > 1$,

$$|b_i| \leq |s_{n_i} - s| + |s_{n_{i-1}} - s| < \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{3}{2^i}$$

Then the terms $|b_i|$ are dominated by the terms of a convergent geometric series, and so $\sum b_i$ is an absolutely convergent grouping of our series.

Gem 100 If $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ is a convergent series of positive terms, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{c_n}}{n}$$

converges.

Proof. By Cauchy's Inequality,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{c_n}}{n} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)$$

Since both series on the right converge, so also does the series on the left.

Gem 101 If $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ is a convergent series of positive terms, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{c_n}{n}}$$

may converge or diverge.

Proof. A convergent example would come from $c_n = 1/n^3$, which would give

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{c_n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

A divergent example would come from $c_n = 1/n(\log n)^2$, which would give

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{c_n}{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

where we appeal to the Abel-Dini scale to diagnose these series.

Gem 102 For each real number x ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

converges.

Proof. If x is an integer multiple of π , the series is identically 0 and there is nothing to show. Assume that $x \neq 0$ for the sequel.

Let $a_n = \sin(nx)$ and $b_n = 1/n$ and appeal to the result by Dirichlet as given in Corollary 2.23.1.

Key to our argument is the trigonometric identity

$$2 \sin(x/2) \sin(nx) = \cos(n-1/2)x - \cos(n+1/2)x$$

Let $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, assume x is not an integer multiple of π , and use telescoping to see that

$$s_n = \frac{1}{2} \frac{\cos(x/2) - \cos[(n+1/2)x]}{\sin(x/2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} - \frac{\cos[(n+1/2)x]}{\sin(x/2)} \right].$$

Then the partial sums s_n are bounded. Since $\{b_n\}$ is a monotone sequence tending to 0, the Dirichlet result guarantees

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

converges.

Gem 103 If $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n)$ may converge or diverge.

Proof. If $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ is absolutely convergent, it is immediate to see that $|c_n \sin n| < |c_n|$, so that $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n)$ is still absolutely convergent.

The argument for divergence is delicate. Now we begin with a conditionally convergent series $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ with $a_k > 0$. Identify a collection of subintervals of the real line,

$$I_k = \left[(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}, (k-1)\pi + \frac{3\pi}{4} \right]$$

Each interval I_k has length $\pi/2 > 1$, so it contains at least one integer point n_k . Note therefore that $|\sin(n_k)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Define $c_n = 0$ if n is not one of the n_k and $c_{n_k} = (-1)^{k+1} a_k$ if $n = n_k$ in order to create a series $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ that converges. We also have

$$(-1)^{k+1} \sin(n_k) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

from which follows

$$c_{n_k} \sin(n_k) = a_k \sin(n_k) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} a_k > 0.$$

Since $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverges it follows by the Comparison Test, that $\sum c_n \sin(n)$ diverges.

Gem 104

$$\sqrt{2} \sqrt[4]{4} \sqrt[8]{8} \cdots \sqrt[2^n]{2^n} \cdots = 4$$

Proof. We take logarithms, reducing this infinite product to an infinite series,

$$\log \left(\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[2^n]{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \sqrt[2^n]{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} \log 2 \right) = \log 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \right).$$

By Gem 42, this series sums to 2, and we have

$$\log \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[2^n]{2^n} \right) \right] = 2 \log 2$$

Exponentiating gives exactly what is desired.

Gem 105

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = \infty$$

Proof. We appeal to Gem 16. It is sufficient to show that

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} = \infty$$

Taking logarithms, we see

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \sqrt[n]{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

and we are done by comparison with the harmonic series.

Gem 106

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot^{-1}(1+n+n^2)}{\tan^{-1}(n)}$$

converges.

Proof. First, recalling the appropriate trigonometric identities,

$$\cot^{-1}(1+n+n^2) = \tan^{-1} \frac{1}{1+n+n^2} = \tan^{-1} \frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n} = \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n).$$

By this substitution,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot^{-1}(1+n+n^2)}{\tan^{-1}(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n)}{\tan^{-1}(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(n+1)}{\tan^{-1}(n)} - 1 \right)$$

Appealing to Gem 16, it will suffice to show that

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1}(n+1)}{\tan^{-1}(n)}$$

is convergent, but of course this product telescopes. We have

$$\prod_{n=1}^N \frac{\tan^{-1}(n+1)}{\tan^{-1}(n)} = \frac{\tan^{-1}(N+1)}{\tan^{-1} 1}$$

Since $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^{-1} n = \pi/2$,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1}(n+1)}{\tan^{-1}(n)} = \frac{\pi/2}{\pi/4} = 2 < \infty$$

Gem 107 Let x be a repeating decimal between 0 and 1, so that it has the decimal representation

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots a_kb_1b_2b_3\dots b_lb_1b_2b_3\dots b_lb_1b_2b_3\dots b_l\dots$$

for some digits a_i, b_j . Then x is rational and can be written

$$x = \frac{a_1a_2a_3\dots a_kb_1b_2b_3\dots b_l - a_1a_2a_3\dots a_k}{99\dots 900\dots 0}$$

where there are l 9's and k 0's, and all the expressions are interpreted as forming numbers by concatenating digits, not as products. For example

$$0.12456456456\dots = \frac{12456 - 12}{99900}$$

Proof. Let x have the form described. Then we have

$$\begin{aligned} 10^{k+l}x &= a_1a_2a_3\dots a_kb_1b_2b_3\dots b_l \cdot b_1b_2b_3\dots b_lb_1b_2b_3\dots b_lb_1b_2b_3\dots b_l\dots \\ 10^kx &= a_1a_2a_3\dots a_k \cdot b_1b_2b_3\dots b_lb_1b_2b_3\dots b_lb_1b_2b_3\dots b_l\dots \end{aligned}$$

Notice that both decimals have the same repeating part, so we can subtract to find

$$(10^{k+l} - 10^k)x = a_1a_2a_3\dots a_kb_1b_2b_3\dots b_l - a_1a_2a_3\dots a_k$$

We now simply solve for x , noticing that $10^{k+l} - 10^k = 99\dots 900\dots 0$, where there are l 9's and k 0's.

12.5 Series and the Putnam Competition

The William Lowell Putnam Mathematical Competition is the premier competition among undergraduate students in mathematics. This contest, held over one entire day each year, is designed to test students' powers of creative mathematical thinking, problem solving, and knowledge of basic mathematics. There are at least two purposes for this chapter. First, the large number of problems about real infinite series, on the surface a small part of mathematics, included historically on the Putnam can be seen as a rough indication of their importance. Second and more importantly, this is an opportunity for the reader to see how the theory of infinite series can be applied to specific problems. The reader has by this point seen a great deal of theorems and background material about infinite series without necessarily seeing any particular application of the theorems. We wish for the reader to have experience solving unfamiliar problems in the context of infinite series. While it is true that many of the gems in Chapter 4 have this form, in that section of the book theory and application appear all mixed together, with the distinctions subjective and implicit. In this chapter we wish to be more explicit. Here we provide the reader with a collection of problems written not by the authors of this text but by a collection of eminent mathematicians, and we extend an invitation for the reader to challenge himself or herself to solve them. For this reason, we list the problems twice—first without their solutions, and then again with solutions and other commentary.

In compiling this chapter, we have relied extensively on the three volumes of The William Lowell Putnam Mathematical Competition in the MAA Problem Books series. The first volume was edited by A.M. Gleason, R.E. Greenwood, L.M. Kelly; the second by G.L. Alexanderson, L.F. Klosinski, and L.C. Larson; and the third by K.S. Kedlaya, B. Poonen, and R. Vakil. These books are excellent, and we are indebted to what they provide. The reader who is interested in mathematical problem solving in a more general context would do well to study these books. We have compiled those problems that relate to the material in this book. Actually this is not precisely true; though this book has briefly treated power series, we do not consider this topic core to the book. The Putnam Competition has featured a wealth of problems on power series. To the interested reader, we once more heartily recommend the MAA Problem Books. In all cases the problem statement has been taken directly from those versions, and in almost all cases the solutions have as well. What material we have taken from these books appears in virtually the same form as the originals; when changes have been made, they are typographical in nature. It is always explicitly stated when the material given as a solution is not due directly to our sources. Conversely, when commentary follows a solution, it is due to the authors of this book and these exceptions are

clearly marked. Each problem and solution is labelled with an ordered triple $[x, y, z]$ where the first number represents the number of the Putnam Competition in which the problem was given, the second entry gives the year of that contest, and the third entry gives the problem number within the contest.

The reader will notice that we generally do not give solutions in the same style of the proofs of our theorems in earlier chapters of this book. The solutions are somewhat in a conversational style as may be typical of the everyday life of practicing mathematicians or students who participate in mathematical competitions. The standard results are referred to by familiar name, description, or sometimes implicit use, rather than by "official" number as given in this presentation. This should be in no way intimidating, however; in some cases when we use a particularly less well-known result, we refer the reader back to the appropriate place in the book, if a refresher is desired. We hope this choice will help the reader make the transition from learning the subject to applying the subject as a mathematician (armchair or otherwise). By this point, the reader has already read at least one entire book (almost) on infinite series. In this sendoff, we are discussing infinite series as mature mathematicians, and we treat the reader as knowledgeable.

12.5.1 5.1 The Problems

Problem [3, 1940, 7]

If $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots$ and $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots$ are convergent series of real constants, prove that

$$(u_1 - v_1)^p + (u_2 - v_2)^p + (u_3 - v_3)^p + \cdots,$$

p an integer ≥ 2 , is convergent.

Problem [5, 1942, 3]

Is the following series convergent or divergent?

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{7} + \frac{2!}{3^2} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^2 + \frac{3!}{4^3} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^3 + \frac{4!}{5^4} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^4 + \cdots$$

Problem [8, 1948, A3]

Let $\{a_n\}$ be a decreasing sequence of positive numbers with limit 0 such that

$$b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0$$

for all n . Prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n = a_1.$$

Problem [9, 1949, A3]

Assume that the complex numbers $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ are all different from zero, and that $|a_r - a_s| > 1$ for $r \neq s$. Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^3}$$

converges.

Problem [9, 1949, B2(i)]

Prove that

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\log \log n)}{\log n}$$

diverges.

Problem [10, 1950, A2]

Test for convergence the series

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log(2!)} + \frac{1}{\log(3!)} + \frac{1}{\log(4!)} + \cdots + \frac{1}{\log(n!)} + \cdots \\ & \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\cdots\sqrt[n]{3}} + \cdots \end{aligned}$$

Problem [11, 1951, A7]

Show that if the series $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ converges, then the series $a_1 + a_2/2 + a_3/3 + \cdots + a_n/n + \cdots$ converges also.

Problem [12, 1952, B5]

If the terms of a sequence a_n are monotonic, and if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, show that $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ converges.

Problem [13, 1953, B1]

Is the infinite series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$$

convergent? Prove your statement.

Problem [14, 1954, A6]

Suppose that $u_0, u_1, u_2, \dots$ is a sequence of real numbers such that

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

Prove that if $\sum u_n$ converges, then $u_k = 0$ for all k .

Problem [14, 1954, B2]

Assume as known the (true) fact that the alternating harmonic series

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \cdots$$

is convergent, and denote its sum by s . Rearrange the series as follows,

$$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \cdots$$

Assume as known the (true) fact that this series is also convergent, and denote its sum by S . Denote by s_k, S_k the k th partial sum of the respective series. Prove the following statements.

1. $S_{3n} = s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n}$.
2. $S \neq s$.

Problem [15, 1955, A3]

Suppose that $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ is a convergent series of positive terms that monotonically decrease (that is, $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$). Let P denote the set of all numbers that are sums of some (finite or infinite) subseries of $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Show that P is an interval if and only if

$$x_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i \quad \text{for every integer } n,$$

which we call condition (1).

Problem [16, 1956, B6]

Given $T_1 = 2, T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1, n > 0$, prove:

1. If $m \neq n, T_m$ and T_n have no common factor greater than 1.
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{T_i} = 1$.

Problem [18, 1958, A6]

What is the smallest amount that may be invested at interest rate i , compounded annually, in order that one may withdraw 1 dollar at the end of the first year, 4 dollars at the end of the second year, ..., n^2 dollars at the end of the n th year, in perpetuity.

Problem [19, 1958, B5]

The lengths of successive segments of a broken line are represented by the successive terms of the harmonic progression $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$. Each segment makes with the preceding segment a given angle θ . What is the distance and what is the direction of the limiting point (if there is one) from the initial point of the first segment?

Problem [20, 1959, B2]

Let c be a positive real number. Prove that c can be expressed in infinitely many ways as a sum of infinitely many distinct terms selected from the sequence

$$1/10, 1/20, \dots, 1/10n, \dots$$

Problem [21, 1960, B2]

Evaluate the double series

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3k-j-(k+j)^2}$$

Problem [21, 1960, B6]

Any positive integer may be written in the form $n = 2^k(2l + 1)$. Let $a_n = e^{-k}$ and $b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$. Prove that $\sum b_n$ converges.

Problem [24, 1963, B5]

Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers satisfying the inequalities

$$0 \leq a_k \leq 100a_n \text{ for } n \leq k \leq 2n \text{ and } n = 1, 2, \dots,$$

and such that the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converges. Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$$

Problem [25, 1964, A3]

Let $P_1, P_2, \dots$ be a sequence of distinct points that is dense in the interval $(0, 1)$. The points $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ decompose the interval into n parts, and P_n decomposes one of these into two parts. Let a_n and b_n be the lengths of these two intervals. Prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n (a_n + b_n) = 1/3$$

(A sequence of points in an interval is said to be dense when every subinterval contains at least one point of the sequence.)

Problem [25, 1964, A5]

Prove that there is a constant K such that the following inequality holds for any sequence of positive numbers $a_1, a_2, a_3, \dots$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Problem [25, 1964, B1]

Let $u_k (k = 1, 2, \dots)$ be a sequence of integers, and let V_n be the number of those that are less than or equal to n . Show that if

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/u_k < \infty$$

then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n/n = 0$$

Problem [25, 1964, B5]

Let u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) denote the least common multiple of the first n terms of a strictly increasing sequence of positive integers (for example, the sequence 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12). Prove that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/u_n$$

is convergent.

Problem [27, 1966, B3]

Show that if the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

is convergent, where $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ are positive real numbers, then the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2} p_n$$

is also convergent.

Problem [30, 1969, B5]

Let $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ be an increasing sequence of positive integers. Let the series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ be convergent. For any number x let $k(x)$ be the number of the a_n 's that do not exceed x . Show that $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x)/x = 0$.

Problem [36, 1975, B5]

Let $f_0(x) = e^x$ and $f_{n+1}(x) = x f'_n(x)$ for $n = 0, 1, 2, \dots$. Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1)}{n!} = e^e$$

Problem [39, 1978, B2]

Express

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n + m n^2 + 2mn}$$

as a rational number.

Problem [43, 1982, A2]

For positive real x , let

$$B_n(x) = 1^x + 2^x + 3^x + \dots + n^x$$

Prove or disprove the convergence of

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n (\log_n 2)}{(n \log_2 n)^2}$$

Problem [45, 1984, A2]

Express $\sum_{k=1}^{\infty} (6^k / (3^{k+1} - 2^{k+1}) (3^k - 2^k))$ as a rational number.

Problem [47, 1986, A3]

Evaluate $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Arccot}(n^2 + n + 1)$, where $\operatorname{Arccot} t$ for $t \geq 0$ denotes the number θ in the interval $0 < \theta \leq \pi/2$ with $\cot \theta = t$.

Problem [48, 1987, A6]

For each positive integer n , let $a(n)$ be the number of zeroes in the base 3 representation of n . For which positive real numbers x does the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{a(n)}}{n^3}$$

converge?

Problem [49, 1988, A3]

Determine, with proof, the set of real numbers x for which

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \csc \frac{1}{n} - 1 \right)^x$$

converges.

Problem [49, 1988, B4]

Prove that if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series of positive real numbers, then so is

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{n/(n+1)}$$

Problem [55, 1994, A1]

Suppose that a sequence $a_1, a_2, a_3, \dots$ satisfies $0 < a_n < a_{2n} + a_{2n+1}$ for all $n \geq 1$. Prove that series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

Problem [60, 1999, A4]

Sum the series

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n 3^m + m 3^n)}$$

Problem [61, 2000, A1]

Let A be a positive real number. What are the possible values of $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$, given that $x_0, x_1, \dots$ are positive numbers for which $\sum_{j=0}^{\infty} x_j = A$?

Problem [62, 2001, B3]

For any positive integer n , let $\langle n \rangle$ denote the closest integer to $\sqrt{n}$. Evaluate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\langle n \rangle} + 2^{-\langle n \rangle}}{2^n}$$

Problem [63, 2002, A6]

Fix an integer $b \geq 2$. Let $f(1) = 1, f(2) = 2$, and for each $n \geq 3$, define $f(n) = nf(d)$, where d is the number of base- b digits of n . For which values of b does

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$$

converge?

12.5.2 5.2 The Solutions**Problem [3, 1940, 7]**

If $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots$ and $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots$ are convergent series of real constants, prove that

$$(u_1 - v_1)^p + (u_2 - v_2)^p + (u_3 - v_3)^p + \cdots$$

p an integer ≥ 2 , is convergent.

Solution. Let $A = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots$ and $B = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots$. Since

$$(u_i + v_i)^2 + (u_i - v_i)^2 = 2u_i^2 + 2v_i^2$$

we have, for any positive integer n ,

$$\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 \leq 2 \sum_{i=1}^n u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n v_i^2 \leq 2A + 2B.$$

Since the terms are all nonnegative., it follows that

$$\sum_{i=1}^{\infty} (u_i - v_i)^2 \text{ is convergent.}$$

Therefore, the terms approach zero, so there exists an integer k so that

$$(u_i - v_i)^2 < 1 \text{ for all } i \geq k.$$

If p is an integer and $p \geq 2$, then $|u_i - v_i|^p \leq (u_i - v_i)^2$ for all $i \geq k$, so the series

$$\sum_{i=1}^{\infty} (u_i - v_i)^p$$

is absolutely convergent, and therefore convergent.

Remarks. The only reason that p needs to be an integer is so that the expression will be defined even when $u_i - v_i < 0$. If we use the series $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i - v_i|^p$, the result will hold even if p is not an integer.

A related generalization of this problem would include complex numbers. While strictly speaking we only defined infinite series of real numbers in Chapter 1, we have already noted that all the same definitions make sense in the complex numbers. In this space it makes sense to raise any real number, positive or negative, to any complex power. The same proof given above actually establishes the following:

If $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots$ and $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots$ are convergent series of real constants (that is, the u_i and v_i are real) and p is any complex number with real part not less than 2, prove that

$$(u_1 - v_1)^p + (u_2 - v_2)^p + (u_3 - v_3)^p + \cdots,$$

is absolutely convergent.

Problem [5, 1942, 3]

Is the following series convergent or divergent?

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{7} + \frac{2!}{3^2} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^2 + \frac{3!}{4^3} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^3 + \frac{4!}{5^4} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^4 + \cdots.$$

Solution. Use the Ratio Test. Let

$$a_n = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \left(\frac{19}{7}\right)^{n-1}, a_{n+1} = \frac{n!}{(n+1)^n} \left(\frac{19}{7}\right)^n.$$

Then

$$R_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \frac{19}{7} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{19}{7},$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{19}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{19}{7} \frac{1}{e}$$

Since $19/7 < 2.715$ and $e > 2.718$, $19/(7e) < 1$ and the series converges.

Problem [8, 1948, A3]

Let $\{a_n\}$ be a decreasing sequence of positive numbers with limit 0 such that

$$b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0$$

for all n . Prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} n b_n = a_1.$$

Solution. Since the b_n 's are the second differences of the a_n 's, it is convenient to let $c_n = a_n - a_{n+1}$; then

$$c_n - c_{n+1} = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = b_n.$$

Since the a_n 's decrease to zero, $c_n \geq 0$ for all n , and $c_n \rightarrow 0$. For $k \geq m$, we have $\sum_{i=m}^k b_i = c_m - c_{k+1}$, and therefore

$$\sum_{i=m}^{\infty} b_i = c_m = a_m - a_{m+1}$$

Similarly,

$$\sum_{m=1}^k (a_m - a_{m+1}) = a_1 - a_{k+1}, \quad \text{so} \quad \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - a_{m+1}) = a_1.$$

Thus

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=m}^{\infty} b_i \right) = a_1.$$

The b_n 's are nonnegative, and when summing nonnegative terms, rearrangement does not affect the value of the sum. For each index n , the term b_n appears exactly n times in the preceding double sum, once in each of the terms $\sum_{i=m}^{\infty} b_i$ for $m = 1, 2, \dots, n$. Hence

$$\sum_{n=1}^{\infty} n b_n = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=m}^{\infty} b_i \right) = a_1.$$

Remark. We noted in Chapter 2 that taking first differences is dual to taking partial sums. Since the b 's are the second differences of the a 's, the partial sums of the b 's will be (almost) the first differences of the a 's. Specifically,

$$\sum_{i=1}^k b_i = a_1 - a_2 - a_{k+1} + a_{k+2}.$$

Furthermore, the other factor, n , can be viewed as the partial sums of $\sum 1$, so it will have very nice first differences $n - (n+1) = -1$. This suggests that Abel's "summation by parts" formula (see Chapter 2) could improve matters, which is true. We do not do the calculation here, because it is essentially the same as the given solution, though perhaps more motivated. Indeed, the interested reader can try it for a bit of practice in working through the details when using Abel. In either case, the key to seeing the solution is recognizing that the b 's are the second differences of the a 's.

Problem [9, 1949, A3]

Assume that the complex numbers $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ are all different from zero, and that $|a_r - a_s| > 1$ for $r \neq s$. Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^3}$$

converges.

Solution. Let $S_k = \{n : k < |a_n| \leq k+1\}$ for $k = 0, 1, 2, \dots$. The discs $|z - a_n| \leq \frac{1}{2}$ are all disjoint by hypothesis, and for $n \in S_k$ these discs all lie in the annulus

$$\left\{ z : k - \frac{1}{2} \leq |z| \leq k + \frac{3}{2} \right\}$$

(a disc if $k = 0$). Let the cardinality of the set S_k be denoted by $|S_k|$. Then adding areas gives

$$|S_k| \frac{\pi}{4} \leq \pi \left[\left(k + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right] = 2\pi(2k+1)$$

so that $|S_k| \leq 8(2k+1)$ for $k > 0$. A separate calculation shows that $|S_0| \leq 9$. Then

$$\sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leq \frac{|S_k|}{k^3} \leq \frac{8(2k+1)}{k^3} \leq \frac{24}{k^2}$$

for $k \geq 1$ because $2k+1 \leq 3k$. Since S_0 is finite,

$$\sum_{n \in S_0} \frac{1}{|a_n|^3}$$

is finite.

Hence we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \in S_k} \frac{1}{|a_n|^3} \leq \sum_{n \in S_0} \frac{1}{|a_n|^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{k^2} < \infty.$$

The rearrangement of the sum in the first step is permissible since the terms are all positive. Thus the original series converges absolutely.

Problem [9, 1949, B2(i)]

Prove that

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(\log \log n)}{\log n}$$

diverges.

Solution. A convergent series cannot have blocks of terms whose sum is arbitrarily large. We shall show that the given series has such blocks.

For a positive integer k consider the set N_k of integers n such that

$$2\pi k - \frac{1}{3}\pi \leq \log \log n \leq 2\pi k$$

and let

$$T_k = \sum_{N_k} \frac{\cos(\log \log n)}{\log n}$$

We shall prove that $T_k \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$. Now $N_k = \{n : \exp(\exp(2\pi k - \frac{1}{3}\pi)) \leq n \leq \exp(\exp(2\pi k))\}$ and therefore $|N_k|$, the number of elements in N_k , satisfies

$$|N_k| \geq \exp(\exp(2\pi k)) - \exp(\alpha \exp(2\pi k)) - 1$$

where $\alpha = \exp(-\frac{1}{3}\pi)$.

Each term in the sum for T_k is at least

$$\frac{\cos(-\frac{1}{3}\pi)}{\exp(2\pi k)} = \frac{1}{2\exp(2\pi k)}$$

so

$$T_k \geq \frac{1}{2x_k} (\exp(x_k) - \exp(\alpha x_k) - 1)$$

where $x_k = \exp(2\pi k)$.

Now

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (\exp x - \exp \alpha x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\exp x - \alpha \exp \alpha x) = \infty$$

by L'Hôpital's Rule, using the fact that $\alpha < 1$. Since $x_k \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$, it follows that $T_k \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$, and this proves that the given series diverges.

Problem [10, 1950, A2]

Test for convergence the series

$$\frac{1}{\log(2!)} + \frac{1}{\log(3!)} + \frac{1}{\log(4!)} + \cdots + \frac{1}{\log(n!)} + \cdots$$

and

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3} \cdots \sqrt[n]{3}} + \cdots$$

Solution. For $n \geq 2$, we have $n^n > n!$, hence $n \log n > \log(n!)$ and

$$\frac{1}{\log(n!)} > \frac{1}{n \log n}$$

The first series therefore dominates the series

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

Since

$$\int_2^x \frac{dt}{t \log t} = \log \log x - \log \log 2$$

the improper integral $\int_2^{\infty} dt/(t \log t)$ diverges, and hence, by the integral test, so does $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \log n)$. Therefore the first series is divergent.

The denominator of the n th term of the second series is $3^{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}$, and $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ grows like $\log n$. Hence the n th term of the second series is about

$$\frac{1}{3^{\log n}} = \frac{1}{n^{\log 3}}$$

Now $\sum n^{-p}$ converges if $p > 1$ and $\log 3 > 1$, so the second series converges. We shall give the details of this argument. Since

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \log(n+1) > \log n$$

we have

$$3^{1+1/2+1/3+\cdots+1/n} > 3^{\log n} = n^{\log 3}.$$

Hence the second series is dominated by $\sum n^{-\log 3}$. Since the latter converges, so does the second series.

Problem [11, 1951, A7]

Show that if the series $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ converges, then the series $a_1 + a_2/2 + a_3/3 + \cdots + a_n/n + \cdots$ converges also.

Solution. This is a special case of a result sometimes called Abel's summation theorem: If the partial sums of the series $\sum a_n$ are bounded and the sequence $\{b_n\}$ decreases to zero, then $\sum a_n b_n$ is convergent.

[The text solution goes on to give a proof of Abel's summation theorem, which is substantially the same as the proof we have already given in Chapter 2.]

For the particular problem, take $b_n = 1/n$ and the result is immediate.

Problem [12, 1952, B5]

If the terms of a sequence $\{a_n\}$ are monotonic, and if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, show that $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ converges.

Solution 1. Since $\sum a_n$ converges, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Since the sequence is monotonic we have either

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0,$$

or

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq 0$$

In the second case we can change the sign of each term and thus without loss of generality we need only consider the case where the a_n 's are nonnegative and decrease to zero.

Let

$$S_k = \sum_{n=1}^k n(a_n - a_{n+1}).$$

Then

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2(2-1) + \cdots + a_k(k - (k-1)) - k(a_{k+1}) \\ &= \sum_{n=1}^k a_n - ka_{k+1}. \end{aligned}$$

Now since $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, the Cauchy criterion implies $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}) = 0$. But $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n} \geq na_{2n}$, and hence $\lim_{n \rightarrow \infty} 2na_{2n} = 0$; from this it follows that $\lim_{n \rightarrow \infty} na_{n+1} = 0$.

In the expression

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n - ka_{k+1}$$

both $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} ka_{k+1}$ exist, so

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n - \lim_{k \rightarrow \infty} (ka_{k+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n.$$

This establishes the desired convergence.

Solution 2. We may assume, as we have seen above, that the sequence $\{a_k\}$ decreases to zero. Then for each k ,

$$a_k = \sum_{n=k}^{\infty} (a_n - a_{n+1}).$$

So

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (a_n - a_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) \end{aligned}$$

Reversing the order of summation is justified because all terms are nonnegative.

Problem [13, 1953, B1]

Is the infinite series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$$

convergent? Prove your statement.

Solution. For every positive integer n , $n < 2^n$. Hence $n^{1/n} < 2$, so

$$\frac{1}{n^{(n+1)/n}} > \frac{1}{2n}$$

Since $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverges, so does

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$$

Problem [14, 1954, A6]

Suppose that $u_0, u_1, u_2, \dots$ is a sequence of real numbers such that

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

Prove that if $\sum u_n$ converges, then $u_k = 0$ for all k .

Solution. It is obvious from the hypothesis that the terms u_n are nonincreasing and non-negative. Thus, if any one term is zero, so are all its successors, and by induction using the hypothesis so are all its predecessors.

Suppose $\sum u_n$ converges. Let p be chosen so that $\sum_{n>p} u_n < 1$. Then, from the hypothesis,

$$u_p = \sum_{n>p} u_n^2 \leq \sum_{n>p} u_p u_n = u_p \sum_{n>p} u_n \leq u_p$$

with equality at the last step only if $u_p = 0$. But, looking at the first member and the last member, we see that equality must hold throughout. Thus $u_p = 0$ and hence all the u 's are zero, as we have shown above.

Problem [14, 1954, B2]

Assume as known the (true) fact that the alternating harmonic series

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \cdots$$

is convergent, and denote its sum by s . Rearrange the series as follows,

$$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \cdots$$

Assume as known the (true) fact that this series is also convergent, and denote its sum by S . Denote by s_k, S_k the k th partial sum of the respective series. Prove the following statements.

1. $S_{3n} = s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n}$.
2. $S \neq s$.

Solution. First, we have

$$\begin{aligned} s_{4n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \\ \frac{1}{2}s_{2n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots - \frac{1}{4n} \end{aligned}$$

Adding, we obtain

$$\begin{aligned} s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= S_{3n}. \end{aligned}$$

For the second part of the conclusion, since the alternating harmonic series is an alternating series with terms that decrease to zero, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ exists. Moreover, $s > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, so $s \neq 0$. Therefore

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{3}{2}s \neq s$$

Remark. Mathematics is full of arguments like this, that involve adding series term by term and cancelling some resulting zero terms. This can happen both with series of constants and series of functions. In this solution, the argument was carried out rigorously, using partial sums, but often enough it is shown for the infinite series themselves. There is something not quite trivial about this because it implicitly assumes that we can freely add or remove zero terms from an infinite sequence at will. Of course we want this to be true if our definition is reasonable, but since doing so can dramatically reindex the sequence of terms, it may not be immediately obvious that the sequence of partial sums will have the same limit behavior. Now, it is not hard to prove that such manipulations are always legal with our definition. It is worth noting that there are other less common notions of convergence for infinite series, and many of these lack this nice property.

Problem [15, 1954, A3]

Suppose that $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ is a convergent series of positive terms that monotonically decrease (that is, $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots$). Let P denote the set of all numbers that are sums of some (finite or infinite) subseries of $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Show that P is an interval if and only if

$$x_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i \text{ for every integer } n,$$

which we call condition (1).

Solution. Let $\mathbf{N}$ be the set of positive integers, and let J be a subset of $\mathbf{N}$. We write $S(J)$ for $\sum_{i \in J} x_i$. The problem requires us to show that the range of S is an interval if and only if (1) holds.

Suppose (1) fails for a given sequence. Let p be an index such that

$$x_p > \sum_{i > p} x_i.$$

Choose α so that $\sum_{i > p} x_i < \alpha < x_p$. Then there is no J for which $S(J) = \alpha$; for if $J \cap \{1, 2, \dots, p\} \neq \emptyset$, then $S(J) \geq x_p$ by the monotonicity of the x 's, while if $J \cap \{1, 2, \dots, p\} = \emptyset$, then $S(J) \leq \sum_{i > p} x_i$. Since $\sum_{i > p} x_i$ and x_p are both in range (S), we see that range (S) is not an interval. Thus (1) is necessary in order that range (S) be an interval.

Now suppose (1) holds and $0 < y < S(\mathbf{N})$. We shall construct a set L such that $S(L) = y$. We define a sequence $n_1, n_2, n_3, \dots$ by induction as follows. Let n_1 be the least index for which

$$x_{n_1} < y.$$

(Such an index exists because $x_k \rightarrow 0$.) Assuming that $n_1, n_2, \dots, n_k$ have been chosen so that

$$x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k} < y,$$

let n_{k+1} be the least index exceeding n_k such that

$$x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k} + x_{n_{k+1}} < y$$

(Again, such an index exists.)

Let $L = \{n_1, n_2, \dots\}$. Clearly

$$S(L) \leq y$$

which we call condition (2).

If $p \in N - L$, there is a least index k such that $n_k > p$. In choosing n_k we rejected p , hence

$$x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_{k-1}} + x_p \geq y$$

and therefore

$$S(L) + x_p \geq y$$

We split the remainder of the proof into two cases.

Case 1. (The set $N - L$ is finite.) Note that $N - L \neq \emptyset$, since in that case, $S(L) = S(\mathbf{N}) > y$, contradicting (2). Hence $N - L$ has a largest element that we can take to be p . Then

$$L = \{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}\} \cup \{p + 1, p + 2, \dots\}$$

Then combining previous results with (1),

$$S(L) = x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_{k-1}} + \sum_{i > p} x_i \geq x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_{k-1}} + x_p \geq y$$

which shows that $S(L) = y$.

Case 2. (The set $N - L$ is infinite.) Then for any $\epsilon > 0$, we can choose $p \in N - L$ so that $x_p < \epsilon$. Then we have

$$S(L) + \epsilon > S(L) + x_p \geq y$$

Since ϵ is arbitrary, we obtain $S(L) \geq y$. So again we must have $S(L) = y$. Since $S(\emptyset) = 0$, it follows that $\text{range}(S) = [0, S(\mathbf{N})]$. Thus (1) is both necessary and sufficient in order that $\text{range}(S)$ be an interval.

Problem [16, 1956, B6]

Given $T_1 = 2, T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1, n > 0$, prove:

1. If $m \neq n, T_m$ and T_n have no common factor greater than 1.
2. $\sum_{i=1}^{\infty} (1/T_i) = 1$.

Solution. The first few members of the sequence are $T_1 = 2, T_2 = 3, T_3 = 7$. We shall prove by induction that

$$T_{n+1} = 1 + \prod_{i=1}^n T_i \quad \text{for } n \geq 1$$

This is true for $n = 1$. Suppose it is true for $n = k$. Then

$$\begin{aligned} T_{k+2} &= 1 + T_{k+1} (T_{k+1} - 1) \\ &= 1 + T_{k+1} \left[\prod_{i=1}^k T_i \right] \\ &= 1 + \prod_{i=1}^{k+1} T_i. \end{aligned}$$

(The first step is by the given recursion, the second by the inductive hypothesis.) This completes the inductive proof.

Now suppose $m \neq n$, say $m < n$. Then our product representation shows that T_m divides $T_n - 1$, so T_m and T_n are relatively prime. This is the first statement we were to prove.

Next we prove by induction that

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} = 1 - \frac{1}{T_{n+1} - 1}$$

for all n . This is true for $n = 1$ and, if it is true for $n = k$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{T_i} &= 1 - \frac{1}{T_{k+1} - 1} + \frac{1}{T_{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{T_{k+1} (T_{k+1} - 1)} \\ &= 1 - \frac{1}{T_{k+2} - 1} \end{aligned}$$

completing the induction.

Since $T_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$, it follows from the above that

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{T_i} = 1$$

as required.

Problem [18, 1958, A6]

What is the smallest amount that may be invested at interest rate i , compounded annually, in order that one may withdraw 1 dollar at the end of the first year, 4 dollars at the end of the second year, ..., n^2 dollars at the end of the n th year, in perpetuity.

Answer: $(1+i)(2+i)/i^3$.

Solution. The present value of one dollar to be paid after n years is $(1+i)^{-n}$ dollars. Hence the value in dollars of the given annuity is

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(1+i)^{-n}$$

Since

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

we have

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

and

$$\frac{x+x^2}{(1-x)^3} = x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

for $|x| < 1$. Putting $x = 1/(1+i)$, we obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(1+i)^{-n} = \frac{(1+i)(2+i)}{i^3}.$$

(At 6 percent interest, the cost of the annuity would be \$10,109.26.)

Problem [19, 1958, B5]

The lengths of successive segments of a broken line are represented by the successive terms of the harmonic progression $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$. Each segment makes with the preceding segment a given angle θ . What is the distance and what is the direction of the limiting point (if there is one) from the initial point of the first segment?

Answer: The limiting point is at a distance

$$\sqrt{\left(\log \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \right)^2 + \frac{1}{4}(\theta - \pi)^2}$$

and at an angle

$$\pi - \theta + \arg \left[\log \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{i}{2}(\theta - \pi) \right]$$

Solution 1. We may identify the plane with the complex number plane in such a way that the first segment extends from 0 to 1. Then the next segment extends from 1 to $1 + \frac{1}{2}e^{i\theta}$, since this segment represents the complex number $\frac{1}{2}e^{i\theta}$.

The n th segment of the path represents the complex number $(1/n)e^{i(n-1)\theta}$, and when added to the previous $(n-1)$ segments, the sum ends at the point $\sum_{p=1}^n (1/p)e^{i(p-1)\theta}$. Thus the question really concerns the convergence and evaluation of

$$\sum_{p=1}^{\infty} (1/p) e^{i(p-1)\theta}$$

This becomes the harmonic series if $\theta = 0$ (or a multiple of 2π) and does not converge in this case. We shall show that the series converges in all other cases.

[Again the official solution now refers to Abel's Theorem, and we omit the proof and discussion, since it is superceded by the treatment in Chapter 2.]

For the present case, take $b_p = 1/p$ and $a_p = e^{i(p-1)\theta}$. Since the a_p 's form a geometric progression, and since we are assuming $e^{i\theta} \neq 1$, we have

$$\left| \sum_{p=1}^n a_p \right| = \left| \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

Thus the partial sums are bounded, Abel's Theorem applies, and the series in question converges whenever $e^{i\theta} \neq 1$.

To evaluate the series, we can use another theorem of Abel. If $\sum_{p=1}^{\infty} c_p$ converges, then

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{p=1}^{\infty} c_p r^p = \sum_{p=1}^{\infty} c_p$$

where the limit is taken for r increasing to 1 through real values.

In the present case,

$$\sum \frac{1}{p} e^{i(p-1)\theta} = e^{-i\theta} \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum \frac{1}{p} (re^{i\theta})^p$$

Putting $z = re^{i\theta}$, we recognize the series on the right as the Taylor's series expansion for the principal value of $-\log(1-z)$, valid for $|z| < 1$. Hence

$$\sum \frac{1}{p} e^{i(p-1)\theta} = -e^{-i\theta} \lim_{r \rightarrow 1^-} \log(1 - re^{i\theta}) = -e^{-i\theta} \log(1 - e^{i\theta})$$

Now

$$1 - e^{i\theta} = 2 \left(\sin \frac{1}{2}\theta \right) e^{(1/2)i(\theta-\pi)} \quad \text{for } 0 < \theta < 2\pi$$

and here $2 \sin \frac{1}{2}\theta > 0$ and $\frac{1}{2}(\theta - \pi)$ is the principal value of the argument (since $-\pi < \frac{1}{2}(\theta - \pi) < \pi$). Therefore

$$\log(1 - e^{i\theta}) = \log \left(2 \sin \frac{1}{2}\theta \right) + \frac{1}{2}i(\theta - \pi)$$

and

$$\sum \frac{1}{p} e^{i(p-1)\theta} = -e^{-i\theta} \left\{ \log \left(2 \sin \frac{1}{2}\theta \right) + \frac{1}{2}i(\theta - \pi) \right\}$$

The stated distance and angle now follow immediately.

Solution 2. One can prove the relation

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} e^{ip\theta} = -\log(1 - e^{i\theta}) = -\log \left(2 \sin \frac{1}{2}\theta \right) + \frac{1}{2}i(\pi - \theta)$$

using the theory of Fourier series. The Fourier series of $\frac{1}{2}(\pi - \theta)$ on the interval $[0, 2\pi]$ is readily found to be

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sin p\theta$$

With slightly more difficulty the Fourier series of $\log(2 \sin \frac{1}{2}\theta)$ is found to be

$$-\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \cos p\theta$$

Since both functions in the claimed representation for $\sum \frac{1}{p} e^{ip\theta}$ have continuous derivatives on the open interval $(0, 2\pi)$, they are represented by their Fourier series on this interval, i.e., the series converges and

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \cos p\theta &= -\log\left(2 \sin \frac{1}{2}\theta\right) \\ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sin p\theta &= \frac{1}{2}(\pi - \theta), \quad \text{for } 0 < \theta < \pi \end{aligned}$$

Combining these relations and using $e^{ip\theta} = \cos p\theta + i \sin p\theta$ we obtain the assertion.

Problem [20, 1959, B2]

Let c be a positive real number. Prove that c can be expressed in infinitely many ways as a sum of infinitely many distinct terms selected from the sequence

$$1/10, 1/20, \dots, 1/10n, \dots$$

Solution. [This problem is a special case of a more general result that we proved in Chapter 3. The official solution to this problem essentially follows our proof of that result.]

Problem [21, 1960, B2]

Evaluate the double series

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3k-j-(k+j)^2}$$

Answer: The sum is $4/3$.

Solution. If we write out the values of the double sequence of terms, it becomes evident that each of the terms 2^{-2m} occurs exactly once. Since all the terms are positive, the double series may be rearranged to make the simple series

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m}$$

which sums to $4/3$. The sum of the original double series is therefore $4/3$. To formalize this argument one must prove that $(j, k) \mapsto (k+j)^2 + 3k + j$ is a bijection from the set of ordered pairs of nonnegative integers to the set of nonnegative even integers. This is straightforward but long.

A direct analytic argument can be given as follows: Sum the double series along the diagonals defined by $j + k = n$, and then sum on n . We find

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3k-j-(k+j)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n 2^{-2k-n-n^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4}{3} (1 - 2^{-2n-2}) 2^{-n-n^2} \right] \\
&= \frac{4}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-n^2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)(n+2)} \right] \\
&= \frac{4}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(n+1)} - \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m(m+1)} \right] \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

At the third step, the separation of the sum into two sums is permissible because the new sums are convergent.

Problem [21, 1960, B6]

Any positive integer may be written in the form $n = 2^k(2l+1)$. Let $a_n = e^{-k}$ and $b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$. Prove that $\sum b_n$ converges.

Solution. It is clear that $a_n = e^0 = 1$ if n is odd and $a_n \leq e^{-1}$ if n is even. Therefore

$$b_{2k} = a_1 a_2 \cdots a_{2k} \leq e^{-k}$$

and

$$b_{2k+1} \leq e^{-k}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
b_1 + b_2 + \cdots + b_{2k} &< b_1 + b_2 + \cdots + b_{2k+1} \\
&\leq 1 + 2e^{-1} + 2e^{-2} + \cdots + 2e^{-2k} < 1 + \frac{2e^{-1}}{1 - e^{-1}}
\end{aligned}$$

Thus the partial sums of $\sum b_n$ are bounded. Since the series has positive terms, it converges.

Problem [24, 1963, B5]

Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers satisfying the inequalities

$$0 \leq a_k \leq 100a_n \text{ for } n \leq k \leq 2n \text{ and } n = 1, 2, \dots,$$

and such that the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converges. Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$$

Solution. For each positive integer k let

$$S_k = \sum_{n \geq k/2}^k a_n$$

Since $\sum a_n$ converges, we have $S_k \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$.
Rewriting the given condition slightly we have

$$0 \leq a_k \leq 100a_n \quad \text{for } \frac{1}{2}k \leq n \leq k$$

For each k there are at least $k/2$ integers n satisfying the double inequality. Adding these inequalities we have, therefore,

$$\frac{1}{2}ka_k \leq 100S_k$$

Hence

$$\limsup ka_k \leq 200 \lim S_k = 0.$$

Since $a_k \geq 0$, we conclude $\lim ka_k = 0$.

Problem [25, 1964, A3]

Let $P_1, P_2, \dots$ be a sequence of distinct points that is dense in the interval $(0, 1)$. The points $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ decompose the interval into n parts, and P_n decomposes one of these into two parts. Let a_n and b_n be the lengths of these two intervals. Prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n (a_n + b_n) = \frac{1}{3}.$$

(A sequence of points in an interval is said to be dense when every subinterval contains at least one point of the sequence.)

Solution. Let S_n be the sum of the cubes of the lengths of the segments formed by the points $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$. Take $S_0 = 1$. We can obtain S_n from S_{n-1} by removing the term $(a_n + b_n)^3$ and replacing it by $a_n^3 + b_n^3$, leaving all other terms fixed.

Hence

$$\begin{aligned} S_{n-1} - S_n &= (a_n + b_n)^3 - a_n^3 - b_n^3 \\ &= 3a_n b_n (a_n + b_n) \end{aligned}$$

Therefore

$$1 - S_k = S_0 - S_k = \sum_{n=1}^k 3a_n b_n (a_n + b_n).$$

Since, as we shall prove below, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n b_n (a_n + b_n) = 1$$

and the required result follows immediately.

We now show that $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 0$. Let t be a positive integer. Because the set $\{P_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$ is dense, we can choose an integer q so large that $\{P_1, P_2, \dots, P_q\}$ meets each of the intervals

$$[0, 1/t], [1/t, 2/t], \dots, [(t-1)/t, 1].$$

Suppose $k \geq q$ and let $l_0, l_1, \dots, l_k$ be the lengths of the intervals determined by the division points $P_1, P_2, \dots, P_k$. Then each of these intervals has length at most $2/t$, so

$$S_k = \sum_{i=0}^k l_i^3 \leq \left(\frac{2}{t}\right)^2 \sum_{i=0}^k l_i = \frac{4}{t^2}$$

Since t was arbitrary, this proves

$$\lim S_k = 0$$

Problem [25, 1964, A5]

Prove that there is a constant K such that the following inequality holds for any sequence of positive numbers $a_1, a_2, a_3, \dots$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

Solution. Let $k = 2t$ be some fixed even positive integer. We shall prove

$$\sum_{n=1}^k \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^k \frac{1}{a_n}$$

From this inequality, the required inequality for infinite sums, with $K = 4$, follows immediately.

Let $b_1, b_2, \dots, b_k$ be the terms $a_1, a_2, \dots, a_k$ enumerated in increasing order. For $1 \leq p \leq t$ we have

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{2p} &\geq a_1 + a_2 + \dots + a_{2p-1} \\ &\geq b_1 + b_2 + \dots + b_{2p-1} \geq pb_p \end{aligned}$$

since all terms are positive and since the last p terms are at least b_p . Therefore

$$\frac{2p-1}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2p-1}} \leq \frac{2p-1}{pb_p} < \frac{2}{b_p}$$

Also

$$\frac{2p}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2p}} \leq \frac{2}{b_p}.$$

Hence

$$\frac{2p-1}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2p}} < \frac{4}{b_p}$$

Thus

$$\sum_{p=1}^t \left[\frac{2p-1}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2p}} \right] < \sum_{p=1}^t \frac{4}{b_p}$$

Rewriting the left-hand sum, we have

$$\sum_{n=1}^k \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq \sum_{p=1}^t \frac{4}{b_p} < \sum_{p=1}^k \frac{4}{b_p} = 4 \sum_{n=1}^k \frac{1}{a_n}$$

If the series $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n)$ diverges, the given inequality is deemed to be satisfied automatically. Otherwise we have

$$\sum_{n=1}^k \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

and hence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Problem [25, 1964, B1]

Let $u_k (k = 1, 2, \dots)$ be a sequence of integers, and let V_n be the number of those that are less than or equal to n . Show that if

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/u_k < \infty$$

then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n/n = 0$$

Solution. It must have been intended that the u 's be positive, since otherwise we could have $\sum 1/u_k$ convergent but all the V 's infinite. Hence we assume that $\sum 1/u_k$ is a convergent series of positive terms. Then $u_k \rightarrow \infty$, and the V 's are finite. Since the convergence of a series of positive terms is not affected by rearrangement, we can assume that $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \cdots$. Then, for a fixed p and any n so large that $V_n > p$ we have

$$\sum_{k=p+1}^{V_n} 1/u_k \geq \frac{V_n - p}{n}$$

because there are $V_n - p$ terms in the sum and each is at least $1/n$. Therefore

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{n} \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} 1/u_k.$$

Since this is true for any p we have

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{n} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=p+1}^{\infty} 1/u_k = 0$$

But $V_n/n \geq 0$ for all n and therefore $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n/n = 0$.

Problem [25, 1964, B5]

Let $u_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ denote the least common multiple of the first n terms of a strictly increasing sequence of positive integers (for example, the sequence 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12). Prove that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/u_n$$

is convergent.

Solution 1. Let u be a positive integer. For each divisor d of u exceeding $\sqrt{u}$ there is another u/d that is less than $\sqrt{u}$. Hence at least half of the positive divisors of u are less than $\sqrt{u}$, so the number of positive divisors is at most $2\sqrt{u}$.

Now u_n , being the least common multiple of n distinct positive integers, has at least n positive divisors, so $2\sqrt{u_n} \geq n$. Therefore, $\sum 1/u_n$ is dominated by the convergent series $\sum 4/n^2$ and is itself convergent.

Solution 2 [Due to R.L. Graham]. The following proof shows that the upper bound for such sums is 2.

Let $a_1, a_2, \dots$ be a strictly increasing sequence of positive integers. Then

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n} \\ &\geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{g.c.d. } \{a_{n-1}, a_n\}}{a_{n-1}a_n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\text{l.c.m. } \{a_{n-1}, a_n\}} \\ &\geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\text{l.c.m. } \{a_1, a_2, \dots, a_n\}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{u_n}. \end{aligned}$$

(Here g.c.d. stands for greatest common divisor and l.c.m. stands for least common multiple.) Since $u_1 = a_1$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n} \leq \frac{2}{a_1}.$$

There are many a -sequences for which $\sum 1/u_n = 2$; for example, 1, 2, 4, 8, ... or 1, 2, 3, 6, 12, ..., $3 \cdot 2^{n-3}$, ...

Problem [27, 1966, B3]

Show that if the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

is convergent, where $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ are positive real numbers, then the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2} p_n$$

is also convergent.

Solution. Set $q_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$, with $q_0 = 0$. We are led to estimate $S_N = \sum_{n=1}^N (n/q_n)^2 (q_n - q_{n-1})$ in terms of $T = \sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$. Note that

$$\begin{aligned}
S_N &\leq \frac{1}{p_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_n q_{n-1}} (q_n - q_{n-1}) \\
&= \frac{1}{p_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_{n-1}} - \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_n} \\
&= \frac{1}{p_1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{q_n} - \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_n} \\
&\leq \frac{5}{p_1} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{n}{q_n} + \sum_{n=2}^N \frac{1}{q_n}.
\end{aligned}$$

By Schwarz's inequality,

$$\left(\sum_{n=2}^N \frac{n}{q_n} \right)^2 \leq \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{q_n^2} p_n \sum_{n=2}^N \frac{1}{p_n}$$

and thus

$$S_N \leq \frac{5}{p_1} + 2\sqrt{S_N T} + T$$

This inequality is quadratic in $\sqrt{S_N}$ and by the quadratic inequality we have

$$\sqrt{S_N} \leq \sqrt{T} + \sqrt{2T + 5/p_1}$$

Thus our series is positive and has bounded partial sums, hence it must converge.

Problem [30,1969,B5]

Let $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ be an increasing sequence of positive integers. Let the series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ be convergent. For any number x let $k(x)$ be the number of the a_n 's that do not exceed x . Show that $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x)/x = 0$.

Solution. The following proof shows that it is not necessary to stipulate that the a_n be integers. Suppose that for some $\epsilon > 0$ there are $x_j \rightarrow \infty$ with $k(x_j)/x_j \geq \epsilon$. Note that if $1 \leq n \leq k(x_j)$, then (because the a_n increase) $a_n \leq a_{k(x_j)} \leq x_j$ and $1/a_n \geq 1/x_j$. Now for any positive integer N ,

$$\sum_{n=N}^{\infty} 1/a_n \geq \sup_j \sum_{n=N}^{k(x_j)} 1/a_n \geq \sup_j \frac{k(x_j) - N}{x_j} \geq \sup_j (\epsilon - N/x_j) = \epsilon.$$

But this contradicts the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$, which implies

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} 1/a_n = 0$$

Problem [36,1975,B5]

Let $f_0(x) = e^x$ and $f_{n+1}(x) = x f_n'(x)$ for $n = 0, 1, 2, \dots$. Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1)}{n!} = e^e$$

Solution. Since $f_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, a straightforward mathematical induction proves that $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k/k!$. Then, since all terms are positive, one has

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} = e^e.$$

Problem [39, 1978, B2]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n + mn^2 + 2mn}$$

as a rational number.

Answer: $7/4$.

Solution. Let S be the desired sum. Then

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n+2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \left[\left(1 - \frac{1}{n+3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+5} \right) + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \left[\left(1 - \frac{1}{n+3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+4} \right) + \cdots \right] \end{aligned}$$

Notice that the bracketed expression is in fact a telescoping sum for each fixed n . Hence

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &\quad \times \lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \cdots - \frac{1}{k+n+1} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) + \cdots + \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h+1} + \frac{1}{h+2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h-1} \right) - \frac{1}{h+2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h} \right) \right] \\ &= \frac{6+3+2}{6} + \frac{12+6+4+3}{2 \cdot 12} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{11}{6} + \frac{25}{24} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

where we have identified the last two series as known telescoping series. Thus $S = 7/4$.

Problem [43, 1982, A2]

For positive real x , let

$$B_n(x) = 1^x + 2^x + 3^x + \cdots + n^x.$$

Prove or disprove the convergence of

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n(\log_2 2)}{(n \log_2 n)^2}.$$

Answer: The series is convergent.

Solution. Since $x = \log_2 n > 0$, $B_n(x) = 1^x + 2^x + \cdots + n^x \leq n(n^x)$ and

$$0 \leq \frac{B_n(\log_2 2)}{(n \log_2 n)^2} \leq \frac{n \cdot n^{\log_2 2}}{(n \log_2 n)^2} = \frac{2}{n (\log_2 n)^2}$$

Notice finally that the series whose n th term is given by the expression at the right hand of this chain of inequalities converges by the Integral Test or by the Abel-Dini scale, so the series converges by the Comparison Test.

Problem [45, 1984, A2]

Express $\sum_{k=1}^{\infty} (6^k / (3^{k+1} - 2^{k+1}) (3^k - 2^k))$ as a rational number.

Answer: The sum is 2.

Solution. Let $S(n)$ denote the n th partial sum of the given series. Then

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{3^k}{3^k - 2^k} - \frac{3^{k+1}}{3^{k+1} - 2^{k+1}} \right] = 3 - \frac{3^{n+1}}{3^{n+1} - 2^{n+1}},$$

and the series converges to $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = 2$.

Problem [47, 1986, A3]

Evaluate $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Arccot}(n^2 + n + 1)$, where $\operatorname{Arccot} t$ for $t \geq 0$ denotes the number θ in the interval $0 < \theta \leq \pi/2$ with $\cot \theta = t$.

Answer: The series converges to $\pi/2$.

Solution 1. If $\alpha = \operatorname{Arccot} x$ and $\beta = \operatorname{Arccot} y$ for some $x, y > 0$, then the addition formula

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

shows that

$$\operatorname{Arccot} x + \operatorname{Arccot} y = \operatorname{Arccot} \frac{xy - 1}{x + y}$$

provided that $\operatorname{Arccot} x + \operatorname{Arccot} y \leq \pi/2$. The latter condition is equivalent to $\operatorname{Arccot} x \leq \operatorname{Arccot}(1/y)$, which is equivalent to $x \geq 1/y$, and hence equivalent to $xy \geq 1$. Verifying the $xy \geq 1$ condition at each step, we use the previous equation to compute the first few partial sums,

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccot} 1 &= \operatorname{Arccot} 1, \\ \operatorname{Arccot} 1 + \operatorname{Arccot} 3 &= \operatorname{Arccot}(1/2), \\ \operatorname{Arccot} 1 + \operatorname{Arccot} 3 + \operatorname{Arccot} 7 &= \operatorname{Arccot}(1/3),\end{aligned}$$

and guess that $\sum_{n=0}^{m-1} \operatorname{Arccot}(n^2 + n + 1) = \operatorname{Arccot}(1/m)$ for all $m \geq 1$. This is easily proved by induction on m : the base case is above, and the inductive step is

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^m \operatorname{Arccot}(n^2 + n + 1) &= \operatorname{Arccot}(m^2 + m + 1) + \sum_{n=0}^{m-1} \operatorname{Arccot}(n^2 + n + 1) \\ &= \operatorname{Arccot}(m^2 + m + 1) + \operatorname{Arccot}\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= \operatorname{Arccot}\left(\frac{(m^2 + m + 1)/m - 1}{m^2 + m + 1 + 1/m}\right) \\ &= \operatorname{Arccot}\left(\frac{1}{m+1}\right)\end{aligned}$$

Hence

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Arccot}(n^2 + n + 1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Arccot}\left(\frac{1}{m}\right) = \operatorname{Arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$$

Solution 2. For real $a \geq 0$ and $b \neq 0$, $\operatorname{Arccot}(a/b)$, is the argument (between $-\pi/2$ and $\pi/2$) of the complex number $a + bi$. Therefore, if any three complex numbers satisfy $(a + bi)(c + di) = (e + fi)$, where $a, c, e \geq 0$ and $b, d, f \neq 0$, then $\operatorname{Arccot}(a/b) + \operatorname{Arccot}(c/d) = \operatorname{Arccot}(e/f)$. Factoring the polynomial $n^2 + n + 1 + i$ yields

$$(n^2 + n + 1 + i) = (n + i)(n + 1 - i).$$

Taking arguments, we find that $\operatorname{Arccot}(n^2 + n + 1) = \operatorname{Arccot} n - \operatorname{Arccot}(n + 1)$. (This identity can also be proved from the difference formula for the cotangent, but then one needs to guess the identity in advance.) The series $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Arccot}(n^2 + n + 1)$ telescopes to $\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{Arccot}(0) - \operatorname{Arccot}(n + 1)) = \pi/2$.

Related question: Evaluate the infinite series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{8n}{n^4 - 2n^2 + 5}\right)$$

Problem [48, 1987, A6]

For each positive integer n , let $a(n)$ be the number of zeroes in the base 3 representation of n . For which positive real numbers x does the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{a(n)}}{n^3}$$

converge?

Answer: For positive real x , the series converges if and only if $x < 25$.

Solution. The integer $n \geq 1$ has exactly $k + 1$ digits in base 3 if and only if $3^k \leq n < 3^{k+1}$. Define

$$S_k = \sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} \frac{x^{a(n)}}{n^3}, \quad \text{and} \quad T_k = \sum_{n=3^k}^{3^{k+1}-1} x^{a(n)}$$

The given series $\sum_{n=1}^{\infty} x^{a(n)}/n^3$ has all terms positive, so it will converge if and only if $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ converges. For $3^k \leq n < 3^{k+1}$, we have $3^{3k} \leq n^3 < 3^{3k+3}$, so $T_k/3^{3k+3} \leq S_k \leq T_k/3^{3k}$. Therefore $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ converges if and only if $\sum_{k=0}^{\infty} T_k/3^{3k}$ converges. The number of n with $k+1$ digits base 3 and satisfying $a(n) = i$ is $\binom{k}{i} 2^{k+1-i}$, because there are $\binom{k}{i}$ possibilities for the set of positions of the i zero digits (since the leading digit cannot be zero), and then 2^{k+1-i} ways to select 1 or 2 as each of the remaining digits. Therefore

$$T_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 2^{k+1-i} x^i = (x+2)^k$$

Hence

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k/3^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+2}{27} \right)^k$$

which converges if and only if $|(x+2)/27| < 1$. For positive x , this condition is equivalent to $0 < x < 25$.

Remark (by Kedlaya, Poonen, Vakil). More generally, let $\alpha_k(n)$ be the number of zeros in the base k expansion of n , and let $A_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha_k(n)}/n^k$. Then $A_k(x)$ converges at a positive real number x if and only if $x < k^k - k + 1$.

Problem [49, 1988, A3]

Determine, with proof, the set of real numbers x for which

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \csc \frac{1}{n} - 1 \right)^x$$

converges.

Answer: The series converges if and only if $x > 1/2$.

Solution. Define

$$a_n = \frac{1}{n} \csc \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - 1$$

Taking $t = 1/n$ in the inequality $0 < \sin t < t$ for $t \in (0, \pi)$, we obtain $a_n > 0$, so each term a_n^x of the series is defined for any real x . Using $\sin t = t - t^3/3! + O(t^5)$ as $t \rightarrow 0$, we have as $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right)} - 1 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)} - 1 \\ &= \frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

In particular, if $b_n = 1/n^2$, then a_n^x/b_n^x has finite limit as $n \rightarrow \infty$, so by the Limit Comparison Test, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^x$ converges if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2x}$ converges, which by the Integral Comparison Test holds if and only if $2x > 1$, i.e., $x > 1/2$.

Problem [49, 1988, B4]

Prove that if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series of positive real numbers, then so is

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^{n/(n+1)}$$

Solution. If $a_n \geq 1/2^{n+1}$, then

$$a_n^{n/(n+1)} = \frac{a_n}{a_n^{1/(n+1)}} \leq 2a_n$$

If $a_n \leq 1/2^{n+1}$, then $a_n^{n/(n+1)} \leq 1/2^n$. Hence

$$a_n^{n/(n+1)} \leq 2a_n + \frac{1}{2^n}$$

Since $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 1/2^n)$ converges, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{n/(n+1)}$ also converges by the Comparison Test.

Problem [55, 1994, A1]

Suppose that a sequence $a_1, a_2, a_3, \dots$ satisfies $0 < a_n < a_{2n} + a_{2n+1}$ for all $n \geq 1$. Prove that series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

Solution. For $m \geq 1$, let $b_m = \sum_{i=2^{m-1}}^{2^m-1} a_i$. Summing $a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$ from $n = 2^{m-1}$ to $n = 2^m - 1$ yields $b_m \leq b_{m+1}$ for all $m \geq 1$. For any $t \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{2^t-1} a_n = \sum_{m=1}^t b_m \geq tb_1 = ta_1$$

which is unbounded as $t \rightarrow \infty$ since $a_1 > 0$, so $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

Alternatively, assuming the series converges to a finite value L , we obtain the contradiction

$$\begin{aligned} L &= b_1 + (b_2 + b_3 + \cdots) \\ &\geq b_1 + (b_1 + b_2 + \cdots) \\ &= b_1 + L \end{aligned}$$

Problem [60, 1999, A4]

Sum the series

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n3^m + m3^n)}$$

Answer: The series converges to $9/32$.

Solution. Denote the series by S , and let $a_n = 3^n/n$. Note that

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_m (a_m + a_n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n (a_m + a_n)}$$

where the second equality follows by interchanging m and n . Thus

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_m \sum_n \left(\frac{1}{a_m (a_m + a_n)} + \frac{1}{a_n (a_m + a_n)} \right) \\ &= \sum_m \sum_n \frac{1}{a_m a_n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \right)^2. \end{aligned}$$

Finally, if

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

then

$$3A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

so subtracting gives

$$2A = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$$

Hence

$$A = \frac{3}{4}$$

so $S = 9/32$.

Remark. This solution uses a trick that is powerful in general, namely interchanging the roles of the variables and combining the results to introduce a more symmetric expression, which is often more workable. It is important when doing such things to check that the series does in fact converge to something. Operating on a divergent series can sometimes give a convergent result. In this case, since the terms of the double series are positive, the partial sums are bounded above by $9/32$ (using the given argument), so that this series must be convergent. Since it is convergent, the analysis above applies, so it does sum to $9/32$. In this case, there is no additional work to be done, but it is important to remember not to assume convergence a priori.

Remark (by Kedlaya, Poonen, Vakil) The value of A can also be derived by differentiating both sides of

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \frac{3}{3-x}$$

and then evaluating at $x = 1$.

Problem [61, 2000, A1]

Let A be a positive real number. What are the possible values of $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$, given that $x_0, x_1, \dots$ are positive numbers for which $\sum_{j=0}^{\infty} x_j = A$?

Answer: The possible values comprise the interval $(0, A^2)$.

Solution 1. Since all terms in the series are positive, we may rearrange terms to deduce

$$0 < \sum x_i^2 < \sum x_i^2 + \sum_{i < j} 2x_i x_j = \left(\sum x_i \right)^2 = A^2.$$

Thus it remains to show that each number in $(0, A^2)$ is a possible value of $\sum x_i^2$. We use geometric series. Given $0 < r < 1$, there is a geometric series $\sum x_i$ with common ratio r and sum A : it has $x_0/(1-r) = A$ so $x_0 = (1-r)A$ and $x_j = r^j(1-r)A$. Then

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2 = \frac{x_0^2}{1-r^2} = \frac{1-r}{1+r} A^2$$

To make this equal a given number $B \in (0, A^2)$, take $r = (A^2 - B) / (A^2 + B)$.

Solution 2. As in Solution 1, we prove $0 < \sum x_i^2 < A^2$, and it remains to show that each number in $(0, A^2)$ is a possible value of $\sum x_i^2$. There exists a series of positive numbers $\sum x_i$ with sum A . Then $x_0/2, x_0/2, x_1/2, x_1/2, x_2/2, \dots$ also sums to A but its squares sum to half the previous sum of squares. Iterating shows that the sum of squares can be arbitrarily small.

Given any series $\sum x_i$ of positive terms with sum A , form a weighted average of it with the series $A + 0 + 0 + \dots$; in other words, choose $t \in (0, 1)$ and define a new series of positive terms $\sum y_i$ by setting $y_0 = tx_0 + (1-t)A$ and $y_i = tx_i$ for $i \geq 1$. Then $\sum y_i = A$, and

$$\sum y_i^2 = t^2 \sum x_i^2 + 2t(1-t)x_0A + (1-t)^2A^2.$$

As t runs from 0 to 1, the Intermediate Value Theorem shows that this quadratic polynomial in t takes on all values strictly between $\sum x_i^2$ and A^2 . Since $\sum x_i^2$ can be made arbitrarily small, any number $(0, A^2)$ can occur as $\sum y_i^2$.

Problem [62, 2001, B3]

For any positive integer n , let $\langle n \rangle$ denote the closest integer to $\sqrt{n}$. Evaluate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\langle n \rangle} + 2^{-\langle n \rangle}}{2^n}$$

Answer. The series converges to 3.

Solution (by the authors). The trick is to regroup this sum based on the value of $\langle n \rangle$. First, we notice that

$$\begin{aligned} \langle n \rangle = k &\Leftrightarrow k - 1/2 \leq \sqrt{n} < k + 1/2 \\ &\Leftrightarrow k^2 - k + 1/4 \leq n < k^2 + k + 1/4 \\ &\Leftrightarrow k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k. \end{aligned}$$

Now we have

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\langle n \rangle} + 2^{-\langle n \rangle}}{2^n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k} \frac{2^k + 2^{-k}}{2^n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (2^k + 2^{-k}) \sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k} 2^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (2^k + 2^{-k}) (2^{-k^2+k} - 2^{-k^2-k}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k^2+2k} + 2^{-k^2} - 2^{-k^2} - 2^{-k^2-2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k(k-2)} - 2^{-k(k+2)}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(k-2)} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(k+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(k-2)} - \sum_{k=3}^{\infty} 2^{-k(k-2)} \\
&= \sum_{k=1}^2 2^{-k(k-2)} = 2 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Note that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\langle n \rangle} + 2^{-\langle n \rangle}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-\langle n \rangle}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+\langle n \rangle}}$$

Problem [63, 2002, A6]

Fix an integer $b \geq 2$. Let $f(1) = 1, f(2) = 2$, and for each $n \geq 3$, define $f(n) = nf(d)$, where d is the number of base- b digits of n . For which values of b does

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$$

converge?

Answer: The series converges only for $b = 2$.

Solution (by the authors). As in the previous problem, the trick is a clever regrouping. Let $b > 2$, and suppose for the sake of contradiction that the series converges. Notice that $f(n) = nf(d)$ for $b^{d-1} \leq n \leq b^d - 1$. Then we have, comparing to a Riemann sum at the appropriate moment,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} &= \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{n=b^{d-1}}^{b^d-1} \frac{1}{nf(d)} \\
&= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{f(d)} \sum_{n=b^{d-1}}^{b^d-1} \frac{1}{n} \\
&\geq \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{f(d)} \int_{b^{d-1}}^{b^d} \frac{dx}{x} \\
&= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{f(d)} [\log(b^d) - \log(b^{d-1})] \\
&= \log b \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{f(d)} \\
&> \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{f(d)}
\end{aligned}$$

since $\log b \geq \log 3 > 1$. But this is a contradiction, since we supposed the series to converge to a positive real number.

Now take $b = 2$. First, by a similar line of reasoning to the above, we have for each $k \geq 4$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{2^k-1} \frac{1}{f(n)} &= \sum_{d=3}^k \sum_{n=2^{d-1}}^{2^d-1} \frac{1}{nf(d)} \\
&= \sum_{d=3}^k \frac{1}{f(d)} \sum_{n=2^{d-1}}^{2^d-1} \frac{1}{n} \\
&\leq \sum_{d=3}^k \left(\frac{1}{f(d)} \int_{2^{d-1}}^{2^d} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2^d} \right) \\
&= \sum_{d=3}^k \left(\frac{1}{f(d)} [\log(2^d) - \log(2^{d-1})] + \frac{1}{2^d} \right) \\
&= \sum_{d=3}^k \left(\frac{\log 2}{f(d)} + \frac{1}{2^d} \right) \\
&\leq \log 2 \sum_{d=4}^k \frac{1}{f(d)} + \log 2 \frac{1}{f(3)} + \frac{1}{4} \\
&= \log 2 \sum_{n=4}^k \frac{1}{f(n)} + \frac{\log 2}{6} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Now, write

$$S(k) = \sum_{n=4}^k \frac{1}{f(n)}$$

We have just proven that

$$S(2^k - 1) \leq \log 2(S(k) + 1/6) + 1/4.$$

We are then led to consider the equation

$$S = \log 2(S + 1/6) + (1/4)$$

which has solution $S = 1/(12 - 12 \log 2) = 0.4294485\dots$. Notice that $S(4) = 1/f(4) = 1/8 < 0.4294485\dots$. By a straightforward induction we can show that whenever $S(k) < 0.4294485\dots$, so also $S(2^k - 1) < 0.4294485$. Thus $S(k) < 0.4294485\dots$ for arbitrarily large k , so that in fact, since the $S(k)$ are certainly increasing (the terms of our series are positive), $S(k) < 0.4294485\dots$. By adding back the first three terms of our series, we see that our original series has bounded partial sums, so it converges.

12.6 Final Diversions

We hope that you have found the earlier chapters of this book to be enlightening and enjoyable. As a parting gift to you, we provide this concluding chapter as a sort of dessert, which we believe you will find entertaining and worthwhile. Here we include a few puzzles with solutions. Each puzzle has a solution that in some way involves reasoning about infinite series. A number of pictorial proofs of basic facts about infinite series are included as well. The results will be familiar to you by this point and the pictures may be illuminating. Additionally, we provide a collection of fallacious "proofs" collected from math club presentations and from memorable discussions with colleagues while enjoying a cup of coffee. References labeled FFF refer to Fallacies, Flaws and Flimflam as offered in the College Mathematics Journal (CMJ)

and the MAA book by Edward Barbeau entitled *Mathematical Fallacies, Flaws and Flimflam*. We invite the reader to determine what is wrong with each of these arguments.

12.6.1 6.1 Puzzles

Puzzle 1

(Note: This puzzle is often referred to as the "pebbling problem.") Consider an infinite grid of squares with one corner (i.e., a single quadrant). Six of the squares are colored, as indicated in the figure. At the beginning, these six colored squares are each occupied by a

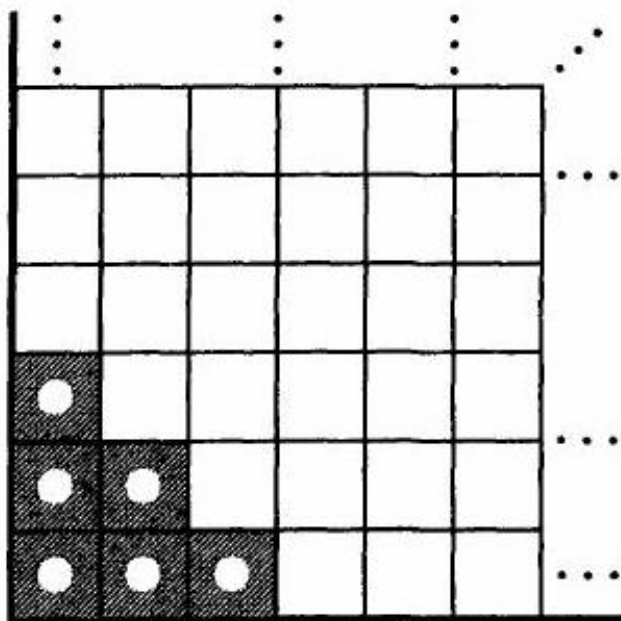


FIGURE 6.1

Setup for the Pebbling Problem

single stone (or pebble). Now, we are allowed to remove any stone, provided we replace it by two new stones in the square directly above and in the square directly to the right. If either of these squares are already occupied, the stone cannot be removed at that time.

1. Is it possible, by these operations, to evacuate all six of the colored squares?
2. Suppose instead that only the corner square is occupied by a stone. In this case, is it possible to evacuate the six colored squares?

Puzzle 2

Now consider an infinite checkerboard, this time infinite in all directions. On this board, there is drawn a horizontal line dividing the checkerboard into an upper and lower half. The following solitaire game is played. The player begins by placing any finite number of checkers, at most one to a square, in the lower half of the board. Then the game is played like peg solitaire. Any checker may jump over an adjacent (but not diagonally) checker and land in the square just beyond, provided the destination square is unoccupied. The jumped-over checker is removed. The goal of the game is to get a checker as far into the upper half of the board as possible given the starting configuration. For each positive integer n , let c_n be the minimum number of starting checkers necessary to place a checker in the n th row above the line. For example, $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, as indicated in Figures 6.2 and 6.3. How does the sequence c_n increase

as n gets large?

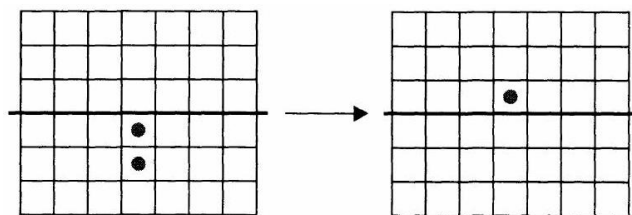


FIGURE 6.2

Solution for $c_1 = 2$

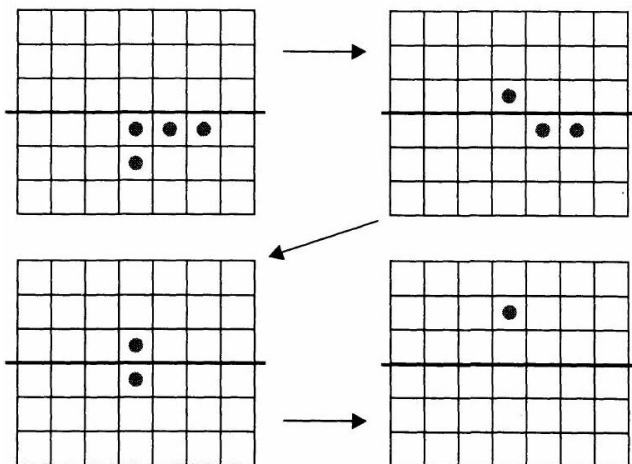


FIGURE 6.3

Solution for $c_2 = 4$

Puzzle 3

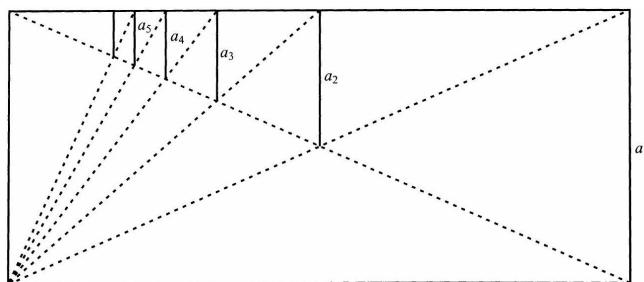
Desert Dan is trying to cross a 500-mile desert in a jeep. Unfortunately, his jeep can hold only enough fuel to travel 50 miles. However, Desert Dan has an infinite collection of containers that he can use to leave caches of fuel for himself to use on a later trip. Further, on the entering edge of the desert there is a boundless supply of fuel, so that Desert Dan can return to the entering edge of the desert as often as he wishes. Can he cross the desert?

Solutions for these puzzles appear at the end of this chapter.

12.6.2 6.2 Visuals

Proofs without Words (PWWs) are what Martin Gardner describes as "look-see" diagrams that assist in illustrating the beauty and truth of mathematical results or theorems. What follows is a set of diagrams (PWWs) as offered in the Mathematical Association of America publications entitled *The American Mathematical Monthly* (AMM), *Mathematics Magazine* (MM), and *The College Mathematics Journal* (CMJ). Nearly all of these diagrams also appear in the two MAA published books by Roger B. Nelsen entitled *Proofs without Words* and *Proofs without Words II*. We also make available three additional visuals, not PWWs, but nevertheless very similar in spirit. We list here the title for each visual and credit the individual(s) who made the result available. The source for the original publication is also indicated.

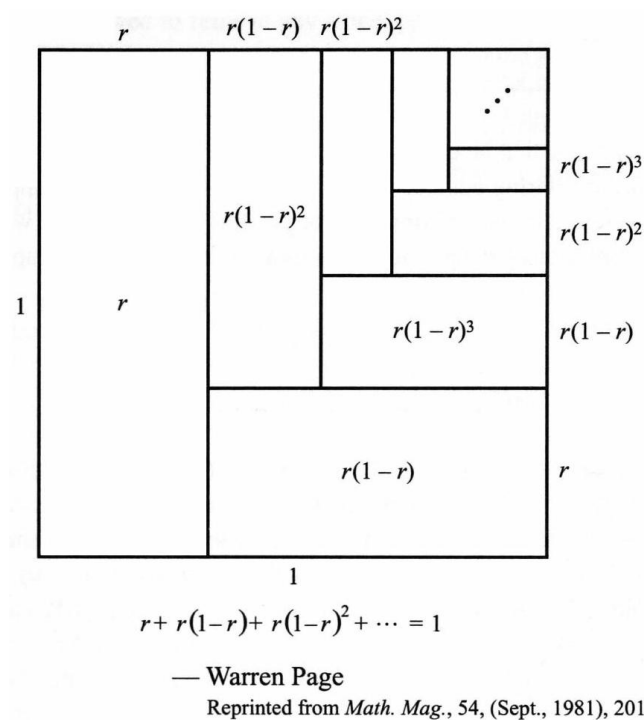
Can You Sum This Familiar Series?



-Dennis Gittinger

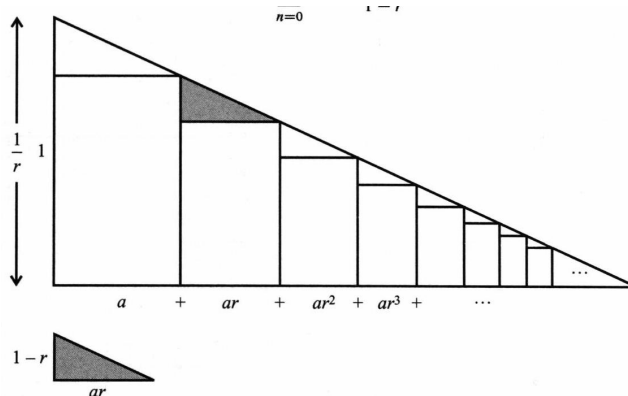
Reprinted from Coll. Math. J., 28, (Nov., 1997), 393

Geometric Sums



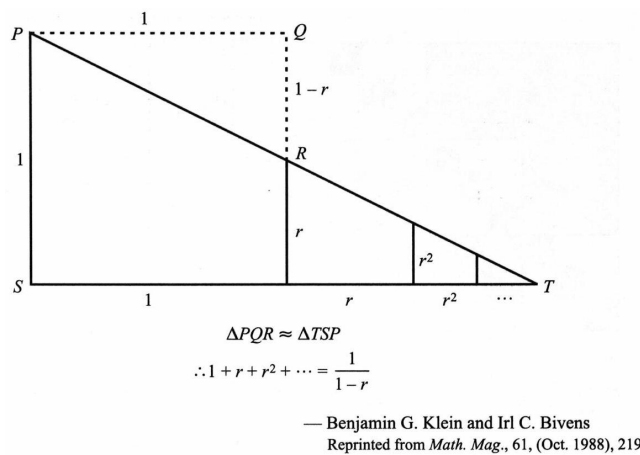
Geometric Series I

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

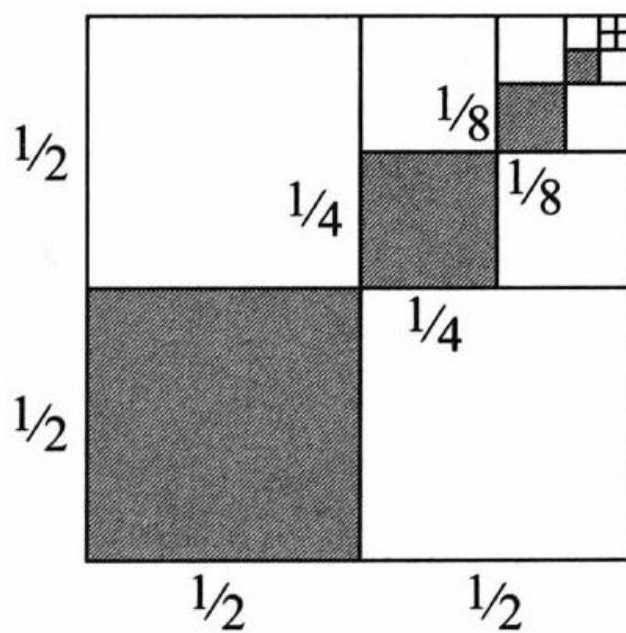


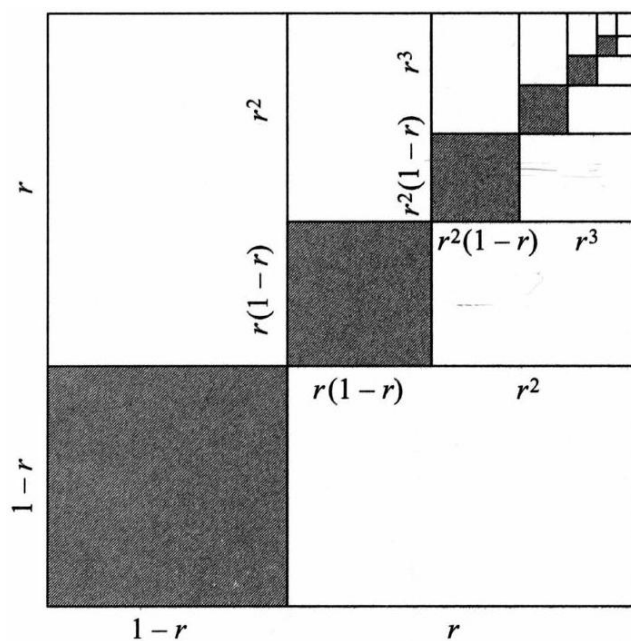
$$\frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots}{1/r} = \frac{ar}{1-r}$$

Geometric Series II



Geometric Series III





$$(1-r)^2 + r^2(1-r)^2 + r^4(1-r)^2 + \cdots = \frac{(1-r)^2}{(1-r)^2 + 2r(1-r)} = \frac{1-r}{1+r}$$

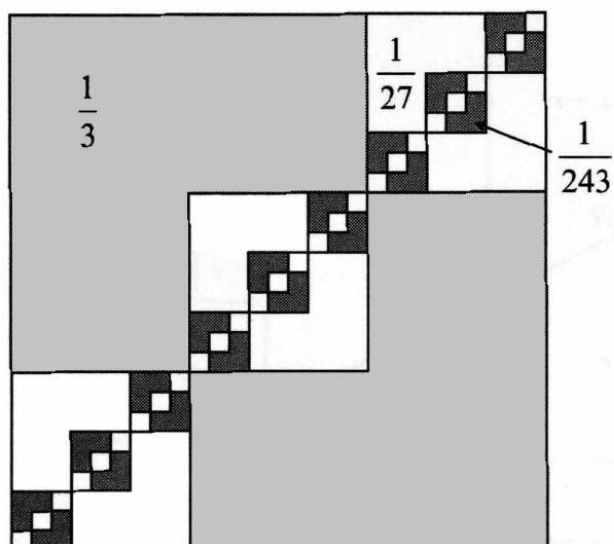
$$1 + r^2 + r^4 + \cdots = \frac{1}{1-r^2}$$

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

– Sunday A. Ajose

Reprinted from Math. Mag., 67, (June 1994), 230

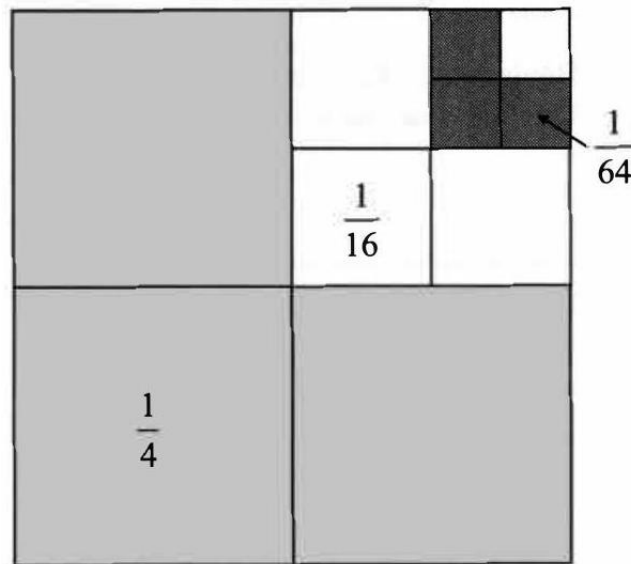
Geometric Series IV



$$2 \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{27} + 9 \cdot \frac{1}{243} + \cdots \right) = 1$$

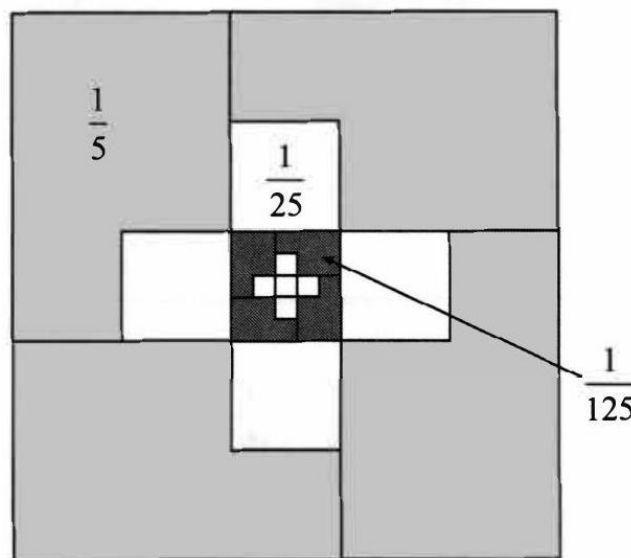
$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$



$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$$

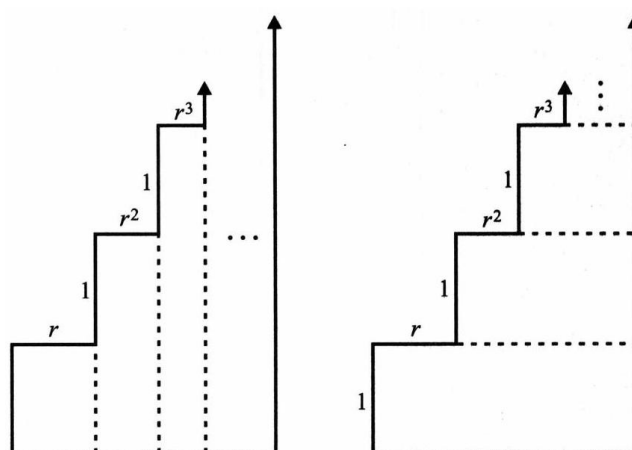


$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{4}$$

Gabriel's Staircase

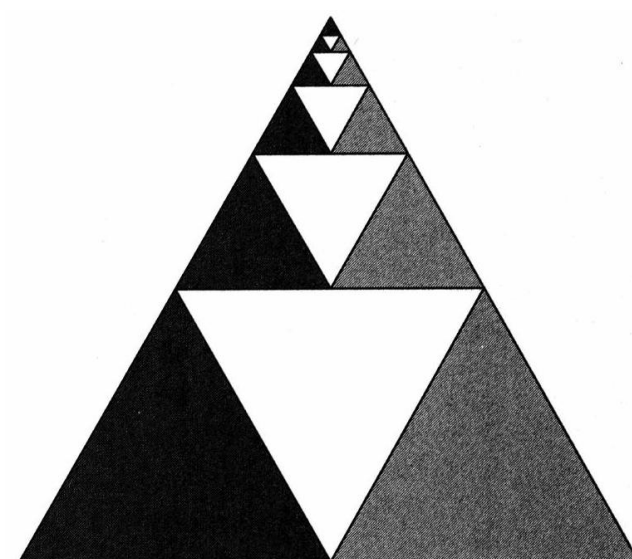
$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2} \quad \text{for } 0 < r < 1$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} r^i = \frac{r}{(1-r)^2}$$

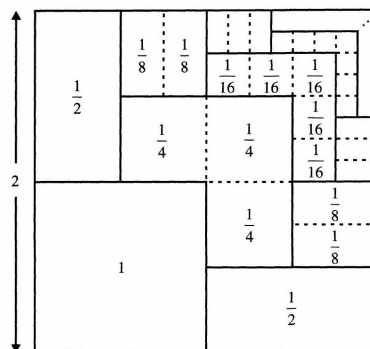
A Geometric Series

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{3}$$

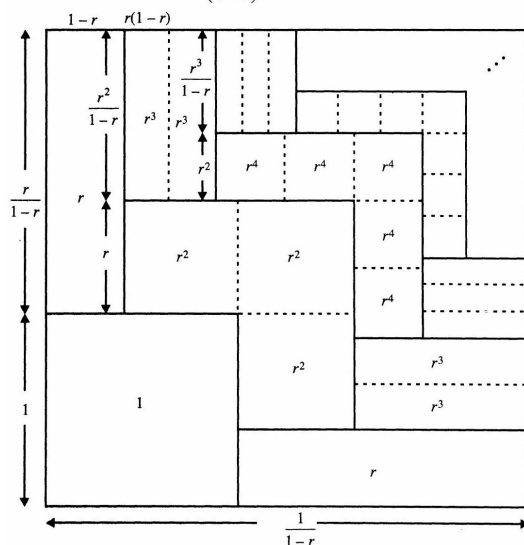


- Reprinted from Math. Mag., 72, (Feb., 1999), 63
Differentiated Geometric Series

$$1 + 2\binom{1}{2} + 3\binom{1}{4} + 4\binom{1}{8} + \cdots = 4$$



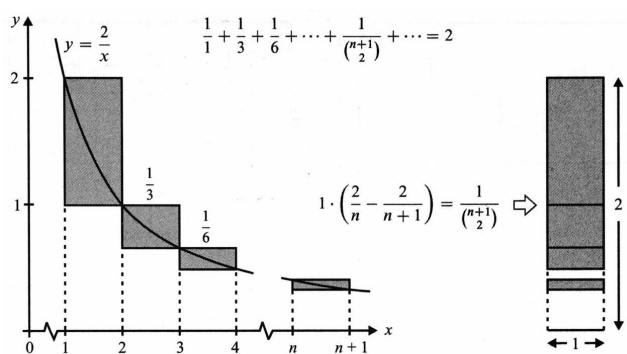
$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \dots = \left(\frac{1}{1-r} \right)^2, \quad 0 \leq r < 1$$



— Roger B. Nelsen
Reprinted from *Math. Mag.*, 62, (Dec., 1989), 332–333

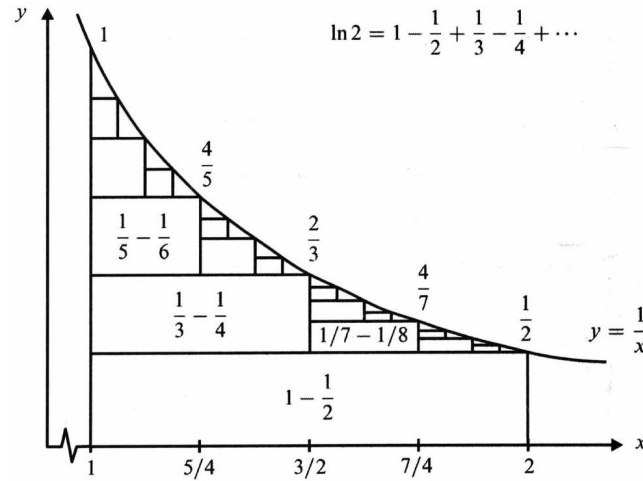
Copyright 2018 American Mathematical Society. Duplication prohibited. Please report unauthorized use to cust-serv@ams.org. Thank You! Your purchase supports the AMS' mission, programs, and services for the mathematical community.

The Series of Reciprocals of Triangular Numbers



— Roger B. Nelsen
Reprinted from *Math. Mag.*, 64, (June 1991), 167

The Alternating Harmonic Series



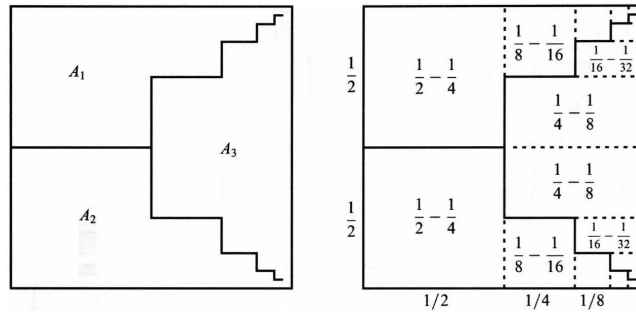
$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{6} \right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{4} \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{8} \right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2^n} \left(\frac{2^n}{2^n + 2k - 1} - \frac{2^n}{2^n + 2k} \right) = \frac{1}{2^n + 2k - 1} - \frac{1}{2^n + 2k}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}; n = 1, 2, \dots$$

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

An Alternating Series

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3}$$



$$A_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots,$$

$$A_1 = A_2 = A_3,$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1,$$

$$\therefore A_1 = \frac{1}{3}$$

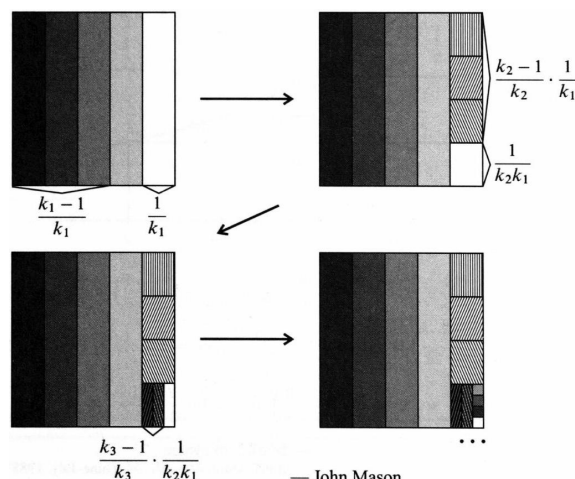
- James O. Chilaka

Reprinted from Math. Mag., 69, (Dec., 1996), 355-356

A Generalized Geometric Series

Let $\{k_1, k_2, k_3, \dots\}$ be a sequence of integers, each of which is at least 2. Then

$$\frac{k_1 - 1}{k_1} + \frac{k_2 - 1}{k_2 k_1} + \frac{k_3 - 1}{k_3 k_2 k_1} + \dots = 1.$$

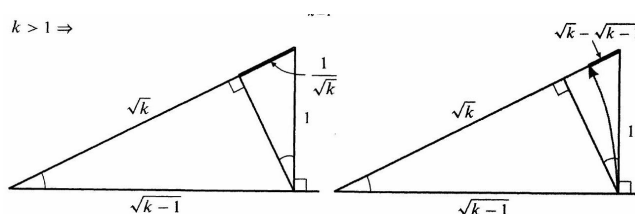


— John Mason
Reprinted from *Coll. Math. J.*, 26, (Nov., 1995), 381

Copyright 2018 American Mathematical Society. Duplication prohibited. Please report unauthorized use to cust-serv@ams.org. Thank You! Your purchase supports the AMS' mission, programs, and services for the mathematical community.

Divergence of a Series

$$n > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$



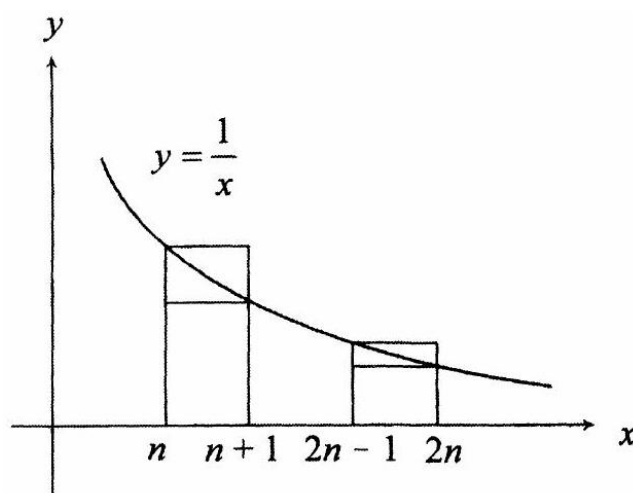
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k}} &> \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} &> (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\ \therefore 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} &> \sqrt{n} \end{aligned}$$

Sydney H. Kung

Reprinted from *Coll. Math. J.*, 26, (Sept., 1995), 301

Sum the Alternating Harmonic Series

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

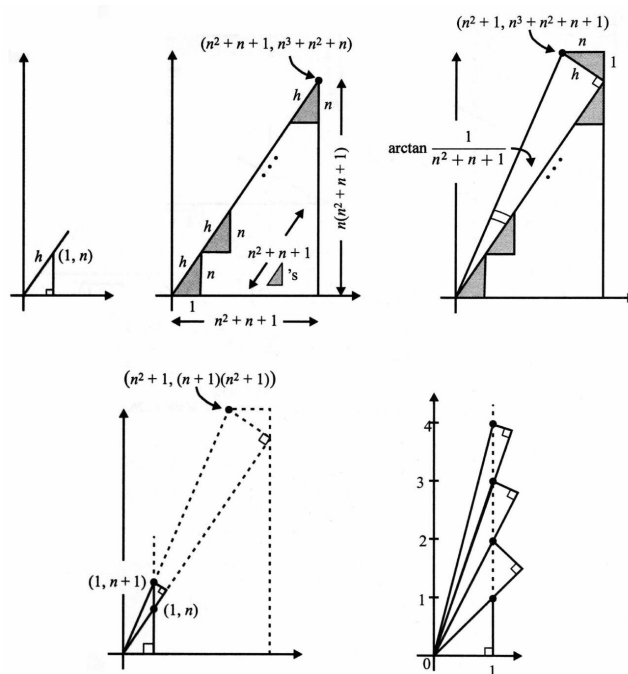


$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \int_n^{2n} \frac{dx}{x} < \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = \sum_{n=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Norman Schaumberger

Reprinted from Coll. Math. J., 33, (Jan., 2002), 23

An Arctangent Identity and Series

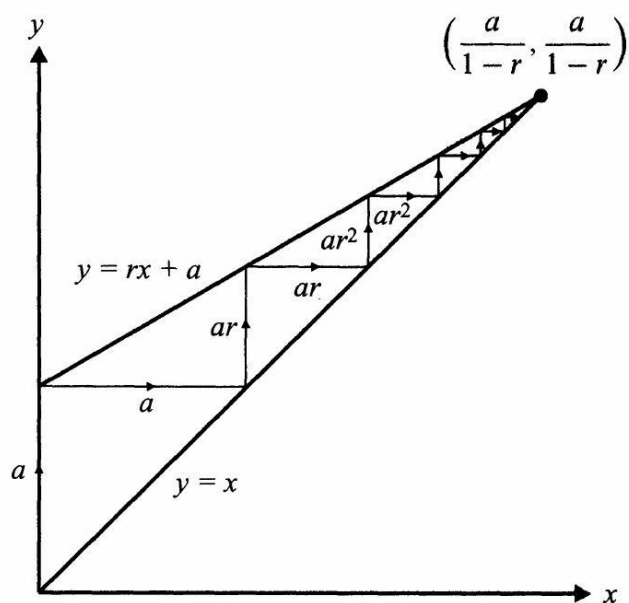


$$\arctan n + \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} = \arctan(n + 1)$$

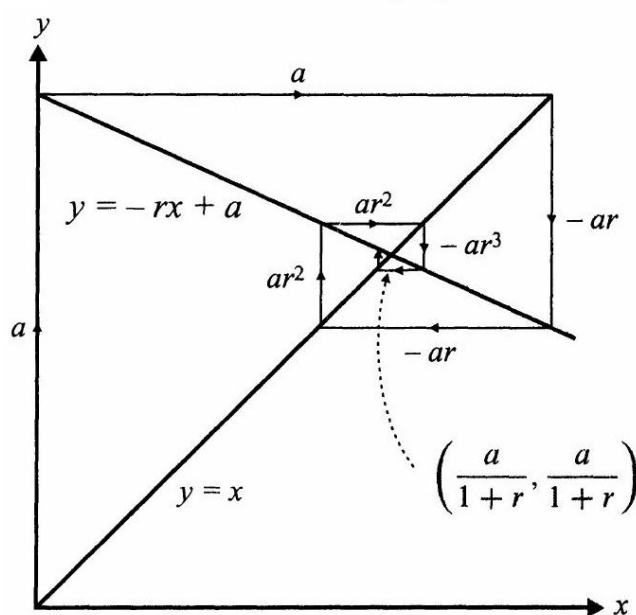
$$\arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} = \arctan(n + 1) - \arctan n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \arctan(N + 1) = \frac{\pi}{2}$$

Geometric Series



$$a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}, \quad 0 < r < 1$$



$$a - ar + ar^2 - \dots = \frac{a}{1+r}, \quad 0 < r < 1$$

- The VIEWPOINTS 2000 Group*

Reprinted from Math. Mag., 74, (Oct., 2001), 320

0

- The VIEWPOINTS 2000 Group is a subset of the participants in the NSF-sponsored VIEWPOINTS Mathematics and Art workshop, held at Franklin & Marshall College in June, 2000:

Marion Cohen, Drexel University, Philadelphia, PA 19104

Douglas Ensley, Shippensburg University, Shippensburg, PA 17257

Marc Frantz, Indiana University, Bloomington, IN 47405

Patricia Hauss, Arapahoe Community College, Littleton, CO 80160

Judy Kennedy, University of Delaware, Newark, DE 19716

Kerry Mitchell, University of Advancing Computer Technology, Tempe, AZ 85283

The Sum Is One

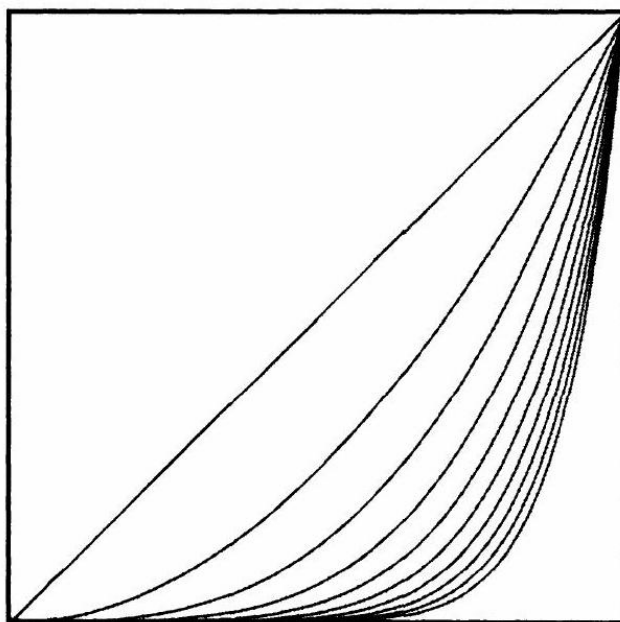
Many calculus texts contain the following telescoping series,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \quad (1)$$

An interesting geometric realization of this result can be obtained from the fact that the family of curves $\{x^n\}$ partitions the unit square into an infinite number of regions with total area 1. First, find the area between the curves $y = x^{n-1}$ and $y = x^n$ over the interval $[0, 1]$:

$$\int_0^1 (x^{n-1} - x^n) dx = \int_0^1 x^{n-1} dx - \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad (2)$$

Summing each side of (2) produces the result (1).



-John H. Mathews

Reprinted from Coll. Math. J. 22, (Sept., 1991), 322

12.6.3 6.3 Fallacious Proofs

There is an old saying to the effect that we can often learn more from our mistakes than from our successes. It is in this spirit that we offer this section for your enjoyment and your enlightenment.

Fallacy 1

Let $u = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$, and $v = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$. Multiplying term by term,

$$2v = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = u + v$$

That is, $2v = u + v$, so that $u = v$, and hence $u - v = 0$.

On the other hand,

$$u - v = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

is a sum of positive terms, so it is also positive. Thus $0 = u - v > 0$, hence zero is positive.

Fallacy 2

Let $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$. Clearly $S > 0$. Multiplying by 2, $2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots = S - 1$. So $2S = S - 1$, and $S = -1$. Then $-1 > 0$.

Fallacy 3

By long division, we arrive at the following power series:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \\ \frac{1}{1+x+x^2} &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots \\ \frac{1}{1+x+x^2+x^3} &= 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \cdots \\ \frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} &= 1 - x + x^5 - x^6 + x^{10} - x^{11} + \cdots\end{aligned}$$

Now set $x = 1$. Then the right side of every equation is now the same, namely $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Thus the left sides must also be the same, that is $1/2 = 1/3 = 1/4 = 1/5 = 1/6 = \cdots = 1/n$ for all n .

Fallacy 4

Let $S = 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + \cdots$. Then we have all of the following.

$$\begin{aligned}S &= (2 - 2) + (2 - 2) + (2 - 2) + (2 - 2) + \cdots \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \\ S &= 2 - (2 - 2) - (2 - 2) - (2 - 2) - (2 - 2) - \cdots \\ &= 2 - 0 - 0 - 0 - 0 - \cdots = 2 \\ S &= 2 - (2 - 2) - (2 - 2) - (2 - 2) - (2 - 2) - \cdots \\ &= 2 - S \\ &\Rightarrow 2S = 2 \Rightarrow S = 1\end{aligned}$$

That is, $0 = 1 = 2$.

Fallacy 5

Let $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots$. Then we have all of the following.

$$\begin{aligned}S &= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots \\ &= 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots) = 1 - 2S \\ &\Rightarrow 3S = 1 \Rightarrow S = 1/3 \\ S &= 1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + (-32 + 64) + \cdots \\ &= 1 + 2 + 8 + 32 + \cdots = \infty \\ S &= (1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32) + \cdots \\ &= -1 - 4 - 16 - \cdots = -\infty\end{aligned}$$

That is, $1/3 = \infty = -\infty$.

Fallacy 6

It can be easily shown that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots$$

converges. Call its sum S .

On the one hand,

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \cdots$$

By telescoping, $S = 1$.

On the other hand,

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) + \cdots$$

By telescoping, $S = 1/2$.

That is, $1/2 = 1$.

Fallacy 7

This is the ultimate fallacy. Here we "prove" that any series whatsoever, convergent or divergent, in "fact" converges to any preselected number.

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be any series, and let S be any number. Then we have the following by simple rules of algebra.

$$\begin{aligned} a_1 &= S - (-a_1 + S) \\ a_2 &= (-a_1 + S) - (-a_1 - a_2 + S) \\ a_3 &= (-a_1 - a_2 + S) - (-a_1 - a_2 - a_3 + S) \\ a_4 &= (-a_1 - a_2 - a_3 + S) - (-a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + S) \end{aligned}$$

When we sum these equations, the left sides give us back the original series. The right sides, however, telescope, with every term appearing both positively and negatively except for the very first. Thus, as claimed,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

12.6.4 6.4 Fallacies, Flaws and Flimflam**FFF #20 A Power Series Representation**

[CMJ, 21:3, p. 217]

Problem. Expand about the origin $f(x) = (1 + x^2) / (1 - x^2)$. Note that $f(0) = 1$.

Solution. By the quotient rule, we find that

$$f'(x) = 2 \left[\frac{2x}{(1 - x^2)^2} \right] = 2 \left[\frac{1}{1 - x^2} \right]'$$

whence $f(x) = 2(1 - x^2)^{-1} = 2(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)$ (so that, in particular, $f(0) = 2$).

FFF #28 More Fun with Series

[CMJ, 21:5, pp. 395-396]

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t} &= \frac{1}{1-t^2} - t \frac{1}{1-t^4} - t^3 \frac{1}{1-t^4} \\ &= 1 - t - t^3 + t^2 - t^5 - t^7 + t^4 - t^9 - t^{11} + \dots\end{aligned}$$

for $|t| < 1$. Integrating both sides between 0 and x yields

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \dots \quad (|x| < 1)$$

Taking the limit as x tends to 1 and invoking Abel's theorem, we obtain

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

However, grouping terms in the series yields

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \dots &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{1}{2} \log 2\end{aligned}$$

Thus, $\log 2 = \frac{1}{2} \log 2$.

Comments regarding FFF#28 appear in [CMJ, 23:1, p. 38] and [CMJ, 24:3, p. 231].

FFF #76 Telescoping Series

[CMJ, 25:4, p. 309]

Stanley Wertheimer of Connecticut College in New London, CT, has sent in a paper written by a freshman student, Eleanor A. Maddock, that treats the sum

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

On the one hand,

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots = \frac{1}{2}$$

while on the other,

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots = \left(1 - \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{7}{10} - \frac{2}{3}\right) + \dots = 1$$

She analyzed this discrepancy and showed where the fault lay, a task that some of your own undergraduates might undertake.

FFF #83 Power Series Thinning

[CMJ, 26:1, p. 35]

David Rose of Oral Roberts University in Tulsa, OK, mentions that it is not well known that a function expressed as a power series can be reduced proportionately by deleting the proper proportion of terms from the series. For example,

$$\frac{1}{2}e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \left(1 + x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots\right)$$

is observed by solving the differential equation $y'' + y = e^x$ in two ways. The standard method yields the general solution $y(x) = a \cos x + b \sin x + (1/2)e^x$, whereas the series method of solution produces

$$\begin{aligned} y(x) &= a \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + b \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= a \cos x + b \sin x + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Subtraction of $a \cos x + b \sin x$ from both solutions yields the result.

FFF #83 Power Series Thinning

[CMJ, 26:5, p. 384]

When the differential equation $y'' + y = e^x$ is solved by the standard method, the general solution is $y(x) = a \cos x + b \sin x + (1/2)e^x$, whereas using the series method, we find that

$$y(x) = a \cos x + b \sin x + \sum \left\{ \frac{x^k}{k!} : k \not\equiv 0, 1 \pmod{4} \right\}.$$

D. Rose, the contributor of this item [CMJ, 26:1, p. 35], makes the following observations:

Of course, the constants a and b are not the same in both solutions. In the series solution, a and b are the first two coefficients, i.e., $a = y(0)$ and $b = y'(0)$. The method of solution of $y'' + y = e^x$ by Laplace transform with $y(0) = a$ and $y'(0)$ reveals that

$$y(x) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \cos x + \left(b - \frac{1}{2}\right) \sin x + \frac{e^x}{2}$$

so that, actually,

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}(e^x) - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x),$$

from which it follows that the flimflam equation is true frequently but sparsely. However, if x is considered a uniform random variable on any interval $[\mu - \pi, \mu + \pi]$ of length 2π , the expected value of the left member of the equation is equal to the expected value of $\frac{1}{2}e^x$ over the interval since the expected value of the error term $\frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$ agrees with the average value of 0. Thus, both $1 + x + x^4/4! + x^5/5! + x^8/8! + x^9/9! + \cdots$ and $x^2/2! + x^3/3! + x^6/6! + x^7/7! + x^{10}/10! + \cdots$ though different, are unbiased estimators of $(e^\mu \sinh \pi)/2\pi$, the expected value of $e^x/2$ on the interval $[\mu - \pi, \mu + \pi]$.

FFF #135 Positive Series with a Negative Sum

William A. Simpson from Michigan State University in East Lansing submits some analysis that would do an eighteenth-century mathematician proud. Consider this infinite matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \cdots \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Summing up the row totals yields

$$\begin{aligned} (1 + 1 + \cdots) + (1 + 1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots \\ = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \\ = \sum_{k=1}^{\infty} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

while summing over the column totals yields

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \cdots$$

Since both of these sum the terms in the matrix, they should be equal. Canceling common terms yields

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \frac{1}{k^2} + \sum \frac{1}{k^3} + \sum \frac{1}{k^4} + \sum \frac{1}{k^5} + \cdots \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \sum \frac{1}{k^3} + \frac{\pi^4}{90} + \sum \frac{1}{k^5} + \cdots \end{aligned}$$

so that $\sum (1/k^3) + \sum (1/k^5) + \cdots$ must be negative.

FFF #141 Evaluation of a sum

[CMJ, 30:2, pp. 130-131]

Problem. Evaluate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(3n-1)}$$

Solution by Joe Howard, New Mexico Highlands University, Las Vegas, NM.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(3n-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{3}{3n-1} \right) \\ &= \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{8} + \cdots \end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{1} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^5}{5} + \cdots \\ &= 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \right) - 3 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^8}{8} + \cdots \right) \end{aligned}$$

for $0 \leq x \leq 1$. The series is absolutely convergent for $|x| < 1$, so the terms can be rearranged. It follows that

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2(1 + x^2 + x^4 + \cdots) - 3(x + x^4 + x^7 + \cdots) \\
&= 2\left(\frac{1}{1-x^2}\right) - 3x\left(\frac{1}{1-x^3}\right) = \frac{x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} \\
&= \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1} + \frac{3}{2} \int_0^x \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
&= \log|x+1| - \frac{1}{2} \log|x^2+x+1| + \sqrt{3} \left(\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right)
\end{aligned}$$

Since the series for $f(x)$ is convergent for $x = 1$, the given series converges to

$$f(1) = \log \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{6}$$

This problem was posed in *Crux Mathematicorum* 22 (1996), 219; 23 (1997), 371-373, where the (correct) answer given was $2 \log 2 - \frac{3}{2} \log 3 + \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{6}$.

FFF #206 A series that converges and diverges

[CMJ, 34:2, p. 135]

Consider the infinite series

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

This series can be shown to converge by the alternating series test. But we also have

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n [\ln(n-1) - \ln n] \\
&= [\ln 1 - \ln 2] - [\ln 2 - \ln 3] + [\ln 3 - \ln 4] - [\ln 4 - \ln 5] + \cdots \\
&= -2 \ln 2 + 2 \ln 3 - 2 \ln 4 + 2 \ln 5 - 2 \ln 6 + \cdots \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} (2 \ln n)
\end{aligned}$$

This last series diverges since the n th term does not tend to zero.

FFF #218 Alternating madness

[CMJ, 35:1, pp. 40-41]

Taking note of the manipulation of an alternating series to a divergent series on FFF #206, Ollie Nanyes of Bradley University in Peoria, IL sends along some shenanigans with a more mundane alternating series.

First, we have that

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(1 - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} - 1 \right) + \dots \\
 &\quad + \left(\frac{2n-1}{2n} - 1 \right) + \left(1 - \frac{2n}{2n+1} \right) + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + (-1 + 1) - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + (-1 + 1) - \dots \\
 &\quad + \frac{2n-1}{2n} + (-1 + 1) - \frac{2n}{2n+1} - \dots \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5} \right) + \dots + \left(\frac{2n-1}{2n} - \frac{2n}{2n+1} \right) + \dots \\
 &= 1 + \left(-\frac{1}{6} \right) + \left(-\frac{1}{20} \right) + \dots + \left(\frac{4n^2-1-4n^2}{4n^2+2n} \right) + \dots \\
 &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)},
 \end{aligned}$$

which is absolutely convergent.

On the other hand,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{4} - 1 \right) + \frac{1}{5} + \dots \\
 &\quad + \left(\frac{2n-1}{2n} - 1 \right) + \frac{1}{2n+1} + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(-1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4} + \left(-1 + \frac{1}{5} \right) + \frac{5}{6} + \dots \\
 &\quad + \frac{2n-1}{2n} + \left(-1 + \frac{1}{2n+1} \right) + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots + \frac{2n-1}{2n} - \frac{2n}{2n+1} + \dots \\
 &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n},
 \end{aligned}$$

which is divergent.

More generally, Nanyes points out that any alternating series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, with $a_n > 0$, can be manipulated to a divergent series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1 - a_n)$ by replacing each oddly indexed term $-a_{2k+1}$ by $(1 - a_{2k+1}) - 1$ and rebracketing.

12.6.5 6.5 Answers to Puzzles

Solution to Puzzle 1. In both cases the answer is no. To see this, assign a numerical value to each square on the grid in the following manner. In any given moment, we say that the value of the configuration is the total sum of the values of all the occupied squares. The reason for this numbering is as follows: when a stone is removed from a particular square, it is replaced by two

stones on squares that each have half the value. That is, the total value of the configuration is not changed throughout the solving process.

To settle the first question, we need to know the total value of all the squares on the grid. To do this, we must evaluate an infinite series, indeed a multiple series. (This is where infinite series come into play in this problem . . . after reading this solution, notice

	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\bullet$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\bullet$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\bullet$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	

FIGURE 6.4

Labeling the Quarter-Checkerboard

that this problem would be much harder without the concept of infinite series. They are the vehicle by which we can consider the infinite grid as a finite resource.) Since all the terms are positive, we can freely use rearrangement and scrambling. The first row has value $1 + 1/2 + 1/4 + \dots = 2$, the second row has value $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$. Similarly, the third row has value $1/2$, the fourth has value $1/4$, etc. Summing now the rows, the grid has total value $2 + 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 4$. Now, the six stones in the colored areas have a total value of $1 + 1/2 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 2\frac{3}{4}$, and therefore the total remaining part of the board can only ever be worth the remaining $1\frac{1}{4}$. Since the configuration will always have value $2\frac{3}{4} > 1\frac{1}{4}$ (by the previous paragraph), it cannot fit into the uncolored part of the grid.

The second question is slightly more difficult to analyze. In this case, the value of the starting configuration is 1, and there is still a total of $1\frac{1}{4}$ available outside the colored squares. However, observe that we cannot actually use all the uncolored squares. First, it is clear that there will always be exactly one stone in the first column. (Stones only move up and to the right, so that no new stones can enter the first column from other columns; whenever the stone currently in the first column is touched, exactly one new stone is placed in the first column.) Now, the total "available" area in the first column is $1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots = 1/4$. However, we can use at most $1/8$ from that total, so at least $1/8$ will be wasted. Similarly, $1/8$ will be wasted from the bottom row. Having eliminated now $1/4$, our maximum possible area is now exactly 1. We can now reach the desired total if and only if all other squares are occupied; this includes of course an infinite number of squares. However, if the puzzle is to be solved, it must be solved after a finite number of steps. Since then there will be only a finite number of stones on the board, the task is impossible.

Solution to Puzzle 2. This is a trick question. In fact, it is impossible to get a checker to the fifth row above the line, so that $c_5, c_6, c_7, \dots$ mean nothing!

Suppose for the sake of contradiction that some strategy will place a checker in the fifth row. As in the solution to the previous problem, we solve this by assigning numerical values to the board. Suppose for simplicity that the checker in the fifth row is in the "center" column. Now, we assign values to all the squares in the grid according to the diagram. That is, the values of the squares decrease by a factor of $r = (-1 + \sqrt{5})/2$ with each step

1	r^{-1}	r^{-2}	r^{-3}	r^{-2}	r^{-1}	1
r	1	r^{-1}	r^{-2}	r^{-1}	1	r
r^2	r	1	r^{-1}	1	r	r^2
r^3	r^2	r	1	r	r^2	r^3
r^4	r^3	r^2	r	r^2	r^3	r^4
r^5	r^4	r^3	r^2	r^3	r^4	r^5

FIGURE 6.5

Labeling the Infinite Checkerboard

downward or away from the center column. Why have we chosen this value of r ? It is the positive solution of the equation $r^2 + r = 1$. Therefore, an upward jump or a jump toward the center removes two checkers and creates a checker with the same total value as the removed checkers. Other sorts of jumps will remove two checkers and create a checker of lesser value. As in the previous problem, we evaluate the total value of the bottom section of the grid. The center column below the line has value $1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$. Similarly, we see that the two columns n spaces away from the center each have total value $\frac{r^n}{1-r}$. Then we have a total value of

$$\frac{1}{1-r} + 2 \left(\frac{r}{1-r} + \frac{r^2}{1-r} + \frac{r^3}{1-r} + \cdots \right) = \frac{1}{1-r} + \frac{2r}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{(1-r)^2}$$

We begin with a finite collection of checkers, so the starting value of the configuration is less than $(1+r)/(1-r)^2$. As jumps are taken, this value can only decrease. Now, the value of the single checker in the fifth row is r^{-5} , so we must have

$$r^{-5} < \frac{1+r}{(1-r)^2}$$

However, a moment of algebra (or a moment with a calculator) shows that both sides of the above inequality have the common value 11.0901699..., contradicting the inequality.

Solution to Puzzle 3. We claim that, in n trips with the jeep, Desert Dan can actually travel $25H_n$ miles, where H_n is the n th harmonic number. (We really hope the reader finds this last appearance of the harmonic series surprising. We said that it shows up frequently.) Since the harmonic series has unbounded partial sums, this would imply that Desert Dan could eventually cross any arbitrarily large desert. For convenience, we will measure fuel in miles, so that 5 miles of fuel is the amount of fuel that would carry the jeep 5 miles.

In describing Desert Dan's strategy, we will number his trips in reverse. That is, his chronologically first trip is called trip n , his next trip is trip $n-1$, and so on until trip 1, which happens last. The strategy operates as follows. On trip n , Desert Dan drives $25/n$ miles. He will need $25/n$ miles of fuel to return, so he leaves the remaining $50(n-1)/n$ miles in a container. Call this spot Checkpoint n . On trip $n-1$, Desert Dan drives to Checkpoint n and uses the fuel there to fill his tank totally. He then travels $25/(n-1)$ miles, and leaves $50(n-2)/(n-1)$ miles of fuel at Checkpoint $n-1$. He now has exactly $25/(n-1)$ miles of fuel, which is just enough to get him back to Checkpoint n , where he takes $25/n$ miles of fuel from the cache to get himself home. The general strategy for trip k is as follows: drive to all the already-established checkpoints, filling up on fuel at every checkpoint. From the last checkpoint, drive $25/k$ miles into the desert, leaving $25(k-1)/k$ miles of fuel at the newly established checkpoint k . Using the last of your fuel, return to the last checkpoint. On the return trip, take from each cache just enough fuel to reach the next checkpoint. Now we must verify that this strategy works. We first observe that the distance from Checkpoint i to Checkpoint $i+1$ is $25/i$ miles (where Checkpoint $n+1$ is the edge of the desert), so that indeed Checkpoint 1 is the promised $25H_n$ miles from the edge of the desert. But will the caches hold enough fuel for Desert Dan to accomplish his

mission? In our strategy, the cache at Checkpoint i has $50(i-1)/i$ miles. This fuel must supply each of $i-1$ trips after trip i (remember the reverse numbering of the trips). Each such trip will use $25/i$ miles of fuel to replenish after the trip from Checkpoint $i+1$ and another $25/i$ to make the return trip to Checkpoint $i+1$. Thus each of $i-1$ trips will draw $50/i$ miles of fuel from the cache. We have $50(i-1)/i$ miles of fuel, so the fuel will last.

12.7 101 True or False Questions

The authors of this book believe that true or false questions ¹ have an educational value, particularly in learning mathematics. Sorting between true and false propositions forces the reader to understand clearly the relationships between hypotheses and conclusions in theorems and to carefully acknowledge and avoid misconceptions and faulty generalizations. Discerning the difference between a true-seeming statement and a genuinely true statement signifies a maturity of understanding of the fundamentals of a mathematical theory.

In keeping with these beliefs, we present the reader with a collection of true or false statements on the subject of infinite series. There are at least two distinct reasons why the reader may find these useful. Most obviously, the reader is encouraged to read through the questions and try to answer each for himself or herself. For the reader's convenience in this endeavor, we have included each question twice, first in a section containing only the questions and again in a section with answers and short explanations. This appendix should not be interpreted as a "comprehensive final exam" of this text in any sense. No effort was made to ensure that every bit of content in the chapters of this book found its way into these questions. On the other hand, the nuances of these true or false questions can be seen as a test of the reader's reasoning ability, which we hope that reading this book has developed.

The other use is for instructors who are teaching the subject of infinite series to their students, perhaps as part of a calculus or analysis course. We encourage you to consider incorporating true and false questions in your assessment, and we invite you to select any questions from this chapter that you feel suit the difficulty level and focus of your course. As always we do not intend this collection to be exhaustive, and we have no doubt that the reader will be able to devise more questions more suitable to his or her circumstances.

12.7.1 Questions

- T/F 1 The series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges whenever $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- T/F 2 The series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges whenever the sequence of partial sums converges to 0.
- T/F 3 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converges.
- T/F 4 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ converges.
- T/F 5 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+a_n}{2+a_n}$ converges.
- T/F 6 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+a_n}{3^n+a_n}$ converges.
- T/F 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ converges.
- T/F 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$ converges.
- T/F 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ converges.
- T/F 10 If p is a fixed real number, then $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converges if and only if $p > 1$.
- T/F 11 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converges.
- T/F 12 The series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\cos 3}$ converges.
- T/F 13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+5}$ converges to $1/5$.
- T/F 14 $\sum_{n=2}^{\infty} 3(4)^{-n+1}$ converges to 1.
- T/F 15 If $a_n > 0$ and the sequence of partial sums for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is bounded above, then the series converges.
- T/F 16 If the sequence of partial sums for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is bounded, then the series converges.
- T/F 17 Every rearrangement of an absolutely convergent series has the same sum.

⁰¹ The pedantic reader may wonder why we call these objects questions even though they are grammatically statements and have no question mark. It seems inappropriate to call them statements because that suggests an assertion, and of course we make no claim that the 101 statements in this appendix are true. The "questions" are implicit, however, because each statement is to be interpreted as "Is it true or false that ...?"

T/F 18 If the Strengthened Root Test indicates absolute convergence for a given series, then the Strengthened Ratio Test will also indicate absolute convergence for that series.

T/F 19 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

T/F 20 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

T/F 21 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = B$ and A and B are finite, then $|A| = B$.

T/F 22 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ diverges also.

T/F 23 If both $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverges.

T/F 24 If both $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converges.

T/F 25 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverges.

T/F 26 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converges.

T/F 27 If $a_n > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ diverges.

T/F 28 If $a_n > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ converges.

T/F 29 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

T/F 30 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges.

T/F 31 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $0 < a_{n+1} \leq a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges.

T/F 32 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges absolutely, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges.

T/F 33 If $a_n \geq 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ does not converge conditionally.

T/F 34 The Alternating Series Test is a test for conditional convergence.

T/F 35 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

T/F 36 If $a_n > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ converges.

T/F 37 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \cos a_n$ converges.

T/F 38 If $0 < a_{n+1} < a_n$ for all n and $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

converges and has sum S satisfying $|S_n - S| < a_{n+1}$.

T/F 39

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

is a divergent series.

T/F 40 The Root Test cannot be used to determine conditional convergence.

T/F 41 The Ratio Test cannot be used to determine conditional convergence.

T/F 42

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \geq 2$$

T/F 43 The Ratio Test cannot be used to determine the convergence or divergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 5}$$

T/F 44 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges also.

T/F 45

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10000} < 1$$

T/F 46 If $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges and if $0 \leq a_{n+k} \leq b_n$ for some $k \geq 1000$ and every $n \geq 1000$, then $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges absolutely.

T/F 47

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n^6 + 1)}$$

converges.

T/F 48 If $a_n \leq b_n \leq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges also.

T/F 49 If $a_n \leq b_n \leq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges also.

T/F 50 If $a_n > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges also.

T/F 51 If the condition $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ fails (even eventually) when applying the Alternating Series Test, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverges.

T/F 52 If the condition $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ fails when applying the Alternating Series Test, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverges.

T/F 53 If the Ratio Test indicates absolute convergence for a particular series, then the Root Test will also indicate absolute convergence for that series.

T/F 54

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+4} = \infty$$

T/F 55 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7$ and $a_1 = a_2 = 3$, then $\sum_{n=3}^{\infty} a_n = 1$.

T/F 56 $2, 4/3, 5/4, 6/5, \dots, (n+1)/n, \dots$ is a convergent series.

T/F 57 The first three terms in the sequence of partial sums associated with $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$ are $1/2, 3/4, 7/8$.

T/F 58

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) = \frac{1}{7}$$

T/F 59 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 3$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 3$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

T/F 60

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

T/F 61 If $0 \leq a_n \leq b_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges also.

T/F 62 If a series converges, then no subsequence of the sequence of partial sums can be unbounded.

T/F 63 The Integral Test is of no value in testing $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n/n$ for convergence or divergence.

T/F 64 The sum of the infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is the limit

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n$$

whenever this limit exists.

T/F 65 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges if and only if $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converges for every p .

T/F 66 The Ratio Test is of no value in testing $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n(n+1)(n+2)}$ for convergence or divergence.

T/F 67

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

diverges.

T/F 68 If $a_n > 0$ for all n and if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$$

T/F 69 If for some constant c we have $a_n \geq 1/n$, then necessarily $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

T/F 70 The series $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n$ has as its sequence of partial sums $1, 0, 1, 0, \dots$

T/F 71 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + 2}{a_n^2 + 1} = 2$$

T/F 72 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + n^2}$$

converges absolutely.

T/F 73

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

T/F 74

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{k} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{k+1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

T/F 75 The Ratio Test is of no help in determining whether

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

converges or diverges.

T/F 76 If $|a_{n+1}/a_n| > 1$ for all n , then $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverges.

T/F 77 If $|a_{n+1}/a_n| < 1$ for all n , then $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converges.

T/F 78 If $s_n = 3 + 2^{-n}$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 4$.

T/F 79 The first three terms in the sequence of partial sums associated to the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1/2)^n$ are $-1/2, 1/4, -1/8$.

T/F 80

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 2^{n+1} = 4$$

T/F 81 Every partial sum of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)$$

is less than 1 .

T/F 82 The Integral Test can be used to show that

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n \log(\log n)}$$

does not converge absolutely.

T/F 83 The insertion or removal of a finite number of terms in a series cannot affect its convergence or divergence, although it may affect its sum.

T/F 84 If a series converges, then any summation of a subset of the terms will form a convergent series.

T/F 85 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a bounded sequence, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges.

T/F 86 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ must diverge.

T/F 87 If $a_n = 3/n^2$, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converges to zero.

T/F 88 A series representation for the decimal 0.999999... can be given by

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9 \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

where the sum is exactly 1.0, so 0.999999999999... = 1.

T/F 89 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ does not exist, then we can always correctly claim that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

T/F 90 A convergent series is either absolutely convergent or conditionally convergent.

T/F 91 The alternating harmonic series cannot be rearranged to diverge to $-\infty$.

T/F 92 If $a_n > 0$ and $\sqrt[n]{a_n} < 1$ for all n , then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

T/F 93 If $a_n > 0$ and $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ for all n , then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

T/F 94 If $a_n > 0$ and $\sqrt[n]{a_n} < r < 1$ for all n and a constant r , then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

T/F 95 If $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = L < 1$ for some constant L , then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

T/F 96 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converges.

T/F 97 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ converges for $p > 1/2$.

T/F 98 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ diverges.

T/F 99 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ converges.

T/F 100 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ diverges.

T/F 101 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ converges.

12.7.2 Explanations

T/F 1 The series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges whenever $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Solution. False. The Divergence Test (Corollary 1.44.1) guarantees that the series can converge only if the terms tend to 0 . However, the converse fails (the harmonic series, for example, is a counterexample).

T/F 2 The series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges whenever the sequence of partial sums converges to 0 .

Solution. True. By Definition 1.34, a series converges if and only if its sequence of partial sums converge to any number, and zero is acceptable.

T/F 3 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converges.

Solution. True. By Theorem 1.44, we have $a_n \rightarrow 0$ and consequently $a_n < 1$ eventually. Then also $a_n^2 < a_n$ eventually, so that the Comparison Test applies.

T/F 4 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ converges.

Solution. False. Consider $a_n = 1/n^2$, $\sqrt{a_n} = 1/n$. The former converges and the latter diverges by Theorem 1.59.

T/F 5 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+a_n}{2+a_n}$ converges.

Solution. False. By Theorem 1.44 we have, $a_n \rightarrow 0$ and thus $\frac{1+a_n}{2+a_n} \rightarrow 1/2$. Thus the latter series' terms do not go to 0, hence it diverges.

T/F 6 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + a_n}{3^n + a_n}$ converges.

Solution. True. By Theorem 1.44 we have, $a_n \rightarrow 0$. Now apply the ratio test.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} + a_{n+1}}{2^n + a_n} \cdot \frac{3^n + a_n}{3^{n+1} + a_{n+1}}$$

For large n , the a_i are small and this ratio tends then to $2/3$. That is,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3}$$

The Ratio Test gives convergence.

T/F 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ converges.

Solution. True. It is shown in nearly every introductory calculus text that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

With that in mind, apply the Limit Comparison Test using the convergent series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ to see that the original series converges also.

T/F 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$ converges.

Solution. False. The terms approach $\cos 0 = 1 \neq 0$; apply the Divergence Test.

T/F 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ converges.

Solution. False. See Gem 31. Note also that $\frac{1}{n^{1+1/n}} \geq \frac{1}{2n}$ and apply the Comparison Test.

T/F 10 If p is a fixed real number, then $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converges if and only if $p > 1$.

Solution. True. Theorem 1.59 (which was proven with the Integral Test).

T/F 11 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converges.

Solution. True. Apply Abel Test, Corollary 2.21.1, with a_n as given, $b_n = 1/n$.

T/F 12 The series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\cos 3}$ converges.

Solution. False. This is a p -series with $p = -\cos 3 < 1$.

T/F 13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+5}$ converges to $1/5$.

Solution. False. The terms approach 1, so the series in fact diverges.

T/F 14 $\sum_{n=2}^{\infty} 3(4)^{-n+1}$ converges to 1.

Solution. True. This is a geometric series with first term $3/4$ and ratio $1/4$. We use Theorem 1.39. The sum then is

$$\frac{3/4}{1 - 1/4} = 1$$

T/F 15 If $a_n > 0$ and the sequence of partial sums for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is bounded above, then the series converges.

Solution. True. Theorem 1.25. A monotone increasing sequence that is bounded above must converge.

T/F 16 If the sequence of partial sums for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is bounded, then the series converges.

Solution. False. Consider the series $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Its partial sums oscillate between 1 and 0. Thus the partial sums are bounded but clearly do not converge.

T/F 17 Every rearrangement of an absolutely convergent series has the same sum.

Solution. True. Theorem 3.9.

T/F 18 If the Strengthened Root Test indicates absolute convergence for a given series, then the Strengthened Ratio Test will also indicate absolute convergence for that series.

Solution. False. Consider the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^n},$$

where k_n is 2 or 3 according as n is odd or even. The Strengthened Root Test clearly succeeds because the n th roots of terms are given by $1/k_n \leq 1/2 < 1$. However, the ratio of consecutive terms a_{n+1}/a_n does not yield to analysis because, for n even, we have a ratio of $3^n/2^{n+1} > 1$. In fact the ratios are not even bounded above, so the Strengthened Ratio Test fails.

T/F 19 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

Solution. False. Without assuming the terms are positive this does not follow from the Limit Comparison Test. Take $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, $b_n = 1/(n \log n) + (-1)^n/n$. Then $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ diverges because it is the sum of a divergent positive series (by the Abel-Dini scale) and the convergent alternating harmonic series, but $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent alternating series. Yet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n/\sqrt{n}}{1/(n \log n) + (-1)^n/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + (-1)^n/\log n} = \infty.$$

T/F 20 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

Solution. False. Interchanging the roles of a_n and b_n , this is the contrapositive of the previous item.

T/F 21 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = B$ and A and B are finite, then $|A| = B$.

Solution. False. Take $a_n = (-1/2)^n$. Then using Theorem 1.39,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1/2)^n = -\frac{1}{3}; \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n = 1$$

T/F 22 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges and $a_n > 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ diverges also.

Solution. True. In the case that $a_n \rightarrow 0$, we eventually have

$$\frac{a_n}{1+a_n} > \frac{a_n}{2},$$

and the Comparison Test applies. If on the other hand $a_n \not\rightarrow 0$, then the terms $\frac{a_n}{1+a_n}$ do not go to 0 either and the Divergence Test applies.

T/F 23 If both $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverges.

Solution. False. Take $a_n = 1$, $b_n = -1$.

T/F 24 If both $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converges.

Solution. False. Take $a_n = b_n = 1$.

T/F 25 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverges.

Solution. True. Let A_n, B_n, C_n be the partial sums of the three series, respectively, and assume to the contrary that $\{C_n\}$ did converge. Then, since $B_n = C_n - A_n$ and the latter two sequences converge, $\{B_n\}$ must converge also, contrary to assumption.

T/F 26 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converges.

Solution. False. This would contradict the previous item (T/F 25).

T/F 27 If $a_n > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ diverges.

Solution. True. Using Theorem 1.24, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges implies that $a_n \rightarrow 0$, hence $1/a_n \rightarrow \infty$. Then $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ diverges by the Divergence Test.

T/F 28 If $a_n > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ converges.

Solution. False. Take $a_n = 1$.

T/F 29 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

Solution. False. Again, the Limit Comparison Test does not apply because the terms need not be nonnegative. Take $b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, the terms of a convergent alternating series, and take $a_n = b_n + 1/n$. Then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent, because it is formed as the sum of a convergent series and a divergent (harmonic) series. We now check

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n/\sqrt{n} + 1/n}{(-1)^n/\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

T/F 30 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges.

Solution. False. Take $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.

T/F 31 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $0 < a_{n+1} \leq a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges.

Solution. True. Apply Abel's Test.

T/F 32 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges absolutely, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges.

Solution. True. Apply the Comparison Test to $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, noticing that eventually we must have $|a_n| < 1$.

T/F 33 If $a_n \geq 0$, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ does not converge conditionally.

Solution. True. Since $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ are in fact the same series, they cannot have different end behavior.

T/F 34 The Alternating Series Test is a test for conditional convergence.

Solution. False. While the Alternating Series Test is capable of showing that conditionally convergent series are convergent, it does not check that the associated series with all terms positive is divergent. Thus it cannot distinguish absolutely convergent alternating series from conditionally convergent alternating series.

T/F 35 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Solution. False. Take $a_n = b_n = 1/n$.

T/F 36 If $a_n > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ converges.

Solution. True. It is shown in nearly every introductory calculus text that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

With that in mind, apply the Limit Comparison Test, noting that $a_n \rightarrow 0$.

T/F 37 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \cos a_n$ converges.

Solution. False. By Theorem 1.44, $a_n \rightarrow 0$. Thus $\cos a_n \rightarrow \cos 0 = 1 \neq 0$, and the Divergence Test applies.

T/F 38 If $0 < a_{n+1} < a_n$ for all n and $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

converges and has sum S satisfying $|S_n - S| < a_{n+1}$.

Solution. True. This is the Alternating Series Test (Theorem 1.75).

T/F 39

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

is a divergent series.

Solution. True. The terms do not tend to 0. (In fact they tend to $1/e$.)

T/F 40 The Root Test cannot alone be used to determine conditional convergence.

Solution. True. In order to verify conditional convergence one must show 1) convergence for the series as given, and 2) that the series does not converge absolutely. The Root test may only give information as regards the second requirement.

T/F 41 The Ratio Test cannot alone be used to determine conditional convergence.

Solution. True. In order to verify conditional convergence one must show 1) convergence for the series as given, and 2) that the series does not converge absolutely. The Ratio test may only give information as regards the second requirement.

T/F 42

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \geq 2$$

Solution. False. We simply observe that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3/2$$

T/F 43 The Ratio Test cannot be used to determine the convergence or divergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 5}$$

Solution. True. The limiting ratio is 1. In fact the same would happen with any series with terms algebraic in n .

T/F 44 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges also.

Solution. False. Consider $a_n = (-1)^n/n$.

T/F 45

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10000} < 1$$

Solution. True.

$$\sum_{n=1}^{10000} (1/2)^n < \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n = 1$$

using Theorem 1.39.

T/F 46 If $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges and if $0 \leq a_{n+k} \leq b_n$ for some $k \geq 1000$ and every $n \geq 1000$, then $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges absolutely.

Solution. True. Since the behavior of a series is a property of any of its tails, we clearly have $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+k}$ to be convergent since $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is. The Comparison Test applies.

T/F 47

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n^6 + 1)}$$

converges.

Solution. False. Apply the Limit Comparison Test against

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n^6)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6 \log(n)}$$

which in turn diverges by comparison with the harmonic series.

T/F 48 If $a_n \leq b_n \leq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges also.

Solution. True. Changing the sign of every term in a series does not affect its convergence.

We apply the Comparison Test to the series $\sum_{n=1}^{\infty} -b_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$.T/F 49 If $a_n \leq b_n \leq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges also.

Solution. True. Changing the sign of every term in a series does not affect its convergence.

We apply the Comparison Test to the series $\sum_{n=1}^{\infty} -b_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$.T/F 50 If $a_n > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges also.

Solution. True. By assumption it converges absolutely, hence it is also convergent.

T/F 51 If the condition $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ fails (even eventually) when applying the Alternating Series Test, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverges.Solution. False. Consider $a_n = \frac{1}{k_n}$, where k_n is 2 or 3 according as n is odd or even. By the Strengthened Root Test, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converges absolutely. However, $a_{n+1} \leq a_n$ never holds for even n .T/F 52 If the condition $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ fails when applying the Alternating Series Test, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverges.

Solution. True. Use the Divergence Test.

T/F 53 If the Ratio Test indicates absolute convergence for a particular series, then the Root Test will also indicate absolute convergence for that series.

Solution. True. Suppose that the Ratio Test will show convergence for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, where without loss of generality $a_n \geq 0$. Then consider $r_n = a_n/a_{n-1}$. Since the Ratio Test is decisive, there exists a constant $c < 1$ such that eventually $r_n < c$. Let N be large enough that $r_n < c$ holds for $n \geq N$. Then, for $n \geq N$,

$$a_n^{1/n} = (a_N (a_n/a_N))^{1/n} < (a_N c^{n-N})^{1/n} = c \left(\frac{a_N}{c^N} \right)^{1/n}$$

Now the expression in the parentheses is independent of n , so that as n grows the exponential expression will approach 1. Thus, the $a_n^{1/n} < c < 1$ eventually, and the Root Test is decisive.

T/F 54

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+4} = \infty$$

Solution. True. Since the series is positive, it will suffice to show that the series does not converge. This follows from the Divergence Test because the terms do not approach 0.

T/F 55 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7$ and $a_1 = a_2 = 3$, then $\sum_{n=3}^{\infty} a_n = 1$.Solution. True. Let S_n be the n th partial sum of the first series and let T_n ($T_1 = 0, T_2 = 0$), be the n th partial sum of the second series. For $n \geq 3$, $S_n = T_n + 6$. Since $S_n \rightarrow 7, T_n \rightarrow 1$.T/F 56 $3/2, 4/3, 5/4, 6/5, \dots, (n+1)/n, \dots$ is a convergent series.

Solution. False. It is a convergent sequence. In everyday language sequence and series are used almost interchangeably, but not in mathematics. In addition we note that the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ diverges since $a_n = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$.

T/F 57 The first three terms in the sequence of partial sums associated with $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$ are $1/2, 3/4, 7/8$.

Solution. True. This is a direct computation.

T/F 58

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) = \frac{1}{7}$$

Solution. True. Observe that the series telescopes. The n th partial sum is $1/7 - 1/(3n+4)$, which tends to $1/7$.

T/F 59 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 3$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 3$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

Solution. True. Fix an $\epsilon > 0$. Then we can find an N_1, N_2 such that for $n > N_1$, $|a_{2n} - 3| < \epsilon$ and for $n > N_2$, $|a_{2n+1} - 3| < \epsilon$. Then $|a_n - 3| < \epsilon$ for all $n > \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$.

T/F 60

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

Solution. True. We simply notice that both statements are, by definition, equivalent to the statement that for each $\epsilon > 0$ we have $|a_n| < \epsilon$ eventually.

T/F 61 If $0 \leq a_n \leq b_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges also.

Solution. False. Take $a_n = 1/n^2$, $b_n = 1$.

T/F 62 If a series converges, then no subsequence of the sequence of partial sums can be unbounded.

Solution. True. Since the series converges, its sequence of partial sums converges. Thus any subsequence would also converge to the same value.

T/F 63 The integral test is of no value in testing $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n/n$ for convergence or divergence.

Solution. True. The Integral Test applies only to positive series, and the series in question changes signs erratically.

T/F 64 The sum of the infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is the limit

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n,$$

whenever this limit exists.

Solution. True. See Definitions 1.34 and 1.35.

T/F 65 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges if and only if $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converges for every p .

Solution. True. Each tail of a series will have the same limiting behavior.

T/F 66 The Ratio Test is of no value in testing $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n(n+1)(n+2)}$ for convergence or divergence.

Solution. True. Again, a series with algebraic terms cannot be decided with the Ratio Test. We note that the ratios are given by

$$\frac{1/\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}{1/\sqrt{n(n+1)(n+2)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}} \rightarrow 1.$$

T/F 67

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}$$

diverges.

Solution. True. The terms do not tend to 0, so the Divergence Test applies. (In fact they tend to $1/e$.)

T/F 68 If $a_n > 0$ for all n and if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1.$$

Solution. False. Consider any convergent p -series. (It is also possible for the limit not to exist.)

T/F 69 If for some constant c we have $a_n \geq 1/n$, then necessarily $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

Solution. True. Apply the Comparison Test using the harmonic series.

T/F 70 The series $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n$ has as its sequence of partial sums $1, 0, 1, 0, \dots$

Solution. True. This is a direct computation.

T/F 71 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + 2}{a_n^2 + 1} = 2$$

Solution. False. The terms approach $2 \neq 0$, so that the series actually diverges by the Divergence Test.

T/F 72 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + n^2}$$

converges absolutely.

Solution. True. Since $a_n \rightarrow 0$ we must eventually have $|a_n| < 1$. Then

$$\left| \frac{a_n}{a_n^2 + n^2} \right| = \frac{|a_n|}{a_n^2 + n^2} \leq \frac{1}{a_n^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

We then apply the Comparison Test.

T/F 73

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2$$

Solution. True. We know that

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Taking a derivative,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

and then multiplying by x , we get

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

The result then follows from taking $x = 1/2$.

T/F 74

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{k} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{k+1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

Solution. True. Notice that the series telescopes.

T/F 75 The Ratio Test is of no help in determining whether

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

converges or diverges.

Solution. False. The ratio of consecutive terms is

$$\frac{(2n+2)!/((n+1)!)^2}{(2n)!/(n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \rightarrow 4 > 1.$$

The series diverges by the Ratio Test.

T/F 76 If $|a_{n+1}/a_n| > 1$ for all n , then $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverges.

Solution. True. We see that the terms $|a_n|$ are actually increasing, and thus are not tending to 0.

T/F 77 If $|a_{n+1}/a_n| < 1$ for all n , then $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converges.

Solution. False. Consider the harmonic series.

T/F 78 If $s_n = 3 + 2^{-n}$ then $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 4$.

Solution. False. The limit is 3.

T/F 79 The first three terms in the sequence of partial sums associated to the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1/2)^n$ are $-1/2, 1/4, -1/8$.

Solution. False. These are the first three terms of the series. The first three partial sums are $-1/2, -1/4, -3/8$.

T/F 80

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 2^{n+1} = 4$$

Solution. True. This is a geometric series with first term $4/3$ and common ratio $2/3$. We apply Theorem 1.39.

T/F 81 Every partial sum of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)$$

is less than 1.

Solution. True. Writing

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

we see that the series telescopes, so that the partial sums have the form $1 - 1/(n+1) < 1$.

T/F 82 The Integral Test can be used to show that

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n \log \log n}$$

does not converge absolutely.

Solution. True. The series

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n}$$

diverges by the Abel-Dini scale, which was proven by the Integral Test.

T/F 83 The insertion or removal of a finite number of terms in a series cannot affect its convergence or divergence, although it may affect its sum.

Solution. True. Regardless of what finite number of terms are changed, some tail sufficiently far out is unaffected, so that the convergence or divergence is preserved.

T/F 84 If a series converges, then any summation of a subset of the terms will form a convergent series.

Solution. False. Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be any divergent positive series whose terms tend to zero. (The harmonic series is an example.) Then consider the series $a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots$. This series converges to 0, but the sum of only the positive terms diverges properly.

As an explicit counterexample, the alternating harmonic series converges but the subseries formed by the positive terms diverges.

T/F 85 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a bounded sequence, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converges.

Solution. False. Let $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

T/F 86 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ must diverge.

Solution. True. An absolutely convergent series must converge by Theorem 1.70. This states the contrapositive.

T/F 87 If $a_n = 3/n^2$, then $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converges to zero.

Solution. False. The series telescopes, and it is easy to check that the sum is 3.

T/F 88 A series representation for the decimal 0.999999... can be given by

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9 \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

where the sum is exactly 1.0, so 0.9999999999... = 1.

Solution. True. The series can be expanded as $0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots$. As for the sum, we apply Theorem 1.39.

T/F 89 If $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ does not exist, then we can always correctly claim that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

Solution. True. Apply the Divergence Test.

T/F 90 A convergent series is either absolutely convergent or conditionally convergent.

Solution. True. Either $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converges, in which case we have absolute convergence, or else it doesn't, in which case we have conditional convergence.

T/F 91 The alternating harmonic series cannot be rearranged to diverge to $-\infty$.

Solution. False. See Theorem 3.7.

T/F 92 If $a_n > 0$ and $\sqrt[n]{a_n} < 1$ for all n , then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

Solution. False. Take $a_n = (1 - 1/n)^n$.

T/F 93 If $a_n > 0$ and $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ for all n , then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

Solution. True. We would then have $a_n \geq 1$, so that the Divergence Test applies.

T/F 94 If $a_n > 0$ and $\sqrt[n]{a_n} < r < 1$ for all n and some constant r , then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

Solution. True. This follows from the Root Test.

T/F 95 If $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = L < 1$ for some constant L , then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Solution. True. We first apply the Ratio Test to see that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges and then apply Theorem 1.24.

T/F 96 If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converges.

Solution. True. See Gem 1.

T/F 97 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ converges for $p > 1/2$.

Solution. True. See Gem 2 and note that $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2p}$ converges for $p > 1/2$.

T/F 98 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ diverges.

Solution. False. Consider $a_n = \sqrt{n}$ in the case that $\sqrt{n}$ is an integer and $a_n = 0$ otherwise.

T/F 99 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ converges.

Solution. False. Consider $a_n = 1$.

T/F 100 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ converges.

Solution. False. Consider $a_n = n$.

T/F 101 If $a_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ diverges.

Solution. False. Consider $a_n = 2^n$.

12.8 What's Harmonic about the Harmonic Series?*

Why is $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ called the harmonic series? A simple answer would be that each term of the series, after the first, is the harmonic mean of its two nearest neighbors. This response, however, is likely to raise more questions than it answers: What is the harmonic mean? Where and when did it originate? Is there any connection to musical harmony?

B. 1 The Harmonic Mean

The arithmetic mean of a and b , $A = \frac{a+b}{2}$, should be familiar to all mathematics students, and the geometric mean, $G = \sqrt{ab}$, is almost as well known. The harmonic mean, however, has been called "the neglected mean" [4], [8] because it appears so infrequently in core mathematics courses. The harmonic mean of two numbers a and b is defined by the formula $H = \frac{2ab}{a+b}$ or, equivalently, $\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. It follows that, for $n > 1$, $\frac{1}{n}$ is the harmonic mean of $\frac{1}{n-1}$ and $\frac{1}{n+1}$. More generally, if $x, x+y$, and $x+2y$ are in arithmetic progression, then their reciprocals, $a = \frac{1}{x}$, $H = \frac{1}{x+y}$, and $b = \frac{1}{x+2y}$ are said to be in harmonic progression.

The origins of the harmonic mean can be traced back to the ancient Pythagoreans. According to the commentator Proclus (410-485), Pythagoras himself (6th century BC) learned about three means—arithmetic, geometric, and subcontrary (later called harmonic)—while visiting Mesopotamia [1]. According to this ancient tradition, Pythagoras also knew a "golden proportion" relating these means. Given two numbers, the first is to their arithmetic mean as their harmonic mean is to the second. That is, $\frac{a}{(a+b)/2} = \frac{2ab/(a+b)}{b}$. Another way to express this is that the harmonic mean is the ratio of the square of the geometric mean to the arithmetic mean ($H = G^2/A$).

"Arithmetic" in the time of the ancient Greeks consisted of the study of properties of whole numbers and rational numbers. The arithmetic mean of two rational numbers must

also be rational but, for most pairs of integers, the geometric mean is irrational, and the Greeks relegated such magnitudes to the realm of geometry. These facts may help to explain the names of two of our three means. Later, we'll examine a possible explanation for the name of the harmonic mean.

In passing, we note that the term "harmonic range of points" is also derived from the harmonic mean. Collinear points A, B, C, D are said to form a harmonic range if and only if their cross ratio, $(AB, CD) = (\overline{AC}/\overline{CB})/(\overline{AD}/\overline{DB})$, is -1 . It can be shown [5] that this is equivalent to $2/\overline{AB} = 1/\overline{AC} + 1/\overline{AD}$. That is, the length of AB is the harmonic mean of the lengths of AC and AD .

*Reprinted with permission from The College Mathematics Journal.

B. 2 A Musical Connection

Pythagoras (or one of his disciples) is also credited with giving Western Europe its first theory of music, based on musical intervals that can be expressed in terms of numerical ratios of small whole numbers. Among these are the octave ($2 : 1$), the fifth ($3 : 2$), and the fourth ($4 : 3$). Here the numbers 1, 2, 3, and 4 are proportional to the frequencies of the tones, a larger number corresponding to a higher pitch. The tone corresponding to 1 is called the tonic. The names fourth, fifth, and octave come from the ordering of tones on an 8-tone diatonic scale.

The ratio $2 : 1$ for an octave may also be expressed as $12 : 6$, so that the tonic has relative frequency 6. Suppose that the ancient Pythagoreans wanted to introduce a new tone, roughly midway between the tonic and the octave. The geometric mean of 6 and 12 is irrational, so a musical tone based on it would have been unacceptable. The arithmetic mean of 6 and 12 is 9, leading to the ratios $9 : 6 = 3 : 2$ and $12 : 9 = 4 : 3$. In such a scale the new tone (corresponding to a relative frequency of 9) would be a fifth above the tonic and the octave would be a fourth above the new tone.

On the other hand, the harmonic mean of 6 and 12 is 8, producing ratios $8 : 6 = 4 : 3$ and $12 : 8 = 3 : 2$. Now the new tone is a fourth above the tonic, with the octave a fifth above that. A surviving fragment of the work of Archytas of Tarentum (ca. 350 BC) states, "There are three means in music: one is the arithmetic, the second is the geometric, and the third is the subcontrary, which they call harmonic" [7]. The term subcontrary may refer to the fact that a tone based on this mean reverses the order of the two fundamental musical intervals in a scale.

It is believed that Archytas or one of his contemporaries gave the name "harmonic" to the subcontrary mean because it produced a division of the octave in which the middle tone stood in the most harmonious relationship to the tonic and the octave. Even today, many musicians prefer a scale in which a fourth is followed by a fifth. (A more complete discussion of Greek musical theory may be found in [2] and [9].)

B. 3 Divergence of the Harmonic Series

The earliest recorded proof that the harmonic series diverges is found in a treatise by the 14th century Parisian scholar, Nicole Oresme. In the third proposition of his work, *Questions on the geometry of Euclid* (ca. 1350) Oresme asserted that, "It is possible that an addition could be made, though not proportionally, to any quantity by ratios of lesser inequality, and yet the whole would become infinite" [6]. His example consists of adding to a one-foot quantity one-half of a foot, then one-third of a foot, then one-fourth and one-fifth "and so on to infinity." His proof is essentially the one that we often show our students today. He notes that $1/4$ plus $1/3$ is greater than $1/2$; the sum of the terms from $1/5$ to $1/8$ is greater than $1/2$; and so on, obtaining infinitely many parts "of which any one will be greater than one-half foot and the whole will be infinite."

Oresme's result was rediscovered by Pietro Mengoli in 1672 and Jacques Bernoulli in 1689 [1]. The proof given by Bernoulli in *Ars conjectandi* has been characterized by William Dunham [3] as "entirely different, yet equally ingenious." According to the *Oxford English Dictionary*, the name "harmonic series" first appeared in *Chambers Cyclopedia* (1727-51): "Harmonical series is a series of many numbers in continual harmonical proportion."

The roots of the harmonic series can be traced back to some of the earliest mathematical traditions in Western culture. Based on the harmonic mean, it is related to harmonics in both music and geometry. This concept deserves its place as a fundamental idea of mathematical thought.

Part VII

Measure and Integral

Обсудим подробно все основные темы теории меры и интегрального исчисления.

13 Do We Really Need Understanding Construction of Integrals and Measures?

(but this is top 1 discussion about this theory. I think that no, we don't need it, but there are many arguments. one should learn these topics only if they are really needed and it is not clear, where this can be. here, I'll explain, where they can be???!))

14 Construction of the Integral

14.1 Which Integral to Chose?

(I'll write very shortly the main idea of Riemann, Lebesgue integrals and focus on discussing examples, there the exactly one or exactly another is really needed)

14.2 Riemann Integral

14.2.1 Jordan Measure

почему мера жордана это не очевидно?

я хз, актуальный вопрос?!!!

Theory

(??? а я так и не понял, зачем рыться в этом очевидном)

Мера Лебега Допускает много разнообразных определений.

Мы будем следовать учебнику Никольского и будем определять меру Лебега через более простое понятие - меру Жордана.

Назовём параллелепипедом $P \subseteq \mathbb{R}^n$ произведение ограниченных промежутков $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ (которые могут быть точками), нации параллелепипеды всегда будут «параллельны координатным осям» и мера будет определена с использованием выделенной системы координат, хотя и заведомо инвариантна относительно сдвигов координат.

Поведение меры при линейных заменах координат будет установлено в теореме 5.88.

Мера параллелепипеда (открытого, замкнутого или промежуточного между ними) определяется как произведение длин его проекций на координатные оси.

Если параллелепипед имеет вид

$$P = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

или

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

или что-то между ними, то мера будет равна $mP = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$.

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ назовём элементарным, если оно является объединением конечного числа попарно не пересекающихся параллелепипедов.

для произвольного элементарного множества мера mS определяется как сумма мер в его разбиении на параллелепипеды.

Чтобы проверить корректность определения, для двух разбиений $S = \bigcup P'_i$ и $S = \bigcup P''_j$ сделаем их общее измельчение как разбиение на параллелепипеды $\Delta P'_i \cap P''_j$ (которые не пусты), тогда проверка корректности сведётся к проверке того, что при измельчении разбиения на параллелепипеды сумма мер параллелепипедов не меняется.

Последнее утверждение достаточно проверить для одного параллелепипеда - если он разбит на меньшие параллелепипеды, то сумма мер меньших будет равна мере исходного, это простейший случай аддитивности меры. можно проверять так.

Сделаем все параллелепипеды замкнутыми, тогда они могут пересекаться, но только по границам, такая ситуация будет называться попарно не пересекаться.

нат, то есть разрезан гиперплоскостью $\{x_i = c\}$ на части $\{x_i < c\}$ и $\{x_i > c\}$, то $a, \Delta, \bar{\Delta}$ аддитивность объёма следует из аддитивности умножения

$$(b_1 - a_1) \dots (b_i - a_i) \dots (b_n - a_n) = \\ = (b_1 - a_1) \dots (b_i - c) \dots (b_n - a_n) + (b_1 - a_1) \dots (c - a_i) \dots (b_n - a_n).$$

В общем случае для разбиения $P = P_1 \cup \dots \cup P_N$, найдем некоторую координату x_i и число c , так что гиперплоскость $H = \{x_i = c\}$ имеет один из P_k (нестрого) с одной стороны от себя, и еще один P_ℓ (нестрого) с другой стороны от себя.

Покажем, что такую гиперплоскость действительно можно найти.

Если для x_i такого c нет, то это означает наличие такого значения d_i , что оно лежит строго внутри всех проекций P_j на ось x_i (проверьте это!); повторяя это для всех координат находим точку $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, которая лежит строго внутри всех P_j , что противоречит требованию отсутствия перекрытий между P_j .

Итак, мы можем найти гиперплоскость $H = \{x_i = c\}$ и порежем P и каждый P_j гиперплоскостью H на две части, тогда P разобьётся на две части $P = P' \cup P''$, и каждый P_j тоже может быть разобьётся на две части $P_j = P'_j \cup P''_j$, одна из которых может быть пустой.

Если H пересекает P_j по границе, но не по внутренности, то будем считать, что от P_j осталась только одна часть при разрезании.

Из условия выбора гиперплоскости H в обоих разбиениях

$$P' = P'_1 \cup \dots \cup P'_N, \quad P'' = P''_1 \cup \dots \cup P''_N$$

в правой части хотя бы один параллелепипед $P'_{j'}$ и $P''_{j''}$ пуст.

Значит на самом деле в каждом из этих разбиений строго меньше N частей, так что мы можем применить индукцию по N и заключить, что

$$mP' = mP'_1 + \dots + mP'_N, \quad mP'' = mP''_1 + \dots + mP''_N$$

а потом воспользоваться уже установленным случаем разрезания гиперплоскостью и сделать вывод, что

$$mP = mP' + mP'' = \sum_{j=1}^N mP'_j + mP''_j = \sum_{k=1}^N mP_k.$$

тоже элементарны и выполняется аддитивности меры:

$$mS + mT = m(S \cup T) + m(S \cap T)$$

так, чтобы S, T , а следовательно $S \cap T$ и $S \cup T$, были объединениями некоторых наборов маленьких параллелепипедов.

Также ясно, что множество $S \setminus T$ всегда является элементарным при элементарных S и T . определению меры Жордана произвольного множества с помощью приближения его элементарными.

Определение

.1.

Нижняя мера Жордана X - это точная верхняя грань объёма элементарного множества $s \subseteq X$; верхняя мера Жордана X - это точная нижняя грань объёма элементарного множества $S \supseteq X$.

Если верхняя мера Жордана равна нижней мере Жордана X , то будем говорить, что они равны мере Жордана X и X измеримо по Жордану.

Очевидно по определению, что измеримое по Жордану множество ограничено, иначе бы оно не поместилось ни в какое элементарное множество.

Задача критерий измеримости множества по Жордану

докажите, что множество Жордана границы ∂X равна нулю.

||

Поместите X в большой параллелепипед ΔP .

Имея элементарные $s \subseteq X \subseteq S$, разбейте P на маленькие параллелепипеды так, чтобы s, S и $S \setminus s$ были составлены из некоторых маленьких параллелепипедов разбиения и получите покрытие границы набором маленьких параллелепипедов, являющихся замыканиями параллелепипедов, составляющих $S \setminus s$.

Имея элементарное $\sigma \supseteq \partial X$, разбейте весь P на маленькие параллелепипеды так, чтобы σ было составлено из некоторых маленьких параллелепипедов разбиения, соберите соответствующие s и S из маленьких параллелепипедов этого разбиения, которые полностью содержатся в X или которые составляют σ .||

Формула $mX + mY = m(X \cup Y) + m(X \cap Y)$

Если $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану, то измеримы $X \cup Y, X \cap Y, X \setminus Y$ и выполняется

$$mX + mY = m(X \cup Y) + m(X \cap Y)$$

Д-во - (??)

||

Если приблизить элементарными $s \subseteq X \subseteq S$ и $t \subseteq Y \subseteq T$ так что

$$mS - ms < \varepsilon, \quad mT - mt < \varepsilon$$

то $X \cup Y, X \cap Y, X \setminus Y$ тоже можно будет очевидным образом приблизить снизу и сверху элементарными с точностью не более 2ε .

Сравните с аналогичным утверждением для меры Лебега, теоремой 5.13.

||

если $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану и $X \subseteq Y$, то $mX \leq mY$

докажите, что если $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану и $X \subseteq Y$, то

$$mX \leq mY$$

||

Докажите это для нижней меры Жордана по определению.

(?????) ||

14.2.2 Integration of Continuous Functions via Approximations

В этом разделе представлен один способ определить интеграл от непрерывных функций.

далее будет дано определение интеграла Римана на отрезке и более общего интеграла Лебега, не зависящие от материала этого раздела, но кажется полезным сначала изучить такой упрощённый способ.

(! в 1ю укажу это!)

(???? и в чем вообще суть этого раздела????)

Теорема о существовании первообразной любой непрерывной

У всякой непрерывной на отрезке функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ есть первообразная, то есть непрерывная функция $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a, b)$.

Доказательство.

Можно сдвинуть отрезок так, чтобы $a = 0$.

У многочлена $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ есть первообразная

$$P(x) = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

По теореме 4.67 можно найти последовательность многочленов (p_n) , равномерно сходящуюся к f на отрезке $[a, b]$.

Выберем первообразные, чтобы выполнялось $P'_n(x) = p_n(x)$, также мы будем знать, что $P_n(0) \equiv 0$.

По теореме 4.35 последовательность P_n будет равномерно сходиться к некоторой F , и будет выполняться $F'(x) = f(x)$ на интервале (a, b) и даже на концах отрезка для односторонних производных.

Определение интеграла через формулу Ньютона-Лейбница (!!!!!!!)

(??? так можно делать???)

Определим интеграл непрерывной функции одного аргумента $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где F - любая первообразная f на отрезке.

Определение не зависит от выбора первообразной, так как любые две первообразные F_1 и F_2 будут обладать свойством $F'_1 - F'_2 = (F_1 - F_2)' = 0$. Откуда по теореме о среднем Лагранжа следует, что $G = F_1 - F_2$ постоянна на отрезке, а значит в формуле Ньютона-Лейбница ничего не поменяется от замены F_1 на F_2 .

Лемма о свойствах интеграла, определенного по формуле Ньютона-Лейбница

Этот интеграл линейный

$$\int_a^b Af(x) + Bg(x)dx = A \int_a^b f(x)dx + B \int_a^b g(x)dx$$

монотонный

$$f(x) \geq g(x) \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

и аддитивный по отрезкам

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Доказательство.

Взяв первообразные $F' = f$ и $G' = g$, мы видим, что $AF(x) + BG(x)$ бу- монотонности достаточно заметить, что если $h = f - g \geq 0$, то

$$\int_a^b h(x)dx = H(b) - H(a) = h(\xi)(b - a) \geq 0$$

по теореме о среднем Лагранжа.

Аддитивность по отрезкам проверяется тривиально:

$$F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a)$$

Из минейности и аддитивности по отрезкам следует, что для непрерывной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем, то есть отличной от нуля только на некотором отрезке $[a, b]$, можно определить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

и он не зависит от выбора конечного отрезка $[a, b]$, содержащего носитель функции.

Определение интеграла от функции из $\mathbb{R}^n$

Для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем (отличной от нуля только на некотором кубе) определим с помощью повторного интегрирования по всем переменным

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

Здесь происходит интегрирование по одной переменной, тогда как другие выступают как параметры.

Если носитель f содержится в кубе с ребром D , то из равномерной непрерывности f можно заметить, что самый внутренний интеграл меняется не более чем на $D\omega_f(\delta)$ при изменении параметров на δ , то есть даёт непрерывную функцию параметров с компактным носителем.

Это оправдывает возможность продолжать интегрирование по другой переменной и т.д.

Теорема о свойствах интеграла непрерывной функции нескольких переменных с компактным носителем

Определение интеграла непрерывной функции нескольких переменных с компактным носителем не зависит от порядка интегрирования, является линейной и монотонной операцией.

Доказательство.

Линейность и монотонность очевидны по индукции, посмотрим на зависимость от порядка интегрирования.

Рассмотрим $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и предположим, что она тождественно равна нулю за пределами куба $[-D, D]^n$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{-D}^D \dots \int_{-D}^D f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

Есть теорема, по которой непрерывную функцию f можно приблизить многочленом нескольких переменных с точностью ε , тогда интеграл будет приближен с точностью $(2D)^n \varepsilon$ (здесь используется интегрирование неравенств, то есть монотонность).

Значит достаточно доказать независимость от порядка интегрирования для многочленов нескольких переменных.

По линейности это достаточно доказать для мономов

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

Нетрудно убедиться, интегрируя только многочлены, что интеграл от такого монома по рассматриваемому кубу в любом порядке равен одному и тому же числу

$$\left(\frac{D^{k_1+1}}{k_1+1} - \frac{(-D)^{k_1+1}}{k_1+1} \right) \dots \left(\frac{D^{k_n+1}}{k_n+1} - \frac{(-D)^{k_n+1}}{k_n+1} \right).$$

Следствие

4.83.

Для всякой непрерывной $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем с непрерывной частной производной $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ будет выполняться

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 0$$

Где определим для функции нескольких переменных частную производную как

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t},$$

то есть как производную по одной переменной при фиксированных остальных.

Доказательство.

Если начать интегрировать по x_i то по формуле Ньютона- Фейбница сразу получится ноль.

На самом деле лемма 6.92 (формулировка которой на данном этапе изложения может быть не вполне ясна) показывает, что определённое в этом разделе понятие интеграла, исходя из его установленных свойств, обязано совпадать (с точностью до умножения на константу) с любым другим разумным понятием интеграла от непрерывной функции с компактным носителем. 4.9.

приложения в двух словах**14.2.3 Definition of the Riemann Integral on an Interval**

Приведём элементарное описание интеграла Римана на отрезке.

(!! да прописал я наконец сравнение с Лебегом или нет????? давно планы были, еще так и не дошел.)

Разбиение, мелкость, измельчение

Определим разбиение отрезка $[a, b]$ как представление его в виде объединения попарно не пересекающихся промежутков

$$[a, b] = \Delta_1 \sqcup \Delta_2 \sqcup \dots \sqcup \Delta_N.$$

Часто будем писать для обозначения разбиения $\tau = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N\}$, будем писать

$$\tau \vdash [a, b].$$

Для двух разбиений $\tau, \sigma \vdash [a, b]$ определим их общее измельчение

$$\tau \vee \sigma = \{\Delta' \cap \Delta'' : \Delta' \in \tau, \Delta'' \in \sigma, \Delta' \cap \Delta'' \neq \emptyset\}$$

Будем также говорить, что τ мельче σ , $\tau \preceq \sigma$, если всякий промежуток τ содержится с некотором промежутке σ .

Ясно, что

$$\tau \vee \sigma \preceq \tau, \quad \tau \vee \sigma \preceq \sigma.$$

Карасев.з.

84.

докажите, что если τ состоит из n промежутков, а σ - из m промежутков, то в $\tau \vee \sigma$ не более $n + m - 1$ промежутка.

Суммы Дарбу**Определение**

4.85.

Для функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\tau \vdash [a, b]$ определим суммы Дарбу

$$s(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \inf_{x \in \Delta} f(x) |\Delta|$$

$$S(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \sup_{x \in \Delta} f(x) |\Delta|$$

где $|\Delta|$ обозначает длину промежутка.

О применениях сумм Дарбу (!?!?!?)

(кроме инт Римана больше они нигде не нужны????)

Лемма о свойствах сумм Дарбу

Если $\tau \preceq \sigma$, то

$$s(f, \tau) \geq s(f, \sigma), \quad S(f, \tau) \leq S(f, \sigma).$$

изменении суммы Дарбу при такой операции следует из неравенств

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \Delta'} f(x) &\geq \inf_{x \in \Delta} f(x), & \inf_{x \in \Delta''} f(x) &\geq \inf_{x \in \Delta} f(x), \\ \sup_{x \in \Delta'} f(x) &\leq \sup_{x \in \Delta} f(x), & \sup_{x \in \Delta''} f(x) &\leq \sup_{x \in \Delta} f(x) \end{aligned}$$

и очевидного равенства $|\Delta| = |\Delta'| + |\Delta''|$.

Лемма

87.

Для двух разбиений $\tau, \sigma \vdash [a, b]$ имеет место

$$s(f, \tau) \leq S(f, \sigma).$$

Доказательство.

Из предыдущей леммы получаем

$$s(f, \tau) \leq s(f, \tau \vee \sigma) \leq S(f, \tau \vee \sigma) \leq S(f, \sigma)$$

где неравенство посередине тривиально следует из определения.

Верхний и нижний интегралы Римана

Определим верхний и нижний интегралы Римана

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x) dx &= \inf_{\tau \vdash [a, b]} S(f, \tau), \\ \int_a^b f(x) dx &= \sup_{\tau \vdash [a, b]} s(f, \tau) \end{aligned}$$

По предыдущей лемме

$$\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

и если они оба равны одному числу, то их общее значение называется просто интеграл Римана

$$\int_a^b f(x) dx$$

Анализируя определение можно сказать, что для неограниченной сверху функции верхний интеграл равен $+\infty$.

Аналогично для неограниченной снизу функции нижний интеграл равен $-\infty$.

Поэтому интегрируемой по Риману может быть только ограниченная на отрезке функция.

14.2.4 Riemann Integral via Step Functions

Для понимания развиваемого далее понятия интеграла Лебега нам будет полезно переформулировать это определение.

Определение ступенчатых сумм и ступенчатого интеграла Римана

Функция $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется (элементарно) ступенчатой, если для некоторого разбиения $\tau \vdash [a, b]$ она является постоянной со значением $f(\Delta)$ на всяком промежутке $\Delta \in \tau$.

В этом параграфе мы будем называть такие функции просто ступенчатыми, в определении интеграла Лебега будет намного более общее понятие ступенчатых функций, но общие приёмы работы с ними будут похожи.

Определение 4.90.

Интегралом ступенчатой функции называется

$$\int_a^b h(x) dx = \sum_{\Delta \in \tau} f(\Delta) |\Delta|.$$

Теперь можно переписать определение нижнего и верхнего интеграла Римана как

$$\begin{aligned} \overline{\int}_a^b f(x) dx &= \inf_{h \geq f \text{ ступенчатая}} \int_a^b h(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \sup_{h \leq f \text{ ступенчатая}} \int_a^b h(x) dx, \end{aligned}$$

где неравенство между функциями понимается как выполняющееся в каждой точке.

действительно, например, нижняя сумма дарбу для фиксированного разбиения τ является ни чем иным, как максимально возможным интегралом от ступенчатой $h \leq f$, построенной на разбиении τ , аналогично для верхней суммы дарбу.

Монотонность интеграла ступенчатой функции

Если $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ступенчатые и $f \leq g$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство.

Пусть f и g являются ступенчатыми на разбиениях τ и σ соответственно.

Тогда их можно также считать ступенчатыми на разбиении $\varphi = \tau \vee \sigma$, причём из аддитивности длины промежутка следует, что значение интеграла не изменится, если мы применим определение к измельчению исходного разбиения.

А для двух ступенчатых функций на одном и том же разбиении φ утверждение очевидно.

Из предыдущей леммы также следует корректность определения интеграла ступенчатой функции, то есть независимость от выбора разбиения на ступеньки для одной и той же функции. пениатые, то $Af + Bg$ тоже ступенчатая и

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A \int_a^b f(x)dx + B \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство.

Аналогично предыдущей лемме, пусть f и g являются ступенчатыми на разбиениях τ и σ .

Тогда их можно также считать ступенчатыми на разбиении $\varphi = \tau \vee \sigma$.

Для ступенчатых функций на одном и том же разбиении линейность очевидна.

Карасев.3.

93.

докажите, что если $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ступенчатые, то

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

тоже ступенчатые. Переходя к пределу в определении интеграла Римана, получаем:

Монотонность интеграла Римана

Если $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману и $f \leq g$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство.

Это следует из определения сумм Дарбу и их монотонности по функции.

Линейность интеграла Римана

Если $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману, то $Af + Bg$ тоже интегрируема по Риману и

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A \int_a^b f(x)dx + B \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство.

Пусть мы оценим f и g снизу и сверху ступенчатыми функциями

$$h_f \leq f \leq H_f, \quad h_g \leq g \leq H_g,$$

причём по определению интегрируемости можем считать

$$\int_a^b (H_f - h_f) dx < \varepsilon, \quad \int_a^b (H_g - h_g) dx < \varepsilon$$

Тогда линейная комбинация тоже оценивается сверху и снизу

$$Ah_f + Bh_g \leq Af + Bg \leq AH_f + BH_g$$

и

$$\int_a^b ((AH_f + BH_g) - (Ah_f + Bh_g)) dx \leq (|A| + |B|)\varepsilon,$$

что доказывает интегрируемость линейной комбинации.

А из линейности интеграла для ступенчатых функций следуют неравенства

$$A \int_a^b h_f dx + B \int_a^b h_g dx \leq \int_a^b (Af + Bg) dx \leq A \int_a^b H_f dx + B \int_a^b H_g dx$$

Так как левая и правая часть могут быть сделаны сколь угодно близкими к

$$A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx$$

то находящееся посередине в предыдущей формуле выражение обязано быть равным последнему.

Аддитивность интеграла Римана по отрезкам

Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и на отрезке $[b, c]$, то она интегрируема по Риману и на отрезке $[a, c]$.

Доказательство.

Пусть f оценена на отрезке $[a, b]$ снизу и сверху ступенчатыми $g_1 \leq f \leq h_1$ так что

$$\int_a^b (h_1(x) - g_1(x)) dx < \varepsilon$$

а на отрезке $[b, c]$ оценена снизу и сверху ступенчатыми $g_2 \leq f \leq h_2$ так что

$$\int_b^c (h_2(x) - g_2(x)) dx < \varepsilon$$

Тогда из ступенчатых h_1 и h_2 составим ступенчатую $h : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$, а из g_1 и g_2 составим ступенчатую $g : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$.

Тогда на отрезке $[a, c]$ будет иметь место оценка $g \leq f \leq h$, а непосредственно из определения интеграла ступенчатой функции видно, что

$$\int_a^c (h(x) - g(x)) dx < 2\varepsilon$$

О применениях интеграла Римана (?!?!?!?!?!?!?)

этот раздел содержит некоторые полезные конструкции, которые работают и в более общей постановке.

(укажу, короче это!)

Теорема об интегрируемости на подотрезке

Если функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на любом отрезке $[c, d] \subseteq [a, b]$.

(?? что может быть более очевидно??)

Доказательство.

По определению интеграла Римана, для любого $\varepsilon > 0$ функция f может быть оценена на $[a, b]$ сверху и снизу ступенчатыми $g \leq f \leq h$ так, что

$$\int_a^b (h(x) - g(x)) dx < \varepsilon.$$

Но тогда на отрезке $[c, d]$ те же ступенчатые функции оценивают f и по определению интеграла ступенчатой функции выполняется

$$\int_c^d (h(x) - g(x)) dx < \varepsilon.$$

Взвешанная сумма колебаний

Часто бывает полезно рассмотреть взвешенную сумму колебаний

$$\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \omega(f, \Delta) |\Delta|$$

где $\omega(f, X) = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$ - колебание функции на множестве X .

Тогда интегрируемость f по Риману, как возможность приблизить функцию снизу и сверху ступенчатыми с произвольно малым интегралом разности, может быть переписана как

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau \vdash [a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$$

С помощью этого понятия доказывается:

(тут еще потом Карасев Лемму дописал, пока не копировал её)

Теорема

98.

Если функции $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то их модули интегрируемы, а также их произведение интегрируемо.

Доказательство.

Пусть для некоторого $\tau \vdash [a, b]$

$$\Omega(f, \tau) < \varepsilon$$

Если колебание на промежутке разбиения записать как

$$\omega(f, \Delta) = \sup_{x', x'' \in \Delta} |f(x') - f(x'')|,$$

то из очевидного неравенства $\|a\| - \|b\| \leq |a - b|$ получается

$$\omega(|f|, \Delta) \leq \omega(f, \Delta),$$

а во взвешенной сумме по всем промежуткам выходит

$$\Omega(|f|, \tau) \leq \Omega(f, \tau) < \varepsilon$$

Это доказывает утверждение про модуль.

далее, пусть f и g ограничены константой M .

Если выполняется

$$\Omega(f, \tau) < \varepsilon, \Omega(g, \tau) < \varepsilon$$

то из неравенства $|ab - cd| \leq |b| \cdot |a - c| + |c| \cdot |b - d|$ следует

$$\Omega(fg, \tau) \leq M\Omega(f, \tau) + M\Omega(g, \tau) \leq 2M\varepsilon$$

Нам также будет полезно знать, что при взятии достаточно мелких разбиений суммы Дарбу будут достаточно близки к интегралу Римана.

Для этого введём определения.

Определение мелкости

Мелкостью разбиения $\tau \vdash [a, b]$ называется

$$|\tau| = \max_{\Delta \in \tau} |\Delta|$$

Определение

Суммой Римана для функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ разбиения $\tau \vdash [a, b]$ и системы представителей $\{\xi(\Delta) \in \Delta\}_{\Delta \in \tau}$ называется

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{\Delta \in \tau} f(\xi(\Delta))|\Delta|$$

Ясно, что суммы дарбу для функции f являются точной нижней и точной верхней гранью сумм Римана $\sigma(f, \tau, \xi)$ при фиксированных f и τ и меняющихся системах представителей ξ .

Теорема

101.

Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что если $|\tau| < \delta$, то для любой системы представителей

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sigma(f, \tau, \xi) \right| < \varepsilon$$

Доказательство.

Сначала докажем утверждение для ступенчатых функций.

Пусть h ступенчатая, ограниченная числом M и имеющая N разрывов на $[a, b]$.

Заметим, что для ступенчатой функции h и любого разбиения τ выполняется

$$\int_a^b h(x) dx = \sum_{\Delta \in \tau} \int_{\Delta} h(x) dx$$

а разность между интегралом и суммой Римана имеет вид

$$\int_a^b h(x) dx - \sigma(h, \tau, \xi) = \sum_{\Delta \in \tau} \int_{\Delta} (h(x) - h(\xi(\Delta))) dx$$

Если на промежутке Δ функция h постоянна, то соответствующее слагаемое суммы оказывается равным нулю.

Значит количество ненулевых слагаемых в сумме не больше числа разрывов функции h .

Если τ имеет мелкость $|\tau| < \delta$, то всякое ненулевое слагаемое в сумме по модулю не более $2M\delta$, как величина не большая $2M$, проинтегрированная по промежутку длиной не более δ .

Следовательно, отклонение суммы Римана $\sigma(h, \tau, \xi)$ от интеграла Римана $\int_a^b h(x) dx$ будет не более $2MN$ для любой системы представителей ξ .

Так как NM зависит только от функции и не зависит от разбиения, то утверждение для ступенчатой функции доказано.

Пусть теперь f приближена ступенчатой h снизу $h \leq f$, и

$$\int_a^b h(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx - \varepsilon/2$$

Тогда при $|\tau| < \frac{\varepsilon}{4M_h N_h}$ в силу монотонной зависимости суммы Римана от функции будем иметь

$$\sigma(f, \tau, \xi) \geq \sigma(h, \tau, \xi) > \int_a^b h(x) dx - \varepsilon/2 \geq \int_a^b f(x) dx - \varepsilon$$

Аналогично для приближения сверху ступенчатой $H \geq f$, интеграл которой отличается от интеграла f не более чем на $\varepsilon/2$, при $|\tau| < \frac{\varepsilon}{4M_H N_H}$ будем иметь

$$\sigma(f, \tau, \xi) < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$$

В предыдущем разделе мы показывали, что формулу Ньютона–Лейбница можно считать определением интеграла непрерывной функции.

Теперь же у нас другое определение интеграла и её надо будет доказать.

Формула Ньютона–Лейбница для интеграла Римана (!?!?!?!?!?!?!?!?!)

Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману и имеет первообразную F на интервале (a, b) , непрерывную на концах отрезка $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство.

Рассмотрим разбиение, заданное концами промежутков разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, и запишем по теореме о среднем Лагранжа

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^N F(x_k) - F(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) |\Delta_k|.$$

Но справа стоит некоторая сумма Римана для функции f и данного разбиения, которая будет стремиться к интегралу f при мелкости разбиения, стремящейся к нулю.

Пример невыполнения формулы Ньютона–Лейбница для функции, у которой существует первообразная

Заметим, что наличие первообразной у функции f на отрезке $[a, b]$ не гарантирует выполнения формулы Ньютона–Лейбница. Причина этого кроется в том, что производная может быть функцией, не интегрируемой по Риману на отрезке. Приведем соответствующий пример.

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ функцию: $F(0) = 0$, $F(x) = x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x}$ при $x \in (0, 1]$. Имеем

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x}}{x} = 0,$$

$$F'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x} + x^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1].$$

Функция $F'(x)$ определена и конечна на $[0, 1]$. Однако легко видеть, что функция $F'(x)$ не ограничена во всякой окрестности нуля (за счет слагаемого $x^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x}$) и тем самым не интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$.

Определение интеграла с пределами наоборот

Если $b < a$ и функция $f : [b, a] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, то будем писать

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Ясно (например из рассмотрения сумм Римана и предельного перехода), что при таком определении выполняется аддитивность интеграла Римана по отрезкам

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

если f интегрируема на некотором отрезке, содержащем a, b, c .

Почему ф Н-Л не очевидны (!???)

(давно этот вопрос был.)

Теорема Интегрируемость по Риману и существование первообразной у непрерывной функции

Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то она интегрируема по Риману.

Кроме того, функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

является первообразной для f .

Доказательство.

Для непрерывной функции легко выписать оценку через модуль непрерывности

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \omega(f, \Delta) |\Delta| \leq \omega_f(|\tau|) \sum_{\Delta \in \tau} |\Delta| = \omega_f(|\tau|)(b-a)$$

что стремится к нулю при $|\tau| \rightarrow 0$ по равномерной непрерывности f на отрезке.

Таким образом непрерывная функция интегрируема.

далее, можно записать по адитивности и линейности

$$F(x+u) - F(x) = \int_x^{x+u} f(t) dt = f(x)u + \int_x^{x+u} (f(t) - f(x)) dt$$

Второе слагаемое можно оценить с использованием $|f(t) - f(x)| \leq \omega_f(|u|)$ как

$$\left| \int_x^{x+u} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \left| \int_x^{x+u} \omega_f(|u|) dt \right| \leq \omega_f(|u|)|u| = o(|u|),$$

в конце мы используем равномерную непрерывность в виде $\omega_f(|u|) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$.

Это даёт дифференцируемость функции F и равенство её производной f по определению.

Теорема Интегрируемость по Риману монотонной функции

Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна, то она интегрируема.

Доказательство.

Заметим, что монотонная на отрезке функция ограничена (её значениями на концах), а также сумма колебаний функции по промежуткам разбиения не более колебания на всём отрезке:

$$\sum_{\Delta \in \tau} \omega(f, \Delta) \leq \omega(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|.$$

Torsa

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{\Delta \in \tau} \omega(f, \Delta) |\Delta| \leq |\tau| \sum_{\Delta \in \tau} \omega(f, \Delta) \leq |\tau| |f(b) - f(a)|$$

что стремится к нулю при $|\tau| \rightarrow +0$.

Функция Дирихле

докажите, что функция, принимающая значение 1 на рациональных числах и 0 на иррациональных, не интегрируема по Риману ни на одном отрезке.

[[

Заметьте, что её колебание на промежутке положительной длины равно 1.

]]

Карасев.з.

107.

Пусть последовательность интегрируемых по Риману функций $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно к функции f_0 .

докажите, что f_0 интегрируема и

$$\int_a^b f_0(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

[[

Используйте, что f_n равномерно приближает f_0 и само может быть приближено снизу и сверху ступенчатыми функциями с небольшой разностью между их интегралами.

]]

Карасев.з.

108.

докажите, что предыдущее утверждение не верно для поточечной сходимости функций, даже если все эти функции равномерно ограничены.

[[

Можно использовать функцию Дирихле.

]]

Карасев.з.

109.

докажите, что если функция ограничена на $[a, b]$ и интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ при любых $a < \alpha \leq \beta < b$, то она интегрируема и на $[a, b]$.

[[

дополните разбиение $[\alpha, \beta]$ до разбиения $[a, b]$ и оцените добавку к взвешенной сумме колебаний.

]]

Приложение интеграла Римана для доказательства иррациональности π (????)

О дним интересным и непосредственным приложением интеграла Римана является возможность доказать, что число π является иррациональным. Рассмотрим интегралы

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что $I_0 = 2, I_1 = 4$ и интегрированием по частям получаем рекуррентную формулу

$$I_n = (4n - 2)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Отсюда следует, что $I_n = P_n(\pi^2)$, где P_n - многочлен степени не более n с целыми коэффициентами.

Допустим, что π рационально, то есть $\pi = \frac{p}{q}$, где числа p и q натуральные. Тогда

$$P_n\left(\frac{p^2}{q^2}\right) = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt > 0$$

а также

$$\frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t dt \leq \frac{2}{n!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2n+1}$$

То есть

$$q^{2n} P_n\left(\frac{p^2}{q^2}\right) \leq \frac{2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} q^{2n}}{n!}$$

В силу (2.2) и свойств многочлена P_n число $q^{2n} P_n\left(\frac{p^2}{q^2}\right)$ натуральное при всяком n . С другой стороны

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} q^{2n}}{n!} = +0$$

(почему?). Итак, при больших n в формуле (2.3) слева стоит целое положительное чи сло, а справа - число из промежутка $(0, 1)$. Противоречие.

14.2.5 Other Properties of the Riemann Integral

Теорема а о дифференцировании интеграла Римана, зависящего от параметра

Теорема 5. Пусть функции φ, ψ непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$, $\varphi \leq \psi$ на $[c, d]$. Пусть функции $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $\bar{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\}$,

$$J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx.$$

Тогда на отрезке $[c, d]$ существует производная

$$\frac{d}{dy} J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx + f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y)$$

При этом производная в точках $y = c, y = d$ понимается как односторонние. Док а з а т е л ь с т в о. Шаг 1. Положим при $\varepsilon > 0$

$$G_\varepsilon := \{(x, y) : \varphi(y) - \varepsilon < x < \psi(y) + \varepsilon, c \leq y \leq d\}$$

и предположим дополнительно, что при некотором $\varepsilon > 0$ функции $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на G_ε . Определим на множестве $G_\varepsilon^* = \{(y, u, v) : \varphi(y) - \varepsilon < u, v < \psi(y) + \varepsilon, y \in [c, d]\}$ функцию

$$F(y, u, v) := \int_u^v f(x, y) dx.$$

Тогда

$$J(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)).$$

Формула (1) получается, очевидно, при дифференцировании последнего равенства в соответствии с правилами дифференцирования сложной функции и дифференцирования интеграла с переменным верхним (нижним) пределом. Для применения теоремы 11.3.1 о дифференцируемости сложной функции достаточно убедиться в непрерывности на G_ε^* производных

$$\begin{aligned} F'_u(y, u, v) &= -f(u, y) \\ F'_v(y, u, v) &= f(v, y) \\ F'_y(y, u, v) &= \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Производные F'_u, F'_v непрерывны в силу непрерывности функции f .

Производная F'_y , вычисленная по правилу Лейбница (теорема 4), с помощью замены переменного в интеграле записывается в виде

$$F'_y(y, u, v) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(u + (v - u)t, y)(v - u) dt =: \int_0^1 h(y, u, v, t) dt.$$

По теореме о непрерывности композиции непрерывных функций подынтегральная функция h непрерывна на G_ε^* . Отсюда следует, что интеграл $\int_0^1 h(y, u, v, t) dt$ непрерывен на G_ε^* . Непрерывность этого интеграла в произвольной точке $(y_0, u_0, v_0) \in G_\varepsilon^*$ можно установить с помощью непосредственной оценки (см. доказательство теоремы 1).

Шаг 2. Установим формулу (1) в предположениях теоремы. Случай 1: $y_0 \in [c, d], \varphi(y_0) < \psi(y_0)$. Уменьшая при необходимости отрезок $[c, d]$, можно считать, что $\varphi(y) < \varphi(y)$ на $[c, d]$. Рассмотрим последовательность функций

$$J_n(y) = \int_{\varphi(y)+1/n}^{\psi(y)-1/n} f(x, y) dx.$$

Тогда из результата шага 1 на $[c, d]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} J_n(y) &= \int_{\varphi(y)+1/n}^{\psi(y)-1/n} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y) - 1/n, y) \psi'(y) - \\ &\quad - f(\varphi(y) + 1/n, y) \varphi'(y). \end{aligned}$$

Легко видеть, что при $n \rightarrow \infty$ J_n равномерно на $[c, d]$ стремится к J , а $\frac{d}{dy} J_n$ - к правой части (1). Применяв теорему 16.3.3 (о дифференцировании функциональной последовательности), приходим к (1).

Случай 2: $y = y_0 \in [c, d]$, $\varphi(y_0) = \psi(y_0)$. Установим (1) непосредственным вычислением производной от J . Пусть $y_0, y_0 + \Delta y \in [c, d]$. Применяв теорему о среднем для интеграла, имеем

$$\begin{aligned} J(y_0 + \Delta y) - J(y_0) &= \int_{\varphi(y_0 + \Delta y)}^{\psi(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = \\ &= (\psi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0 + \Delta y)) f(\xi, y_0 + \Delta y) \end{aligned}$$

при $\xi \in [\varphi(y_0 + \Delta y), \psi(y_0 + \Delta y)]$. Деля обе части равенства на Δy и переходя к пределу при $\Delta y \rightarrow 0(+0, -0)$, получаем, что

$$\frac{d}{dy} J(y_0) = (\psi'(y_0) - \varphi'(y_0)) f(\psi(y_0), y_0),$$

что и требовалось установить.

Абсолютная непрерывность, обобщённая формула Ньютона-Лейбница и обобщённое интегрирование по частям

мотивация и примеры применения

Теория

В этом разделе мы еще раз вернёмся к формуле Ньютона-Лейбница, в виде выражения приращения функции на отрезке как интеграла от её производной.

Теорема 5.103 говорит, что эта формула верна, если сама функция F является интегралом с переменным верхним пределом от некоторой интегрируемой по Лебегу функции f , тогда почти всюду $F' = f$.

Но такое утверждение слишком неявно и не позволяет понять, верна или нет формула для данной функции F .

Более явное утверждение содержится в теореме 5.105, которая говорит, что формула работает для липшицевой функции F .

Определение абсолютно непрерывной функции

Функция F на промежутке I абсолютно непрерывна, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что любых $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_N \leq y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_N - y_N| \leq \delta$$

следует

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \dots + |F(x_N) - F(y_N)| \leq \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

Это ослабление условия липшицевости.

Ограниченная вариация абсолютно непрерывной функции

докажите, что абсолютно непрерывная на отрезке функция имеет на нём ограниченную вариацию.

||

Проверьте, что на всяком отрезке длины δ вариация функции будет не более ε (δ и ε взяты из определения), потом вспомните про аддитивность вариации.

||

Далее мы ограничимся функциями на конечных отрезках и установим необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности в этом случае.

(?? и какие же они по итогу?)

Теорема об абсолютной непрерывности первообразной и её производной

Всякая обобщённая первообразная

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

для некоторой $f \in L_1[a, b]$, является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с f .

Доказательство.

Из теоремы 5.103 следует, что производная F почти всюду равна f .

Докажем абсолютную непрерывность F .

По теореме 5.58 приблизим f ограниченной g , так что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

Пусть $|g(x)| \leq M$.

Если у нас есть объединение конечного набора отрезков S суммарной Арины $< \delta$, то мы имеем

$$\int_S |g(x)| dx \leq M\delta, \int_S |f(x) - g(x)| < \varepsilon \rightarrow \int_S |f(x)| dx \leq M\delta + \varepsilon$$

Выбирая $\delta < \varepsilon/M$ (выбор не зависит от S), получаем

$$\int_S |f(x)| dx \leq 2\varepsilon$$

но это означает, что сумма приращений F на отрезках множества S не более 2ε при условии $\mu S < \delta$, что и означает абсолютную непрерывность по определению.

Теорема о связи абсолютно непрерывной функции и её производной (???)

Абсолютно непрерывная функция $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ почти всюду имеет производную и является обобщённой первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона-Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt$$

Доказательство.

(чет оно большое)

Во-первых, можно считать F возрастающей, так как в её разложении в сумму возрастающей и убывающей по лемме 8.18, обе функции получатся абсолютно непрерывными (проверьте это самостоятельно).

Далее рассуждения аналогичны доказательству теоремы 5.105.

В начале доказательства теоремы 5.105 мы рассматриваем правую верхнюю производную F , обозначив её φ .

Из монотонности F мы имеем неравенство $\varphi \geq 0$.

Если интеграл от φ конечен, то мы обозначаем абсолютно непрерывную (по теореме 8.23) функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$$

и дальнейшие рассуждения для функции $G = F - \Phi$, имеющей почти всюду нулевую правую верхнюю производную, из доказательства теоремы 5.105 проходят.

В конце доказательства теоремы 5.105 мы применили липшицевость. Для оценки суммарного приращения функции на некоторой конечной системе интервалов достаточно малой суммарной длины, но для этой оценки как раз достаточно было абсолютной непрерывности по определению - если сумма длин интервалов менее δ , то сумма модулей приращений функции на этих интервалах будет не более ε .

В итоге мы опять получаем неравенство

$$F(b) - F(a) \geq \int_a^b \varphi(x) dx$$

Интеграл от нижней правой производной ψ тоже будет существовать, так как она заключена между 0 и φ , тогда те же рассуждения для правой нижней производной (с заменой $F \mapsto -F$) дадут неравенство

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b \psi(x) dx$$

из которого будет следовать, что правая верхняя и правая нижняя производная совпадают почти всюду и дают просто правую производную с интегралом, равным приращению F на отрезке.

Значит F представляется в виде интеграла от своей правой производной с переменным верхним пределом, а значит у неё есть производная почти всюду по теореме 5.103.

Осталось рассмотреть случай, которого не было в теореме 5.105.

Если интеграл от φ оказался бесконечен, то обрежем функцию φ значением $M > 0$ до φ_M , определим Φ_M как интеграл от обрезанной φ_M .

Для функции $G = F - \Phi_M$, у которой верхняя правая производная почти всюду неотрицательна, мы тем же способом докажем, что её приращение на отрезке неотрицательно.

В силу произвольности $M > 0$ и стремления к бесконечности приращения Φ_M на отрезке (из-за бесконечности интеграла φ), откуда следует, что приращение F на отрезке бесконечно, то есть такого случая на самом деле быть не может.

Таким образом мы получили достаточно полное описание ситуаций, в которых верна формула Ньютона-Лейбница.

Следствие

Если $f \in L_1[a, b]$, а g абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям

$$\text{где } F(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad \int_a^b f g dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx,$$

тут мы можем понять, в каких ситуациях верна формула интегрирования по частям.

Доказательство.

Действительно, производная g' при этих условиях существует почти всюду, функция F абсолютно непрерывна по теореме 8.23.

Тогда функция Fg тоже абсолютно непрерывна, это легко вывести из формулы

$$F(y)g(y) - F(x)g(x) = (F(y) - F(x))g(y) + (g(y) - g(x))F(x),$$

учитывая абсолютную непрерывность и ограниченность обеих функций.

Производная Fg почти всюду равна $f g + F g'$, к её приращению применима формула Ньютона- дейбница, перенося слагаемые в ней, мы получим формулу интегрирования по частям.

14.2.6 Theorems on Integration Techniques

Взяв за определение интеграла непрерывной функции формулу Ньютона- Лейбница, мы можем сформулировать основные приёмы интегрирования:

Теорема об интегрировании по частям

Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируема концах, то

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

где $F(x)|_a^b$ обозначает $F(b) - F(a)$.

Доказательство.

Функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является непрерывной на $[a, b]$ и дифференцируемой на (a, b) . Её производная

$$F'(x) = f(x)$$

является интегрируемой по интегрируемости произведения, поэтому остаётся применить формулу Ньютона- Лейбница к F .

Теорема о замене переменной в интеграле

Пусть функция $\varphi : [a, b] \rightarrow [\varphi(a), \varphi(b)]$ непрерывно дифференцируема, а f непрерывна на $[\varphi(a), \varphi(b)]$ и имеет на том же отрезке первообразную F .

Тогда

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

Доказательство.

Функция $G(x) = F(\varphi(x))$ является первообразной для непрерывной функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ и достаточно применить к ней формулу Ньютона- Лейбница.

На самом деле предыдущая теорема верна без предположения непрерывности f , достаточно лишь её интегрируемости.

В качестве упражнения читатель может доказать усиленный вариант самостоятельно.

Мы не будем такой вариант обсуждать, потому что после развития понимания интеграла Лебега и приближения функций в среднем непрерывными становится ясно, что доказывать теорему о замене переменных в интеграле для непрерывных функций вполне достаточно, а потом останется воспользоваться тем, что отображение φ искажает меру (длины отрезков) не более чем в Константу раз.

Аналогичные соображения будут применяться и в разделе 6.13 при замене переменных в интеграле функции нескольких переменных.

Докажем также полезный вариант формулы Тейлора:

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

(!?!?!?!? что она тут делает, а не в рядах?? потом скорее всего перекину туда)

Если f имеет n производных в окрестности $U \ni x_0$ и n -я производная интегрируема по Риману, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt.$$

Доказательство.

Заметим, что для $n = 1$ это формула Ньютона- Лейбница:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Далее будем интегрировать остаточный член по частям:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt &= - \int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} d \frac{(x-t)^n}{n} = \\ &= - \int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)}{n!} d(x-t)^n = - \left. \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n \right|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt = \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \end{aligned}$$

что и означает возможность сделать шаг индукции.

Карасев.з.

113.

Докажите, что число e иррационально.

[[

Предположите $e = p/q$ и умножьте на $q!$ формулу $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

]]

Карасев.з.

114.

докажите, что число π иррационально.

||

Предположите $\pi = p/q$ и рассмотрите последовательность

$$a_n = \int_0^\pi \frac{x^n(p - qx)^n}{n!} \sin x dx.$$

Она очевидно не равна нулю, но стремится к нулю.

Заметьте, что выражение $\frac{x^n(p - qx)^n}{n!}$ не меняется при замене $x \mapsto \pi - x$, его производные $\Delta_0(n - 1)$ -го порядка на концах отрезка равны нулю, а производные порядка n и более на концах отрезка являются целыми числами.

Используя эти свойства, установите интегрированием по частям, что a_n является целым числом.

||

Карасев.з.

115.

существует ли бесконечно дифференцируемая функция на отрезке $[0, 1]$, у которой все производные на отрезке $[0, 1]$ неотрицательные, любая производная в нуле и значение функции в нуле равны нулю, и $f(1) = 1$? ||

Сравните формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для $f(1)$ и $f(a)$ при фиксированном $a < 1$ и стремящихся с бесконечности n .]

Когда нужно делить интеграл на два, а когда не нужно? (????)

Если там на концах функция занулилась, будет ли работать формула Ньютона-Лейбница?

(??? пока хз, просто если внезапный ноль получится, значит, нужно делить было функцию. пока графически иллюстрирую и все получается долго. напишу потом четко, когда такое есть, а когда такого нет?)

14.3 Lebesgue Measure and Integral: Basics (???)

(соберу постепенно, про это много методичек есть. просто пока не так уж нужно.)

14.3.1 Borel Measures on Intervals, Lebesgue–Stieltjes Integral

мотивация и примеры применения

Теория

Приведём конструкцию, которая даёт понимание структуры конечной борелевской меры на отрезке, то есть счётно аддитивной меры, определённой и конечной на всех борелевских подмножествах отрезка.

Рассмотрим для начала возрастающую и ограниченную функцию $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и определим меры промежутков как

$$\begin{aligned}\mu_g[x, y] &= g(y + 0) - g(x - 0), \\ \mu_g(x, y) &= g(y - 0) - g(x + 0), \\ \mu_g[x, y) &= g(y - 0) - g(x - 0), \\ \mu_g(x, y] &= g(y + 0) - g(x + 0).\end{aligned}$$

Такое определение продолжается до всевозможных элементарных множеств, состоящих из конечного числа промежутков на $[a, b]$.

Заметим, что в отличие от стандартной меры Лебега, эта мера может давать ненулевое значение множеству, состоящему из одной точки, если g в этой точке имеет скачок.

Можно заметить, что определение меры не зависит от значений g в точках разрыва.

Расширение с промежутков

Далее можно продолжить определение меры до открытых подмножеств отрезка, определив меру открытого множества U как точную верхнюю грань мер элементарных множеств, содержащихся в U , и аналогично определить меру для компактных (замкнутых) подмножеств отрезка K как точную нижнюю грань мер элементарных множеств, содержащих K .

Далее верхняя мера $\overline{\mu}_g X$ произвольного множества определяется как точная нижняя грань мер открытых множеств, содержащих X , а нижняя мера $\mu_g X$ — как точная верхняя грань мер компактных множеств, содержащихся в X .

Впрочем, возможны и другие конструкции, основанные на возможности продолжить меру на сигма-алгебру, порождённую элементарными множествами, то есть на все борелевские подмножества отрезка.

Определение функции распределения

Обратно, если у нас есть борелевская мера ν на отрезке, то мы можем определить функцию распределения этой меры как

$$g(x) = \nu[a, x)$$

и заметить, что мера ν восстанавливается из функции g по описанной выше процедуре.

Изменение функции на константу не меняет меру, также нам не важно, какое именно значение функция распределения принимает в точке разрыва, важны лишь её левый и правый пределы.

Об особенностях (?????)

Обратите внимание, что понятие измеримости подмножества отрезка относительно стандартной меры Лебега и введённой меры μ_g могут отличаться.

Например в стандартной мере Лебега канторово множество $K \subset [0, 1]$ (состоящее из чисел, которые в троичной записи можно записать цифрами 0 и 2) имеет меру нуль и всякое его подмножество имеет меру нуль.

Однако, описав K как множество чисел из цифр 0, 2 и заменив 2 на 1 и считая число представленным уже в двоичной системе счисления, мы получим отображение $f : K \rightarrow [0, 1]$, которое биективно кроме счётного множества исключений.

Тогда стандартная мера на отрезке даст нам с помощью f единичную меру на K .

Рассматривая теперь K как подмножество отрезка $[0, 1]$, мы продолжим эту меру нулём на $[0, 1] \setminus K$.

Этой мере соответствует некоторая функция распределения, которая помогает решить задачу 5.106.

А так как на отрезке есть множества, неизмеримые относительно стандартной меры Лебега, то и относительно этой меры не все подмножества канторова множества будут измеримы.

Интеграл Лебега-Стилтьеса

Определение и свойства

Аналогично стандартному интегралу Лебега, определяется интеграл Лебега-Стилтьеса

$$\int_a^b f(x) d\mu_g = \int_a^b f(x) dg(x)$$

в определении которого мера Лебега будет заменена на меру μ_g .

Функция f при этом должна быть измерима относительно меры μ_g (достаточно, чтобы f была борелевской) и либо неотрицательной (тогда интегралу разрешается принимать значение $+\infty$), либо абсолютно интегрируемой относительно μ_g (тогда интеграл конечен).

Основные свойства такого интеграла (линейность, монотонность, счётная аддитивность) аналогичны свойствам обычного интеграла Лебега, нет только непрерывности интеграла по верхнему пределу интегрирования, так как сама функция распределения g (то есть интеграл характеристической функции полуинтервала) уже может иметь скачки.

О функциях с ограниченной вариацией

Дальнейшее обобщение интеграла Лебега-Стилтьеса - это рассмотрение функций g ограниченной вариации вместо монотонных.

По лемме 8.18 имеет место разложение $g = g_{\uparrow} + g_{\downarrow}$ в сумму возрастающей и убывающей функции с выполнением $\|g\|_B = \|g_{\uparrow}\|_B + \|g_{\downarrow}\|_B$, и мы можем положить

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg_{\uparrow}(x) - \int_a^b f(x) d(-g_{\downarrow})(x)$$

где выражения в правой части понимаются как интегралы по соответствующим мерам.

Тогда это выражение будет линейно не только по f , но и по g .

Карасев.з.

26.

* Докажите, что для g ограниченной вариации

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \|g\|_B \cdot \|f\|_C$$

причём неравенство может быть сколь угодно близко к равенству даже для непрерывных f .

В принципе, можно было бы работать и на всей прямой $\mathbb{R}$ вместо отрезка $[a, b]$, при этом ничего принципиально не меняется для g , вариация которых на прямой конечна, или хотя бы конечна на всяком отрезке.

Этот случай важен в теории вероятностей, когда рассматриваются функции распределения действительных случайных величин.

Карасев.з.

27.

докажите, что последовательность функций $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, которые равномерно ограничены и имеют равномерно ограниченную вариацию, имеет поточечно сходящуюся подпоследовательность.

||

По лемме 8.18 достаточно рассматривать монотонные функции g_n .

Переходом к подпоследовательности нетрудно добиться сходимости в одной точке, с помощью достаточно аккуратных рассуждений можно добиться сходимости в счётном множестве точек, например во всех рациональных точках отрезка.

Это позволяет идентифицировать предельную функцию с точностью до значений в счётном множестве точек, далее надо еще раз сделать переход к подпоследовательности.

||

Карасев.з.

28.

* докажите, что в условиях предыдущей задачи переход к подпоследовательности (g_{n_k}) не позволит добиться сходимости каждой последовательности интегралов.

$$\int_a^b f dg_{n_k}$$

для всех ограниченных борелевских f .

||

Контрпример можно построить на возрастающих g_n , принимающих только значения 0 и 1.

||

14.3.2 Signed Borel Measures on $\mathbb{R}^n$ and Measure Density

В более общем контексте, можно определить меру со знаком на борелевских подмножествах $\mathbb{R}^n$, как счётноаддитивную меру, которой разрешено принимать и отрицательные значения.

Вариация меры со знаком μ определяется как мера без знака, по формуле

$$|\mu|(X) = \sup \left\{ \sum_i |\mu(X_i)| : \text{по счётным разбиениям } X = \bigcup_i X_i \right\}.$$

Это определение в некотором смысле обобщает определение вариации для функции распределения.

Произвольную борелевскую меру можно представлять себе как некоторое распределение массы.

В принципе, масса может быть сосредоточена в одной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, тогда соответствующую меру можно определить как $\delta(X) = M$, если $X \ni x_0$ и $\delta(X) = 0$, если $X \not\ni x_0$

Теорема Хана о разложении меры со знаком

Борелевская мера со знаком μ конечной вариации на $\mathbb{R}^n$ даёт разложение $\mathbb{R}^n = P \sqcup N$ так, что для любого борелевского $X \subseteq P$ раскладывается $\mu(X) \geq 0$, а для любого борелевского $X \subseteq N$ оказывается $\mu(X) \leq 0$.

Таким образом μ раскладывается в разность неотрицательных борелевских мер μ_P на P и μ_N на N $|\mu| = \mu_P + \mu_N$

(?? связи с другими теоремами о разложении??)

О применениях (!??!)

(где-то нужна)

Доказательство.

Будем рассматривать только борелевские множества.

Для всякого X Положим

$$\mu_+(X) = \sup\{\mu Y : Y \subseteq X\}, \quad \mu_-(X) = \inf\{\mu(Y) : Y \subseteq X\}$$

Идея доказательства заключается в том, что верхняя и нижняя грань на самом деле достигаются.

Мы предположили, что вариация μ ограничена, значит эти величины тоже ограничены.

Возьмём $A < \mu_+(\mathbb{R}^n)$ и множество X_1 , такое что $\mu(X_1) \geq A$.

Если $\mu_-(X_1) = 0$, то на этом остановимся, иначе найдём $Y_1 \subseteq X_1$, такое что

$$\mu(Y_1) \leq \mu_-(X_1)/2 < 0$$

Тогда у нового множества $X_2 = X_1 \setminus Y_1$ окажется $\mu(X_2) \geq \mu(X_1)$ и $\mu_-(X_2) \geq 1/2 \mu_-(X_1)$. Построим так упорядоченную по включению последовательность X_k с возрастающими $\mu(X_k)$ и стремящимися к нулю $\mu_-(X_k)$.

Пусть теперь $Z = \bigcap_k X_k$. У этого множества $\mu(Z) \geq \mu(X_1) \geq A$ и $\mu_-(Z) = 0$, так как при наличии подмножества Z отрицательной меры $-\delta$ мы бы имели $\mu_-(X_k) \leq -\delta$ на всех шагах, что противоречит построению.

В итоге, мы умеем строить «положительное» (то есть не содержащее подмножеств отрицательной меры) множество Z_1 , мера которого не менее, скажем $\mu_+(\mathbb{R}^n)/2$.

Потом в дополнении $\mathbb{R}^n \setminus Z_1$ мы найдём положительное Z_2 , у которого $\mu(Z_2) \geq \mu_+(\mathbb{R}^n \setminus Z_1)/2$, и продолжаем далее, имея последовательность непересекающихся положительных множеств со свойством

$$\mu(Z_k) \geq \mu_+(\mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{k-1}))/2$$

Их объединение $P = \bigcup_k Z_k$ будет положительным и в $N = \mathbb{R}^n \setminus P$ уже не будет подмножеств положительной меры, так как на каждом шаге построения $\mu_+(\mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{k-1}))$ убывало как минимум в два раза и в итоге

$$N = \bigcap_k \mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{k-1})$$

уже не может содержать подмножеств положительной меры.

Карасев.з.

30.

Представьте дельта-меру, сосредоточенную в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ с помощью функции распределения, как в предыдущем разделе.

Также полезно иметь критерий, когда мера имеет плотности, то есть может быть задана формулой

$$\nu X = \int_X f(x) dx$$

этот критерий даётся в следующем определении и теореме:

Определение...

Определение 8.31.

Борелевская мера ν на $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна относительно стандартной меры Лебега μ , если для всякого борелевского X , у которого лебегова мера $\mu X = 0$, оказывается также $\nu X = 0$.

Теорема Радона-Никодима в $\mathbb{R}^n$

Пусть неотрицательная конечная борелевская мера ν на $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Тогда у меры ν есть плотность, то есть борелевская $f \geq 0$, такая что для любого борелевского X

$$\nu X = \int_X f(x) dx$$

теорема Радона-Никодима обобщает утверждение (формулы Ньютона-Лейбница и теорему о непрерывности обобщенной первообразной) о том, что абсолютно непрерывная на отрезке функция представляется как интеграл с переменным верхним пределом, просто потому что такая функция есть функция распределения меры (со знаком), абсолютно непрерывной относительно стандартной меры Лебега.

О применениях теоремы Радона-Никодима (!!!!!)

(в МЛ это видел, пока не тот уровень, чтобы применять)

Доказательство.

Будем рассматривать только борелевские множества.

Положим

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^n) : f \geq 0, \forall X, \nu X \geq \int_X f(x) dx \right\}$$

Заметим, что если $f, g \in \mathcal{F}$, то $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ тоже лежит в $\mathcal{F}$. Действительно, пусть

$$A = \{x : f(x) \leq g(x)\}, B = \{x : f(x) > g(x)\}$$

тогда

$$\nu(X) = \nu(X \cap A) + \nu(X \cap B) \geq \int_{X \cap A} g(x) dx + \int_{X \cap B} f(x) dx = \int_X h(x) dx$$

Рассмотрим последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}$, такую что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) dx \rightarrow \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx : f \in \mathcal{F} \right\}, \quad n \rightarrow \infty$$

По предыдущему замечанию, заменяя f_k на $\max\{f_1, \dots, f_k\}$, можно считать эту последовательность поточечно возрастающей к некоторой f , а по теореме о монотонной сходимости получается, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx : g \in \mathcal{F} \right\}.$$

Мы хотим доказать, что f является искомым пмтностью.

Рассмотрим теперь меру, заданную по формуле

$$\lambda X = \nu X - \int_X f(x) dx$$

которая по определению $\mathcal{F}$ неотрицательна и даёт нуль множествам лебеговой меры нуль. для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что λ нулевая.

Если это не так, $\lambda(\mathbb{R}^n) = 2\varepsilon > 0$, то для некоторого ограниченного Y будет по непрерывности (которая следует из счётной аддитивности) $\lambda Y > \varepsilon$.

Подберём $\delta > 0$ так, чтобы $\delta\mu Y < \varepsilon$ и рассмотрим меру со знаком $x = (\lambda - \delta\mu)|_Y$, здесь ограничение меры на множество Y определяется как $\nu|_Y(X) = \nu(X \cap Y)$.

По выбору $x(Y) > 0$, и теорема о разложении меры со знаком даст борелевское $P \subseteq Y$, на котором $x \geq 0$ и $x(P) > 0$.

Это означает, что для всякого $X \subseteq P$

$$\lambda X \geq \delta\mu X$$

Если мы положим $g(x) = \delta\chi_P(x)$, то оказывается, что

$$\lambda(X) \geq \int_X g(x) dx$$

для всякого борелевского X (не обязательно лежащего в P), то есть $f + g \in \mathcal{F}$ по определению.

Так как $x(P) > 0$, из свойства абсолютной непрерывности следует, что $\mu(P) > 0$, а значит

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \delta\mu P > 0 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (f + g) dx > \int_{\mathbb{R}^n} f dx$$

что противоречит построению f . На самом деле в последних двух теоремах конечность меры или ограниченность вариации не так важны, это свойство можно потребовать лишь локально, в каждом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^n$.

Также в этом рассуждении было не важно, что μ является стандартной мерой Лебега, теорема Радона-Никодима может использоваться для сравнения любых двух мер, если одна абсолютно непрерывна относительно другой (выпишите определение абсолютной непрерывности одной меры относительно другой в качестве упражнения).

Комментарии Карасева (??)

В свете теоремы Радона-Никодима можно интерпретировать формулу замены переменных в интеграле 6.98 как сравнение меры Лебега на открытом множестве и прямого образа меры Лебега относительно данного отображения, $\varphi_*\mu(X) = \mu(\varphi^{-1}(X))$. Локально можно установить, что эти меры отличаются не более чем на константу, хотя бы потому, что расстояние увеличивается не более чем в константу раз.

Значит они абсолютно непрерывны одна относительно другой, а соответствующая функция плотности может быть найдена из локального линейного приближения отображения.

Теорема Лебега о разложении меры на абсолютно непрерывную и сингулярную меры

Неотрицательная конечная борелевская мера ν на $\mathbb{R}^n$ раскладывается в сумму абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега μ) меры ν_c и сингулярной относительно меры Лебега меры ν_s .

Последнее означает, что существует множество $X \subseteq \mathbb{R}$, такое что $\nu_s(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$ и $\mu(X) = 0$.

||

Заметьте, что в доказательстве теоремы Радона-Никодима абсолютная непрерывность была нужна лишь на последнем шаге, который надо модифицировать для изучения сингулярной части меры.

||

14.3.3 Lebesgue Outer Measure and Its Properties

Прежде чем определять измеримые по Лебегу множества и их меру Лебега, определим внешнюю меру Лебега, которая есть у каждого множества:

Определение

5.

Внешняя мера Лебега множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - это точная нижняя грань по всем счётным покрытиям X элементарными множествами

$$\mu^*(X) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(S_k) : X \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right\}.$$

Как следует из определения, внешняя мера Лебега обладает свойством *монотонности*, $\mu^*(X) \leq \mu^*(Y)$ при $X \subseteq Y$.

Она может быть конечным числом или бесконечностью $+\infty$, тот факт, что она может быть бесконечной, следует из такого важного общего свойства внешней меры:

Лемма

5.6.

для элементарного $S \subset \mathbb{R}^n$ выполняется $\mu^*(S) = m(S)$.

Доказательство.

Так как S покрывает само себя, то неравенство $\mu^*(S) \leq m(S)$ очевидно.

для доказательства обратного неравенства предположим противное: $\mu^*(S) < m(S)$.

Это означает наличие счётного покрытия $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ с суммой мер

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(S_k) < m(S)$$

Пусть зазор в этом неравенстве равен $3\varepsilon > 0$.

Заменим S на содержащееся в нём компактное элементарное множество, изменив его меру не более, чем на ε .

Заменим каждое S_k на содержащее его открытое элементарное множество, изменив его меру не более, чем на $\varepsilon/2^k$.

В итоге и левая и правая часть неравенства (5.1) изменятся не более, чем на ε и оно останется в силе.

Но так как теперь S компактно, а все S_k открыты, то мы можем выбрать конечное подпокрытие $S \subseteq \bigcup_{k=1}^N S_k$ и тогда неравенство (5.1) будет просто противоречить конечной аддитивности меры элементарных множеств. другое свойство внешней меры Лебега является еще более важным:

Счётная субаддитивность внешней меры Лебега

для счётного семейства множеств $X_k \subseteq \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$, выполняется

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(X_k)$$

Доказательство.

Возьмём $\varepsilon > 0$.

По определению внешних мер в правой части поместим каждое X_k в объединение $\bigcup_{m=1}^{\infty} S_{k,m}$, так что

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(S_{k,m}) \leq \mu^*(X_k) + \varepsilon/2^k.$$

Тогда $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ покрывается счётным семейством множеств $\{S_{k,m} : k, m \in \mathbb{N}\}$ и имеет место неравенство

$$\mu^*(X) \leq \sum_{k,m=1}^{\infty} m(S_{k,m}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(X_k) + \varepsilon.$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует требуемое утверждение. В силу последней леммы мы уже можем говорить о множествах лебеговой меры нуль, для которых $\mu^*X = 0$, и утверждать, что объединение счётного числа множеств лебеговой меры нуль даёт множество лебеговой меры нуль.

Зачем нужна мера Лебега (!?!?!?!)

(тут ответ на этот вопрос, пока что не знаю)

Неизмеримое по Лебегу множество (???)

(в контрпримерах что-то есть, но и ладно.)

14.3.4 Sets of Finite Lebesgue Measure and Their Properties

Введём операцию симметрической разности множеств

$$X \nabla Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Эта операция очевидно коммутативна и даже ассоциативна:

$$(X \nabla Y) \nabla Z = X \nabla (Y \nabla Z)$$

потому что она соответствует сложению характеристических функций данных множеств по модулю 2.

Определим теперь расстояние между множествами

$$\rho(X, Y) = \mu^*(X \nabla Y)$$

Неравенство треугольника для этого расстояния следует из включения

$$X \nabla Z \subseteq (X \nabla Y) \cup (Y \nabla Z)$$

и субаддитивности внешней меры Лебега.

Это расстояние вырождено, так как между разными множествами может оказаться нулевое расстояние; это происходит ровно тогда, когда множества X и Y отличаются на множество меры Лебега нуль.

Также это расстояние может принимать значение $+\infty$, так что с ним надо работать осторожно.

Из того, что

$$X \subset Y \cup (X \nabla Y), \quad Y \subset X \cup (X \nabla Y)$$

и субаддитивности внешней меры Лебега следует, что

$$|\mu^*(X) - \mu^*(Y)| \leq \rho(X, Y),$$

то есть функция μ^* непрерывна на множестве тех подмножеств $\mathbb{R}^n$, которые имеют конечную внешнюю меру Лебега.

Обозначив множество всех элементарных множеств $S(\mathbb{R}^n) \subset 2^{\mathbb{R}^n}$, мы можем заключить, что по лемме 5.6 функции m и μ^* совпадают на $S(\mathbb{R}^n)$, а вторая из них еще и непрерывна на его замыкании в $2^{\mathbb{R}^n}$ относительно расстояния ρ .

Множества из замыкания $S(\mathbb{R}^n)$ относительно расстояния ρ и будут измеримыми по Лебегу с конечной мерой, давайте распишем это определение подробнее:

Определение измеримого по Лебегу множества

Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Лебегу с конечной мерой, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся элементарное S , такое что $\mu^*(X \nabla S) < \varepsilon$.

Мерой Лебега X , $\mu(X)$ тогда называется $\mu^*(X) = \lim_{S \rightarrow X} m(S)$.

По непрерывности на измеримые по Лебегу с конечной мерой множества распространяется аддитивность меры:

$$\mu(X) + \mu(Y) = \mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y)$$

так как если мы имеем приближения элементарными $S_k \rightarrow X$ и $T_k \rightarrow Y$ в смысле расстояния ρ , то

$$S_k \cup T_k \rightarrow X \cup Y, \quad S_k \cap T_k \rightarrow X \cap Y$$

в смысле расстояния ρ .

Так как при этом также имеет место

$$S_k \setminus T_k \rightarrow X \setminus Y, \quad T_k \setminus S_k \rightarrow Y \setminus X$$

в смысле расстояния ρ , то для измеримых по Лебегу с конечной мерой X и Y из разности $S \setminus Y$ и $Y \setminus X$ тоже будут измеримы по Лебегу с конечной мерой.

Также мы автоматически получаем монотонность меры Лебега, для измеримых $X \subseteq Y$

$$\mu(Y) = \mu(X) + \mu(Y \setminus X) \geq \mu(X)$$

теорема о счетной аддитивности меры Лебега в случае конечной меры (!?)

Если множества $X_k, k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются, измерить по Лебегу с конечной мерой μ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) < +\infty$$

то

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k).$$

Доказательство.

докажем, что $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$ измеримо по Лебегу с конечной мерой.

Из сходимости суммы мер следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся m , такое что (с учётом счётной субаддитивности внешней меры)

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} X_k\right) \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(X_k) < \varepsilon$$

Следовательно, X приближается измеримым по Лебегу с конечной мерой множеством $\bigsqcup_{k=1}^m X_k$ с точностью ε , а последнее можно приблизить и элементарным с точностью ε .

Так как множество X оказалось измеримым с конечной мерой, то $\mu(X) = \mu^*(X)$ и неравенство

$$\mu X \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)$$

выполняется по счётной субаддитивности внешней меры.

Неравенство в обратную сторону получается предельным переходом из неравенств для натуральных m

$$\mu X \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^m X_k\right) = \sum_{k=1}^m \mu(X_k)$$

которые верны из монотонности и конечной аддитивности.

Применения

Это свойство меры Лебега, которые отличают её от меры Жордана (??? почему???)

Задача

10.

докажите, что множество измеримых по Лебегу с конечной мерой множеств в $\mathbb{R}^n$ относительно расстояния $\rho(X, Y) = \mu^*(X \nabla Y)$ является полным (но вырожденным) метрическим пространством.

||

Имея фундаментальную последовательность измеримых по Лебегу множеств, перейдите к её подпоследовательности (X_k) , для которой выполняется $\rho(X_k, X_m) \leq 2^{-k}$ при $k \leq m$.

В качестве (не единственного) предела этой последовательности можно взять, например, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} X_k$.

||

14.3.5 Lebesgue-Measurable Sets with Infinite Measure, Measurability of Open and Closed Sets

Нам также будет удобно использовать множества, мера Лебега которых достаточно корректно определена как $+\infty$.

Определение измеримого по Лебегу множества с бесконечной мерой

Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Лебегу с бесконечной мерой, если его можно представить в виде счётного объединения попарно непересекающихся множеств

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$$

каждое из которых измеримо по Лебегу с конечной мерой и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) = +\infty$. Это определение корректно, так как если мы разложили X в другое объединение попарно непересекающихся множеств

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$$

с конечной мерой Лебега, то будет выполняться и разложение

$$X = \bigcup_{k,m=1}^{\infty} X_k \cap Y_m$$

с выполнением формул (по конечной счётной аддитивности и возможности переставлять суммирование неотрицательных чисел)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(X_k \cap Y_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k \cap Y_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(Y_m)$$

Измеримое по Лебегу множество

Определение

.12.

Множество называется измеримым по Лебегу, если оно измеримо по Лебегу с конечной мерой или с бесконечной мерой.

Теорема об измеримости по Лебегу при конечных объединениях, пересечениях и разности множеств

Измеримость множества по Лебегу сохраняется при взятии конечных объединений, пересечений и разности множеств.

Доказательство.

Заметим для единообразности, что если множество измеримо по Лебегу с конечной мерой, то его тоже можно представить в виде счётного объединения попарно непересекающихся множеств с конечной мерой Лебега, взяв само это множество в качестве первого из них и взяв остальные пустыми.

Пусть теперь

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \quad Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$$

Тогда формула

$$X \cap Y = \bigcup_{k,m=1}^{\infty} X_k \cap Y_m$$

очевидна.

Запишем также

$$X \cup Y = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Z_{\ell}, \quad Z_{\ell} = \bigcup_{k=1}^{\ell} X_k \cup \bigsqcup_{m=1}^{\ell} Y_m$$

это пока еще объединение возможно пересекающихся множеств с конечной мерой Лебега, но можно превратить его в объединение попарно непересекающихся по формуле

$$X \cup Y = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Z_{\ell} \setminus Z_{\ell-1}$$

считая $Z_0 = \emptyset$.

для разности множеств мы можем записать

$$X \setminus Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(X_k \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} (Y_m \cap X_k) \right)$$

множества в больших скобках измеримы по Лебегу с конечной мерой, так как разность измеримых множеств с конечной мерой измерима с конечной мерой, а $\bigsqcup_{m=1}^{\infty} (Y_m \cap X_k)$ имеет конечную меру, так как для любого натурального ℓ

$$\bigsqcup_{m=1}^{\ell} (Y_m \cap X_k) \subseteq X_k$$

по монотонности и аддитивности получается

$$\sum_{m=1}^{\ell} \mu(Y_m \cap X_k) \leq \mu(X_k) < +\infty$$

и переходя к пределу $\ell \rightarrow \infty$ мы получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(Y_m \cap X_k) \leq \mu(X_k) < +\infty$$

Теорема о счетной аддитивности меры Лебега в общем случае

Если множества $X_k, k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются и измеримы по Лебегу, то их объединение измеримо по Лебегу и выполняется

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)$$

Доказательство.

Представим каждое X_k как объединение попарно непересекающихся множеств конечной меры,

$$X_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_{k,m}$$

Тогда

$$X = \bigcup_{k,m=1}^{\infty} X_{k,m}$$

и выполняется (по счётной аддитивности для конечной меры и по определению бесконечной меры)

$$\mu X = \sum_{k,m=1}^{\infty} \mu X_{k,m} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(X_{k,m}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)$$

Доказательство.

докажем для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

для данного $k \in \mathbb{N}$ разобьём пространство $\mathbb{R}^n$ на кубики типа

$$\left[\frac{m_1}{2^k}, \frac{m_1+1}{2^k} \right) \times \left[\frac{m_n}{2^k}, \frac{m_n+1}{2^k} \right), \quad m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$$

все эти кубы элементарны.

Пусть S_k - это объединение таких кубов, которые содержатся в U и содержатся в большом кубе $[-k, k]^n$.

Тогда множества S_k элементарны и имеет место

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$$

так как всякая точка $x \in U$ вместе с некоторой ε -окрестностью, при $k > |x| + 1$ и $2^{-k} < \varepsilon/n$ в этой ε -окрестности окажется содержащий x кубик, полностью лежащий в U и входящий в S_k .

Мы представили U в виде объединения пересекающихся элементарных множеств, но можно представить его и в виде объединения элементарных попарно непересекающихся множеств:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \setminus S_{k-1}$$

считая $S_0 = \emptyset$.

Счётная аддитивность меры Лебега резко отличает её от меры Жордана

Например, всякая точка имеет меру Лебега нуль, поэтому по счётной аддитивности всякое счётное множество измеримо и имеет меру нуль.

В частности, рациональные числа $\mathbb{Q}$ имеют меру нуль.

Для ясности можно доказать это и по определению.

Если мы занумеруем все рациональные числа как $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ и рассмотрим объединение окрестностей

$$U = \bigcup_k (r_k - 2^{-k-1}\varepsilon, r_k + 2^{-k-1}\varepsilon)$$

длины $2^{-k}\varepsilon$ каждая, то мы увидим, что множество U открыто, $\mu U \leq \varepsilon$ по субаддитивности и U покрывает все рациональные числа.

Задача

16.

Докажите, что график спрямляемой кривой $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет меру Лебега нуль.

||

Используя счётную аддитивность, достаточно доказать утверждение для кривой, параметризованной отрезком $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Далее можно считать параметризацию кривой натуральной и оценить её меру Лебега как $\mu(\gamma) \leq \ell(\gamma)^2$, а потом пытаться применить эту оценку после разбиения кривой на N кусков равной длины.

||

14.3.6 Measurability of Countable Unions and Intersections, Continuity and Regularity of the Lebesgue Measure

Проверим измеримость объединения счётного количества измеримых множеств, которые могут иметь попарные пересечения.

теорема

5.17.

Объединение счётного числа измеримых по Лебегу множеств измеримо.

Доказательство.

Обозначим конечные объединения

$$Y_k = \bigcup_{i=1}^k X_i$$

они измеримы по теореме 5.13.

Мы получили возрастающую последовательности измеримых множеств $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \dots$, причём

$$Y_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (Y_k \setminus Y_{k-1}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Остаётся заметить, что измеримые множества $Y_1, Y_2 \setminus Y_1, Y_3 \setminus Y_2, \dots$ попарно не пересекаются и интересующее нас объединение измеримо по теореме 5.14. Аналогичное утверждение верно и для пересечений:

теорема

5.18.

Пересечение счётного числа измеримых по Лебегу множеств измеримо.

Доказательство.Рассмотрим пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ и обозначим конечные пересечения

$$Y_k = \bigcap_{i=1}^k X_i$$

Мы получили убывающую последовательности измеримых множеств $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$, причём

$$I = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

Тогда множество $X_1 = Y_1$ представляется в виде объединения множества I и счётного объединения разностей $Y_k \setminus Y_{k+1}$.

Так как счётное объединение разностей, обозначим его D , измеримо, то $I = X_1 \setminus D$ тоже измеримо по теореме 5.13.

Непрерывность меры Лебега

Если множество X является объединением возрастающей последовательности измеримых множеств

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_k \subseteq \dots$$

то $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu X_k = \mu X$.

Доказательство.

Как мы уже не раз замечали выше, можно представить X в виде объединения попарно непересекающихся множеств

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k \setminus X_{k-1}$$

считая $X_0 = \emptyset$.

Тогда по счётной аддитивности получаем

$$\mu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k \setminus X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(X_k) - \mu(X_{k-1}))$$

Частичные суммы номер m в этой бесконечной сумме равны $\mu(X_m)$, так что эта формула на самом деле означает $\mu(X_m) \rightarrow \mu(X)$ при $m \rightarrow \infty$.

Регулярность меры Лебега

Измеримое по Лебегу множество X можно сколь угодно точно приблизить содержащим его открытым множеством.

Если X имеет конечную меру, то его можно сколь угодно точно приблизить содержащимся в нём компактным множеством.

Доказательство.

Если X имеет бесконечную меру, то по определению представим его как объединение $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ множеств с конечной мерой, если каждое X_k мы поместим в открытое U_k так что $\mu(U_k \setminus X_k) < \varepsilon/2^k$, то X будет помещено в открытое $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ так что $\mu(U \setminus X) < \varepsilon$.

Таким образом мы можем рассматривать только множества конечной меры.

для X конечной меры и заданного ε рассмотрим его приближение элементарным S с точностью менее $\varepsilon > 0$, что означает покрытие $X \nabla S$ счётным объединением $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ с мерой $\mu(D) < \varepsilon$.

Каждое множество S_k можно немного увеличить, так чтобы оно стало открытым и мера S_k выросла менее чем на $\varepsilon/2^k$, тогда D станет открытым и будет верно неравенство $\mu(D) < 2\varepsilon$.

Если S также немного увеличить и сделать открытым, изменив его меру не более чем на ε , то мы получим открытое $U = S \cup D \supseteq X$ и $\mu(U \setminus X)$ будет не более 3ε . Если же S немного уменьшить и сделать компактным, изменив его меру не более, чем на ε , то мы получим компактное $F = S \setminus D \subseteq X$, такое что $\mu(X \setminus F) < 3\varepsilon$.

Задача

21.

докажите, что если множество X является пересечением убывающей последовательности измеримых множеств

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq \dots$$

и мера какого-то из X_k конечна, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu X_k = \mu X$.

Приведите пример, когда все меры X_k бесконечны, а мера X всё же конечна.

[[

Примените аддитивность к пересечению $I = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ и разностям $X_k \setminus X_{k+1}$.

]]

Непрерывность сдвига относительно меры Лебега

Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу с конечной мерой, то мера

$$\mu(X \setminus (X + t))$$

стремится к нулю при $t \rightarrow 0$.

Здесь $X + t$ -это сдвиг множества X на t .

[[

Воспользуйтесь приближением X элементарным множеством.

]]

Примеры компактных неплотных подмножеств имеющих произвольную меру в диапазоне $[0, 1]$ (?????)

Постройте примеры компактных неплотных подмножеств отрезка $[0, 1]$, имеющих произвольную меру в диапазоне $[0, 1]$.

[[

Сделайте обобщённое канторово множество: выкиньте из отрезка $[0, 1]$ интервал длины ε_1 в середине, у каждого из получившихся отрезков выкиньте интервалы посередине, длины которых относятся к длинам отрезков как ε_2 и так далее счётное количество раз.

Проверьте, что мера получившегося множества равна $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_k)$.]]

Существует подмножество отрезка, не измеримое по Лебегу (????)

* Докажите, что существует подмножество отрезка, не измеримое по Лебегу.

Можно использовать аксиому выбора.

||

Вместо отрезка удобнее рассматривать окружность, взять поворот R на угол $t\pi$ с $t \notin \mathbb{Q}$, и придумать множество X , повороты которого $\{R^n X\}_{n \in \mathbb{Z}}$ попарно не пересекаются и покрывают всю окружность.

||

Приведённые выше определения меры Лебега не являются единственно возможными, следующие упражнения намечают альтернативные варианты:

О другом определении (???)

Докажите, что с помощью теоремы 4.82 можно определить меру Лебега открытого $U \subset \mathbb{R}^n$ как

$$\mu U = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n : \text{по непрерывным } f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \text{ с носителем в } U \right\}$$

Докажите, что эта величина счётно субаддитивна на открытых множествах, то есть

$$\mu \bigcup_n U_n \leq \sum_n \mu U_n$$

||

Используйте компактность носителя, сведя счётную аддитивность к конечной.

||

Задача

26.

Докажите, что определение $\mu(U)$ из предыдущей задачи эквивалентно данному выше определению.

||

Используйте непрерывные функции, которые равны единице на данном элементарном компакте $S \subset U$, принимают значения между 0 и 1, и имеют компактный носитель в U .]

14.3.7 Lebesgue-Measurable and Borel Functions

В предыдущем разделе мы говорили об измеримых по Лебегу множествах не обязательно конечной меры.

Перед тем, как определить интеграл Лебега, нам надо определить класс функций, которые в принципе имеет смысл интегрировать по Лебегу.

Определение измеримой по Лебегу функции

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) называется измеримой по Лебегу, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) < c\}$ измеримо по Лебегу.

Из определения следует, что само X тоже обязано быть измеримым по Лебегу.

Лемма

5.28.

Определение измеримой функции со строгим неравенством эквивалентно определению с нестрогим неравенством $\{x : f(x) \leq c\}$.

Доказательство.

Заметим, что

$$\{x : f(x) \leq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) < c + 1/k\}$$

и

$$\{x : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) \leq c - 1/k\}$$

Нужное утверждение следует из измеримости счётных объединений и пересечений измеримых множеств.

Задача

29.

докажите, что сужение измеримой на X функции на измеримое $Y \subseteq X$ тоже будет измеримой функцией.

Очевидно, что всякая непрерывная функция (на измеримом множестве) измерима по Лебегу, так как множество в определении измеримости функции будет пересечением открытого и измеримого, и следовательно будет измеримым по Лебегу.

Можно доказать, что арифметические операции не выводят нас за класс измеримых по Лебегу функций.

К примеру, выражение со счётным объединением

$$\{f(x) + g(x) < c\} = \bigcup_{s,t \in \mathbb{Q}, s+t < c} \{f(x) < s\} \cap \{g(x) < t\}$$

доказывает это для суммы, остальные доказательства аналогичны (сделайте их в качестве упражнения).

Верны также более интересные свойства:

Поточечное взятие точной верхней или нижней грани последовательности функций не выводит за класс измеримых функций

Доказательство.

для верхней грани можно написать

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < c \right\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}, s > 0} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x) < c - s\}$$

и воспользоваться измеримостью счётных объединений и пересечений.

для точной нижней грани формула еще проще

$$\left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < c \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x) < c\}$$

Поточечный переход к пределу не выводит за класс измеримых функций

Поточечный переход к (верхнему или нижнему) пределу также не выводит за класс измеримых функций.

Доказательство.

для верхнего предела можно написать

$$\left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < c \right\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}, s > 0} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \{f_n(x) < c - s\}$$

и воспользоваться измеримостью счётных объединений и пересечений.

Чтобы не писать формулу для нижнего предела, можно заметить, что

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-f_n(x))$$

и воспользоваться возможностью поменять знак у функции, оставив её измеримой.

Иногда вместо измеримых множеств и функций удобно рассматривать более узкий класс множеств и функций:

Определение

5.32.

Борелевским множеством в $\mathbb{R}^n$ называется множество, которое можно получить из открытых множеств операциями разности множеств, счётного объединения и счётного пересечения.

Борелевской функцией называется функция, у которой все множества $\{f(x) < c\}$ борелевские.

Сказанное выше об измеримых по Лебегу функциях относится и к борелевским, их класс замкнут относительно арифметических операций, переход к точной грани счётного семейства функций или к поточечному пределу.

Говоря несколько неформально, все сравнительно явно заданные функции будут не Лебегу множеств намного больше, чем борелевских.

Например, канторово множество имеет меру Лебега нуль и мощность континуума $\aleph_1 = |2^{\mathbb{N}}|$, значит все его подмножества измеримы и имеют меру нуль (это называется полнота меры Лебега), а их количество $2^{\aleph_1} > \aleph_1$.

Но при этом читатель в качестве (не очень простого) упражнения может доказать, что количество открытых множеств в евклидовом пространстве - континуум, и количество борелевских - тоже континуум.

Хотя борелевских множеств намного меньше, чем измеримых по Лебегу, всё же можно утверждать, что всякое измеримое по Лебегу множество «почти борелевское» в следующем смысле:

теорема

5.33.

Всякое измеримое $X \subset \mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения борелевского множества и множества меры нуль.

Доказательство.

Разобьём X на множества конечной меры, если его мера была бесконечной.

Так как объединение счётного числа множеств меры нуль имеет меру нуль, борелевские множества.

По свойству регулярности (теорема 5.20) в множестве X конечной меры содержится компактное $F_n \subseteq X$, такое что $\mu(X \setminus F_n) < 1/n$.

Тогда объединение всех F_n будет борелевским множеством $Y \subseteq X$ и мера $\mu(X \setminus Y)$ будет меньше $1/n$ для любого n , то есть будет равна нулю.

Следствие

5.34.

Всюкую измеримую функцию $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ можно переопределить на множестве меры нуль (возможно изменив область определения на меру нуль) так, что она станет борелевской.

Доказательство.

для всякого рационального r рассмотрим множество

$$X_r = \{x \in X : f(x) < r\}$$

Функция f тогда восстанавливается по набору этих множеств как

$$f(x) = \inf \{r \in \mathbb{Q} : x \in X_r\} = \inf \{r \in \mathbb{Q} : f(x) < r\}$$

Заменим теперь каждое X_r на борелевское $Y_r \subseteq X_r$ с нулевой мерой разности $X_r \setminus Y_r$.

Тогда функция

$$g(x) = \inf \{r : x \in Y_r\}$$

определена на множестве $Y = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} Y_r \subset X$ и может отличаться от f лишь на множестве $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (X_r \setminus Y_r)$ меры нуль.

Функция $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ уже является борелевской, так как

$$\{x \in Y : g(x) < c\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, r < c} Y_r$$

В следствии 5.34, если область определения X изначально была борелевским множеством, то у новой функции g область определения можно не сужать, определив её на борелевском множестве $X \setminus Y$ нулём.

Задача

35.

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - некоторое множество.

докажите, что его характеристическая функция $\chi_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$$

будет измеримой по Лебегу тогда и только тогда, когда X измеримо по Лебегу.

докажите, что характеристическая функция будет борелевской тогда и только тогда, когда множество X будет борелевским.

||

Примените определение и опишите, какие множества имеют вид $\{x : \chi_X(x) < c\}$.

||

Критерий борелевской функции через прообраз борелевского множества

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ борелевская тогда и только тогда, когда прообраз любого борелевского множества $Y \subseteq \mathbb{R}$ тоже является борелевским.

Доказательство.

Определение борелевской функции требует борелевости множества $f^{-1}(-\infty, c)$.

Из неё будет следовать борелевость $f^{-1}(-\infty, c]$ (как мы уже делали для измеримости), а также борелевость прообразов интервалов и отрезков.

Всякое открытое множество $U \subseteq \mathbb{R}$ можно представить в виде объединения счётного количества интервалов.

Например, для всякого рационального $r \in U$ рассмотрим максимальный содержащий r интервал $I_r \ni r$, содержащийся в U , и объединим все такие интервалы.

Следовательно для всякого открытого U прообраз $f^{-1}(U)$ тоже борелевский.

Далее, если мы будем делать с открытыми подмножествами прямой операции объединения, пересечения и разности, а также счётные объединения и пересечения, то те же операции будут делаться в прообразах, следовательно в прообразе всегда будет получаться борелевское множество для любого борелевского множества на прямой.

Предыдущая теорема позволяет расширить определение борелевских функций на отображения между метрическими или топологическими пространствами.

Если какие-то множества объявлены открытыми, то борелевским множеством в том же пространстве называется множество, которое можно получить из открытых множеств операциями разности множеств, счётного объединения и счётного пересечения.

Определение

.37.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ метрических или топологических пространств называется борелевским, если прообраз всякого борелевского множества борелевский.

В нашем частном случае $X \subseteq \mathbb{R}^n$ мы требуем также, чтобы X само было борелевским, хотя формально из приведённого выше определения это не следует (в нём у неборелевского X могут быть «относительно борелевские» подмножества в индуцированной топологии).

теорема

5.38.

Композиция борелевских отображений тоже будет борелевской.

Доказательство.

доказывается также, как непрерывность композиции в топологическом определении композиции, так как прообраз при композиции - это прообраз прообраза.

Из этой теоремы и предыдущих наблюдений про борелевость сумм, разностей, произведений, частных, непрерывных функций, точных граней и поточечных пределов следует, что всякая сравнительно явно описанная функция нескольких переменных будет борелевской, а значит и измеримой по Лебегу.

Построение не измеримой по Лебегу функции возможно лишь весьма неявно, например на основе результата задачи 5.24

Задача

39.

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ измеримая, а $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - борелевская.

докажите, что композиция $g \circ f$ измеримая.

||

Заметьте, что если функция измерима, то прообраз любого борелевского множества относительно неё измерим по Лебегу.

||

Задача

40.

Приведите пример, показывающий, что композиция измеримых по Лебегу функций одной переменной не обязательно измерима по Лебегу.

||

Постройте сначала инъективную и монотонную функцию f , отображающую прямую в множество меры нуль, из монотонности она будет измерима по Лебегу.

А функцию g тогда можно определять на образе f как угодно, если за его пределами она равна нулю, в любом случае она будет измерима по Лебегу.

Это позволяет сделать функцию $g \circ f$ любой.

||

Задача

41.

докажите, что всякая полунепрерывная снизу (см. определение 3.76) функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ борелевская.

||

Используйте второй вариант определения полунепрерывности.

||

Задача

42.

докажите, что если все функции в последовательности $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывны снизу, то функция, определённая по формуле

$$\bar{f}(x) = \sup_k f_k(x)$$

тоже полунепрерывна снизу.

||

Аналогично предыдущей задаче.

||

14.3.8 Overview of Applications of Lebesgue Measure

(an important section with collection of really important applications. I don't know any of them)

14.3.9 Lebesgue Integral for Step and Arbitrary Functions

Интеграл Лебега мы определим, в общем следуя схеме определения интеграла Римана через нижние и верхние суммы Дарбу.

Иначе это можно понимать как приближение функции снизу и сверху ступенчатыми функциями.

для интеграла Лебега мы тоже введём понятие ступенчатой функции, только основаниями ступенек мы разрешим быть любым измеримым по Лебегу множествам, а количество ступенек, имея в виду счётную аддитивность меры Лебега, может быть и счётным.

Определение

.43.

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) называется счётно ступениатой (или в этом разделе просто ступениатой), если X разбивается в счётное объединение измеримых множеств $X = \sqcup_i X_i$ и на каждом X_i функция равна константе c_i .

В данном определении улобно термином «счётное» обозначать любое не более чем счётное множество.

Хотя формамыно, если разбиение было конечным, то к нему можно дописать счётное количество пустых множеств и получить счётное разбиение.

Также из счётной аддитивности меры Лебега следует, что область определения функции, множество X , в этом определении обязана быть измеримой.

Задача

44.

Проверьте, что всякая ступенчатая функция измерима по Лебегу.

||

Заметьте, что $\{x : f(x) < c\} = \bigcup_{c_i < c} X_i.$]]

$$\int_X f(x) dx = \sum_i c_i \mu X_i$$

считая $0 \cdot (+\infty) = 0$ и требуя, чтобы сумма абсолютно сходилась. В этом определении сумма может абсолютно сойтись только в том случае, если на множества $X'_i \cap X''_j$ тоже образуют счётное измеримое разбиение X , которое является измельчением каждого из исходных разбиений, в котором множество X'_i измельчается на счётное количество множеств $X'_i \cap X''_j$.

При переходе от одного разбиения к его измельчению счётная аддитивность меры Лебега позволяет нам установить, что интеграл ступенчатой функции от измельчения её множества ступенек не меняется.

Более явно это можно записать как

$$\sum_i c'_i \mu X'_i = \sum_{i,j} c'_i \mu (X'_i \cap X''_j) = \sum_{i,j} c''_j \mu (X'_i \cap X''_j) = \sum_j c''_j \mu X''_j$$

так как на всяком непустом пересечении $X'_i \cap X''_j$ функция должна принимать одно и то же значение $c'_i = c''_j$, а пустые пересечения не вносят вклада в сумму. доказательства линейности,

$$\int_X (af(x) + bg(x)) dx = a \int_X f(x) dx + b \int_X g(x) dx$$

нам достаточно перейти к разбиению (на множества $X'_i \cap X''_j$), на котором обе функции доказательства монотонности

$$\forall x f(x) \geq g(x) \rightarrow \int_X f(x) dx \geq \int_X g(x) dx$$

нам тоже достаточно рассмотреть подходящее для обеих функций разбиение на ступеньки и применить монотонность суммирования (или просто воспользоваться линейностью и рассмотреть разность интегралов).

Чтобы определить интеграл Лебега произвольной функции, мы хотим приближать её ступенчатыми снизу и сверху и смотреть, можно ли сделать зазор между интегралами от этих приближений произвольно малым.

Следующее утверждение показывает, что для измеримых функций в некотором смысле это возможно:

теорема

5.46.

для любой измеримой по Лебегу функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ илюбогое $\varepsilon > 0$ найдутся две ступениатые функции $g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $g \leq f \leq h$

$$\int_X (h(x) - g(x)) dx < \varepsilon$$

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай, когда X имеет конечную меру.

Положим

$$X_i = \{x \in X : \varepsilon i \leq f(x) < \varepsilon(i+1)\}$$

при $i \in \mathbb{Z}$, это счётное разбиение X на измеримые ступеньки.

Определим ступенчатые функции

$$g(X_i) = \varepsilon i, h(X_i) = \varepsilon(i+1)$$

очевидно, что $g \leq f \leq h$ и $\int_X (h(x) - g(x)) dx = \varepsilon \mu X$. Множество X с бесконечной мерой можно разбить на счётное количество множеств Y_i с конечной мерой, на Y_i приблизить функцию ступенчатыми с точностью $2^{-i}\varepsilon$, и собрать общее приближение с точностью ε .

Предыдущая

теорема

не утверждает, что ступенчатые g и h имеют интеграл Лебега, так как мы ничего не знаем о его абсолютной сходимости.

Однако уже можно утверждать, что построенные в доказательстве теоремы g и h имеют или не имеют сходящийся интеграл Лебега одновременно, так как у разности интеграл Лебега конечен.

Определение интеграла Лебега произвольной функции у нас будет таким:

Определение

.47.

для измеримой по Лебегу функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) определим нижний интеграл Лебега как

$$\sup \int_X g(x) dx$$

по интегрируемым ступенчатым $g \leq f$.

Определим верхний интеграл Лебега как

$$\inf \int_X h(x) dx$$

по интегрируемым ступенчатым $h \geq f$.

Определение

.48.

Будем говорить, что измеримая $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) интегрируема по Лебегу конечным интегралом, если её нижний и верхний интегралы Лебега конечны и равны между собой.

Оказывается, что для измеримой функции не может оказаться так, что нижний и верхний интегралы Лебега конечны и различны.

Мы выведем это из теоремы 5.46:

Следствие 5.49

Если измеримая функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ может быть оценена снизу и сверху, $g_0 \leq f \leq h_0$ ступенчатыми с конечным интегралом, то она сама имеет конечный интеграл Лебега.

Доказательство.

для любого $\varepsilon > 0$ применим теорему 5.46 и найдём ступенчатые функции, $g \leq f \leq h$, такие что

$$\int_X (h(x) - g(x)) dx < \varepsilon$$

Рассмотрим новые ступенчатые функции, определённые по формулам

$$g^*(x) = \max \{g_0(x), g(x)\}, \quad h^*(x) = \min \{h_0(x), h(x)\}.$$

Так как $h^*(x) - g^*(x) \leq h(x) - g(x)$, то выполняется

$$\int_X (h^*(x) - g^*(x)) dx < \varepsilon$$

А так как $g_0 \leq g^* \leq f \leq h^* \leq h_0$, то ступенчатые g^* и h^* заключены между ступенчатыми g_0 и h_0 с конечным интегралом, следовательно они тоже имеют конечный интеграл.

То есть мы можем применить линейность интеграла и написать

$$\int_X h^*(x) dx < \int_X g^*(x) dx + \varepsilon$$

из чего уже следует, что верхний и нижний интегралы f отличаются не более чем на ε .

Задача

50.

докажите, что если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечный интеграл, то её сужение на измеримое $Y \subseteq X$ тоже будет иметь конечный интеграл. интеграла её сужения на Y , потом приближайте f снизу и сверху ступенчатыми.

||

Неотрицательную функцию можно приблизить снизу нулём, а всякое её приближение ступенчатой функцией сверху имеет определённый интеграл, возможно равный $+\infty$.

Значит точная нижняя и верхняя грань в определении всегда берутся по непустому подмножеству $[0, +\infty]$ и имеет смысл следующее определение:

Определение

.51.

для неотрицательной измеримой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ будем писать $\int_X f(x)dx = +\infty$, если её нижний интеграл Лебега бесконечен. Поясним это определение с помощью теоремы 5.46:

Следствие 5.52.

Если неотрицательная измеримая $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ имеет конечный нижний интеграл Лебега, то её верхний интеграл Лебега равен нижнему.

Доказательство.

для любого $\varepsilon > 0$ применим теорему 5.46 и найдём ступенчатые функции, $g \leq f \leq h$, такие что

$$\int_X (h(x) - g(x))dx < \varepsilon$$

При этом функцию g можно считать неотрицательной, а значит её интеграл Лебега можно считать определённым как элемент $[0, +\infty]$.

Если он равен $+\infty$, то по определению нижний интеграл Лебега f бесконечен, а условие теоремы предполагает обратное.

Значит интеграл g конечен, тогда интеграл h тоже конечен из линейности.

Следовательно h даёт пример приближения f ступенчатой функцией сверху с конечным интегралом, к тому же не большим, чем нижний интеграл Лебега f плюс ε .

В силу произвольности ε верхний интеграл Лебега f обязан совпасть с его нижним интегралом Лебега.

Заметим, что неотрицательной функции мы можем разрешить принимать значения $+\infty$.

Если такое значение принимается на множестве положительной меры, то интеграл мы считаем равным $+\infty$, иначе такие значения не влияют на определение интеграла.

Далее интегрирование неотрицательных функций всегда будет пониматься в таком смысле.

теорема

для знакопеременной функции в определении интеграла Лебега требуется абсолютная сходимость, следующая теорема обобщает свойство суммирования абсолютно сходящихся рядов отдельно по положительной и отрицательной части:

для измеримой функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

и

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Если $\int_X f(x)dx$ конечен, то $\int_X f_+(x)dx$ и $\int_X f_-(x)dx$ тоже конечны и наоборот.

Доказательство.

Если интеграл f конечен, то приблизим f ступенчатыми функциями $g \leq f \leq h$ с конечными интегралами, тогда для любого $x \in X$ выполняется

$$f_+(x) \leq h_+(x), \quad f_-(x) \geq g_-(x).$$

для ступенчатых функций утверждение очевидно из соответствующего свойства рядов, следовательно для положительной части мы имеем оценку

$$\int_X f_+(x)dx \leq \int_X h_+(x)dx < +\infty$$

и для отрицательной части

$$\int_X f_-(x)dx \geq \int_X g_-(x)dx > -\infty$$

В обратную сторону, из приближений положительной и отрицательной части ступенчатыми с конечным интегралом можно сделать и приближение исходной функции ступенчатыми с конечным интегралом, просто сложив их.

Устанавливаемая далее линейность интеграла Лебега означает выполнение равенства

$$\int_X f(x)dx = \int_X f_+(x)dx + \int_X f_-(x)dx.$$

Иногда его используют для определения интеграла Лебега произвольной измеримой функции через интеграл Лебега знакопостоянной измеримой функции.

Собственно, слагаемые в правой части равенства лежат в промежутках $[0, +\infty]$ и $[-\infty, 0]$ соответственно и их сумме можно придать определённое значение в $[-\infty, +\infty]$ в почти всех случаях, кроме случая, когда они оба бесконечны с разными знаками.

Задача

54.

докажите, что интегрируемая по Риману на отрезке функция интегрируема и по Лебегу с тем же интегралом.

||

Заметьте, что понятие ступенчатой по Лебегу функции содержит в себе понятие ступенчатой по Риману.

||

Задача

.55 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).

Докажите, что $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

||

Рассмотрите колебание функции в точке $\omega(f, x)$ (см. определение 3.81), обратите внимание, что множества

$$D_k = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq 1/k\}$$

компактны и мера множества точек разрыва равна нулю тогда и только тогда, когда верхняя мера Жордана всех этих множеств равна нулю.

Используйте тот факт, что определение верхней меры Жордана использует покрытие конечным количеством промежутков.

||

14.3.10 Linearity and Monotonicity of the Lebesgue Integral

Из линейности интеграла для ступенчатых функций с помощью предельного перехода следует его линейность для измеримых функций.

Имея два приближения

$$g_1 \leq f_1 \leq h_1, \quad g_2 \leq f_2 \leq h_2$$

в случае $A, B \geq 0$ (другие случаи делаются аналогично с переменной мест g_i и h_i) мы получаем приближение

$$Ag_1 + Bg_2 \leq Af_1 + Bf_2 \leq Ah_1 + Bh_2$$

для интеграла с учётом установленной линейности для ступенчатых функций мы знаем

$$\begin{aligned} A \int_X g_1 dx + B \int_X g_2 dx &\leq \int_X (Af_1 + Bf_2) dx \leq A \int_X h_1 dx + B \int_X h_2 dx \\ A \int_X g_1 dx + B \int_X g_2 dx &\leq A \int_X f_1 dx + B \int_X f_2 dx \leq A \int_X h_1 dx + B \int_X h_2 dx \end{aligned}$$

Зазор между левой и правой частью в этих цепочках неравенств может быть сделан произвольно малым, из чего и следует линейность

$$\int_X (Af_1 + Bf_2) dx = A \int_X f_1 dx + B \int_X f_2 dx$$

Монотонность с учётом линейности сводится к доказательству того, что интеграл измеримой неотрицательной функции неотрицателен.

Но очевидно неотрицательную $f \geq 0$ можно приблизить снизу нулевой функцией и получить по определению интеграла

$$\int_X f(x) dx \geq 0$$

Это утверждение можно усилить до строгой монотонности, если $f > 0$ на множестве положительной меры, то и интеграл будет положителен.

Сформулируем это утверждение в том виде, в котором мы часто будем его использовать.

теорема

5.56.

Если функция $f \geq 0$ интегрируема по Лебегу на множестве X положительной мерью Лебега и

$$\int_X f(x) dx = 0$$

то $f(x) = 0$ на всём X кроме множества меры нуль.

Доказательство.

Предположим противное: множество $X_+ = \{x : f(x) > 0\}$ имеет положительную меру. Оно является объединением счётной последовательности множеств

$$X_n = \{x : f(x) > 1/n\}$$

значит какое-то X_n должно иметь положительную меру по свойству непрерывности меры Лебега.

Но тогда по не обязательно строгой монотонности мы оценим функцию снизу ступенькой на основании X_n :

$$\int_X f(x) dx \geq \int_X \frac{1}{n} \chi_{X_n}(x) dx = \frac{\mu X_n}{n} > 0.$$

теорема

5.57.

Следующая теорема дополнительно проясняет определение интеграла Лебега:

В определении интегрируемой по Лебегу функции с конечным интегралом требование измеримости функции следует из остальных требований.

Доказательство.

Если f можно заключить между двумя ступенчатыми $g \leq f \leq h$ так, что разность их интегралов произвольно мала, то можно и выбрать возрастающую последовательность ступенчатых $g_n \leq f$ и убывающую последовательность ступенчатых $h_n \geq f$ так, что разность их интегралов будет стремиться к нулю.

По теореме 5.31 поточечные пределы $g_n \rightarrow g$ и $h_n \rightarrow h$ будут измеримыми по Лебегу.

Из неравенств $g_n \leq g \leq f \leq h \leq h_n$ после перехода к пределу $n \rightarrow \infty$ будет следовать, что интегралы g и h равны и равны интегралу f .

Следовательно

$$\int_X (h - g) dx = 0$$

и по предыдущей теореме $h = g$ на множестве $Y \subset X$, таком что $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Тогда на Y также выполняется $g = f = h$, а следовательно f совпадает с измеримой функцией везде, кроме множества меры нуль, а значит она сама измерима.

Из следствия 5.34 также становится ясно, что функция с конечным интегралом Лебега совпадает с некоторой борелевской функцией за исключением множества меры нуль и борелевская функция имеет тот же интеграл.

14.4 Lebesgue Integral: Well-known Features (???)

14.4.1 Approximation of Integrable Functions in the Mean

Определение интеграла Лебега подразумевает приближение функции ступенчатыми в некотором смысле.

В общем случае приближение в среднем функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ функциями из класса $\mathcal{G}$ - это выполнение условия

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{G} : \int_X |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$$

Очевидное неравенство (треугольника)

$$\int_X |f - h| dx \leq \int_X |f - g| dx + \int_X |g - h| dx$$

позволяет рассуждать о приближениях в среднем как о приближениях в метрическом пространстве, правая метрика вырождена, почти всюду совпадающие функции f и g будут иметь нулевое расстояние $\int_X |f - g| dx$

Заметим также, что если f приближена в среднем g с точностью ε , то (из линейности и монотонности интеграла с учётом неравенств $-|f - g| \leq f - g \leq |f - g|$) интегралы этих функций отличаются не более чем на ε , если хотя бы один из них конечен.

Следующая теорема даёт естественный способ приблизить интегрируемую функцию ограниченной.

Определение интеграла Лебега означает, что всякую функцию с конечным интегралом Лебега можно сколь угодно близко приблизить ступенчатой функцией в среднем, причём можно приближать и сверху, и снизу.

Далее мы докажем еще пару утверждений о том, как можно приближать функцию в среднем.

теорема

5.58.

Пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на измеримом $X \subset \mathbb{R}^n$ интегрируема по Лебегу конечным интегралом.

Положим для $M > 0$

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & f(x) \geq M \\ f(x), & |f(x)| \leq M \\ -M, & f(x) \leq -M \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_X f_M(x) dx = \int_X f(x) dx \quad \text{и} \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_X |f(x) - f_M(x)| dx = 0$$

Доказательство.

Это утверждение $\Delta_\wedge$ ступенчатых функций легко следует из определения и абсолютной сходимости ряда в их определении, при достаточно большом M при обрезании функции по модулю значением M лишь небольшая (по сумме модулей) часть членов ряда в определении интеграла ступенчатой функции может уменьшиться.

для произвольной функции утверждение следует из её приближения ступенчатыми, с учётом неравенств

$$|f_M - g_M| \leq |f - g| \rightarrow \int_X |f_M - g_M| dx \leq \int_X |f - g| dx$$

Задача

59.

Докажите, что если функцию f на отрезке можно приблизить функциями из некоторого класса $\mathcal{G}$ равномерно, то её можно приблизить функциями $\mathcal{G}$ и В среднем.

Докажите, что на прямой (или в $\mathbb{R}^n$) из возможности приблизить равномерно возможность приблизить в среднем не следует.

||

Проверьте, когда ограниченность функции позволяет ограничить её интеграл.

||

Можно сделать ещё одно полезное утверждение о приближении в среднем интегрируемой функции:

теорема

5.60.

Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом.

Тогда f можно сколь угодно близко приблизить в среднем ступенчатыми функциями с конечным числом элементарных ступенек (мы их будем называть элементарно ступенчатыми).

Доказательство.

Из определения интеграла непосредственно следует, что можно сколь угодно близко в среднем приблизить функцию f ступенчатой функцией g из счётного числа измеримых по Лебегу ступенек.

Если основание какой-то ступеньки имеет бесконечную меру Лебега, то разобьём её на счётное количество ступенек с конечными мерами основания и будем считать, что основания всех ступенек имеют конечные меры Лебега.

Далее из определения интеграла g следует, что можно оставить в этой функции конечное число ступенек так, что разность между g и конечно-ступенчатой функцией h будет иметь маленький интеграл модуля, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - h(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - h(x)| dx < 2\varepsilon.$$

Теперь h состоит из конечного числа ступенек, основания которых имеют конечные меры Лебега,

$$h(x) = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{X_k}(x)$$

пусть $M = \sum_{k=1}^N |a_k|$.

Основание каж,ой ступеньки X_k можно приблизить элементарным множеством по определению конечной меры Лебега, у нас получаются элементарные множества S_k , такие что

$$\mu(S_k \nabla X_k) = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{X_k}(x) - \chi_{S_k}(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Тогда положив

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{S_k}(x)$$

мы будем иметь неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - \varphi(x)| dx < \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |a_k| |\chi_{X_k}(x) - \chi_{S_k}(x)| dx < \varepsilon$$

В итоге наша исходная функция приближена в среднем элементарно ступенчатой φ с точностью 3ε . Дальнейшее изможение приближения функций мы откмадываем до разделов 6.3 и 8.3.

14.4.2 Additivity and Continuity of the Lebesgue Integral over Sets

Установим некоторые свойства интеграла Лебега, которые аналогичны соответствующим свойствам меры Лебега.

Счётная аддитивность интеграла Лебега по множествам

Если измеримая функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна или имеет конечный интеграл на множестве X , которое представляется в виде объединения попарно непересекающихся измеримых по Лебегу

множеств как $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, то

$$\int_X f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} f(x) dx$$

Доказательство.

для ступенчатой функции на ступеньках $\{X_i\}$, $f(X_i) = c_i$ утверждение сводится к суммированию равенств

$$\mu X_i = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_i \cap Y_k)$$

верных в силу счётной аддитивности меры Лебега, с коэффициентами c_i .

для произвольной функции утверждение следует из её приближения ступенчатыми.

Задача

62.

Приведите пример измеримой на $X = \sqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ функции f , которая имеет на каждом Y_k конечный интеграл, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} f(x) dx$$

абсолютно сходится, но f не имеет интеграла на всём X .

||
||

Вспомните, при каких условиях интеграл измеримой функции может быть не определён.

теорема о непрерывности интеграла Лебега по множествам

Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и возрастают по включению

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq X_{k+1} \subseteq \dots$$

Пусть также $X = \bigcup_k X_k$ и интеграл Лебега $\int_X f(x)dx$ конечен или f измерима и неотрицательна. Тогда

$$\int_X f(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X_k} f(x)dx$$

Доказательство.

Сводится к аддитивности интеграла Лебега, если положить $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2 \setminus X_1, \dots, Y_k = X_k \setminus X_{k-1}, \dots$ тогда

$$\int_{X_k} f(x)dx = \sum_{\ell=1}^k \int_{Y_\ell} f(x)dx$$

и в пределе $k \rightarrow \infty$ в правой части получается интеграл f по X .

Непрерывность интеграла Лебега по убыванию множеств

Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и убывают по включению

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \cdots \supseteq X_k \supseteq X_{k+1} \supseteq \dots$$

Пусть также $X = \bigcap_k X_k$ и интеграл Лебега $\int_{X_1} f(x)dx$ конечен.

Тогда

$$\int_X f(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X_k} f(x)dx.$$

Доказательство.

Сводится к предыдущей теореме, если положить $X'_k = X_1 \setminus X_k$ и воспользоваться аддитивностью

$$\int_{X_1} f(x)dx = \int_{X_1 \setminus X} f(x)dx + \int_X f(x)dx.$$

Непрерывность интеграла Лебега по верхнему пределу

Обратите внимание, что в случае бесконечных интегралов неотрицательных функций предыдущая теорема может быть неверна и приведите соответствующие примеры.

Если f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$ с конечным интегралом, то выражение

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

непрерывно зависит от x .

Доказательство.

В определении предела функции по Гейне достаточно рассматривать монотонные последовательности $x_n \rightarrow x$ (докажите это самостоятельно).

Если последовательность (x_n) возрастает, то значения $g(x_n)$ являются интегралами f по возрастающей последовательности отрезков $[a, x_n]$ и можно перейти к пределу по непрерывности интеграла Лебега.

Если же последовательность x_n убывает, то можно перейти к пределу по непрерывности для убывающей последовательности отрезков.

Абсолютная непрерывность интеграла Лебега

Смедующая задача показывает, что функция g из предыдущего следствия на самом деле обладает более сильным свойством, чем непрерывность:

Пусть f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$.

докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $X \subset [a, b]$ измеримо и $\mu X < \delta$, то

$$\int_X |f(x)|dx < \varepsilon$$

||

Используйте приближение функции в среднем ограниченными функциями или посмотрите на доказательство теоремы 8.23.

||

14.4.3 Limit Transition in the Lebesgue Integral over Functions

Далее мы будем изучать, насколько переход к пределу функций соответствует переходу к пределу для их интегралов.

Важным свойством интеграла Лебега оказывается, что не обязательно требовать равномерной сходимости для последовательности функций, а достаточно иметь поточечную сходимость вместе с некоторым дополнительным условием, монотонностью или равномерной ограниченностью.

теорема о монотонной сходимости

Пусть функции $f_k (k \in \mathbb{N})$ на измеримом X неотрицательны и измеримы по Лебегу, при этом при любом $x \in X$ последовательность $f_k(x)$ возрастает и стремится к $f(x)$ (значения $+\infty$ разрешены).

Тогда

$$\int_X f_k dx \rightarrow \int_X f dx, \quad k \rightarrow \infty$$

Доказательство.

Напомним, что по теореме 5.31 поточечные пределы измеримых функций измеримы, так что f будет измеримой с конечным или бесконечным интегралом.

Из монотонности сразу следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k dx \leq \int_X f dx$$

Остаётся доказать, что левая часть не менее правой.

Можно выбросить из X те точки, где $f(x)$ равна нулю, так как остальные f_k в этих точках тоже обязаны быть равны нулю.

В итоге, мы считаем все функции неотрицательными, а f считаем положительной.

Сначала рассмотрим случай, когда $f(x) = +\infty$ на множестве меры нуль.

Тогда можно выбросить это множество.

Возьмём теперь $\varepsilon > 0$.

Положим

$$X_k = \{x \in X : f_k(x) \geq (1 - \varepsilon)f(x)\}$$

это измеримые множества, заданные неравенствами с измеримыми функциями.

Из поточечной сходимости следует, что $X = \bigcup_k X_k$ и эти множества упорядочены по включению.

Это значит, что при достаточно большом k будет выполняться (считаем интеграл конечным, иначе достаточно правую часть равенства заменить на $1/\varepsilon$)

$$\int_{X_k} f(x) dx \geq \int_X f(x) dx - \varepsilon$$

С учётом определения X_k получаем

$$\int_X f_k(x) dx \geq \int_{X_k} f_k(x) dx \geq (1 - \varepsilon) \int_{X_k} f(x) dx \geq (1 - \varepsilon) \left(\int_X f(x) dx - \varepsilon \right)$$

или в случае $\int_X f dx = +\infty$

$$\int_X f_k(x) dx \geq \int_{X_k} f_k(x) dx \geq (1 - \varepsilon) \int_{X_k} f(x) dx \geq \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

Рассматривая $\varepsilon \rightarrow +0$ мы видим, что в обоих случаях предел интегралов f_k должны быть не менее интеграла f .

Осталось рассмотреть случай, когда $f(x) = +\infty$ на множестве положительной меры.

Тогда достаточно рассматривать только это множество и доказывать, что интегралы $\int_X f_k dx$ стремятся к $+\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Аналогично предыдущему случаю, можно положить

$$X_k = \{x \in X : f_k(x) \geq 1/\varepsilon\}$$

При достаточно больших k будет выполняться

$$\mu X_k \geq 1/2 \mu X$$

и

$$\int_X f_k(x) dx \geq \int_{X_k} f_k(x) dx \geq 1/\varepsilon \mu X_k \geq \frac{1}{2\varepsilon} \mu X,$$

что и означает стремление к бесконечности последовательности интегралов. Теорему о монотонной сходимости можно переформулировать иначе, сделав более отчётливым её аналогию со счётной аддитивностью меры Лебега:

теорема

5.68 (Счётная аддитивность интеграла Лебега по функциям).

Пусть функции u_k на измеримом X неотрицательны и измеримы по Лебегу.

Тогда

$$\int_X \sum_k u_k dx = \sum_k \int_X u_k dx$$

Доказательство.

Сводится к теореме о монотонной сходимости рассмотрением частичных сумм $f_k = \sum_{\ell=1}^k u_\ell$

Можно сказать, что предыдущая теорема позволяет переставлять счётное суммирование и интегрирование, если речь идёт о неотрицательных выражениях.

Она естественно обобщает утверждение о перестановке двойных сумм для неотрицательных выражений.

Переставлять интегрирование и суммирование также можно и в случае функций произвольного знака при условии

$$\int_X \sum_k |u_k| dx = \sum_k \int_X |u_k| dx < +\infty$$

тогда можно разложить каждую u_k на неотрицательную и неположительную части, $u_k = u_{k,+} + u_{k,-}$, и интегрировать их по отдельности. Для измеримых функций $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k dx \geq \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k dx.$$

[[

Рассмотрите возрастающую последовательность функций $g_k = \inf_{m \geq k} f_m$.]]

Теорема об ограниченной сходимости

Теорема об ограниченной сходимости. Рассмотрим последовательность функций $f_k(x)$. Пусть $f_k(x)$ измеримы на X , $|f_k(x)| \leq g(x)$ для всех k , где g - неотрицательная функция, которая на измеримом X имеет конечный интеграл. Также пусть $f_k(x) \rightarrow f(x)$ поточечно на X . Тогда

$$\int_X f_k dx \rightarrow \int_X f dx, \quad k \rightarrow \infty.$$

Говоря простыми словами, (!???)

Эта теорема позволяет переходить к поточечному пределу под знаком интеграла без монотонности.

Доказательство.

Выкинем из рассмотрения измеримое множество точек, где g равна нулю, так как там и f равна нулю, а также точки, где g равна $+\infty$, ведь при конечном интеграле g их мера тоже нуль.

Так как в пределе выполняется $|f| \leq g$ и f измерима по теореме 5.31, то можно говорить об интеграле f и её интеграл конечен.

Возьмём $\varepsilon > 0$ и положим

$$X_k = \{x \in X : \forall \ell \geq k, |f_\ell(x) - f(x)| \leq \varepsilon g(x)\},$$

из поточечной сходимости получается, что $X = \bigcup_k X_k$.

Множества X_k измеримы, так как они получаются из решений неравенств на измеримые функции операцией счётного пересечения.

Применим к ним непрерывность интеграла от g при $k \rightarrow \infty$ (теорема 5.63) и получим при достаточно больших k

$$\int_{X_k} g(x) dx \geq \int_X g(x) dx - \varepsilon \rightarrow \int_{X \setminus X_k} g(x) dx \leq \varepsilon$$

Тогда при достаточно больших k мы можем оценить разность $|f_k(x) - f(x)|$ либо как $\varepsilon g(x)$ при $x \in X_k$, либо грубо как $2g(x)$ в противном случае и после интегрирования получить

$$\int_X |f_k(x) - f(x)| dx \leq \int_{X_k} \varepsilon g(x) dx + \int_{X \setminus X_k} 2g(x) dx \leq \varepsilon \int_X g(x) dx + 2\varepsilon.$$

При $\varepsilon \rightarrow +0$ мы получаем требуемое, с учётом неравенства

$$\left| \int_X f_k(x) dx - \int_X f(x) dx \right| \leq \int_X |f_k(x) - f(x)| dx$$

Подводя итог, можно сказать, что поточечная сходимость влечёт сходимость в среднем и предельный переход под знаком интеграла при выполнении некоторых дополнительных условий.

пример, когда поточечный предел равен 0, но интегралы от функций не стремятся к нулю.

Рассмотрев функции типа (убегающие вправо ступеньки)

$$f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}(x)$$

мы получаем пример, когда поточечный предел равен 0, но интегралы от функций не стремятся к нулю.

Так что дополнительные требования, монотонности или ограниченности функций с конечным интегралом, в самом деле нужны.

О применениях (??)

(один раз ниже нужна кст)

Формула Ньютона-Лейбница (???????)

Докажите, что если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) с ограниченной производной, то

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

||

Используйте определение производной и теорему об ограниченной сходимости. (пока не думал, к сожалению.)

||

14.4.4 Examples of Applications of the Lebesgue Integral

(мб потом другую структуру сделаю, пока так.)

Неравенство Коши-Буняковского

Неравенство Коши-Буняковского Пусть функции $f(x), g(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу и их квадраты $|f|^2, |g|^2$ имеют конечные интегралы. Тогда

$$\left(\int_X f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_X |f(x)|^2 dx \right) \cdot \left(\int_X |g(x)|^2 dx \right).$$

Доказательство.

Если один из интегралов квадрата равен нулю, например $\int_X |f(x)|^2 dx = 0$, то по теореме 5.56 функция f равна нулю почти всюду (кроме множества меры нуль).

Тогда и интеграл $\int_X f(x)g(x) dx$ равен нулю.

Иначе, домножив функции на константы, мы можем считать

$$\int_X |f(x)|^2 dx = \int_X |g(x)|^2 dx = 1$$

а в требуемом неравенстве левая и правая часть домножатся на одну и ту же положительную константу, причём правая часть станет равна 1.

Тогда интегрируя тривиальное неравенство $|\hat{f}g| \leq |f|^2/2 + |g|^2/2$, мы получим

$$\int_X |fg| dx \leq 1$$

Из него следует и аналогичное неравенство и без модуля.

Следующая теорема позволит нам дифференцировать интеграл по параметру при выполнении некоторых разумных предположений.

Производные функций нескольких переменных будут систематически изучаться далее в разделе 6.1, здесь нам будет достаточно определения частной производной функции $f : X \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

По сути это производная функции одной переменной $y \in (a, b)$ при каждом фиксированном $x \in X$.

Дифференцирование под знаком интеграла

Дифференцирование под знаком интеграла

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по множеству X при любом $y \in (a, b)$, дифференцируема по y и для любого $y \in (a, b)$

$$|f'_y(x, y)| \leq g(x), \quad \int_X g(x) dx < +\infty$$

Тогда

$$\frac{d}{dy} \int_X f(x, y) dx = \int_X f'_y(x, y) dx$$

Доказательство.

Посчитаем производную интеграла как предел с использованием линейности

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_X f(x, y+h) dx - \int_X f(x, y) dx}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_X \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx$$

Поточечный переход к пределу под знаком интеграла даёт требуемую формулу.

Этот переход обоснован теоремой об ограниченной сходимости, так как

$$\left| \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \right| = |f'_y(x, y + \vartheta(x)h)| \leq g(x).$$

теорема о среднем для интеграла

Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и ограничена на связном X , а $g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ имеет конечный интеграл на X .

Тогда для некоторого $\xi \in X$ выполняется

$$\int_X f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_X g(x) dx$$

Доказательство.

Будем считать интеграл g положительным, иначе в обеих частях равенства стоят нули.

Также выбросим из X точки, где $g(x) = 0$, это не поменяет ни левую, ни правую часть интеграла; после этого считаем $g > 0$.

Пусть $m = \inf_{x \in X} f(x)$ и $M = \sup_{x \in X} f(x)$.

Тогда интегрируя неравенство $m \leq f(x) \leq M$ мы получим

$$m \int_X g(x) dx \leq \int_X f(x)g(x) dx \leq M \int_X g(x) dx$$

Так как f непрерывна на связном X , то её область значений как минимум содержит интервал (m, M) .

Следовательно, при выполнении строгого неравенства

$$m \int_X g(x) dx < \int_X f(x)g(x) dx < M \int_X g(x) dx$$

мы подберём такое ξ , чтобы $f(\xi) \int_X g(x) dx$ оказалось равно интегралу.

Остаётся рассмотреть крайние случаи.

Пусть, например,

$$m \int_X g(x) dx = \int_X f(x)g(x) dx \rightarrow \int_X (f(x) - m)g(x) dx = 0$$

По теореме 5.56 в этом случае $f(x) = m$ почти всюду (кроме множества меры нуль) и почти любое $\xi \in X$ подойдёт для нужной нам формулы.

Можно заметить, что теорема верна и для неположительной g , для этого достаточно изменить её знак, тогда в обеих частях требуемого равенства поменяются знаки.

ещё один вариант теоремы о среднем будет играть принципиальную роль в при изучении условно сходящихся интегралов и далее в гармоническом анализе.

Вторая теорема о среднем

Формулировка

Если f интегрируема по Лебегу, а g монотонна и ограничена на $[a, b]$, то при некотором $\vartheta \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0) \int_a^{\vartheta} f(x)dx + g(b-0) \int_{\vartheta}^b f(x)dx.$$

Доказательство

Переопределим g на концах, чтобы было $g(a+0) = g(a)$ и $g(b-0) = g(b)$.

Функцию f можно приблизить в среднем непрерывно дифференцируемой f_n (сначала можно приблизить элементарно-ступенчатой, а потом и сгладить ступеньки, более подробно про это написано в теореме 8.15) так, что

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx < \frac{1}{n}$$

Считая доказанной формулу для непрерывно дифференцируемых f_n вместо f , из ограниченности g некоторой константой M , интеграл в левой части при замене f на f_n изменится не более чем на M/n , а в правой части будут получаться разные ϑ_n и при замене f на f_n интегралы тоже изменятся не более чем на M/n .

Значит мы будем иметь

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx - g(a) \int_a^{\vartheta_n} f(x)dx - g(b) \int_{\vartheta_n}^b f(x)dx \right| < \frac{3M}{n}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве $n \rightarrow \infty$, мы можем считать по теореме Больцано-Вейерштрасса, что $\vartheta_n \rightarrow \vartheta$ и воспользоваться непрерывностью интеграла по пределу интегрирования.

Выведем формулу для непрерывно дифференцируемой f , считая её верной для случая, когда и f , и g непрерывно дифференцируемы.

Можно приблизить общую g в среднем монотонной и непрерывно дифференцируемой g_n (аналогично приближению элементарно ступенчатой, но надо проследить за сохранением монотонности) так, что

$$\int_a^b |g(x) - g_n(x)| dx < \frac{1}{n}$$

Теперь уже ограниченность f некоторой константой M позволит нам перейти к пределу в обеих частях равенства.

В итоге мы свели доказательство формулы к случаю непрерывно дифференцируемых функций.

для непрерывно дифференцируемых функций это можно доказать, интегрируя по частям, причём удобно начать со случая $g(b) = 0$.

Тогда нам на, о получить формулу

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\vartheta} f(x)dx$$

Поможим $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ и проинтегрируем по частям.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx = - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

так как $F(a) = 0$ и $g(b) = 0$.

Пусть без ограничения общности g убывает, тогда из $-g'(x) \geq 0$ и по теореме 5.74 для $\vec{F}$ найдётся ϑ , такое что

$$\int_a^b F(x)(-g'(x))dx = F(\vartheta) \int_a^{\vartheta} (-g'(x))dx = F(\vartheta)g(a),$$

что и доказывает равенство в случае $g(b) = 0$.

В общем случае напомним

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b f(x)(g(x) - g(b))dx + \int_a^b f(x)g(b)dx = \\ &= (g(a) - g(b)) \int_a^{\vartheta} f(x)dx + g(b) \int_a^b f(x)dx = \\ &= g(a) \int_a^{\vartheta} f(x)dx + g(b) \int_{\vartheta}^b f(x)dx. \end{aligned}$$

О случаях применений (????)

(??? когда-то внезапно она применялась, пока не знаю, когда)

14.4.5 Criteria for Convergence of Improper Integrals of Single-Variable Functions

Обсудим подробно критерии интегрируемости несобственного интеграла Лебега.
(тут тренировки нужны!)

Определение несобственного интеграла

Несобственным интегралом на интервале (a, b) с особенностью в b называется предел

$$\int_a^{*b} f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x)dx$$

в предположении, что все интегралы $\int_a^{\beta} f(x)dx$ конечны.

Это определение сделано по аналогии с суммами ряд.

В случае существования интеграла Лебега $\int_a^b f(x)dx$ по свойству непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела несобственный интеграл оказывается равным собственному.

При этом в силу свойства абсолютной сходимости интеграла Лебега интеграл от $|f|$ также будет конечен.

Поэтому содержательный случай несобственного интеграла-это условная сходимость, когда

$$\int_a^b |f(x)|dx = +\infty$$

и интеграл может существовать только в несобственном смысле.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Несобственный интеграл $\int_a^{*b} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta(\varepsilon) : \forall \xi, \eta \in [\beta(\varepsilon), b), \left| \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство (??)

Следует из критерия Коши существования предела функции.

О случаях применения (???!!)

Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла

Пусть найдётся константа M , такая что при любом $\beta \in (a, b)$

$$\left| \int_a^{\beta} f(x)dx \right| \leq M$$

а функция g монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow b - 0$.

Тогда

$$\int_a^{*b} f(x)g(x)dx$$

сходится.

Доказательство.

В выражении из критерия Коши используем вторую теорему о среднем:

$$\left| \int_{\xi}^{\eta} f(x)g(x)dx \right| \leq |g(\xi)| \left| \int_{\xi}^{\vartheta} f(x)dx \right| + |g(\eta)| \left| \int_{\vartheta}^{\eta} f(x)dx \right| \leq 2M(|g(\xi)| + |g(\eta)|).$$

Заметим, что из стремления g к нулю, при $\xi, \eta \geq \beta(\varepsilon)$ из определения предела $g(b - 0)$ это выражение будет не более $4M\varepsilon$.

Признак Абеля сходимости несобственного интеграла (!!!)

Пусть интеграл $\int_a^{*b} f(x)dx$ сходится, а функция g монотонна и ограничена. Тогда сходится интеграл вида

$$\int_a^{*b} f(x)g(x)dx$$

Доказательство.

Пусть $|g(x)| \leq M$.

В выражении из критерия Коши используем вторую теорему о среднем:

$$\left| \int_{\xi}^{\eta} f(x)g(x)dx \right| \leq |g(\xi)| \left| \int_{\xi}^{\vartheta} f(x)dx \right| + |g(\eta)| \left| \int_{\vartheta}^{\eta} f(x)dx \right| \leq M \left| \int_{\xi}^{\vartheta} f(x)dx \right| + M \left| \int_{\vartheta}^{\eta} f(x)dx \right|$$

Из критерия Коши сходимости $\int_a^{*b} f(x)dx$ следует, что при $\xi, \eta \geq \beta(\varepsilon)$ интегралы в формуле будут не более ε и всё выражение будет не более $2M\varepsilon$.

Примеры типичных исследований на сходимость

(самые избранные оставлю тут.)

докажите, что интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

сходятся абсолютно только при $\alpha > 1$, но сходятся условно в несобственном смысле при $\alpha > 0$.

||

Используйте признак Дирихле для доказательства сходимости, критерий Коши для доказательства расходимости, и оценку $|\sin x| \geq \sin^2 x$ для доказательства отсутствия абсолютной сходимости.

||

Интегральный признак сходимости числового ряда

Пусть $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ убывает, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \quad \leftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

||

Докажите неравенства

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

заклучив f между парой ступенчатых функций.

||

О признаках сходимости несобственных интегралов с двумя особенностями (???)

(тут такая v.p. конструкция, да?)

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{-h}^h g(x) dx.$$

Некоторые задачи

(перенесу в каталог скорее всего, бесполезная задача)

Интеграл от некоторый $f \cdot \sin(x)$ более 0 (?)

Пусть функция $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ убывает и стремится к нулю на бесконечности, тогда

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin x dx \geq 0$$

||

(да очевидно, представь график)

Примените вторую теорему о среднем. (такое пока не пробовал, попробую потом.)

||

Интеграл от некоторый $f \cdot \cos(x)$ более 0 (?)

Пусть функция $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ выпукла и стремится к нулю на бесконечности. Тогда

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos x dx \geq 0.$$

||

Докажите, что можно интегрировать по частям. При возникновении затруднений можно посмотреть раздел 5.16.

||

14.4.6 Special Examples that Illustrate Features of Lebesgue Integral

Example of an integral of a sum of two functions, which is not equal to the integrals of first and second function

(I don't know it yet)

Example of an integral that works well with Lebesgue integral and not works with Riemann integral

(I don't know it yet. I want to know some meaningful one)

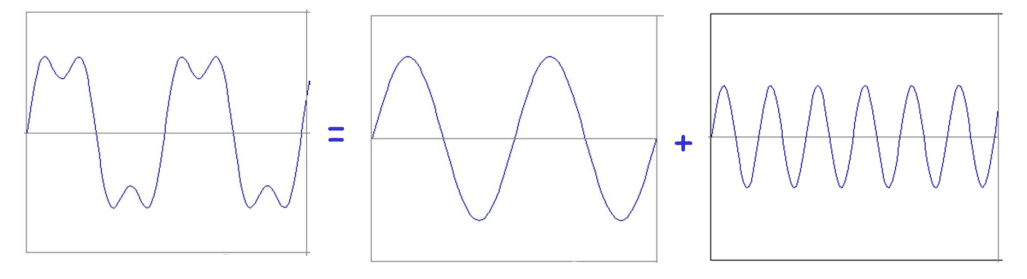
14.5 Basic Fourier Integral

14.5.1 Fourier Integral and Computation of the Dirichlet Integral

суть интеграла Фурье

примерно понимаю, потом напишу

Пример:



типичные фурье преобразования

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} 1, & |x| < \frac{X}{2} \\ 0, & |x| \geq \frac{X}{2} \end{cases} \\
 F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi u x} dx \\
 &= \int_{-X/2}^{X/2} e^{-j2\pi u x} dx \\
 &= \frac{1}{-j2\pi u} \left[e^{-j2\pi u X/2} - e^{j2\pi u X/2} \right] \\
 &= X \frac{\sin(\pi X u)}{(\pi X u)} = X \operatorname{sinc}(\pi X u)
 \end{aligned}$$

Theory

Представление функции интегралом Фурье - это формула вида

$$f(x) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} c(y) e^{ixy} dy$$

где интеграл в смысле главного значения - это по определению

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{-h}^h g(x) dx.$$

По аналогии с коэффициентами ряда Фурье, коэффициент $c(y)$ находится как

$$c(y) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

пока мы пишем эту формулу без обоснования, по потом мы её обоснуем сходимостью получающегося интеграла Фурье для достаточно приличной функции к этой функции.

Мы обычно будем рассматривать $f \in L_1(\mathbb{R})$, в этом случае интеграл можно брать и по Лебегу, а не только в смысле главного значения.

Собственно, выражения такого вида без константы мы уже изучали в разделе 8.8.

Как и в случае с рядами, подставив определение $c(y)$ в формулу интеграла Фурье до перехода к пределу $h \rightarrow +\infty$ в определении интеграла в смысле главного значения, мы получим иастинный интеграл Фурье:

$$T_h(f, x) = \int_{-h}^h c(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h \left(v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i(\xi-x)y} d\xi \right) dy$$

При условии $f \in L_1(\mathbb{R})$ (что мы и будем далее предполагать), можно во внутреннем интеграле опустить v.p.

и сделать замену переменной $t = \xi - x$, тогда после применения теоремы Фубини получится формула

$$T_h(f, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) D_h(t) dt$$

где

$$D_h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h e^{ity} dy = \frac{\sin ht}{\pi t}$$

называют ядром Дирихле для интеграла Фурье.

Его свойства аналогичны свойствам ядра Дирихле для ряда Фурье, однако условие нормировки проверить чуть сложнее.

О важности в.р.

Раскрою тут потом мысль, что без этого интеграл не считается.

Нормировка интеграла Дирихле

Выполняется

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} D_h(t) dt = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ht}{\pi t} dt = 1$$

Доказательство.

Замена ht на новую переменную показывает, что это достаточно доказать для $h = 1$, а с учётом чётности функции достаточно доказать для условно сходящегося интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Этот интеграл условно сходится по признаку Дирихле 5.78 и нам надо работать с ним достаточно аккуратно.

Сходимость означает, что для $\varepsilon > 0$ найдётся $\beta(\varepsilon)$, такое что при любом $a \geq \beta(\varepsilon)$

$$\left| \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| < \varepsilon.$$

Посмотрим теперь на интеграл с параметром $y \in [0, +\infty)$

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t} dt$$

он уже сходится абсолютно при $y > 0$.

Разложим интеграл на два и проанализируем отдельно

$$I(y) = \int_0^a e^{-yt} \frac{\sin t}{t} dt + \int_a^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t} dt$$

Во второй его части мы можем вынести по второй теореме о среднем экспоненту за знак интеграла (при $y = 0$ формула будет верна с $\vartheta = +\infty$)

$$\int_a^{+\infty} e^{-yt} \frac{\sin t}{t} dt = e^{-ya} \int_a^{\vartheta} \frac{\sin t}{t} dt$$

и обнаружить, что эта часть по модулю меньше ε , если $a \geq \beta(\varepsilon)$.

Первая часть же при $+0$ стремится равномерно к

$$\int_0^a \frac{\sin t}{t} dt$$

что отличается от искомого значения $I(0)$ не более чем на ε .

Таким образом мы доказали, что $I(y)$ непрерывно зависит от y даже при $y \rightarrow +0$.

Дифференцируя под знаком интеграла по y по теореме 5.73 при $y > 0$ (когда производную можно оценить абсолютно интегрируемым выражением), мы получим по формуле Ньютона-Лейбница

$$I'(y) = - \int_0^{+\infty} e^{-yt} \sin t dt = \frac{-1}{1+y^2}$$

а из граничного условия $I(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ мы найдём

$$I(y) = \pi/2 - \operatorname{arctg} y$$

что даёт требуемое $I(0) = \pi/2$.

Карасев.з.68.

Выведите формулу для интеграла Дирихле из того, что для ядра Дирихле ряда Фурье $D_n(x)$ при любом $\delta > 0$ выполняется (частный случай принципа локализации)

$$\int_{-\delta}^{\delta} D_n(x) dx \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty$$

||

Вынесите из интеграла близкое к единице выражение $\frac{x}{2 \sin x/2}$ по второй теореме о среднем и замените переменную $y = (n + 1/2)x$.||

Теория

Свойство равномерной ограниченности интегралов от ядра Дирихле,

$$\left| \int_a^b D_h(t) dt \right| \leq C$$

проверятся совсем просто, и мы на самом деле его уже проверяли, когда выясняли аналогичное свойство ядра Дирихле для рядов.

Замена ht на новую переменную показывает, что его достаточно проверить при $h = 1$, а в этом случае оно верно, так как по уже доказанному выражение под интегралом имеет ограниченную первообразную.

Теорема (??)

Дальнейший анализ сходимости $T_h(f, x)$ к функции f при $f \in L_1(\mathbb{R})$ производится точно так же, как и анализ сходимости ряда Фурье; на самом деле рассуждения даже проще, так как нам не придётся заменять $\sin t/2$ на t в знаменателе.

Для примера покажем аналог принципа локализации для интеграла Фурье.

Предположим функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ ограничена на $[a, b]$ тогда в выражении

$$T_h(f, x) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_h(t) dt + v.p. \int_{|t| \geq \delta} (f(x+t) - f(x)) D_h(t) dt$$

при фиксированном $\delta > 0$ второй интеграл стремится к нулю равномерно по $x \in [a, b]$.

Доказательство.

Половину второго интеграла можно оценить через вторую теорему о среднем (в качестве монотонной функции выносим $1/t$)

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{+\infty} (f(x+t) - f(x)) D_h(t) dt &= \frac{1}{\delta} \int_{\delta}^{\vartheta} f(x+t) \frac{\sin ht}{\pi} dt - f(x) \int_{\delta}^{+\infty} D_h(t) dt = \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{\delta}^{\vartheta} f(x+t) \frac{\sin ht}{\pi} dt - f(x) \int_{h\delta}^{+\infty} D_1(\xi) d\xi \end{aligned}$$

После этого в итоговом выражении первая часть стремится к нулю при $h \rightarrow +\infty$ по лемме о (равномерной) осцилляции (после представления синуса в виде экспоненты и замены $x+t$ на новую переменную), а вторая часть стремится к нулю при $h \rightarrow +\infty$ из сходимости интеграла от ядра Дирихле на бесконечности.

Из этого утверждения следуют признаки сходимости и равномерной сходимости Липшица и Дирихле, признак Дини сходимости в точке, формулируемые аналогично их вариантам для рядов Фурье.

Например, если $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывна с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$ (или удовлетворяет условию Гёльдера на (A, B)), то $T_h(f, x) \rightarrow f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

Следствие об условиях сходимости и равномерной сходимости

Интеграл Фурье сходится поточечно к $f \in L_1(\mathbb{R})$, если f непрерывна u_B каждой точке удовлетворяет условию Гёльдера, Дини или Дирихле; и сходится равномерно на отрезках, если f непрерывна и на каждом отрезке либо имеет ограниченную вариацию, либо удовлетворяет условию Гёльдера.

Заметим, что переход от $f(x)$ к $s(y)$ и обратно в интеграле Фурье выглядит достаточно симметрично, в отличие от ситуации с рядом Фурье.

Его можно сделать еще более симметричным, изменив константы в выражениях (хотя в литературе часто встречаются обозначения с константой $\frac{1}{2\pi}$ туда и 1 обратно):

14.5.2 Uniform Convergence of an Improper Integral

Определение

По определению равномерная сходимость означает, что сходимость несобственного интеграла

$$\int_a^\beta f(x, y) dx \rightarrow \int_a^{*b} f(x, y) dx$$

при $\beta \rightarrow b-0$ является равномерной по $y \in Y$, где Y - некоторое множество параметров. Иначе это можно сформулировать как

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_\beta^{*b} f(x, y) dx \right| \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow b-0$$

или в виде критерия Коши

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_\alpha^\beta f(x, y) dx \right| \rightarrow 0, \quad \alpha, \beta \rightarrow b-0$$

Простейшая ситуация, которая обычно называется признак Вейерштрасса, когда при $x \in [a, b)$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $|f(x, y)| \leq g(x)$ и интеграл $\int_a^b g(x) dx$ конечен.

В этом случае по определению интеграл

$$I(y) = \int_a^{*b} f(x, y) dx$$

сходится равномерно.

На самом деле последний интеграл в этом случае сходится по Лебегу без необходимости применять определение несобственного интеграла, а полезное свойство непрерывности $I(y)$ будет гарантировано теоремой об ограниченной сходимости при условии непрерывности $f(x, y)$ по переменной y (непрерывность на x не требуется).

Иначе говоря, при применимости признака Вейерштрасса понятие равномерной сходимости интеграла не даёт ничего нового.

В следующих задачах выясняются достаточные условия непрерывности и дифференцируемости интеграла по параметру, связанные с понятием равномерной сходимости несобственного интеграла.

О применениях равномерной сходимости (???)

Мы посчитали интеграл Дирихле с помощью дифференцирования по параметру.

В этом и в других случаях для изучения условно сходящихся интегралов, зависящих от параметра, может быть применено понятие равномерной сходимости несобственного интеграла.

Мы приведём стандартные сведения об этом понятии в виде упражнений, но использовать его в дальнейшем мы не будем.

Непрерывность равномерно сходящегося интеграла по параметру

докажите, что равномерно сходящийся несобственный интеграл (8.3) непрерывен по параметру y , если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной y и ограничена функцией переменной x , $|f(x, y)| \leq g(x)$, имеющей конечные интегралы на конечных отрезках $[a, \beta] \subset [a, b)$.

||

до перехода к пределу в определении несобственного интеграла примените теорему об ограниченной сходимости, во время перехода к пределу $\beta \rightarrow b - 0$ примените теорему 4.34.

||

Дифференцирование равномерно сходящегося интеграла по параметру

Пусть интеграл

$$I(y) = \int_a^{*b} f(x, y) dx$$

сходится хотя бы в одной точке $y \in (c, d)$, а интеграл

$$J(y) = \int_a^{*b} f'_y(x, y) dx$$

сходится равномерно по $y \in (c, d)$.

Предположим также, что на всяком $[a, \beta] \subset [a, b)$ применима теорема о дифференцировании интеграла Лебега по параметру.

Докажите, что тогда $I(y)$ сходится равномерно по $y \in (c, d)$ и $I'(y) = J(y)$.

||

Выберите последовательность $\beta_n \rightarrow b - 0$, рассмотрите соответствующие собственные интегралы $I_n(y)$ и $J_n(y)$, примените к ним теорему 4.35.

||

Аналогично ситуации (функциональных) рядов и интеграла без параметра, для интеграла с параметром есть свои варианты признаков Дирихле и Абеля.

Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла

Пусть найдётся константа M , такая что при любом $\beta \in (a, b)$ и $y \in Y$

$$\left| \int_a^\beta f(x, y) dx \right| \leq M$$

а функция g монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow b - 0$ равномерно по $y \in Y$. докажите, что

$$\int_a^{*b} f(x, y) g(x, y) dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$.

||

Проверьте, что доказательство «неравномерного» варианта 5.78 через вторую теорему о среднем работает и в этом случае.

||

Признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла

Пусть интеграл

$$\int_a^{*b} f(x, y) dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$, а функция g монотонна по x и ограничена $|g(x, y)| \leq M$ для любых $x \in (a, b)$ и $y \in Y$. Докажите, что

$$\int_a^{*b} f(x, y) g(x, y) dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$.

||

Проверьте, что доказательство «неравномерного» варианта 5.79 через вторую теорему о среднем работает и в этом случае.

||

О другом способе вычисления интеграла Дирихле

Сведите вычисление интеграла Дирихле через интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yx} \sin x}{x} dx$$

к результатам предыдущих задач.

14.5.3 Fourier Transform

Определение преобразования Фурье

Преобразование Фурье задаётся по формуле

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx$$

обратное преобразование Фурье задаётся по формуле

$$\tilde{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iyx} dx$$

Будем обозначать их как операторы F и F^{-1} , $\hat{f} = F[f]$, $\tilde{f} = F^{-1}[f]$.

В тех случаях, когда функция f представляется интегралом Фурье, мы можем утверждать, что $f = F^{-1}[F[f]]$ и $f = F[F^{-1}[f]]$, надо просто подставить формулы и понять, что это и есть представление интегралом Фурье.

Это значит, что преобразования действительно оказываются обратными друг к другу.

Теорема о производной преобразования Фурье

Если $f, xf \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\frac{d}{dy} F[f] = -iF[xf]$$

Доказательство.

Достаточно продифференцировать под знаком интеграла и ограничить получившееся выражение независимо от параметра y функцией $|xf|$ с конечным интегралом, тогда утверждение получается из теоремы 5.73.

Почему важно преобразование Фурье?

(подробный ответ на этот вопрос. что за переход там к спектрам, которые в оптике используются??? тут не четко понимаю ответ еще.)

Канонические примеры преобразования Фурье

(тут еще остаются тренировки.)

Преобразования Фурье синуса и косинуса

$$\cos(2\pi At) = \frac{e^{i2\pi At} + e^{-i2\pi At}}{2}$$

Along with the linearity property of the Fourier transform, the Fourier transform can be easily found:

$$\begin{aligned} G(f) = \mathfrak{I}\{\cos(2\pi At)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi At} + e^{-i2\pi At}}{2} e^{-i2\pi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi At} e^{-i2\pi t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi At} e^{-i2\pi t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} [\delta(f - A) + \delta(f + A)] \end{aligned}$$

The Fourier Transform for the sine function can be determined just as quickly using Euler's identity for the sine function:

$$\sin(2\pi At) = \frac{e^{i2\pi At} - e^{-i2\pi At}}{2i}$$

The result is:

$$\mathfrak{S}\{\sin(2\pi At)\} = \frac{1}{2i} [\delta(f - A) - \delta(f + A)]$$

Преобразование Фурье для гауссовой плотности

Выполняется формула

$$F[e^{-x^2/2}] = e^{-y^2/2}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = e^{-x^2/2}$ и $F[e^{-x^2/2}] = g(y)$. По формуле для производной преобразования Фурье и преобразования Фурье производной получим

$$g'(y) = -iF[xf] = iF[f'] = -yg(y).$$

Решая получившееся дифференциальное уравнение, получаем

$$\ln g(y) = - \int y dy = -\frac{y^2}{2} + \text{const},$$

то есть $g(y) = Ae^{-y^2/2}$. Константу A можно найти, заметив, что f чётная, а значит обратное преобразование Фурье действует на неё так же, как и прямое. Но так как обратное преобразование Фурье должно вернуть её обратно, то $A^2 = 1$. Из этого следует, что $A = 1$, так как случай $A = -1$ исключается тем, что очевидно $g(0) > 0$.

О применениях

Можно заметить, что предыдущее доказательство даёт ещё один способ вычисления интеграла Пуассона. В принципе, считая известным интеграл Пуассона из теоремы 5.127, можно действовать в обратную сторону и обосновать таким образом нахождение интеграла Дирихле, который нормирует формулы в определении преобразования Фурье.

Другие

Преобразование Фурье сдвига

Установите, как преобразуется $\hat{f}$, если f преобразуется сдвигом

$$(T_t^* f)(x) = f(x + t).$$

Преобразование Фурье гомотетии

Установите, как преобразуется $\hat{f}$, если f преобразуется гомотетией

$$(H_k^* f)(x) = f(kx).$$

Задача 8.93. Как отличить преобразование Фурье $\hat{f}$ действительной функции f от преобразований Фурье комплекснозначных функций, при условии выполнения формулы обращения для преобразования Фурье?

Преобразование Фурье полинома

Докажите, что функция вида $P(x)e^{-x^2/2}$, где $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, при преобразовании Фурье переходит в функцию того же вида, причём степень многочлена не повышается.

[| Используйте производную преобразования Фурье. |]

Теорема о преобразовании Фурье производной

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, является абсолютно непрерывной, и её определённая почти всюду производная f' тоже лежит в $L_1(\mathbb{R})$.

Тогда

$$F[f'] = iyF[f]$$

Доказательство.

Распишем по определению (преобразование Фурье будем писать без коэффициента):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}dx = f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

Осталось заметить (как мы уже замечали в доказательстве следствия 8.37), что $f(x)$ должна иметь нулевые пределы на бесконечности.

Так как f представляется интегралом от своей абсолютно интегрируемой производной, то у неё есть конечные пределы на бесконечности.

Эти пределы не могут быть ненулевыми, так как тогда f не могла бы быть абсолютно интегрируемой.

В качестве полезного примера рассмотрим преобразование Фурье гауссовой плотности. лемма 8.79 (Преобразование Фурье для гауссовой плотности).

Выполняется формула

$$F[e^{-x^2/2}] = e^{-y^2/2}$$

Доказательство.

Пусть $f(x) = e^{-x^2/2}$ и $F[e^{-x^2/2}] = g(y)$.

По формуле для производной преобразования Фурье и преобразования Фурье производной получим

$$g'(y) = -iF[xf] = iF[f'] = -yg(y)$$

Решая дифференциальное уравнение, получаем

$$\ln g(y) = - \int y dy = -\frac{y^2}{2} + \text{const}$$

то есть $g(y) = Ae^{-y^2/2}$.

Константу A можно найти, заметив, что f чётная, а значит обратное преобразование Фурье действует на неё так же, как и прямое.

Но так как обратное преобразование Фурье должно вернуть её обратно, то $A^2 = 1$.

Из этого следует, что $A = 1$, так как случай $A = -1$ исключается тем, что очевидно $g(0) > 0$.

Почему если сделать прямое и обратное преобразование, результат умножится на 2π

(давно вопрос остался этот.)

Другие вопросы

Почему вольфрам не считает интегралы, которые сводятся к дельта-функции?

я пишу ему:

`Re[Integrate[Exp[-I L x] Cos[a x] Cos[a x] Sin[b x], x]]`

и вместо дельта функций в ответе какое-то большое выражение.

(??? остался вопрос, то ли я не так считаю, то ли я что-то не понимаю.)

14.5.4 Discrete Fourier Transform

Конструкция

Прямое преобразование:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n (\cos(2\pi kn/N) - i \cdot \sin(2\pi kn/N)), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Обратное преобразование:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k (\cos(2\pi kn/N) + i \cdot \sin(2\pi kn/N)), \quad n = 0, \dots, N-1$$

О применениях дискретного преобразования Фурье

Применяется в алгоритмах цифровой обработки сигналов (его модификации применяются в сжатии звука в МРЗ, сжатии изображений в JPEG и др.), а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале.

О квантовом преобразовании Фурье

(мб важной будет заготовкой)

О применениях квантового преобразования Фурье

(тут короткое и содержательное указание на квантовые компьютеры, пока не дорос до них.)

14.5.5 Fourier Method for Signal Spectra

(вот именно это для оптики и нужно!)

(насколько же я плохо это знаю, что просто нет сил даже выгрузить!)

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ по Бойко Б.П., Тюрин В.А. Спектр сигнала: учебно-методическое пособие

Ряд Фурье лежит в основе спектрального анализа периодического сигнала. Теоретически периодический сигнал существует на всей оси времени и его энергия бесконечна. А если сигнал существует на конечном интервале времени, или, обобщая, имеет конечную энергию, можно ли для него ввести понятие спектра? Оказывается, можно, и в математическом анализе соответствующие соотношения известны как интегральные преобразования Фурье [1 – 3, 8, 9]:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$\bar{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$

Интегральная операция (2.2) известна как прямое преобразование Фурье. Комплексная функция частоты $\bar{F}(\omega)$ называется спектральной функцией. Интегральная операция (2.1) известна как обратное преобразование Фурье. Вещественный сигнал представляет сумму комплексных колебаний всех частот. Множество частот является непрерывным, поэтому спектр непрерывный.

Не претендуя на строгость доказательства для любых сигналов с конечной энергией, получим соотношения (2.1), (2.2), полагая, что конечная энергия обусловлена конечной длительностью сигнала. Одиночный сигнал можно трактовать как периодический, но с

бесконечным периодом. Чтобы получить результат, надо в комплексном ряде Фурье совершить предельный переход при стремлении периода T к бесконечности. Пусть текущему значению частоты ω соответствует n -ая гармоника ω_n . Тогда приращение частоты $d\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega_1$ и, вследствие (1.4), будет бесконечно малой величиной при бесконечно большом периоде. Комплексная амплитуда (1.15) становится бесконечно малой:

$$d\bar{A}_\omega = \frac{1}{\pi} d\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Комплексный ряд Фурье представляет сумму бесконечно малых величин и в пределе является интегралом (2.1) по определению. Функция $\bar{F}(\omega)$ в прямом преобразовании Фурье (2.2) - предельное значение интеграла в выражении (2.3) при стремлении периода T к бесконечности. Она описывает спектр, поэтому ее называют спектральной функцией.

Представим комплексную спектральную функцию в полярной форме:

$$\bar{F}(\omega) = F(\omega) e^{j\Phi(\omega)}.$$

$F(\omega) = |\bar{F}(\omega)|$ - модуль спектральной функции называется амплитудным спектром. $\Phi(\xi)$ - аргумент спектральной функции - фазовым спектром. Вычислительные процедуры представлены соотношениями (1.12), (1.13).

Для непрерывного спектра амплитудный спектр требует уточнения. Комплексная амплитуда в выражении (2.1) на конкретной частоте

$$d\bar{A}_\omega = \frac{1}{2\pi} \bar{F}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega e^{j\Phi(\omega)} = dA_\omega e^{j\Phi(\omega)}.$$

Амплитуда на конкретной частоте является бесконечно малой

$$dA_\omega = \frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega.$$

Главное для амплитудного спектра - это зависимость амплитуды от частоты, что полностью описывается функцией $F(\omega)$. Из (2.5) видно, функция $F(\omega)$ имеет смысл амплитудной спектральной плотности. Аргумент $\Phi(\omega)$ имеет смысл начальной фазы гармонического колебания с частотой ω , поэтому фазовый спектр особенностей не имеет и сохраняет свой обычный смысл.

Из (2.2) следует: $\bar{F}(-\omega) = \bar{F}^*(\omega)$. Применяв эту операцию к (2.4) получаем

$$F(-\omega) = F(\omega), \quad \Phi(-\omega) = -\Phi(\omega).$$

Отсюда следует, что амплитудный спектр является четной функцией частоты, а фазовый спектр - нечетной функцией частоты. Пример спектрального анализа сигнала приведен в таблице 2.1.

Используя (2.4), интеграл Фурье (2.1) можно записать только для положительных частот:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F(\omega) e^{j[\omega t + \Phi(\omega)]} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega) e^{j[\omega t + \Phi(\omega)]} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{ F(\omega) e^{j[\omega t + \Phi(\omega)]} + F(-\omega) e^{j[-\omega t + \Phi(-\omega)]} \} d\omega. \end{aligned}$$

Таблица 2.1 Одиночный симметричный импульс и его непрерывный спектр.

3. СПЕКТР ОТКЛИКА ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Как уже говорилось, для сигнала существуют две математические модели: функция времени и функция частоты (спектр). Модели взаимосвязаны преобразованиями Фурье. Выбор модели определяется решаемой задачей.

Если требуется найти отклик линейной стационарной цепи, на входе которой действует известный сигнал, то преимущество имеет частотный подход, когда сигналы задаются своими спектрами, а линейная цепь полностью определяется комплексным коэффициентом передачи $\bar{K}(\omega)$. Спектр выходного сигнала (отклика) связан со спектром входного (воздействующего) сигнала линейной алгебраической зависимостью: - для дискретного спектра $\bar{A}_{2n} = \bar{K}(n\omega_1) \bar{A}_{1n}$; - для непрерывного спектра $\bar{F}_2(\omega) = \bar{K}(\omega) \bar{F}_1(\omega)$. Комплексный коэффициент передачи линейной цепи:

$$\bar{K}(\omega) = \frac{\bar{A}_{2\omega}}{\bar{A}_{1\omega}}.$$

$\bar{A}_\omega$ - комплексная амплитуда на частоте ω (индекс ω обычно опускается). Индекс 1 традиционно относится к входному сигналу, индекс 2 - к выходному. Комплексный коэффициент передачи в полярной форме:

$$\bar{K}(\omega) = K(\omega) e^{j\Phi_K(\omega)}.$$

$\bar{A}_\omega$ - комплексная амплитуда на частоте ω (индекс ω обычно опускается). Индекс 1 традиционно относится к входному сигналу, индекс 2 - к выходному. Комплексный коэффициент передачи в полярной форме:

$$\bar{K}(\omega) = K(\omega) e^{j\Phi_K(\omega)}.$$

$K(\omega)$ -модуль комплексного коэффициента передачи. Он равен отношению выходной амплитуды гармонического сигнала к входной и называется амплитудным коэффициентом передачи. Зависимость амплитудного коэффициента передачи от частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) цепи. $\Phi_K(\omega)$ - аргумент комплексного коэффициента передачи представляет сдвиг фаз, вносимый цепью. Зависимость сдвига фаз от частоты называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) цепи. Если известна принципиальная схема цепи, частотные характеристики можно рассчитать, например, методом комплексных амплитуд. Частотные характеристики можно измерить экспериментально.

Возвращаясь к (3.1), (3.2), видим, что поиск спектра выходного сигнала сводится к перемножению двух комплексных функций. Как следствие, амплитудный спектр выходного сигнала есть результат перемножения амплитудного спектра входного сигнала и АЧХ линейной цепи

$$\begin{aligned} A_{2n} &= K(n\omega_1) A_{1n}; \\ F_2(\omega) &= K(\omega) F_1(\omega); \end{aligned}$$

а фазовый спектр выходного сигнала представляет сумму фазового спектра входного сигнала и ФЧХ линейной цепи

$$\begin{aligned} \Phi_{2n} &= \Phi_K(n\omega_1) + \Phi_{1n}; \\ \Phi_2(\omega) &= \Phi_K(\omega) + \Phi_1(\omega). \end{aligned}$$

Если появляется необходимость изменить спектр сигнала, соотношения (3.1), (3.2) показывают, какую линейную цепь с требуемыми частотными характеристиками надо синтезировать. В частности, это осуществляется при построении частотных фильтров [1

- 3, 6 - 9]. Простота и фундаментальность алгебраических соотношений (3.5) - (3.8) привела к тому, что многие радиоспециалисты предпочитают анализировать обработку сигналов частотными методами, а не временными, когда приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями или с интегралом Дюамеля [2]. Поэтому соотношения (3.5) и (3.6) часто называют «Основным соотношением линейной радиотехники».

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Из теории рядов Фурье известно равенство Парсеваля для тригонометрического ряда Фурье

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

для комплексного ряда Фурье

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{A}_n A_n^*$$

Если сигнал представлен в форме спектрального разложения (1.8), равенство Парсеваля принимает вид:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t) dt = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

Левая часть равенства Парсеваля представляет среднюю за период мощность периодического сигнала. В правой части равенства средняя за период мощность выражается через амплитудный спектр. Легко проверить, что средняя за период мощность гармонического сигнала:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(\omega t + \Phi) dt = \frac{1}{2} A^2.$$

Из равенства Парсеваля следует, что средняя за период мощность сигнала равна мощности постоянной составляющей плюс сумма средних мощностей гармоник

$$\langle P \rangle = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle P_n \rangle.$$

Для сигнала с непрерывным спектром аналогом равенства Парсеваля является равенство Рэлея:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega) \bar{F}^*(\omega) d\omega.$$

Энергия сигнала (В.1) определяется амплитудным спектром. С учетом четности амплитудного спектра равенство Рэлея принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F^2(\omega) d\omega.$$

Энергию вещественного сигнала можно найти, если известен либо сигнал во времени, либо его физический амплитудный спектр [1 -3].

И там еще много теории, которая вообще не усвоена

Потому что вот косяк, потом доделаю это.

14.5.6 Schwartz Space $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ and Fourier Transform

Обсудим, какие пространства функций переводятся преобразованием Фурье в себя.

Определение пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ - это пространство бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, у которых конечны все полунормы $(k, n \geq 0)$

$$\|f\|_{n,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^n f^{(k)}(x) \right|.$$

функция $e^{-x^2/2}$ лежит в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Проверьте, что функция $e^{-x^2/2}$ лежит в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Стремление в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Последовательность (f_m) функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ стремится к f_0 , если Для любых $n, k \geq 0$

$$\|f_m - f_0\|_{n,k} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

Можно определить и топологию на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, объявив предбазовыми открытыми окрестностями множества

$$U_{n,k,\varepsilon}(f_0) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \|f - f_0\|_{n,k} < \varepsilon\}$$

и объявив открытыми множества, получающиеся из них операциями конечного пересечения и произвольного объединения.

Теорема

87.

Преобразование Фурье непрерывно переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Доказательство.

Заметим, что $\sup |F[f]|$ ограничен $\|f\|_1$ с точностью до константы.

Также заметим, что

$$\|f\|_1 \leq \pi (\|f\|_{0,0} + \|f\|_{2,0})$$

так как если $|f| \leq M$ и $|x^2 f| \leq N$ всюду, то $(1 + x^2) |f| \leq M + N$ и интеграл от $|f|$ не более $M + N$, умноженного на интеграл от $\frac{1}{1+x^2}$, который равен π .

Таким образом мы можем ограничить $\|F[f]\|_{0,0}$ в терминах полунорм исходной функции f .

Если же нас интересует супремум выражения вида

$$y^n \frac{d^k}{dy^k} F[f]$$

то по теоремам о производной преобразования Фурье и преобразовании Фурье производной, это выражение с точностью до константы является преобразованием Фурье от

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^k f(x))$$

Заметим, что по формуле Лейбница имеет место выражение

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^k f(x)) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (n-m)! \binom{k}{n-m} x^{k-n+m} \frac{d^m f}{dx^m},$$

конкретные константы в котором нас не очень интересуют.

Все слагаемые в правой части ограничены как нормы $\|f\|_{k-n+m,m}$ и даже ограничены после умножения на x^2 , следовательно их интегралы тоже ограничены.

В итоге мы будем иметь оценку типа (с некоторыми другими коэффициентами)

$$\|F[f]\|_{n,k} \leq \sum_{k' \leq k+2, n' \leq n} C_{k',n',k,n} \|f\|_{k',n'}$$

которая доказывает определённую преобразование Фурье как линейного отображения $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Эта оценка также доказывает и непрерывность преобразования Фурье, так как если $\|f_m - f_0\|_{n,k} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и любых n и k , то также $\|F[f_m] - F[f_0]\|_{n,k} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и любых n и k .

Карасев.з.

88.

Проверьте непрерывность преобразования Фурье на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ по Коши - что для всякой предбазовой окрестности $U \ni F[f_0]$ найдётся предбазовая окрестность $V \ni f_0$, такая что $F(V) \subseteq U$.

14.5.7 Unitarity of the Fourier Transform

Равенство Парсеваля

Для функций $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место унитарность преобразования Фурье

$$(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g)$$

где скалярное произведение для комплекснозначных функций есть $(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$.

Доказательство.

Запишем по определению $\hat{f}$ и используя тот факт, что в силу быстрого убывания участвующих в формулах функций применима теорема Фубини,

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \overline{\hat{g}(y)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} \overline{g(y)} dx dy$$

Проинтегрировав по y , получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

О других видах

О следствиях и применениях равенства Парсеваля (!?!?!?)

(тоже укажу, вроде полезное.)

Применение равенства Парсеваля для вычисления сумм (??)

(Олег говорил, я хз)

Продолжение преобразования Фурье

Из этой теоремы следует, что преобразование Фурье продолжается до унитарного оператора $F : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$.

Действительно, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$ (так как в L_2 всякую функцию можно сколь угодно хорошо приблизить гладкими с компактными носителями), и всякая фундаментальная в L_2 -норме последовательность функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ переводится преобразованием Фурье в фундаментальную последовательность по теореме.

Следовательно, это преобразование корректно продолжается до замыкания $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, то есть до всего $L_2(\mathbb{R})$ (мы используем при этом его полноту).

Заметим, что преобразование Фурье функций из L_2 построено весьма неявно и совершенно неочевидно, что его вообще можно задать явно.

вообще $L_2(\mathbb{R}) \not\subset L_1(\mathbb{R})$ и поэтому даже сходимость интеграла в определении преобразования Фурье находится под вопросом.

Однако, как уже было упомянуто в связи с рядами Фурье, А. Карлесон (1966) доказал, что явные формулы преобразования Фурье работают для функций из $L_2(\mathbb{R})$ для почти всех значений аргумента.

Соотношение неопределённостей для преобразования Фурье

Для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и любых двух чисел $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\|(x - x_0) f(x)\|_2 \cdot \|(y - y_0) \hat{f}(y)\|_2 \geq \frac{1}{2} \|f\|_2^2$$

Выясните, в каком случае выполняется равенство. её преобразованием Фурье.

Доказательство (??)

Сдвигом $\hat{f}(y)$ на $-y_0$ сведите к случаю $y_0 = 0$.

В этом частном случае с помощью теоремы 8.89 перепишите неравенство в виде

$$\|x f(x)\|_2 \cdot \|f'\|_2 \geq \frac{1}{2} \|f\|_2^2$$

и докажите его с помощью неравенства Коши-Буняковского.

Для анализа случая равенства вспомните условия равенства в неравенстве Коши-Буняковского.

||

Формула суммирования Пуассона

Докажите для функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ формулу

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

Доказательство (??)

||

Рассмотрите 2π -периодическую функцию

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n),$$

разложите её в ряд Фурье и обоснуйте его сходимость к g .

О применениях (??)

(просто вроде укажу в 1 части, что такое вот есть. но пока не решал на это задачи, нужно тренироваться. не знаю, когда такое применять нужно?)

Критерий неотрицательности преобразования Фурье (??)

Преобразование Фурье функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ неотрицательно тогда и только тогда, когда для всякой конечной последовательности чисел $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ матрица

$$(f(x_i - x_j))_{i,j=1}^n$$

эрмитова и неотрицательно определена.

||

Рассмотрите выражение $\sum_{i,j=1}^n f(x_i - x_j) y_i \bar{y}_j$ и выразите его в терминах $\hat{f}$.

14.6 Other about Fourier Integrals**14.6.1 Fourier Series and Integral at Discontinuity Points of the 1st Kind and Gibbs Phenomenon****Теория (???)**

Для функции f одной переменной с разрывом первого рода в точке x остаётся возможность, что ряд Фурье или интеграл Фурье будут сходиться к среднему значению между пределами

$$M_f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Действительно, нетрудно преобразовать выражение свёртки с ядром Дирихле для частичной суммы ряда Фурье в (сумма по двум вариантам выбора знака)

$$T_n(f, x) - M_f(x) = \sum_{\pm} \int_0^{\pi} (f(x \pm \xi) - f(x \pm 0)) D_n(x) dx$$

и анализировать его также, как в случае сходимости к значению функции.

Например выполнение условия Гёльдера для разрывной функции в окрестности точки разрыва x в виде

$$|f(x \pm \xi) - f(x \pm 0)| \leq C|\xi|^\alpha$$

с положительными C и α , гарантирует сходимость ряда Фурье к $M_f(x)$ в точке x .

Очевидно, что сходимость к разрывной функции не может быть равномерной.

На самом деле мы можем более детально изучить характер этой неравномерности.

(? и какой он?)

Представление функции $\operatorname{sgn}(x)$ интегралом Фурье

Рассмотрим представление функции $\operatorname{sgn}(x)$ интегралом Фурье

$$\operatorname{sgn} x = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xy}{y} dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^R \frac{\sin xy}{y} dy.$$

Функцию f с разрывом первого рода в некоторой точке можно представить как сумму сдвинутой и умноженной на константу $\operatorname{sgn} x$ и непрерывной в точке функции g , поэтому результат анализа $\operatorname{sgn} x$ будет применим к такой функции тоже. Считаем, что g достаточно прилично ведёт себя в окрестности точки и удовлетворяет одному из достаточных условий сходимости интеграла Фурье в точке.

Фурье представление тета-функции Хевисайда

(типичный пример)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n a_n \sin nx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nxdx = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{if } n \text{ odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ f(x) &= \sum_{n=1} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x \end{aligned}$$

Явление Гиббса

(потом посмотрю еще раз вывод)

Обозначим

$$S(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta} \frac{\sin t}{t} dt$$

Эта функция стремится к 1 при $\eta \rightarrow +\infty$ (так как это интеграл Дирихле), но её максимум должен достигаться в одной из точек, где её производная равна нулю - это точки πk при $k \in \mathbb{N}$.

Так как интегралы

$$\int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \frac{\sin t}{t} dt$$

меняют знак и по модулю убывают с ростом k , то на самом деле максимум достигается при $k = 1$ и он больше всего несобственного интеграла от $0_{\text{до}} + \infty$.

Это означает, что $S(\pi) = 1 + G$ при некотором $G > 0$ (в качестве упражнения можно оценить эту величину).

Теперь запишем

$$\operatorname{sgn} x = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^R \frac{\sin xy}{y} dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} S(Rx)$$

Отсюда следует, что «частичный интеграл Фурье» в точках π/R принимает значение $1 + G$, то есть вылезает за область значений $\operatorname{sgn} x$ на G при всех значениях R , это называется явление Гиббса.

С помощью более сложных выкладок можно обнаружить и явление Гиббса для функции $\operatorname{sgn} x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и её ряда Фурье.

При суммировании ряда Фурье по Фейеру явление Гиббса отсутствует

При суммировании ряда Фурье по Фейеру явление Гиббса отсутствует, то есть при нахождении значений функции в выпуклом компакте $Y \subset \mathbb{C}$ значения её сумм Фейера не выходят за пределы Y .

(?? типичное утверждение, а как доказать?)

||

Используйте неотрицательность ядра Фейера.

||

14.6.2 Multidimensional Fourier Integral and Gaussian Densities

для интеграла Фурье можно определить его многомерный вариант по формулам (. обозначает скалярное произведение):

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{ix \cdot y} dy$$

$$c(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} dx.$$

В этом разделе мы дадим некоторые достаточные условия на функцию f , чтобы она представлялась интегралом Фурье по приведённой формуле.

Сравнивая эту формулу с одномерным вариантом, следует отметить, что интеграл в смысле главного значения тоже можно было бы определить и использовать в многомерном случае.

Однако уже не вполне ясно, следует ли брать интеграл по шарам и устредлять их радиус к бесконечности, или по кубам с центром в начале координат и устредлять их размер к бесконечности.

Кубы привели бы к формуле многомерного ядра Дирихле как произведения одномерных, поведение которых нам понятно; но при этом определение с помощью кубов не инвариантно относительно вращений и поэтому неестественно.

Мы просто будем предполагать, что обе функции f и c являются абсолютно интегрируемыми, чтобы избавиться от этих трудностей.

Начнём изучение сходимости многомерного интеграла Фурье с примера, который на самом деле будет инструментом для разбора более общего случая.

Интеграл Фурье для многомерной гауссовой плотности

При любом $\alpha > 0$ имеет место формула

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|^2/2 - ix \cdot y} dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\alpha^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{2\alpha}}$$

Доказательство.

Одномерный вариант этого утверждения при $\alpha = 1$ доказан в лемме 8.79, случай произвольного положительного α следует из замены переменных $u = \sqrt{\alpha}x$.

В n -мерном случае мы воспользуемся теоремой Фубини и тем фактом, что

$$e^{-\alpha|x|^2/2 - ix \cdot y} = \prod_{k=1}^n e^{-\alpha x_k^2/2 - ix_k y_k}$$

что сводит n -мерный интеграл к произведению одномерных.

Достаточное условие сходимости многомерного интеграла Фурье

Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ непрерывна в точке x , а функция $c(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} dx$ тоже оказалась в $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Тогда

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{ix \cdot y} dy$$

Доказательство.

Рассмотрим выражение

$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{ix \cdot y - \alpha|y|^2/2} dy$$

По теореме об ограниченной сходимости 5.70, так как $c(y)$ в $L_1(\mathbb{R}^n)$, это выражение

$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{ix \cdot y - \alpha|y|^2/2} dy$$

По теореме об ограниченной сходимости 5.70, так как $c(y)$ в $L_1(\mathbb{R}^n)$, это выражение стремится к

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{ix \cdot y} dy$$

при $\alpha \rightarrow +0$ и мы должны доказать, что на самом деле $f_0(x) = f(x)$.

Подставим в формулу для $f_\alpha(x)$ определение $c(y)$:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i\xi \cdot y} e^{ix \cdot y - \alpha|y|^2/2} d\xi dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i(\xi - x) \cdot y - \alpha|y|^2/2} d\xi dy.$$

Модуль подынтегрального выражения оценивается $|f(\xi)| e^{-\alpha|y|^2/2}$, значит оно интегрируемо и можно менять порядок интегрирования.

Тогда по лемме 8.94 после интегрирования по y получим

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-\frac{|\xi - x|^2}{2\alpha}} d\xi$$

Это значит, что $f_\alpha(x)$ является свёрткой f с гауссовой плотностью

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{n/2}} e^{-\frac{|t|^2}{2\alpha}}$$

Нетрудно проверить (через интеграл Пуассона и замену переменных), что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha(t) dt = 1$$

а при всяком $\delta > 0$

$$\int_{|t| \geq \delta} \varphi_\alpha(t) dt = \int_{|x| \geq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}} \varphi_1(x) dx \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow +0$$

и

$$\sup_{|t| \geq \delta} \varphi_\alpha(t) = \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{n/2}} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow +0.$$

Из непрерывности f в точке x мы, для любого $\varepsilon > 0$, можем найти $\delta > 0$, такое что

$|f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$ при $|t| \leq \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+t) - f(x)) \varphi_\alpha(t) dt = \\ &= \int_{|t| \leq \delta} (f(x+t) - f(x)) \varphi_\alpha(t) dt + \int_{|t| \geq \delta} f(x+t) \varphi_\alpha(t) dt - \int_{|t| \geq \delta} f(x) \varphi_\alpha(t) dt \end{aligned}$$

Первый интеграл по модулю оценивается как ε , второй как

$$\|f\|_1 \cdot \sup_{|t| \geq \delta} \varphi_\alpha(t)$$

а третий как

$$|f(x)| \cdot \int_{|t| \geq \delta} \varphi_\alpha(t) dt$$

Последние две оценки при $\alpha \rightarrow +0$ стремятся к нулю, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и вся разность $f_\alpha(x) - f(x)$ стремится к нулю при $\alpha \rightarrow +0$.

Многомерная лемма Римана об осцилляции

докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то интегралы

$$c(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} dx$$

стремятся к нулю при $|y| \rightarrow +\infty$.

||

Аналогично одномерному случаю, приблизьте функцию в среднем гладкой функцией с компактным носителем.

Для гладкой функции с компактным носителем воспользуйтесь формулой

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} dx = \int_{\mathbb{R}^n} df_x(y) \frac{e^{-ix \cdot y}}{i|y|^2} dx.$$

||

Критерий абсолютной интегрируемости $c(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} dx$

докажите, что существование у f производных до $n+1$ порядка, лежащих в $L_1(\mathbb{R}^n)$, достаточно для абсолютной интегрируемости $c(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} dx$.

||

Интегрируя по частям по разным переменным аналогично одномерному случаю в теореме 8.78, выведите из существования $(n+1)$ -ых производных у f тот факт, что $P(y)c(y)$ стремится к нулю на бесконечности для любого многочлена $P(y)$ степени не более $n+1$. ||

Карасев.3.

98.

Найдите преобразование Фурье функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f = e^{-Q(x)}$, где $Q(x)$ положительно определённая квадратичная форма.

||

Аккуратно сделайте замену переменных $x = S'y$ и вспомните, какая замена переменных y будет ей соответствовать.

||

Карасев.3.

99.

* Найдите преобразование Фурье функции $e^{-|x|}$ на $\mathbb{R}^n$.

||

Рассмотрите меры с плотностями $\rho_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \rho_n(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$.

Заметьте, что при проекции мер $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ (то есть при интегрировании плотностей по одной координате) ρ_n переходит в $B(1/2, n/2)\rho_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi\gamma(n/2)}}{\gamma(\frac{n+1}{2})}\rho_{n-1}$.

Это позволит заключить, что преобразование Фурье f_n с точностью до некоторой явной константы можно выразить через одномерное преобразование Фурье $\rho_1 = \frac{1}{1+x^2}$.

||

14.6.3 2D Fourier transforms

О приложениях в оптике (!??!)

(в оптике например нужно, укажу потом.)

О других приложениях (!??!)

(в оптике например нужно, укажу потом.)

14.6.4 Overview of Applications of the Fourier Transform

О приложениях в квантовой механике (?)

О переходе в импульсное представление

(тут очень важно наработать вычисление преобр фурье! оттренирую - потом впишу.)

14.6.5 Convolution

Обсудим подробно свойства свертки.

Определение**Канонические примеры (!?)**

(скоро их добавлю сюда, но вообще, в каталоге задач все про них!)

14.6.6 Space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ and the Connection of Convolution with the Fourier Transform

Сделав коэффициенты в формулах для коэффициента Фурье и интеграла Фурье одинаковыми, мы получим более симметричный вариант преобразования Фурье.

Определение

Определение 8.100.

Преобразование Фурье функций n переменных задаётся по формуле

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-iy \cdot x} dx$$

обратное преобразование Фурье функций n переменных задаётся по формуле

$$\tilde{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{iy \cdot x} dx$$

Будем обозначать их как операторы F и F^{-1} . Заметьте, что иногда в литературе несимметрично определяют преобразование Фурье с коэффициентом 1, а обратное преобразование Фурье - с коэффициентом $(2\pi)^{-n}$.

Как и в одномерном случае, удобно определить пространство функций, которое переводится преобразованием Фурье в себя.

Определение..

Определение 8.101.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из функций в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых конечны следующие полунормы.

Для всех неотрицательных целых векторов k, n длины n определим полунормы $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как

$$\|f\|_{n,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^k \frac{\partial^{|n|} f}{\partial x^n} \right|$$

Здесь для точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ и вектора неотрицательных целых чисел $k = (k_1, \dots, k_n)$ используется обозначение

$$x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

и аналогичное обозначение для частных производных.

Из определения ясно, что операции взятия частной производной и умножения на координатную функцию x_i переводят $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя.

Полезные свойства пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ устанавливаются аналогично одномерному случаю и представлены в виде задач.

Карасев.з.

102.

Докажите, что преобразование Фурье функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ можно представить как композицию преобразований Фурье по каждой переменной и что преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя.

||

Интегрируйте в определении преобразования Фурье последовательно по переменным x_i . образование Фурье производной.

||

Продолжение преобразования Фурье из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$

Докажите, что преобразование Фурье $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ продолжается до унитарного оператора $F : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$.

||

Установите унитарность на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как в одномерном случае.

Заметьте, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и продолжите операцию F с помощью фундаментальных в норме $\|\cdot\|_2$ последовательностей элементов $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Следующая теорема связывает свёртку с преобразованием Фурье и даёт крайне полезный на практике способ вычисления свёртки (с помощью быстрого дискретного преобразования Фурье).

Доказательство без труда проводится для произвольной размерности, хотя и её одномерный случай очень полезен.

Теорема о свертке

Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, рассмотрим их свёртку $h = f * g \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$. Этот интеграл почти всюду существует по теореме Фубини. Тогда

$$\hat{h}(y) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(y) \hat{g}(y)$$

Доказательство.

Запишем определение преобразования Фурье h и подставим в него определение свёртки:

$$\hat{h}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)e^{-ix \cdot y} dt dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(t)e^{-iu \cdot y - it \cdot y} du dt,$$

где сделана замена переменных $(x, t) \rightarrow (x-t, t) = (u, t)$ с единичным детерминантом.

К полученному выражению применима теорема Фубини:

$$\hat{h}(y) = (2\pi)^{n/2} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-iu \cdot y} du \right) \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(t)e^{-it \cdot y} dt \right) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(y) \hat{g}(y)$$

О свойствах свертки

Докажите, что для двух функций $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ свёртка $h = f * g$ определена, и $h(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

||

Используйте неравенство Коши-Буняковского и приближение функций в $L_2(\mathbb{R})$ бесконечно гладкими с компактными носителями.

||

Преобразование Фурье функции вида треугольник (?!?!?!?)

Найдите преобразование Фурье функции одной переменной

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

||

Заметьте, что $f = g * g$, где

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| \geq 1/2 \end{cases}$$

||

Карасев.з.

107.

Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой.

Докажите, что свёртка $\underbrace{f * \dots * f}_{k+2}$ будет k раз непрерывно дифференцируема.

||

Посмотрите на порядок убывания коэффициентов Фурье свёртки.

||

Карасев.з.

108.

Пусть M - ориентированное многообразие, $\nu \in \Omega_c^n(M)$ - некоторая форма с компактным носителем, а $\varphi \in C^\infty(M)$ - фазовая функция.

Докажите, что интеграл с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)} \nu$$

при $t \rightarrow +\infty$ с точностью до быстро убывающих (быстрее любой степени t) слагаемых определяется значениями подинтегрального выражения в произвольно малой окрестности множества критических точек φ , то есть точек, где $d\varphi_x = 0$.

||

Для окрестности V множества критических точек φ рассмотрите компакт и сделайте разбиение единицы для $\text{supp } \nu \setminus V, \rho_1 + \dots + \rho_N \equiv 1$ так, чтобы в окрестности носителя каждой ρ_i функцию φ можно было бы выбрать за одну из координат.

Потом по теореме Фубини начните интегрирование слагаемого $\rho_i e^{it\varphi} \nu$ с этой координаты и в интеграле по этой координате сделайте преобразования типа:

$$\int a(\varphi) e^{it\varphi} d\varphi = \frac{i}{t} \int a'(\varphi) e^{it\varphi} d\varphi = \frac{i^2}{t^2} \int a''(\varphi) e^{it\varphi} d\varphi = \dots$$

||

Карасев.з.

109.

** В том же интеграле с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)} \nu$$

быстро убывающих слагаемых при $t \rightarrow +\infty$.

||

Примените лемму Морса 6.38 к φ , потом в соответствующих координатах рассмотрите $e^{it\varphi}$ как элемент $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, примените к нему преобразование Фурье и разложите по степеням $\frac{1}{t}$.]

15 Areas, Volumes, Multidimensional Integrals (!!!)

(пока очень плохо раздел сделан, очень очень слабо, почти им не занимался, потом доделаю!)

15.0.1 Fubini's Theorem and Linear Substitution of Variables in an Integral

Рассмотрим теперь теорему, позволяющую сводить вычисление интеграла функции нескольких переменных к последовательным вычислениям интеграла по одной переменной.

Теорема Фубини

Пусть функция $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на произведении интегрируемых множеств.

Тогда

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy = \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx$$

и в частности интеграл в скобках справа существует при почти всех $x \in X$ и является измеримой функцией от $x \in X$.

Идея доказательства.

(??? здесь сперва напишу, в чем идея его???)

Доказательство.

Продолжив функцию нулём, будем считать $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$, тогда в выражении справа функция тоже продолжается нулём и ничего не меняется.

Докажем сначала теорему для борелевских неотрицательных функций, для которых левая часть и внутренний интеграл в правой части определены.

Из доказательства теоремы 5.46 следует, что всякую неотрицательную функцию можно представить в виде суммы счётного числа неотрицательных ступенчатых.

Действительно, сначала можно вычесть из функции неотрицательную ступенчатую так, чтобы остаток был в диапазоне $[0, 1]$.

Потом можно вычесть неотрицательную ступенчатую так, чтобы остаток был в диапазоне $[0, 1/2]$, потом $[0, 1/4]$ и т.д. Заметим, что все ступеньки при этом будут борелевскими.

Так как и интеграл слева в формуле и повторный интеграл справа обладают свойством счётной аддитивности, то это сводит доказательство к характеристической функции борелевского множества.

Посмотрим, что можно сказать о характеристической функции борелевского множества.

Если это множество параллелепипед, то утверждение очевидно (проверьте!).

Если множество открытое, то его можно представить в виде объединения счётного числа элементарных параллелепипедов, таким образом теорема опять последует из счётных и теорема последует из аддитивности.

далее Δ, Δ произвольного борелевского интеграла, применённой несколько раз.

Заметим, что внешний интеграл в правой интегральное выражение в виде поточечного предела возрастающей последовательности неотрицательных функций, каждый раз удостоверяя его борелевость.

Если функция не постоянного знака с конечным интегралом, то теорема 5.53 позволяет свести утверждение к знакопостоянному случаю.

Если же функция не борелевская, то теореме также можно свести к случаю характеристической функции измеримых множества меры нуль, интеграл в скобках справа может не быть определён.

По теореме 5.33 после вычитания борелевского множества доказательство сведётся к характеристической функции множества меры нуль.

Остаётся разобрать случай, когда $f(x, y)$ есть характеристическая функция множества меры нуль.

По теореме 5.20 приблизим это множество сверху открытыми множествами, у которых меры стремятся к нулю.

В терминах характеристических функций пусть это означает $0 \leq f(x, y) \leq g_k(x, y)$, мы также можем считать, что $g_k(x, y)$ убывает с ростом k , пересекая следующее открытое множество в последовательности с предыдущими.

для g_k формула уже доказана и мы получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \left(\int_Y g_k(x, y) dy \right) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} g_k(x, y) dx dy = 0$$

Переставив пределы со знаком интеграла по теореме об ограниченной сходимости получим

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_Y g_k(x, y) dy \right) dx = 0.$$

Выходит, что у нас есть интегрируемая функция

$$G(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_Y g_k(x, y) dy \right)$$

и её интеграл равен нулю.

По теореме 5.56 это означает, что она отличается от нуля только на множестве меры нуль $\Sigma \subset X$.

На множестве $X \setminus \Sigma$ она равна нулю, а из неравенства $0 \leq f(x, y) \leq g_k(x, y)$ следует в пределе, что для фиксированного $x \in X \setminus \Sigma$ функция $f(x, y)$ интегрируема по y и её интеграл равен нулю.

Это верно для почти всех x , следовательно, повторный интеграл для f тоже будет равен нулю.

О важности измеримости в теореме Фубини

Заметим, что именно измеримость нужна.

(мб контрпример добавлю, когда нельзя это сделать, потому что пока что это выглядит, будто тупо всегда и чем вообще мы занимаемся? если она не измерима, так как интеграл вообще может существовать?)

О применениях теоремы Фубини (?????)

На практике теорема Фубини применяется по следующей схеме.

Если мы рассматриваем измеримую функцию $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ и хотим понять применимость к ней теоремы Фубини, то сначала мы применяем теорему Фубини к функции $|f|$ и вычисляем (или оцениваем) значение повторного интеграла, для него по теореме Фубини (в случае неотрицательных функций) выполняется

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| dy \right) dx = \int_{X \times Y} |f(x, y)| dx dy$$

Если этот интеграл оказался конечен, то значит теорема Фубини применима и к функции без модуля, и значит её интеграл можно считать как повторный в любом порядке.

Об измеримости декартова произведения измеримых множеств

Если множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо и $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ измеримо, то $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ тоже измеримо и

$$\mu(X \times Y) = \mu(X) \cdot \mu(Y)$$

Менее тривиально, мы получаем способ найти меру множества $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, ии мы знаем меры его сечений

$$Z_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in Z\}$$

Тогда теорема Фубини, утверждает, что при почти всех x множество Z_x измеримо и

$$\mu Z = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_Z(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_Z(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mu Z_x dx.$$

пример, когда повторные интегралы по x, y и y, x существуют, но интеграл функции двух переменных не существует (???)

Приведите пример, когда повторные интегралы функции двух переменных в обоих порядках x, y и y, x существуют, но интеграл функции двух переменных не существует.

||

Вспомните, что интеграл Лебега от функции f абсолютный, то есть подразумевает существование интеграла от $|f|$, пример можно построить даже не для интеграла, а для повторного суммирования ряда.

||

Теорема о сведении интеграла по множеству к одномерному интегралу (???)

Пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна и измерима.

Обозначим $g(y) = \mu\{x \in X : f(x) \geq y\}$.

Тогда

$$\int_X f(x) dx = \int_0^{+\infty} g(y) dy.$$

Оно сводит интеграл от любой функции к интегралу от функции одной переменной.

(??? что??)

Доказательство.

Рассмотрим множество $S_f \subset X \times [0, +\infty)$, состоящее из пар (x, y) , таких что $0 \leq y \leq f(x)$.

Если функция ступенчатая, $f = \sum_i c_i \chi_{X_i}$, то её множество S_f представляется в виде

$$S_f = \bigcup_i X_i \times [0, c_i]$$

и следовательно измеримо.

Произвольную измеримую f можно по теореме 5.46 представить в виде поточечного предела убывающей последовательности ступенчатых, $f_k \rightarrow f$, и тогда

$$S_f = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{f_k}$$

окажется измеримым.

Применяя теорему Фубини в порядке (x, y) и в порядке (y, x) к характеристической функции этого множества, получаем равенство двух выражений из формулировки теоремы.

Обратите внимание, что множество S_f (подграфик функции) в доказательстве теоремы измеримо и его мера равна интегралу функции.

Это объясняет интерпретацию интеграла, как «площади под графиком».

Теорема о линейной замене переменных в интеграле Лебега

Для интегрируемой $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и линейного преобразования $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ выполняется:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) dx$$

Это следует из теоремы Фубини. (??)

Есть же общий случай (??)

Доказательство.

Рассмотрим для начала элементарную замену $y = Ax$, при которой ($j \neq k$)

$$\forall i \neq j, y_i = x_i \text{ и } y_j = x_j + a_{jk} x_k$$

Без ограничения общности, пусть $j = 1$, тогда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \right) dy_2 \dots dy_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 + a_{1k}x_k, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(y(x)) dx, \end{aligned}$$

При переходе от переменной y_1 к переменной x_1 в интеграле мы использовали только то, что при фиксированных остальных переменных эти две переменные отличаются сдвигом, а мера и интеграл Лебега очевидно инвариантны относительно сдвига.

Мы доказали утверждение для элементарных отображений, при них интеграл не меняется.

Воспользуемся фактом из линейной алгебры, что всякое линейное преобразование является композицией элементарных преобразований, перестановок координат и диагонального преобразования.

Это следует из того, что имея невырожденную матрицу, можно сделать её единичной с помощью перестановки строк, умножения строк на ненулевые числа, и прибавления кодовой строки другой, умноженной на число (метод Гаусса).

Все эти операции можно понимать как умножение исходной матрицы слева на матрицы перестановки, диагональные матрицы или элементарные матрицы, поэтому в итоге (так как обратные к элементарным тоже элементарные) исходная матрица будет представлена в виде произведения таких матриц.

Также важно, что детерминант произведения равен произведению детерминантов (некоторые сведения про это имеются в разделе 6.9), а значит утверждение теоремы достаточно доказывать для тех отображений, в произведение которых разложено исходное.

Перестановки координат очевидно не меняют меру Лебега и интеграл.

Для диагонального преобразования $y_i = a_i x_i$ меры элементарных параллелепипедов умножаются на $|\det A| = |a_1 \dots a_n|$, а значит и на всех этапах определения меры Лебега все меры умножаются на $|\det A|$.

Из этого следует требуемая формула.

Заметим, что в этом рассуждении можно было делать и замены переменных вида $y_1 = x_1 + f(x_2, \dots, x_n)$ для некоторой непрерывной (или даже борелевской) функции f от $n - 1$ переменной.

Развитие этой идеи приводит к доказательству теоремы о произвольной гладкой замене переменных в интеграле, теоремы 6.98.

15.0.2 the Volume of the Ball, the Poisson Integral, Elementary Properties of Gamma and Beta Functions (!!!)

(!! крутая тренировка!!)

Теорема об объёме шара и интеграл Пуассона (!!!!)

(скоро проработаю!!)

Рассмотрим единичный шар

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

Тогда

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \mu B_n \cdot \Gamma(n/2 + 1)$$

где $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию $f_n(x) = e^{-|x|^2} = e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}$. По теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2} dx_n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^n$$

То есть интеграл от f_n равен I^n , где $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^n$.

С другой стороны, по теореме о сведении интеграла по множеству к одномерному интегралу

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \dots dx_n = \int_0^1 \mu \{ |x|^2 \leq -\ln y \} dy.$$

Множество $\{ |x|^2 \leq -\ln y \}$ является шаром радиуса $r = \sqrt{-\ln y}$, его мера равна $r^n \mu B^n$ по теореме о линейной замене переменных.

Значит

$$I^n = \mu B^n \int_0^1 (-\ln y)^{n/2} dy.$$

В интеграле по одной переменной можно сделать замену $-\ln y = t$, в этом случае на ограниченных отрезках функция непрерывна, интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана и замена разрешена, потом можно перейти от интегралов по отрезкам к интегралу по полупрямой с помощью непрерывности интеграла Лебега.

Тогда мы получаем

$$I^n = \mu B^n \int_0^{+\infty} t^{n/2} e^{-t} dt = \mu B^n \Gamma(n/2 + 1).$$

Осталось найти μB^n хотя бы в одной размерности. При $n = 2$ у нас $\Gamma(2) = 1$ и мы можем найти

$$\mu B^2 = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \pi$$

следовательно $I = \sqrt{\pi}$ и

$$\mu B^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

Объемы шаров разных размерностей (!?!?!?!?)

(очень часто про это вопрос возникает!!)

Основные свойства гамма функции

Найдём её значение при $p = 1$, здесь интеграл можно посчитать явно

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-t} dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} (1 - e^{-u}) = 1.$$

Формула понижения $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

для $p > 0$ верно тождество

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

Напишем с использованием теоремы Фубини для функции, определённой при $0 \leq u \leq t$ как $u^{p-1}e^{-t}$, а на остальных точках плоскости определённой нулём:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\Gamma(p+1) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{p} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t u^{p-1} du \right) e^{-t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} u^{p-1} \left(\int_u^{+\infty} e^{-t} dt \right) du = \int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-u} du = \Gamma(p). \end{aligned}$$

Объем одномерного шара

Применяя формулу для объёма шара в размерности 1, мы получим равенство

$$\mu B^1 = 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(3/2)} \rightarrow \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

С помощью понижения степени тогда можно найти

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Формула для $\Gamma(n+1), \Gamma(n+1/2)$

Докажите, что для $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ и считаем $(-1)!! = 1$.

||

Примените известные значения $\Gamma(1) = 1$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, а потом примените формулу понижения.

||

Введём также бета-функцию при $p, q > 0$ как интеграл от неотрицательного выражения

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

Бета функция через гамма-функцию

(пока лень смотреть, если что, Кудрявцев тоже у себя доказывал ее.)

Верна формула

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Доказательство.

Напишем (используя теорему Фубини)

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_{x,y \geq 0} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y} dx dy$$

Сделаем линейную замену координат (x, y) на $(x, s = x + y)$, её определитель равен единице и поэтому можно написать

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^s x^{p-1} (s-x)^{q-1} dx \right) e^{-s} ds.$$

Далее во внутреннем интеграле удобно линейно заменить $x = ts, 0 \leq t \leq 1$ и получить

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} s^{p+q-1} dt \right) e^{-s} ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \right) s^{p+q-1} e^{-s} ds = B(p, q) \Gamma(p+q) \end{aligned}$$

Интеграл от Карасева $\int_0^{\pi/2} \sin^u x \cos^v y dx$ (??!)

Найдите при $u, v > -1$ интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^u x \cos^v y dx$$

(??? по идее там много задач, так что потом наreshаюсь!!)

(интересно кст)

[[

Сведите к бета-функции.

]]

Формула Стирлинга через асимптотику гамма функции

(в другое место мб перенесу)

Для $x \rightarrow +\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} (1 + o(1)).$$

Это следует из формулы для интеграла Пуассона.

Доказательство.

Сделаем замену $t = sx$, тогда можно записать интеграл в виде

$$x! = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-x(s-\ln s)} ds.$$

Функция $s - \ln s$ имеет минимум в точке 1, равный 1, то есть представляется в виде

$$s - \ln s = 1 + \varphi(s)$$

где $\varphi(x) \geq 0$.

Тогда

$$x! = x^{x+1} e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(s)} ds$$

нам надо выяснить асимптотику интеграла $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(s)} ds$.

Посчитаем вторую производную φ в точке 1, она равна 1.

Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ мы сможем найти интервал $(a, b) \ni 1$, такой что на нём

$$(1/2 - \varepsilon)(s - 1)^2 \leq \varphi(s) \leq (1/2 + \varepsilon)(s - 1)^2$$

На отрезках $[0, a]$ и $[b, 2]$ функция φ не менее некоторой положительной константы, так что соответствующие части $I(x)$ убывают экспоненциально с ростом x .

На промежутке $[2, +\infty)$ имеем неравенство $\varphi(s) \geq 1 - \ln 2 + (s - 2)/2$, что также даёт экспоненциальное убывание соответствующей части $I(x)$.

Тогда нам остаётся оценить часть на отрезке $[a, b]$, выпишем её

$$\int_a^b e^{-x(1/2+\varepsilon)(s-1)^2} ds \leq I_{[a,b]}(s) \leq \int_a^b e^{-x(1/2-\varepsilon)(s-1)^2} ds$$

Оценивающие интегралы также можно продолжить на всю прямую, при этом они изменятся на экспоненциально убывающий с ростом x множитель.

Но тогда они превращаются в интегралы Пуассона, и с точностью до экспоненциально убывающих множителей наш интеграл $I(x)$ лежит в отрезке $\left[\sqrt{\frac{2\pi}{x(1+2\varepsilon)}}, \sqrt{\frac{2\pi}{x(1-2\varepsilon)}} \right]$.

Получается, что

$$x! = x^{x+1} e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} (1 + o(1)) = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} (1 + o(1)).$$

Объём тела вращения

Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ измерима, а множество $X \subset \mathbb{R}^3$ задано условиями

$$a \leq x \leq b, \quad y^2 + z^2 \leq f(x)^2$$

Докажите, что

$$\mu X = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

[[
Используйте теорему Фубини, проинтегрировав сначала по переменным (y, z) .
]]

Интеграл от экспоненты квадратичной формы (!!!!!)

(очень интересно, но пока не думаю про это, потом порешаю.)

Пусть $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - положительно определённая квадратичная форма.

Докажите формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}$$

[[

Линейной ортогональной заменой переменных сделайте Q диагональной.

]]

Объем эллипсоида от квадратичной формы (!!!!!)

Пусть $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - положительно определённая квадратичная форма, а E_C - эллипсоид $\{x : Q(x) \leq C\}$.

Докажите формулу

$$\mu E = \frac{\pi^{n/2} C^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1) (\det Q)^{1/2}}$$

[[

Выведите из предыдущей задачи аналогично формуле для объёма шара.

]]

Интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 e^{-|x|^2} dx_1 \dots dx_n$

(мб просто, но нужно потренироваться!!!)

Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 e^{-|x|^2} dx_1 \dots dx_n$$

[[

Используйте теорему Фубини и интегрирование по частям.

]]

Критерии интегралов, которые сводятся к интегралам от гамма и бета функций (!!!!!)

(важно, помню.)

- интеграл ведётся от 0 до бесконечности

(пока это единственное, что я заметил.)

15.0.3 Volumes and Areas

(вроде не такой большой раздел должен быть, напишу потом.)

объемы n -мерных шаров

любых размерностей

различные площади

в том числе искривленные, в том числе полезные примеры где-то в физике.

О метрике (???)

(?? как с интегралами связана, плохо это написал)

15.0.4 Bezikovich's Lemma and Differentiability Almost Everywhere (????)

(оставил раздел, потому что пока абсолютно не до него)

В этом разделе мы изучим некоторые продвинутые свойства интеграла Лебега и варианты формулы Ньютона-Лейбница.

Мы рассматриваем только одномерный вариант, хотя у первых двух теорем есть и многомерные аналоги.

Лемма Безиковича о покрытии на прямой

Пусть в каждой точке x измеримого $X \subset \mathbb{R}$ дан набор отрезков $\{I_{x,k}\}_k$, каждый из которых содержит x строго внутри и.

длины которых стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Тогда из всех этих отрезков можно выбрать счётную систему попарно не пересекающихся отрезков $\mathcal{C}$, которая покрывает почти всё X , то есть $\mu X \setminus \bigcup \mathcal{C} = 0$

Доказательство.

По свойству регулярности (теорема 5.20) возьмём компактное $F \subset X$, у которого $\mu F \geq 1/2 \mu X$.

Оно покрыто внутренностями таких отрезков, следовательно оно покрыто некоторой конечной системой таких отрезков.

Выберем в этой системе минимальную подсистему, покрывающую F .

В минимальной подсистеме ни один отрезок не содержится внутри другого, поэтому можно занумеровать их слева направо так, что их левые концы и их правые концы будут идти в соответствии с данным порядком, Δ^- ком.

Тогда можно заметить, что если отрезок номер i пересекает отрезок номер $j > i$, то отрезки с номерами между ними можно было бы выкинуть, не уменьшая их объединения.

Следовательно, пересекаются только отрезки с соседними номерами.

Тогда разобьём нашу систему на чётные и нечётные отрезки, какая-то из них, $\mathcal{C}_1$, покрывает не менее половины меры μF , следовательно она же покрывает не менее четверти меры X .

Теперь выбросим из X объединение $\bigcup \mathcal{C}_1$, получив $X_2 = X \setminus \bigcup \mathcal{C}_1$ с $\mu X_2 \leq 3/4 \mu X$.

В соответствующих системах отрезков с центрами в X_2 выбросим те, которые пересекаются с $\bigcup \mathcal{C}_1$.

Тогда всё ещё верны условия теоремы для X_2 , так как мы выкинули замкнутое множество и в каждой системе $\{I_{x,k}\}_k$ длины отрезков стремились к нулю и при $x \in X_2$ в системе $\{I_{x,k}\}_k$ осталось бесконечно много отрезков.

Продолжая таким образом, мы будем каждый раз выбрасывать конечное число отрезков $\mathcal{C}_k$, не пересекающихся между собой и не пересекающихся с предыдущими, и уменьшать меру остатка X_{k+1} множества X как минимум на четверть.

Сделав такое счётное количество раз, мы получим счётную систему отрезков, которые попарно не пересекаются и покрывают всё X с точностью до множества меры нуль.

Лемма Безиковича о покрытии в $\mathbb{R}^n$

"Пусть в каждой точке x измеримого $X \subset \mathbb{R}^n$ дан набор шаров $\{B_{x,k}\}_k$ с центрами в x , радиусы которых стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Тогда из всех этих шаров можно выбрать счётную систему попарно не пересекающихся шаров $\mathcal{C}$, которая покрывает почти всё X , то есть $\mu X \setminus \bigcup \mathcal{C} = 0$.

||

Аналогично одномерному случаю, надо вначале покрыть конечной системой непересекающихся шаров какую-то фиксированную долю X .

для этого надо покрыть X некоторой подсистемой из этих шаров $\mathcal{D}$, которую можно раскрасить в конечное число $M(n)$ цветов так, что шары одного цвета из $\mathcal{D}$ попарно не пересекаются.

Тогда один из цветов будет покрывать не менее $1/M(n)$ от меры X .

Алая построения $\mathcal{D}$ можно использовать же, сводится к выбору на каждом шаге самого большого шара (точнее, близкого к супремуму) из тех шаров системы, центры которых не покрыты ранее выбранными шарами.

далее надо доказать, что в результате работы жадного алгоритма выбранный на некотором шаге шар пересекает не более $M(n) - 1$ предыдущих, для подходящей константы $M(n)$, зависящей только от размерности.

||

О применениях леммы Безиковича (??)

(потом напишу, пока ни за чем она не нужна.)

Теорема о плотности измеримого множества (?)

Из леммы Безиковича следует важное утверждение о структуре измеримых множеств:

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ измеримо. Тогда для почти всех $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 1$$

и для почти всех $x \notin X$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 0$$

Доказательство.

Предположим противное первому утверждению (второе делается аналогично).

Отклонение от утверждения возможно, только если при некотором $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{t \rightarrow +0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} < 1 - \varepsilon$$

в некоторых точках множества X .

Множество X_ε , определяемое таким неравенством, измеримо, так как Δ О взятия предела выражение непрерывно зависит от t , что позволяет в логической формуле нижнего предела использовать только рациональные положительные t в счётном количестве, получая в итоге борелевское множество.

При достаточно малом ε мера X_ε , Δ олжна быть положительной, иначе по счётной а, Δ , иитивности по рациональным положительным ε отклонение от равенства

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 1$$

было бы только на множестве меры нуль, а мы предполагаем противное.

Пусть теперь при некотором положительном ε множество $Y = X_\varepsilon$ имеет положительную меру.

Рассмотрим открытое $V \supseteq Y$ меры не более $(1+\varepsilon)\mu Y$ и раскроем определение нижнего предела.

для всякой $x \in Y$ у нас найдутся сколь угодно короткие отрезки $[x-t, x+t] \subset V$, для которых

$$\mu(Y \cap [x-t, x+t]) \leq \mu(X \cap [x-t, x+t]) < (1-\varepsilon)\mu[x-t, x+t]$$

Применим лемму Безиковича к множеству Y и таким отрезкам, в результате Y почти полностью покрывается ими.

Так как они все лежат в V , то суммируя неравенства по полученной системе попарно не пересекающихся отрезков мы узнаем, что

$$\mu Y \leq (1-\varepsilon)\mu V \leq (1-\varepsilon^2)\mu Y,$$

противоречие.

Усреднение интегрируемой функции

Аналогично доказывается более общий факт про функции вместо множеств:

Теорема 14. Если f локально интегрируема на $\mathbb{R}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi) d\xi}{2t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\int_x^{x+t} f(\xi) d\xi}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\int_{x-t}^x f(\xi) d\xi}{t}$$

Доказательство.

докажем сначала для симметричного усреднения и посмотрим, как может нарушаться требуемое равенство, один из вариантов (остальные аналогичны):

$$f(x) < \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi) d\xi}{2t}$$

Чтобы доказать, что такое бывает только на множестве меры нуль, достаточно доказать (из счётной аддитивности), что для любых мвух рациональных $a < b$ условия

$$f(x) < a < b < \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi) d\xi}{2t}$$

могут выполняться только на множестве меры нуль.

Действительно, множество, на котором выполняется (5.3) является объединением счётного числа (по рациональным $a < b$) множеств, на которых выполняется (5.4).

Обратите внимание, что верхний предел в формуле измерим, так как выражение непрерывно по x и t и логическая формула для предела может быть выписана только для рациональных t ; поэтому неравенство (5.4) задаёт измеримое множество.

допустим противное, такое множество Y для некоторых рациональных $a < b$ имеет положительную меру, тогда по строгой монотонности интеграла Лебега

$$\int_Y f(x) dx < a\mu Y.$$

По свойству непрерывности интеграла Лебега найдём открытое $V \subseteq Y$, такое что

$$\int_{V \setminus Y} |f(x)| dx < (b - a)\mu Y.$$

Теперь из определения верхнего предела в каждой точке $x \in Y$ мы найдём стягивающуюся последовательность отрезков $[x - t, x + t] \subset V$, в которой выполняется

$$\int_{x-t}^{x+t} f(\xi) d\xi > b\mu[x - t, x + t].$$

Применяя к множеству Y и этой системе лемму Безиковича, мы получим некоторое объединение счётной системы отрезков Y' , такое что $Y' \subseteq V$, $\mu(Y \setminus Y') = 0$ и в сумме по счётной аддитивности интеграла Лебега

$$\int_{Y'} f(\xi) d\xi \geq b\mu Y' \geq b\mu Y \rightarrow \int_Y f(\xi) d\xi > b\mu Y - (b - a)\mu Y = a\mu Y$$

противоречие.

для усреднения слева и справа лемма Безиковича так сразу не работает.

Однако можно заметить, что, например, при всяком нарушении типа

$$f(x) < a < b < \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{\int_x^{x+t} f(\xi) d\xi}{t}$$

мы сможем найти сколь угодно короткие отрезки $[x, x + t]$, на которых

$$\int_x^{x+t} f(\xi) d\xi > b\mu[x, x + t].$$

А потом из непрерывности интеграла по нижнему пределу для каждого такого отрезка можно найти произвольно малое $t' > 0$, такое что

$$\int_{x-t'}^{x+t} f(\xi) d\xi > b\mu[x - t', x + t].$$

Таким образом точка x войдёт внутрь модифицированного отрезка и противоречивое неравенство сохранится.

Далее лемма Безиковича применима и аналогично случаю симметричного усреднения получается противоречие.

Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом (!!!?)

(!! важная ведь теорема!! мб это и очень важно?!?)

Теперь мы в состоянии изучить, неформально говоря, вопрос о существовании почти всюду первообразной у интегрируемой функции и выполнении формулы Ньютона-Лейбница в весьма общем смысле:

Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

почти всюду дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ почти всюду.

Доказательство.

Так как

$$F(x+t) - F(x) = \int_x^{x+t} f(\xi) d\xi$$

то это утверждение эквивалентно одному из утверждений предыдущей теоремы.

(!?!? напишу потом нормально???)

Задача

докажите что если у измеримой функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интеграл по любому отрезку $[a, x] \subseteq [a, b]$ равен нулю, то она равна нулю почти всюду.

||

Примените предыдущую теорему.

(!?!?!?!?!?!?) ||

В ситуации предыдущей теоремы мы будем говорить, что F является обобщённой первообразной интегрируемой f .

теорема о приращении функции на отрезке

В теореме 5.103 мы шли от некоторой функции к первообразной, но иногда полезно идти от функции к её производной почти всюду.

Мы установим одно из достаточных условий на функцию, позволяющее ей фигурировать в качестве обобщённой первообразной в формуле Ньютона- Лейбница.

Теорема 15. Если $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|,$$

то она почти всюду имеет производную и её приращение на отрезке равно интегралу производной,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx$$

Доказательство.

Рассмотрим верхнюю правую производную, обозначим её $\varphi(x)$, она измерима и ограничена из липшицевости.

Следовательно, она интегрируема и по теоре-

ме 5.103

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$$

почти всюду имеет производную, равную $\varphi(x)$.

Посмотрим теперь на разность $G(x) = F(x) - \Phi(x)$, она почти всюду имеет правую производную, равную нулю.

Мы хотим доказать, что $G(b) \geq G(a)$, отсюда будет следовать, что приращение $F(b) - F(a)$ не менее интеграла правой верхней производной F .

Доказав аналогичным образом, что приращение не более интеграла от правой нижней производной, мы получим, что на самом деле правая нижняя и правая верхняя

производные F совпадают почти всюду и приращение $F(b) - F(a)$ равно интегралу любой из них.

После этого теорема 5.103 показывает, что F на самом деле почти всюду дифференцируема.

Итак, мы работаем с G , имеющей почти всюду нулевую верхнюю правую производную и являющейся липшицевой с некоторой константой (так как Φ тоже была липшицевой).

Предположим противное тому, что мы хотим доказать: $G(b) < G(a)$.

Прибавив к G линейную функцию $2\varepsilon x$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ мы оставим в силе неравенство

$$G(b) < G(a) - \varepsilon,$$

а верхняя правая производная G почти всюду будет больше ε , пусть последнее выполняется на множестве $X \subseteq [a, b]$, $\mu X = \mu[a, b]$.

Также функция G остаётся липшицевой и мы обозначим её константу липшицевости той же буквой L .

Будем считать, что концы отрезка не входят в X .

По определению верхней правой производной, для любого $x \in X$ найдётся произвольно маленькое t , такое что

$$G(x+t) - G(x) > \varepsilon t.$$

Тогда по непрерывности можно найти достаточно маленькое $t' < t$, так что будет выполняться

$$G(x+t) - G(x-t') > 0.$$

По лемме Безиковича покроем такими попарно не пересекающимися отрезками $[x-t', x+t]$ почти всё X , а значит и весь отрезок $[a, b]$ кроме множества меры нуль.

Теперь оставим лишь конечное число таких отрезков $[x-t', x+t]$ так, чтобы суммарная длина дополнительных промежутков отрезка $[a, b]$ была менее ε/L .

Тогда на оставленных отрезках G имеет положительное приращение по их выбору, а на дополнительных интервалах она из-за условия Липшица убывает менее чем на ε в сумме.

Но это противоречит (5.5).

(????)

Далее в разделе про гармонический анализ будут доказаны теоремы 8.23 и 8.24, которые полностью ответят на вопрос, когда можно писать формулу Ньютона-Лейбница для приращения некоторой функции.

На самом деле предыдущие две теоремы уже демонстрируют все нужные для этого соображения.

(????)

Задача (!?!?)

Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю.

||

Вспомните про канторово множество, пусть функция возрастает только на нём, а на его дополнении кусочно постоянна.

||

Монотонная на отрезке функция почти всюду имеет производную (!?!?)

Докажите, что монотонная на отрезке функция почти всюду имеет производную.

(вроде очевидно, чего не очевидно???)

||
 Действуйте аналогично доказательству дифференцируемости почти всюду
 липшицевой функции, но более аккуратно.
 ||

Задача

Докажите, что 1-липшицево отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ для $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (то есть отображение со свойством $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$) не увеличивает внешнюю меру Лебега множества и переводит измеримые множества в измеримые.

||
 Используйте многомерный вариант леммы Безиковича.
 ||

теорема Радемахера (??)

Липшицева функция на области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ почти всюду дифференцируема.

||
 Проверьте наличие частных производных почти всюду по одномерному случаю, потом для значений этих производных используйте многомерный вариант теоремы о плотности.
 ||

15.0.5 Surface Area in Euclidean the Space According to Zorich

Перейдем теперь к определению площади k -мерной кусочно гладкой поверхности, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n, n \geq k$.

Напомним сначала, что если $\xi_1, \dots, \xi_k$ — k векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^k$, то объем $V(\xi_1, \dots, \xi_k)$ параллелепипеда, натянутого на эти векторы как на ребра, может быть вычислен посредством определителя

$$V(\xi_1, \dots, \xi_k) = \det(\xi_i^j)$$

матрицы $J = (\xi_i^j)$, строки которой образованы координатами данных векторов в некотором ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_k$ пространства $\mathbb{R}^k$. Отметим, однако, что на самом-то деле формула (1) дает не просто объем, а так называемый ориентированный объем параллелепипеда. Если $V \neq 0$, то определяемое формулой (1) значение V положительно или отрицательно в соответствии с тем, принадлежат ли реперы $e_1, \dots, e_k, \xi_1, \dots, \xi_k$ одному или разным классам ориентации пространства $\mathbb{R}^k$.

Заметим теперь, что произведение JJ^* матрицы J на ее транспонированную J^* есть не что иное, как матрица $G = (g_{ij})$ попарных скалярных произведений $g_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$ данных векторов, т. е. матрица Грама ¹⁾ системы векторов $\xi_1, \dots, \xi_k$. Таким образом,

$$\det G = \det(JJ^*) = \det J \det J^* = (\det J)^2,$$

и, значит, неотрицательное значение объема $V(\xi_1, \dots, \xi_k)$ можно получить в виде

$$V(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sqrt{\det(\langle \xi_i, \xi_j \rangle)}.$$

Последняя формула удобна тем, что в ней, по существу, уже нет координат, а есть только набор геометрических величин, характеризующих рассматриваемый параллелепипед. В частности, если эти же

¹⁾ См. сноску на стр. 592. векторы $\xi_1, \dots, \xi_k$ считать лежащими в n -мерном ($n \geq k$) евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, то формула (3) k -мерного объема (или k -мерной площади) натянутого на них параллелепипеда останется без изменений.

Пусть теперь $\mathbf{r} : D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ — k -мерная гладкая поверхность S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заданная в параметрическом виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t^1, \dots, t^k)$, т.е. в виде гладкой вектор-функции $\mathbf{r}(t) = (x^1, \dots, x^n)(t)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^k$. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^k$, порождающий координатную систему $(t^1, \dots, t^k)$. Фиксировав точку $t_0 = (t_0^1, \dots, t_0^k) \in D$, возьмем положительные числа $h^1, \dots, h^k$ столь малыми, чтобы параллелепипед I , натянутый на векторы $h^i e_i \in TD_{t_0}$, $i = 1, \dots, k$, приложенные к точке t_0 , лежал в области D .

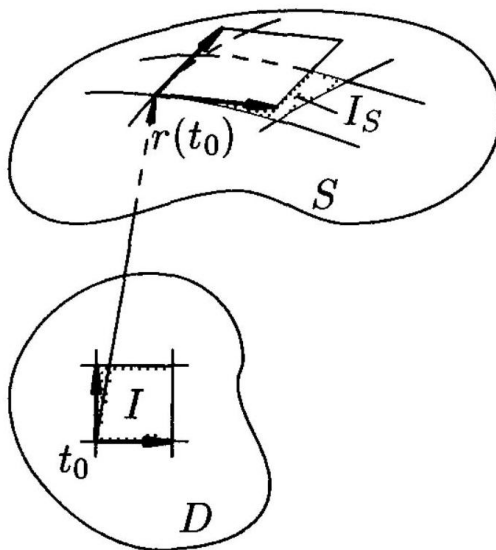


Рис. 82.

На поверхности S в силу отображения $D \rightarrow S$ параллелепипеду I соответствует фигура I_S , которую условно можно назвать криволинейным параллелепипедом (см. рис. 82, отвечающий случаю $k = 2, n = 3$). Поскольку

$$\mathbf{r}(t_0^1, \dots, t_0^{i-1}, t_0^i + h^i, t_0^{i+1}, \dots, t_0^k) - \mathbf{r}(t_0^1, \dots, t_0^{i-1}, t_0^i, t_0^{i+1}, \dots, t_0^k) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t^i}(t_0) h^i + o(h^i),$$

смещению от t_0 на вектор $h^i e_i$ отвечает в $\mathbb{R}^n$ такое смещение от точки $\mathbf{r}(t_0)$, которое при $h^i \rightarrow 0$ можно с точностью до $o(h^i)$ заменить частным дифференциалом $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t^i}(t_0) h^i =: \dot{\mathbf{r}}_i h^i$. Таким образом, при малых значениях $h^i, i = 1, \dots, k$, криволинейный параллелепипед I_S мало отличается от параллелепипеда, натянутого на векторы $h^1 \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, h^k \dot{\mathbf{r}}_k$, касательные к поверхности S в точке $\mathbf{r}(t_0)$. Считая по этой причине, что объем ΔV криволинейного параллелепипеда I_S должен тогда быть близок к объему указанного стандартного параллелепипеда, находим приближенную формулу

$$\Delta V \approx \sqrt{\det(g_{ij})(t_0)} \Delta t^1 \cdot \dots \cdot \Delta t^k,$$

где положено $g_{ij}(t_0) = \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j \rangle(t_0)$, $\Delta t^i = h^i, i, j = 1, \dots, k$. Если теперь все пространство $\mathbb{R}^k$, в котором лежит область параметров D , стандартным образом замостить k -мерными параллелепипедами малого диаметра d , взять среди них те, которые лежат в D , вычислить по формуле (4) приближенное значение k -мерного объема их образов и взять сумму полученных так значений, то мы придем к величине

$$\sum_{\alpha} \sqrt{\det(g_{ij})(t_{\alpha})} \Delta t^1 \cdot \dots \cdot \Delta t^k,$$

которую можно считать приближенным значением k -мерного объема или площади рассматриваемой поверхности S , причем это приближение должно становиться более точным при $d \rightarrow 0$. Таким образом, мы принимаем

Определение 1. Площадью (или k -мерным объемом) заданной в параметрическом виде $D \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in S$ гладкой k -мерной поверхности S , лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, называется величина

$$V_k(S) := \int_D \sqrt{\det(\langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j \rangle)(t)} dt^1 \dots dt^k$$

Посмотрим, как выглядит формула (5) в уже знакомых нам частных случаях.

При $k = 1$ область $D \subset \mathbb{R}^1$ есть промежуток с некоторыми концами $a, b (a < b)$ на прямой $\mathbb{R}^1$, а S в этом случае — кривая в $\mathbb{R}^n$. Формула (5), таким образом, при $k = 1$ превращается в формулу

$$V_1(S) = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + \dots + (\dot{x}^n)^2}(t) dt$$

для вычисления длины гладкой кривой.

Если $k = n$, то S -диффеоморфная области D n -мерная область в $\mathbb{R}^n$. В этом случае матрица Якоби $J = x'(t)$ отображения $D \ni t = (t^1, \dots, t^n) \mapsto \mathbf{r}(t) = (x^1, \dots, x^n)(t) \in S$ квадратная. Воспользовавшись теперь соотношением (2) и формулой замены переменных в кратном интеграле, можно написать, что

$$V_n(S) = \int_D \sqrt{\det G(t)} dt = \int_D |\det x'(t)| dt = \int_S dx = V(S)$$

т. е., как и следовало ожидать, мы пришли к объему области S в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что при $k = 2$ и $n = 3$, т. е. когда S — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, часто вместо стандартных обозначений $g_{ij} = \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j \rangle$ используют следующие: $\sigma := V_2(S)$, $E := g_{11} = \langle \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_1 \rangle$, $F := g_{12} = g_{21} = \langle \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2 \rangle$, $G := g_{22} = \langle \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_2 \rangle$, а вместо t^1, t^2 пишут соответственно u, v . В этих обозначениях формула (5) приобретает вид

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

В частности, если $u = x, v = y$, а поверхность S — есть график гладкой вещественнозначной функции $z = f(x, y)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^2$, то, как легко подсчитать,

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$$

Вернемся теперь вновь к определению 1 и сделаем несколько полезных для дальнейшего замечаний.

Замечание 1. Определение 1 корректно лишь в том случае, когда стоящий в формуле (5) интеграл существует. Он заведомо существует, например, если D — измеримая по Жордану область, а $r \in \dot{C}^{(1)}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$.

Замечание 2. Если поверхность S , участвующую в определении 1, разбить на конечное число поверхностей $S_1, \dots, S_m$ с кусочно гладкими краями, то этому разбиению S будет

отвечать такое же разбиение области D на соответствующие $S_1, \dots, S_m$ области $D_1, \dots, D_m$. Если поверхность S имела площадь в смысле равенства (5), то при каждом значении $\alpha = 1, \dots, m$ определены величины

$$V_k(S_\alpha) = \int_{D_\alpha} \sqrt{\det \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_j \rangle(t)} dt$$

В силу аддитивности интеграла отсюда следует, что

$$V_k(S) = \sum_{\alpha} V_k(S_\alpha)$$

Мы установили таким образом, что площадь k -мерной поверхности аддитивна в том же смысле, что и обычный кратный интеграл. Замечание 3. Последнее замечание позволяет переходить, если нужно, к исчерпанию области D , а значит, оно позволяет расширить смысл формулы (5), в которой теперь интеграл можно понимать и как несобственный.

Замечание 4. Более существенно аддитивность площади можно использовать для определения площади произвольной (а не только заданной одной картой) гладкой или даже кусочно гладкой поверхности.

Определение 2. Пусть S -произвольная кусочно гладкая k -мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Если после удаления из S конечного или счетного числа кусочно гладких поверхностей размерности не выше чем $k - 1$ она распадается на конечное или счетное число гладких параметризуемых поверхностей $S_1, \dots, S_m, \dots$, то полагаем

$$V_k(S) := \sum_{\alpha} V_k(S_\alpha)$$

Аддитивность кратного интеграла позволяет проверить, что так определенная величина $V_k(S)$ не зависит от способа описанного разбиения поверхности S на гладкие куски $S_1, \dots, S_m, \dots$, каждый из которых лежит в районе действия какой-то локальной карты поверхности S .

Отметим также, что из определений гладкой и кусочно гладкой поверхностей легко следует, что описанное в определении 2 разбиение S на гладкие параметризуемые куски $S_1, \dots, S_m$ всегда возможно и даже с соблюдением естественного дополнительного требования локальной конечности разбиения. Последнее означает, что любой компакт $K \subset S$ может иметь общие точки лишь с конечным числом поверхностей $S_1, \dots, S_m, \dots$. Нагляднее это можно выразить иначе, сказав, что любая точка поверхности S должна обладать окрестностью, которая пересекается не более чем с конечным числом множеств $S_1, \dots, S_m, \dots$

Замечание 5. В основной формуле (5) участвует система криволинейных координат $t^1, \dots, t^k$. Естественно поэтому проверить, что определяемая равенством (5) величина $V_k(S)$ (а тем самым и величина $V_k(S)$ из определения 2) инвариантна при диффеоморфном переходе $\tilde{D} \ni (\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^k) = \tilde{t} \mapsto t = (t^1, \dots, t^k) \in D$ к новым криволинейным координатам $\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^k$, меняющимся в соответствующей области $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^k$. Для проверки достаточно заметить, что матрицы

$$G = (g_{ij}) = \left(\left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t^j} \right\rangle \right) \quad \text{и} \quad \tilde{G} = (\tilde{g}_{ij}) = \left(\left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{t}^i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{t}^j} \right\rangle \right)$$

в соответствующих друг другу точках областей D и $\tilde{D}$ связаны соотношением $\tilde{G} = J^* G J$, где $J = \left(\frac{\partial t^j}{\partial \tilde{t}^i} \right)$ матрица Якоби отображения $\tilde{D} \ni \tilde{t} \mapsto t \in D$, а J^* ... транспонированная по отношению к J матрица. Таким образом, $\det \tilde{G}(\tilde{t}) = \det G(t) (\det J)^2(\tilde{t})$, откуда следует, что

$$\int_D \sqrt{\det G(t)} dt = \int_D \sqrt{\det G(t(\tilde{t}))} |J(\tilde{t})| d\tilde{t} = \int_{\tilde{D}} \sqrt{\det \tilde{G}(\tilde{t})} d\tilde{t}$$

Итак, мы дали инвариантное по отношению к выбору системы координат определение k -мерного объема или площади k -мерной кусочно гладкой поверхности.

Замечание 6.

Этому замечанию мы предположим Определение 3. Про множество E , лежащее на k -мерной кусочно гладкой поверхности, будем говорить, что оно является множеством k -мерной меры нуль или имеет площадь нуль в смысле Лебега, если при любом $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной или счетной системой $S_1, \dots, S_m, \dots$ (возможно пересекающихся) поверхностей $S_\alpha \subset S$ так, что $\sum_\alpha V_k(S_\alpha) < \varepsilon$

Как видно, это дословное повторение определения множества меры нуль, лежащего в $\mathbb{R}^k$.

Легко видеть, что в области D параметров любой локальной карты $\varphi : D \rightarrow S$ кусочно гладкой поверхности S такому множеству E отвечает множество $\varphi^{-1}(E) \subset D \subset \mathbb{R}^k$ k -мерной меры нуль. Можно даже проверить, что это характеристическое свойство множеств $E \subset S$ площади нуль.

На практике при вычислении площадей, а также вводимых ниже поверхностных интегралов полезно иметь в виду, что если кусочно гладкая поверхность $\tilde{S}$ получена из кусочно гладкой поверхности S удалением из S множества E площади нуль, то площади поверхностей $\tilde{S}$ и S одинаковы. Польза этого замечания в том, что из кусочно гладкой поверхности часто легко так удалить множество площади нуль, что в результате получится гладкая поверхность $\tilde{S}$, задаваемая всего лишь одной картой. Но тогда площадь $\tilde{S}$, а значит, и площадь S можно вычислить прямо по формуле (5).

Примеры.

3.пр.

1. Отображение $]0, 2\pi[\ni t \mapsto (R \cos t, R \sin t) \in \mathbb{R}^2$ есть карта дуги $\tilde{S}$ окружности $x^2 + y^2 = R^2$, получаемой удалением из этой окружности S единственной точки $E = (R, 0)$. Поскольку E - множество длины нуль на S , можно писать, что

$$V_1(S) = V_1(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R$$

3.пр.

2. В примере 4§1 было указано следующее параметрическое представление двумерного тора S в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r}(\varphi, \psi) = ((b + a \cos \psi) \cos \varphi, (b + a \cos \psi) \sin \varphi, a \sin \psi)$$

В области $D = \{(\varphi, \psi) | 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \psi < 2\pi\}$ отображение $(\varphi, \psi) \mapsto \mathbf{r}(\varphi, \psi)$ диффеоморфно. Образ $\tilde{S}$ области D при этом диффеоморфизме отличается от тора S на множество E , состоящее из координатной линии $\varphi = 2\pi$ и линии $\psi = 2\pi$. Множество E состоит, таким образом, из одной параллели и одного меридиана тора и, как легко видеть, имеет площадь нуль. Значит, площадь тора можно найти по формуле (5), исходя

из приведенного параметрического представления, рассматриваемого в пределах области D .

Проведем необходимые выкладки:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_\varphi &= (-(b + a \cos \psi) \sin \varphi, (b + a \cos \psi) \cos \varphi, 0), \\ \dot{\mathbf{r}}_\psi &= (-a \sin \psi) \cos \varphi, -a \sin \psi \sin \varphi, a \cos \psi), \\ g_{11} &= \langle \dot{\mathbf{r}}_\varphi, \dot{\mathbf{r}}_\varphi \rangle = (b + a \cos \psi)^2 \\ g_{12} &= g_{21} = \langle \dot{\mathbf{r}}_\varphi, \dot{\mathbf{r}}_\psi \rangle = 0 \\ g_{22} &= \langle \dot{\mathbf{r}}_\psi, \dot{\mathbf{r}}_\psi \rangle = a^2 \\ \det G &= \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = a^2(b + a \cos \psi)^2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$V_2(S) = V_2(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a \cos \psi) d\psi = 4\pi^2 ab$$

Отметим в заключение, что указанным в определении 2 способом можно теперь вычислять также длины и площади кусочно гладких кривых и поверхностей.

Задачи и упражнения

1. а) Пусть P и $\tilde{P}$ - две гиперплоскости евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, D - подобласть P , а $\tilde{D}$ -ортогональная проекция D на гиперплоскость $\tilde{P}$. Покажите, что $(n-1)$ -мерные площади D и $\tilde{D}$ связаны соотношением $\sigma(\tilde{D}) = \sigma(D) \cos \alpha$, где α - угол между гиперплоскостями $P, \tilde{P}$.

б) Учитывая результат а), укажите геометрический смысл формулы $d\sigma = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$ для элемента площади графика гладкой функции $z = f(x, y)$ в трехмерном евклидовом пространстве.

в) Покажите, что если поверхность S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задана в форме гладкой вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^2$, то площадь поверхности S можно найти по формуле

$$\sigma(S) = \iint_D |[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]| du dv$$

где $[\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]$ - векторное произведение векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

г) Проверьте, что если поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, а область U поверхности S взаимно однозначно ортогонально проектируется на область D плоскости (x, y) , то имеет место формула

$$\sigma(U) = \iint_D \frac{|\text{grad } F|}{|F'_z|} dx dy.$$

3.у.2

Найдите площадь сферического прямоугольника, образованного двумя параллелями и двумя меридианами сферы $S \subset \mathbb{R}^3$.

3.у.3

а) Пусть (r, φ, h) - цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Гладкая кривая, расположенная в плоскости $\varphi = \varphi_0$ и заданная там уравнением $r = r(s)$, где s - натуральный параметр, вращается вокруг оси h . Покажите, что площадь поверхности, полученной вращением куска этой кривой, отвечающего отрезку $[s_1, s_2]$ изменения параметра s , может быть найдена по формуле

$$\sigma = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} r(s) ds.$$

б) График гладкой неотрицательной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, вращается сначала вокруг оси Ox , затем вокруг оси Oy . В каждом из этих случаев напишите формулу для площади соответствующей поверхности вращения в виде интеграла по отрезку $[a, b]$.

3.у.4

а) Центр шара радиуса 1 скользит вдоль гладкой плоской замкнутой кривой, имеющей длину L . Покажите, что площадь поверхности образованного при этом трубчатого тела равна $2\pi \cdot 1 \cdot L$.

б) Исходя из результата а), найдите площадь двумерного тора, полученного вращением окружности радиуса a вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и удаленной от ее центра на расстояние $b > a$.

3.у.5

Изобразите заданную в декартовых координатах (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$ винтовую поверхность

$$y - x \operatorname{tg} \frac{z}{h} = 0, \quad |z| \leq \frac{\pi}{2} h$$

и найдите площадь той ее части, для которой $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$.

3.у.6

а) Покажите, что площадь Ω_{n-1} единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ равна $\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, где $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$. (В частности, если n четно, то $\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n-2}{2})!!$, а если n нечетно, то $\Gamma(\frac{n}{2}) = \frac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}} \sqrt{\pi}$).

б) Проверив, что объем $V_n(r)$ шара радиуса r в $\mathbb{R}^n$ равен $\frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} r^n$, покажите, что $\frac{dV_n}{dr} \Big|_{r=1} = \Omega_{n-1}$.

с) Найдите предел при $n \rightarrow \infty$ отношения площади полусферы $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \wedge x^n > 0\}$ к площади ее ортогональной проекции на плоскость $x^n = 0$.

д) Покажите, что при $n \rightarrow \infty$ основная часть объема n -мерного шара сосредоточивается в сколь угодно малой окрестности его граничной сферы, а основная часть площади сферы - в сколь угодно малой окрестности ее экватора.

е) Покажите, что из сделанного в d) наблюдения вытекает красивое следствие:

Регулярная функция, непрерывная на сфере большой размерности, почти постоянна на ней.

Поконкретнее:

Рассмотрим, например, функции, удовлетворяющие условию Липшица с фиксированной константой. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется такое N , что при $n > N$ у любой такой функции $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеется значение c со следующими свойствами: площадь того множества, где значения f отличаются от c больше чем на ε , составляет не более чем δ -долю от площади всей сферы.

3.у.7

а) Пусть $x_1, \dots, x_k$ - система векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq k$. Покажите, что определитель Грама этой системы может быть представлен в виде

$$\det(\langle x_i, x_j \rangle) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P_{i_1 i_k}^2, \quad P_{i_1 i_k} := \det \begin{pmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_1^{i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_k^{i_1} & \dots & x_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

б) Выясните геометрический смысл величин $P_{i_1 i_k}$ из а) и сформулируйте результат задачи а) как теорему Пифагора для мер произвольной размерности k , $1 \leq k \leq n$.

с) Объясните теперь формулу

$$\sigma = \int_D \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^k} & \dots & \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^k} \end{pmatrix}} dt^1 \dots dt^n$$

для площади, заданной в параметрическом виде $x = x(t^1, \dots, t^k)$, $t \in D \subset \mathbb{R}^k$ k -мерной гладкой поверхности.

3.у.8

а) Проверьте, что в определении 2 величина $V_k(S)$ действительно не зависит от указанного там способа разбиения S на гладкие куски $S_1, \dots, S_m, \dots$

б) Покажите, что кусочно гладкая поверхность S допускает локально конечное разбиение на куски $S_1, \dots, S_m, \dots$, описанные в определении 2.

с) Докажите, что из гладкой поверхности S всегда можно так удалить множество E площади нуль, что останется гладкая поверхность $\tilde{S} = S \setminus E$, которая уже может быть описана одной стандартной локальной картой $\varphi : I \rightarrow S$

3.у.9

Длину кривой, подобно школьному определению длины окружности, часто определяют как предел длин соответствующим образом вписанных в кривую ломаных. Предел берется при стремлении к нулю длин звеньев вписанных ломаных. Следующий простой пример, принадлежащий Г. Шварцу, показывает, что аналогичные действия при попытке определить площадь даже очень гладкой поверхности через площади «вписанных» в нее многогранных поверхностей могут привести к абсурду.

В цилиндр радиуса R и высоты H впишем многогранник следующим образом. Рассечем цилиндр горизонтальными плоскостями на m равных цилиндров высоты H/m каждый. Каждую из $m+1$ окружностей сечения (включая окружности верхнего и нижнего оснований исходного цилиндра) разобьем на n равных частей так, чтобы точки деления на каждой окружности находились под серединами дуг ближайшей верхней окружности. Теперь берем пару точек деления любой окружности и точку, лежащую

непосредственно над или под серединой дуги, заключенной между этой парой точек. Указанные три точки порождают треугольник, а совокупность всех таких треугольников образует многогранную поверхность, вписанную в исходную цилиндрическую поверхность (боковую поверхность прямого кругового цилиндра). На вид этот многогранник похож на примятое и собравшееся в гармошку голенище сапога, поэтому его часто называют сапогом Пвариа.

а) Покажите, что если m и n устремить к бесконечности, но так, чтобы при этом отношение n^2/m стремилось к нулю, площадь построенной многогранной поверхности будет неограниченно расти, хотя размеры каждой ее грани (треугольника) при этом стремятся к нулю.

б) Если же n и m стремятся к бесконечности так, что отношение m/n^2 стремится к некоторому конечному пределу p , то площади многогранных поверхностей будут стремиться к конечному пределу, который в зависимости от величины p может быть больше, меньше или (при $p = 0$) равен площади исходной цилиндрической поверхности.

с) Сравните описанный здесь способ введения площади гладкой поверхности с тем, который изложен в §4, и объясните, почему в одномерном случае результаты совпадают, а в двумерном уже, вообще говоря, не совпадают. Каковы условия на последовательность вписанных многогранных поверхностей, гарантирующие совпадение результатов?

3.у.10

Изопериметрическое неравенство.

Пусть $V(E)$ - обозначение для объема множества $E \subset \mathbb{R}^n$, а $A + B$ - сумма (векторная) множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (сумма в смысле Минковского; см. задачу 4 к §2 главы XI).

Пусть B -шар радиуса h . Тогда $A + B =: A_h$ есть h -окрестность множества A .

Величина

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(A_h) - V(A)}{h} =: \mu_+(\partial A)$$

называется внешней площадью по Минковскому границь ∂A множества A .

а) Покажите, что если ∂A -гладкая или достаточно регулярная поверхность, то $\mu_+(\partial A)$ совпадает с обычной площадью поверхности ∂A .

б) Используя неравенство Брунна-Минковского (см. задачу 4 к §2 главы XI), получите теперь классическое изопериметрическое неравенство в $\mathbb{R}^n$

$$\mu_+(\partial A) \geq nv^{\frac{1}{n}} V^{\frac{n-1}{n}}(A) =: \mu(S_A)$$

здесь v -объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, а $\mu(S_A)$ - площадь $((n-1)$ -мерная) поверхности шара, имеющего тот же объем, что и множество A .

Изопериметрическое неравенство означает, что тело $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет площадь границы $\mu_+(\partial A)$, не меньшую, чем шар того же объема.

15.0.6 Basic Information About Differential Forms

Дифференциальная форма, определение и примеры

Дадим теперь первоначальные представления об удобном математическом аппарате дифференциальных форм, обращая здесь основное внимание на его алгоритмические возможности, а не на подробности теоретических конструкций, которые будут изложены в гл. XV.

1. Дифференциальная форма, определение и примеры. Из курса алгебры читателю хорошо известно понятие линейной формы, и мы этим понятием уже широко

пользовались при построении дифференциального исчисления. Там главным образом встречались симметрические формы. Здесь же речь будет о кососимметрических (антисимметрических) формах.

Напомним, что форма $L : X^k \rightarrow Y$ степени или порядка k , определенная на упорядоченных наборах $\xi_1, \dots, \xi_k$ векторов линейного пространства X и принимающая значения в линейном пространстве Y , называется кососимметрической (антисимметрической), если значение формы меняет знак при перестановке местами любой пары ее аргументов, т. е.

$$L(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k) = -L(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_k)$$

В частности, если $\xi_i = \xi_j$, то независимо от остальных векторов значение формы будет равно нулю.

3.пр.

1. Векторное произведение $[\xi_1, \xi_2]$ векторов пространства $\mathbb{R}^3$ есть билинейная кососимметрическая форма со значениями в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

3.пр.

2. Определенный формулой (1) §4 ориентированный объем $V(\xi_1, \dots, \xi_k)$ параллелепипеда, натянутого на векторы $\xi_1, \dots, \xi_k$ пространства $\mathbb{R}^k$, является кососимметрической вещественнозначной k -формой в $\mathbb{R}^k$.

Нас будут пока интересоваться вещественнозначные формы (случай $Y = \mathbb{R}$), хотя все излагаемое ниже применимо и в более общей ситуации, например, когда Y есть поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Линейная комбинация кососимметрических форм одной степени в свою очередь является кососимметрической формой, т. е. кососимметрические формы одной степени образуют линейное пространство.

В алгебре вводится, кроме того, операция $\wedge$ внешнего умножения кососимметрических форм, которая упорядоченной паре A^p, B^q , таких форм (степени p и q соответственно) сопоставляет кососимметрическую форму $A^p \wedge B^q$ степени $p + q$. Эта операция

ассоциативна: $(A^p \wedge B^q) \wedge C^r = A^p \wedge (B^q \wedge C^r)$,

дистрибутивна: $(A^p + B^p) \wedge C^q = A^p \wedge C^q + B^p \wedge C^q$,

косокоммутативна: $A^p \wedge B^q = (-1)^{pq} B^q \wedge A^p$.

В частности, если речь идет об 1-формах A и B , то имеет место антикоммутативность $A \wedge B = -B \wedge A$ операции, подобная антикоммутативности упомянутого в примере 1 векторного произведения, обобщением которого и является внешнее умножение форм.

Не вникая в детали общего определения внешнего произведения, примем пока к сведению перечисленные свойства этой операции и отметим, что в случае внешнего произведения 1-форм $L_1, \dots, L_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ результат $L_1 \wedge \dots \wedge L_k$ есть k -форма, которая на наборе векторов $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ принимает значение

$$L_1 \wedge \dots \wedge L_k(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} L_1(\xi_1) & \dots & L_k(\xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_1(\xi_k) & \dots & L_k(\xi_k) \end{vmatrix} = \det(L_j(\xi_i))$$

Если соотношение (1) принять в качестве определения его левой части, то из свойств определителей легко следует, что в случае линейных 1-форм A, B, C действительно: $A \wedge B = -B \wedge A$ и $(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$.

Рассмотрим несколько полезных для дальнейшего примеров.

3.пр.

3. Пусть $\pi^i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$ - проекторы. Точнее, линейная функция $\pi^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что на любом векторе $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ она принимает значение $\pi^i(\xi) = \xi^i$ проекции этого вектора на соответствующую координатную ось. Тогда в соответствии с формулой (1) получаем

$$\pi^{i_1} \wedge \dots \wedge \pi^{i_k}(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_k^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{i_k} & \dots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}.$$

3.пр.

4. Декартовы координаты векторного произведения $[\xi_1, \xi_2]$ векторов $\xi_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3)$, $\xi_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, как известно, определяются из равенства

$$[\xi_1, \xi_2] = \left(\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_1^3 & \xi_1^1 \\ \xi_2^3 & \xi_2^1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix} \right).$$

Таким образом, в соответствии с результатом примера 3 можно записать, что

$$\begin{aligned} \pi^1([\xi_1, \xi_2]) &= \pi^2 \wedge \pi^3(\xi_1, \xi_2), \\ \pi^2([\xi_1, \xi_2]) &= \pi^3 \wedge \pi^1(\xi_1, \xi_2), \\ \pi^3([\xi_1, \xi_2]) &= \pi^1 \wedge \pi^2(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

3.пр.

5. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ - определенная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и дифференцируемая в точке $x_0 \in D$ функция. Как известно, дифференциал $df(x_0)$ функции в точке является линейной функцией, определенной на векторах ξ смещения от этой точки, точнее, на векторах пространства TD_{x_0} , касательного к D (к $\mathbb{R}^n$) в рассматриваемой точке. Напомним, что если $x^1, \dots, x^n$ - координаты в $\mathbb{R}^n$, а $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, то

$$df(x_0)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\xi^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\xi^n = D_{\xi}f(x_0).$$

В частности, $dx^i(\xi) = \xi^i$, или, более формально, $dx^i(x_0)(\xi) = \xi^i$. Если $f_1, \dots, f_k$ - определенные в G и дифференцируемые в точке $x_0 \in G$ вещественнозначные функции, то в соответствии с формулой (1) в точке x_0 на наборе $\xi_1, \dots, \xi_k$ векторов пространства TG_{x_0} получаем

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} df_1(\xi_1) & \dots & df_k(\xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ df_1(\xi_k) & \dots & df_k(\xi_k) \end{vmatrix},$$

и, в частности,

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_k^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_k^{i_1} & \dots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}$$

Таким образом, из линейных форм $df_1, \dots, df_k$, определенных на линейном пространстве $TD_{x_0} \approx T\mathbb{R}_{x_0}^n \approx \mathbb{R}^n$, получились определенные на этом же пространстве кососимметрические формы степени k .

3.пр.

6. Если $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$, где D -область в $\mathbb{R}^n$, то в любой точке $x \in D$ определен дифференциал $df(x)$ функции f , который, как было сказано, является линейной функцией $df(x) : TD_x \rightarrow T\mathbb{R}_{f(x)} \approx \mathbb{R}$ на линейном пространстве TD_x , касательном к D в точке x . При переходе от точки к точке в области D форма $df(x) = f'(x)$, вообще говоря, меняется. Итак, гладкая скалярная функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ порождает в каждой точке области D линейную форму $df(x)$, или, как говорят, порождает в D поле линейных форм, определенных на соответствующих касательных пространствах TD_x .

Определение 1. Будем говорить, что в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана вещественнозначная дифференциальная p -форма ω , если в каждой точке $x \in D$ определена кососимметрическая форма $\omega(x) : (TD_x)^p \rightarrow \mathbb{R}$.

Число p обычно называют степенью или порядком дифференциальной p -формы ω . В этой связи p -форму ω часто обозначают через ω^p .

Таким образом, рассмотренное в примере 6 поле дифференциала df гладкой функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ есть дифференциальная 1-форма в области D , а $\omega = dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_p}$ есть простейший пример дифференциальной формы степени p .

3.пр.

7. Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле, т.е. с каждой точкой $x \in D$ связан вектор $\mathbf{F}(x)$. При наличии евклидовой структуры в $\mathbb{R}^n$ это векторное поле порождает следующую дифференциальную 1-форму ω_F^1 в D .

Если ξ -вектор, приложенный к точке $x \in D$, т. е. $\xi \in TD_x$, то положим

$$\omega_F^1(x)(\xi) = \langle \mathbf{F}(x), \xi \rangle$$

Из свойств скалярного произведения вытекает, что $\omega_F^1(x) = \langle \mathbf{F}(x), \cdot \rangle$ действительно является линейной формой в каждой точке $x \in D$.

Такие дифференциальные формы возникают очень часто. Например, если $\mathbf{F}$ - непрерывное силовое поле в области D , а ξ - вектор малого смещения от точки $x \in D$, то элементарная работа поля, отвечающая такому смещению, как известно из физики, определяется именно величиной $\langle \mathbf{F}(x), \xi \rangle$.

Итак, поле сил $\mathbf{F}$ в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ естественным образом порождает в D дифференциальную 1-форму ω_F^1 , которую в этом случае естественно назвать формой работы поля $\mathbf{F}$.

Заметим, что в евклидовом пространстве дифференциал df гладкой в области $D \subset \mathbb{R}^n$ функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ тоже можно считать 1-формой, порожденной векторным полем, которым в данном случае является поле $\mathbf{F} = \text{grad } f$. В самом деле, ведь по определению вектор $\text{grad } f(x)$ таков, что для любого вектора $\xi \in TD_x$ имеет место равенство $df(x)(\xi) = \langle \text{grad } f(x), \xi \rangle$.

3.пр.

8. Заданное в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ векторное поле V может также следующим образом порождать дифференциальную форму ω_V^{n-1} степени $n - 1$. Если в точке $x \in D$ взять соответствующий ей вектор поля $\mathbf{V}(x)$ и еще $n - 1$ векторов

$\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in TD_x$, приложенных к точке x , то ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $V(x), \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, равный определителю матрицы, строки которой состоят из координат этих векторов, очевидно, будет кососимметрической $(n-1)$ -формой по переменным $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$.

При $n = 3$ форма ω_V^2 есть обычное смешанное произведение $(V(x), \xi_1, \xi_2)$ векторов, из которых один $V(x)$ задан, а тогда по двум оставшимся аргументам получается кососимметрическая 2-форма $\omega_V^2 = (V, \cdot, \cdot)$.

Например, если в области D имеется установившееся течение жидкости и $V(x)$ - вектор скорости течения в точке $x \in D$, то величина $(V(x), \xi_1, \xi_2)$ есть элементарный объем жидкости, которая протекает за единицу времени через натянутую на малые векторы $\xi_1, \xi_2 \in TD_x$ площадку (параллелограмм). Выбирая по разному векторы ξ_1, ξ_2 , мы будем получать различные по конфигурации и расположению в пространстве площадки (параллелограммы), одной из вершин которых является точка x . Для каждой такой площадки будет, вообще говоря, свое значение $(V(x), \xi_1, \xi_2)$ формы $\omega_V^2(x)$. Как было сказано, оно показывает, сколько жидкости протекло за единицу времени через данную площадку, т.е. характеризует расход жидкости или поток через выбранную элементарную площадку. По этой причине форму ω_V^2 , как, впрочем, и ее многомерный аналог ω_V^{n-1} , часто называют формой потока векторного поля V в области D .

Координатная запись дифференциальной формы.

Остановимся теперь на координатной записи кососимметрических алгебраических и дифференциальных форм и покажем, в частности, что любая дифференциальная k -форма в некотором смысле является линейной комбинацией стандартных дифференциальных форм вида (4).

Для сокращения записи будем (как мы это делали в аналогичных случаях и прежде) по повторяющимся сверху и снизу индексам подразумевать суммирование в пределах области допустимых значений этих индексов. Пусть L - k -линейная форма в $\mathbb{R}^n$. Если в $\mathbb{R}^n$ фиксирован базис $e_1, \dots, e_n$, то каждый вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ получает координатное представление $\xi = \xi^i e_i$ в этом базисе, а форма L приобретает координатную запись

$$L(\xi_1, \dots, \xi_k) = L(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \xi_k^{i_k} e_{i_k}) = L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \xi_1^{i_1}, \dots, \xi_k^{i_k}.$$

Числа $a_{i_1, \dots, i_k} = L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ вполне характеризуют форму L , если известно, в каком базисе $e_1, \dots, e_n$ они получены. Эти числа, очевидно, симметричны или кососимметричны по их индексам тогда и только тогда, когда соответствующим видом симметрии обладает форма L .

В случае кососимметрической формы L координатное представление (5) можно несколько преобразовать. Чтобы направление этого преобразования стало ясным и естественным, рассмотрим частный случай соотношения (5), когда L -кососимметрическая 2-форма в $\mathbb{R}^3$. Тогда для векторов $\xi_1 = \xi_1^{i_1} e_{i_1}, \xi_2 = \xi_2^{i_2} e_{i_2}$, где $i_1, i_2 = 1, 2, 3$, получаем

$$\begin{aligned} L(\xi_1, \xi_2) &= L(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \xi_2^{i_2} e_{i_2}) = L(e_{i_1}, e_{i_2}) \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} = \\ &= L(e_1, e_1) \xi_1^1 \xi_2^1 + L(e_1, e_2) \xi_1^1 \xi_2^2 + L(e_1, e_3) \xi_1^1 \xi_2^3 + \\ &+ L(e_2, e_1) \xi_1^2 \xi_2^1 + L(e_2, e_2) \xi_1^2 \xi_2^2 + L(e_2, e_3) \xi_1^2 \xi_2^3 + \\ &+ L(e_3, e_1) \xi_1^3 \xi_2^1 + L(e_3, e_2) \xi_1^3 \xi_2^2 + L(e_3, e_3) \xi_1^3 \xi_2^3 = \\ &= L(e_1, e_2) (\xi_1^1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2^1) + L(e_1, e_3) (\xi_1^1 \xi_2^3 - \xi_1^3 \xi_2^1) + \\ &+ L(e_2, e_3) (\xi_1^2 \xi_2^3 - \xi_1^3 \xi_2^2) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} L(e_{i_1}, e_{i_2}) \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем возможным комбинациям индексов i_1, i_2 , которые удовлетворяют указанным под знаком суммы неравенствам.

Аналогично и в общем случае для кососимметрической формы L можно получить следующее представление:

$$L(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_k^{i_1} & \dots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}.$$

Тогда в соответствии с формулой (2) последнее равенство можно переписать в виде

$$L(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \pi^{i_1} \wedge \dots \wedge \pi^{i_k}(\xi_1, \dots, \xi_k)$$

Таким образом, любую кососимметрическую форму L можно представить в виде линейной комбинации

$$L = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} \pi^{i_1} \wedge \dots \wedge \pi^{i_k}$$

k -форм $\pi^{i_1} \wedge \dots \wedge \pi^{i_k}$, являющихся внешним произведением, составленным из простейших 1-форм $\pi^1, \dots, \pi^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная k -форма ω и некоторая система криволинейных координат $x^1, \dots, x^n$. В каждой точке $x \in D$ фиксируем базис $e_1(x), \dots, e_n(x)$ пространства TD_x , составленный из единичных векторов координатных направлений. (Например, если $x^1, \dots, x^n$ - декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, то $e_1(x), \dots, e_n(x)$ есть просто репер $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$, параллельно перенесенный из начала координат в точку x .) Тогда в каждой точке $x \in D$ на основании формул (4) и (6) получаем, что

$$\begin{aligned} \omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}(x), \dots, e_{i_k}(x)) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(\xi_1, \dots, \xi_k) \end{aligned}$$

или

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Таким образом, любая дифференциальная k -форма является комбинацией простейших k -форм $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, составленных из дифференциалов координат. Отсюда, собственно, и название «дифференциальная форма».

Коэффициенты $a_{i_1 \dots i_k}(x)$ линейной комбинации (8), вообще говоря, зависят от точки x , т. е. это какие-то функции, определенные в области, где задана форма ω_k .

В частности, нам уже давно известно разложение дифференциала

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) dx^n$$

а, как видно из равенств

$$\begin{aligned} \langle F, \xi \rangle &= \langle F^{i_1}(x) e_{i_1}(x), \xi^{i_2} e_{i_2}(x) \rangle = \\ &= \langle e_{i_1}(x), e_{i_2}(x) \rangle F^{i_1}(x) \xi^{i_2} = g_{i_1 i_2}(x) F^{i_1}(x) \xi^{i_2} = \\ &= g_{i_1 i_2}(x) F^{i_1}(x) dx^{i_2}(\xi) \end{aligned}$$

имеет также место разложение

$$\omega_{\mathbf{F}}^1(x) = \langle \mathbf{F}(x), \cdot \rangle = (g_{i_1 i}(x) F^{i_1}(x)) dx^i = a_i(x) dx^i$$

которое в декартовых координатах выглядит особенно просто:

$$\omega_{\mathbf{F}}^1(x) = \langle \mathbf{F}(x), \cdot \rangle = \sum_{i=1}^n F^i(x) dx^i$$

Далее, в $\mathbb{R}^3$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \omega_V^2(x)(\xi_1, \xi_2) &= \begin{vmatrix} V^1(x) & V^2(x) & V^3(x) \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix} = \\ &= V^1(x) \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix} + V^2(x) \begin{vmatrix} \xi_1^3 & \xi_1^1 \\ \xi_2^3 & \xi_2^1 \end{vmatrix} + V^3(x) \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\omega_V^2(x) = V^1(x) dx^2 \wedge dx^3 + V^2(x) dx^3 \wedge dx^1 + V^3(x) dx^1 \wedge dx^2$$

Аналогично, из разложения по строке определителя n -го порядка для формы ω_V^{n-1} получаем следующее разложение:

$$\omega_V^{n-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} V^i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^n$$

где знак стоит над дифференциалом, который следует опустить в указанном слагаемом.

Внешний дифференциал формы

Все, что было до сих пор сказано о дифференциальных формах, пока в сущности относилось к каждой точке x области задания формы в отдельности и имело чисто алгебраический характер. Специфической для анализа операций над дифференциальными формами является операция их (внешнего) дифференцирования.

Условимся в дальнейшем под дифференциальными формами нулевого порядка в области $D \subset \mathbb{R}^n$ понимать функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, определенные в этой области. Определение 2. (Внешним) дифференциалом от 0-формы f в случае, если f - дифференцируемая функция, называется обычный дифференциал df от этой функции.

Если заданная в области $D \subset \mathbb{R}^n$ дифференциальная p -форма ($p \geq 1$)

$$\omega(x) = a_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

имеет дифференцируемые коэффициенты $a_{i_1 \dots i_p}(x)$, то ее (внешний) дифференциал есть форма

$$d\omega(x) = da_{i_1 \dots i_p}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Используя разложение (9) дифференциала функции и опираясь на вытекающую из соотношения (1) дистрибутивность внешнего произведения 1-форм, заключаем, что

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^i}(x) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= \alpha_{i_1 \dots i_p}(x) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \end{aligned}$$

т. е. (внешний) дифференциал от p -формы ($p \geq 0$) всегда есть форма степени $p + 1$.

Отметим, что данное выше определение 1 дифференциальной p -формы в области $D \subset \mathbb{R}^n$, как теперь можно понять, слишком общо, поскольку никак не связывает формы $\omega(x)$, соответствующие различным точкам области D . Реально в анализе используются лишь формы, коэффициенты $a_{i_1 \dots i_p}(x)$ координатного представления которых являются достаточно регулярными (чаще всего бесконечно дифференцируемыми) функциями в области D . Порядок гладкости формы ω в области $D \subset \mathbb{R}^n$ принято характеризовать низшим из порядков гладкости ее коэффициентов. Совокупность всех форм степени $p \geq 0$ с коэффициентами класса $C^{(\infty)}(D, \mathbb{R})$ чаще всего обозначают символом $\Omega^p(D, \mathbb{R})$ или Ω^p .

Таким образом, определенная нами операция дифференцирования форм осуществляет отображение $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$.

Рассмотрим несколько полезных конкретных примеров.

3.пр.

9. Для 0-формы $\omega = f(x, y, z)$ - дифференцируемой функции, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^3$, - получаем

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Пример 10. Пусть

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

- дифференциальная 1-форма в области D пространства $\mathbb{R}^2$, наделенного координатами (x, y) . Считая P и Q дифференцируемыми в D функциями, в соответствии с определением 2 получаем

$$\begin{aligned} d\omega(x, y) &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

3.пр.

11. Для 1-формы

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

заданной в области D пространства $\mathbb{R}^3$, получаем

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

3.пр.

12. Подсчет дифференциала 2-формы

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

где P, Q, R - дифференцируемые в области $D \subset \mathbb{R}^3$ функции, приводит к соотношению

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Если (x^1, x^2, x^3) - декартовы координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, а $x \mapsto f(x), x \mapsto \mathbf{F}(x) = (F^1, F^2, F^3)(x), x \mapsto \mathbf{V} = (V^1, V^2, V^3)(x)$ - гладкие скалярное и векторные поля в области $D \subset \mathbb{R}^3$, то вместе с ними (особенно в физических задачах) часто рассматривают соответственно векторные поля

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) - \text{градиент скалярного поля } f$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}, \frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}, \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right)$$

ротор векторного поля $\mathbf{F}$

и скалярное поле

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} - \partial\text{-дивергенция векторного поля } \mathbf{V}.$$

О градиенте скалярного поля мы в свое время уже говорили. Не останавливаясь пока на физическом содержании ротора и дивергенции векторного поля, отметим лишь связь этих классических операторов теории поля с операцией дифференцирования форм.

В евклидовом ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3$ между векторными полями и один- и два-формами имеется взаимно однозначное соответствие

$$\mathbf{F} \leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}}^1 = \langle \mathbf{F}, \cdot \rangle, \quad \mathbf{V} \leftrightarrow \omega_{\mathbf{V}}^2 = (\mathbf{V}, \cdot, \cdot).$$

Заметим также, что любая 3-форма в области $D \subset \mathbb{R}^3$ имеет вид $\rho(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Учитывая эти обстоятельства, можно ввести следующие определения для $\text{grad } f, \text{rot } \mathbf{F}, \text{div } \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} f \mapsto \omega^0(=f) \mapsto d\omega^0(=df) &= \omega_g^1 \mapsto \mathbf{g} := \text{grad } f, \\ \mathbf{F} \mapsto \omega_{\mathbf{F}}^1 \mapsto d\omega_{\mathbf{F}}^1 &= \omega_r^2 \mapsto \mathbf{r} := \text{rot } \mathbf{F}, \\ \mathbf{V} \mapsto \omega_{\mathbf{V}}^2 \mapsto d\omega_{\mathbf{V}}^2 &= \omega_\rho^2 \mapsto \rho := \text{div } \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Примеры 9, 11, 12 показывают, что при этом в декартовых координатах мы приходим к выписанным выше выражениям (14), (15), (16) для $\text{grad } f, \text{rot } \mathbf{F}, \text{div } \mathbf{V}$. Таким образом, перечисленные операторы теории поля можно рассматривать как конкретные проявления операции дифференцирования внешних форм, которая выполняется единообразно на формах любой степени. Подробнее о градиенте, роторе и дивергенции будет сказано в гл. XIV.

Перенос векторов и форм при отображениях

Посмотрим внимательнее на то, что происходит с функциями (0-формами) при отображении областей. Пусть $\varphi : U \rightarrow V$ - отображение области $U \subset \mathbb{R}^m$ в область $V \subset \mathbb{R}^n$. Под действием отображения φ каждая точка $t \in U$ переходит в определенную точку $x = \varphi(t)$ области V .

Если на V определена функция f , то благодаря отображению $\varphi: U \rightarrow V$ на области U естественно возникает полученная из f функция φ^*f , которая определяется равенством

$$(\varphi^*f)(t) := f(\varphi(t)),$$

т. е. чтобы найти значение φ^*f в точке $t \in U$, надо отправить t в точку $x = \varphi(t) \in V$ и вычислить там значение функции f .

Таким образом, если при отображении $\varphi: U \rightarrow V$ точки области U переходят в точки области V , то множество определенных на V функций под действием построенного соответствия $f \mapsto \varphi^*f$ отображается (в обратную сторону) в множество функций, определенных на U .

Иными словами, мы показали, что при отображении $\varphi: U \rightarrow V$ естественно возникает отображение $\varphi^*: \Omega^0(V) \rightarrow \Omega^0(U)$, которое преобразует заданные на V нуль-формы в нуль-формы, определенные на U .

Рассмотрим теперь общий случай переноса форм любой степени.

Пусть $\varphi: U \rightarrow V$ — гладкое отображение области $U \subset \mathbb{R}_t^m$ в область $V \subset \mathbb{R}_x^n$, $\varphi'(t): TU_t \rightarrow TV_{x=\varphi(t)}$ — соответствующее φ отображение касательных пространств, и пусть ω — некоторая p -форма в области V . Тогда форме ω можно сопоставить p -форму $\varphi^*\omega$ в области U , которая в точке $t \in U$ на наборе векторов $\tau_1, \dots, \tau_p \in TU_t$ определяется равенством

$$\varphi^*\omega(t)(\tau_1, \dots, \tau_p) := \omega(\varphi(t))(\varphi'_1\tau_1, \dots, \varphi'_p\tau_p)$$

Таким образом, каждому гладкому отображению $\varphi: U \rightarrow V$ соответствует отображение $\varphi^*: \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U)$, которое переносит заданные на V формы в область U . Из соотношения (17), очевидно, следует, что

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega' + \omega'') &= \varphi^*(\omega') + \varphi^*(\omega''), \\ \varphi^*(\lambda\omega) &= \lambda\varphi^*\omega, \quad \text{если } \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Вспомнив закон $(\psi \circ \varphi)' = \psi' \circ \varphi'$ дифференцирования композиции отображений $\varphi: U \rightarrow V, \psi: V \rightarrow W$, из (17) заключаем дополнительно, что

$$(\psi \circ \varphi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$$

(естественный обратный ход: композиция отображений)

$$\psi^*: \Omega^p(W) \rightarrow \Omega^p(V), \quad \varphi^*: \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U)$$

Посмотрим теперь, как практически осуществляется перенос форм.

3. пр.

13. В области $V \subset \mathbb{R}_x^n$ возьмем 2-форму $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$. Пусть $x^i = x^i(t^1, \dots, t^m)$, $i = 1, \dots, n$ — координатная запись отображения $\varphi: U \rightarrow V$ области $U \subset \mathbb{R}_t^m$ в V .

Мы хотим найти координатное представление формы $\varphi^*\omega$ в U . Берем точку $t \in U$ и векторы $\tau_1, \tau_2 \in TU_t$. В пространстве $TV_{x=\varphi(t)}$ им отвечают векторы $\xi_1 = \varphi'(t)\tau_1, \xi_2 = \varphi'(t)\tau_2$, координаты $(\xi_1^1, \dots, \xi_1^m), (\xi_2^1, \dots, \xi_2^m)$ которых выражаются через координаты $(\tau_1^1, \dots, \tau_1^m), (\tau_2^1, \dots, \tau_2^m)$ векторов τ_1, τ_2 с помощью матрицы Якоби по формулам

$$\xi_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial t^i}(t)\tau_1^i, \quad \xi_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial t^i}(t)\tau_2^i, \quad i = 1, \dots, m$$

(по j суммирование от 1 до m).

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\varphi^* \omega(t) (\tau_1, \tau_2) &:= \omega(\varphi(t)) (\xi_1, \xi_2) = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} (\xi_1, \xi_2) = \\
&= \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \tau_1^{j_1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \tau_1^{j_2} \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \tau_2^{j_1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \tau_2^{j_2} \end{vmatrix} = \\
&= \sum_{j_1, j_2=1}^m \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \begin{vmatrix} \tau_1^{j_1} & \tau_1^{j_2} \\ \tau_2^{j_1} & \tau_2^{j_2} \end{vmatrix} = \\
&= \sum_{j_1, j_2=1}^m \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} dt^{j_2} \wedge dt^{j_1} (\tau_1, \tau_2) = \\
&= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq m} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} - \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \right) dt^{j_1} \wedge dt^{j_2} (\tau_1, \tau_2) = \\
&= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq m} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \end{vmatrix} (t) dt^{j_1} \wedge dt^{j_2} (\tau_1, \tau_2).
\end{aligned}$$

Следовательно, мы показали, что

$$\varphi^* (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq m} \frac{\partial (x^{i_1}, x^{i_2})}{\partial (t^{j_1}, t^{j_2})} (t) dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}.$$

Если воспользоваться свойствами (18) и (19) операции переноса форм¹⁾ и повторить проведенную в последнем примере выкладку в общем виде, то получим следующее равенство:

$$\varphi^* \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1, \dots, i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \right) =$$

Заметим, что если в форме, стоящей здесь под знаком φ^* , формально сделать замену $x = x(t)$, выразить дифференциалы $dx^1, \dots, dx^n$ через дифференциалы $dt^1, \dots, dt^m$ и упростить полученное выражение, пользуясь свойствами внешнего произведения, то мы как раз и получим правую часть равенства (21).

Действительно, для каждого фиксированного набора индексов $i_1, \dots, i_p$

$$\begin{aligned}
a_{i_1, \dots, i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} &= a_{i_1, \dots, i_p}(x(t)) \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} dt^{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}} dt^{j_p} \right) = \\
&= a_{i_1, \dots, i_p}(x(t)) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}} dt^{j_1} \wedge \dots \wedge dt^{j_p} = \\
&= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m} a_{i_1, \dots, i_p}(x(t)) \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (t^{j_1}, \dots, t^{j_p})} dt^{j_1} \wedge \dots \wedge dt^{j_p}.
\end{aligned}$$

Суммируя такие равенства по всем упорядоченным наборам $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, получаем правую часть соотношения (21).

¹⁾ Если (19) использовать поточечно, то видно, что

$$\varphi^*(a(x)\omega) = a(\varphi(t))\varphi^*\omega.$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m}} a_{i_1, \dots, i_p}(x(t)) \frac{\partial (x^{i_1}, \dots, x^{i_p})}{\partial (t^{j_1}, \dots, t^{j_p})} dt^{j_1} \wedge \dots \wedge dt^{j_p}.$$

Таким образом, мы доказали следующее важное в техническом отношении

Утверждение. Если в области $V \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная форма ω , $\varphi : U \rightarrow V$ - гладкое отображение области $U \subset \mathbb{R}^m$ в V , то координатная запись формы $\varphi^*\omega$ может быть получена из координатной записи

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1, \dots, i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

формы ω прямой заменой переменных $x = \varphi(t)$ (с последующим преобразованием в соответствии со свойствами внешнего произведения).

3.пр.

14. В частности, если $m = n = p$, то соотношение (21) сводится к равенству

$$\varphi^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \det \varphi'(t) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n$$

Значит, если под знаком кратного интеграла вместо $f(x)dx^1 \dots dx^n$ писать $f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, то формула

$$\int_{V=\varphi(U)} f(x)dx = \int_U f(\varphi(t)) \det \varphi'(t) dt$$

замены переменных в кратном интеграле при сохраняющих ориентацию диффеоморфизмах (т.е. при $\det \varphi'(t) > 0$) получалась бы автоматически формальной подстановкой $x = \varphi(t)$, подобно тому, как это имело место в одномерном случае, и ей можно было бы придать следующий вид:

$$\int_{\varphi(U)} \omega = \int_U \varphi^* \omega.$$

Заметим в заключение, что если степень p взятой в области $V \subset \mathbb{R}_x^n$ формы ω больше, чем размерность m области $U \subset \mathbb{R}^m$, которая отображается посредством $\varphi : U \rightarrow V$ в область V , то соответствующая ω на U форма $\varphi^*\omega$, очевидно, окажется нулевой. Таким образом, отображение $\varphi^* : \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U)$, вообще говоря, не обязано быть инъективным.

С другой стороны, если $\varphi : U \rightarrow V$ имеет гладкое обратное отображение $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$, то в силу соотношения (20) и равенств $\varphi^{-1} \circ \varphi = e_U$, $\varphi \circ \varphi^{-1} = e_V$ получаем, что $(\varphi)^* \circ (\varphi^{-1})^* = e_U^*$, $(\varphi^{-1})^* \circ (\varphi)^* = e_V^*$, и поскольку e_U^* и e_V^* — тождественные отображения $\Omega^p(U)$ и $\Omega^p(V)$ соответственно, то отображения $\varphi^* : \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U)$, $(\varphi^{-1})^* : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(V)$, как и следовало ожидать, оказываются взаимно обратными. То есть в этом случае отображение $\varphi^* : \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U)$ биективно.

Отметим, наконец, что наряду с уже указанными выше свойствами (18) - (20) отображение φ^* переноса форм, как можно проверить, удовлетворяет также соотношению

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$$

Это принципиально важное равенство показывает, в частности, что определенная нами в координатном виде операция дифференцирования форм на самом деле не зависит от выбора системы координат, в которой записана дифференцируемая форма ω . Подробнее это будет обсуждаться в гл. XV.

Формы на поверхностях

Определение 3. Говорят, что на гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная p -форма ω , если в каждой точке $x \in S$ на векторах касательной к S плоскости TS_x определена p -форма $\omega(x)$.

3.пр.

15. Если гладкая поверхность S лежит в области $D \subset \mathbb{R}^n$, в которой определена форма ω , то поскольку в любой точке $x \in S$ имеет место включение $TS_x \subset TD_x$, можно рассмотреть ограничение формы $\omega(x)$ на TS_x . Так на S возникает форма $\omega|_S$, которую естественно назвать ограничением формы ω на поверхность S .

Как мы знаем, поверхность локально или в целом задается параметрически. Пусть $\varphi : U \rightarrow S = \varphi(U) \subset D$ - параметризованная гладкая поверхность в области D , а ω -форма в D . Тогда форму ω можно перенести в область U параметров и записать $\varphi^*\omega$ в координатном виде в соответствии с установленным выше алгоритмом. Ясно, что получаемая при этом в U форма $\varphi^*\omega$ совпадает с формой $\varphi^*(\omega|_S)$.

Заметим, что коль скоро $\varphi'(t) : TU_t \rightarrow TS_x$ в любой точке $t \in U$ есть изоморфизм между TU_t и TS_x , то можно переносить формы как с S на U , так и с U на S , поэтому как сами гладкие поверхности обычно задают локально или в целом параметрически, так и формы на них в конечном счете обычно задают в областях изменения параметров локальных карт.

3.пр.

16. Пусть ω_V^2 - рассмотренная в примере 8 форма потока, порожденная векторным полем скоростей течения V в области D ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Если S - гладкая ориентированная поверхность в D , то можно рассмотреть ограничение $\omega_V^2|_S$ формы ω_V^2 на S . Получаемая при этом форма $\omega_V^2|_S$ характеризует поток через каждый элемент поверхности S .

Если $\varphi : I \rightarrow S$ локальная карта поверхности S , то, сделав замену переменных $x = \varphi(t)$ в координатном выражении (12) формы ω_V^2 , получим координатное выражение определенной на квадрате I формы $\varphi^*\omega_V^2 = \varphi^*(\omega_V^2|_S)$ в данных локальных координатах поверхности.

3.пр.

17. Пусть ω_F^1 - рассмотренная в примере 7 форма работы, порожденная действующим в области D евклидова пространства полем сил F . Пусть $\varphi : I \rightarrow \varphi(I) \subset D$ - гладкий путь (φ - не обязательно гомеоморфизм). Тогда в соответствии с общим принципом ограничения и переноса форм на отрезке I возникает форма $\varphi^*\omega_F^1$, координатное представление $a(t)dt$ которой можно получить, выполнив замену переменных $x = \varphi(t)$ в координатном выражении (11) формы ω_F^1 .

15.0.7 Tasks and Exercises

1. Вычислите значения приведенных ниже дифференциальных форм ω в $\mathbb{R}^n$ на указанных наборах векторов:

a) $\omega = x^2 dx^1$ на векторе $\xi = (1, 2, 3) \in T\mathbb{R}_{(3,2,1)}^3$.

b) $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + x^1 dx^2 \wedge dx^4$ на упорядоченной паре векторов $\xi_1, \xi_2 \in T\mathbb{R}_{(1,0,0,0)}^4$.

с) $\omega = df$, где $f = x^1 + 2x^2 + \dots + nx^n$, а $\xi = (1, -1, \dots, (-1)^{n-1}) \in T\mathbb{R}_{(1,1,\dots,1)}^n$.

2. а) Проверьте, что форма $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ тождественно равна нулю, если не все индексы $i_1, \dots, i_k$ различны.

б) Объясните, почему на n -мерном векторном пространстве нет отличных от нуля кососимметрических форм степени $p > n$.

с) Упростите запись формы, заданной в виде

$$2dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 + 3dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1$$

д) Раскройте скобки и приведите подобные члены

$$(x^1 dx^2 + x^2 dx^1) \wedge (x^3 dx^1 \wedge dx^2 + x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^1 dx^2 \wedge dx^3)$$

е) Форму $df \wedge dg$, где $f = \ln(1 + |x|^2)$, $g = \sin |x|$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, запишите в виде комбинации форм $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq 3$. ф) Проверьте, что в $\mathbb{R}^n$

$$df^1 \wedge \dots \wedge df^n(x) = \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) (x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

г) Проведите все выкладки и покажите, что при $1 \leq k \leq n$

$$df^1 \wedge \dots \wedge df^k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \det \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^{i_1}} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{i_k}} \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^{i_1}} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial x^{i_k}} \end{vmatrix} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

3. а) Покажите, что форма α четной степени коммутирует с любой формой β , т. е. $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

в) Пусть $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$ и $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n раз). Проверьте, что

$$\omega^n = n! dp_1 \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$$

4. а) Форму $\omega = df$, где $f(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2$, запишите в виде комбинации форм $dx^1, \dots, dx^n$ и найдите дифференциал $d\omega$ формы ω .

б) Проверьте, что для любой функции $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, $d^2 f \equiv 0$, где $d^2 = d \circ d$, а d - оператор внешнего дифференцирования.

с) Покажите, что если коэффициенты $a_{i_1 i_k}$ формы $\omega = a_{i_1 i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ принадлежат классу $C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, то $d^2 \omega \equiv 0$ в области D . ления.

д) Найдите внешний дифференциал формы $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ в области ее опреде-

5. Если под знаком кратного интеграла $\int_D f(x) dx^1 \dots dx^n$ произведение $dx^1 \dots dx^n$ понимать

как форму $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, то, согласно результату примера 14, у нас будет возможность формально получать подынтегральные выражения формулы замены переменных в кратном интеграле. Выполните, согласно этой рекомендации, переход от декартовых координат:

а) к полярным координатам в $\mathbb{R}^2$,

б) к цилиндрическим координатам в $\mathbb{R}^3$,

с) к сферическим координатам в $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите ограничение формы:

- a) dx^i на гиперплоскость $x^i = 1$.
 b) $dx \wedge dy$ на кривую $x = x(t), y = y(t), a < t < b$.
 c) $dx \wedge dy$ на плоскость в $\mathbb{R}^3$, задаваемую уравнением $x = c$.
 d) $dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$ на грани стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^3$
 e) $\omega_i = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge \iint_{x^2} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$ на грани стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^n$; знак $\frown$ стоит над дифференциалом dx^2 , который выбрасывается из написанного произведения. 7. Выразите в сферических координатах $\mathbb{R}^3$ ограничение следующих форм на сферу радиуса R с центром в начале координат:

- a) dx
 b) dy .
 c) $dy \wedge dz$.

8. Отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано в виде $(u, v) \mapsto (u \cdot v, 1) = (x, y)$ Найдите:

- a) $\varphi^*(dx)$
 b) $\varphi^*(dy)$
 c) $\varphi^*(ydx)$.

9. Проверьте, что внешний дифференциал $d : \Omega^p(D) \rightarrow \Omega^{p+1}(D)$ обладает следующими свойствами:

- a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
 b) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$, где $\deg \omega_1$ - степень формы ω_1 .
 c) $\forall \omega \in \Omega^p \quad d(d\omega) = 0$.
 d) $\forall f \in \Omega^0 \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Покажите, что отображение $d : \Omega^p(D) \rightarrow \Omega^{p+1}(D)$, обладающее свойствами а), б), с), d), единственно.

10. Проверьте, что отображение $\varphi : \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U)$, отвечающее отображению $\varphi : U \rightarrow V$, обладает следующими свойствами:

- a) $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$
 b) $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$.
 c) $d\varphi^*\omega = \varphi^*d\omega$.
 d) Если еще имеется отображение $\psi : V \rightarrow W$, то $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

11. Покажите, что гладкая k -мерная поверхность ориентируема тогда и только тогда, когда на ней существует нигде не вырождающаяся k -форма.

15.0.8 3D Euclidean Space (!!!)

(впишу все нужные его свойства, то, про что я думал раньше!!! write it from Zorich!)

15.0.9 4D Euclidean Space (!!!)

(впишу все нужные его свойства, то, про что я думал раньше!!! write it from Zorich!)

15.0.10 3+1D Minkowski Space (!!!)

(впишу все нужные его свойства, то, про что я думал раньше!!! write it from Zorich!)

15.0.11 Multidimensional Spaces in the General Case (!!!)

(впишу все нужные его свойства, то, про что я думал раньше!!!)

15.1 Curved and Surface Integrals According to Zorich

15.1.1 The Integral of the Differential Form

1. Исходные задачи, наводящие соображения, примеры

а. Работа поля. Пусть $\mathbf{F}(x)$ - непрерывное векторное поле сил, действующих в области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Перемещение пробной частицы в поле связано с совершением работы. Требуется вычислить работу, совершаемую полем, при перемещении единичной пробной частицы по заданной траектории, точнее, вдоль гладкого пути $\gamma : I \rightarrow \gamma(I) \subset G$

Мы уже касались этого вопроса, рассматривая приложения определенного интеграла, поэтому здесь можно лишь напомнить решение задачи, отмечая некоторые характерные и полезные для дальнейшего элементы конструкции.

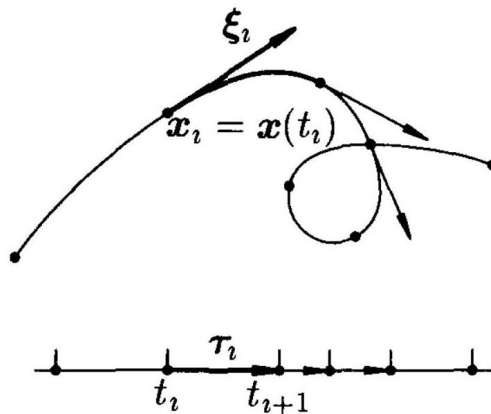


Рис. 83. Известно, что в постоянном поле F перемещение на вектор ξ связано с работой, равной $\langle F, \xi \rangle$.

Пусть $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ - определенное на отрезке $I = \{t \in \mathbb{R} | a \leq t \leq b\}$ гладкое отображение $\gamma : I \rightarrow G$.

Возьмем достаточно мелкое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда на каждом промежутке $I_i = \{t \in I | t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ разбиения с точностью до бесконечно малых более высокого порядка выполняется равенство $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_2) \approx \mathbf{x}'(t_i)(t - t_2)$. Вектору $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ смещения из t_i в t_{i+1} (рис. 83) в пространстве $\mathbb{R}^n$ отвечает перемещение из точки $\mathbf{x}(t_i)$ на вектор $\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$, который с указанной погрешностью можно считать совпадающим с вектором $\xi_i = \dot{\mathbf{x}}(t_i) \tau_i$, касательным к траектории в точке $\mathbf{x}(t_i)$. Ввиду непрерывности поля $\mathbf{F}(x)$, его можно считать локально постоянным, и потому работу ΔA_i , отвечающую промежутку (времени) I_i , можно с малой относительной погрешностью вычислять в виде

$$\Delta A_i \approx \langle \mathbf{F}(x_i), \xi_i \rangle$$

Или

$$\Delta A_i \approx \langle \mathbf{F}(x(t_i)), \dot{\mathbf{x}}(t_i) \tau_i \rangle.$$

Значит,

$$A = \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i \langle \mathbf{F}(x(t_i)), \dot{\mathbf{x}}(t_i) \rangle \Delta t_i,$$

откуда, переходя к пределу при измельчении разбиения отрезка I , получаем, что

$$A = \int_a^b \langle \mathbf{F}(x(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt.$$

Если выражение $\langle \mathbf{F}(x(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt$ переписать в виде $\langle \mathbf{F}(x), d\mathbf{x} \rangle$, то, считая координаты в $\mathbb{R}^n$ декартовыми, ему можно придать вид $F^1 dx^1 + \dots + F^n dx^n$, после чего формулу (1) можно записать как

$$A = \int_{\gamma} F^1 dx^1 + \dots + F^n dx^n$$

или как

$$A = \int_{\gamma} \omega_F^1.$$

Точный смысл написанным в (2) и (2') интегралам от 1-формы работы в вдоль пути γ придает формула (1).

3.пр.

1. Рассмотрим поле сил $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, определенное во всех точках плоскости $\mathbb{R}^2$, кроме начала координат. Вычислим работу этого поля в вдоль кривой γ_1 , заданной в виде $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, и вдоль кривой γ_2 , заданной соотношениями $x = 2 + \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. В соответствии с формулами (1), (2), (2') находим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega_F^1 &= \int_{\gamma_1} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t \cdot (-\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{\cos t \cdot \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) dt = 2\pi \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \omega_F^1 &= \int_{\gamma_2} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t(-\sin t) + (2 + \cos t) \cos t}{(2 + \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos t}{5 + 2 \cos t} dt = \int_0^{\pi} \frac{1 + 2 \cos t}{5 + 2 \cos t} dt + \int_{\pi}^0 \frac{1 + 2 \cos(2\pi - u)}{5 + 2 \cos(2\pi - u)} du = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1 + 2 \cos t}{5 + 2 \cos t} dt - \int_0^{\pi} \frac{1 + 2 \cos u}{5 + 2 \cos u} du = 0 \end{aligned}$$

3.пр.

2. Пусть $\mathbf{r}$ - радиус-вектор точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $r = |\mathbf{r}|$. Пусть всюду в $\mathbb{R}^3$ вне начала координат задано поле сил вида $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$. Это-так называемое центральное поле. Найдем работу поля $\mathbf{F}$ на пути $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus 0$. Используя (2), находим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(r)(xdx + ydy + zdz) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} f(r)d(x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(r(t))dr^2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(\sqrt{u(t)})du(t) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{r_0^2}^{r_1^2} f(\sqrt{u})du = \Phi(r_0, r_1). \end{aligned}$$

Здесь мы, как видно, положили $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = r^2(t)$, $r^2(t) = u(t)$, $r_0 = r(0)$, $r_1 = r(1)$. Итак, в любом центральном поле работа на пути γ оказалась зависящей только от расстояний r_0, r_1 начала и конца пути до центра 0 поля.

В частности, для гравитационного поля $\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$ единичной точечной массы, помещенной в начало координат, получаем

$$\Phi(r_0, r_1) = \frac{1}{2} \int_{r_0^2}^{r_1^2} \frac{1}{u^{3/2}} du = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}.$$

b. Поток через поверхность. Пусть в области G ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеется установившееся течение жидкости (или газа) и $x \mapsto V(x)$ -поле скоростей этого течения в области G . Пусть, кроме того, в G взята гладкая ориентированная поверхность S . Для определенности будем считать, что ориентация S задана полем нормалей. Требуется определить (объемный) расход или поток жидкости через поверхность S , точнее, требуется найти, какой объем жидкости протекает в единицу времени через поверхность S в указанную ориентирующим полем нормалей сторону этой поверхности.

Для решения задачи заметим, что если поле скоростей течения постоянно и равно $\mathbf{V}$, то поток в единицу времени через натянутый на пару векторов ξ_1, ξ_2 параллелограмм Π равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{V}, \xi_1, \xi_2$. Если $\boldsymbol{\eta}$ - нормаль к Π и ищется поток через Π в сторону, указываемую нормалью $\boldsymbol{\eta}$, то он равен смешанному произведению $(\mathbf{V}, \xi_1, \xi_2)$, если $\boldsymbol{\eta}$ и репер ξ_1, ξ_2 задают одинаковую ориентацию Π (т. е. если $\boldsymbol{\eta}, \xi_1, \xi_2$ -репер заданной в $\mathbb{R}^3$ ориентации). Если же репер ξ_1, ξ_2 задает в Π ориентацию, противоположную определяемой нормалью $\boldsymbol{\eta}$, то поток в сторону, указанную нормалью $\boldsymbol{\eta}$, равен $-(\mathbf{V}, \xi_1, \xi_2)$.

Вернемся теперь к исходной постановке. Предположим для простоты, что поверхность S в целом допускает гладкую параметризацию $\varphi : I \rightarrow S \subset G$, где I - двумерный промежуток плоскости $\mathbb{R}^2$. Разобьем I на маленькие промежутки I_i (рис. 84). Образ $\varphi(I_i)$ каждого такого промежутка аппроксимируем параллелограммом, натянутым на образы $\xi_1 = \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_1, \xi_2 = \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_2$ векторов $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ смещения вдоль координатных направлений. Считая, что $\mathbf{V}(x)$ мало меняется в пределах куска $\varphi(I_i)$ поверхности, и заменяя $\varphi(I_i)$ указанным параллелограммом, можем считать, что поток $\Delta\mathcal{F}_i$ через кусок $\varphi(I_i)$ поверхности с малой

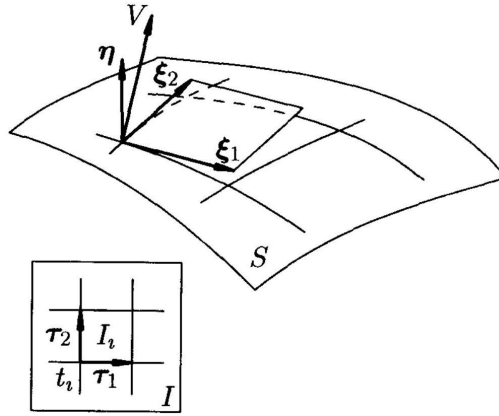


Рис. 84

относительной погрешностью совпадает с потоком постоянного поля скоростей $\mathbf{V}(x_i) = \mathbf{V}(\varphi(t_i))$ через параллелограмм, порожденный векторами ξ_1, ξ_2 .

Считая, что репер ξ_1, ξ_2 задает на S ту же ориентацию, что и η , находим

$$\Delta \mathcal{F}_i \approx (\mathbf{V}(x_i), \xi_1, \xi_2)$$

Суммируя элементарные потоки, получаем

$$\mathcal{F} = \sum_i \Delta \mathcal{F}_i \approx \sum_i \omega_{\mathbf{V}}^2(x_i)(\xi_1, \xi_2),$$

где $\omega_{\mathbf{V}}^2(x) = (\mathbf{V}(x), \cdot, \cdot)$ (рассмотренная в примере 8§5 гл. XII) 2-форма потока. Если перейти к пределу (беря все более мелкие разбиения P промежутка I), то естественно считать, что

$$\mathcal{F} := \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum \omega_{\mathbf{V}}^2(x_i)(\xi_1, \xi_2) =: \int_S \omega_{\mathbf{V}}^2$$

Последний символ есть интеграл от 2-формы $\omega_{\mathbf{V}}^2$ по ориентированной поверхности S .

Вспомнив (см. формулу (12) 5§ гл. XII) координатное выражение формы потока $\omega_{\mathbf{V}}^2$ в декартовых координатах, мы вправе записать так-же, что

$$\mathcal{F} = \int_S V^1 dx^2 \wedge dx^3 + V^2 dx^3 \wedge dx^1 + V^3 dx^1 \wedge dx^2$$

Мы обсудили лишь общий принцип решения поставленной задачи. В сущности, мы дали только точное определение (3) потока $\mathcal{F}$ и ввели некоторые обозначения (3), (4), но не получили пока эффективной вычислительной формулы, подобной формуле (1) для работы.

Заметим, что формула (1) получается из выражения (2), если вместо $x^1, \dots, x^n$ в него подставить функции $(x^1, \dots, x^n)(t) = x(t)$, задающие путь γ . Напомним (см. § 5 гл. XII), что такая замена интерпретируется как перенос заданной в G формы ω на отрезок $I = [a, b]$.

Совершенно аналогично и вычислительная формула для потока может быть получена прямой подстановкой в (4) параметрических уравнений поверхности.

В самом деле,

$$\omega_{\mathbf{V}}^2(x_i)(\xi_1, \xi_2) = \omega_{\mathbf{V}}(\varphi(t_i))(\varphi'(t_i)\tau_1, \varphi'(t_i)\tau_2) = (\varphi^*\omega_{\mathbf{V}}^2)(t_i)(\tau_1, \tau_2)$$

И

$$\sum_i \omega_V^2(x_i)(\xi_1, \xi_2) = \sum_i (\varphi^* \omega_V^2)(t_i)(\tau_1, \tau_2)$$

Форма $\varphi^* \omega_V^2$ определена на двумерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^2$. В I любая 2-форма имеет вид $f(t)dt^1 \wedge dt^2$, где f - зависящая от формы функция на I , поэтому

$$\varphi^* \omega_V^2(t_i)(\tau_1, \tau_2) = f(t_i) dt^1 \wedge dt^2(\tau_1, \tau_2)$$

Но $dt^1 \wedge dt^2(\tau_1, \tau_2) = \tau_1^1 \cdot \tau_2^2$ есть площадь определяемого ортогональными векторами τ_1, τ_2 прямоугольника I_2 .

Таким образом,

$$\sum_i f(t_i) dt^1 \wedge dt^2(\tau_1, \tau_2) = \sum_i f(t_i) |I_i|$$

При измельчении разбиения в пределе получим

$$\int_I f(t) dt^1 \wedge dt^2 = \int_I f(t) dt^1 dt^2$$

где в левой части, согласно (3), стоит интеграл от 2-формы $\omega^2 = f(t)dt^1 \wedge dt^2$ по простейшей ориентированной поверхности I , а в правой части - интеграл от функции f по прямоугольнику I .

Остается вспомнить, что координатное представление $f(t)dt^1 \wedge dt^2$ формы $\varphi^* \omega_V^2$ получается из координатного выражения формы ω_V^2 прямой заменой переменных $x = \varphi(t)$, где $\varphi : I \rightarrow G$ - карта поверхности S .

Выполнив эту замену, из (4) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_{S=\varphi(I)} \omega_V^2 = \int_I \varphi^* \omega_V^2 = \\ &= \int_I \left(V^1(\varphi(t)) \left| \frac{\partial x^2}{\partial t^1} \frac{\partial x^3}{\partial t^1} \right| \frac{\partial x^2}{\partial t^2} \frac{\partial x^3}{\partial t^2} \right| + V^2(\varphi(t)) \left| \frac{\partial x^1}{\partial t^1} \frac{\partial x^3}{\partial t^1} \right| \frac{\partial x^1}{\partial t^2} \frac{\partial x^3}{\partial t^2} \right| + V^3(\varphi(t)) \left| \frac{\partial x^1}{\partial t^1} \frac{\partial x^2}{\partial t^1} \right| \frac{\partial x^1}{\partial t^2} \frac{\partial x^2}{\partial t^2} \right) dt^1 \wedge dt^2. \end{aligned}$$

Последний интеграл, как показывает равенство (5), есть обычный интеграл Римана по прямоугольнику I .

Таким образом, мы нашли, что

$$\mathcal{F} = \int_I \begin{vmatrix} V^1(\varphi(t)) & V^1(\varphi(t)) & V^3(\varphi(t)) \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^1}(t) & \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^1}(t) & \frac{\partial \varphi^3}{\partial t^1}(t) \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^2}(t) & \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2}(t) & \frac{\partial \varphi^3}{\partial t^2}(t) \end{vmatrix} dt^1 dt^2$$

где $x = \varphi(t) = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)(t^1, t^2)$ — карта поверхности S , задающая ту же ориентацию S , что и указанное нам поле нормалей к S . Если карта $\varphi : I \rightarrow S$ задает на S противоположную ориентацию, то равенство (6), вообще говоря, нарушится, но, как следует из приведенных в начале пункта соображений, в этом случае его левая и правые части будут отличаться только знаком.

Окончательная формула (6), очевидно, есть просто-напросто аккуратно записанный в координатах t^1, t^2 предел сумм знакомых нам элементарных потоков $\Delta \mathcal{F}_i \approx (\mathbf{V}(x_i), \xi_1, \xi_2)$.

Мы рассмотрели случай поверхности, задаваемой одной картой. В общем случае гладкую поверхность S можно разбить на гладкие куски S_i , не имеющие между собой существенных пересечений, и найти поток через S как сумму потоков через куски S_i .

3.пр.

3. Пусть среда движется поступательно с постоянной скоростью $\mathbf{V} = (1, 0, 0)$. Если в области течения взять любую замкнутую поверхность, то, поскольку плотность среды не меняется, количество вещества в объеме, ограниченном взятой поверхностью, должно оставаться неизменным. Значит, суммарный поток среды через такую поверхность должен быть равен нулю.

Проконтролируем в этом случае формулу (6), взяв в качестве S сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Сферу S с точностью до множества, имеющего площадь нуль и потому пренебрежимого в рассматриваемом вопросе, можно задать параметрически

$$\begin{aligned}x &= R \cos \psi \cos \varphi, \\y &= R \cos \psi \sin \varphi, \\z &= R \sin \psi\end{aligned}$$

где $0 < \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 < \psi < \pi/2$.

После подстановки в (6) этих соотношений и $\mathbf{V} = (1, 0, 0)$, получим

$$\mathcal{F} = \int_I \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^2}{\partial t^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial t^2} & \frac{\partial x^2}{\partial t^2} \end{array} \right| d\varphi d\psi = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \psi d\psi \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

Поскольку интеграл равен нулю, мы даже не интересовались, в какую сторону (внутрь или наружу) ведется расчет потока.

3.пр.

4. Пусть поле скоростей движущейся в пространстве $\mathbb{R}^3$ среды в декартовых координатах x, y, z определяется равенством $\mathbf{V}(x, y, z) = (V^1, V^2, V^3)(x, y, z) = (x, y, z)$. Найдем в этом случае поток через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ внутрь ограниченного ею шара (т. е. в сторону внутренней нормали).

Взяв параметризацию сферы из предыдущего примера и выполнив подстановку в правую часть формулы (6), найдем, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \begin{array}{ccc} R \cos \psi \cos \varphi & R \cos \psi \sin \varphi & R \sin \psi \\ -R \cos \psi \sin \varphi & R \cos \psi \cos \varphi & 0 \\ R \sin \psi \cos \varphi & -R \sin \psi \sin \varphi & R \cos \psi \end{array} \right| d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3 \cos \psi d\psi = 4\pi R^3$$

Теперь проверим, согласуется ли задаваемая криволинейными координатами (φ, ψ) ориентация сферы с ориентацией, задаваемой внутренней нормалью. Легко убедиться, что не согласуется. Поэтому искомый поток $\mathcal{F} = -4\pi R^3$.

В данном случае полученный результат легко проверить: вектор V скорости течения в каждой точке сферы равен по величине R , ортогонален сфере и направлен наружу, поэтому поток изнутри во вне равен площади сферы $4\pi R^2$, умноженной на R . Поток в противоположную сторону получается равным $-4\pi R^3$.

2. Определение интеграла от формы по ориентированной поверхности. Решение рассмотренных в п. 1 задач приводит к определению интеграла от k -формы по ориентированной k -мерной поверхности.

Пусть сначала S - гладкая k -мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, заданная одной стандартной картой $\varphi : I \rightarrow S$. Пусть на S задана k -форма ω . Интеграл от формы ω по параметризованной поверхности $\varphi : I \rightarrow S$ строится следующим образом.

Берем разбиение P -мерного стандартного промежутка $I \subset \mathbb{R}^n$, индуцированное разбиениями (отрезков) проекций на координатные оси. В каждом промежутке I_i разбиения P берем вершину t_i , имеющую минимальные значения координат, и связываем с ней k векторов $\tau_1, \dots, \tau_k$, идущих в направлении координатных осей в k соседних с t_i вершин промежутка I_i (см. рис. 84). Находим векторы $\xi_1 = \varphi'(t_i) \tau_1, \dots, \xi_k = \varphi'(t_i) \tau_k$ касательного пространства $TS_{x_2=\varphi(t_2)}$, вычисляем $\omega(x_i)(\xi_1, \dots, \xi_k) = (\varphi^*\omega)(t_i)(\tau_1, \dots, \tau_k)$, составляем интегральную сумму $\sum_i \omega(x_i)(\xi_1, \dots, \xi_k)$ и переходим к пределу, когда параметр $\lambda(P)$ разбиения стремится к нулю.

Таким образом, мы принимаем

Определение 1 (интеграла от k -формы ω по заданной картой $\varphi : I \rightarrow S$ гладкой k -мерной поверхности).

$$\int_S \omega := \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_i \omega(x_i)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_i (\varphi^*\omega)(t_i)(\tau_1, \dots, \tau_k)$$

Если применить это определение к k -форме $f(t)dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$ на I (когда φ -тождественное отображение), то, очевидно, получим, что

$$\int_I f(t)dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k = \int_I f(t)dt^1 \dots dt^k$$

Таким образом, из (7) следует, что

$$\int_{S=\varphi(I)} \omega = \int_I \varphi^*\omega,$$

а последний интеграл, как видно из равенства (8), сводится к обычному кратному интегралу от соответствующей форме $\varphi^*\omega$ функции f на промежутке I .

Важнейшие соотношения (8) и (9) мы вывели из определения 1, но они сами могли бы быть приняты в качестве исходных определений. В частности, если D - произвольная область в $\mathbb{R}^n$ (не обязательно промежуток), то, чтобы не повторять процедуру суммирования, положим

$$\int_D f(t)dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k := \int_D f(t)dt^1 \dots dt^k$$

а для гладкой поверхности, заданной в виде $\varphi : D \rightarrow S$ и k -формы ω на ней, положим

$$\int_{S=\varphi(D)} \omega := \int_D \varphi^*\omega.$$

Если S - произвольная кусочно гладкая k -мерная поверхность, а ω -определенная на гладких кусках S k -форма, то, представив S как объединение $\bigcup_i S_i$ гладких параметризованных поверхностей, пересекающихся, быть может, лишь по множествам меньшей размерности, полагаем

$$\int_S \omega := \sum_i \int_{S_i} \omega.$$

В отсутствие содержательной физической или иной решаемой соотношением (10) задачи, такое определение вызывает вопрос о независимости полученной величины интеграла от разбиения $\bigcup_i S_i$ и от выбора параметризации отдельных его кусков.

Проверим корректность данного определения.

4 Рассмотрим сначала простейший случай, когда S есть область D_x в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi : D_t \rightarrow D_x$ - диффеоморфизм области $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на область D_x . В $D_x = Sk$ -форма ω имеет вид $f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$. Тогда, с одной стороны, в силу (8)

$$\int_{D_x} f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \int_{D_x} f(x)dx^1 \dots dx^k.$$

С другой стороны, по (9') и (8')

$$\int_{D_x} \omega := \int_{D_t} \varphi^* \omega = \int_{D_t} f(\varphi(t)) \det \varphi'(t) dt^1 \dots dt^k.$$

Но если $\det \varphi'(t) > 0$ в D_t , то по теореме о замене переменных в кратном интеграле имеет место равенство

$$\int_{D_x = \varphi(D_t)} f(x)dx^1 \dots dx^k = \int_{D_t} f(\varphi(t)) \det \varphi'(t) dt^1 \dots dt^k.$$

Значит, считая, что на $S = D_x$ имелись координаты $x^1, \dots, x^k$ и криволинейные координаты $t^1, \dots, t^k$ одного класса ориентации, мы показали, что величина интеграла $\int_S \omega$ не зависит от того, в какой из этих двух систем координат проводить его вычисление.

Отметим, что если бы криволинейные координаты $t^1, \dots, t^k$ задавали на S другую ориентацию, т. е. при $\det \varphi'(t) < 0$, очевидно, правая и левая части последнего равенства отличались бы знаком. Таким образом, о корректности определения интеграла можно говорить только в случае ориентированной поверхности интегрирования.

Пусть теперь $\varphi_x : D_x \rightarrow S$ и $\varphi_t : D_t \rightarrow S$ - две параметризации одной и той же гладкой k -мерной поверхности S и ω - k -форма на S . Сравним интегралы

$$\int_{D_x} \varphi_x^* \omega \quad \text{и} \quad \int_{D_t} \varphi_t^* \omega.$$

Поскольку $\varphi_t = \varphi_x \circ (\varphi_x^{-1} \circ \varphi_t) = \varphi_x \circ \varphi$, где $\varphi = \varphi_x^{-1} \circ \varphi_t : D_t \rightarrow D_x$ диффеоморфизм D_t на D_x , то $\varphi_t^* \omega = \varphi^* (\varphi_x^* \omega)$ (см. равенство (20) §5 гл. XII). Значит, форму $\varphi_t^* \omega$ в D_t можно получить заменой $x = \varphi(t)$ переменных в форме $\varphi_x^* \omega$. А как мы только что проверили, в этом случае интегралы (11) совпадают, если $\det \varphi'(t) > 0$ и отличаются знаком, если $\det \varphi'(t) < 0$.

Итак, показано, что если $\varphi_t : D_t \rightarrow S$, $\varphi_x : D_x \rightarrow S$ - параметризации одного класса ориентации поверхности S , то интегралы (11) совпадают. Независимость интеграла от выбора любой из согласованных систем криволинейных координат на поверхности S проверена.

Независимость интеграла (10) по ориентированной кусочно гладкой поверхности S от способа ее разбиения $\bigcup_i S_i$ на гладкие куски вытекает из аддитивности обычного кратного интеграла (достаточно рассмотреть более мелкое разбиение, получающееся наложением двух разбиений и проверить, что значение интеграла по нему совпадает со значением на каждом из двух исходных разбиений).

На основе проведенных рассмотрений теперь разумно принять следующую цепочку формальных определений, соответствующих изложенной в определении 1 конструкции интеграла от формы.

Определение 1' (интеграла от формы по ориентированной поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$).

а) Если в области $D \subset \mathbb{R}^k$ задана форма $f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$, то

$$\int_D f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k := \int_D f(x)dx^1 \dots dx^k.$$

б) Если $S \subset \mathbb{R}^n$ - гладкая k -мерная ориентированная поверхность и $\varphi : D \rightarrow S$ - ее параметризация, а ω - k -форма на S , то

$$\int_S \omega := \pm \int_D \varphi^* \omega$$

причем знак $+$ берется, если параметризация φ согласуется с заданной ориентацией S , а знак $-$ берется в противоположном случае.

с) Если S - кусочно гладкая k -мерная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^n$, ω - k -форма на S (определенная там, где S имеет касательную плоскость), то

$$\int_S \omega := \sum_i \int_{S_i} \omega$$

где $S_1, \dots, S_m, \dots$ - разложение S на гладкие параметризуемые k -мерные куски, пересекающиеся разве лишь по кусочно гладким поверхностям меньшей размерности.

Мы видим, в частности, что изменение ориентации поверхности влечет за собой изменение знака интеграла.

15.1.2 Tasks and Exercises

1. а) Пусть x, y - декартовы координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$. Укажите, для какого векторного поля форма $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ является его формой работы.

б) Найдите интеграл от указанной в а) формы ω по следующим путям γ_2 :

$$[0, \pi] \ni t \xrightarrow{\gamma_1} (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2; \quad [0, \pi] \ni t \xrightarrow{\gamma_2} (\cos t, -\sin t) \in \mathbb{R}^2;$$

путь γ_3 состоит в движении по отрезкам, соединяющим последовательно точки $(1, 0), (1, 1), (-1, 1), (-1, 0)$; путь γ_4 состоит в движении по отрезкам, соединяющим последовательно точки $(1, 0), (1, -1), (-1, -1), (-1, 0)$.

2. Пусть f - гладкая функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$, а γ - гладкий путь в D с началом $p_0 \in D$ и концом $p_1 \in D$. Найдите интеграл от формы $\omega = df$ по пути γ .

3. а) Найдите интеграл от формы $\omega = dy \wedge dz + dz \wedge dx$ по границе стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^3$, ориентированной внешней нормалью.

б) Укажите поле скоростей, для которого рассмотренная в а) форма ω является его формой потока.

4. а) Пусть x, y, z - декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$. Укажите поле скоростей, для которого форма

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

была бы его формой потока.

b) Найдите интеграл от указанной в а) формы ω по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ориентированной внешней нормалью.

с) Покажите, что поток поля $\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ через сферу $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$ равен нулю.

d) Проверьте, что поток указанного в с) поля через тор, параметрические уравнения которого даны в примере 4§1 гл. XII, также равен нулю. 5. Известно, что между давлением P , объемом V и температурой T данного количества вещества имеется связь $f(\dot{P}, V, T) = 0$, называемая в термодинамике уравнением состояния. Например, для одного моля идеального газа уравнение состояния выражается формулой Клапейрона $\frac{PV}{T} - R = 0$, где R - универсальная газовая постоянная.

Поскольку величины P, V, T связаны уравнением состояния, зная любую пару из них, в принципе можно определить и остающуюся величину. Значит, состояние любой системы можно характеризовать, например, точками (V, P) плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами V, P , тогда эволюции состояния системы как функции времени t будет отвечать некоторый путь γ в этой плоскости.

Пусть газ помещен в цилиндр, в котором без трения может перемещаться поршень. Меняя положение поршня, за счет механической работы мы можем изменить состояние газа, заключенного между поршнем и стенками цилиндра. Наоборот, меняя состояние газа (например, подогревая его), можно заставить газ совершать механическую работу (например, за счет расширения поднимать груз). В этой задаче и следующих задачах 6, 7, 8 все процессы считаются проходящими столь медленно, что в каждый конкретный момент давление и температура успевают усредниться во всем объеме вещества и, таким образом, в каждый момент времени система удовлетворяет уравнению состояния. Это так называемые квазистатические процессы.

а) Пусть γ -путь в плоскости V, P , отвечающий квазистатическому переходу заключенного между стенками цилиндра и поршнем газа из состояния V_0, P_0 в состояние V_1, P_1 . Покажите, что величина A совершаемой на этом пути газом механической работы определяется следующим криволинейным интегралом: $A = \int_{\gamma} PdV$.

b) Найдите механическую работу, совершаемую одним молем идеального газа при переходе из состояния V_0, P_0 в состояние V_1, P_1 по каждому из следующих путей (рис. 85): γ_{OLI} - изобара OL ($P = P_0$), затем изохора LI ($V = V_1$); γ_{OKI} - изохора OK ($V = V_0$); затем изобара KI ($P = P_1$); γ_{OI} - изотерма $T = \text{const}$ (в предположении, что $P_0V_0 = P_1V_1$).

с) Покажите, что полученная в а) формула для механической работы, совершаемой заключенным между поршнем и стенками цилиндра газом, на самом деле является общей, т.е. она остается в силе для работы газа, заключенного в любой деформируемой оболочке.

О термодинамике (???)

(??? нахрена это тут????)

- Количество тепла, получаемого системой в том или ином процессе изменения ее состояний, как и совершаемая системой механическая работа (см. задачу 5), зависит не только от начального и конечного состояний системы, но и от пути перехода. Важной характеристикой вещества и совершаемого им (или над ним) термодинамического процесса является тепло-

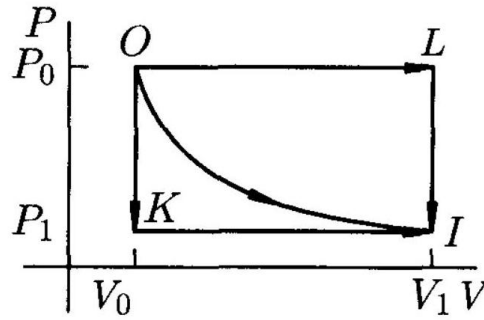


Рис. 85. емкость - отношение полученного веществом тепла к изменению его температуры. Точное определение теплоемкости можно дать в следующей форме. Пусть x -точка в плоскости состояний F (с координатами V, P , или V, T , или P, T), а $e \in TF_x$ - вектор, указывающий направление смещения из точки x . Пусть t - малый параметр. Рассматриваем смещение из состояния x в состояние $x + te$ вдоль отрезка на плоскости F , определяемого этими состояниями. Пусть $\Delta Q(x, te)$ - полученное в этом процессе веществом тепло, а $\Delta T(x, te)$ - изменение температуры вещества.

Теплоемкостью $C = C(x, e)$ вещества (системы), отвечающей состоянию x и направлению смещения из этого состояния, называется величина

$$C(x, e) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(x, te)}{\Delta T(x, te)}$$

В частности, если система теплоизолирована, то ее эволюция происходит без обмена теплом с внешней средой. Это так называемый адиабатический процесс. Отвечающая такому процессу кривая на плоскости состояний F называется адиабатой. Значит, смещению из данного состояния x в направлении адиабаты отвечает нулевая теплоемкость системы.

Смещению по изотерме $T = \text{const}$ отвечает бесконечная теплоемкость.

Особенно часто используются теплоемкости $C_V = C(x, e_V)$, $C_P = C(x, e_P)$, отвечающие смещениям по изохоре $V = \text{const}$ и изобаре $P = \text{const}$ соответственно. Опыт показывает, что в довольно широком диапазоне состояний данной массы вещества каждую из величин C_V, C_P можно считать практически постоянной. Теплоемкости, отвечающие одному молю данного вещества, принято называть молярными и обозначать (в отличие от прочих) прописными (а не строчными) буквами. Мы будем считать, что имеем дело с одним молем вещества.

Между количеством ΔQ полученного веществом в данном процессе тепла, изменением ΔU его внутренней энергии и совершенной им механической работой ΔA в силу закона сохранения энергии имеется связь $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$. Таким образом, при малом смещении te из состояния $x \in F$ полученное веществом тепло можно найти как значение формы $\delta Q := dU + PdV$ в точке x на векторе $te \in TF_x$ (формулу PdV работы см. в задаче 5с)). Значит, если координатами состояния считать T и V , а в качестве параметра при смещении (в неизотермическом направлении) принять T , то можно написать, что

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dT} + P \frac{dV}{dT}$$

Производная $\frac{dV}{dT}$ определяет направление смещения из состояния $x \in F$ плоскости состояний с координатами T, V . В частности, если $\frac{dV}{dT} = 0$, то смещение идет в направлении изохоры $V = \text{const}$, и мы получаем, что $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}$. Если $P = \text{const}$, то $\frac{dV}{dT} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P=\text{const}}$ (в общем случае $V = V(P, T)$ - это разрешенное относительно V уравнение состояния $f(P, V, T) = 0$). Значит,

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right) \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

где индексы P, V, T в правой части указывают параметр состояния, фиксируемый при отыскании соответствующей частной производной. Сопоставляя полученные выражения для C_V и C_P , видим, что

$$C_P - C_V = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right) \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

Экспериментами на газах (опыты Джоуля 1) - Томсона) установлено и затем постулировано в модели идеального газа, что его внутренняя энергия U зависит только от температуры T , т.е. $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$. Таким образом, для идеального газа $C_P - C_V = P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$. Учитывая, что для моля идеального газа $PV = RT$, отсюда получаем соотношение $C_P - C_V = R$, называемое в термодинамике уравнением Майера²⁾.

То, что для моля газа внутренняя энергия зависит только от температуры, позволяет записать форму δQ в виде

$$\delta Q = \frac{\partial U}{\partial T} dT + PdV = C_V dT + PdV.$$

Чтобы вычислить количество тепла, полученное молем газа на пути γ изменения его состояний, надо, следовательно, найти интеграл от формы $C_V dT + PdV$ по γ . Эту форму иногда удобно иметь в переменных V, P . Если воспользоваться уравнением состояния $PV = RT$ и соотношением $C_P - C_V = R$, то получим

$$\delta Q = C_P \frac{P}{R} dV + C_V \frac{V}{R} dP.$$

а) Напишите формулу для количества Q тепла, получаемого молем газа при изменении его состояний вдоль пути γ плоскости состояний F .

б) Считая величины C_P, C_V постоянными, найдите величину Q , отвечающую каждому из путей $\gamma_{OLI}, \gamma_{OKI}, \gamma_{OI}$, указанных в пункте б) задачи 5.

с) Найдите (вслед за Пуассоном) уравнение адиабаты, проходящей через точку (V_0, P_0) плоскости состояний F с координатами V, P (Пуассон нашел,

1. Дж. П. Джоуль (1818-1889) - английский физик; открыл закон теплового действия тока, а также определил независимо от Майера механический эквивалент теплоты.

²⁾ Ю. Р. Майер (1814-1878) - немецкий ученый, врач по образованию; высказал закон сохранения и превращения энергии, нашел механический эквивалент теплоты. что на адиабате $PV^{C_P/C_V} = \text{const}$. Величина C_P/C_V называется адиабатической постоянной данного газа. Для воздуха $C_P/C_V \approx 1,4$.) Вычислите после этого работу, которую необходимо совершить, чтобы теплоизолированный от внешней среды моль воздуха, находящегося в состоянии (V_0, P_0) , поместить в объем $V_1 = \frac{1}{2}V_0$

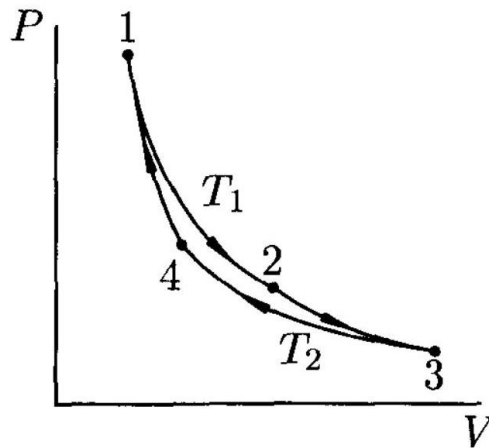


Рис. 86.

7. Напомним, что цикл Карно ¹⁾ изменения состояния рабочего тела тепловой машины (например, газа, находящегося в цилиндре под поршнем) состоит в следующем (рис. 86). Имеются два энергоемких тела, нагреватель и холодильник (например, паровой котёл и атмосфера), находящиеся при постоянной температуре T_1 и T_2 соответственно ($T_1 > T_2$). Рабочее тело (газ) рассматриваемой тепловой машины, имея в состоянии 1 температуру T_1 , приводится в контакт с нагревателем и за счет уменьшения внешнего давления по изотерме квазистатически расширяется и переводится в состояние 2.

При этом машина заимствует от нагревателя тепло Q_1 и производит механическую работу A_{12} против внешнего давления. В состоянии 2 газ теплоизолируют и заставляют квазистатически расширяться до состояния 3, пока его температура не достигнет температуры T_2 холодильника. При этом машина также совершит некоторую работу A_{23} против внешнего давления. В состоянии 3 газ приводят в контакт с холодильником и путем увеличения давления изотермически сжимают до состояния 4. При этом над газом совершается работа (сам газ совершает отрицательную работу A_{34}) и газ отдает холодильнику некоторое количество тепла Q_2 . Состояние 4 выбирается так, чтобы из него можно было вернуться в исходное состояние 1 квазистатическим сжатием газа по адиабате. Итак, из состояния 4 газ возвращают в состояние 1. При этом над газом придется совершить работу (а сам газ произведет отрицательную работу A_{41}). В результате описанного кругового процесса (цикла Карно) внутренняя энергия газа (рабочего тела машины), очевидно, не изменится (ведь мы вернулись в исходное состояние), поэтому произведенная машиной работа равна $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2$.

Полученное от нагревателя тепло Q_1 лишь частично пошло на совершение работы A . Величину $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ естественно назвать коэффициентом полезного действия рассматриваемой тепловой машины.

а) Используя результаты, полученные в пп. а) и с) задачи 6, покажите, что для цикла Карно имеет место равенство $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$.

¹⁾ Н. Л. С. Карно (1796-1832) - французский инженер, один из родоначальников термодинамики. б) Докажите теперь следующую первую из двух знаменитых теорем Карно. Коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температур T_1 и T_2 нагревателя и холодильника (но не зависит от устройства машины и вида ее рабочего тела).

8. Пусть γ -замкнутый путь в плоскости F состояний рабочего тела произвольной тепловой машины (см. задачу 7), отвечающий замкнутому циклу ее работы. Количество тепла, которым рабочее тело (например, газ) обменивается с внешней средой, и температура, при которой происходит теплообмен, связаны фундаментальным неравенством Клаузиуса $\int_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} \leq 0$. Здесь δQ - форма теплообмена, о которой говорилось в задаче 6.

а) Покажите, что для цикла Карно (см. задачу 7) неравенство Клаузиуса обращается в равенство.

б) Покажите, что если рабочий цикл γ может протекать и в обратном направлении, то для него неравенство Клаузиуса обращается в равенство.

с) Пусть γ_1 и γ_2 -те участки пути γ , на которых рабочее тело тепловой машины соответственно получает тепло извне и отдает его в окружающую среду. Пусть T_1 - максимальная температура рабочего тела на участке γ_1 , а T_2 -(его) минимальная температура на участке γ_2 цикла γ . Наконец, пусть Q_1 - полученное на участке γ_1 тепло, а Q_2 —тепло, отданное на участке γ_2 . Исходя из неравенства Клаузиуса, покажите, что $\frac{Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_2}{T_1}$.

д) Получите оценку $\eta \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ коэффициента полезного действия (см. задачу 7) любой тепловой машины. Это-вторая теорема Карно. (Оцените заодно к. п. д. паровой машины, в которой максимальная температура пара не превышает 150°C т.е. $T_1 = 423\text{ K}$, а температура холодильника- окружающей среды-порядка 20°C , т.е. $T_2 = 291\text{ K}$).

е) Сравните результаты задач 7 б) и 8 д) и проверьте, что тепловая машина, работающая по циклу Карно, имеет наибольший (в пределах возможного при заданных значениях T_1 и T_2) коэффициент полезного действия.

9. Дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ называют уравнением с разделяющимися переменными. Обычно его переписывают в виде $g(y)dy = f(x)dx$, в котором "переменные разделены", и затем "решают", приравнявая первообразные $\int g(y)dy = \int f(x)dx$. Используя язык дифференциальных форм, дайте теперь развернутую математическую аргументацию этому алгоритму.

15.1.3 Volume Shape, Integrals of the First and Second Kind

Теория (??)

1. Масса материальной поверхности. Пусть S - материальная поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что нам известна (поверхностная) плотность $\rho(x)$ распределения массы на поверхности S . Требуется определить массу всей поверхности S . Для решения задачи прежде всего надо учесть, что поверхностная плотность $\rho(x)$ в точке $x \in S$ есть предел отношения массы Δm части поверхности, попавшей в окрестность точки x , к площади $\Delta\sigma$ этой же части поверхности, когда окрестность стягивается к точке x .

Разбив поверхность S на мелкие доли S_i и считая ρ непрерывной функцией на S , можно, пренебрегая изменением ρ в пределах каждой малой доли, найти массу S_i из соотношения

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i) \Delta\sigma_i,$$

в котором $\Delta\sigma_i$ - площадь поверхности S_i , а $x_i \in S_i$.

Суммируя эти приближенные равенства и переходя к пределу при измельчении разбиения, получим, что

$$m = \int_S \rho d\sigma.$$

Символ написанного здесь интеграла по поверхности S , очевидно, требует разъяснений, которые позволили бы довести дело до вычислительных формул.

Отметим, что по самой постановке задачи левая часть равенства (1) никак не зависит от ориентации поверхности S и, значит, этим же свойством должен обладать стоящий справа интеграл. Это на первый взгляд контрастирует с тем понятием интеграла по поверхности, о котором мы подробно говорили в §1. Ответ на возникший вопрос кроется в определении элемента поверхности $d\sigma$, к анализу которого мы и переходим.

2. Площадь поверхности как интеграл от формы. Сопоставляя определение 1§1 интеграла от формы с конструкцией, которая привела нас к определению площади поверхности (§4 гл. XII), видим, что площадь заданной в параметрическом виде $\varphi : D \rightarrow S$ гладкой k -мерной поверхности S , лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, является интегралом от некоторой формы Ω , которую мы пока только условно будем называть формой объема или элементом объема на поверхности S . Из соотношения (5) §4 гл. XII следует, что в криволинейных координатах $\varphi : D \rightarrow S$ (т.е. будучи снесена в область D) форма Ω (точнее $\varphi^*\Omega$) имеет вид

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ij})(t)} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$$

где $g_{ij}(t) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t^j} \right\rangle$, $i, j = 1, \dots, k$.

При другой параметризации $\tilde{\varphi} : \tilde{D} \rightarrow S$ той же поверхности для вычисления площади S по области D надо соответственно интегрировать форму

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})(\tilde{t})} d\tilde{t}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{t}^k,$$

где $\tilde{g}_{ij}(t) = \left\langle \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{t}^i}, \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{t}^j} \right\rangle$, $i, j = 1, \dots, k$.

Обозначим через ψ диффеоморфизм $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{D} \rightarrow D$, осуществляющий переход от координат $\tilde{t}$ к координатам t поверхности S . В свое время мы уже подсчитали (см. замечание 5§4 гл. XII), что

$$\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})(\tilde{t})} = \sqrt{\det(g_{ij})(\psi(\tilde{t}))} \cdot |\det \psi'(\tilde{t})|.$$

Вместе с тем очевидно, что

$$\psi^*\omega = \sqrt{\det(g_{ij})(\psi(\tilde{t}))} \det \psi'(\tilde{t}) d\tilde{t}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{t}^k$$

Сопоставляя равенства (2) – (5), видим, что $\psi^*\omega = \tilde{\omega}$, если $\det \psi'(\tilde{t}) > 0$, и $\psi^*\omega = -\tilde{\omega}$, если $\det \psi'(\tilde{t}) < 0$. Если формы ω и $\tilde{\omega}$ получались переносом φ^* и соответственно $\tilde{\varphi}^*$ из одной и той же формы Ω на S , то всегда должно быть выполнено равенство $\psi^*(\varphi^*\Omega) = \tilde{\varphi}^*\Omega$ или, что то же самое, $\psi^*\omega = \tilde{\omega}$.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что формы на параметризованной поверхности S , которые надо интегрировать, чтобы получить площадь этой поверхности, различны – отличаются знаком, если параметризации задают на S различные ориентации; эти формы совпадают для параметризаций, принадлежащих одному классу ориентации поверхности S .

Таким образом, форма объема Ω на S должна определяться не только самой поверхностью S , лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, но и ориентацией S .

Это может показаться парадоксальным: площадь поверхности по нашим представлениям не должна зависеть от ориентации!

Но ведь мы пришли к определению площади параметризованной поверхности через интеграл, интеграл от некоторой формы. Значит, если результат наших вычислений не должен зависеть от ориентации поверхности, то, как следует из свойств интеграла, при разных ориентациях поверхности мы должны интегрировать разные формы.

Доведем высказанные соображения до точных определений.

15.1.4 The Form of the Volume

Теория (??)

Определение 1. Если $\mathbb{R}^k$ -ориентированное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, Ω на $\mathbb{R}^k$, соответствующей данной ориентации $\mathbb{R}^k$ и скалярному произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle$, k -форма, которая на ортонормированном репере данного класса ориентации $\mathbb{R}^k$ принимает значение единицы.

Значение k -формы на репере $e_1, \dots, e_k$, очевидно, вполне определяет эту форму.

Заметим также, что форма Ω определяется не индивидуальным ортонормированным репером, а только их классом ориентации.

4 В самом деле, если $e_1, \dots, e_k$ и $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k$ - два таких репера одного класса ориентации, то матрица O перехода от второго базиса к первому является ортогональной матрицей, причем $\det O = 1$. Значит,

$$\Omega(e_1, \dots, e_k) = \det O \cdot \Omega(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k) = \Omega(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k) = 1$$

Если в $\mathbb{R}^k$ фиксирован ортонормированный базис $e_1, \dots, e_k$, а $\pi^1, \dots, \pi^k$ — проектирование $\mathbb{R}^k$ на соответствующие координатные оси, то, очевидно, $\pi^1 \wedge \dots \wedge \pi^k(e_1, \dots, e_k) = 1$ и

$$\Omega = \pi^1 \wedge \dots \wedge \pi^k.$$

Таким образом,

$$\Omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^k \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_k^1 & \dots & \xi_k^k \end{vmatrix}.$$

Это ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на упорядоченные векторы $\xi_1, \dots, \xi_k$.

Определение 2. Если гладкая k -мерная ориентированная поверхность S лежит в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, то в каждой касательной к S плоскости TS_x , имеются ориентация, согласованная с ориентацией S , и скалярное произведение, индуцированное скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$, а значит, есть и форма объема $\Omega(x)$. Возникающая при этом на S дифференциальная k -форма Ω называется формой (или элементом) объема на поверхности S , индуцированной вложением S в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.
Определение 3. Площадь ориентируемой гладкой поверхности есть интеграл по этой поверхности от формы объема, соответствующей выбираемой на поверхности ориентации.

Это сформулированное на языке форм и уточненное до деталей определение площади, конечно, согласуется с определением §4 гл. XII, к которому мы пришли, рассматривая заданную в параметрическом виде k -мерную гладкую поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$.

Действительно, параметризация ориентирует поверхность и все касательные к ней плоскости TS_x . Если $\xi_1, \dots, \xi_k$ - репер в TS_x фиксированного в TS_x класса ориентации,

то из определений 2 и 3 формы объема Ω следует, что $\Omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) > 0$. Но тогда (см. равенство (2) §4 гл. XII)

$$\Omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sqrt{\det(\langle \xi_i, \xi_j \rangle)}$$

Отметим, что сама форма $\Omega(x)$ определена на любом наборе $\xi_1, \dots, \xi_k$ векторов TS_x , но равенство (6) действует только на реперах заданного в TS_x класса ориентации.

Отметим также, что форма объема определена только на ориентированной поверхности, поэтому, например, бессмысленно говорить о форме объема на лежащем в $\mathbb{R}^3$ листе Мёбиуса, хотя можно говорить о такой форме в пределах каждого ориентируемого куска этой поверхности.

Определение 4. Пусть S - k -мерная кусочно гладкая (ориентируемая или неориентируемая) поверхность в $\mathbb{R}^n$, а $S_1, \dots, S_m, \dots$ -конечное или счетное число ее гладких параметризуемых кусков, пересекающихся, быть может, лишь по поверхностям размерности не выше $k-1$ и таких, что $S = \bigcup_i S_i$.

Площадью (или k -мерным объемом) поверхности S называется сумма площадей поверхностей S_i .

В этом смысле можно говорить о площади, которую имеет лежащий в $\mathbb{R}^3$ лист Мёбиуса, или, что то же самое, искать его массу, если это материальная поверхность с единичной плотностью распределения вещества.

Традиционными рассуждениями проверяется корректность определения 4 (независимость получаемой величины площади от разбиения $S_1, \dots, S_m, \dots$ поверхности S).

4. Выражение формы объема в декартовых координатах. Пусть S -гладкая гиперповерхность (размерности $n-1$) в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, наделенная ориентирующим ее непрерывным полем единичных нормалей $\eta(x), x \in S$. Пусть V -форма (n -мерного) объема в $\mathbb{R}^n$, а Ω -форма ($(n-1)$ -мерного) объема на S .

Если в касательном пространстве TS_x взять репер $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ из класса ориентации, задаваемого единичной нормалью $\eta(x)$ к TS_x , то, очевидно, можно записать следующее равенство:

$$V(x)(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \Omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

Справедливость его следует из того, что при указанных условиях обе его части неотрицательны, а равны они по величине потому, что объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, равен площади основания $\Omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, умноженной на высоту $|\eta| = 1$.

Но

$$\begin{aligned} V(x)(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) &= \begin{vmatrix} \eta^1 & \dots & \eta^n \\ \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-1}^1 & \dots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \eta^i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}). \end{aligned}$$

Здесь $x^1, \dots, x^n$ - декартовы координаты в задающем ориентацию ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_n$, а крышка над дифференциалом dx^i означает, что в этом слагаемом он отсутствует.

Таким образом, получается следующее координатное выражение для формы объема на ориентированной гиперповерхности $S \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \eta^i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

Здесь стоит заметить, что при изменении ориентации поверхности направление нормали $\eta(x)$ меняется на противоположное, т. е. форма Ω при этом заменяется новой формой $-\Omega$.

Из тех же геометрических соображений следует, что при фиксированном значении $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\langle \eta(x), e_i \rangle \Omega(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = V(x)(e_i, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

Последнее равенство означает, что

$$\eta^i(x)\Omega(x) = (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

Для двумерной поверхности S в $\mathbb{R}^n$ элемент объема чаще всего обозначают символами $d\sigma$ или dS . Их не следует воспринимать как дифференциалы неких форм σ и S , это единые символы. Если x, y, z - декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, то в этих обозначениях соотношения (8), (10) запишутся так:

$$d\sigma = \cos \alpha_1 dy \wedge dz + \cos \alpha_2 dz \wedge dx + \cos \alpha_3 dx \wedge dy$$

$$\cos \alpha_1 d\sigma = dy \wedge dz \quad \cos \alpha_2 d\sigma = dz \wedge dx \quad \cos \alpha_3 d\sigma = dx \wedge dy$$

(ориентированные площади проекций на координатные плоскости).

Здесь $(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)(x)$ - направляющие косинусы (координаты) единичного вектора $\eta(x)$ нормали к S в точке $x \in S$. В этих равенствах, как, впрочем, и в равенствах (8), (10), во избежание недоразумений, конечно, правильнее было бы справа ставить знак $|_S$ ограничения соответствующей формы на поверхность S , но чтобы не загромождать формулы, мы ограничимся этим замечанием.

5. Интегралы первого и второго рода. В ряде задач, типичным представителем которых является рассмотренная выше задача об определении массы поверхности по известной плотности, возникают интегралы типа (1). Их часто называют интегралами от функции по поверхности или интегралами первого рода.

Определение 5. Интегралом от функции ρ по ориентируемой поверхности S называют интеграл

$$\int_S \rho \Omega$$

от дифференциальной формы $\rho\Omega$, где Ω - форма объема на S (отвечающая выбираемой при вычислении интеграла ориентации S).

Ясно, что так определенный интеграл (11) не зависит от ориентации S , поскольку изменение ориентации сопровождается соответствующей заменой формы объема. Подчеркнем, что в сущности здесь речь идет не об интегрировании функции, а об интегрировании формы $\rho\Omega$ специального вида по поверхности S с определенной на ней формой объема.

Определение 6. Если S - кусочно гладкая (ориентируемая или неориентируемая) поверхность и ρ -функция на S , то интегралом (11) от функции ρ по поверхности S называют сумму $\sum_i \int_{S_i} \rho\Omega$ интегралов от функции ρ по параметризуемым кускам $S_1, \dots, S_m, \dots$ описанного в определении 4 разбиения поверхности S .

Интеграл (11) обычно называют поверхностным интегралом первого рода.

Например, таковым является интеграл (1), выражающий массу поверхности S через плотность ρ распределения массы по поверхности.

Для выделения интегралов первого рода с их свойством независимости от ориентации и, интегралы от форм по ориентированным поверхностям часто называют поверхностными интегралами второго рода.

Заметим, что, поскольку на линейном пространстве все кососимметрические формы, степень которых равна размерности пространства, пропорциональны, между любой k -формой ω , заданной на k -мерной ориентируемой поверхности S , и формой объема Ω на S имеется связь $\omega = \rho\Omega$, где ρ -некоторая, зависящая от ω функция на S . Значит,

$$\int_S \omega = \int_S \rho\Omega$$

т. е. любой интеграл второго рода может быть записан в виде соответствующего интеграла первого рода.

3.пр.

1. Интеграл (2') §1, выражающий работу на пути $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, можно записать в виде интеграла первого рода

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{e} \rangle ds$$

где s - натуральный параметр на γ , ds -элемент (1-форма) длины, а $\mathbf{e}$ - единичный вектор скорости, несущий в себе всю информацию об ориентации γ . С точки зрения физического смысла решаемой интегралом (12) задачи он столь же выразителен, как и интеграл (1) 1.

3.пр.

2. Поток (3), §1 поля скоростей $\mathbf{V}$ через ориентированную единичными нормальными $\mathbf{n}(x)$ поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ можно записать в виде поверхностного интеграла

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{V}, \mathbf{n} \rangle d\sigma$$

первого рода. Информация об ориентации S заключена здесь в направлении поля нормалей $\mathbf{n}$.

Геометрическое и физическое содержание подынтегрального выражения в (13) столь же прозрачно, как и соответствующий смысл подынтегрального выражения окончательной вычислительной формулы (6) §1.

Для сведения читателя отметим, что довольно часто встречаются обозначения $ds := \mathbf{e}ds$, $d\sigma := \mathbf{n}d\sigma$, вводящие векторный элемент длины и векторный элемент площади соответственно. В этих обозначениях интегралы (12), (13) имеют вид

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle \quad \text{и} \quad \int_{\gamma} \langle \mathbf{V}, d\boldsymbol{\sigma} \rangle,$$

наиболее удобный с точки зрения физической интерпретации. Для краткости скалярное произведение $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ векторов $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ часто записывают символом $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

3.пр.

3. Закон Фарадея ¹⁾ утверждает, что электродвижущая сила, возникающая в замкнутом проводнике Γ , находящемся в переменном магнитном поле $\mathbf{B}$, пропорциональна скорости изменения потока магнитного поля через ограниченную контуром Γ поверхность S . Пусть $\mathbf{E}$ - вектор напряженности электрического поля. Точная запись закона Фарадея с учетом ориентации и принятых выше обозначений может быть представлена в виде равенства

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Кружок в знаке интеграла по Γ - дополнительное напоминание о том, что интеграл берется по замкнутому контуру. Работу поля вдоль

¹⁾ М. Фарадей (1791 - 1867) - выдающийся английский физик, создатель учения об электромагнитном поле. замкнутого контура часто называют циркуляцией поля вдоль этого контура. Так что по закону Фарадея циркуляция напряженности электрического поля, порожденного в замкнутом проводнике Γ переменным магнитным полем, равна взятой с обратным знаком скорости изменения потока напряженности магнитного поля через натянутую на контур Γ поверхность S .

3.пр.

4. Закон Ампера ¹⁾

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

(где $\mathbf{B}$ - вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{j}$ - вектор плотности тока, ε_0, c - размерные постоянные) утверждает, что циркуляция напряженности, порожденного электрическим током магнитного поля вдоль контура Γ , пропорциональна силе тока, протекающего через ограниченную контуром Γ поверхность S .

Мы рассмотрели интегралы первого и второго рода. Читатель мог заметить, что это терминологическое различие очень условно. Реально мы умеем интегрировать и интегрируем только дифференциальные формы. Ни от чего другого интеграл и не берется (если интеграл претендует на независимость от выбора системы координат, используемой при его вычислении).

15.1.5 Tasks and Exercises

1. Дайте формальное доказательство равенств (7) и (9).
2. Пусть γ - гладкая кривая, ds -элемент длины на γ .
 - а) Покажите, что

$$\left| \int_{\gamma} f(s) ds \right| \leq \int_{\gamma} |f(s)| ds$$

для любой функции f на γ , для которой оба интеграла определены.

- б) Проверьте, что если $|f(s)| \leq M$ на γ , а l — длина кривой γ , то

$$\left| \int_{\gamma} f(s) ds \right| \leqslant Ml.$$

1) А. М. Ампер (1775 - 1836) - французский физик и математик, один из основоположников современной электродинамики. с) Сформулируйте и докажите аналогичные а) и б) утверждения в общем случае интеграла первого рода, взятого по k -мерной гладкой поверхности.

3. а) Покажите, что координаты (x_0^1, x_0^2, x_0^3) центра масс, распределенных с линейной плотностью $\rho(x)$ вдоль кривой γ , следует искать из соотношений

$$x_0^i \int_{\gamma} \rho(x) ds = \int_{\gamma} x^i \rho(x) ds, \quad i = 1, 2, 3.$$

б) Запишите уравнение винтовой линии в $\mathbb{R}^3$ и найдите координаты центра масс куска этой линии, считая, что масса распределена вдоль кривой с постоянной плотностью, равной единице.

с) Укажите формулы для центра масс, распределенных по поверхности S с поверхностной плотностью ρ , и найдите центр масс, равномерно распределенных по поверхности полусферы.

д) Укажите формулы для момента инерции массы, распределенной с плотностью ρ по поверхности S .

е) Покрышка колеса имеет массу 30 кг и форму тора, внешний диаметр которого 1 м, а внутренний 0,5 м. При балансировке колеса его устанавливают на балансировочный станок, раскручивают до скорости, отвечающей скорости движения порядка 100 км/час, и затем останавливают тормозными колодками, трущимися о стальной диск, диаметр которого 40 см, а ширина 2 см. Оцените температуру, до которой нагрелся бы этот диск, если бы вся кинетическая энергия раскрученной покрышки при остановке колеса ушла на нагревание диска. Удельную теплоемкость стали считать равной $c = 420$ Дж/(кг·К).

4. а) Покажите, что силу, действующую на точечную массу m_0 , расположенную в точке (x_0, y_0, z_0) , со стороны материальной кривой γ , имеющей линейную плотность ρ , следует искать по формуле

$$F = Gm_0 \int_{\gamma} \frac{\rho}{|\mathbf{r}|^3} r ds,$$

где G - гравитационная постоянная, а $\mathbf{r}$ - вектор с координатами $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

б) Напишите соответствующую формулу в случае, когда масса распределена по поверхности S .

с) Найдите гравитационное поле однородной материальной прямой.

д) Найдите гравитационное поле однородной материальной сферы. (Укажите поле как вне шара, ограниченного сферой, так и в самом этом шаре.)

е) Найдите гравитационное поле, создаваемое в пространстве однородным материальным шаром (рассмотрите как внешние, так и внутренние точки шара).

ф) Считая Землю жидким шаром, найдите давление в нем как функцию расстояния от центра. (Радиус Земли 6400 км, средняя плотность 6 г/см³.) 5. Пусть γ_1 и γ_2 - два замкнутых проводника, по которым текут токи J_1 и J_2 соответственно. Пусть ds_1 и ds_2

- векторные элементы этих проводников, отвечающие направлениям тока в них, вектор $\mathbf{R}_{12}$ направлен от ds_1 к ds_2 , а $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}$

По закону Био и Савара сила ¹⁾ $\mathbf{F}_{12}$, испытываемая вторым элементом со стороны первого, равна

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c_0^2 |\mathbf{R}_{12}|^2} [ds_2 [ds_1, \mathbf{R}_{12}]]$$

где квадратными скобками обозначено векторное произведение векторов, а c_0 - размерная постоянная.

а) Покажите, что на уровне искусственной дифференциальной формулы Био и Савара может случиться, что $d\mathbf{F}_{12} \neq -d\mathbf{F}_{21}$, т. е. «действие не равно противодействию».

б) Напишите (интегральные) формулы для полных сил $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ взаимодействия проводников γ_1, γ_2 и убедитесь, что $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

6. Формула коплощади (формула Кронрода-Федерера).

Пусть M^m и N^n - гладкие поверхности размерностей m и n соответственно, лежащие в евклидовом пространстве высокой размерности (M^m, N^n могут быть и абстрактными римановыми многообразиями, но сейчас это несущественно). Допустим, что $m \geq n$.

Пусть $f : M^m \rightarrow N^n$ - гладкое отображение. При $m > n$ отображение $df(x) : T_x M^m \rightarrow T_{f(x)} N^n$ имеет непустое ядро $\ker df(x)$. Обозначим через $T_x^\perp M^m$ ортогональное дополнение к $\ker df(x)$, а через $J(f, x)$ обозначим якобиан отображения $df(x)|_{T_x^\perp M^m} : T_x^\perp M^m \rightarrow T_{f(x)} N^n$. Если $m = n$, то $J(f, x)$ совпадает с обычным якобианом.

Пусть $dv_k(p)$ - обозначение для формы объема на k -мерной поверхности в точке p . Будем считать, что $v_0(E) = \text{card } E$, где $v_k(E)$ - k -объем множества E .

а) Используя, если нужно, теорему Фубини и теорему о ранге (о локальном каноническом виде гладкого отображения), докажите следующую формулу Кронрода - Федерера: $\int_{M^m} J(f, x) dv_m(x) = \int_{N^n} v_{m-n}(f^{-1}(y)) dv_n(y)$.

б) Покажите, что если A - измеримое подмножество в M^m , то

$$\int_A J(f, x) dv_m(x) = \int_{N^n} v_{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) dv_n(y)$$

Это общая формула Кронрода - Федерера.

с) Докажите следующее усиление теоремы Сарда (утверждающей в ее простейшем варианте, что образ множества критических точек гладкого отображения имеет меру нуль). (См. гл. XI, пар. 5, задача 8.)

¹⁾ Био (1774-1862), Савар (1791 - 1841) - французские физики. Пусть, как и прежде, $f : M^m \rightarrow N^n$ - гладкое отображение, а K - компакт в M^m , на котором $\text{rang } df(x) < n$ при всех $x \in K$.

Тогда $\int_{N^n} v_{m-n}(K \cap f^{-1}(y)) dv_n(y) = 0$. Получите отсюда также сформулированный выше простейший вариант теоремы Сарда.

д) Проверьте, что если $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ и $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ - гладкие функции в регулярной области $D \subset \mathbb{R}^n$, причем u не имеет критических точек в D , то

$$\int_D f dv = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{u^{-1}(t)} f \frac{d\sigma}{|\nabla u|}$$

е) Пусть $V_f(t)$ - мера (объем) множества $\{x \in D | f(x) > t\}$ и пусть функция f неотрицательна и ограничена в области D .

Покажите, что $\int_D f dv = - \int_{\mathbb{R}} t dV_f(t) = \int_0^\infty V_f(t) dt$

f) Пусть $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ и $\varphi(0) = 0$, а $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$ и $V_{|f|}(t)$ - мера множества $\{x \in D \mid |f(x)| > t\}$. Проверьте, что $\int_D \varphi \circ f dv = \int_0^\infty \varphi'(t) V_{|f|}(t) dt$.

§. Основные интегральные формулы анализа

Важнейшей формулой анализа является уже известная нам формула Ньютона - Лейбница. В этом параграфе будут получены формулы Грина, Гаусса- Остроградского и Стокса, которые, с одной стороны, являются развитием формулы Ньютона- Лейбница, а с другой стороны, в совокупности, образуют наиболее используемую часть аппарата интегрального исчисления.

В первых трех пунктах параграфа, не стремясь к общности формулировок, на наглядном материале мы получим три классические интегральные формулы анализа. Они будут сведены в одну общую формулу Стокса в четвертом пункте, который формально можно читать независимо от первых трех.

15.1.6 Green's Formula

Формула Грина —это следующее Утверждение 1. Пусть $\mathbb{R}^2$ - плоскость с фиксированной в ней системой координат x, y ; $\bar{D}$ -компактная область в этой плоскости, ограниченная кусочно гладкими кривыми; P, Q - функции, гладкие в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда имеет место соотношение

$$\iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial \bar{D}} P dx + Q dy$$

в котором справа стоит интеграл по границе $\bar{D}$ области $\bar{D}$, ориентированной согласованно с ориентацией самой области $\bar{D}$.

Рассмотрим сначала простейший вариант формулы (1), когда $\bar{D}$ есть квадрат $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, а $Q \equiv 0$ в. Тогда формула Грина сводится к равенству

$$\iint_I \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial I} P dx$$

которое мы и докажем.

4 Сводя двойной интеграл к повторному и применяя формулу Ньютона- Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} \iint_I \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_0^1 (P(x, 1) - P(x, 0)) dx = - \int_0^1 P(x, 0) dx + \int_0^1 P(x, 1) dx \end{aligned}$$

Доказательство закончено. Остальное - дело определений и интерпретации уже полученного соотношения. Дело в том, что разность двух последних интегралов есть как раз то, что стоит в правой части равенства (2)

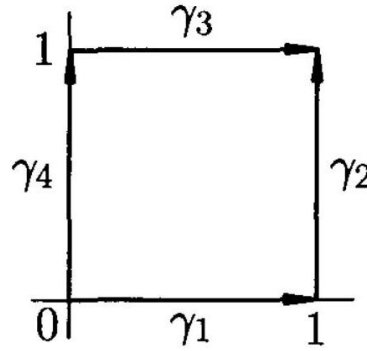


Рис. 87.

Действительно, кусочно гладкая кривая ∂I распадается на четыре куса (рис. 87). Их можно рассматривать как параметризованные кривые

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \text{где } x &\xrightarrow{\gamma_1} (x, 0), \\ \gamma_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \text{где } y &\xrightarrow{\gamma_2} (1, y), \\ \gamma_3 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \text{где } x &\xrightarrow{\gamma_3} (x, 1), \\ \gamma_4 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \text{где } y &\xrightarrow{\gamma_4} (y, 0).\end{aligned}$$

По определению интеграла от 1-формы $\omega = Pdx$ по кривой

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} P(x, y)dx &:= \int_{[0,1]} \gamma_1^*(P(x, y)dx) := \int_0^1 P(x, 0)dx \\ \int_{\gamma_2} P(x, y)dx &:= \int_{[0,1]} \gamma_2^*(P(x, y)dx) := \int_0^1 0dy = 0, \\ \int_{\gamma_3} P(x, y)dx &:= \int_{[0,1]} \gamma_3^*(P(x, y)dx) := \int_0^1 P(x, 1)dx \\ \int_{\gamma_4} P(x, y)dx &:= \int_{[0,1]} \gamma_4^*(P(x, y)dx) := \int_0^1 0dy = 0\end{aligned}$$

и, кроме того, в силу указанного в утверждении 1 выбора ориентации границы области, с учетом ориентации кривых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и γ_4 , очевидно,

$$\int_{\partial I} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{-\gamma_3} \omega + \int_{-\gamma_4} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega - \int_{\gamma_4} \omega,$$

где $-\gamma_i$ есть кривая γ_i , взятая с противоположной задаваемой отображением γ_i ориентацией.

Таким образом, равенство (2) проверено.

Аналогично проверяется, что

$$\iint_I \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial I} Q dy$$

Складывая равенства (2) и (3), получаем формулу Грина

$$\iint_I \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial I} P dx + Q dy$$

для квадрата I .

Заметим, что несимметричность P и Q в формуле Грина (1) и равенствах (2), (3) связана с несимметричностью x и y : ведь x и y упорядочены, и этим в $\mathbb{R}^2$ и в I задана ориентация. На языке форм доказанное соотношение (1') можно переписать в виде

$$\int_I d\omega = \int_{\partial I} \omega$$

где ω - произвольная гладкая 1-форма на I . Справа здесь стоит интеграл от ограничения формы ω на границу dI квадрата I .

Проведенное доказательство соотношения (2) допускает очевидное обобщение: если D_y -не квадрат, а «криволинейный четырехугольник», боковые стороны которого - вертикальные отрезки (быть может, даже вырождающиеся в точку), а две другие стороны-графики кусочно гладких функций $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ над отрезком $[a, b]$ оси Ox , то

$$\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial D_y} P dx.$$

Аналогично, если имеется такой же «четырехугольник» D_x по отношению к оси Oy , т. е. с двумя горизонтальными сторонами, то для него справедливо равенство

$$\iint_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D_x} Q dy.$$

Предположим теперь, что область $\bar{D}$ можно разрезать на конечное число областей типа D_y (рис. 88). Тогда для этой области $\bar{D}$ тоже верна формула вида (2').

4 В самом деле, двойной интеграл по области $\bar{D}$ в силу его аддитивности есть сумма интегралов по кускам типа D_y , на которые разрезана область $\bar{D}$. Для каждого такого куска справедлива формула (2'), т. е.

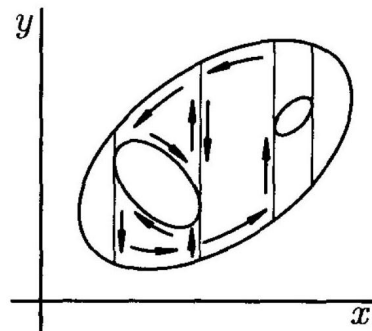


Рис. 88. двойной интеграл по нему равен интегралу от формы $P dx$ по ориентированной границе этого куска.

Но соседние куски на общей части их границ индуцируют противоположные ориентации, поэтому при сложении интегралов по границам всех кусков в результате взаимных уничтожений, очевидно, останется только интеграл по границе $\partial \bar{D}$ самой области $\bar{D}$.

15.1.7 Another Thing About Multidimensional Integrals

Определение через методы программирования (!!!!!!!)

(чуть что именно это и буду использовать, так что важно написать!!!)

По вольфраму считается без проблем, разве что ставь переменные пределы после фиксированных пределов: (!!! напишу потом это точнее, полчаса на это ушло.)

```
1 Integrate[L^2 Exp[-L (y + x)], {y, 0, Infinity}, {x, 0, y},
2 Assumptions -> {Im[L] == 0, L > 0}]
```

```
1 reg = ImplicitRegion[x > 0 && y > 0 && y > x, {x, y}];
2 Integrate[L^2 Exp[-L y] Exp[-L x], {x, y} \ [Element] reg]
```

или

```
1 Integrate[L (1 - E^(-L y)) Exp[-L y], {y, 0, Infinity}, Assumptions -> {Im[L] == 0, L > 0, k
> 1}]
```

15.2 Integrals for Smooth Maps

(снова по Карасеву, пропишу это потом!)

Здесь же по идее должны быть кратные и поверхностные интегралы.

15.2.1 Integral of Differential Form with Compact Support in $\mathbb{R}^n$

В этом разделе мы изучим определение интеграла от дифференциальной формы.

Неформально говоря, дифференциальная форма (максимальной степени) - это именно тот объект, для которого можно определить интеграл, почти не зависящий от выбора криволинейной системы координат.

Причём в слове «почти» тоже скрывается глубокое понятие ориентации системы координат.

В целях интегрирования мы будем рассматривать дифференциальные формы с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$, то есть определённые на всём $\mathbb{R}^n$ и равные нулю за пределами некоторого компакта).

В более общем виде можно рассматривать формы с компактным носителем на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Формы с компактным носителем на откры- этому в большинстве случаев нам будет удобно рассматривать формы с компактным носителем на всём $\mathbb{R}^n$, хотя иногда мы будем упоминать и общий случай.

Определение 6.89.

Для гладкой формы с компактным носителем $\nu = a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ определим в какой-то фиксированной системе координат

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nu := \int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Так как функция $a(x)$ гладкая с компактным носителем, то этот интеграл существует и является числом в любом смысле, как повторный интеграл Римана или как интеграл Лебега.

Чтобы исследовать зависимость этого определения от выбора криволинейной системы координат (в окрестности носителя формы), нам надо установить одно свойство, связывающее интеграл и внешнее дифференцирование:

Лемма

6.90.

Если $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\lambda = 0$$

Доказательство.

Всякое λ представляется в виде суммы выражений $\lambda_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$, где шапочка традиционно (в гомологической алгебре) обозначает отсутствующий множитель.

В силу линейности достаточно доказать утверждение для одного множителя, без ограничения общности пусть это $f dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Тогда

$$d(f dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

С учётом компактности носителя f , при интегрировании такого выражения по x_1 уже получается ноль.

Значит, по теореме Фубини, и общий интеграл будет равен нулю.

Таким образом интеграл оказывается определённым как линейный функционал на факторпространстве $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n) / d\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

Следующая

Лемма

показывает, что соответствующее факторпространство одномерно:

Лемма

6.91.

Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ - гладкая функция с компактным носителем и единичным интегралом.

Для всякой $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ найдётся число I и форма $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, такие что

$$\nu = I\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + d\lambda$$

Доказательство.

Для ясности начнём со случая размерности 1, пусть у нас форма $\nu = f dx$, тогда положим

$$I(\nu) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f dx, \quad P(x) = \int_{t=-\infty}^x (f - I(\nu)\varphi(t)) dt.$$

Тогда

$$\nu = I(\nu)\varphi(x)dx + dP$$

и носитель P компактен, так как полный интеграл в определении P равен нулю.

Теперь для произвольной формы мы будем применять индукцию по количеству координат.

Применив конструкцию для переменной x_1 , считая остальные переменные параметрами, мы представим форму в виде

$$\nu = \varphi(x_1) J(x_2, \dots, x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + d(P dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)$$

с гладкими функциями $J(x_2, \dots, x_n)$ и $P(x_1, \dots, x_n)$, которые будут иметь компактные носители, если ν имело компактный носитель.

По предположению индукции

$$J(x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = I\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + d\mu$$

где форма μ степени $n - 2$ не зависит от переменной x_1 и не содержит дифференциала dx_1 .

Заметим, что дифференциал μ как формы от переменных $x_1, \dots, x_n$ равен её дифференциалу как формы переменных $x_2, \dots, x_n$, так как её производная по x_1 равна нулю.

Также заметим, что $d(\varphi(x_1) dx_1) = 0$ и следовательно

$$-d(\varphi(x_1) dx_1 \wedge \mu) = \varphi(x_1) dx_1 \wedge d\mu.$$

Подставляя (6.7) в (6.6), с учётом предыдущей формулы получим

$$\nu = I\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n - d(\varphi(x_1) dx_1 \wedge \mu) + d(P dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

Осталось положить $\lambda = -\varphi(x_1) dx_1 \wedge \mu + P dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ и завершить шаг индукции.

Лемма

6.92.

Факторпространство $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n) / d\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ одномерно, то есть всевозможные способы определить интеграл формы $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы интеграл от $d\lambda$ равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу.

Доказательство.

Предыдущая

Лемма

показывает, что это факторпространство пространств не более чем одномерно.

С другой стороны, на этом факторпространстве уже определён интеграл, который очевидно иногда принимает ненулевые значения, значит оно не нульмерно.

Это утверждение показывает, что определение интеграла формы по $\mathbb{R}^n$ не сильно зависит от выбора системы координат.

Всё, что может произойти при замене координат в $\mathbb{R}^n$ — это умножение всех таких интегралов на одну и ту же константу.

Характер этой зависимости мы установим более точно в следующем разделе.

15.2.2 Replacement of Coordinates in the Integral of the Form

Мы начнём с рассмотрения частного случая замены переменных, при котором интеграл от дифференциальной формы высшей степени не меняется.

Мы будем использовать понятие собственного отображения — непрерывного отображения, при котором прообраз всякого компактного множества тоже компактен (непрерывность гарантирует только, что прообраз замкнутого множества замкнут).

Теорема

6.93 (Замена координат для где-то однозначных собственных отображений).

Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является собственным, для некоторого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ отображение φ тождественно на U и $\varphi^{-1}(U) = U$.

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \nu = \int_{\mathbb{R}^n} \nu$$

Доказательство.

Заметим, что из собственности φ и компактности носителя ν следует компактность носителя $\varphi^* \nu$.

Так как обратный образ дифференциальной формы коммутирует с внешним дифференцированием, то выражение слева обнуляется при подстановке $\nu = d\lambda$ для любого $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, выражение слева является линейным функционалом на одномерном пространстве $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)/d\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ и обязано быть пропорционально интегралу в правой части с некоторым коэффициентом, зависящим только от φ .

Но коэффициент пропорциональности обязан быть равным 1, это можно установить, взяв ν с носителем в указанной в формулировке области U , для которой выполняется тождество $\varphi^* \nu = \nu$. С помощью этой теоремы можно установить следующий полезный факт (заметив, что отображение в формулировке теоремы не обязано быть обратимым).

Карасев.з.

6.94.

Докажите, что где-то однозначное собственное отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ сюръективно.
[[

Примените теорему к форме ν с носителем, сосредоточенным в малой окрестности некоторой точки $p \in \mathbb{R}^n$.]] В теореме 6.93 описывается некоторый класс замен координат, который не меняет интеграл от дифференциальной формы.

Рассмотрение отображения, заданного как $y_1 = -x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$, или заданного перестановкой двух координат показывает, что интеграл дифференциальной формы иногда всё-таки может поменять знак, так как выражение $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ будет отличаться знаком от $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Далее мы выясним, что ничего другого при замене координат на связной области произойти не может.

При работе с интегралом в силу его линейности бывает удобно разбивать произвольное выражение в сумму выражений, каждое из которых имеет небольшой носитель; это позволяет следующее утверждение.

Лемма

6.95 (Разбиение единицы в окрестности компакта в $\mathbb{R}^n$).

Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ компакта $K \subseteq \mathbb{R}^n$ найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ с компактными носителями $\text{supp } \rho_\alpha$ таких, что $\forall \alpha \text{ supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$ только конечно число из них не равно нулю и

$$\sum_{\alpha} \rho_\alpha(x) \equiv 1$$

в некоторой окрестности K . Это называется разбиение единицы, подчинённое покрытию.

Доказательство.

Для каждой точки $x \in K$ найдём по лемме 6.17 гладкую функцию ψ_x , которая принимает значения в $[0, 1]$, равна 1 в окрестности $V_x \ni x$ и имеет носитель в одном из U_α .

Из открытых V_x можно выбрать конечное подпокрытие компакта K .

Соответственно, мы оставим конечное число функций $\psi_i = \psi_{x_i}$ так, чтобы в каждой точке $y \in K$ одна из выбранных ψ_i была равна единице.

По процедуре из доказательства теоремы 4.69 функции ψ_i с помощью верного в окрестности $\bar{K}$ тождества

$$(1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \dots (1 - \psi_N) = 0$$

можно преобразовать в гладкое разбиение единицы (работающее в некоторой окрестности K)

$$h_i = \psi_i (1 - \psi_1) \dots (1 - \psi_{i-1})$$

в котором каждая h_i имеет носитель, содержащийся в одном из U_α .

Далее в качестве искомой функции ρ_α можно положить сумму тех h_i , которые приписаны к U_α , или нуль, если таких нет.

Имея дифференциальную форму ν с компактным носителем и мелкое покрытие её носителя $\{U_\alpha\}_\alpha$, мы можем найти соответствующее разбиение единицы $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ и представить форму в виде суммы форм с маленькими носителями:

$$\nu = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nu$$

то есть носитель каждого слагаемого $\rho_{\alpha} \nu$ будет содержаться в соответствующем U_{α} .

Карасев.3.

6.96.

Докажите, что для связной области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ пространство $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$ одномерно.

||

Заметьте, что рассуждение для $\mathbb{R}^n$ работает для открытых элементарных параллелепипедов в качестве U .

Далее у произвольной формы ν с компактным носителем в U можно покрыть носитель такими параллелепипедами, каждый из которых содержится в U .

Разбиение единицы, подчинённое такому покрытию, позволит доказать, что ν представляется в виде суммы едчнообразно устроенных форм $I_i \varphi(k(x - x_i)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ с центрами x_i и носителями в соответствующих параллелепипедах при достаточно большом $k > 0$.

Далее остаётся использовать связность и от суммы перейти к одной такой форме.

||

В силу линейности интеграла разбиение единицы и представление формы в виде суммы сводит многие вопросы об интегрировании дифференциальной формы к интегрированию дифференциальной формы с маленьким носителем.

Например, мы можем уточнить поведение интеграла при замене координат:

Теорема

6.97 (Поведение интеграла формы относительно замены координат).

Интеграл φ^* , соответствующем диффеоморфизму $\varphi : U \rightarrow V$ между областями меняет или не меняет знак в зависимости от знака якобиана $J\varphi$, то есть

$$\int_U \varphi^* \nu = (\operatorname{sgn} J\varphi) \int_V \nu$$

Заметим, что так как U и V связны, то знак якобиана один и тот же во всех точках области.

Доказательство.

Использование разбиения единицы, линейности интеграла и компактности носителя (или решения задачи 6.96) показывает, что достаточно взять любую точку $x \in U$ и доказать утверждение для достаточно малой окрестности x и формы с носителем в этой окрестности.

В некоторой окрестности x

Теорема

6.27 позволяет расписать отображение в композицию перестановки координат, отражений координат и отображений, возрастающим образом меняющих только одну координату.

Перестановки координат могут поменять знак интеграла при отрицательном знаке перестановки, отражения меняют знак и имеют отрицательный якобиан.

Композиция таких отображений будет менять знак интеграла в соответствии со знаком своего якобиана.

Остаются элементарные возрастающие отображения φ_i , которые в координатах задаются формулами

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad \forall j \neq i, y_j = x_j,$$

пусть для простоты мы меняем первую координату и $i = 1$. Сделав сдвиг (который не влияет на интеграл), мы можем считать, что работаем в окрестности нуля и образ нуля тоже является нулём.

Тогда производная $g = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ будет положительной гладкой функцией в окрестности нуля W .

Выбрав функцию ψ из леммы 6.17 с носителем в W , мы можем заменить g на определённую на всём $\mathbb{R}^n$ гладкую функцию

$$\psi(x)g(x) + (1 - \psi(x)),$$

новая функция g в меньшей окрестности нуля всё ещё совпадает с $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, всюду положительна, а за пределами W равна единице.

Далее, рассмотрим функцию

$$h(x_2, \dots, x_n) = f_1(0, x_2, \dots, x_n),$$

определённую на некоторой окрестности нуля W' .

Взяв ψ' от $n - 1$ переменной из леммы 6.17 с носителем в W' , мы заменим h на $h\psi$, такая функция будет всё ещё совпадать с $f_1(0, x_2, \dots, x_n)$ в меньшей окрестности нуля.

Теперь определим

$$\bar{f}_1(x_1, \dots, x_n) = h(x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} g(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

Эта функция уже везде строго возрастает по x_1 и совпадает с f_1 в некоторой окрестности нуля, так как h в некоторой окрестности нуля совпадает с $f_1(0, \dots)$, а g в некоторой окрестности нуля совпадает с $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ и в этой окрестности получается верная формула

Ньютона-Лейбница для приращения f по переменной x_1 .

Кроме того, $\bar{f}_1$ отличается от координатной функции x_1 не более чем на константу на всём $\mathbb{R}^n$, так как h ограничена, а g за пределами компакта равна единице.

Отображение $\bar{\varphi}_1$, заданное формулами

$$y_1 = \bar{f}_1(x_1, \dots, x_n), \quad \forall j \neq 1 y_j = x_j$$

инъективно, отличается от тождественного не более чем на константу и совпадает с φ_1 в некоторой окрестности нуля.

Так как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут, а прообраз ограниченного множества при $\bar{\varphi}_1$ ограничен, то оно является собственным.

Более того, при далёких от нуля значениях $(x_2, \dots, x_n)$ это отображение совпадает с тождественным и с учётом инъективности удовлетворяет условиям теоремы 6.93.

Следовательно, оно не меняет интеграл формы, в том числе интеграл формы в окрестности нуля, где оно совпадает с φ_1 .

6.13.

15.2.3 Replacement of Coordinates in the Integral of the Function

Теперь от интеграла дифференциальной формы мы можем вернуться к интегралу от функции в смысле Лебега и получить формулу для криволинейной замены переменных в интеграле.

Следствие 6.98 (Криволинейная замена переменных в кратном интеграле).

При диффеоморфизме $\varphi : U \rightarrow V$ для интегрируемой по Лебегу на $\hat{V}$ функции f имеет место формула

$$\int_V f(y) dx = \int_U f(\varphi(x)) |J\varphi| dx$$

Доказательство.

Теорема

6.97 может быть интерпретирована как доказательство утверждения для гладких функций с компактным носителем, так как координатное представление дифференциальной формы степени n при замене координат умножается на якобиан замены, см.

задачу 6.88.

Введение модуля якобиана позволяет не беспокоиться о смене знака.

Переходя к более общему случаю, мы сначала заметим, что мера Лебега $\varphi(W)$ равна точной грани интегралов гладких функций $f : \varphi(U) \rightarrow [0, 1]$ с компактным носителем в $\varphi(W)$.

Действительно, такой интеграл не более меры носителя f , но при этом для всякого компактного $S \subseteq \varphi(U)$ сумма разбиения единицы из теоремы 6.95 даёт $f : \varphi(U) \rightarrow [0, 1]$, которая равна единице на S и имеет носитель в наперёд заданной окрестности S , и значит имеет интеграл, больший меры S .

Переходя к поточечному пределу по таким функциям с носителями в $\varphi(W)$, и применяя уже установленное утверждение для гладких функций с компактным носителем, для

открытых множеств $W \subseteq U$ мы получаем формулу

$$\mu(\varphi(W)) = \int_W |J\varphi| dx$$

Эта же формула верна для компактных множеств, так как их можно представить в виде разности двух открытых.

Если мы рассмотрим открытое $W \subseteq U$ с компактным замыканием в U , то на нём $\sup |J\varphi| = C_W < +\infty$.

Тогда всякое измеримое по Лебегу $X \subseteq W$ мы будем приближать снизу компактным, а сверху открытым, $F \subseteq X \subseteq O$, так чтобы $\mu(O \setminus F) \rightarrow 0$.

С учётом неравенства

$$\mu(\varphi(O \setminus F)) \leq C_W \mu(O \setminus F)$$

множество $\varphi(X)$ также будет по мере Лебега приближаться $\varphi(F)$ и $\varphi(O)$.

Переходя к пределу в интеграле, мы получим формулу

$$\mu(\varphi(X)) = \int_X |J\varphi| dx$$

для всякого измеримого X с компактным замыканием в U .

От условия компактности замыкания в U можно избавиться с помощью счётной аддитивности, разбив X на счётное количество частей, каждая из которых имеет компактное замыкание в U .

Мы установили формулу для меры образа измеримого множества, по счётной аддитивности она даёт формулу замены переменных для счётно-ступенчатых функций, а потом и для произвольных измеримых функций с конечным интегралом или с бесконечным интегралом определённого знака из приближения их ступенчатыми стандартным способом.

Карасев.з.

6.99.

В теореме о замене переменных в кратном интеграле ослабьте условие бесконечной гладкости отображения φ до его непрерывной дифференцируемости.

||

Начните с интегрирования бесконечно гладких функций с компактным носителем.

А из них можно равномерно приближать непрерывно дифференцируемое отображение φ вместе с производными последовательностью бесконечно гладких φ_k и переходить к равномерному пределу в обеих частях равенства, при этом надо аккуратно обосновать инъективность φ_k при достаточно больших k .

Переход к интегрируемым функциям сделайте как в доказательстве теоремы для гладких φ .

||

Можно доказать формулу замены переменных для непрерывно дифференцируемых отображений иначе, в духе теории меры, а не дифференциальной геометрии и гомологической алгебры.

Набросок доказательства теоремы 6.98 без дифференциальных форм.

Аналогично написанному выше, в силу стандартных сведений о мере и интеграле достаточно доказать

$$\mu(\varphi(X)) = \int_X |J\varphi| dx$$

при условии, что X компактно, а φ биективно и непрерывно дифференцируемо в окрестности X .

Предположим противное, что для некоторого положительного ε (случай неравенства в другую сторону аналогичен)

$$\mu(\varphi(X)) > (1 + \varepsilon) \int_X |J\varphi| dx$$

Мы можем поделить X (например, гиперплоскостью) на две части положительной меры, для одной из которых такое неравенство продолжает выполняться.

Потом можно делить дальше и продолжить переходить от $\hat{X}_k$ к его части X_{k+1} так, что последовательность компактов (X_k) , для которых выполняется «плохое неравенство» (6.8), будет стремиться к точке $x_0 \in X$.

В этой точке отображение φ приближается линейным и домножив его на линейное отображение $D\varphi_{x_0}^{-1}$, мы сделаем его дифференциал единичным в x_0 .

Теорема

5.88 (о линейной замене переменных в интеграле) показывает, что после такой замены у нас всё ещё будет выполняться неравенство (6.8) для всех X_k .

После этого

Лемма

6.22 показывает, что для любого $\delta > 0$ в достаточно малой окрестности x_0 будет выполняться

$$(1 - \delta) |x' - x''| \leq |\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq (1 + \delta) |x' - x''|$$

а также в достаточно малой окрестности из непрерывности $J\varphi$ и равенства $J\varphi_{x_0} = 1$ будет выполняться

$$\mu(\varphi(X_k)) > (1 + \varepsilon/2) \int_{X_k} dx = (1 + \varepsilon/2) \mu X_k$$

После этого остаётся заметить, что условие (6.9) гарантирует, что мера множества при отображении φ меняется не менее чем в $(1 - \delta)^n$ и не более чем в $(1 + \delta)^n$ раз (n - это размерность).

Последнее утверждение можно доказать, покрывая компактное множество системой шаров в духе леммы Безиковича (

Карасев.з.

5.100) так, чтобы суммарная мера шаров была сколь угодно близка к мере множества.

Таким образом, при достаточно малом δ получится противоречие с неравенством (6.10).

15.2.4 Nested Manifolds in $\mathbb{R}^N$

Работа с векторными полями и дифференциальными формами на открытых подмножествах $\mathbb{R}^n$ бескоординатным образом может показаться не очень осмысленным упражнением, ведь координаты в $\mathbb{R}^n$ определены глобально.

Бескоординатный способ начинает выглядеть логично, если мы переходим к изучению подмножеств $\mathbb{R}^N$ которые локально выглядят как открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, но глобально могут и не иметь системы из n координатных функций.

Определение 6.100.

Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется вложенным многообразием размерности n , если для каждой $p \in M$ найдётся окрестность и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subset \mathbb{R}^N$ превращается в стандартное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$ в пересечении с некоторой окрестностью нуля.

Напомним, что задать криволинейную систему координат в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^N$ - это значит найти набор гладких функций $y_1, \dots, y_N : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, у которых линейно независимы дифференциалы в точке p и которые по теореме об обратном отображении дают диффеоморфизм некоторой окрестности $U \ni p$ на открытое множество $V \subseteq \mathbb{R}^N$.

Отображение φ , заданное такой системой координат, должно точку p отправлять в 0, а часть многообразия $M \cap U$ превращать в $\mathbb{R}^n \cap V$.

Примеры этого понятия мы неявно встречали в работе с условными экстремумами.

Если M задаётся гладкими уравнениями

$$f_1 = \dots = f_{N-n} = 0$$

и дифференциалы этих уравнений линейно независимы в каждой точке M , то M будет вложенным многообразием размерности n , так как определяющие его функции можно считать частью системы координат

$$y_{n+1} = f_1, \dots, y_N = f_{N-n}$$

в окрестности каждой точки $p \in M$, и M в такой окрестности выглядит в точности как $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$ около нуля, а функции $y_1, \dots, y_n$ задают систему координат в M , пересечённом с окрестностью p .

Карасев.з.

6.101.

Проверьте, что любая сфера в $\mathbb{R}^n$ является вложенным многообразием размерности $n - 1$.

Нам надо будет немного расширить определение многообразия до понятия многообразия с краем:

Определение 6.102.

Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется вложенным многообразием с краем размерности n , если для каждой $p \in M$ найдётся окрестность и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subset \mathbb{R}^N$ либо превращается в стандартное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$, пересечённое с окрестностью нуля; либо превращается в стандартное вложение $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^N$, пересечённое с окрестностью нуля.

В последнем случае, если первая координата точки p равна нулю, мы говорим, что точка p лежит на краю ∂M многообразия.

Карасев.з.

6.103.

Проверьте, что край ∂M многообразия с краем M сам по себе является $(n - 1)$ -мерным многообразием без края.

Теория

Определение многообразия показывает, что у всякой точки $p \in M$ есть окрестность в многообразии $M \cap U$ (относительно открытое подмножество многообразия) и отображение $\varphi : M \cap U \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющееся диффеоморфизмом между $M \cap U$ и $\varphi(M \cap U)$.

Такие отображения (диффеоморфизмы относительно открытых подмножеств M на открытые подмножества $\mathbb{R}^n$) называются координатными картами многообразия M .

иногда мы неформально будем называть картой само множество $M \cap U$, однако на самом деле оно всегда идёт в комплекте со своими координатами, компонентами отображения φ .

Наши определения векторов, векторных полей и дифференциальных форм специально выбирались таким образом, чтобы они не зависели от криволинейной замены координат, то есть в новой терминологии - от выбора карты.

Это позволяет корректно распространить их на произвольное многообразие.

Например, функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется гладкой функцией на многообразии, $f \in C^\infty(M)$, если в каждой координатной карте $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (здесь уже U является относительно открытым подмножеством M) эта функция (то есть композиция $f \circ \varphi^{-1}$) является гладкой функцией на образе $\varphi(U)$.

Приведём более общее и более концептуальное определение: дифференциальной формой $\alpha \in \Omega^k(M)$ на многообразии мы будем называть набор дифференциальных форм α_i на образах карт $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые обладают свойством

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \alpha_i = \alpha_j$$

на естественной области определения $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ в $\mathbb{R}^n$, для всяких двух карт φ_i, φ_j .

Можно неформально сказать, что глобальная форма собирается из локальных форм, если одна локальная переходит в другую соответственно замене одной карты на другую, причём делает это именно так как это происходит в ранее изученном случае, когда многообразие является областью $\mathbb{R}^n$.

В определении дифференциальной формы на многообразии достаточно рассматривать не все возможные карты многообразия M , а лишь некоторый набор карт, покрывающих M .

Тогда в любой другой координатной карте $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ соответствующее координатное представление $\alpha \in \Omega^k(\varphi(U))$ будет выглядеть как

$$\alpha = (\varphi_i \circ \varphi^{-1})^* \alpha_i$$

на множестве $\varphi(U \cap U_i)$, и по свойству (6.11) оказывается

$$(\varphi_j \circ \varphi^{-1})^* \alpha_j = (\varphi_j \circ \varphi^{-1})^* (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \alpha_i = (\varphi_i \circ \varphi^{-1})^* \alpha_i$$

на $\varphi(U \cap U_i \cap U_j)$, то есть определение не меняется при замене i на j в тех точках, где это имеет смысл.

В силу установленной ранее независимости от выбора криволинейных координат (например, в силу леммы 6.87) операции внешнего умножения и внешнего дифференцирования оказываются корректно определены для форм на многообразиях.

Есть простой и естественный способ получить дифференциальную форму на $M \subset \mathbb{R}^N$ - это ограничить какую-то дифференциальную форму из евклидова пространства, или из окрестности M .

В вышеописанных терминах это означает положить в каждой карте $\alpha_i = (\varphi_i^{-1})^* \alpha$ для $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^N)$.

Касательный вектор к вложенному многообразию $M \subset \mathbb{R}^N$ также можно рассматривать как касательный вектор $\mathbb{R}^N$, так как его определение как

дифференцирования функций на M позволяет ему дифференцировать и функции на $\mathbb{R}^N$, ограничивая их на M .

Можно проверить, что более явное описание касательных векторов к M получается именно таким, какое мы использовали при анализе условного экстремума, так как дифференцирование постоянных на многообразии функций должно давать нуль.

В случае многообразий с краем мы будем требовать, чтобы в координатном представлении диффеоморфизмы замены координат, векторные поля и дифференциальные формы гладко продолжались на окрестность края, это избавит нас от многих технических проблем.

На самом деле при этом важна будет возможность гладкого продолжения, а не выбор конкретного продолжения.

Некоторые технические подробности мы опускаем, но заинтересованный читатель может приобщиться к ним, решая такую задачу:

Карасев.з.

6.104.

Пусть функция $f : (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и все её частные производные определены при $x_1 < 0$ и непрерывно продолжаются до $x_1 = 0$.

Докажите, что функцию можно продолжить до гладкой функции на всём $\mathbb{R}^n$.

||

Для решения этой задачи надо решить задачу 2.81 так, чтобы её решение гладко зависело от возможных параметров.

||

15.2.5 Abstract Definition of a Manifold

Работа со вложенным многообразием через локальные карты показывает, что само вложение играет мало роли и можно пытаться представить себе абстрактное многообразие, которое вообще никуда не вложено.

Приведём стандартное определение абстрактного многообразия (с краем).

Абстрактное определение многообразия

Гладкое n -мерное многообразие M — то отделимое топологическое пространство со счётной базой, покрытое открытыми картами U_i так, что для каждой карты задано отображение $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$. Являющееся гомеоморфизмом на открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, и для пары таких отображений φ_i и φ_j композиция $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ является диффеоморфизмом на своей естественной области определения.

Гладкое n -мерное многообразие с краем M отличается тем, что некоторые из карт являются не такими, как описано выше, а являются гомеоморфизмами на относительно открытое подмножество $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$, в котором точки из $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ образуют край, а замены координат $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ переводят край в край.

Отображения φ_i называются картами, а их совокупность — атласом многообразия M . Отделимость или хаусдорфовость топологического пространства — это существование у всяких двух точек непересекающихся открытых окрестностей.

В качестве упражнения читателю предлагается придумать неотделимое одномерное многообразие.

Счётность базы топологии означает наличие счётной системы (базы) открытых подмножеств M , так что всякое открытое множество в M можно представить в виде объединения некоторого количества открытых множеств базы.

Карасев.з.

Постройте счётную базу топологии в $\mathbb{R}$.

||

Используйте счётность множества рациональных чисел.

||

Объекты на гладком многообразии задаются по уже описанной выше схеме.

Например, векторное поле на многообразии задаётся как набор векторных полей X_i на образах карт $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые обладают свойством $(\varphi_i \varphi_j^{-1})_* X_j = X_i$ на естественной области определения $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ в $\mathbb{R}^n$, для всяких двух карт φ_i, φ_j .

Аналогично определяются дифференциальные формы.

Утверждения о независимости основных операций с рассматриваемыми объектами от криволинейной замены координат, типа леммы 6.87, гарантируют нам, что операции дифференцирования функции векторным полем, внешнего умножения дифференциальных форм и внешнего дифференцирования на самом деле определены корректно для дифференциальных форм на многообразиях.

Карасев.з.

6.107.

Проверьте, что край ∂M абстрактного многообразия с краем M естественным образом является $(n - 1)$ -мерным абстрактным многообразием без края.

Абстрактное определение многообразия требует некоторого понимания топологии, и для понимания дальнейшего в основном достаточно представлять многообразие вложенным в евклидово пространство; хотя в разделе 10.12 будет существенно использоваться именно абстрактное определение.

Локальные вопросы в гладких многообразиях решаются в координатных картах, а глобальные вопросы решаются с помощью построения глобальных не более чем счётных и локально конечных разбиений единицы, для этого и требуются условия «отделимое топологическое пространство со счётной базой» в определении.

На самом деле далее мы будем в большинстве случаев использовать только разбиения единицы в окрестностях компактов (Лемма 6.123), для которых не нужна счётность базы топологии.

Но она нужна для существования счётных и локально конечных

разбиений единицы на всём многообразии и, например, для следующего утверждения

(

Теорема о вложимости Уитни

Всякое n -мерное абстрактное многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^{2n+1}$ без труда, а с некоторым трудом вкладывается и в $\mathbb{R}^{2n}$.

Поэтому рассмотрение вложенных в евклидово пространство многообразий на самом деле не уменьшает общности.

ещё одно техническое замечание такое.

Для абстрактного многообразия M всякое его открытое подмножество $U \subseteq M$ тоже является абстрактным многообразием по определению, достаточно ограничить карты M на U .

Для вложенного $M \subseteq \mathbb{R}^N$ его относительно открытое подмножество $U \subseteq M$ уже может не быть вложенным многообразием в нашем определении, так как от вложенного многообразия по определению мы требуем замкнутость.

Однако, мы можем построить функцию $y : U \rightarrow \mathbb{R}^+$, для которой всякое множество $\{x \in U : y(x) \leq M\}$ будет компактным.

Тогда отображение $U \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, у которого первые N координат взяты с $\mathbb{R}^N$, а последняя даётся нашей функцией y , уже будет представлять U в виде замкнутого вложенного многообразия в $\mathbb{R}^{N+1}$.

Карасев.з.

6.108.

* Постройте такую $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}^+$.

||

Представьте U в виде объединения последовательности компактных подмножеств $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, так чтобы внутренность K_{n+1} содержала K_n .

Далее стройте функцию по индукции, добиваясь того, чтобы $\rho(K_{n+1} \setminus K_n) \subseteq (n-1, n+1)$.

Можно пользоваться результатом задачи 4.74 для получения непрерывных функций, а потом их сглаживать, или сразу решить задачу 4.74 для гладких функций.

||

следующие задачи позволят читателю проверить своё понимание абстрактного определения многообразия.

Карасев.з.

6.109.

Рассмотрите на $\mathbb{R}^1$ две карты $\varphi_A : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\varphi_A(x) = x$ и $\varphi_B : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\varphi_B(x) = x^3$.

Проверьте, что они задают две разные гладкие структуры на прямой и приведите пример, когда одна и та же функция является гладкой функцией относительно

||

Рассмотрите выражение $\varphi_A \circ \varphi_B^{-1}$.]] имеем в виду не только M как топологическое пространство, но и идущий в комплекте с ним атлас из координатных карт, покрывающих M и имеющих гладкие функции перехода между картами в обе стороны.

Карасев.з.

6.110.

Докажите, что многообразие является связным топологическим пространством тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

||

Заметьте, что доказательство теоремы 3.60 работает с минимальными модификациями.

||

Карасев.з.

6.111.

Опишите все компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

||

Компактность позволяет оставить лишь конечное число карт в атласе, карты при этом можно считать связными.

Покажите, что многообразие распадется на компоненты (линейной) связности, которых оказывается конечное число.

Далее изучите связные компактные многообразия.

||

Карасев.з.

6.112.

Опишите все не обязательно компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

||

Действуйте аналогично предыдущей задаче.

В данном случае не обязательно есть конечное покрытие координатными картами, но по определению многообразия есть счётное покрытие, с которым на, даккурратно поработать.

||

15.2.6 Smooth Maps Between Manifolds

Определение

Определение 6.113.

Гладким отображением между многообразиями $f : M \rightarrow N$ размерностей m и n называется непрерывное отображение, которое в окрестности каждой точки, в достаточно малых координатных картах, выглядит как гладкое отображение области из $\mathbb{R}^m$ в область в $\mathbb{R}^n$.

Можно пояснить, что непрерывность в этом определении позволяет найти координатные окрестности $p \in U \subset M$ и $f(p) \in V \subset N$, такие что $f(U) \subseteq V$.

После этого, рассматривая отображение в координатах, то есть рассматривая

$$\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U) \rightarrow \varphi_V(V)$$

как отображение между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, можно судить о его гладкости.

Определение

Гладкое обратимое отображение $f : M \rightarrow N$ с обратным гладким назовём диффеоморфизмом многообразий. Для гладкого отображения многообразий, с помощью локального рассмотрения (или с помощью формулы (6.5)), корректно определена производная $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ в каждой точке $p \in M$, которую мы также называли прямым образом вектора φ_* .

Это линейное отображение касательных пространств в точке.

С помощью него определяется отображение обратного образа дифференциальных форм $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ как

$$f^* \alpha (X_1, \dots, X_k) = \alpha (\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k)$$

где в левой части формулы вычисление значения $f^* \alpha$ происходит в точке p , а в правой части вычисление значения α происходит в точке $f(p)$.

В частности, для функций, отображение $f^* : \Omega^0(N) \rightarrow \Omega^0(M)$, то есть $f^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$, переводит всякую

$$\text{функцию } g : N \rightarrow \mathbb{R} \text{ в } f^*(g) = g \circ f.$$

В случае диффеоморфизма также определено отображение f_* на уровне векторных полей (используя единственность прообраза точки и его гладкую зависимость от образа) и дифференциальных форм (просто как $f_* = (f^{-1})^*$).

Как было замечено ранее, при отсутствии биективности или гладкости обратного отображения прямой образ векторного поля или дифференциальной формы определить затруднительно.

Для приложений важно понятие кривой или поверхности, заданной параметрически.

В общей терминологии многообразий это означает, что берётся некоторое гладкое многообразие M (область определения параметров) и гладкое отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, от которого требуется, чтобы ранг Df_p был равен $m = \dim M$ во всех точках.

Само по себе это не гарантирует, что образ $f(M)$ будет вложенным многообразием, даже если отображение f инъективно (приведите соответствующие примеры для $m = 1$ самостоятельно).

Однако верно такое утверждение:

Лемма

Для гладкого отображения $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\text{rk } Df \equiv m = \dim M$, для всякой $p \in M$ найдётся окрестность $U \ni p$ такая, что $f(U)$ в некоторой криволинейной системе координат в окрестности $f(p)$ является открытым подмножеством стандартно вложенного $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$.

Доказательство.

Пусть $k = n - m$ и рассмотрим произведение $M \times \mathbb{R}^k$.

Это тоже гладкое многообразие по любому из определений.

Мы знаем, что касательное пространство $T_p M$ вкладывается в $T_{f(p)} \mathbb{R}^n$.

Тогда можно выбрать векторы $v_1, \dots, v_k$, которые дают разложение в прямую сумму

$$Df_p(T_p M) \oplus \langle v_1, \dots, v_k \rangle = T_{f(p)} \mathbb{R}^n.$$

Продолжим теперь отображение f на $M \times \mathbb{R}^k$ по формуле

$$g(q, t_1, \dots, t_k) = f(q) + v_1 t_1 + \dots + v_k t_k$$

легко проверить, что Dg в точке $(p, 0)$ является изоморфизмом линейных пространств.

Тогда по теореме об обратном отображении в окрестности p координаты многообразия M плюс координаты $t_1, \dots, t_k$ могут считаться локальной системой координат в окрестности $f(p)$, образ $f(U)$ удовлетворяет уравнениям $t_1 = \dots = t_k = 0$, что и означает требуемое.

Карасев.3.

6.116.

Докажите, что если отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ гладких многообразий инъективно, $\text{rk } Df \equiv \dim M$ всюду и M компактно, то его образ $f(M)$ является вложенным в $\mathbb{R}^n$ многообразием.

||

На, по проверить, что в достаточно малой окрестности $V \ni f(p)$ ничего кроме $f(U)$ не будет.

||

Карасев.3.

6.117.

Докажите, что диффеоморфизм гладких многообразий с краем $f : M \rightarrow N$ переводит край в край.

||

Если какая-то точка $p \in M$ не из края идёт в край, то рассматривая ситуацию в локальных координатах можно получить противоречие с теоремой об обратном отображении.

||

Карасев.з.

6.118.

Докажите, что гомеоморфизм (не обязательно гладкое непрерывное отображение с непрерывным обратным) гл. 1, мит край в край.

||

Если какая-то точка $p \in M$ не из края идёт в край, то можно рассмотреть ситуацию в локальных координатах.

С помощью содержимого раздела 7.4 докажите, что маленькую сферу $S_r(p)$ с центром в p нельзя непрерывно деформировать в точку, не задевая p .

Однако её образ $f(S_r(p))$ в окрестности $f(p)$ непрерывно деформировать в точку, не задевая $f(p)$, можно.

||

Карасев.з.

6.119.

следующие задачи дают алгебраическую интерпретацию гладких отображений между многообразиями и точек многообразия.

Докажите, что гладкие отображения между многообразиями $M \rightarrow N$ находятся в однозначном соответствии с гомоморфизмами алгебр $C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$, то есть отображениями колец функций, сохраняющих сложение, умножение, и переводящих константу в ту же константу.

||

В одну сторону очевидно.

Обратно, если есть гомоморфизм колец φ^* и если без ограничения общности N вложено $\mathbb{R}^n$, то посмотрите на образы координатных функций в $\mathbb{R}^n$ при отображении φ^* , они являются координатами некоторого отображения $M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Докажите с помощью леммы 6.37, что гомоморфизм колец задаётся композицией функции с этим отображением.

||

Карасев.з.

6.120.

Каким геометрическим объектам соответствуют гомоморфизмы алгебр $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$?

Карасев.з.

6.121.

докажите, что всякий $\mathbb{R}$ -линейный гомоморфизм колец $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{C}$ на самом деле имеет образ в $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

||

Продолжите гомоморфизм $e : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{C}_{\Delta 0} \mathbb{C}$ - линейного гомоморфизма кольца комплекснозначных функций $e : C^\infty(M, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$.

докажите, что для всякой комплекснозначной f число $e(f) \in \mathbb{C}$ является значением f , приведя к противоречию предположение о том, что $f - e(f)$ обратима в $C^\infty(M, \mathbb{C})$.]

Карасев.з.

6.122.

Если вы знакомы с алгеброй, опишите все максимальные идеалы в кольце $C^\infty(M)$ для компактного гладкого многообразия M .

||

Проверьте, что решение задачи 4.72 проходит при замене непрерывных функций на гладкие.

||

6.17.

15.2.7 Division of the Unit Into Manifolds

Для работы с объектами на многообразии полезно применять разбиение единицы, частный случай которого в $\mathbb{R}^n$ был установлен в лемме 6.95.

Собственно, теперь мы обобщим ту демму на случай компактного подмножества многообразия.

Лемма

6.123 (Разбиение единицы в окрестности компакта на многообразии).

Пусть M - гладкое многообразие, а $K \subseteq M$ - его компактное подмножество.

Для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ компакта K открытыми множествами найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ с компактными носителями $\text{supp } \rho_\alpha$ таких, что $\forall \alpha \text{ supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$ только конечное число из них отлично от нуля и

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha}(x) \equiv 1$$

в некоторой окрестности K .

Доказательство.

Рассуждение аналогично доказательству леммы 6.95.

Для всякой точки $p \in K$ в некоторой координатной окрестности W_p мы найдём функцию ψ_p , носитель которой содержится в каком-то из пересечений $U_\alpha \cap W_p$, и которая тождественно равна единице в некоторой окрестности $V_p \ni p$.

Если эту функцию продолжить нулём за пределы W_p , то она окажется гладкой функцией на M .

В последнем утверждении неявно используется, что дополнение в M к компактному замыканию V_p в W_p открыто в M .

Это очевидно для вложенных в евклидово пространство многообразий, а случай абстрактного многообразия разбирается в задаче 6.124 ниже.

Из-за компактности K мы можем оставить лишь конечное число таких ψ_p , обладающих свойством, что в каждой точке некоторой окрестности K хотя бы одна из них обращается в единицу.

Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 4.69 или леммы 6.95, мы сделаем из $\{\psi_i\}$ конечное разбиение единицы $\{h_i\}$ в окрестности K , не увеличивая носителей этих функций.

Заметим, что в итоге каждому U_α может быть сопоставлено несколько функций разбиения единицы h_i с носителем в нём, но их всех мы можем сгруппировать в одно ρ_α и получить то, что требуется в лемме.

Карасев.з.

6.124.

докажите, что компактное подмножество абстрактного гладкого многообразия является замкнутым.

||

Используйте свойство отделимости и топологическое определение компактности.

Покажите, что если точка не лежит в заданном компактном подмножестве, то заданное компактное подмножество и точка имеют непересекающиеся окрестности.

||

Разбиение единицы мы будем применять, например, для представления дифферен-

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \rho_i \alpha$$

Аналогично можно поступать и с векторными полями или другими аналогичными объектами.

Карасев.з.

6.125.

Следующая задача показывает, что на самом деле требование компактности носителя тоже можно обойти (и нам иногда будет нужен такой вариант).

Докажите, что для открытых покрытий всего многообразия M тоже верно, то есть у всякой точки будет окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом носителей функций разбиения.

||

Представьте M в виде объединения последовательности его компактных подмножеств $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, так чтобы внутренность K_{n+1} содержала K_n (здесь надо будет использовать счётность базы топологии M).

Далее надо достраивать разбиение единицы в окрестности $V_n \supset K_n$, $V_n \subset K_{n+1}$ до разбиения единицы в окрестности $V_{n+1} \supset K_{n+1}$ так, чтобы на K_{n-1} ничего не изменилось.

||

Карасев.з.

6.126.

Пусть многообразие M вложено в $\mathbb{R}^N$.

Докажите, что всякая гладкая функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ является сужением на M некоторой гладкой функции $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ в некоторой окрестности.

||

Карасев.з.

6.127.

Проверьте, что векторное поле на многообразии M можно определить как дифференцирование $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $\mathbb{R}$ -линейное и удовлетворяющее правилу Лейбница $X(fg) = gX(f) + fX(g)$.

||

Начните со значения дифференцирования в точке, постройте функцию, отличную от нуля только в заданной координатной карте в окрестности U этой точки и равную единице в меньшей окрестности точки.

С помощью такой функции докажите локальность дифференцирования, то есть однозначную определённость дифференцирования в точке как отображения $C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$, после этого утверждение сведётся к случаю открытого подмножества $\mathbb{R}^n$.]] 6.18.

Ориентация многообразия.

При рассмотрении зависимости интеграла дифференциальной формы в $\mathbb{R}^n$ от замены координат мы столкнулись с тем, что при замене координат интеграл может остаться тем же, а может поменять знак.

Это как бы раз- подмножества) на два класса - «ориентированные так» и «ориентированные иначе», при этом переход между представителями разных классов имеет отрицательный якобиан. Чтобы разобраться с понятием ориентации произвольного многообразия, надо выбрать покрывающий его набор карт так, что якобиан замены координат между ними будет положительным. После этого определения надо сделать важное замечание по определению многообразия.

Может оказаться так, что в нашем атласе на многообразии было слишком много карт или они были каким-то неудачными, и только поэтому мы не смогли выбрать на нём ориентацию.

Карасев.з.

6.129.

Придумайте атлас на $\mathbb{R}^1$, из которого нельзя выбрать покрывающий $\mathbb{R}^1$ податлас с положительными якобианами перехода, даже если разрешить переворачивать координаты ($x \mapsto -x$) в картах.

||

Покройте $\mathbb{R}^1$ двумя картами, область определения одной из которых состоит из двух интервалов, а знак производной отображения φ карты меняется.

||

Каждому атласу на всяком многообразии мы считаем допустимыми любые другие координатные атласы и наоборот, то есть которые задают гладкое отображение $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющееся диффеоморфизмом на свой образ. обратно.

Если в исходном атласе был задан некоторый объект, например векторное поле X , то во всякой новой карте мы тоже будем иметь векторное поле, собранное из

прямых образов $(\psi \circ \varphi^{-1})_* X_\varphi$, полученных с имеющихся карт φ и образов X_φ в них.

Для наведения строгости читатель может проверить, что эти прямые образы действительно согласованы и образуют одно векторное поле на новой карте. Жать её сужения на всевозможные открытые $V \subseteq U$; и для всякой точки многообразия найдётся покрывающая её карта, область определения которой связна, это будет удобно при работе с ориентацией.

При выборе ориентации мы будем поступать так же: начав с покрывающего многообразия (по определению ориентируемости) набора «положительных» карт с положи-

тельными якобианами замены координат между картами, мы будем далее записывать в «положительные» карты все карты максимального атласа, у которых якобианы перехода с начальным набором «положительных» карт положительные.

Это можно сформулировать в виде определения:

Определение 6.130.

Ориентацией гладкого многообразия M называется набор покрывающих его карт с положительными якобианами перехода между ними, максимальный по включению среди

всех таких наборов.

Карасев.з.

6.131.

Докажите, что на связном ориентируемом многообразии существует ровно две ориентации.

Сколько ориентаций может быть на несвязном многообразии?

||

ещё одну ориентацию из первой можно получить, назначив положительными все карты, для которых якобиан перехода из карт первой ориентации всюду отрицателен.

То, что других ориентаций на связном многообразии не будет, проще вывести из следующей ниже леммы.

||

В итоге строгое определение ориентации многообразия получилось несколько громоздким и может быть излишне абстрактным.

Следующая лемма позволяет ориентировать многообразие на практике с помощью ненулевой формы максимальной степени.

Лемма

6.132.

Многообразие M размерности n ориентируемо тогда и только тогда, когда существует дифференциальная форма $\nu \in \Omega^n(M)$, которая ни в одной точке не равна нулю.

Доказательство.

действительно, при наличии ненулевой формы ν положительность карты (назовём её ν -положительность) можно определить условием $\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$.

Всё многообразие можно покрыть связными картами (по замечанию выше), а в связной карте знак этого выражения либо везде положителен, либо везде отрицателен.

Если карта оказалась ν -положительна, мы её оставляем в списке, если нет, то меняем в ней порядок пары координатных функций и она становится ν -положительной и добавляется в список, таким образом всё многообразие оказывается покрыто выбранными так связными картами.

Якобианы переходов между ними должны быть положительными, так как иначе неравенство $\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$ поменяет знак.

Следовательно, назначенные нами ν -положительные связные (да и не только связные) карты задают ориентацию многообразия, так как если мы изначально имели максимальный по включению атлас, то всякая карта с положительными якобианами замены со всеми ν -положительными картами сама будет ν -положительной.

Если же у нас есть покрытие многообразия некоторыми картами с положительными якобианами переходов между ними, то в каждой карте U_i (мы оставим только счётное их число и будем нумеровать их) мы построим согласованную с ориентацией n -форму ν_i , заданную в координатах просто как $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Потом возьмём подчинённое покрытию $\{U_i\}$ локально конечное разбиение единицы $\{\rho_i\}$ (здесь используется существование локально конечного разбиения единицы в полной общности) и определим

$$\nu = \sum_i \rho_i \nu_i$$

где $\rho_i \nu_i$ понимается как форма с компактным носителем в U_i , продолженная за пределы U_i нулём.

Это выражение корректно, так как у каждой точки есть окрестность, в которой сумма справа выглядит как конечная сумма.

Рассматривая эту сумму локально в какой-либо из положительных карт, мы видим, что она везде положительна как сумма неотрицательных слагаемых, по крайней мере одно из которых не равно нулю.

Следовательно, ν нигде не обращается нуль.

Кроме того, положительность какой-либо карты в исходном смысле и положительность $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ на ней равносильны. С учётом предыдущей леммы можно задавать ориентацию n -мерного многообразия M с помощью нигде не обращающейся в нуль формы $\nu \in \Omega^n(M)$.

Тогда положительность или отрицательность системы координат $x_1, \dots, x_n$ будет определяться знаком

функции a в выражении $\nu = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ в этих координатах.

Замена ν на $f\nu$ для некоторой везде положительной функции f ориентацию не меняет, а замена на $f\nu$ с везде отрицательной f меняет ориентацию на противоположную.

Карасев.з.

6.133.

Определите ориентацию на единичной сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ с помощью какой-нибудь формы второй степени, не обращающейся в нуль при ограничении на сферу.

||

Посмотрите на смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$ и подставьте в него одним из аргументов вектор (x, y, z) .||

Для следующего определения нам также надо понимать ориентацию 0-мерного многообразия.

Нульмерное многообразие является несвязным набором из не более чем счётного числа отдельных точек, а ориентацию мы будем понимать в смысле предыдущего абзаца, как задание на этом множестве точек нигде не обращающейся в нуль функции.

Так как в ориентирующей функции важен только знак, то можно считать, что каждой точке сопоставляется знак $+1$ или -1 .

Определение 6.134.

для n -мерного ориентированного многообразия с краем M введём ориентацию на его крае ∂M следующим образом.

Если в локальной системе координат $x_1, \dots, x_n$ в окрестности некоторой точки края M задано неравенством $x_1 \leq 0$, а ∂M - соответственно равенством $x_1 = 0$, то знак карты $x_2, \dots, x_n$ на ∂M мы объявляем равным знаку карты $x_1, \dots, x_n$ на M .

Лемма

6.135.

Предыдущее определение корректно задаёт ориентацию на ∂ .

Доказательство.

По определению края всё многообразие ∂M можно покрыть картами вида $x_2, \dots, x_n$ из предыдущего определения.

Рассмотрим замену координат $x_1, \dots, x_n$ на $y_1, \dots, y_n$ между двумя координатными картами из определения.

При этой замене край многообразия должен переходить в край, а это означает, что на краю должно выполняться $\frac{\partial y_1}{\partial x_j} = 0$ при $j > 1$, а также $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} > 0$. Это означает, что знак определителя матрицы $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ совпадает со знаком её главного минора без первых строки и столбца.

Это выполняется на пересечении края M с данной координатной окрестностью, а значит и во всей координатной окрестности, если мы без ограничения общности будем считать её связной.

Это означает, что если при

такой замене мы переходили из положительной карты на M в положительную карту, или из отрицательной карты в отрицательную, то и на ∂M такая замена координат (кроме первой) не меняет знак карты.

Следовательно, описанное в определении назначение знаков картам задаёт некоторую корректную ориентацию на крае ∂M .

В качестве важного примера рассмотрим связное одномерное многообразие с краем, например отрезок $[0, 1]$ с координатой t и ориентацией, заданной формой dt .

Тогда можно проверить по определению, что на его крае, множестве из двух точек 0 и 1, задана ориентация, приписывающая точке 0 знак -1, а точке 1 - знак +1.

Карасев.з.

6.136.

Предположим, что многообразие M размерности n определяется системой уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad \dots, \quad f_{N-n}(x) = 0$$

и дифференциалы этой системы уравнений линейно независимы в каждой точке M .

Докажите, что M ориентируемо.

[[

Для выяснения ориентации карты из координат $t_1, \dots, t_n$ на M дополните её функциями $f_1, \dots, f_{N-n}$ до системы координат в области $\mathbb{R}^N$.]]

15.2.8 The Integral of a Form over an Oriented Manifold and the Stokes Formula (!!)

После сделанных в предыдущих разделах приготовлений мы готовы определить интеграл дифференциальной формы по ориентированному многообразию.

Определение

Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega_c^n$ по M , подчинённого некоторому набору положительно ориентированных карт как

$$\int_M \nu = \sum_i \int_M \rho_i \nu$$

где интегралы справа рассматриваются в координатных картах, содержащих носители соответствующих ρ_i .

Лемма

Определение интеграла не зависит от выбора системы положительных карт данной ориентации и подчинённого им разбиения единицы.

Доказательство.

Пусть у нас были карты $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ с подчинённым разбиением единицы $\rho_i : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ и новые карты $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ с подчинённым разбиением единицы $\sigma_j : M \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Если мы выбрали другую систему с той же ориентацией, то якобианы переходов от старых к новым должны быть положительными.

Выпишем формулу

$$\sum_i \rho_i \left(\sum_j \sigma_j \right) = \sum_{i,j} \rho_i \sigma_j = \sum_j \sigma_j \left(\sum_i \rho_i \right)$$

которая позволяет от двух разбиений единицы перейти к их общему «подразбиению» $\{\rho_i \sigma_j\}_{i,j}$, и умножим её на ν .

Тогда мы можем написать

$$\sum_i \int_M \rho_i \nu = \sum_i \int_M \rho_i \left(\sum_j \sigma_j \right) \nu = \sum_i \sum_j \int_M \rho_i \sigma_j \nu = \sum_j \int_M \left(\sum_i \rho_i \right) \sigma_j \nu = \sum_j \int_M \sigma_j \nu$$

Внутренние знаки равенства интерпретируются как уже известная нам аддитивность интеграла в пределах координатной карты.

Выражение посередине подразумевает,

что при сравнении интегралов каждого слагаемого $\rho_i \sigma_j \nu$ в карте U_i и в карте V_j мы используем независимость интеграла от замены одних координат на другие (отображением $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$) с положительным якобианом, таким образом подтверждая корректность выражения.

Правила замены переменных в интеграле от формы говорят, что если мы хотим проинтегрировать форму в карте, отрицательной относительно данной ориентации многообразия, то мы можем это сделать, но нам нужно будет поменять знак получившегося выражения.

Также уточним, что такое интеграл формы нулевой степени с компактным носителем, то есть на самом деле функции с конечным носителем, по 0 мерному многообразию.

Это просто сумма значений этой функции в точках 0-мерного многообразия, взятых со знаками, происходящими из ориентации точек данного многообразия.

На практике форму по многообразию можно интегрировать без разбиения единицы, если интегрировать её в карте, которая покрывает всё многообразие кроме множества меры нуль.

Например, сферу радиуса R в $\mathbb{R}^3$ можно параметризовать почти всю как

$$x = R \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = R \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = R \cos \vartheta$$

при $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi$ и интегрировать в указанном диапазоне. С учётом определения интеграла формы по многообразию и сделанных замечаний мы готовы доказать основную формулу про интегрирование дифференциальных форм.

Формула Стокса (!!!)

Формулировка

Для ориентированного многообразия с краем $(M, \partial M)$ (край рассматривается с согласованной ориентацией) размерности n и формулы $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(M)$ выполняется

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha$$

В этой формуле мы рассматриваем естественное гладкое вложение многообразий $i : \partial M \rightarrow M$ (см.

также задачу 6.107) и, строго говоря, в правой части равенства интегрируем $i^*\alpha$ по краю ∂M .

Напомним, что в координатном представлении мы просто требуем продолжимости α на окрестность края и таким образом $i^*\alpha$ корректно определена.

Такое же соглашение применяется всякий раз, когда мы хотим интегрировать дифференциальную форму, заданную на одном многообразии, по его подмногообразию, то есть рассматривать образ некоторого гладкого инъективного (или даже необязательно инъективного) отображения $i : N \rightarrow M$ одного многообразия в другое и брать форму $i^*\alpha$ на N .

Доказательство формулы Стокса

(!?!?!? тут идею потом напишу, пока еще не совсем усвоил его!!!!)

Используя разбиение единицы в окрестности носителя α по лемме 6.123, подчинённое покрытию носителя α координатными окрестностями, мы сведём задачу к вопросу в координатах, то есть к случаю $M = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ и $\partial M = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим случай $\alpha = f dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ и $d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Начав интегрировать по x_1 , мы получим по теореме Фубини и формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_M \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{\partial M} f(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

что доказывает теорему в этом случае.

Мы можем считать, что мы рассматривали связные координатные карты некоторого знака.

Отрицательность координатной карты могла внести знак «-» в левую часть формулы, но по определению ориентации на краю в правой части тоже появится «-», так что формула в любом случае остаётся верной.

Если же $\alpha = f dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ при $i > 1$, то уже интегрирование по x_i обнуляет левую часть (по формуле Ньютона-Лейбница), а в правой части будет стоять ноль по определению, так как ограничение формы α на ∂M окажется нулевым в силу того, что $dx_1 \equiv 0$ на краю. Также заметим, что в координатной окрестности, в которой края не видно, левая часть равенства обращается в ноль, как мы уже видели в доказательстве независимости определения интеграла дифференциальной формы от замены координат с положительным якобианом.

Правая часть в таких координатных окрестностях очевидно нулевая.

Нюансы в доказательстве формулы Стокса (!?!??)

Карасев.з.

6.140.

В следующей задаче мы изучаем полезные случаи формулы Стокса мая некоторых «многообразий с углами»:

Распространите формулу Стокса на параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ и на симплекс

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$$

считая интеграл по краю как сумму интегралов по граням с правильной ориентацией.

||

Можно обобщить рассуждение в основном доказательстве на случай, когда локально множество, по которому интегрируют $d\alpha$, устроено как $(-\infty, 0]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

15.2.9 Special Cases of the Stokes Formula and Its Applications

Обсудим интеграл по многообразию и формулу Стокса в малых размерностях.

Одномерное компактное многообразие с краем (см. задачу 6.111) - это просто набор кривых, диффеоморфных отрезкам или окружностям.

Для определённости мы будем рассматривать кривую, параметризованную отрезком.

Формула Стокса для ориентированной кривой с началом в точке p и концом в точке q сводится к утверждению

$$\int_{\gamma} df = f(q) - f(p)$$

которое конечно можно было бы доказать и непосредственно, рассмотрев интеграл в параметризации кривой и применив формулу Ньютона- Лейбница.

Карасев.з.

Проверьте, что ориентация кривой, которую мы определяли при изучении кривых, и ориентация вложенной кривой как одномерного многообразия дают по сути одно и то же понятие.

Отметим, что формально кривая не должна иметь самопересечений, чтобы считаться вложенным многообразием в евклидовом пространстве, но выписанная формула очевидно верна без этого предположения, если мы интегрируем обратный образ df по отрезку в параметризации.

Также кривую можно считать не бесконечно гладкой, а всего лишь кусочно непрерывно дифференцируемой, формула всё равно остаётся

Формула Грина (?!)

Перейдём к менее тривиальному случаю.

Для компактной области $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей (представляющей из себя вложенное одномерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^2$), ориентированной так, что при движении по ∂G область G оказывается слева (это и есть правильная ориентация края G в двумерном случае), верна формула Грина

$$\int_{\partial G} Pdx + Qdy = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

С помощью аккуратного предельного перехода можно обобщить это утверждение на области с кусочно-гладкой (или даже кусочно один раз непрерывно дифференцируемой) границей, многие полезные для практики обобщения можно получить в духе задачи 6.140.

Для компактной области $G \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей (то есть представляющей из себя вложенное трёхмерное гладкое многообразие с краем в $\mathbb{R}^3$) верна формула Гаусса-Остроградского

$$\int_{\partial G} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Карасев.з.

6.142.

Проверьте, что ориентация ∂G в формуле Гаусса-Остроградского должна быть такая, что в положительной карте на ∂G с координатами (u, v) вектор $[r'_u \times r'_v]$ торчит вовне G .

Для компактной двумерной поверхности с краем (то есть вложенного двумерного многообразия с краем) $S \subset \mathbb{R}^3$ верна формула Стокса в узком смысле $\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz =$

$$\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Ориентация в данном случае в простых терминах может быть описана аналогично предыдущему случаю:

Карасев.з.

6.143.

Проверьте, что при согласованной ориентации поверхности и её края в трёхмерной формуле Стокса ориентирующий касательный вектор ∂S , ориентирующая нормаль S (вида $[r'_u \times r'_v]$ для некоторых положительных координат (u, v)), и касательный вектор к S , направленный перпендикулярно ∂S от S , должны образовывать правую тройку.

Заметим, что на самом деле формула Стокса в $\mathbb{R}^3$ (а на самом деле и в больших размерностях) верна не только для вложенных двумерных многообразий, но и вообще для всякого образа гладкого отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ области $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей (даже не инъективного), если интегралы мы понимаем как интегралы обратных образов $f^*(\alpha)$ и $f^*(d\alpha)$ по ∂D и D соответственно.

Собственно, в такой формулировке вопрос сводится к формуле Грина на плоскости.

для практических применений полезно ослабить условия гладкости f до непрерывной дифференцируемости, тогда f надо равномерно приближать вместе с его первыми производными последовательностью гладких отображений (f_k) по теореме 6.19 и переходить к пределу в интеграле, замечая, что в его координатном представлении используются производные f не более чем первого порядка.

Поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ в формуле Стокса в узком смысле может быть кусочно-гладкой, то есть "склеенной" из ориентированных кусков S_i с кусочно гладкими краями так, что все линии склейки участвуют в двух из частей ∂S_i с разными ориентациями.

Краем склеенной поверхности тогда считаются те части из ∂S_i , которые не участвовали в склейке.

При таком определении при сложении формул Стокса будут складываться и правые части, и левые части, с сокращением интегралов по линиям склейки.

Формула Гаусса-Остроградского тоже может быть с некоторыми усилиями обобщена на случай, когда ∂G является кусочно-гладкой поверхностью в описанном смысле, читатель может поразмышлять над этим самостоятельно, а также проверить, что у поверхности ∂G не будет края в описанном выше кусочно-гладком смысле и убедиться,

что бесконечную гладкость поверхности S можно заменить на её однократную непрерывную дифференцируемость в параметрическом представлении.

Карасев.з.

6.144.

следующие задачи демонстрируют полезные способы вычисления площадей и объёмов с помощью формул Грина и Гаусса-Остроградского.

докажите, что площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C \subset \mathbb{R}^2$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_C x dy$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой.

Карасев.з.

6.145.

Четыре замкнутые кривые на плоскости

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

не имеют самопересечений и ограничивают области площадей $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_\delta$.

Также оказалось, что в любой момент времени точки $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ образуют квадрат в указанном порядке, ориентированный по часовой стрелке.

Как найти площадь одной из этих областей, зная площади трёх других?

||

Выпишите площади по формуле Грина.

||

Карасев.з.

6.146.

докажите, что объём области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной гладкой связной вложенной поверхностью без края $S \subset \mathbb{R}^3$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_S x dy \wedge dz$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности, не забывая про положительность объёма.

При определении дифференциальных форм на многообразии с краем мы требовались за край.

иногда это ограничение может быть чрезмерным, в следующей задаче мы наметим способ ослабить такое ограничение.

Карасев.з.

6.147.

Распространите формулу Стокса на случай, когда α непрерывна на всём многообразии, дифференцируема на его внутренности $M \setminus \partial M$ с локально

ограниченными производными, а $d\alpha$ глобально абсолютно интегрируема по Лебегу на его внутренности.

||

Приведённое доказательство формулы Стокса проходит, если его правильно понимать и если при локальном рассмотрении сначала доказать формулу для области $x_1 \leq -\varepsilon < 0$ и потом устремить $\varepsilon \rightarrow +0$, используя непрерывность интеграла Лебега и непрерывность α вплоть до гранишы.

||

Г-7. Поверхность с бесконечной площадью (????)

(??? так и не понял, почему такое может быть и как пофиксить???)

Пример Шварца, в котором боковой поверхности прямого кругового цилиндра сопоставляется сколь угодно большая конечная или даже бесконечная площадь

Пусть S - прямой круговой цилиндр

$$S \equiv \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

с радиусом основания 1 и с высотой 1. Для каждого натурального m определим $2m + 1$ окружностей C_{km} следующим образом:

$$C_{km} = S \cap \left\{ (x, y, z) | z = \frac{k}{2m} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2m.$$

На каждой из этих $2m + 1$ окружностей возьмем n равномерно распределенных точек $P_{kmj} (j = 0, 1, \dots, n - 1)$:

$$P_{kmi} \equiv \begin{cases} \left(\cos \frac{2j\pi}{n}, \sin \frac{2j\pi}{n}, \frac{k}{2m} \right), & \text{если } k \text{ четно,} \\ \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{n}, \sin \frac{(2j+1)\pi}{n}, \frac{k}{2m} \right), & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

На каждой окружности C_{km} точки $P_{kmj}, j = 0, 1, \dots, n$, являются вершинами правильного многоугольника, имеющего n сторон. Если $0 < k \leq 2m$, то каждая сторона многоугольника с вершинами на окружности C_{km} расположена над некоторой вершиной многоугольника, вписанного в $C_{k-1,n}$, и образует с этой вершиной некоторый (плоский) треугольник в пространстве. Аналогично, если $0 \leq k < 2m$, то каждая сторона многоугольника с вершинами на C_{km} расположена под некоторой вершиной многоугольника, вписанного в $C_{k+1,m}$, и образует с этой вершиной треугольник. Нетрудно видеть, что существуют всего $4mn$ конгруэнтных треугольников, построенных таким способом и расположенных в пространстве так, что их вершины лежат на данном цилиндре. Площадь каждого из этих треугольников равна

$$\sin \frac{\pi}{n} \left[\left(\frac{1}{4m^2} + \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Эти треугольники образуют многогранник Π_{mn} , вписанный в S . Площадь $A(\Pi_{mn})$ его боковой поверхности равна

$$A(\Pi_{mn}) = 2\pi \frac{\sin(\pi/n)}{(\pi/n)} \sqrt{1 + 4m^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}.$$

Если m и $n \rightarrow +\infty$, то длины сторон упомянутых треугольников стремятся к нулю и поэтому естественно было бы ожидать, что площади боковых поверхностей вписанных многогранников стремятся к некоторому пределу, а именно к площади боковой

поверхности цилиндра, равной $(2\pi \cdot 1) \cdot 1 = 2\pi$ (площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра вычисляется по известной формуле $2\pi rh$, где r -радиус основания, а h -высота цилиндра). Однако мы увидим, что результат зависит от относительных скоростей возрастания m и n .

Заметим сначала, что при $n \rightarrow +\infty$ предел множителя, стоящего перед радикалом в формуле для $A(\Pi_{mn})$, равен 2π , а подкоренное выражение не меньше 1. Поэтому, если $A(\Pi_{mn})$ имеет предел, то он должен быть не меньше 2π . Теперь обратим внимание на выражение под радикалом, точнее на функцию

$$f(m, n) \equiv 2m \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2 m}{n^2} - \frac{2\pi^4 m}{4!n^4} + \frac{2\pi^6 m}{6!n^6} - \dots$$

Рассмотрим три случая:

(i) Если $m = n$, то

$$f(n, n) = 2n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2}{n} - \frac{2\pi^4}{4!n^3} + \dots$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, n) = 0$, а $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{nn}) = 2\pi$.

(ii) Если же $m = [\alpha n^2]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа (функция $[x]$ определена во второй главе) и если $0 < \alpha < +\infty$, то

$$f([\alpha n^2], n) = 2[\alpha n^2] \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2 [\alpha n^2]}{n^2} - \frac{2\pi^4 [\alpha n^2]}{4!n^4} + \dots$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f([\alpha n^2], n) = \alpha\pi^2$, а $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{[\alpha n^2], n}) = 2\pi\sqrt{1 + \alpha^2\pi^4}$.

(iii) Наконец, если $m = n^3$, то

$$f(n^3, n) = 2n^3 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \pi^2 n - \frac{2\pi^4}{4!n} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n^3, n) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{n^3, n}) = +\infty.$$

В заключение отметим, что в зависимости от способа стремления m и n к бесконечности в качестве предела $A(\Pi_{mn})$ может получиться любое конечное или бесконечное число, не меньшее 2π . Хотя предел $\lim_{m \rightarrow +\infty} A(\Pi_{mn})$ не существует, но можно утверждать, что

$$\lim_{m, n} A(\Pi_{mn}) = 2\pi.$$

Приведенный выше пример принадлежит Г. А. Шварцу (Gesammelte Mathematische Abhandlungen, vol. 2, p. 309, Berlin, Julius Springer, 1890). Он показывает, что понятие площадь поверхности гораздо сложнее понятия длины дуги. Подробное рассмотрение этих понятий и дальнейшие ссылки можно найти в [42]. Элементарные сведения о площади поверхности см. в [36], стр. 610-635 (а также [52]*, т. III, стр. 248 – 257).

16 Special methods for evaluation of integrals

16.0.1 Different Estimations of Integrals and Expressions (!?)

(это частично в 1ю 1ю часть перекину! пока еще чуть разобрать нужно!)

Принцип подобных оценок состоит в определении области переменных, вносящей главный вклад в результат, и в выделении быстро и медленно меняющихся в этой области частей математического выражения.

Оценки интегралов

Оценим $I(x) = \int_0^x e^{t^2} \frac{dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}.$

Если $x \ll 1$, то в подынтегральном выражении экспонента $e^{t^2} \approx 1$. Следовательно, $I(x) \approx \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$. Так как в этом интеграле нет никаких параметров, то $I(x) \sim 1$. Вычисляя, находим, $I(x) \approx \pi/2$.

Если $x \geq 1$, то из-за экспоненциального роста множителя e^{t^2} главный вклад в интеграл внесет область около точки $t = x$.

Если обозначить $\xi = x - t$, то

$$I(x) = \int_0^x e^{x^2 - 2\xi x + \xi^2} \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi x - \xi^2}}.$$

Область ξ , существенная в подынтегральном выражении, сосредоточена около нижнего предела и имеет ширину порядка $1/2x$. В этой области $\xi^2 \sim 1/4x^2 \ll 1$, следовательно, $e^{\xi^2} \approx 1$ и

$$I(x) \approx e^{x^2} \int_0^x e^{-2\xi x} \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi x}} \approx \frac{e^{x^2}}{2x} \int_0^\infty e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} \sim \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

При $x \sim 1$ оба выражения для $I(x)$, как это должно быть, примерно совпадают и порядка единицы. Таким образом, указанные оценки хорошо описывают $I(x)$ во всей области изменения x .

Оценим $I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \sin^2 \beta x dx$

Перепишем этот интеграл в виде

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-z^2} \sin^2 \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z \right) dz.$$

При $z > 1$ подынтегральная функция быстро убывает, поэтому существенная область интегрирования $0 < z < 1$.

Если $\beta \gg \sqrt{\alpha}$, то $\sin \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z$ много раз осциллирует в существенной области значений z . Следовательно, $\sin^2 \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z \right)$ можно заменить на $1/2$ и интеграл $I(\alpha, \beta)$ приближенно равен

$$I(\alpha, \beta) \approx \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}},$$

где C_1 - числовой множитель, равный $\sqrt{\pi}/4$.

Если $\beta \ll \sqrt{\alpha}$, то в существенной области значений z $\sin \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z \approx \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z$. Следовательно,

$$I(\alpha, \beta) \approx \frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-z^2} z^2 dz = C_2 \frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\alpha}},$$

где C_2 - числовой множитель, равный $\sqrt{\pi}/4$.

При $\beta = V\alpha$ оба выражения для $I(\alpha, \beta)$ совпадают и равны $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Заметим, что точное значение оцениваемого интеграла равно

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \mathbb{J} \frac{\pi}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}} \right).$$

Легко видеть, что из него получаются оба предельных случая $\beta \gg \sqrt{\alpha}$ и $\beta \ll \sqrt{\alpha}$, приведенные выше.

При $\beta = \sqrt{\alpha} I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$, т. е. того же порядка, что и приведенные оценки.

Оценим $I(\alpha, a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x+a} dx$, $\alpha > 0$.

Заменим переменную интегрирования: $x = az$. Тогда $I(\alpha, a)$ принимает вид

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha az} dz}{z+1}.$$

Область, где подынтегральная функция существенно отлична от нуля, $z \leq 1/\alpha a$.

Пусть $\alpha a \gg 1$. Тогда $z \ll 1$ в существенной области. Следовательно,

$$I \underset{\alpha a \gg 1}{\approx} \int_0^{\infty} e^{-\alpha az} dz = \frac{1}{\alpha a}.$$

Если $\alpha a \ll 1$, то в существенной области $z \gg 1$. Следовательно, можно заменить $z+1 \approx z$ и $e^{-\alpha az} \approx 1$. Поэтому

$$I \underset{\alpha a \ll 1}{\approx} \int_1^{\infty} \frac{dz}{z} = \ln \frac{1}{\alpha a}.$$

Рассматриваемый интеграл выражается через интегральную показательную функцию $\text{Ei}(x)$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x+a} dx = -e^{\alpha a} \text{Ei}(-\alpha a).$$

Если $\alpha a \gg 1$, то $\text{Ei}(-\alpha a) \approx \frac{e^{-\alpha a}}{-\alpha a}$, и мы получаем формулу (1.1). Если $\alpha a \ll 1$, то $\text{Ei}(-\alpha a) \approx \ln \frac{1}{\alpha a}$, что мы и нашли.

Метод перевала. Асимптотическое выражение для гамма-функции

Получим асимптотическое выражение при больших x для гамма-функции

$$x! \equiv \Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt$$

Запишем это выражение в виде $\int_0^{\infty} e^{-t+x \ln t} dt$ и вычислим его по способу, который называется методом перевала. Этот метод состоит в следующем. Рассмотрим интеграл $I(x) = \int_0^{\infty} g(t) e^{f(x,t)} dt$, где $e^{f(x,t)}$ - функция, которая для больших x имеет резкий максимум при $t = t_0(x)$. Пусть вблизи $t_0(x)$ функция $g(t)$ медленно меняется.

Тогда в окрестности максимума функцию ge^f можно заменить более простой функцией. Для этого разложим $f(x, t)$ в ряд Тейлора в окрестности ее максимума t_0 :

$$f(x, t) = f(x, t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(x, t_0) + \dots$$

Предположим, что $|f''(x, t_0)| \geq 1/t_0^2$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) &\approx g(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x, t_0) - \frac{1}{2}(t - t_0)^2 |f''(x, t_0)|} dt = \\ &= \frac{g(t_0) e^{f(x, t_0)}}{\sqrt{\frac{1}{2} |f''(x, t_0)|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x, t_0)|}} g(t_0) e^{f(x, t_0)} \end{aligned}$$

Пределы интегрирования здесь заменены на $[-\infty, \infty]$, так как подынтегральное выражение экспоненциально затухает в области

$$\delta t \sim 1/\sqrt{|f''(t_0)|} \leq t_0.$$

Если заменить далее $t - t_0 = i\xi$, то подынтегральное выражение превратится в растущую экспоненту. Иными словами, в комплексной плоскости переменной t точка t_0 является седловой (рис. 3).

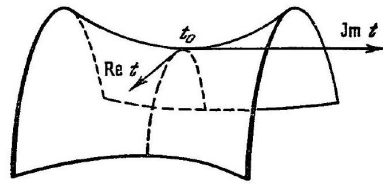


Рис. 3.

Направление интегрирования совпадает с направлением наискорейшего спуска с перевала. Отсюда понятно название метода перевала.

Мы рассмотрели частный случай, когда направление перевала совпадает с вещественной осью. Можно рассмотреть и более общий случай, когда направление перевала составляет произвольный угол с вещественной осью.

Итак, вычислим $\Gamma(x + 1)$ методом перевала. Обозначим $f(t) = -t + x \ln t$. Тогда из равенства нулю $f'(t)$ можно найти точку перевала t_0 :

$$f'(t_0) = -1 + \frac{x}{t_0} = 0,$$

откуда $t_0 = x$.

Далее, $f''(t_0) = -\frac{x}{t_0^2} = -\frac{1}{x}$. Итак, вблизи точки перевала $t_0 = x$

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \frac{-1}{x}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(x + 1) \underset{x \geq 1}{\approx} e^{f(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2x}(t - t_0)^2} dt = e^{-x + x \ln x} \sqrt{2x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}.$$

Эта асимптотическая формула называется формулой Стирлинга. Для оценки ее точности напишем следующие члены разложения $f(t)$ вблизи точки перевала. Так как $f'''(t_0) = \frac{2x}{t_0^3} = \frac{2}{x^2}$, то в показатель экспоненты добавляется кубический член $\frac{2}{3!x^2}(t-t_0)^3$. Учитывая его малость, разложим в ряд экспоненту

$$e^{\frac{2}{3!x^2}(t-t_0)^3} \approx 1 + \frac{1}{3x^2}(t-t_0)^3.$$

Интеграл от этой поправки обратится в нуль из-за нечетности подынтегральной функции. Поэтому, чтобы найти поправку, нужно разлагать $f(t)$ вблизи t_0 с точностью до $(t-t_0)^4$. Так как

$$f(1V)(t_0) = -\frac{6x}{t_0^4} = -\frac{6}{x^3},$$

то

$$e^{\frac{2}{3!x^2}(t-t_0)^3 - \frac{6}{4!x^3}(t-t_0)^4} \approx 1 + \frac{(t-t_0)^3}{3x^2} - \frac{(t-t_0)^4}{4x^3} + \frac{(t-t_0)^6}{18x^4}$$

Следовательно, поправка к $\Gamma(x+1)$ имеет оценку:

$$\begin{aligned} e^i(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2x}(t-t_0)^2} \left[-\frac{(t-t_0)^1}{4x^3} + \frac{(t-t_0)^6}{18x^4} \right] dt = \\ = e^{-x+x \ln x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left[\frac{2^4 \cdot 4x^2}{4x^3} + \frac{z^6 \cdot 8x^3}{18x^4} \right] \sqrt{2x} dz = \frac{\sqrt{2\pi} x^x}{12\sqrt{x}} e^{-x} \end{aligned}$$

Итак,

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \left(1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

Интересно, что формула Стирлинга с большой точностью годится и для небольших значений x . Например, даже для $x=1$ получаем по этой формуле

$$\sqrt{2\pi} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{12} \right) = 0,995 \approx 1! = 1$$

при $x=2$

$$\sqrt{4\pi} \frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{24} \right) = 1,9994 \approx 2! = 2.$$

Задача. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} z^{-\alpha} dz$ методом перевала.

ОТВЕТ. $\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} - \frac{1}{2}}$

Свойства интегралов от осциллирующих функций. Оценки дальнейших членов ряда Фурье

Рассмотрим несколько примеров, поясняющих свойства интегралов от осциллирующих функций.

$$1. I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} dt}{\sqrt{a^2 + v^2 t^2}}, \omega \rightarrow \infty.$$

Особые точки подынтегрального выражения находятся на мнимой оси: $t = \pm i \frac{a}{v}$. Вычислим этот интеграл, смещая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость (см, рис. 4).

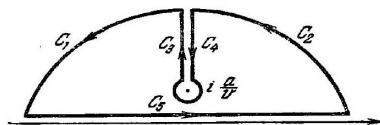


Рис. 4.

Интегралы по C_1 и C_2 исчезают при смещении контура в бесконечность. Поэтому рассматриваемый интеграл равен интегралу по контуру $C_3 + C_4 + C_5$ вокруг точки ветвления $t = i \frac{a}{v}$. Знаменатель подынтегрального выражения $\sqrt{a^2 + v^2 t^2}$ меняет знак при обходе точки ветвления. Поэтому интегралы по C_3 и C_4 равны (а не равны с противоположным знаком, как это было бы в случае обхода простого полюса). Интеграл по контуру C_5 стремится к нулю. В этом легко убедиться, заменяя $\frac{v}{a}t = i + re^{i\varphi}$, причем $r \rightarrow 0$. Тогда

$$\int_{C_5} \sim \int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\varphi} d\Phi}{\sqrt{i e^{i\varphi}}} \sim \sqrt{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Вводя переменную интегрирования $x = \frac{v}{a}t$, имеем:

$$I = \frac{a}{av} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{\omega ax}{v}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x=i(1+\eta)}{=} \frac{2e^{-\frac{\omega a}{v}}}{v} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega a \eta}{v}} \frac{d\eta}{\sqrt{2\eta}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{v} e^{-\frac{\omega a}{v}} \sqrt{\frac{v}{\omega a}}.$$

(вроде как именно во 2-м тут равенстве мы и перешли к двум интегралам по контурам)

При больших ω интеграл I экспоненциально мал.

$$2. I = \int_{-1}^1 f(x) e^{ikrx} dx \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Этот интеграл возникает при вычислении амплитуды рассеяния (см. 2.1) (???).

Пределы интегрирования здесь конечны. Интегрируя по частям, получим:

$$I = f(x) \frac{e^{ikrx}}{ikr} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{ikr} \int_{-1}^1 f'(x) e^{ikrx} dx = \frac{f(1)e^{ikr} - f(-1)e^{-ikr}}{ikr} + O\left(\frac{1}{k^2 r^2}\right).$$

Итак, в случае конечных пределов далекие фурье-компоненты малы степенным образом (вместо экспоненциальной малости в случае бесконечных пределов).

Обобщение результатов

Эти результаты можно обобщить: далекие фурьекомпоненты функций, не имеющих особенностей на вещественной оси, экспоненциально малы. Если x_1 - характерная длина $f(x)$ (это означает, что расстояние от вещественной оси до особой точки - порядка x_1), то

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \underset{\omega x_1 \gg 1}{\sim} e^{-\omega x_1}.$$

Оценим предэкспоненциальный множитель для фурьекомпоненты f_ω . Если $f(x)$ имеет полюс в комплексной плоскости ω , то

$$f_\omega \sim f(x_1) x_1 e^{-\omega x_1}.$$

Действительно, вычет C_1 функции f в точке полюса, как видно из размерности, имеет порядок $C_1 \sim f(x_1) x_1$. Если $f(x)$ имеет точку ветвления корневого типа, то, как мы видели на первом примере

$$f_\omega \sim \frac{f(x_1) x_1}{\sqrt{\omega x_1}} e^{-\omega x_1}.$$

В случае конечных пределов

$$f_\omega = \int_{a_1}^{a_2} f(x) e^{i\omega x} dx \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f(a_1)}{\omega}.$$

То же самое относится к интегралам в бесконечных пределах в случае, когда $f(x)$ имеет скачки на вещественной оси. Действительно, интеграл можно разбить на области от $-\infty$ до места скачка и от места скачка до ∞ . Если вычислять затем каждый из этих интегралов, то, как и в только что приведенном примере, возникнет степенная малость. В этом случае

$$f_\omega \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Delta f}{\omega},$$

где Δf - величина скачка.

Легко видеть, что если скачок имеет n -я производная функции $f(x)$, то

$$f_\omega \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Delta f^{(n)}}{\omega^{n+1}},$$

где $\Delta f^{(n)}$ - величина скачка функции $f^{(n)}(x)$. Чтобы убедиться в этом, нужно проинтегрировать по частям $n+1$ раз величину $f_\omega = \int_{-\infty}^a f(x) e^{i\omega x} dx + \int_a^\infty f(x) e^{i\omega x} dx$, где a - место скачка.

Пример для иллюстрации

Для иллюстрации этих результатов рассмотрим пример, на котором будет видно, как в далеких компонентах

Фурье экспоненциальная малость превращается в степенную, когда особенность функции приближается к вещественной оси. Именно, рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1 + e^{\alpha x}} dx, \quad \omega = \omega_0 - i\delta, \quad \delta \rightarrow +0, \quad \alpha > 0.$$

График функции $f(x) = \frac{1}{1+e^{\alpha x}}$ имеет вид, изображенный на рис. 5.

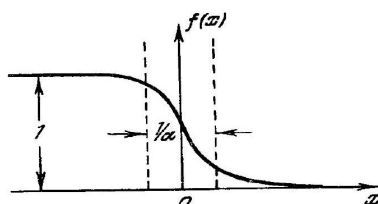


Рис. 5.

Если $\alpha \rightarrow \infty$, то эта функция стремится к прямоугольной ступеньке. Функция $f(x)$ имеет простые полюсы в точках $x = \frac{(2k+1)\pi i}{\alpha}$, где k - целое число. Если $\alpha \rightarrow \infty$, то каждый полюс приближается к вещественной оси. Вычислим интеграл, смещая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость (рис. 6).

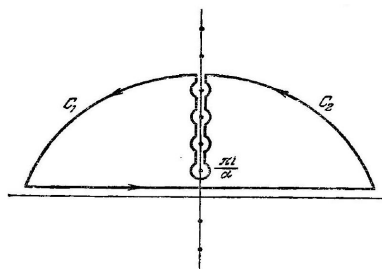


Рис. 6.

Интеграл по $C_1 + C_2$ обращается в нуль при смещении контура в бесконечность. Итак, рассматриваемый интеграл сводится к сумме вычетов в полюсах верхней полуплоскости. Для нахождения вычета разложим $e^{\alpha x}$ в ряд вблизи полюса x_k :

$$e^{\alpha x} \approx e^{\alpha x_k} + \alpha e^{\alpha x_k} (x - x_k) = -1 - \alpha (x - x_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= - \sum_{k=0}^{\infty} \text{Res} \int e^{i\omega x} \frac{dx}{-\alpha (x - x_k)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{\alpha}(2k+1)\pi} = \\ &= \frac{2\pi i}{\alpha} e^{-\frac{\pi\omega}{\alpha}} [1 + e^{-2\frac{\pi\omega}{\alpha}} + e^{-4\frac{\pi\omega}{\alpha}} + e^{-6\frac{\pi\omega}{\alpha}} + \dots]. \end{aligned}$$

Ряд в квадратных скобках представляет собой геометрическую прогрессию и его сумма равна $\frac{1}{1 - e^{-2\frac{\pi\omega}{\alpha}}}$. Следовательно,

$$I = \frac{2\pi i}{\alpha} \frac{e^{-\pi\omega/\alpha}}{1 - e^{-2\pi\omega/\alpha}} = \frac{\pi i}{\alpha \text{sh} \frac{\pi\omega}{\alpha}}.$$

Если $\omega/\alpha \gg 1$, то рассматриваемый интеграл экспоненциально мал:

$$I \underset{\omega/\alpha \gg 1}{\approx} \frac{2\pi i}{\alpha} e^{-\pi\omega/\alpha}.$$

Это соответствует сделанному выше утверждению об экспоненциальной малости далеких фурье-компонент в случае, когда подынтегральная функция не имеет особенностей на вещественной оси.

Если $\alpha \rightarrow \infty$, то

$$I \underset{\omega/\alpha \ll 1}{\approx} \frac{i}{\omega}.$$

Итак, когда особенность переходит на вещественную ось, фурье-компонента становится малой степенным образом.

З а а ч а Оценить далекую фурье-компоненту функции $f(x) = xe^{-|x|}$.

О т в е т.

$$f_{\omega} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2}{\omega^3}.$$

Оценки решений дифференциальных уравнений

Приведем несколько случаев качественного решения дифференциальных уравнений.

Квазиклассическое приближение

При рассмотрении многих задач теоретической физики требуется решить дифференциальное уравнение вида

$$\varphi'' + k^2(x)\varphi = 0.$$

Характер решения уравнения (1.5) существенно зависит от знака k^2 . Действительно, пусть k^2 - постоянная положительная величина. Тогда решение имеет осциллирующий характер: $\varphi = e^{\pm ikx}$. Если $k^2 < 0$, то решение экспоненциально растет или затухает: $\varphi = e^{\pm |k|x}$. Решение уравнения (1.5) имеет такой же характер, и когда k зависит от x (рис. 7).

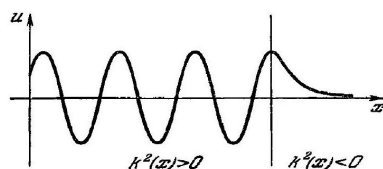


Рис. 7.

Если $k^2(x)$ - большое положительное число, то приближенное решение уравнения (1.5) имеет вид

$$\varphi = f(x) \exp \left\{ \pm i \int k(x) dx \right\},$$

где $f'(x)$ - медленно изменяющаяся функция. Действительно, в этом случае $\varphi' \approx \pm ik(x)\varphi$ и $\varphi'' \approx -k^2(x)\varphi \pm ik'(x)\varphi$. Если $k(x)$ - достаточно гладкая функция x , то $k' \ll k^2$ для существенных x . Следовательно, решение (1.6) приближенно удовлетворяет уравнению $\varphi'' + k^2(x)\varphi = 0$.

Можно найти и следующую поправку (подробнее см. 3.1). Так как $\varphi' = \frac{f'}{f}\varphi \pm ik\varphi$ и $\varphi'' \approx -k^2\varphi \pm ik'\varphi \pm 2ik\frac{f'}{f}\varphi$, то, подставляя φ и φ'' в $\varphi'' + k^2(x)\varphi = 0$, находим

$$2kf' + fk' = 0,$$

или

$$\frac{f'}{f} = -\frac{k'}{2k},$$

откуда

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Итак, приближенное решение уравнения $\varphi'' + k^2(x)\varphi = 0$ в случае больших положительных $k^2(x)$ имеет вид

$$\varphi \approx \frac{1}{\sqrt{k}} \exp \left\{ \pm i \int k(x) dx \right\}.$$

Примеры

Рассмотрим примеры.

а) $\varphi'' + \alpha x \varphi = 0, \alpha > 0$

Это уравнение для так называемой функции Эйри.

Пусть сначала $x > 0$. Тогда $k^2 = \alpha x > 0$, и согласно полученной формуле $\varphi \approx \frac{1}{\sqrt{k}} \exp \{ \pm i \int k(x) dx \}$ решение при больших x имеет вид

$$\varphi \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha x}} e^{\pm \frac{2}{3} i \sqrt{\alpha x^3}}.$$

А решение при $x < 0$ можно получить аналитическим продолжением:

$$\varphi \underset{|x| \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt[4]{\alpha |x|}} e^{\pm \frac{2}{3} \sqrt{\alpha |x|^3}}$$

Дополнительная фаза $\exp(-\pi i/4)$ возникает при обходе точки ветвления $x = 0$ (подробнее об этом см. 3.1). (!!???)

б) $\varphi'' + (\alpha - \beta x^2) \varphi = 0$

Если $\beta x^2 \gg \alpha$, то $\int k dx \approx \sqrt{\beta} \int x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\beta} x^2$. Следовательно, асимптотическое решение при больших x имеет вид

$$\varphi \underset{x \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{\beta x^2}} e^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta} x^2}.$$

решение по поведению вблизи особых точек (???)

Построим решение по поведению вблизи особых точек. Зная решение дифференциального уравнения вблизи особых точек, можно построить интерполяционные формулы для решения во всей области изменения переменной. В качестве примера рассмотрим уравнение Томаса-Ферми

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi^{3/2}, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0.$$

Оно возникает при нахождении самосогласованного поля атома в квазиклассическом приближении (см. 3.1). Это уравнение имеет две особые точки: $x = 0$ и $x = \infty$.

Найдем приближенное решение ур Т-Ф при $x \rightarrow \infty$. Будем искать его в виде $\varphi = A/x^\alpha$. Подставляя это решение в ур Т-Ф, получим

$$A\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2} = A^{3/2}x^{-\frac{3}{2}\alpha-1/2},$$

откуда $\alpha + 2 = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}$, т. е. $\alpha = 3$ и $A^{1/2} = \alpha(\alpha+1)$, т. е. $A = 144$: Итак,

$$\varphi \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{144}{x^3}.$$

Найдем поправку к этому решению при $x \rightarrow \infty$:

$$\varphi \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{144}{x^3} + \psi.$$

Подставим (1.10) в (1.9). В линейном по ψ приближении находим

$$\psi'' = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{3}{2} \varphi^{1/2} \psi \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{x^2} \psi$$

Из (1.11) видно, что Ψ степенным образом зависит от x . Итак,

$$\psi = \frac{B}{x^\beta}.$$

Для β из (1.11) получаем квадратное уравнение

$$\beta(\beta + 1) = 18,$$

откуда $\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{2}$. Годится лишь корень $\beta \approx 3,77 > 0$, для которого $\Psi \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Следовательно,

$$p_{x \rightarrow \infty} = \frac{144}{x^3} + \frac{B}{x^{3,77}}.$$

С той же степенью точности, что и в (1.12), решение можно написать в виде

$$\varphi = \frac{144}{x^3 \left(1 + \frac{C}{x^{0,77}}\right)^n},$$

где n и C -пока произвольные числа.

Найдем такое n , чтобы $\varphi(0)$ было конечно. Для этого должно быть $3 - 0,77n = 0$, т. е. $n = 3,90$. После этого константу C можно найти из условия $\varphi(0) = 1 : 144/C^{3,90} = 1$, откуда $C = (144)^{0,77/3} = (12^{2/3})^{0,27}$. Окончательно,

$$\varphi = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x}{12^{2/3}}\right)^{0,77}\right]^{3,90}}$$

Это приближенное решение удовлетворительно согласуется с точным решением, получаемым на компьютере:

x	$\varphi_{\text{прибл}}$	$\varphi_{\text{точн}}$	x	$\varphi_{\text{прибл}}$	$\varphi_{\text{точн}}$
0	1	1	2	0,22	0,24
0,3	0,67	0,72	3	0,14	0,16
0,5	0,56	0,61	5	0,072	0,079
1	0,38	0,42			

17 Other special integrals and special methods

17.1 Spaces of Functions Defined by the Properties of Integrals

(теор часть, скучно, пока не планирую дорабатывать)

17.1.1 L_p , Spaces, Gelder and Minkowski Inequalities

Для начала напомним некоторые сведения про интегрируемые по Лебегу функции и зафиксируем терминологию.

для некоторого измеримого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ рассмотрим измеримые по Лебегу функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)| dx$, будем называть их абсолютно интегрируемыми на X .

Для таких функций интеграл без модуля $\int_X f(x) dx$ тоже существует и является конечным.

Расстояние между абсолютно интегрируемыми функциями удобно измерять как $\int_X |f(x) - g(x)| dx$, для любых двух абсолютно интегрируемых функций расстояние между ними конечно.

Карасев.з.

Докажите, что расстояние между двумя абсолютно интегрируемыми функциями конечно.

||

Проинтегрируйте неравенство $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.

||

Нам будет удобно считать интегрируемые функции, находящиеся в таком смысле на нулевом расстоянии друг от друга (то есть равные друг другу почти всюду по теореме 5.56), равными; то есть формально говоря взять факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций.

Это факторпространство обозначается как $L_1(X)$ и его нормой называется величина

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)| dx$$

которая не зависит от того, какую конкретно функцию f из её класса эквивалентности мы взяли.

Карасев.з.

2.

Докажите, что норма в $L_1(X)$ не зависит от выбора класса эквивалентности.

||

Примените неравенство треугольника $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ или разбейте интеграл на два: по множеству, где функции отличаются и по множеству, где они не отличаются.

||

Величина $\|f\|$ называется нормой на векторном пространстве $L_1(X)$, так как по определению $L_1(X)$ она обращается в нуль тогда и только тогда, когда $f = 0$ как элемент этого пространства.

Если бы мы не брали факторпространство, а рассматривали бы абсолютно интегрируемые функции как есть, то эту величину следовало бы называть полунормой, допускающей равенство нулю на ненулевых элементах векторного пространства.

Далее мы иногда будем говорить об элементах пространства $L_1(X)$ как о функциях, если это не приводит к неверным утверждениям.

Более абстрактное изучение нормированных векторных пространств мы оставляем до раздела 9.1, а до тех пор будем изучать лишь конкретные примеры норм и полунорм.

Мы собираемся несколько обобщить понятие абсолютно интегрируемой функции.

Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geq 1$ пусть $L_p(X)$ - это пространство измеримых по Лебегу функций на X с конечной полунормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p dx \right)^{1/p}$$

а точнее $L_p(X)$ - это факторпространство таких функций по модулю функций, равных нулю почти всюду.

Опять-таки, мы иногда будем считать элементы $L_p(X)$ (как факторпространства) функциями, если это не приводит к недоразумениям.

Чтобы иметь право называть $\|f\|_p$ (полу)нормой, нам надо проверить некоторые свойства.

Во-первых, очевидное свойство 1-однородности: $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$ для любой константы c .

Другое свойство (полу)нормы - неравенство треугольника - не так очевидно при $p > 1$, и мы постепенно будем его устанавливать.

Неравенство Гёльдера

Возьмём $p, q > 1$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда

$$\int_X |fg| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Доказательство.

Если одна из норм справа равна нулю, то соответствующая функция равна нулю почти всюду и интеграл слева тоже равен нулю.

Иначе мы можем домножить функции на константы так, чтобы оказалось $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, обе части неравенства при этом домножатся на произведение констант.

В этом случае мы можем получить искомое неравенство $\int_X |fg| dx \leq 1$, интегрируя неравенство

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q},$$

последнее неравенство для неотрицательных чисел $|f(x)|, |g(x)|$ остаётся в качестве упражнения.

Следствие

.4.

Для измеримых функций и чисел $p, q > 0$, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, имеет место формула

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_X fg dx : \|g\|_q \leq 1 \right\}$$

Доказательство.

Действительно, норма f не менее супремума в правой части по неравенству Гёльдера, причём равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\operatorname{sgn} f(x) |f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}$$

Следующее определение обобщает понятие выпуклости функции, которое мы изучали для функции одной переменной, на функции нескольких переменных.

Определение...

Определение 8.5.

Функция $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ на векторном пространстве называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in V$ и любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое для всех $x \neq y$ и $t \in (0, 1)$.

Выпуклость можно определить не только для функции на всём векторном пространстве, но и для функции на его выпуклом подмножестве $C \subseteq V$, то есть на множестве C , которое вместе со всякой парой точек $x, y \in C$ содержит и соединяющий их отрезок $\{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$. Лемма 8.6.

Если в семействе функций $f_\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ все функции выпуклые, то

$$f(x) = \sup_{\alpha} f_{\alpha}(x)$$

тоже выпуклая (если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$).

Доказательство.

Утверждение следует из того, что супремум суммы не превосходит суммы супремумов.

Заметим на будущее, что выпуклость функции нескольких переменных по определению означает выпуклость всех её ограничений на прямые, а значит утверждения типа этой леммы достаточно проверить для функций одной переменной, например, нарисовав для себя убедительный рисунок.

На следующих задачах читатель может проверить своё понимание понятия выпуклой функции.

Карасев.3.

7.

Сформулируйте достаточное условие выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции нескольких переменных.

||

Вспомните про ограничение функции на прямые.

||

Карасев.3.

8.8 (Неравенство Йенсена для конечных сумм).

Докажите, что если функция $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая, то для любого набора $v_1, \dots, v_N \in V$ и неотрицательных коэффициентов $t_1, \dots, t_N$, таких что $t_1 + t_2 + \dots + t_N = 1$, выполняется

$$f(t_1 v_1 + \dots + t_N v_N) \leq t_1 f(v_1) + \dots + t_N f(v_N)$$

||

Используйте индукцию по N .

||

О сумме логарифмически выпуклых функций (??)

Положительная функция на выпуклом множестве C называется логарифмически выпуклой, если её логарифм выпуклый, то есть

$$f((1-t)x + ty) \leq f(x)^{1-t} \cdot f(y)^t$$

при любых $x, y \in C, t \in (0, 1)$. Докажите, что сумма логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла и что по сути это утверждение эквивалентно неравенству Гёльдера.

||

Заметьте, что достаточно рассматривать функции одной переменной на промежутке.

Проверьте, что функция логарифмически выпукла тогда и только тогда, когда она является супремумом семейства функций вида ab^x .

Для сумм функций такого вида неравенство логарифмической выпуклости является неравенством Гёльдера.

||

Наконец, теперь мы можем установить неравенство треугольника в пространстве L_p если расстояние понимать как $\rho(f, g) = \|f - g\|_p$.

Неравенство Минковского

Для функций $f, g \in L_p$ при $p \geq 1$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Доказательство.

При $p = 1$ это неравенство очевидно.

Иначе, из формулы (8.1) следует, что норма $\|\cdot\|_p$ является выпуклой функцией на L_p , как супремум линейных функций.

Значит, в частности,

$$\left\| \frac{f + g}{2} \right\|_p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

Из 1-однородности нормы мы можем вынести множитель $1/2$ и получить требуемое неравенство. Таким образом мы корректно определили норму в пространстве $L_p(X)$ при $p \geq 1$.

О случаях применения неравенства Минковского (!!!!!!!!!!!!!)

(очень важно прописать!!!)

17.1.2 Completeness of L_p space

Векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$ (сейчас мы рассматриваем нормы на конкретных примерах, а абстрактное определение будет дано в разделе 9.1) всегда является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x, y) = \|x - y\|$ и мы можем использовать соответствующую терминологию.

В частности мы хотим доказать, что пространство $L_p(X)$ полное, то есть всякая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

Заметим, что единственность предела обеспечивается факторизацией пространства $L_p(X)$ по почти всюду нулевым функциям и следующей из этого невырожденностью метрики.

Лемма о p -норме суммы последовательности

Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(X)$ сумма

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p$$

оказалась конечной.

Тогда $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ определена для почти всех x и

$$\|S\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p$$

(????? зачем она???)

Доказательство.

Определим возрастающую последовательность неотрицательных функций по формуле

$$\rho_N(x) = \left(\sum_{k=1}^N |u_k(x)| \right)^p$$

По неравенству Минковского, возведённому в степень p ,

$$\int_X \rho_N(x) \leq \left(\sum_{k=1}^N \|u_k\|_p \right)^p \leq \Sigma^p$$

а по теореме о монотонной сходимости функция

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x)$$

почти всюду конечна и имеет конечный интеграл.

Это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ почти всюду абсолютно сходится к некоторой функции $S(x)$.

Кроме того, последовательность $\sigma_N(x) = \left| \sum_{k=1}^N u_k(x) \right|^p$ почти всюду сходится к $|S(x)|^p$ и ограничена функцией $\rho(x)$.

По теореме об ограниченной сходимости интегралы от σ_N стремятся к интегралу от $|S|^p$, что можно переписать как

$$\left\| \sum_{k=1}^N u_k(x) \right\|_p^p \rightarrow \|S\|_p^p$$

Тогда неравенство

$$\|S\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p$$

получается из неравенства Минковского предельным переходом.

Дальше (??)

В условиях предыдущей леммы для всякого остатка суммы $r_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x)$ мы имеем сходимость почти всюду и имеем неравенство

$$\|r_N\|_p \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|_p \rightarrow 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

так что мы можем утверждать, что последовательность частичных сумм сходится к S в смысле сходимости пространства $L_p(X)$.

Теорема о полноте пространств L_p

Пространство $L_p(X)$ полно.

Доказательство.

Рассмотрим фундаментальную последовательность (f_k) в $L_p(X)$.

Достаточно доказать сходимость какой-то её подпоследовательности (прверьте это самостоятельно).

Можно выбрать подпоследовательность так, чтобы после перехода к подпоследовательности выполнялось неравенство при всех $\ell > k$

Положим $u_1 = f_1, u_k = f_k - f_{k-1}$ для $k \geq 2$.

Вопрос сводится к изучению суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Нам известно, что $\|u_k\|_p \leq 2^{-k}$.

Предыдущая лемма показывает, что сумма ряда почти всюду сходится к функции $S \in L_p(X)$, а замечание после леммы показывает, что (f_k) сходится к S по норме $L_p(X)$, то есть $\|f_k - S\|_p \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Фактически в предыдущих рассуждениях мы использовали такое общее наблюдение: в нормированном пространстве вопрос полноты сводится к вопросу сходимости рядов, у которых сходятся суммы норм.

Карасев.з.

3.

Покажите на примере, что сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

||

Рассмотрите последовательность ступенек высоты 1, у которых мера основания стремится к нулю, но при этом ступеньки бесконечно много раз пробегают по множеству X .

||

Заметим, что определение пространств $L_p(X)$ легко распространяется на случай, когда на некоторой сигма-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств фиксированного множества X задана счётно аддитивная мера и мы рассматриваем измеримые относительно сигма-алгебры $\mathcal{A}$ функции f , то есть функции, для которых $\{f(x) \leq c\} \in \mathcal{A}$ при любом c .

Сигмаалгебра - это семейство подмножеств, включающее пустое множество, замкнутое относительно взятия дополнения и не более чем счётных объединений и пересечений.

Такие абстрактные пространства с сигма-алгеброй и с мерой на сигма-алгебре важны для теории вероятностей, в теории вероятностей также используется условие нормировки $\mu X = 1$, при выполнении которого мера называется вероятностной.

В качестве важного частного случая общей конструкции рассмотрим $\mathbb{N}$ со считающей мерой, ставящей в соответствие подмножеству $X \subset \mathbb{N}$ количество его элементов.

В этой мере измеримы все подмножества $\mathbb{N}$ и она счётно-аддитивна (проверьте это).

Пространства $L_p(\mathbb{N})$ обычно обозначаются более коротко как ℓ_p .

Говоря более простым языком, ℓ_p - это пространство числовых последовательностей (c_k) , у которых норма определена как

$$\|(c_k)\|_p = \left(\sum_k |c_k|^p \right)^{1/p}$$

конечна.

Для последовательностей точно так же доказываются неравенства Гёльдера и Минковского, и вообще пространства ℓ_p мы далее рассматриваем как частный случай пространств $L_p(X)$.

17.1.3 Approximations of Functions in L_p by Stepwise and Infinitely Smooth

Мы хотим приблизить функцию из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в смысле нормы L_p достаточно приличными функциями.

На этот раз мы рассмотрим функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества, назовём их элементарно ступенчатые.

В случае функции одного аргумента из $L_p(\mathbb{R})$ это будут функции, которые являются ступенчатыми на некотором разбиении $\mathbb{R}$ на конечное число промежутков, как в определении сумм дарбу и интеграла Римана.

Теорема о приближении функции из $L_p(\mathbb{R}^n)$ по $\|\cdot\|_p$ элементарно ступенчатой

Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой.

Доказательство.

Сначала с помощью теоремы 5.58 можно приблизить всякую функцию f функцией g , ограниченной некоторой константой M .

Точнее, чтобы получить приближение в норме L_p нам надо обрезать функцию $|f|^p$ константой M^p , мало меняя интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$, тогда интеграл от разности между f и её обрезанным вариантом g оценивается исходя из интегрирования неравенств

$$|f(x) - M|^p \leq |f(x)|^p - M^p, \quad \text{при} \quad f(x) > M$$

и

$$|f(x) + M|^p \leq |f(x)|^p - M^p, \quad \text{при} \quad f(x) < -M$$

которые следуют из выпуклости функции $|x|^p$.

Выполнение неравенства

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|f|^p - |g|^p) dx < \varepsilon^p$$

тогда влечёт неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - g|^p dx < \varepsilon^p$$

Теперь мы пытаемся приблизить ограниченную функцию g .

Теорема 5.63 показывает что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[-a, a]^n} |g(x)|^p dx$$

поэтому обнулив g за пределами некоторого достаточно большого куба $Q = [-a, a]^n$, мы приблизим её в норме L_p с точностью ε функцией h , которая ограничена числом M и имеет носитель в Q .

Так как h ещё и измерима по Лебегу, то она оказывается в $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Теперь приблизим $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ по теореме 5.60 элементарно ступенчатой s в норме L_1 .

Заметим, что в этой процедуре итоговая функция s также будет ограничена числом M . Пусть мы подобрали элементарно ступенчатую s так, что выполняется

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)| dx < \varepsilon'$$

Тогда, имея в виду $|h(x) - s(x)|^p = |h(x) - s(x)|^{p-1} \cdot |h(x) - s(x)|$, можно записать

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)|^p dx \leq (2M)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)| dx < (2M)^{p-1} \varepsilon'.$$

Так как ε' мы выбирали после M , то в правой части мы можем получить снова ε .

В итоге, по неравенству Минковского,

$$\|f - s\|_p < \|f - g\|_p + \|g - h\|_p + \|h - s\|_p < 3\varepsilon$$

про подходящем, зависящем от ε , выборе s , что нам и требовалось.

Теорема о приближении бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем

Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.

Доказательство.

Надо воспользоваться предыдущей теоремой и потом приблизить каждую ступеньку над элементарным множеством.

Точнее, достаточно приблизить в норме L_p ступеньку над параллелепипедом P , то есть приблизить характеристическую функцию χ_P в данной норме бесконечно гладкой функцией.

Нетрудно построить (начав с одномерного случая, а потом перемножив такие функции от разных координат) бесконечно гладкую функцию g , которая равна 1 на P , равна нулю за пределами ε -окрестности $U_\varepsilon(P)$ и вообще принимает значения в $[0, 1]$.

Тогда очевидно (U_ε обозначает ε -окрестность)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_P(x) - g(x)|^p dx \leq \mu U_\varepsilon(P) - \mu P$$

что стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Непрерывность сдвига в пространстве L_p

Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx \rightarrow 0 \text{ при } |t| \rightarrow 0$$

||

Сначала докажите утверждение для непрерывной функции с компактным носителем, используя её равномерную непрерывность.

Потом приблизьте произвольную функцию $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ непрерывной с компактным носителем и воспользуйтесь неравенством Минковского.

||

17.1.4 Limited Variation

Нам нужно ввести некоторые классы функций одной переменной, с которыми будет удобно работать при рассмотрении рядов и интегралов Фурье.

Определение...

Функция f на промежутке I имеет ограниченную вариацию, если для любых $x_0 < x_1 < \dots < x_N \in I$ (в любом количестве)

$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \leq M$$

для некоторой константы M .

Наименьшую константу M в этом неравенстве назовём вариацией функции f , $\|f\|_B$.

Можно проверить, что величина $\|f\|_B$ является полунормой («полу» здесь существенно, так как у постоянной функции вариация нулевая).

Внимательный читатель может заметить, что вариация - это на самом деле длина кривой в одномерном варианте, в частности кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема тогда и только тогда, когда все её координаты имеют ограниченную вариацию.

Заметим также, что в отличие от случая кривых мы не требуем от функции ограниченной вариации непрерывности, последствия этого обсуждались в задаче 3.90.

О применениях ограниченной вариации (!!???)

(потом напишу, где нужно??)

Лемма о представлении функции ограниченной вариации в виде суммы двух

Для монотонной на отрезке функции вариация равна модулю её приращения на отрезке (проверьте это), а в общем случае ограниченность вариации можно свести к монотонности следующей теоремой:

Функцию ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде суммы двух функций $f = u + d$, одна из которых возрастает, а другая убывает.

При этом В этом утверждении $[a, b]$ можно взять равным $[-\infty, +\infty]$, так как функция ограниченной вариации, по критерию Коши, обязательно имеет пределы в $-\infty$ и в $+\infty$.

Доказательство.

Будем считать $f(a) = 0$, этого можно добиться прибавлением константы к функции, что не влияет на утверждения леммы.

Для фиксированного $x \in [a, b]$ изучим вариацию f на отрезке $[a, x]$.

Всякий набор в определении вариации можно продолжить до набора, содержащего концы отрезка, сумма модулей приращений при этом не уменьшится, поэтому можно считать, что в определении вариации участвуют только наборы чисел, содержащие концы отрезка.

Тогда рассмотрим всевозможные наборы

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = x$$

и определим вариацию вверх на этом отрезке $u(x)$ как точную верхнюю грань сумм тех приращений $f(x_k) - f(x_{k-1})$, которые положительны.

Определим вариацию вниз на этом отрезке $d(x)$ как точную нижнюю грань сумм тех приращений $f(x_k) - f(x_{k-1})$, которые отрицательны.

Всякий набор приращений f (без модулей) в сумме даёт $f(x)$ и его можно разбить на две части, одна из которых участвует в определении $u(x)$, а другая - в определении $d(x)$.

Из этого получается, что

$$f(x) = u(x) + d(x), \quad \|f\|_{B[a,x]} = u(x) - d(x).$$

Также очевидно по определению, что $u(x)$ возрастает, $d(x)$ убывает, $u(a) = u(b) = 0$.

Так как вариация монотонной функции равна модулю её приращения и $f(a) = 0$, то выполняется

$$\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B.$$

Докажем непрерывность u и d , предположив, что f непрерывна.

Функции u и $-d$ в любом случае не убывают и для доказательства их непрерывности нам надо доказать, что у них нет скачков. Их сумма $u(x) - d(x)$ равна вариации f на отрезке $[a, x]$, и нам тогда достаточно доказать, что у неё, как у неубывающей функции от x , нет скачков.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что требуемое утверждение является частным случаем теоремы 3.89, так как одномерная длина кривой и есть вариация.

Карасев.з.

9.

Докажите, что если функция ограниченной вариации непрерывна в точке x_0 (а в других точках необязательно непрерывна), то функции u и d из приведённого выше доказательства тоже непрерывны в точке x_0 .

||

Посмотрите внимательно на доказательство леммы 3.89.

||

Функции ограниченной вариации хороши тем, что допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией.

Это основывается на оценке интеграла произведения монотонной функции и интегрируемой по второй теореме о среднем 5.75, напомним соответствующую формулу (в которой g монотонна):

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0) \int_a^{\vartheta} f(x)dx + g(b-0) \int_{\vartheta}^b f(x)dx.$$

С учётом леммы 8.18, для любой, не обязательно монотонной, функции ограниченной вариации g из второй теоремы о среднем следует оценка

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq (|g(a+0)| + \|g\|_B) \cdot \sup_{\vartheta \in [a,b]} \left| \int_a^{\vartheta} f(x)dx \right|.$$

Карасев.з.

20.

Докажите предыдущую формулу для оценки интеграла $\int_a^b f(x)g(x)dx$.

||

Вычтите из g значение $g(a+0)$, оставшееся разложите на возрастающую и убывающую части.

||

17.1.5 Oscillation and Decrease of Fourier Coefficients

Установим лемму Римана об осцилляции для функций из $L_1(\mathbb{R})$ и аналогичные оценки для скорости убывания коэффициентов Фурье.

Будем рассматривать интеграл от комплекснозначной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, который понимается как интеграл от действительной части плюс умноженный на i интеграл от мнимой части. Работа с интегралом комплекснозначной функции аналогична работе и интегралом действительной функции, можно даже определить соответствующие пространства L_p и убедиться, что их ранее установленные свойства переносятся на комплексный случай. И в действительном, и в комплексном случае норма L_2 порождена скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$ как $\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$

(мб удалю этот выше абзац)

Теорема о непрерывной зависимости коэффициентов Фурье от аргумента (!!!)

Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|c_f(y)| \leq \|f\|_1$ и $c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$ непрерывно зависит от y .

Доказательство.

Оценка $|c_f(y)|$ очевидна, а теорема об ограниченной сходимости 5.70 (по модулю всё ограничено $|f(x)|$) разрешает предельный переход под знаком интеграла, значит $c_f(y)$ непрерывно зависит от y .

Лемма об осцилляции (????!!!)

Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$.

(кст, есть более сильная лемма, что это происходит еще равномерно, о ней ниже.)

Доказательство.

При наличии достаточной гладкости функции f с компактным носителем можно получить оценки на порядок убывания $c_f(y)$ при $y \rightarrow \infty$.

Например, если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k -й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то интегрируя по частям (дифференцируя функцию и интегрируя экспоненту), мы получаем

$$\begin{aligned} c_f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d \frac{e^{-ixy}}{-iy} = f(x) \frac{e^{-ixy}}{-iy} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \frac{e^{-ixy}}{iy} dx = \\ &= \frac{1}{iy} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy} dx = \frac{c_{f'}(y)}{iy} = \dots = \frac{c_{f^{(k)}}(y)}{(iy)^k} = O(1/y^k), \quad y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

При интегрировании по частям возникающие слагаемые вида $f^{(\ell)}(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$ будут равны нулю в силу компактности носителя функции и её производных.

Теперь вернёмся к произвольной $f \in L_1(\mathbb{R})$.

По теореме 8.15 найдём бесконечно гладкую g с компактным носителем, такую что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

Тогда очевидно, что для любого $y \in \mathbb{R}$

$$|c_f(y) - c_g(y)| = |c_{f-g}(y)| \leq \varepsilon$$

При этом для бесконечно гладкой функции с компактным носителем $c_g(y) \rightarrow 0$ по замеченному в начале доказательства.

Отсюда следует, что верхний предел $|c_f(y)|$ не более ε .

А так как $\varepsilon > 0$ в этом рассуждении любое, то на самом деле предел $c_f(y)$ просто равен нулю.

О том, когда не следует применять лемму об осцилляции (!!!)

(чет я в лишние места её пытался вставить, ошибка была.)

Лемма об осцилляции через приближения (???)

Можно было доказать лемму об осцилляции другим способом, с помощью приближения функции элементарно ступенчатой.

Проверьте, что для элементарно ступенчатой функции g выполняется $c_g(y) = O(1/y)$.

||

Проверьте это для одной ступеньки.

||

Интегрирование по частям позволяет уточнить порядок убывания $c_f(y)$ для дифференцируемых несколько раз функций:

Следствие

.37.

Если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k -й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$ (для k -й производной достаточно существования почти всюду), то

$$c_f(y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \rightarrow \infty$$

Доказательство.

Рассуждения аналогичны предыдущему доказательству, но слагаемые вида $f^{(\ell)}(x)e^{-ixy}\big|_{-\infty}^{+\infty}$ в формуле интегрирования по частям исчезают по другим причинам.

Так как $f^{(\ell+1)} \in L_1(\mathbb{R})$, то $f^{(\ell)}$ имеет конечные пределы в $-\infty$ и $+\infty$.

Но эти пределы должны быть равны нулю, так как сама $f^{(\ell)}$ иначе не имела бы конечного интеграла в противоречии с условиями следствия. Полезно также получить оценку для $c_f(y)$ для функции ограниченной вариации.

Теорема

38.

Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то выражение

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx$$

оказывается $O(1/y)$ при $y \rightarrow \infty$.

Доказательство.

Получим сначала оценку для интеграла по отрезку $[a, b]$.

По лемме 8.18 можно разложить f на возрастающую и убывающую, $f(x) = u(x) + d(x)$, тогда по второй теореме о среднем

$$\begin{aligned} c_{[a,b]}(y) &= \int_a^b f(x)e^{-ixy} dx = u(a+0) \int_a^b e^{-ixy} dx + u(b-0) \int_a^b e^{-ixy} dx + \\ &\quad + d(a+0) \int_a^b e^{-ixy} dx + d(b-0) \int_a^b e^{-ixy} dx \end{aligned}$$

Функция ограниченной вариации f имеет пределы на бесконечности, а из её интегрируемости следует, что эти пределы равны нулю.

Следовательно, значения $u(a+0)$, $u(b-0)$, $d(a+0)$, $d(b-0)$ в формуле оцениваются полной вариацией $\|f\|_B$, а интегралы в формуле оцениваются по модулю в явном виде как $\frac{2}{|y|}$.

Так как итоговая оценка левой части формулы $\frac{8\|f\|_B}{|y|}$ не зависит от выбора отрезка $[a, b]$, то она верна и для интеграла по всей прямой из непрерывности интеграла Лебега.

Интегрирование по частям, аналогично следствию 8.37, позволяет обобщить предыдущую теорему до следующего утверждения:

Следствие

.39.

Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет абсолютно непрерывную $f^{(k-1)}$, производные до k -й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, $af^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, тогда

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \quad y \rightarrow \infty.$$

Следующее обобщение леммы об осцилляции будет важно при анализе (равномерной) сходимости рядов и интегралов Фурье:

Лемма о равномерной осцилляции

Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение

$$c(y, \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x) e^{-ixy} dx$$

стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$ равномерно по ξ, η .

Доказательство.

Разобьём $\mathbb{R}$ на промежутки числами $x_1 < \dots < x_N$ так, чтобы на каждом промежутке интеграл $|f|$ был меньше ε .

Для ξ и η найдём ближайшие к ним x_i и x_j , тогда

$$\left| \int_{\xi}^{\eta} f(x) e^{-ixy} dx \right| \leq \left| \int_{x_i}^{x_j} f(x) e^{-ixy} dx \right| + 2\varepsilon$$

и при достаточно большом y интеграл в правой части тоже меньше ε по уже доказанному неравномерному варианту утверждения, применяемого к ограничению f на отрезки вида $[x_i, x_j]$.

Это доказывает равномерную оценку, не зависящую от выбора ξ и η .

Для работы с рядами Фурье (в следующем разделе и далее) мы рассматриваем 2π периодические функции, $f(x + 2\pi) \equiv f(x)$, и их коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в $L_2[-\pi, \pi]$.

Для этого случая доказанные выше утверждения остаются в силе, например:

Теорема об оценке убывания коэффициентов Фурье для функции с непрерывной предпоследней производной и ограниченной вариацией у последней

Пусть функция имеет период 2π и абсолютно непрерывную $f^{(k-1)}$, причём $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$, тогда

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

Доказательство.

При работе с 2π -периодической абсолютно непрерывной функцией и интегрировании по частям

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

слагаемое $f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi}$ обращается в нуль в силу 2π -периодичности, поэтому можно несколько раз продифференцировать и применить теорему 8.38.

О неумлучшаемости оценки для её коэффициентов Фурье (??)

Если у 2π -периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для её коэффициентов Фурье неумлучшаема.

||

Интегрированием по частям получите формулу (с суммой по точкам разрыва f)

$$c_n(f) = \frac{1}{in} \left(c_n(f') + \sum_{x_i} (f(x_i + 0) - f(x_i - 0)) e^{-inx_i} \right)$$

и докажите, что сумма в скобках не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Последнее удобнее доказывать, сведя к случаю, когда один из x_i равен нулю.

||

Для коэффициентов Фурье любой непрерывной 2π -периодической функции можно получить и такую оценку:

Теорема об оценке коэффициентов Фурье через модуль непрерывности

Пусть функция f непрерывная и 2π -периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка

$$c_n = O(\omega_f(\pi/n))$$

где ω_f - модуль непрерывности f .

Доказательство.

Запишем

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Заменим в этом выражении переменную $x = x' + \pi/n$ и воспользуемся тем, что интеграл по периоду можно начинать с любого места, тогда

$$c_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x' + \pi/n) e^{-inx'} dx'.$$

Возьмём полусумму этих выражений

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x + \pi/n) - f(x)}{2} e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2} \omega_f(\pi/n)$$

Предыдущая теорема не очень точна, хотя и полезна в случаях, когда непрерывная функция имеет неограниченную вариацию, примерно как $\sqrt{|x|} \sin 1/x$.

Для понимания её неточности полезно разобрать следующий пример:

Примеры порядка убывания коэффициентов Фурье

(коротко и по сути)

Для $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-\pi, \pi]$

Найдите порядок убывания коэффициентов Фурье функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-\pi, \pi]$

||

Запишите выражения Для коэффициента Фурье в явном виде и замените nx на новую переменную, потом проинтегрируйте по частям.

||

17.2 Feynman Path Integrals: Fundamentals

Обсудим подробно основы интеграла по траекториям.

(см. пока отдельную про это запись)

17.3 Other Integrals and Integration Methods

17.3.1 Special Gaussian Integrals

(там много теории, тут суть укажу. подробная теория скорее всего в отдельной записи, если нужно будет)

сами интегралы

(тут итог вкратце, который я и вставляю во все записи по физике, где это нужно)

гауссовы меры

на прямой

Стандартная гауссова мера на прямой это мера с плотностью

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

понятно, какой ее график (можно сюда нарисовать его)

Она нормирована

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1$$

Ее среднее равно нулю

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x) = 0$$

её дисперсия равна 1

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) = 1$$

гауссовы меры на R^n

гауссовы меры на пространстве эрмитовых матриц

пока просто вообще не нужно.

Доказательство**Доказательство по вики 1 (!!!!!!!)**

(*????? тут очень много непонятных мне формул, потом посмотрю.)

Рассмотрим функцию $(1+t)e^{-t}$. Она ограничена сверху единицей на интервале $(-\infty; +\infty)$, а снизу нулем на интервале $[-1; +\infty)$. В частности, полагая $t = \pm x^2$, получим при $x \neq 0$:

$$\begin{cases} (1-x^2)e^{x^2} < 1 \\ (1+x^2)e^{-x^2} < 1 \end{cases}$$

Ограничим в первом неравенстве изменение x промежутком $(0, 1)$, а во втором - промежутком $(0; \infty)$, возведём оба неравенства в степень $n (n \in \mathbb{N})$, так как неравенства с положительными членами можно возводить в любую положительную степень. Получим:

$$\begin{cases} (1-x^2)^n < e^{-nx^2} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n} \\ x > 0 \end{cases}$$

Интегрируя неравенства в указанных пределах и сведя их в одно, получим

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

При замене $u = x\sqrt{n}$ получим

$$\int_0^\infty e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot K, \quad K = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Полагая $x = \cos t$ получим, соответственно,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

Замена пределов интегрирования получается из-за того, что при изменении переменной t от 0 до $\pi/2$ величина $\cos t$ меняется в пределах от 0 до 1.

И заменяя $x = \operatorname{ctg} t$, получим

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t dt = \frac{\pi(2n-3)!!}{2(2n-2)!!}$$

Здесь с пределами интегрирования аналогично: $\operatorname{ctg} t$ изменяется от бесконечности до нуля при изменении переменной t от 0 до $\pi/2$. результатам в правой части. Таким образом искомое K может быть заключено в интервале

$$\sqrt{n} \cdot \frac{2n!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n} \cdot \frac{\pi(2n-3)!!}{2(2n-2)!!}$$

Для нахождения K возведём всё неравенство в квадрат и преобразуем. В результате всё сильно упрощается до

$$\frac{n}{2n+1} \cdot \frac{(2n!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} < K^2 < \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)((2n-3)!!)^2}{((2n-2)!!)^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

Из формулы Валлиса следует, что и левое, и правое выражение стремятся к $\pi/4$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $K^2 = \frac{\pi}{4} \iff K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. В силу чётности функции e^{-x^2} , получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Об интегралах от многочленов и формула Вика (!??!)

(укажу потом тоже)

вычисление гауссовых интегралов, Унитарность???

ух Ландо теория...

О другом про гауссовы интегралы

17.3.2 Matrix Integrals

(мб когда-то займусь, пока не актуально и сложно.)

Гауссов интеграл от симметричной вещественной матрицы M с положительными собственными значениями по Киселеву (??)

(вообще хз, к чему это?)

Докажите, что для симметричной вещественной матрицы M с положительными собственными значениями кратный гауссов интеграл

$$\int \exp \{ -q_{\alpha} M_{\beta}^{\alpha} q^{\beta} \} \prod_{\alpha=1}^n dq^{\alpha} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det M}}$$

Решение.

Уравнение на собственные значения матрицы

$$M \cdot e_k = \lambda_k e_k$$

задает базис собственных векторов матрицы, так что обратимое преобразование от координат q к координатам $\tilde{q}$ в базисе e_k

$$q^{\alpha} = \mathcal{R}_{\beta}^{\alpha} \tilde{q}^{\beta}$$

приводит матрицу M к диагональному виду

$$\mathcal{R}^T \cdot M \cdot \mathcal{R} = \text{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

причем

$$\det M = \frac{1}{(\det \mathcal{R})^2} \prod_{k=1}^n \lambda_k$$

Тогда замена переменных интегрирования дает

$$\int \det \mathcal{R} \prod_{k=1}^n d\tilde{q}_k \exp \{ -\tilde{q}_k^2 \lambda_k \} = \det \mathcal{R} \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_k}} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det M}}$$

Заметим, что для вещественной симметричной матрицы M приведение к базису собственных векторов производится ортогональной матрицей, так что $\det \mathcal{R} = 1$, и детерминант сводится к произведению собственных значений матрицы M .

Опираясь на результат задачи, заметим теперь, что для интегралов от комплексных переменных $z = x + iy$ имеют место соотношения вида

$$\frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} = \frac{dx dy}{\pi}, \quad \bar{z} M z = x M x + y M y$$

так что для многомерного случая

$$\int \exp \left\{ -\bar{z}_\alpha M_\beta^\alpha z^\beta \right\} \prod_{\alpha=1}^n \frac{d\bar{z}_\alpha dz^\alpha}{2\pi i} = \frac{1}{\det M}$$

При интегрировании по грассмановым переменным ситуация существенно меняется, что мы продемонстрируем на примере двумерных грассмановых величин.

В самом деле,

$$\int \exp \left\{ (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \cdot M \cdot (\theta_1, \theta_2)^T \right\} d\bar{\theta}_1 d\theta_1 d\bar{\theta}_2 d\theta_2 = \det M$$

Это следует из разложения экспоненты до однородного вклада, линейного по каждой грассмановой переменной, поскольку только этот член дает ненулевой вклад:

$$\begin{aligned} (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \cdot M \cdot (\theta_1, \theta_2) &= (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) (M_{11}\theta_1 + M_{12}\theta_2, M_{21}\theta_1 + M_{22}\theta_2)^T = \\ &= \bar{\theta}_1 M_{11}\theta_1 + \bar{\theta}_1 M_{12}\theta_2 + \bar{\theta}_2 M_{21}\theta_1 + \bar{\theta}_2 M_{22}\theta_2 \end{aligned}$$

а значит,

$$\exp \left\{ (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \cdot M \cdot (\theta_1, \theta_2)^T \right\} \mapsto \frac{1}{2!} (2\bar{\theta}_1 M_{11}\theta_1 \bar{\theta}_2 M_{22}\theta_2 + 2\bar{\theta}_1 M_{12}\theta_2 \bar{\theta}_2 M_{21}\theta_1)$$

так что с учетом нечетных перестановок

$$\int (\bar{\theta}_1 M_{11}\theta_1 \bar{\theta}_2 M_{22}\theta_2 + \bar{\theta}_1 M_{12}\theta_2 \bar{\theta}_2 M_{21}\theta_1) d\bar{\theta}_1 d\theta_1 d\bar{\theta}_2 d\theta_2 = M_{11}M_{22} - M_{21}M_{12} = \det M$$

Обобщения на многомерный случай довольно прозрачно: для n грассмановых переменных необходимо будет рассмотреть вклад n -степени от аргумента экспоненты, где число необходимых сочетаний и перестановок в точности будут соответствовать детерминанту матрицы.

Интересно отметить, что функциональные детерминанты, таким образом, можно представлять как интегралы от грассмановых полей!

матричные интегралы и склейки многоугольников

17.4 Some Exotic Methods of Integration

(Опять же, тем тут много, это на отдельную запись)
(????)

интегрирование через ряды

говорят, Эйлер так делал.

я хз, звучит интересно, но вряд ли я займусь этим

Области использования

и я хз, где это нужно

простейшие примеры

интересно посмотреть на примеры.

17.5 Counterexamples about Riemann Integration 1**Introduction**

The definition of Riemann-integrability and the Riemann (or definite) integral of a function f defined on a closed interval $[a, b]$, together with the principal elementary properties of this integral, will be assumed known. The same is the case for the standard improper integrals and, in Example 14, for the Riemann-Stieltjes integral.

In some of the examples of this chapter the concept of measure zero is important. A set $A \subset \mathcal{R}$ is said to be of measure zero iff for any $\varepsilon > 0$ there is an open covering of A consisting of a countable collection of open intervals whose lengths form a convergent infinite series with sum less than ε . The interior of every set of measure zero is empty. A point-property is said to hold almost everywhere iff the set where the property fails is of measure zero. A function f whose domain is a closed interval $[a, b]$ is Riemann-integrable there iff it is bounded and continuous almost everywhere (cf. [36], p. 153, Ex. 54).

1. A function defined and bounded on a closed interval but not Riemann-integrable there.

The characteristic function of the set Q of rational numbers, restricted to the closed interval $[0, 1]$, is not Riemann-integrable there (cf. [34], p. 112).

2. A Riemann-integrable function without a primitive.

The signum function (Example 1, Chapter 3) restricted to the interval $[-1, 1]$ is integrable there, but has no primitive there.

3. A Riemann-integrable function without a primitive on any interval.

Example 18, Chapter 2, with $A = \mathcal{Q} \cap [0, 1]$, is integrable on $[0, 1]$ since it is monotonic there, but has no primitive on any subinterval of $[0, 1]$ since its points of jump discontinuity are dense there.

4. A function possessing a primitive on a closed interval but failing to be Riemann-integrable there.

(Cf. Example 35, Chapter 8.)

The function f of Example 6, Chapter 3, is an example of a function having a (finite) derivative $g(x)$ at each point x of a closed interval I . The function g , therefore, has a primitive but since g is unbounded it is not Riemann-integrable on I .

The two preceding examples (Examples 3 and 4) are of interest in connection with the Fundamental Theorem of Calculus. One form of this theorem states that if a function $f(x)$ (i) is integrable on the interval $[a, b]$ and (ii) has a primitive $F(x)$ there ($F'(x) = f(x)$ for $a \leq x \leq b$), then the Riemann integral of $f(x)$ can be evaluated by the formula $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. A second form of this theorem states that if a function $f(x)$ is continuous on the interval $[a, b]$,

then both (i) and (ii) of the preceding form are true, with $G(x) \equiv \int_a^x f(t)dt$ being a specific primitive, and for any primitive $F(x)$, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. A third form of the theorem reads the same as the first form stated above, except that the function $F(x)$ is assumed merely to be continuous on $[a, b]$ and to possess a derivative $F'(x)$ equal to $f(x)$ at all but a finite number of points of $[a, b]$.

5. A Riemann-integrable function with a dense set of points of discontinuity.

Example 3 provides a monotonic function having the specified properties.

Example 15, Chapter 2, provides a nowhere monotonic function having the specified properties. In this latter case $\int_a^b f(x)dx = 0$ for all a and b .

6. A function f such that $g(x) \equiv \int_0^x f(t)dt$ is everywhere differentiable with a derivative different from $f(x)$ on a dense set.

If f is the function of Example 15, Chapter 2 (cf. the preceding Example 5), $g(x) \equiv \int_0^x f(t)dt$ is identically zero, and therefore $g'(x) = 0$ for all x . Therefore $g'(x) = f(x)$ iff x is irrational.

7. Two distinct semicontinuous functions at a zero "distance."

In this case the distance d between two functions f and g integrable on $[a, b]$ is defined to be the integral of the absolute value of their difference:

$$d \equiv \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

If f is the semicontinuous function of the preceding example (cf. Example 16, Chapter 2) and if g is identically zero, then $f(x)$ and $g(x)$ are unequal for all rational values of x (and thus f and g are decidedly distinct functions), while the distance d defined above is equal to zero.

8. A Riemann-integrable function with an arbitrary F_σ set of measure zero as its set of points of discontinuity.

(Cf. Example 22, Chapter 8.)

Somewhat as in Example 23, Chapter 2, let A be a given F_σ set of measure zero, $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$, where $A_1, A_2, \dots$ are closed subsets of an interval $[a, b]$ and $A_n \subset A_{n+1}$ for $n = 1, 2, \dots$. Let A_0 denote the empty set $\emptyset$, and define the function f :

$$f(x) \equiv \begin{cases} 2^{-n} & \text{if } x \in A_n \setminus A_{n-1}, \\ 0 & \text{if } x \notin A. \end{cases}$$

If $c \in A$, f is discontinuous at c : if $c \in A_n \setminus A_{n-1}$, then since $A_n \setminus A_{n-1}$ is a set of measure zero it contains no interior points and c is a limit point of a set on which f has values differing from 2^{-n} by at least 2^{-n-1} . If $c \notin A$, f is continuous at c : if $\varepsilon > 0$ is given, choose N such that $2^{-N} < \varepsilon$; then choose a neighborhood of c that excludes $A_1, A_2, \dots, A_N$ and inside which, therefore, $f(x) < 2^{-N} < \varepsilon$.

9. A Riemann-integrable function of a Riemann-integrable function that is not Riemann-integrable.

(Cf. Example 34, Chapter 8.)

If $f(x) \equiv 1$ if $0 < x \leq 1$ and $f(0) \equiv 0$, and if g is the function f of Example 15, Chapter 2, restricted to the closed interval $[0, 1]$, then $f(g(x))$ is the characteristic function of the set Q of rational numbers, restricted to $[0, 1]$, equal to 1 if x is rational and equal to 0 if x is irrational. (Cf. Example 1 of this chapter.)

17.6 Counterexamples about Riemann Integration 2

10. A bounded monotonic limit of Riemann-integrable functions that is not Riemann-integrable.

(Cf. Example 33, Chapter 8.)

The sequence $\{g_n\}$ defined in Example 24, Chapter 2, when restricted to the closed interval $[0, 1]$, is an increasing sequence of Riemann-integrable functions; that is, for each $x \in [0, 1]$, $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ for $n = 1, 2, \dots$. If $g(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ for $x \in [0, 1]$, then g is the characteristic function of the set Q of rational numbers, restricted to the closed interval $[0, 1]$, and thus (cf. Example 1) g is not Riemann-integrable there.

11. A divergent improper integral that possesses a finite Cauchy principal value.

The improper integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ is divergent, but its Cauchy principal value (cf. [34], p. 145, Ex. 30) is

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^a x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

12 A convergent improper integral on $[1, +\infty)$ whose integrand is positive, continuous, and does not approach zero at infinity.

For each integer $n > 1$ let $(gn) \equiv 1$, and on the closed intervals $[n - n^{-2}, n]$ and $[n, n + n^{-2}]$ define g to be linear and equal to 0 at the nonintegral endpoints. Finally, define $g(x)$ to be 0 for $x \geq 1$ where $g(x)$ is not already defined. Then the function

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$$

is positive and continuous for $x \geq 1$, the statement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ is false, and the improper integral

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

converges.

If the requirement of positivity is omitted, a simple example satisfying the remaining requirements (cf. [34], p. 146, Ex. 43) is $\int_1^{+\infty} \cos x^2 dx$.

13. A convergent improper integral on $[0, +\infty)$ whose integrand is unbounded in every interval of the form $[a, +\infty)$, where $a > 0$.

The improper integral $\int_0^{+\infty} x \cos x^4 dx$ satisfies these conditions (cf. [34], p. 146, Ex. 43).

An example where the integrand is everywhere positive and continuous can be constructed in a manner similar to that of the preceding Example 12 by letting $g(n) \equiv n$ and considering the closed intervals $[n - n^{-3}, n]$ and $[n, n + n^{-3}]$.

14. Functions f and g such that f is Riemann-Stieltjes integrable with respect to g on both $[a, b]$ and $[b, c]$, but not on $[a, c]$.

Let

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

$$g(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{if } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

and let $a = 0, b = 1$, and $c = 2$. Then

$$\int_0^1 f(x)dg(x) = 0, \quad \int_1^2 f(x)dg(x) = 1$$

but since f and g have a common point of discontinuity at $x = 1$,

$$\int_0^2 f(x)dg(x)$$

does not exist (cf. [34], p. 151, Ex. 10).

17.6.1 Counterexamples about Sets and Measure on the Real Axis 1

Introduction

Unless a specific statement to the contrary is made, all sets considered in this chapter should be assumed to be subsets of $\mathcal{R}$, the real number system. A σ ring, or sigma-ring, is a nonempty class $\mathbf{A}$ of sets that is closed under the operations of countable unions and set differences ($A_1, A_2, \dots \in \mathbf{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathbf{A}$ and $A_1 \setminus A_2 \in \mathbf{A}$). If $\mathbf{A}$ is any nonempty class of sets, the σ -ring generated by $\mathbf{A}$ is the intersection of all σ -rings containing $\mathbf{A}$ (there is always at least one σ ring containing $\mathbf{A}$, the class of all subsets of $\mathcal{R}$, so that the generated σ -ring always exists). It is natural to think of the σ -ring generated by $\mathbf{A}$ as the smallest σ -ring containing $\mathbf{A}$. The σ -ring generated by the class $\mathbf{C}$ of all compact subsets of $\mathcal{R}$ is called the class $\mathbf{B}$ of Borel sets (that is, a set is a Borel set iff it is a member of the σ -ring generated by $\mathbf{C}$).

If A is any subset of $\mathcal{R}$ and x any real number, the translate of A by x is defined and denoted:

$$x + A \equiv \{y | y = x + a, a \in A\} = \{x + a | a \in A\}$$

A class $\mathbf{A}$ of sets is closed under translations iff

$$A \in \mathbf{A}, x \in \mathcal{R} \Rightarrow x + A \in \mathbf{A}.$$

If $\mathbf{S}$ is a σ -ring of subsets of a space X , a set function ρ with domain $\mathbf{S}$ is nonnegative extended-real-valued iff its values, for sets $S \in \mathbf{S}$, satisfy the inequalities $0 \leq \rho(S) \leq +\infty$. A nonnegative extended-real-valued set-function ρ on a σ -ring $\mathbf{S}$ is a measure on $\mathbf{S}$ iff $\rho(\emptyset) = 0$ and ρ is countably additive on $\mathbf{S}$:

$$S_1, S_2, \dots \in S, S_m \cap S_n = \emptyset \text{ for } m \neq n \Rightarrow$$

$$\rho \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(S_n).$$

If ρ is a measure on a σ -ring S of subsets of a space X , and if $X \in S$, then the ordered pair (X, S) is called a measure space and ρ is called a measure on the measure space (X, S) . If the class of sets S is understood from context, the single letter X may also be used to indicate a measure space. If ρ and σ are two measures on the same measure space (X, S) , ρ is absolutely continuous with respect to σ (written $\rho \ll \sigma$) iff

$$A \in S, \sigma(A) = 0 \Rightarrow \rho(A) = 0$$

For any measure ρ on a measure space (X, S) , a null-set for ρ is any subset of a member A of S of measure zero: $\rho(A) = 0$. A measure ρ on (X, S) is complete iff every nullset for ρ is a member of S .

Borel measure is the uniquely determined measure μ on the measure space $(\mathbf{G}, \mathbf{B})$ that assigns to every bounded closed interval its length:

$$\mu([a, b]) = b - a \quad \text{if} \quad a \leq b$$

The class $\mathbf{B}$ of Lebesgue-measurable sets is the σ -ring generated by the union of $\mathbf{B}$ and the class of all null-sets of Borel measure on $\mathbf{B}$. Lebesgue measure is the uniquely determined complete measure on $\tilde{\mathbf{B}}$ whose contraction to $\mathbf{B}$ is Borel measure; that is, Lebesgue measure is the completion, or complete extension, to $\mathbf{B}$ of Borel measure on $\mathbf{B}$.

Since the length of a compact interval $[a, b]$ is invariant under translations, the σ -rings $\mathbf{B}$ and $\tilde{\mathbf{B}}$ are closed under translations, and both Borel and Lebesgue measure are translation-invariant:

$$A \in B, x \in \mathcal{R} \Rightarrow x + A \in B, \mu(x + A) = \mu(A)$$

$$A \in \tilde{B}, x \in \mathcal{R} \Rightarrow x + A \in \tilde{B}, \mu(x + A) = \mu(A)$$

For any set $E \subset \mathcal{R}$, Lebesgue inner and outer measure are defined and denoted:

$$\text{inner measure of } E = \mu_*(E) \equiv \sup\{\mu(A) | A \subset E, A \in B\},$$

$$\text{outer measure of } E = \mu^*(E) \equiv \inf\{\mu(A) | A \supset E, A \in B\}.$$

These are also equal to

$$\begin{aligned} \mu_*(E) &= \sup\{\mu(A) | A \subset E, A \in B\} \\ &= \sup\{\mu(A) | A \subset E, A \text{ compact} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \inf\{\mu(A) | A \supset E, A \in B\} \\ &= \inf\{\mu(A) | A \supset E, A \text{ open} \} \end{aligned}$$

For proofs of the preceding facts, and for further discussion, see [16], [18], [30], and [32].

We shall occasionally refer to the axiom of choice, or such variants as the well-ordering theorem or Zorn's lemma. These are sometimes classed under the title of The Maximality Principle. The reader is referred to [16], [30], and [46].

It will be assumed that the reader is already familiar with the concept of equivalence relations and equivalence classes. These topics are treated in references [16] and [22].

1. A perfect nowhere dense set.

A perfect set is a closed set every point of which is a limit point of the set. A fundamental fact concerning perfect sets is that every nonempty perfect set A of real numbers - or, more generally, any nonempty perfect set in a complete separable metric space - is uncountable; in fact, A has the cardinality $\mathfrak{c}$ of $\mathcal{R}$ (there exists a one-to-one correspondence with domain $\mathcal{R}$ and range A). (For a proof and discussion, see [20], pp. 129-138.)

A nowhere dense set is a set A whose closure $\bar{A}$ has no interior points: $I(\bar{A}) = \emptyset$. Clearly, a set is nowhere dense iff its closure is nowhere dense, and any subset of a nowhere dense set is nowhere dense. A less obvious fact is that the union of any finite collection of nowhere dense sets is nowhere dense. Proof by induction follows from the special case: If A and B are closed and nowhere dense, then $A \cup B$ is nowhere dense. (If U is a nonempty open subset of $A \cup B$, then $U \setminus B$ is a nonempty open subset of A .)

A celebrated example of a perfect nowhere dense set was given by G. Cantor (German, 1845-1918), and is known as the Cantor set. This set C is obtained from the closed unit interval $[0, 1]$ by a sequence of deletions of open intervals known as "middle thirds," as follows: First delete all points x between $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{3}$. Then remove the middle thirds of the two closed intervals $[0, \frac{1}{3}]$ and $[\frac{2}{3}, 1]$ remaining: $(\frac{1}{8}, \frac{2}{8})$ and $(\frac{7}{8}, \frac{8}{8})$. Then remove the middle thirds of the four closed intervals $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, and $[\frac{8}{9}, 1]$ remaining: $(\frac{1}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, and $(\frac{25}{27}, \frac{38}{27})$. This process is permitted to continue indefinitely, with the result that the total set of points removed from $[0, 1]$ is the union of a sequence of open intervals and hence is an open set. The set C is defined to be the closed set remaining. Since every point of C is approached arbitrarily closely by endpoints of intervals removed (these endpoints all belong to C), C is perfect. Since there is no open interval within $[0, 1]$ that has no points in common with at least one of the open intervals whose points are deleted at some stage, the (closed) set C is nowhere dense.

The Cantor set C can be defined in terms of the ternary (base three) system of numeration. A point $x \in C$ iff x can be represented by means of a ternary expansion using only the digits 0 and 2. For example, $0.022222\cdots$ and $0.200000\cdots$ are the endpoints of the first interval removed, or $\frac{1}{3}$ and $\frac{2}{3}$, respectively, in decimal notation. For a discussion of this description of C , cf. [18] and [32]; also cf. Example 2, below.

2. An uncountable set of measure zero.

The Cantor set C of Example 1 is uncountable since it is a nonempty perfect set, and it has measure zero since the set of points deleted from the closed interval $[0, 1]$ has measure

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

The ternary expansions of the points of the Cantor set can be used to show that C has the cardinality $\mathfrak{c}$ of the real number system $\mathcal{R}$. (This method is independent of the one cited above that is based on the properties of perfect sets.) In the first place, the points of C are in one-to-one correspondence with the ternary expansions using only the digits 0 and 2, and therefore (divide by 2) with the binary expansions using the digits 0 and 1. On the other hand, the nonterminating binary expansions are in one-to-one correspondence with the points of the half-open interval $(0, 1]$, and hence with the real numbers. This much shows that the set of all binary expansions - and therefore C - is uncountable, with cardinality at least $\mathfrak{c}$. To see that the cardinality is actually equal to $\mathfrak{c}$ we need only observe that the set of terminating binary expansions is countable (or, even more simply, that $C \subset \mathcal{R}$). For further discussion of the mapping just described, see Example 14, below.

3. A set of measure zero whose difference set contains a neighborhood of the origin.

If A is any nonempty set, its difference set, $D(A)$ is the set of all differences between members of A :

$$D(A) \equiv \{x - y | x \in A, y \in A\}.$$

A fact of some importance in measure theory is that whenever A is a measurable set of positive measure, the origin is an interior point of the difference set A (cf. [18], p. 68). The Cantor set C of Example 1 is an example of a set of measure zero that has this same property. In fact, the difference set of C is the entire closed interval $[-1, 1]$:

$$D(C) = [-1, 1].$$

The simplest way to see this is to consider the product set $C \times C$, and to show that for any number α such that $-1 \leq \alpha \leq 1$, the line $y = x + \alpha$ meets the set $C \times C$ in at least one point. (Cf. [10], p. 110, where references are given.) Since C is obtained by a sequence of removals of "middle thirds," the set $C \times C$ can be thought of as the intersection of a countable family of closed sets $C_1, C_2, \dots$, each of the sets C_n being a union of "corner squares" as follows (cf. Fig. 3): The set C_1 consists of four $\frac{1}{3}$ by $\frac{1}{3}$ closed squares located in the corners of the total square $[0, 1] \times [0, 1]$: $[0, \frac{1}{3}] \times [0, \frac{1}{3}]$, $[0, \frac{1}{3}] \times [\frac{2}{3}, 1]$, $[\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{1}{3}]$, and $[\frac{2}{3}, 1] \times [\frac{2}{3}, 1]$; the set C_2 consists of sixteen $\frac{1}{9}$ by $\frac{1}{9}$ closed squares located by fours in the corners of the four squares of C_1 ; the set C_3 consists of sixty-four $\frac{1}{27}$ by $\frac{1}{27}$ squares located by fours in the corners of the sixteen squares of C_2 ; etc. For any given $\alpha \in [-1, 1]$, the line $y = x + \alpha$ meets at least one of the four squares of C_1 ; choose such a square and denote it S_1 . This line must also meet at least one of the four squares of C_2 that lie within S_1 ; choose such a square and denote it S_2 . If this process is continued, a sequence of closed squares $\{S_n\}$ is obtained such that

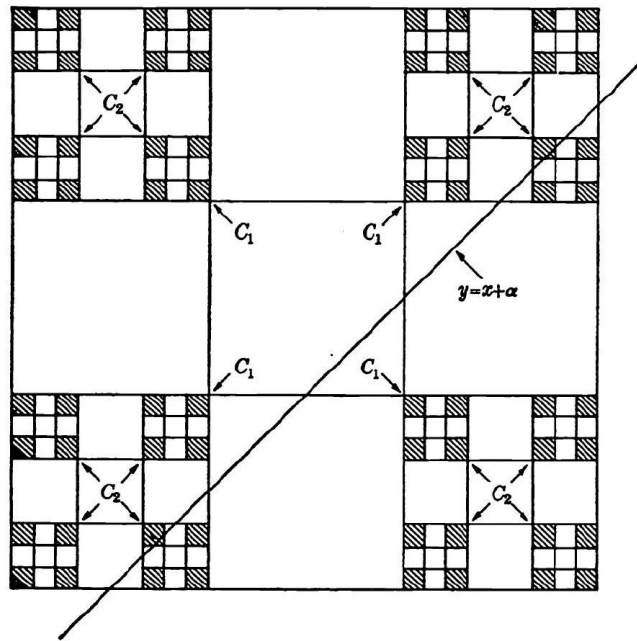


Figure 3

$S_{n+1} \subset S_n$ for $n = 1, 2, \dots$. Since the side of S_n is 3^{-n} , there is exactly one point (x, y) that belongs to every square of the sequence $\{S_n\}$ (cf. [34], p. 201, Ex. 30). The point (x, y) must therefore belong to $C \times C$, and since this point must also lie on the line $y = x + \alpha$, we have the desired members x and y of C whose difference is the prescribed number α .

4. Perfect nowhere dense sets of positive measure.

The process used to obtain the Cantor set C of Example 1 can be modified to construct a useful family of perfect nowhere dense sets. Each of these sets, to be called a Cantor set, is

the set of points remaining in $[0, 1]$ after a sequence of deletions has taken place as follows: If α is an arbitrary positive number less than 1, first delete from $[0, 1]$ all points of the open interval $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha)$, of length $\frac{1}{2}\alpha$ and midpoint $\frac{1}{2}$. From the two remaining closed intervals $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha]$ and $[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha, 1]$, each of length $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\alpha)$, remove the middle open intervals each of length $\frac{1}{8}\alpha$. Then from the four closed intervals remaining, each of length $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha)$, remove the middle open intervals each of length $\alpha/32$. From the eight closed intervals remaining, each of length $\frac{1}{8}(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{8}\alpha)$, remove middle open intervals each of length $\alpha/128$. After n stages the measure of the union of the open intervals removed is $\alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + 2^{-n})$, and therefore the measure of the union of the open intervals removed in the entire sequence of removal operations is α . The measure of the remaining Cantor set is $1 - \alpha$. For this reason, Cantor sets defined in this fashion are often called Cantor sets of positive measure. They are all perfect nowhere dense sets. It will be shown in Example 23, below, that all Cantor sets, of positive or zero measure, are homeomorphic (cf. Introduction, Chapter 12). It will follow, then, from the second paragraph of Example 2, above, that every Cantor set has cardinality $\mathfrak{c}$ equal to that of $\mathcal{R}$.

A third construction of a Cantor set is the following: Let $0 < \beta < 1$ and let $\{\beta_n\}$ be a sequence of positive numbers such that $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \beta_n = \beta$. Delete from $[0, 1]$ the open interval I_0 , centered at $\frac{1}{2}$ and of length β_0 . Then from $[0, 1] \setminus I_0$, delete two open intervals I_1^1, I_1^2 , each centered in one of the two disjoint closed intervals whose union is $[0, 1] \setminus I_0$ and each of length β_1 . Continue deletions as in the preceding constructions: At the n th stage of deletion, 2^n open intervals, $I_n^1, I_n^2, \dots, I_n^{2^n}$, properly centered in the closed intervals constituting the residue at the $(n-1)$ st stage and each of length β_n , are deleted, $n = 1, 2, \dots$.

5. A perfect nowhere dense set of irrational numbers.

A final example of a perfect nowhere dense set can be constructed by making use of a sequence $\{r_n\}$ whose terms constitute the set of all rational numbers of $(0, 1)$. Start as in the definition of the Cantor set C , but extend the open interval so that the center remains at $\frac{1}{2}$, so that its endpoints are irrational, and so that the enlarged open interval contains the point r_1 . At the second stage remove from each of the two remaining closed intervals an enlarged open middle "third" in such a way that the midpoints remain midpoints, the endpoints are irrational, and the second rational number r_2 is removed. If this process is repeated according to the indicated pattern, a perfect nowhere dense set D remains, and since all rational numbers between 0 and 1 have been removed, this "Cantor" set D consists entirely of irrational numbers, except for the two points 0 and 1. If the endpoints of the original interval are chosen to be irrational numbers, a perfect nowhere dense set can be constructed in this fashion so that it consists entirely of irrational numbers.

6. A dense open set whose complement is not of measure zero.

Let A be a Cantor set of positive measure in $[0, 1]$, and let $B \equiv A' = \mathcal{R} \setminus A$. Then B is a dense open set whose complement A has positive measure.

7. A set of the second category.

A set is said to be of the first category iff it is a countable union of nowhere dense sets. Any subset of a set of the first category is a set of the first category, and any countable union of sets of the first category is a set of the first category. The set $\mathcal{Q}$ of rational numbers is of the first category. A set is said to be of the second category iff it is not of the first category. An example of a set of the second category is the set $\mathcal{R}$ of all real numbers. More generally, any complete metric space is of the second category (cf. [36], p. 338, Ex. 33). This general result is due to R. Baire (cf. [1], p. 108, [20], pp. 138-145, and [27], p. 204). It follows from this that the set $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ of irrational numbers is of the second category. We outline now a proof -

independent of the general theorem just cited - that any set A of real numbers with nonempty interior $I(A)$ is of the second category. Assume the contrary, and let C be a nonempty closed interval $[a, b]$, interior to A , and let $C = F_1 \cup F_2 \cup \dots$, where the sets F_n are closed and nowhere dense, $n = 1, 2, \dots$. Let C_1 be a closed interval $[a_1, b_1] \subset (a, b) \setminus F_1$; let C_2 be a closed interval $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1) \setminus F_2$; in general, for $n > 1$, let $C_n = [a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1}) \setminus F_n$. Then there exists a point p belonging to every C_n , $n = 1, 2, \dots$ (cf. [34], p. 201, Ex. 30), whence $p \in C$. But this is impossible since p belongs to no F_n , $n = 1, 2, \dots$. (Contradiction.)

8. A set that is not an F_σ set.

Recall (Example 23, Chapter 2) that an F_σ set is a set that is a countable union of closed sets. Examples of F_σ sets abound: finite sets, closed intervals, open intervals (for example, $(0, 1)$ is the union of the sets $[1/n, (n-1)/n]$, half-open intervals, Q (if the rational numbers are arranged in a sequence $r_1, r_2, \dots$, then Q is the union of the one-point closed sets $\{r_1\}, \{r_2\}, \dots, \{r_n\}, \dots$). An example of a set that is not an F_σ set is the set $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ of irrational numbers. To prove this, assume the contrary, and let $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q} = C_1 \cup C_2 \cup \dots$, where C_n is closed, $n = 1, 2, \dots$. Since no subset of the set $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ of irrational numbers has an interior point, every closed subset of $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ is nowhere dense, and this implies that $\mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ is of the first category. (Contradiction; cf. Example 7.)

9. A set that is not a G_δ set.

A set A is said to be a G_δ set iff it is a countable intersection of open sets. It follows from the de Morgan laws for set-complementation:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right)' = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A'_n, \quad \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \right)' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A'_n$$

that a set A is a G_δ set iff its complementary set $A' = \mathcal{R} \setminus A$ is an F_σ set. Therefore, since the set $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}$ of irrational numbers is not an F_σ set, the set Q of rational numbers is not a G_δ set.

If countable unions of G_δ sets and countable intersections of F_σ sets are formed, two new classes of sets are obtained, called $G_{\delta\sigma}$ sets and $F_{\sigma\delta}$ sets, respectively. In fact, two infinite sequences of such classes exist: labeled $F_\sigma, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, \dots$ and $G_\delta, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}, \dots$. For a treatment of these sets, cf. [20].

10. A set A for which there exists no function having A as its set of points of discontinuity.

Let A be the set $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}$ of irrational numbers. Then since A is not an F_σ set there is no real-valued function of a real variable whose set of points of discontinuity is A (cf. the final remark of Example 23, Chapter 2). In other words, there is no function from $\mathcal{R}$ to $\mathcal{R}$ that is continuous at every rational point and discontinuous at every irrational point. (Cf. Example 15, Chapter 2.)

17.6.2 Counterexamples about Sets and Measure on the Real Axis 2

11. A nonmeasurable set.

The axiom of choice provides a means of constructing a set that is not Lebesgue-measurable. In fact, the set thus produced cannot be measurable with respect to any nontrivial countably additive translation-invariant measure. More specifically, if μ is a measure function defined for all sets A of real numbers, finite-valued for bounded sets, and such that

$$\mu(x + A) = \mu(A)$$

for every $x \in \mathcal{R}$ and $A \subset \mathcal{G}$, then $\mu(A) = 0$ for every $A \subset \mathcal{R}$. We shall now prove this fact.

We start with an equivalence relation $\sim$ defined on $(0, 1] \times (0, 1]$ as follows: $x \sim y$ iff $x - y \in \mathcal{Q}$. By means of $\sim$ the half-open interval $(0, 1]$ is partitioned into disjoint equivalence classes C . The axiom of choice, applied to this family of equivalence classes, produces a set A having the two properties: (1) no two distinct points of A belong to the same equivalence class C ; (2) every equivalence class C contains a point of A . In terms of the equivalence relation $\sim$ these two properties take the form: (1) no two distinct members of A are equivalent to each other; (2) every point x of $(0, 1]$ is equivalent to some member of A . We now define, for each $r \in (0, 1]$, an operation on the set A , called translation modulo 1, as follows:

$$\begin{aligned} (r + A)(\text{mod } 1) &\equiv [(r + A) \cup ((r - 1) + A)] \cap (0, 1] \\ &= \{(r + A) \cap (0, 1]\} \cup \{((r - 1) + A) \cap (0, 1]\} \end{aligned}$$

The two properties of the set A stated above imply, for translation modulo 1: (1) any two sets $(r + A)(\text{mod } 1)$ and $(s + A)(\text{mod } 1)$ for distinct rational numbers r and s of $(0, 1]$ are disjoint; (2) every real number x of $(0, 1]$ is a member of a set $(r + A)(\text{mod } 1)$ for some rational number r of $(0, 1]$. In other words, the half-open interval $(0, 1]$ is the union of the pair-wise disjoint countable collection $\{(r + A)(\text{mod } 1)\}$, where $r \in \mathcal{Q} \cap (0, 1]$. An important property of the sets obtained from A by translation modulo 1 (on the basis of the assumptions made concerning μ) is that they all have the same measure as A :

$$\begin{aligned} \mu((r + A)(\text{mod } 1)) &= \mu((r + A) \cap (0, 1]) + \mu(((r - 1) + A) \cap (0, 1]) \\ &= \mu((r + A) \cap (0, 1]) + \mu((r + A) \cap (1, 2]) \\ &= \mu((r + A) \cap (0, 2]) = \mu(r + A) = \mu(A). \end{aligned}$$

On the assumption that A has positive measure we infer from the countable additivity of μ :

$$\mu((0, 1]) = \sum_{r \in \mathcal{Q} \cap (0, 1]} \mu((r + A)(\text{mod } 1)) = \sum_{r \in \mathcal{Q} \cap (0, 1]} \mu(A) = +\infty,$$

which is impossible since $(0, 1]$ is bounded. Consequently $\mu(A) = 0$, and

$$\mu((0, 1]) = \sum_{r \in \Omega(0, 1]} \mu((r + A)(\text{mod } 1)) = \sum_{r \in \Omega(0, 1]} \mu(A) = 0,$$

whence

$$\mu(\mathcal{R}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu((n, n + 1]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu((0, 1]) = 0.$$

As a consequence of this, μ is the trivial measure function for which every set has measure zero.

Finally, since Lebesgue measure is a nontrivial translation-invariant measure for which bounded intervals have positive finite measure, the detailed steps just presented show that the set A is not Lebesguemeasurable.

Since all F_σ sets and all G_δ sets are Borel sets, and therefore measurable, the preceding nonmeasurable set is an example of a set that is neither an F_σ set nor a G_δ set.

The construction just described can be looked at in terms of sets on a circle, as follows: In the complex plane $\mathfrak{C}$, let the unit circle $J \cong \{z | z \in \mathcal{C}, |z| = 1\}$ be regarded as a group

under multiplication. For each $z \in J$ there is a unique $\theta, 0 \leq \theta < 1$, such that $z = e^{2\pi i\theta}$. Let $J_0 \equiv \{z | z = e^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathcal{Q}, 0 \leq \theta < 1\}$. Then J_0 is a normal subgroup, and the quotient group $\mathcal{S} = \mathfrak{J}/J_0$ exists. If $\mathcal{S}$ is a one-to-one preimage of S in $\mathfrak{J}$ (a complete set of representatives in $\mathfrak{J}$), obtained by the use of the axiom of choice, and if Lebesgue measure μ on $[0, 1)$ is carried over to a measure $\bar{\mu}$ on $\mathfrak{J}$ by the rule:

$$E \subset \mathfrak{J} \text{ is measurable iff } F \equiv \{\theta | e^{2\pi i\theta} \in E, 0 \leq \theta < 1\}$$

is Lebesgue-measurable and $\tilde{\mu}(E) \equiv 2\pi\mu(F)$, then $\mathfrak{J}$ is not measurable. Indeed, $\bigcup_{\theta \in (0,1)} e^{2\pi i\theta}E$ is a countable disjoint union of sets, each of which is measurable, all with the same measure, if E is. Furthermore, this union is $\mathfrak{J}$ since $\mathcal{S}$ is a complete set of representatives, whence $\mathfrak{J}$ is a countable disjoint union of measurable sets, all of the same measure, if $\mathcal{S}$ is measurable. Since $\tilde{\mu}(\mathfrak{J}) = 2\pi$, we see $\bar{\mu}(\mathcal{S})$ cannot be positive. But if $\bar{\mu}(\mathcal{S}) = 0$, then $\bar{\mu}(\mathfrak{J}) = 0$.

The procedures outlined above can be extended to more general topological groups, for example to compact groups having countably infinite normal subgroups. (For definitions and discussions of group, normal subgroup, etc., cf. [22]. Similarly, for topological groups cf. [29].)

12. A set D such that for every measurable set A , $\mu_*(D \cap A) = 0$ and $\mu^*(D \cap A) = \mu(A)$.

A set D having this property may be thought of, informally, as being the ultimate in nonmeasurability - D is as nonmeasurable as a set can be! The set D , as is the case with the nonmeasurable set A of Example 11, is again constructed with the aid of the axiom of choice, but the details are somewhat more complicated. For a complete discussion, see [18], p. 70. This example shows that every measurable set A contains a subset whose inner measure is equal to zero and whose outer measure is equal to the measure of A . It also shows that every set of positive measure contains a nonmeasurable subset.

F. Galvin has given a construction of a family $\{E_t\}, 0 \leq t \leq 1$, of pairwise disjoint subsets of $[0, 1]$ such that each has outer measure 1.

13. A set A of measure zero such that every real number is a point of condensation of A .

A point p is a point of condensation of a set A if and only if every neighborhood of p contains an uncountable set of points of A . Let C be the Cantor set of Example 1, and for any closed interval $[\alpha, \beta]$, where $\alpha < \beta$, define the set $C(\alpha, \beta)$:

$$C(\alpha, \beta) \equiv \{\alpha + (\beta - \alpha)x | x \in C\}.$$

Then $C(\alpha, \beta)$ is a perfect nowhere dense set of measure zero. Let B be the set that is the union of all sets $C(\alpha, \beta)$ for rational α and β , where $\alpha < \beta$. Since B is the union of a countable family of sets of measure zero it is also a set of measure zero. On the other hand, since every open interval I must contain a set $C(\alpha, \beta)$, and since every $C(\alpha, \beta)$ is uncountable, every real number must be a point of condensation of B . (Cf. [14], p. 287.)

14. A nowhere dense set A of real numbers and a continuous mapping of A onto the closed unit interval $[0, 1]$.

The set A can be any Cantor set (Examples 1 and 4), since all Cantor sets are homeomorphic (Example 23). We shall describe a specific mapping ϕ for the Cantor set of Example 1. The mapping is that described in the second paragraph of Example 2: For any $x \in C$, let $0.c_1c_2c_3\cdots$ be its ternary expansion, where $c_n = 0$ or $2, n = 1, 2, \cdots$, and let

$$\phi(x) \equiv 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\frac{c_3}{2}\cdots,$$

where the expansion on the right is now interpreted as a binary expansion in terms of the digits 0 and 1. It is clear that the image of C , under ϕ , is a subset of $[0, 1]$. To see that $[0, 1] \subset \phi(C)$, we choose an arbitrary $y \in [0, 1]$ and a binary expansion of y :

$$y = 0.b_1b_2b_3 \cdots$$

Then

$$x \equiv 0.(2b_1)(2b_2)(2b_3) \cdots$$

(evaluated in the ternary system) is a point of C such that $\phi(x) = y$. Continuity of ϕ is not difficult to establish, but it is more conveniently seen in geometric terms as discussed in the following example, where the mapping ϕ is extended to a continuous mapping on the entire unit interval $[0, 1]$.

It should be noted that ϕ is not one-to-one. Indeed, this would be impossible since C and $[0, 1]$ are not homeomorphic, and any one-to-one continuous mapping of one compact set onto another is a homeomorphism (cf. [34], p. 192). (The set C is totally disconnected, having only one-point subsets that are connected, whereas its entire image $[0, 1]$ is connected.) An example of two points of C that have the same image is the pair $0.022000000 \cdots$ and $0.020222222 \cdots$, since their images are 0.011000000 and $0.010111111 \cdots = 0.011000000$. In fact, two points x_1 and x_2 of C have the same image, under ϕ , if and only if they have the form:

$$x_1 = 0.c_1c_2 \cdots c_n2000 \cdots \text{ and } x_2 = 0.c_1c_2 \cdots c_n0222 \cdots$$

In other words, $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ iff x_1 and x_2 are endpoints of one of the open intervals deleted from $[0, 1]$ in the construction of C . Therefore ϕ is an increasing function on C , and strictly increasing except for such pairs of endpoints. (Cf. Example 30.)

The following general theorem is an extension of the preceding "existence theorem," indicating what is possible in metric spaces for both continuous and homeomorphic (topological) images of the Cantor set (actually, of any Cantor set, by Example 23) and its subsets (for definitions, cf. the Introduction to Chapter 12): Every separable metric space is a continuous image of a subset of the Cantor set. Every compact metric space is a continuous image of the Cantor set. Every compact totally disconnected metric space is a homeomorphic image of a closed subset of the Cantor set. Every compact totally disconnected perfect metric space is a homeomorphic image of the Cantor set. (Cf. [1], pp. 119-122.)

15. A continuous monotonic function with a vanishing derivative almost everywhere.

The function defined in Example 14 can be extended so that its domain is the entire unit interval $[0, 1]$, as follows: If $x \in [0, 1] \setminus C$, then x is a member of one of the open intervals (a, b) removed from $[0, 1]$ in the construction of C , and therefore $\phi(a) = \phi(b)$; define $\phi(x) \equiv \phi(a) = \phi(b)$. In other words ϕ is defined to be constant on the closure of each interval removed in forming C . On the interval $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $\phi(x) = \frac{1}{2}$. On the intervals $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]$ and $[\frac{7}{8}, \frac{8}{8}]$, the values of ϕ are $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{4}$, respectively. On the intervals $[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}]$, $[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}]$, $[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}]$, and $[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}]$, the values of ϕ are $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, and $\frac{7}{8}$, respectively. If this process is repeated indefinitely, we see that the function ϕ with domain $[0, 1]$ is increasing there, and (locally) constant in some neighborhood of every point of $[0, 1] \setminus C$. (Cf. Fig. 4.) Since ϕ is increasing on $[0, 1]$ and since the range of ϕ is the entire interval

8. Sets and Measure on the Real Axis

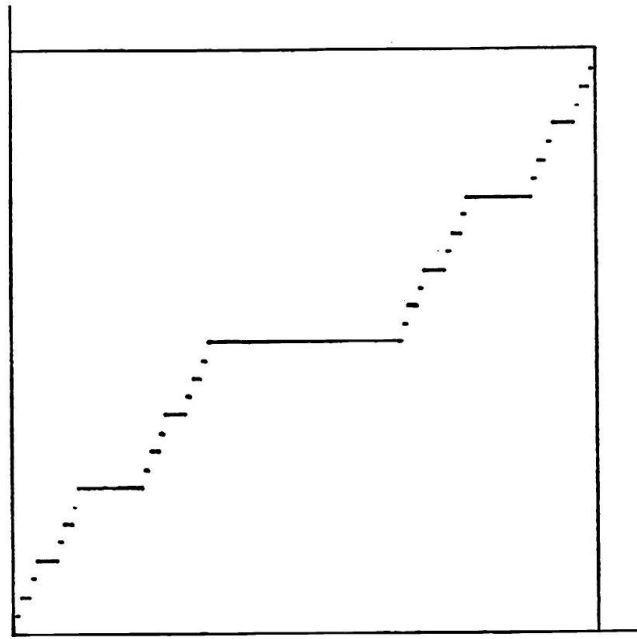


Figure 4

$[0, 1]$, ϕ has no jump discontinuities. Since a monotonic function can have no discontinuities other than jump discontinuities (cf. [34], p. 52, Ex. 24), ϕ is continuous. Since ϕ is locally constant on the open subset $[0, 1] \setminus C$, which has measure 1, $\phi'(x) = 0$ almost everywhere in $[0, 1]$. The function ϕ just defined is called the Cantor function.

In much the same way as the Cantor function is defined in terms of the Cantor set, other "Cantor functions" can be defined in terms of other Cantor sets (of positive measure). Perhaps the simplest way, in terms of a given Cantor set A on $[0, 1]$, to define the corresponding Cantor function g is to define g first on the closures of the successively removed intervals: on the central interval, $g(x) \equiv \frac{1}{2}$; on the next two the values of g are $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{4}$, on the next four the values are $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$, etc. On the dense subset $[0, 1] \setminus A$, g is increasing and its range is dense in $[0, 1]$. Therefore the domain of g can be extended to $[0, 1]$ so that g is increasing and continuous on $[0, 1]$, with range $[0, 1]$.

By making use of Example 5-a "Cantor set" of irrational numbers - it is possible to construct a function h that is increasing and continuous on $[0, 1]$, with range $[0, 1]$, and such that $h'(x) = 0$ for every rational number $x \in [0, 1]$. In fact, the range of $h(x)$ for rational $x \in [0, 1]$ can be made equal to the entire set $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ of rational points of $[0, 1]$, instead of simply those of the form $m/2^n$ as in the preceding cases. In this way we obtain a function satisfying the requirements of Example 11g, Chapter 1.

For a strictly monotonic example, see Example 30.

16. A topological mapping of a closed interval that destroys both measurability and measure zero.

If ϕ is the Cantor function of Example 15, define a function ψ by:

$$\psi(x) \equiv x + \phi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

with range $[0, 2]$. Since ϕ is increasing on $[0, 1]$, and continuous there, ψ is strictly increasing and topological there (continuous and one-to-one with a continuous inverse on the range of ψ). Since each open interval removed from $[0, 1]$ in the construction of the Cantor set C is mapped by ψ onto an interval of $[0, 2]$ of equal length, $\mu(\psi(I \setminus C)) = \mu(I \setminus C) = 1$, whence $\mu(\psi(C)) = 1$. Since C is a set of measure zero, ψ is an example of a topological mapping that maps a set of measure zero onto a set of positive measure. Now let D be a nonmeasurable subset of $\psi(C)$ (cf. Example 12). Then $\psi^{-1}(D)$ is a subset of the set C of measure zero, and is therefore also a (measurable) set of measure zero. Thus ψ is an example of a topological mapping that maps

a measurable set onto a nonmeasurable set. (See also Example 23.)

17. A measurable non-Borel set.

The set $\psi^{-1}(D)$ of Example 16 is a measurable set, but since it is the image under a topological mapping of a non-Borel set D , $\psi^{-1}(D)$ is not a Borel set. (Cf. [20], p. 195.)

18. Two continuous functions that do not differ by a constant but that have everywhere identical derivatives (in the finite or infinite sense).

This example was given by Rey Pastor [38] (also cf. [10], p. 133).*

Let ϕ be the Cantor function of Example 15. On the unit interval $[0, 1]$ define the function $h(x)$ to be equal to zero on the Cantor set C , and on each open interval (a, b) removed in the construction of C define $h(x)$ so that its graph consists of two congruent semicircles with diameter on the x axis, one semicircle lying above the x axis on the left-hand half of (a, b) and the other semicircle lying below the x axis on the right-hand half of (a, b) :

$$h(x) \equiv \begin{cases} \left[\left(\frac{b-a}{4} \right)^2 - \left(x - \frac{3a+b}{4} \right)^2 \right]^{1/2} & \text{if } a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ - \left[\left(\frac{b-a}{4} \right)^2 - \left(x - \frac{a+3b}{4} \right)^2 \right]^{1/2} & \text{if } \frac{a+b}{2} \leq x < b \end{cases}$$

Then h is everywhere continuous on the interval $[0, 1]$. Finally, let $f(x) \equiv 2\phi(x) + h(x)$ and $g(x) \equiv \phi(x) + h(x)$. Then $f'(x) = g'(x)$ for $0 \leq x \leq 1$: for every x of the Cantor set C , $f'(x) = g'(x) = +\infty$; for every x that is the midpoint of an interval removed in the formation of C , $f'(x) = g'(x) = -\infty$; for every other $x \in [0, 1] \setminus C$, $f'(x) = g'(x) = h'(x)$. On the other hand, $f(x) - g(x) = \phi(x)$, and $\phi(x)$ is not a constant function.

19. A set in $[0, 1]$ of measure 1 and category I.

First example: Let A_n be a Cantor set in $[0, 1]$ of measure $(n-1)/n$, $n = 1, 2, \dots$, and let $A \equiv A_1 \cup A_2 \cup \dots$. Then, since A_n is nowhere dense, for $n = 1, 2, \dots$, A is of the first category. On the other hand, since

$$\mu(A_n) = \frac{n-1}{n} \leq \mu(A) \leq 1$$

for $n = 1, 2, \dots$, $\mu(A) = 1$.

Second example: A second such set is given by the complement (relative to the unit interval) of the set of the second example under Example 20, below.

20. A set in $[0, 1]$ of measure zero and category II.

First example: If A is the set of the first example under Example 19, above, then its complement $A' = [0, 1] \setminus A$ is of the second category (if it were of the first category, the interval $[0, 1]$ would be a union

of two sets of the first category and hence also of the first category), and of measure zero ($\mu([0, 1] \setminus A) + \mu(A) = 1$).

Second example: Let $\mathcal{Q} \cap [0, 1]$ be the range of a sequence $\{r_n\}$, and for each pair of positive integers k and n , let I_{kn} be an open interval containing r_n and of length $< 2^{-k-n}$. If $A_k \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_{kn}$, and $B_k \equiv [0, 1] \setminus A_k$, then A_k is an open set containing $\mathcal{Q} \cap [0, 1]$ and having measure $\mu(A_k) < 2^{-k}$, and hence B_k is a compact nowhere dense set of measure $\mu(B_k) > 1 - 2^{-k}$. (The measure of A_k is less than or equal to the sum of the lengths of the intervals I_{kn} , $n = 1, 2, \dots$, and B_k can have no interior points since it consists of irrational points only.) Therefore

*The example given by Pastor is in error. For a correct example see S. Saks, *Theory of the integral*, Warsaw (1937), pp. 205-206.

the set $B \equiv \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$ is a subset of $[0, 1]$ of measure 1 and of the first category; the set $A \equiv \bigcap_{k=1} A_k = [0, 1] \setminus B$ is a subset of $[0, 1]$ of measure zero and of the second category.

21. A set of measure zero that is not an F_σ set.

First example: The first example under Example 20 cannot be a countable union of closed sets $F_1, F_2, \dots$, since if it were, each F_n would be a closed set of measure zero and therefore nowhere dense. But this would mean that the set under consideration would be of the first category. (Contradiction.)

Second example: The second example under Example 20, for the same reasons as those just given, has the stated properties.

Third example: The non-Borel set of Example 17 is of measure zero, but cannot be an F_σ set since every F_σ set is a Borel set.

22. A set of measure zero such that there is no function Riemann-integrable or not - having the set as its set of points of discontinuity.

Each set under Example 21 is such a set, since for any function on $\mathcal{R}$ into $\mathcal{R}$ the set of points of discontinuity is an F_σ set (cf. Example 23, Chapter 2; also cf. Example 8, Chapter 4).

The present example is of interest in connection with the theorem: A necessary and sufficient condition for a real-valued function defined and bounded on a compact interval to be Riemann-integrable there, is that the set of its points of discontinuity be of measure zero (cf. [36], p. 153, Ex. 54). A careless reading of this theorem might lead one to believe that every set of measure zero is involved, since the condition of the theorem is both necessary and sufficient.

23. Two perfect nowhere dense sets in $[0, 1]$ that are homeomorphic, but exactly one of which has measure zero.

We shall prove even more: If C is the Cantor set on $[0, 1]$ of measure zero and if A is any Cantor set on $[0, 1]$ of positive measure, then there exists a homeomorphism f of $[0, 1]$ onto $[0, 1]$ such that $f(C) = A$. An immediate consequence of this will be the corollary that all Cantor sets are homeomorphic.

The idea of the mapping is similar to that of the original Cantor function (Example 15): Arrange the intervals $I_1, I_2, \dots$ and the intervals $J_{11}, J_{21}, \dots$ deleted from $[0, 1]$ in the formation of C and A , respectively, in the same "order sense." That is, let I_1 and J_1 be the middle intervals first removed; then let I_2 and J_2 be the "left middles" and I_3 and J_3 be the "right middles" next removed, etc. Then map the closure of I_n onto the closure of J_n linearly and increasingly, for $n = 1, 2, \dots$. Then f is defined and strictly increasing on a dense subset of $[0, 1]$, and since its range is also dense on $[0, 1]$, the continuous extension of f to $[0, 1]$ is immediate, as described in the second paragraph under Example 15. (Cf. Fig. 5.) The present function f is a second example of the type called for in Example 16.

24. Two disjoint nonempty nowhere dense sets of real numbers such that every point of each set is a limit point of the other.

Let A be any Cantor set in $[0, 1]$, and let B be the subset of A consisting of all endpoints of the open intervals that were deleted from $[0, 1]$ in the construction of A , and let $E \equiv A \setminus B$. Then B and E satisfy the requirements.

If the containing space is not restricted to being Ω , examples are easily constructed. For instance, in the Euclidean plane two sets satisfying the stated conditions are the set of rational numbers on the x axis and the set of irrational numbers on the x axis.

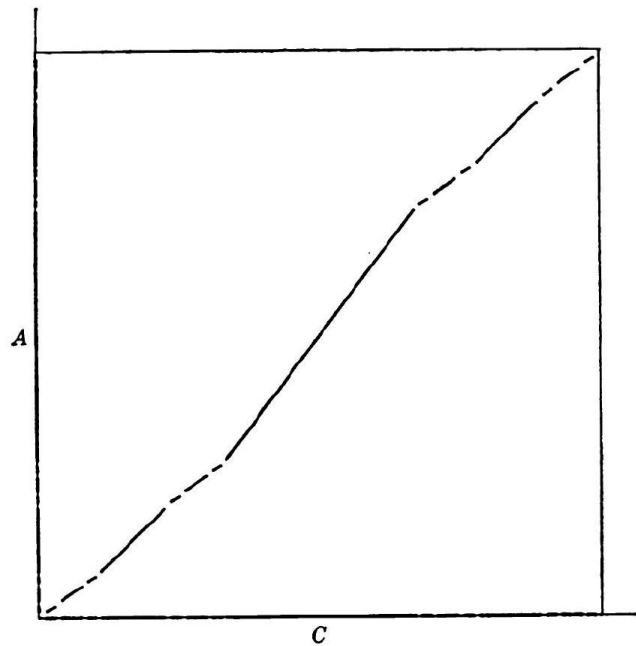


Figure 5

25. Two homeomorphic sets of real numbers that are of different category.

We start by defining an increasing continuous function on $[0, 1]$ that is similar to a Cantor function as defined in the second paragraph under Example 15. In the present instance let $\{J_n\}$ be the sequence of open sets removed from $[0, 1]$ in the construction of a Cantor set A , as described in Example 23, and let $\{s_n\}$ be a one-to-one mapping of $\mathfrak{V}$ onto $\mathfrak{Q} \cap (0, 1)$. Define the sequence $\{r_n\}$ as follows: let $r_1 \equiv s_1$; let $r_2 \equiv s_n$ where n is the least positive integer such that $s_n < r_1$; let $r_3 \equiv s_n$ where n is the least positive integer such that $s_n > r_1$. Then let $r_4 \equiv s_n$ where n is the least positive integer such that $s_n < r_2$; let $r_5 \equiv s_n$ where n is the least positive integer such that $r_2 < s_n < r_1$; let $r_6 \equiv s_n$ where n is the least positive integer such that $r_1 < s_n < r_3$; let $r_7 \equiv s_n$ where n is the least positive integer such that $s_n > r_3$. If this procedure is continued, the rational numbers between 0 and 1

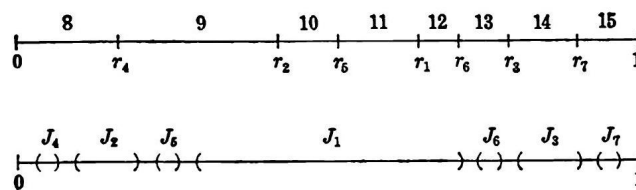


Figure 6

are arranged in a sequence $\{r_n\}$ in such a way that their order relation corresponds to that of the sequence of intervals J_n , as indicated in Figure 6. In other words, $r_m < r_n$ if and only if J_m lies to the left of J_n . We now define the function f so that $f(x) \equiv r_n$ if x belongs to the closure $\bar{J}_n$ of J_n , $n = 1, 2, \dots$. As in Example 15, f is defined and increasing on a dense subset of $[0, 1]$, with range dense in $[0, 1]$, and can be extended to a continuous increasing function mapping $[0, 1]$ onto $[0, 1]$. If B and E are defined as in Example 24, then f maps B onto the set $\mathfrak{Qn}(0, 1)$, and E onto the set $(0, 1) \setminus \mathfrak{Q}$ of all irrational numbers between 0 and 1. In this latter case, the mapping between E and $(0, 1) \setminus \mathfrak{Q}$ is strictly increasing and bicontinuous. (The continuity of the inverse mapping follows from the order-relationship among the points of E and the correspondence to that order-relationship among the points of $(0, 1) \setminus \mathfrak{Q}$.) Therefore E and $(0, 1) \setminus \mathfrak{Q}$ are homeomorphic. That is, any Cantor set shorn of its "endpoints" is homeomorphic to the set of irrational numbers between 0 and 1. But E is nowhere dense and hence of the first category, whereas $(0, 1) \setminus \mathfrak{Q}$ is of the second category (cf. Example 7).

It should be noted that, in contrast to the sets of Example 23, the homeomorphism of the present Example cannot be induced from a homeomorphism between containing intervals. (If two spaces are homeomorphic and if two sets correspond under this homeomorphism, then if one is nowhere dense so is the other; if one is of the first category, then so is the other.)

26. Two homeomorphic sets of real numbers such that one is dense and the other is nowhere dense.

If, in Example 25, the rational numbers $\{r_n\}$ are not restricted to the interval $(0, 1)$ but are permitted to encompass the entire set $\mathcal{Q}$, then a homeomorphism between E and the set $\mathcal{Q}' = \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ of all irrational numbers is obtained. The set E is nowhere dense, and the set $\mathcal{Q}'$ is dense. (Cf. the final paragraph under Example 25.)

27. A function defined on $\mathcal{R}$, equal to zero almost everywhere and whose range on every nonempty open interval is $\mathcal{R}$.

We shall arrive at the construction of a function f having the stated properties in stages. Our first goal is to define a function g on the open interval $(0, 1)$ that maps the set $C \cap (0, 1)$, where C is the Cantor set of measure zero, onto $\mathcal{R}$. If ϕ is the Cantor function (Example 15), then g can be defined:

$$g(x) \equiv \tan \left[\pi \left(\phi(x) - \frac{1}{2} \right) \right], \quad 0 < x < 1.$$

The second step is to define, for an arbitrary open interval $I = (a, b)$, a subset Z_I of measure zero and a function g_I with domain Z_I and range $\mathcal{R}$. This can be done as follows:

$$Z_I \equiv \{a + (b - a)x \mid x \in C \cap (0, 1)\}$$

$$g_I(x) \equiv g\left(\frac{x - a}{b - a}\right), \quad x \in Z_I$$

We start defining the desired function f by letting it be equal to zero on the set $\mathcal{G}$ of integers. We now define a sequence $\{U_n\}$ of open sets as follows: Let $U_1 \equiv \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$, which is the union of all open intervals of the form $(n, n + 1)$, where n is an integer. In each of these intervals I let Z_I be the set of measure zero defined above, and on the set Z_I define f to be equal to g_I . The subset U_2 of U_1 where f has not yet been defined is an open set, and therefore a union of disjoint open intervals. In each of these intervals I let Z_I be the set of measure zero defined above, and on the set Z_I define f to be equal to g_I . The subset U_3 of U_2 where f has not yet been defined is again an open set, and therefore a union of disjoint open intervals. If the sets Z_I are again defined as above, the domain of the function f can once more be extended, to include these sets of measure zero. Let this process continue, by means of a sequence $\{U_n\}$ of open sets each of which has a complement of measure zero. The function f thereby becomes defined on a set of measure zero - the complement of the intersection of $U_1, U_2, \dots$, or equivalently, the union of their complements $U_1', U_2', \dots$ - in such a way that every nonempty open interval must contain one of the open intervals I of one of the open sets U_n , and therefore a set Z_I on which the range of f is $\mathcal{G}$. Finally, we define f to be identically zero where it has not already been defined.

17.6.3 Counterexamples about Sets and Measure on the Real Axis 3

28. A function on $\mathcal{R}$ whose graph is dense in the plane.

The function of Example 27 has this property.

29. A function f such that $0 \leq f(x) < +\infty$ everywhere but $\int_a^b f(x)dx = +\infty$ for every nonempty open interval (a, b) .

A function having these properties can be constructed by repeating the procedures of Example 27, with the following two changes: (i) let the set C be replaced by a Cantor set of measure $\frac{1}{2}$ on $[0, 1]$ and (ii) define the function g_I :

$$g_I(x) \equiv \frac{1}{|I|^2} \chi(Z_I),$$

where $|I|$ denotes the length of the interval I and $\chi(A)$ is the characteristic function of the set A (cf. the Introduction, Chapter 1). Each set Z_I has measure $\frac{1}{2}|I|$, and therefore the integral of g_I over I is equal to $1/(2|I|)$. Since every nonempty interval of the form (c, d) contains subintervals I of arbitrarily small length, the integral $\int_c^d f(x)dx$ is arbitrarily large and hence, being a constant, is equal to $+\infty$.

30. A continuous strictly monotonic function with a vanishing derivative almost everywhere. (See page 195 for elaboration.)

A function f with these properties is given by A. C. Zaanen and W. A. J. Luxemburg [3], as follows: If ϕ is the Cantor function of Example 15, let $\psi(x) \equiv \phi(x)$ if $x \in [0, 1]$ and $\psi(x) \equiv 0$ if $x \in \mathcal{R} \setminus [0, 1]$, let $\{[a_n, b_n]\}$ be the sequence of closed intervals $[0, 1]$, $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $\dots$, $[0, \frac{1}{8}]$, $\dots$, and define

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \psi\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right) \text{ for } 0 \leq x \leq 1$$

31 A bounded semicontinuous function that is not Riemannintegrable, not equivalent to a Riemann-integrable function.

The characteristic function f of a Cantor set A of positive measure on $[0, 1]$ is bounded and everywhere upper semicontinuous. Since its set of points of discontinuity is A , which has positive measure, f is not Riemann-integrable on $[0, 1]$. Two functions are equivalent iff they are equal almost everywhere. If the values of f are changed on a set of measure zero, the resulting function also has a set of positive measure as its set of points of discontinuity.

32. A bounded measurable function not equivalent to a Riemann-integrable function.

The function of Example 31 has this property.

33. A bounded monotonic limit of continuous functions that is not Riemann-integrable, nor equivalent to a Riemannintegrable function. (Cf. Example 10, Chapter 4.)

The function f of Example 31 can be obtained as the limit of a decreasing sequence $\{f_n\}$ of continuous functions as follows: For any open interval $I = (a, b)$, where $0 \leq a < b \leq 1$, and for any positive integer n , define the function $g_{n,1}$:

$$g_{x,I}(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x \leq a, \\ 1 & \text{if } b \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{if } a + \frac{b-a}{2^n} \leq x \leq b - \frac{b-a}{2^n}, \\ \text{linear} & \text{if } a \leq x \leq a + \frac{b-a}{2^n}, \\ \text{linear} & \text{if } b - \frac{b-a}{2^n} \leq x \leq b. \end{cases}$$

If $\{J_n\}$ is the sequence of open intervals removed from $[0, 1]$ in the formation of the Cantor set A of positive measure (cf. Example 23), define the sequence $\{f_n\}$:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv g_{1,J_1} \\ f_2 &\equiv g_{2,J_1} \cdot g_{2,J_2} \\ &\dots \\ f_n &\equiv g_{n,J_1} \cdot g_{n,J_2} \cdots g_{n,J_n} \end{aligned}$$

34 A Riemann-integrable function f , and a continuous function g , both defined on $[0, 1]$ and such that the composite function $f(g(x))$ is not Riemann-integrable on $[0, 1]$, nor equivalent to a Riemann-integrable function there.

(Cf. Example 9, Chapter 4.)

The function of Example 31 is of the required form $f(g(x))$ if $f(x)$ is defined to be 0 for $0 \leq x < 1$ and 1 for $x = 1$, and if $g(x)$ is defined to be 1 if $x \in A$, and $1 - \frac{1}{2}(b-a) + |x - \frac{1}{2}(a+b)|$ if x belongs to an interval $I = (a, b)$ removed from $[0, 1]$ in the formation of A . The function $g(x)$ is continuous since for all x_1 and x_2 of $[0, 1]$, $|g(x_1) - g(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$.

Note that by appropriate use of "bridging functions" (cf. Example 12, Chapter 3) the functions $g_{n,I}$ of Example 33 and the portions defining the function g of Example 34 - and therefore the functions f_n of Example 33 and the complete function g of Example 34 - may be replaced by infinitely differentiable functions.

Finally, it should be noted that in the reverse order this example is impossible. In other words, every continuous function (with a compact interval as domain) of a Riemann-integrable function is Riemannintegrable. (Cf. [36], p. 153, Ex. 55.)

35. A bounded function possessing a primitive on a closed interval but failing to be Riemann-integrable there.

Let the function g be defined for positive x (cf. Example 2, Chapter 3) by the formula $g(x) \equiv x^2 \sin(1/x)$, and for any positive number c , let x_c be the greatest positive x less than or equal to c such that $g'(x) = 0$. For any positive c define the function g_c for $0 < x \leq c$:

$$g_c(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } 0 < x \leq x_c \\ g(x_c) & \text{if } x_c \leq x \leq c \end{cases}$$

If A is any Cantor set of positive measure on $[0, 1]$, define the function f as follows: If $x \in A$ let $f(x) \equiv 0$, and if x belongs to an interval $I = (a, b)$ removed from $[0, 1]$ in the formation of A , let

$$f(x) \equiv \begin{cases} g_0(x-a) & \text{if } a < x \leq \frac{1}{2}(a+b), \\ g_0(-x+b) & \text{if } \frac{1}{2}(a+b) \leq x < b, \end{cases}$$

where $c \equiv \frac{1}{2}(b-a)$.

If x is any point of A and if y is any other point of $[0, 1]$, then either $f(y) = 0$ or y is a point of

some removed interval $I = (a, b)$. In the former case, $|(f(y) - f(x))/(y - x)| = 0 < |y - x|$. In the latter case, let d be defined to be the endpoint of (a, b) nearer y . Then, with $c \equiv \frac{1}{2}(b - a)$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| &= \left| \frac{f(y)}{y - x} \right| \leq \left| \frac{f(y)}{y - d} \right| \\ &= \left| \frac{g_c(|y - d|)}{y - d} \right| \leq \left| \frac{|y - d|^2}{y - d} \right| = |y - d| \leq |y - x|. \end{aligned}$$

Therefore, in either case, $|(f(y) - f(x))/(y - x)| \leq |y - x|$, and consequently $f'(x) = 0$ for every $x \in A$.

On the other hand, if x belongs to any removed interval (a, b) ,

$$|f'(x)| \leq |2z \sin(1/z) - \cos(1/z)| \leq 3$$

for some z between 0 and 1, so that f is everywhere differentiable on $[a, b]$, and its derivative f' is bounded there.

Finally since $\lim_{y \rightarrow 0+} g'(y) = 1$ (cf. Introduction, Chapter 2), it follows that for any point x of A , $\overline{\lim}_{y \rightarrow x} f'(y) = 1$. Therefore the function f' is discontinuous at every point of A , and hence on a set of positive measure. The function f' therefore satisfies all conditions specified in the statement above.

A construction similar to the above was (presumably first) given by the Italian mathematician V. Volterra (1860-1940) in Giorn di Battaglini 19(1881), pp. 353-372.

36. A function whose improper (Riemann) integral exists but whose Lebesgue integral does not.

If $f(x) \equiv \sin x/x$ if $x \neq 0$ and $f(0) \equiv 1$, then the improper integral $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converges conditionally (cf. [34] p. 465). That is, the integral converges, but $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx = +\infty$. This means that the function $|f(x)|$ is not Lebesgue-integrable on $[0, +\infty)$, and therefore neither is $f(x)$.

37. A function that is Lebesgue-measurable but not Borelmeasurable.

The characteristic function of the Lebesgue-measurable non-Borel set in Example 17 satisfies these conditions.

38 A measurable function $f(x)$ and a continuous function $g(x)$ such that the composite function $f(g(x))$ is not measurable.

In the notation of Example 16, let $E \equiv \psi^{-1}(D)$. Then the characteristic function $f \equiv \chi_B$ of the set E is measurable and $g \equiv \psi^{-1}$ is continuous, but the composite function $f(g(x))$ is the nonmeasurable characteristic function of the nonmeasurable set D .

It should be noted that in the reverse order this example is impossible. In other words, every continuous function of a measurable function is measurable.

39. A continuous monotonic function $g(x)$ and a continuous function $f(x)$ such that

$$\int_0^1 f(x)dg(x) \neq \int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

Let $f(x) \equiv 1$ on $[0, 1]$, and let g be the Cantor function ϕ of Example 15. Then the Riemann-Stieltjes (cf. [36], p. 179) or Lebesgue-Stieltjes integral (cf. [18], [30], and [32]) on the left above is equal to $\phi(1) - \phi(0) = 1$, while the Lebesgue integral on the right is equal to 0 since the integrand is almost everywhere equal to 0.

40. Sequences of functions converging in different senses.

If $f, f_1, f_2, \dots$ are Lebesgue-integrable functions on either the unit interval $[0, 1]$ (more generally, on a measurable set of finite measure) or the real number system $\mathcal{R}$ (more generally, on a measurable set of infinite measure), then there are many senses in which the statement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

may be interpreted. We shall consider here four specific meanings, indicate the implications among them, and give counterexamples when such implications are absent. We shall indicate by the single letter S either $[0, 1]$ or $\mathcal{R}$ as the domain for the functions concerned. The four interpretations for the limit statement given above that we shall consider are:

(i) Convergence almost everywhere*:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \text{ for almost every } x \in S$$

(ii) Convergence in measure:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

(iii) Mean convergence †:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

(iv) Dominated convergence ‡:

Convergence almost everywhere holds, and there exists a Lebesgue-integrable function g such that $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ for $n = 1, 2, \dots$ and almost all $x \in S$.

We start with two statements concerning the implications that hold among (i) – (iv). If S is of finite measure, then

$$(iv) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (i) \\ (iii) \end{array} \right\} \Rightarrow (ii)$$

If S is of infinite measure, then

$$(iv) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (i) \\ (iii) \end{array} \right\} \Rightarrow (ii).$$

(Cf. [18], [30], and [32].)

Examples now follow to show that all of the implications missing above may fail. For all but the last one, each of the examples serves for spaces of either finite or infinite measure, since all of the functions involved are zero for $x \in \mathcal{R} \setminus [0, 1]$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Let $f(x) \equiv 0$ for all $x \in \mathcal{R}$,

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} n & \text{if } 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{if } x \in \mathcal{R} \setminus (0, 1/n), \end{cases}$$

⁰A closely related type of convergence is convergence everywhere, which has a rather trivial relationship to (i).

† This is the same as convergence in the Banach space L^1 of all integrable functions, reduced modulo functions almost everywhere equal to zero. This can be generalized by means of an exponent $p \geq 1$ to convergence in the Banach space L^p of measurable functions the p th powers of whose absolute values are integrable, reduced modulo functions almost everywhere equal to zero. For further discussion, see [16], [18], [29], and [32].

‡ The type of dominated convergence needed, in case (iii) is replaced by convergence in L^p , is that given by $|f_n(x)| \leq |g(x)|$, where $g \in L^p$.

for $n = 1, 2, \dots$.

(i) $\nRightarrow$ (iv): Same as (i) $\nRightarrow$ (iii) since (iv) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Let $f(x) \equiv 0$ for all $x \in \mathcal{R}$. For each $n \in \mathcal{T}$, write $n = 2^k + m$, where $0 \leq m < 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$; then k and m are uniquely determined by n . Let

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{m}{2^k} \leq x \leq \frac{m+1}{2^k} \\ 0 & \text{otherwise for } x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Then $\int_s |f_n(x) - f(x)| dx = 2^{-k} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$, but $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ exists for no $x \in [0, 1]$.

(iii) $\nRightarrow$ (iv): Same as (iii) $\nRightarrow$ (i) since (iv) $\Rightarrow$ (i).

(ii) $\nRightarrow$ (i): Same as (iii) $\nRightarrow$ (i), since for the function f_n of that example, and any positive ε ,

$$\mu \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leq 2^{-k} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Let $f(x) \equiv 0$ for all $x \in \mathcal{R}$, and for any $n \in \Upsilon$ let k and m be determined as in the example for (iii) $\Rightarrow$ (i). Let

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 2^k & \text{if } \frac{m}{2^k} \leq x \leq \frac{m+1}{2^k} \\ 0 & \text{otherwise for } x \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Then for any positive number ε ,

$$\mu \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leq 2^{-k} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty$$

but $\int_s |f_n(x) - f(x)| dx = 1 \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$.

(ii) $\nRightarrow$ (iv): Same as (ii) $\nRightarrow$ (i) or (ii) $\nRightarrow$ (iii), since (iv) $\Rightarrow$ (i) and (iv) $\Rightarrow$ (iii).

Finally, we give an example where the space S is the space R of infinite measure:

(i) $\nRightarrow$ (ii): Let $f(x) \equiv 0$ for all $x \in \mathcal{R}$,

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } n \leq x \leq n+1, \\ 0 & \text{otherwise for } x \in \mathcal{R}. \end{cases}$$

1+40

Two measures μ and ν on a measure space (X, S) such that μ is absolutely continuous with respect to ν and for which no function f exists such that $\mu(E) = \int_E f(x) d\nu(x)$ for all $E \in S$.

Let $X \equiv \mathcal{R}$ and let S be the class of all subsets of X . For any set $E \in S$ define

$$\mu(E) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } E \text{ is countable,} \\ +\infty & \text{if } E \text{ is uncountable,} \end{cases}$$

$$\nu(E) \equiv \begin{cases} n & \text{if } E \text{ consists of } n \text{ points, } n \geq 0, \\ +\infty & \text{if } E \text{ is infinite.} \end{cases}$$

Then $\nu(E) = 0 \Rightarrow E = \emptyset$ and hence $\mu(E) = 0$, so μ is absolutely continuous with respect to ν . On the other hand, if f is a function such that

$$\mu(E) = \int_E f(x) d\nu(x)$$

for all sets E , then this equation holds in particular when E is an arbitrary one-point set, $E = \{y\}$, in which case

$$\mu(E) = 0 = \int_B f(x) d\nu(x) = f(y).$$

But this means that the function f is identically 0 , and consequently that $\mu(E) = 0$ for every $E \in S$. (Contradiction.)

If we interpret $\pm\infty \cdot 0$ as 0 , the following statement is true: If f is a nonnegative extended-real-valued function measurable with respect to a measure function ν on a measure space (X, S) and if

$$\mu(E) \equiv \int_B f(x) d\nu(x)$$

for all measurable sets E , then μ is a measure function on (X, S) that is absolutely continuous with respect to ν . The preceding counterexample shows that the unrestricted converse of this statement is false. The Radon-Nikodym theorem (cf. [18]) is a restricted form of the converse.

Part VIII

Problems

Приведем хорошие задачи для тренировки по математическому анализу. Каталог всех встретившихся мне задач в отдельной записи, в прочем, он и не особо нужен.

(потом скучные, аналогичные и очевидные перенесу в отдельные записи для них!!! На 1/4 как минимум этот раздел станет меньше!)

18 Problems about properties of functions

18.1 Evaluation of Expressions

18.1.1 Problems about the limits of the functions, where the uncertainty

K1-17.pr.1 Find $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4}{6x^2 - 1} = 1.$$

Теорема остается в силе при $a = +\infty, a = -\infty$, а также в случае одностороннего предела ($x \rightarrow a + 0, x \rightarrow a - 0$) при выполнении условий а)-в) соответственно на интервалах $(\delta; +\infty), (-\infty; -\delta), (a; a + \delta), (a - \delta; a), \delta > 0$.

Если выполнены условия а), б), а $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ равен $+\infty$ или $-\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ также равен соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

K1-17.pr.2 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Раскрывая неопределенность вида $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1/(1 + x^2)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2(1 + x^2)} = \frac{1}{3}.$$

Q1-17.pr.3 Find $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Раскрывая неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Q1-17.pr.4 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$.

Замечая, что $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, по правилу Лопиталя находим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}.$$

Q1-17.pr.5 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x \ln(1+x)}{\operatorname{tg} x - x}$.

Δ Замечая, что $\ln(1+x) \sim x, \operatorname{sh} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ и применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x \ln(1+x)}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1/\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x} \cos^2 x = 3$$

Q1-17.pr.6 Find $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$.

Правило Лопиталья, примененное дважды, устраняет неопределенность вида $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^9 - 10}{5x^4 - 5} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^9 - 10}{5x^4 - 5} &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - 1}{x^4 - 1} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^8}{4x^3} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Q1-17.pr.7 Find $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$, где $\alpha > 0, \beta > 0$.

Пусть $k = [\alpha] + 1$; тогда $\alpha - k < 0$. Применяя правило Лопиталья k раз, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\beta^k e^{\beta x}} = 0$$

K1-17 .пр.8

Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$, где $\alpha > 0, \beta > 0$. Δ Пусть $\ln x = t$; тогда $x = e^t$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{e^{\beta t}} = 0$ (пример 7).

Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ часто удается свести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований, а затем применить правило Лопиталья. П р и м е р

K1-17.пр .9 Find $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$.

Преобразуя неопределенность вида $0 \cdot \infty$ к виду $\frac{\infty}{\infty}$ и применяя правило Лопиталья, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0. \Delta$$

Q1-17.pr.10 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{50}} e^{-1/x^2}$.

Полагая $1/x^2 = t$, получаем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{50}} e^{-1/x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{25}}{e^t} = 0$.

Q1-17.pr.11 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$.

Преобразуя неопределенность вида $\infty - \infty$ к виду $\frac{0}{0}$ и используя асимптотическую формулу $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x \cos x)(\sin x - x \cos x)}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}\end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 2, \text{ а } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

(пример 4), то искомый предел равен $2/3$. При вычислении пределов функций вида $\varphi(x) = (f(x))^{g(x)}$ часто приходится раскрывать неопределенности вида $0^0, \infty^0, 1^\infty$. Представляя функцию $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = e^{g(x) \ln f(x)}$, можно свести вычисление предела функции $g(x) \ln f(x)$ к раскрытию неопределенности вида $0 \cdot \infty$.

K1-17 .пр.12

Найти $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = e^0 = 1$ Так как $x^x = e^{x \ln x}$, а $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0$ (пример 9), то $\lim_{x \rightarrow +0} x^x =$

K1-17 .пр.13

Найти $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Так как $(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln \sin x} = e^{(\ln \sin x) / \operatorname{ctg} x}$, то, применяя правило Лопиталья, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (-\cos x \cdot \sin x) = 0,$$

а, следовательно, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$.

K1-17 .np.14

Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})^{1/\ln x}$. А По правилу Лопиталя находим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/\sqrt{x^2 + 1}}{1/x} = 1$$

и поэтому $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})^{1/\ln x} = e$.

K1-17.1 Find

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + 3x - 5}.$$

K1-17.2 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}.$$

K1-17.3 Find

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{2x^2 - 5x - 3}.$$

K1-17.4 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{x^2}.$$

K1-17.5 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax - \sin bx}{\operatorname{sh} ax - \operatorname{sh} bx}, a \neq b.$$

K1-17.6 Find

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}, \beta \neq 0.$$

K1-17.7 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{x^2}.$$

K1-17.8 Find

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}, a > 0, a \neq 1.$$

K1-17.9 Find

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x^a - a^a}.$$

K1-17.10 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

K1-17.11 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((2/\pi) \arccos x)}{\ln(1+x)}.$$

K1-17.12 Find

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

K1-17.13 Find

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{4 \sin^2 x - 6 \sin x + 1}{3 \sin^2 x + 5 \sin x - 4}$$

K1-17.14 Find

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}.$$

K1-17.15 Find

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$$

K1-17.16 Find

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}.$$

K1-17.17 Find

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2 + x - 2}}.$$

K1-17.18 Find

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^3 + 2x^2 - 9x + 6}.$$

K1-17.19 Find

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sqrt[5]{3 \operatorname{tg}^2 x} - 1}{2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3}.$$

K1-17.20 Find

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x}, m \in N, n \in N.$$

K1-17.21 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x^2}{x \cos x - \sin x}.$$

K1-17.22 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}$$

K1-17.23 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) \ln(1+x) - x}{e^x - x - 1}.$$

K1-17.24 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((1+x)/(1-x)) - 2x}{x - \sin x}.$$

K1-17.25 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}, a > 0.$$

K1-17.26 Find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} 3x - 6 \operatorname{tg} x}{3 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 3x}$$

K1-17.27 Find

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}.$$

18.1.2 Problems about Limits: Warmup 1

MIPT.Ivanova.3.1.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{arctg} x}{\ln(1-x^3)}$. $\triangleright$ Так как в знаменателе дроби одна функция, то представим ее формулой Маклорена до первого значимого (не нулевого) члена: $g(x) = -x^3 + o(x^3)$.

Числитель дроби также представим формулой Маклорена до $o(x^3)$. Так как $\cos x$ умножается на x , то его следует представить до $o(x^2)$.

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3). \\ f(x) &= x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3). \\ \text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

MIPT.Ivanova.3.2. Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{1-x}) + \ln(1-x) - \frac{x^2}{2}}{\operatorname{tg}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{arctg} x}$.

$\triangleright$ В представлении $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{sh} x$ все члены первого и третьего порядка положительны, а в представлении $\operatorname{arctg} x$ член третьего порядка - отрицателен. Поэтому в знаменателе член третьего порядка отличен от 0. Представим формулой Маклорена а знаменатель дроби до $o(x^3)$:

Так как $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\operatorname{tg} t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, $t \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\operatorname{sh} x) &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + \frac{(x + o(x))^3}{3} + o(x^3) = \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

Так как $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, то

$$g(x) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

Так как найдена главная часть представления, то точность представления выбрана правильно.

Представим формулой Маклорена числитель дроби до $o(x^3)$. Знаменатель дроби $\frac{x}{1-x}$ представим с точностью до $o(x^2)$, так как числитель порядка x :

$$\frac{x}{1-x} = x(1+x+x^2+o(x^2)) = x+x^2+x^3+o(x^3).$$

Так как $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$, $t \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{1-x}\right) &= (x+x^2+x^3+o(x^3)) - \frac{(x+o(x))^3}{3!} + o(x^3) = \\ &= x+x^2+x^3+o(x^3) - \frac{x^3+o(x^3)}{3!} = x+x^2+\frac{5x^3}{6}+o(x^3). \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(x+x^2+\frac{5x^3}{6}+o(x^3)\right) + \\ &+ \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2} + o(x^3). \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{5x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

MIPT.Ivanova.3.3.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(xe^{-x^2}) - \frac{\ln(\operatorname{ch}^2 x)}{x}}{\operatorname{arctg}(x \cos x) - \operatorname{tg} x}$.

▷ Представления $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arctg} x$ отличаются знаком кубического члена, поэтому попробуем представить формулой Маклорена знаменатель дроби до $o(x^3)$.

В аргументе сложной функции $\cos x$ умножается на x , значит, $\cos x$ представим до $o(x^2)$:

$$\begin{aligned} x \cos x &= x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3). \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3), t \rightarrow 0. \\ \text{Тогда } \operatorname{arctg}(x \cos x) &= \\ &= \left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right) - \frac{(x + o(x))^3}{3} + o(x^3) = \\ &= x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \frac{x^3 + o(x^3)}{3} + o(x^3) = x - \frac{5x^3}{6} + o(x^3). \\ g(x) &= x - \frac{5x^3}{6} + o(x^3) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = -\frac{7x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Так как найденная главная часть представления, то точность представления выбрана правильно. Представим формулой Маклорена числитель дроби до $o(x^3)$. Экспоненту представляем до $o(x^2)$, так как она умножается на x . Так как аргумент показательной функции порядка x^2 , то в представлении экспоненты достаточно взять два первых члена $e^t = 1 + t + o(t)$, тогда, подставляя $-x^2$ вместо t , получаем: $xe^{-x^2} = x(1 - x^2 + o(x^2)) = x - x^3 + o(x^3)$. Так как $\operatorname{tg} t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, $t \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(xe^{-x^2}) &= (x - x^3 + o(x^3)) + \frac{(x + o(x))^3}{3} + o(x^3) = \\ &= x - x^3 + o(x^3) + \frac{x^3 + o(x^3)}{3} + o(x^3) = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Логарифмическая функция делится на x , поэтому представляем ее до $o(x^4)$. Квадрат гиперболического косинуса можно преобразовать по формуле понижения степени, но так как он является аргументом логарифмической функции, то удобнее представить формулой Маклорена функцию

$$\begin{aligned} \ln(\operatorname{ch}^2 x) &= 2 \ln(\operatorname{ch} x) = 2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) = \\ &= 2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2}{2} + o(x^4) \right) = \\ &= 2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4). \\ f(x) &= x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{x} \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \right) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3). \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-\frac{7x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

MIPT.Ivanova.3.4. Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(e(1+2x)))^{1/4} + \sqrt{1-x} - 2 \cos x}{\exp\left(\frac{x}{\sqrt{1-4x}}\right) - (x+1) \operatorname{ch}(\sqrt{5}x)}$.

▷ Если трудно предположить необходимую точность представления, то находим первые три значимых (отличных от нуля) члена. Записи ведем так, чтобы при необходимости легко было дописать дополнительные члены для выделения главной части.

Представим формулой Маклорена знаменатель дроби до $o(x^3)$.

Для того чтобы представить аргумент показательной функции до $o(x^3)$, функцию $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ представим

с точностью до $o(x^2)$, так как она у множается на x .

$$\begin{aligned} \text{Так как, } \frac{1}{\sqrt{1-t}} &= 1 + \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o(t^2), t \rightarrow 0, \text{ то} \\ \frac{x}{\sqrt{1-4x}} &= x \left(1 + \frac{4x}{2} + \frac{3(4x)^2}{8} + o(x^2) \right) = x + 2x^2 + 6x^3 + o(x^3). \\ \exp \left(\frac{x}{\sqrt{1-4x}} \right) &= \exp(x + 2x^2 + 6x^3 + o(x^3)) = \\ &= 1 + (x + 2x^2 + 6x^3 + o(x^3)) + \frac{(x + 2x^2 + o(x^2))^2}{2} + \\ &\quad + \frac{(x + o(x))^3}{6} + o(x^3) = \\ &= 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \frac{x^2 + 4x^3 + o(x^3)}{2} + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3) = \\ &= 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{49x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Представим формулой Маклорена второй член знаменателя. Так как $x + 1 \sim 1$ при $x \rightarrow 0$, то гиперболическую функцию представляем до $o(x^3)$: $\text{ch}(\sqrt{5}x) = 1 + \frac{5x^2}{2} + o(x^3)$.

$$\begin{aligned} (x+1) \text{ch}(\sqrt{5}x) &= (x+1) \left(1 + \frac{5x^2}{2} + o(x^3) \right) = \\ &= 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{5x^3}{2} + o(x^3). \\ g(x) &= \left(1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{49x^3}{6} + o(x^3) \right) - \\ &\quad - \left(1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{5x^3}{2} + o(x^3) \right) = \frac{17x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Представим формулой Маклорена числитель дроби до $o(x^3)$. Так как логарифмическая функция представима формулой Маклорена в окрестности точки 1, а не точки e , то воспользуемся формулой преобразования логарифма произведения:

$$\begin{aligned} \ln(e(1+2x)) &= \ln e + \ln(1+2x) = \\ &= 1 + 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) = 1 + 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3). \\ (1+t)^{1/4} &= 1 + \frac{t}{4} + \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) t^2}{2} + \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) t^3}{6} + o(t^3) = \\ &= 1 + \frac{t}{4} - \frac{3t^2}{32} + \frac{7t^3}{128} + o(t^3) \\ (\ln(e(1+2x)))^{1/4} &= \left(1 + 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \right)^{1/4} = \\ &= 1 + \frac{\left(2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \right)}{4} - \frac{3 \left(2x - 2x^2 + o(x^2) \right)^2}{32} + \\ &\quad + \frac{7(2x + o(x))^3}{128} + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3) - \frac{3x^2}{8} + \frac{3x^3}{4} + o(x^3) + \frac{7x^3}{16} + o(x^3). \end{aligned}$$

Так как учет кубического члена представления корня квадратного значительно упростит приведение подобных слагаемых, то пока не приводим подобные слагаемые.

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Воспользуемся табличной записью для приведения подобных членов (см. замечание 7, с. 14).

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (\ln(e(1+2x)))^{1/4} + \sqrt{1-x} - 2\cos x = \\
 &= 1 + 1 - 2 + \\
 &+ \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \\
 &+ \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{3x^2}{8}\right) - \frac{x^2}{8} + x^2 + \\
 &+ \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^3}{4} + \frac{7x^3}{16}\right) - \frac{x^3}{16} + o(x^3) = \\
 &= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{43}{24}x^3 + o(x^3). \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{43}{24}x^3 + o(x^3)}{\frac{17x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{43}{136}.
 \end{aligned}$$

МИТ.Иванова.3.5.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos\left(\frac{2x}{2+x^2}\right) - 2\sqrt[6]{1+3x^4}}{x \arctg x - \exp\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + 1}$. Арктангенс - нечетная функция, следовательно, его

представление формулой Маклорена содержит только нечетные степени. После умножения на x получим представление, содержащее только четные степени. Аргумент показательной функции - четная функция, значит, сложная функция - четная, ее представление тоже будет содержать только четные степени.

В представлении знаменателя члены нулевого порядка взаимно уничтожатся. Далее, $x \cdot \arctg x \sim x^2$, $\frac{x^2}{1+x^2} \sim x^2$ и $1 - \exp\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$. Итак, члены второго порядка также взаимно уничтожатся. Представление знаменателя до $o(x^3)$ недостаточно, так как имеет вид $o(x^3)$ и не определяет главную часть.

Представим формулой Маклорена знаменатель дроби до $o(x^5)$. Так как арктангенс умножается на x , то его достаточно представить до $o(x^4)$, то есть $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$. Знаменатель дроби $\frac{x^2}{1+x^2}$ достаточно представить до $o(x^3)$:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = x^2(1 - x^2 + o(x^3)) = x^2 - x^4 + o(x^5)$$

Тогда $\exp\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \exp(x^2 - x^4 + o(x^5)) =$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + (x^2 - x^4 + o(x^5)) + \frac{1}{2}(x^2 - x^4 + o(x^5))^2 + o(x^5) = \\
 &= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5).
 \end{aligned}$$

Важно: слагаемое в виде $\frac{1}{2}(x^2 + o(x^2))^2$ вместо $\frac{1}{2}(x^2 + o(x^3))^2$ приведет к понижению точности представления до $o(x^4)$.

$$g(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - \left(1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) + 1 = \frac{x^4}{6} + o(x^5)$$

Главная часть знаменателя найдена. Точность представления выбрана правильно.

Представим формулой Маклорена числитель дроби до $o(x^5)$:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5).$$

Так как $\frac{2x}{2+x^2} \sim x$ при $x \rightarrow 0$, косинус - четная функция и ее представление содержит члены только четных степеней, то его аргумент достаточно представить до $o(x^4)$. То есть знаменатель дроби

достаточно представить до $o(x^3)$:

$$\begin{aligned}\frac{2x}{2+x^2} &= \frac{x}{1+\frac{x^2}{2}} = x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^4). \\ \text{Тогда } \cos\left(\frac{2x}{2+x^2}\right) &= \cos\left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24} (x + o(x^2))^4 + o(x^5) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{24} + o(x^5). \\ 2\sqrt[6]{1+3x^4} &= 2 \left(1 + \frac{3x^4}{6} + o(x^5)\right) = 2 + x^4 + o(x^5). \\ f(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{24} + o(x^5)\right) - \\ &\quad - (2 + x^4 + o(x^5)) = -\frac{5x^4}{12} + o(x^5). \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5x^4}{12} + o(x^5)}{\frac{x^4}{6} + o(x^5)} = -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

МИПТ.Ivanova.3.6.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{1-2x}} + \frac{e(x^3+x^2-1)}{x+1}}{\operatorname{sh}\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) - \sin\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)}$. $\triangleright$ Аргументы гиперболического и тригонометрического синуса в знаменателе дроби совпадают. Следовательно, члены первого порядка взаимно уничтожаются. В силу нечетности обеих функций представления содержат только члены нечетной степени. Причем члены третьего порядка отличаются только знаком. Поэтому представим знаменатель дроби формулой Маклорена до $o(x^3)$. Логарифмическую функцию представляем до $o(x^3)$:

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3) \\ \operatorname{sh}\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) &= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)\right) + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Первую скобку можно не раскрывать, так как она взаимно уничтожается с такой же скобкой в представлении тригонометрического синуса. Кубическое слагаемое в представлении тригонометрического синуса отличается только знаком. Следовательно,

$$g(x) = 2 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^3 + o(x^3) = \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

Аналогично представим числитель дроби формулой Маклорена до $o(x^3)$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x} &= 1 - \frac{(2x)}{2} - \frac{(2x)^2}{8} - \frac{(2x)^3}{16} + o(x^3) = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3), \\ \exp\{\sqrt{1-2x}\} &= \exp\left\{1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right\} = e \cdot \exp\left\{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right\} = \\ &= e \left(1 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 - \frac{(x + o(x))^3}{6} + o(x^3)\right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e \left(1 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right) + \frac{(x^2 + x^3 + o(x^3))}{2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = e - ex - \frac{ex^3}{6} + o(x^3). \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) \frac{e(x^3 + x^2 - 1)}{x+1} = [e(x^3 + x^2 - 1)(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3))] = \\
&= e[(x^3(1 + o(1)) + x^2(1 - x + o(x)) - \\
&\quad - (1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)))] = -e + ex + ex^3 + o(x^3). \\
f(x) &= e - ex - \frac{ex^3}{6} + o(x^3) + (-e + ex + ex^3 + o(x^3)) = \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5ex^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{24} + o(x^3)} = 20e.
\end{aligned}$$

МИТ.Иванова.3.7. Large limit of many functions

Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln((1-3x)^{2/3} - (1+3x)^{2/3} + \operatorname{ch} \sqrt{8x} - \frac{8}{3}x^2)}{\sin(\sin x) - \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)}.$$

▷ Представим знаменатель формулой Маклорена до $o(x^3)$:

$$\begin{aligned}
\sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3), \quad \operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad t \rightarrow 0 \\
\sin(\sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \frac{(x+o(x))^3}{6} + o(x^3) = \\
&= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \frac{(x+o(x))^3}{3} + o(x^3) = \\
&= x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3). \\
g(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \left(x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3) \right) = \frac{x^3}{3} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Представим числитель формулой Маклорена до $o(x^3)$. Так как в первых двух слагаемых члены четных степеней совпадают, а нечетных степеней отличаются знаком, то

$$\begin{aligned}
(1-3x)^{2/3} - (1+3x)^{2/3} &= \\
&= -2 \cdot \frac{2}{3}(3x) - 2 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}{6}(3x)^3 + o(x^3) = -4x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3), \\
\operatorname{ch} \sqrt{8x} &= 1 + \frac{(\sqrt{8x})^2}{2} + \frac{(\sqrt{8x})^4}{24} + \frac{(\sqrt{8x})^6}{24 \cdot 30} + o(x^3) = \\
&= 1 + 4x + \frac{8x^2}{3} + \frac{32x^3}{45} + o(x^3). \\
f(x) &= \ln \left(\left(-4x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \right) + 1 + 4x + \frac{8x^2}{3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{32x^3}{45} + o(x^3) - \frac{8x^2}{3} \right) = \ln \left(1 - \frac{88}{45}x^3 + o(x^3) \right) = -\frac{88}{45}x^3 + o(x^3), \\
\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-\frac{88}{45}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -\frac{88}{15}.
\end{aligned}$$

МИТ.Иванова.3.8.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(3+x^2) - \operatorname{arctg}(2+\cos x)}{\ln(1+x) - e^x + 1}$.

▷ Представим знаменатель формулой Маклорена до $o(x^2)$:

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) + 1 = -x^2 + o(x^2).$$

Аргументы арктангенса в числителе дроби не стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$. Продифференцируем $\operatorname{arctg}(3+x^2)$ и представим производную формулой Маклорена до $o(x)$:

$$(\operatorname{arctg}(3+x^2))' = \frac{2x}{1+(3+x^2)^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{1+\frac{3x}{5}+\frac{x^2}{10}} = \frac{x}{5} + o(x).$$

$$\text{Тогда (см. с. 8)} \quad \operatorname{arctg}(3+x^2) = \operatorname{arctg} 3 + \frac{x^2}{10} + o(x^2).$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично} \quad (\operatorname{arctg}(2+\cos x))' &= \frac{-\sin x}{1+(2+\cos x)^2} = \\ &= \frac{-\sin x}{5+4\cos x+\cos^2 x} = \frac{-x+o(x)}{5+4+o(x)+1+o(x)} = -\frac{x}{10} + o(x). \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \operatorname{arctg}(2+\cos x) = \operatorname{arctg} 3 - \frac{x^2}{20} + o(x^2).$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} 3 + \frac{x^2}{10} + o(x^2) - \left(\operatorname{arctg} 3 - \frac{x^2}{20} + o(x^2) \right) = \frac{x^2}{20} + o(x^2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{20} + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{20}.$$

МИПТ.Ivanova.3.9.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}x) - \operatorname{arctg}(1+x\sqrt{2})}{(\cos 2x)^{\operatorname{ctg} x} - (1 - \operatorname{th} 5x)^{2/5}}$. ▷ Представим знаменатель дроби по формуле Тейлора до $o(x^2)$:

$$\ln \cos 2x = \ln \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3) \right) = \ln(1 - 2x^2 + o(x^3)) = -2x^2 + o(x^3).$$

$$\begin{aligned} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg} x} &= \exp \left\{ \frac{\cos x \cdot \ln \cos 2x}{\sin x} \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{(1+o(x)) \cdot (-2x^2 + o(x^3))}{(x+o(x^2))} \right\} = \exp \{-2x + o(x^2)\} = \\ &= 1 + (-2x + o(x^2)) + \frac{1}{2}(-2x + o(x^2))^2 = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2). \\ (1 - \operatorname{th} 5x)^{2/5} &= (1 - 5x + o(x^2))^{2/5} = \\ &= 1 + \frac{2}{5}(-5x + o(x^2)) - \frac{3}{25}(-5x + o(x^2))^2 + o(x^2) = \\ g(x) &= (1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)) - (1 - 5x + 3x^2 + o(x^2)) = 5x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Представим числитель дроби формулой Маклорена до $o(x^2)$. Для этого необходимо представить производные обоих слагаемых до $o(x)$:

$$\begin{aligned} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2} \right)' &= \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2} \right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}} + o(x)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{x}{2\sqrt{2}} + o(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{x}{4\sqrt{2}} + o(x) \right). \\ \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2} \right) &= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{16} + o(x^2). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(1+x\sqrt{2})' &= \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}x+o(x))} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}x+o(x)). \\ \operatorname{arctg}(1+x\sqrt{2}) &= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{16} + o(x^2) \right) - \\
 &- \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \frac{9x^2}{16} + o(x^2). \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9x^2}{16} + o(x^2)}{5x^2 + o(x^2)} = \frac{9}{80}.
 \end{aligned}$$

3.3. Предел функции вида $f(x)^{\frac{1}{g(x)}}$ Замечание 19. В данном разделе во всех примерах мы используем обозначение $f(x)$ для основания и $g(x)$ для показателя степени.

МИРТ. Ivanova.3.10.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x} \right)^{\frac{1}{x^4}}$. ▷ Так как знаменатель показателя выражения имеет четвертую степень, то представим основание формулой Маклорена до $o(x^4)$ (см. с. 13).

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)} = \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \right) \left(1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2 + o(x^4) \right) = \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \right) = 1 - \frac{x^4}{6} + o(x^4). \\
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \right)^{\frac{1}{x^4}} = \exp \left\{ -\frac{1}{6} \right\}.
 \end{aligned}$$

МИРТ. Ivanova.3.11.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6}{3+x^2} - \sqrt[3]{\cos 2x} \right)^{\frac{5x}{\arcsin^5 x}}$. ▷ Рассмотрим показатель степени $\arcsin^5 x = x^5 + o(x^5)$. Так как в числителе $5x$, то основание функции достаточно представить формулой Маклорена до $o(x^4)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{6}{3+x^2} &= \frac{2}{1+\frac{x^2}{3}} = 2 \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9} + o(x^4) \right). \\
 \sqrt[3]{\cos 2x} &= \sqrt[3]{1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)} = \\
 &= 1 + \frac{1}{3} \left(-2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \right) - \frac{1}{27} (-2x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4) = \\
 &= 1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^4}{27} + o(x^4). \\
 f(x) &= 2 \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9} + o(x^4) \right) - \\
 &- \left(1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^4}{27} + o(x^4) \right) = 1 + \frac{4x^4}{27} + o(x^4). \\
 \lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{4x^4}{27} + o(x^4) \right)^{\frac{5x}{x^5 + o(x^5)}} = e^{\frac{20}{27}}.
 \end{aligned}$$

МИРТ. Ivanova.3.12.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sh} \frac{x^2}{2}} \right)^{\frac{1}{\ln \frac{(1+x)^3}{1+3x}}}$.

▷ Заметим, что $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\operatorname{sh} \frac{x^2}{2} \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \rightarrow 0$. Если представить основание до $o(x^3)$, то после сокращения дроби на $\frac{x^2}{2}$ мы получим отношение $\frac{1+\alpha(x)}{1+\alpha(x)}$.

Полученное выражение не позволяет выделить главную часть основания. Необходимо учесть следующий член представления и выполнить представление до $o(x^4)$. Причем второй член представления знаменателя шестого порядка, а числителя - четвертого порядка. После выполнения деления представлений значимым окажется только член меньшей степени, поэтому представление до $o(x^4)$ достаточно.

Поясним: учитывая следующий член представления знаменателя, необходимо выполнить представление дроби до $o(x^6)$. То есть $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{24 \cdot 30} + o(x^6)$, $\operatorname{sh} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{48} + o(x^6)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{24 \cdot 30} + o(x^6)}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{48} + o(x^6)} = \frac{1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{12 \cdot 30} + o(x^4)}{1 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{12 \cdot 30} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2), \end{aligned}$$

так как на значение предела влияет только значение второго члена представления основания. То есть мы взяли лишние члены в представлении дроби.

Итак, $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, $\operatorname{sh} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + o(x^4)$.

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)}{1 + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

Представим формулой Маклорена до $o(x^2)$ знаменатель показателя степени:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{(1+x)^3}{1+3x} \right) &= 3 \ln(1+x) - \ln(1+3x) = \\ &= 3 \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \left(3x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2) \right) = 3x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{3x^2 + o(x^2)}} = e^{-\frac{1}{36}}$$

МИРТ. Ivanova.3.13.

Най ти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \operatorname{tg} x}{\operatorname{ch} x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{\ln^2(x + \sqrt{1+x^2})}}.$

▷ Рассмотрим основание. Числитель представим до второго значимого члена:

$$x \operatorname{tg} x = x \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Знаменатель представим до $o(x^4)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x - \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \\ &- \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \right) = x^2 - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f(x) &= \frac{x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2 - \frac{x^4}{12} + o(x^4)} = \frac{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)} = \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right) = 1 + \frac{5x^2}{12} + o(x^2). \end{aligned}$$

Показатель степени достаточно представить до $o(x^2)$, то есть $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ до $o(x)$:

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \ln(x + 1 + o(x)) = x + o(x).$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{5x^2}{12} + o(x^2) \right)^{\frac{1}{x^2 + o(x^2)}} = e^{\frac{5}{12}}.$

МИПТ. Ivanova.3.14.

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+2x}}{2x \operatorname{ch} x - \ln(1+\operatorname{sh} x)^2} \right)^{x^2 \operatorname{ctg} x^4}$. Представим показатель степени так, чтобы определить первые значимые члены числителя и знаменателя:

$$x^2 \operatorname{ctg} x^4 = \frac{x^2 \cos x^4}{\sin x^4} = \frac{x^2 (1 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}.$$

Следовательно, основание достаточно представить формулой Маклорена до $o(x^2)$.

$$\begin{aligned} 2x \operatorname{ch} x - \ln(1 + \operatorname{sh} x)^2 &= 2x \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) - \\ &- 2 \ln \left(1 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) = (2x + x^3 + o(x^4)) - \\ &- 2 \left(\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) - \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(x + o(x^2) \right)^3}{3} - \frac{\left(x + o(x) \right)^4}{4} \right) = x^2 + \frac{5x^4}{6} o(x^4). \\ e^{\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+2x} &= \exp \left\{ x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right\} - \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{8} + o(x^4) \right) = \\ &= 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(x + o(x^2) \right)^3 + \frac{1}{24} \left(x + o(x^2) \right)^4 + o(x^4) - \\ &- \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{8} + o(x^4) \right) = x^2 + x^4 + o(x^4). \\ f(x) &= \frac{1 + x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{5x^2}{6} + o(x^2)} = \\ &= (1 + x^2 + o(x^2)) \left(1 - \frac{5x^2}{6} + o(x^2) \right) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2). \\ \lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^{\frac{1+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}} = e^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

МИПТ. Ivanova.3.15.

Найти $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\cos x + x^2 \cdot \sqrt[3]{x + \frac{1}{8}} \right)^{\frac{3}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$.

▷ Так как $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow 0$, то для показателя степени имеем: $\frac{3}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{3\pi}{2x^3}$ при $x \rightarrow 0$. Основание представляем до $o(x^3)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + \frac{1}{2} x^2 \cdot \sqrt[3]{1+8x} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + \frac{1}{2} x^2 \left(1 + \frac{8x}{3} + o(x) \right) = 1 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3). \\ \lim_{x \rightarrow +0} (f(x))^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right)^{\frac{3\pi}{2x^3}} = e^{2\pi}. \end{aligned}$$

МИПТ. Ivanova.3.16. Find $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + \operatorname{ch} x \right)^{\frac{2+\cos x}{x^4}}$

Аналогично примеру 3.15, в представлении косинуса формулой Маклорена в показателе степени на значение предела влияет только первый член. А именно, $\frac{2+\cos x}{x^4} \sim \frac{3}{x^4}$ при $x \rightarrow 0$.

Представим формулой Маклорена основание до $o(x^4)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) + \\ &+ \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \\ \lim_{x \rightarrow +0} (f(x))^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)^{\frac{3}{x^4}} = e^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

K1-19.pr.1 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$.

Функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, являются бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$. Так как $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$, $\arcsin x = x + x^3/6 + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$, то формула Маклорена для знаменателя дроби имеет вид

$$\arcsin x - \sin x = x^3/3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Поэтому числитель дроби следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Используя формулы $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$, $t \rightarrow 0$, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$, получаем $\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} = 1 + \frac{1}{2}(2 \operatorname{tg} x) - \frac{1}{8}(2 \operatorname{tg} x)^2 + \frac{1}{16}(2 \operatorname{tg} x)^3 + o(\operatorname{tg}^3 x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.

Учитывая, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

находим представление формулой Маклорена числителя дроби

$$\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} - e^x + x^2 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Таким образом, дробь представляется в виде

$$\frac{2x^3/3 + o(x^3)}{x^3/3 + o(x^3)}, \quad x \rightarrow 0$$

откуда следует, что искомый предел равен 2.

K1-19.pr.2 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - 1/(1-x) + x^2/2}{\ln((1+x)/(1-x)) - 2x}$.

Используя формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

находим формулу Маклорена для знаменателя дроби:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} - 2x = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Поэтому числитель дроби следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Так как

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

То

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{arctg} x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Заметив, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$, получаем представление формулой Маклорена числителя дроби:

$$e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2} = -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Таким образом, данную дробь можно записать в виде

$$\frac{-7x^3/6 + o(x^3)}{2x^3/3 + o(x^3)}, \quad x \rightarrow 0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $-7/4$.

K1-19.pr.3 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\operatorname{sh}(x/\sqrt{5})) - \sqrt[5]{1-x^2/2}}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{x^2/2}}$.

Используя формулы $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$, $\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$, $t \rightarrow 0$, получаем

$$\operatorname{ch}(\sin x) = 1 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} \right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

Учитывая, что $e^{x^2/2} = 1 + x^2/2 + x^4/8 + o(x^4)$, находим формулу Маклорена для знаменателя дроби:

$$\operatorname{ch}(\sin x) - e^{x^2/2} = -\frac{1}{4}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

Числитель дроби следует представить формулой Маклорена с $o(x^4)$. Так как

$$\operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right)^3 + o(x^4) = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x^3}{30\sqrt{5}} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4), \quad t \rightarrow 0,$$

то

$$\begin{aligned} \cos \left(\operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{75} \right) + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{25} + o(x^4) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{10} - \frac{x^4}{200} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Используя формулу $(1+t)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}t - \frac{2}{25}t^2 + o(t^2)$, $t \rightarrow 0$, получаем

$$\sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{10} - \frac{x^4}{50} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

Итак,

$$\cos \left(\operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) - \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{3}{200}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

и поэтому заданная дробь представляется в виде

$$\frac{3x^4/200 + o(x^4)}{-x^4/4 + o(x^4)}, \quad x \rightarrow 0,$$

откуда следует, что искомый предел равен $-3/50$.

K1-19 .pr.4

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + x^3/6}{x - \operatorname{th} x}$.

Так как $\operatorname{th} x$ - нечетная функция и $\operatorname{th} x = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, то $\operatorname{th} x = x + a_3x^3 + o(x^4)$. Используя формулы $\operatorname{sh} x = x + x^3/6 + o(x^4)$, $\operatorname{ch} x = 1 + x^2/2 + o(x^3)$ $x + x^3/6 + o(x^4) = (x + a_3x^3 + o(x^4))(1 + x^2/2 + o(x^3))$. Приравнявая коэффициенты при x^3 в этом равенстве, находим

$$1/6 = a_3 + 1/2,$$

откуда $a_3 = -1/3$, и, следовательно,

$$\operatorname{th} x = x - x^3/3 + o(x^4), \quad x - \operatorname{th} x = x^3/3 + o(x^4).$$

Поэтому числитель дроби следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Заметим, что

$$\left(\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right)' = 1/\sqrt{1+x^2}$$

где

$$1/\sqrt{1+x^2} = 1 - x^2/2 + o(x^3)$$

Поэтому

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - x^3/6 + o(x^4)$$

и числитель дроби есть (x^4) . Таким образом, дробь представляется в виде

$$\frac{o(x^4)}{x^3/3 + o(x^4)}$$

откуда следует, что искомый предел равен нулю. Приимер

K1-19.пр .5 Find $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x)^{\operatorname{ctg} x^3}$.

Так как $\operatorname{ctg} x^3 = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} = \frac{1}{x^3 + o(x^3)}$, $x \rightarrow 0$, то функцию $f(x) = \cos(xe^x) - \ln(1-x) - x$ следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Используя равенства

$$xe^x = x + x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0, \quad \cos t = 1 - t^2/2 + o(t^3), \quad t \rightarrow 0,$$

$$-\ln(1-x) = x + x^2/2 + x^3/3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

получаем

$$f(x) = 1 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$(f(x))^{\operatorname{ctg} x^3} = \left(1 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right)^{1/(x^3 + o(x^3))}, \quad x \rightarrow 0$$

откуда следует, что искомый предел равен $e^{-2/3}$.

K1-19.пр.6 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{x + \sin x}\right)^{1/(1-\cos x)}$

Используя формулы

$$1 - \cos x = x^2/2 + o(x^2), \quad \operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^3)$$

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0$$

получаем

$$\left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{x + \sin x}\right)^{1/(1-\cos x)} = \left(\frac{2x + 2x^3/3 + o(x^3)}{2x - x^3/6 + o(x^3)}\right)^{1/(1-\cos x)} = \left(\frac{1 + x^2/3 + o(x^2)}{1 - x^2/12 + o(x^2)}\right)^{1/(x^2/2 + o(x^2))}$$

откуда следует, что искомый предел равен $e^{2(1/3 - (-1/12))}$, т. е. равен $e^{5/6}$.

K1-19 .пр.7

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x) + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2)^{1/(x^2(\sqrt{1+2x}-1))}$ А Используя формулы

$$\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/4! + o(t^5), \quad t \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^4), \quad \arcsin x = x + x^3/6 + o(x^4),$$

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

получаем

$$f(x) = \cos(\sin x) + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = 1 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2(\sqrt{1+2x}-1)} = \frac{1}{x^3 + o(x^3)}$$

Следовательно, искомый предел есть

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)\right)^{1/(x^3 + o(x^3))} = 1.$$

Пример

18.1.3 Problems about Limits: Warmup 2

K1-19 .пр.8

Найти $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{3-x} + \ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)}$.
 Полагая $x-2 = t$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{3-x} + \ln(x/2))^{1/\sin^2(x-2)} = \lim_{t \rightarrow 0} (\sqrt{1-t} + \ln(1+t/2))^{1/\sin^2 t}.$$

Так как $\sin^2 t = t^2 + o(t^2)$, $\sqrt{1-t} = 1 - t/2 - t^2/8 + o(t^2)$, $\ln(1+t/2) = t/2 - t^2/8 + o(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, то $(\sqrt{1-t} + \ln(1+t/2))^{1/\sin^2 t} = (1 - t^2/4 + o(t^2))^{1/(t^2 + o(t^2))}$ откуда следует, что искомый предел равен $e^{-1/4}$.

K1-19 .пр.9

Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{7/4} (\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x})$. Δ Используя равенство

$$\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x} = x^{1/4} (\sqrt[4]{1+1/x} + \sqrt[4]{1-1/x} - 2)$$

и полагая $1/x = t$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{7/4} (\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1+t)^{1/4} + (1-t)^{1/4} - 2}{t^2}$$

Так как

$$(1+t)^{1/4} = 1 + \frac{t}{4} - \frac{3}{32}t^2 + o(t^2)$$

То

$$(1+t)^{1/4} + (1-t)^{1/4} - 2 = -\frac{3}{16}t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow +0$$

откуда следует, что искомый предел равен $-3/16$.

K1-19.пр .10 Find $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x \arcsin x} \right)$.

Используя формулы

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^4), \quad \operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + o(x^4),$$

$$\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^4), \quad \arcsin x = x + x^3/6 + o(x^4),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x \arcsin x} &= \frac{\operatorname{tg} x \arcsin x - \sin x \operatorname{arctg} x}{\sin x \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} x \arcsin x} = \\ &= \frac{(x + x^3/3)(x + x^3/6) - (x - x^3/6)(x - x^3/6) + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что искомый предел равен 1.

K1-19.1 Find the limit (1-18).

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2 \operatorname{sh} x}{x^3};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 3x - \cos 3x - 2}{x^4};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x};$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2}.$

K1-19.2

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \arcsin 2x}{x^3};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x};$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)};$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}.$

K1-19.2

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \arcsin 2x}{x^3};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x};$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)};$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}.$

K1-19.3

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e(1-x/2)}{x^2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos((\pi/2) \cos x)}{\sin(\sin^2 x)}$.

K1-19.4

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x+9x^2/2}}{x^3}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) - 2 \sin x + 2x \cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+\sin x} - (1/2) \ln(1+x^2) - x}{\operatorname{tg}^3 x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x \ln \cos x} - (1+4x)^{1/4} + x - 3x^2/2}{x \sin x^2}$.

K1-19.5

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + \ln(1-x) - 1}{2 - \sqrt{4+x^3}}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} + \ln \cos x - x}{\sqrt[3]{1-x^3} - 1}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \operatorname{sh} x} + \ln \cos x - x}{1 - \sqrt[3]{1-x^3}}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + \sin x) - 3 \arcsin x + 5x^2/2}{\sqrt[3]{8+x^3} - 2}$;

K1-19.8

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+2x} - x(x+x^2)}{x - \operatorname{arctg} x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x/2) - \sqrt{1+\sin x} + 1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg}(x/2)} - \sqrt{1+\sin x} - x^2/4}{\arccos x - \operatorname{arctg} x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x+x^2} + \sin \ln(1-x) - e^{-7x^2/6}}{x - \operatorname{arctg} x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh} 2x} - \cos x - x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} \sin x}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-e^{2x}} - \cos 2x + \ln(1+x)}{\sin x - \arcsin \operatorname{tg} x}$.

K1-19.9

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\operatorname{tg} x} - \sin^2 x - x}{x + x^3 - \operatorname{tg} x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - x \operatorname{ctg} x - x^2/3}{x \cos x - \sin x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-2x} - x}{x^2 \operatorname{tg} x - e^{-x^3} + 1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(\sin x + \sqrt{1+x^2})}{\operatorname{tg} x - x \cos^2 x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x-1} - 1/(1-x)}{\ln((1+x)/(1-x)) - 2 \sin x}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \ln(x + \sqrt[3]{1+x^2}) - x^2/6}{\operatorname{th}(x-x^3) - x}$.
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\operatorname{tg} x} - e^{\sqrt{1+2x}}}{\sin(x^2/7) - (x/3) \ln(1-x)}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{x + \operatorname{tg} x - \sin 2x}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \sin x - x \cos x}{e^x + \ln(1-x) - 1}$.

K1-19.11

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x\sqrt{1+x} - 1}{\sin x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sin x - x \cos x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-x^2} - \ln(1+\sin x) - 1}{x \cos x - \operatorname{sh} x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln \cos x + x \operatorname{sh} x}{\sin(x^2/2) - \operatorname{sh}(x^2/2)}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \operatorname{tg} x - x \cos \sin x}{\ln(1+x) - x\sqrt{1-x}}$;

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x e^x}{x \sqrt{1-x^2} - \operatorname{tg} x}.$$

K1-19.12

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} + e^{\operatorname{tg} x} - 2}{\sin x / x - \cos x - x^2 / 3}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x - x \ln(1+x)} + (3/4) \operatorname{tg} x^2 - 1}{x e^x - \arcsin x - x^2}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x + \ln(1 - \sin x) - \sin \ln(1+x)}{(1-2x)^{-1/2} - e^x - x^2}; \\ 4) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^{-1/2} - (1+2x)^{-1/2} - \operatorname{arctg} 2x}{e^{-x} + \ln(1 + \arcsin x) - 1}; \\ 5) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \ln(1-x) + x^3 / 3)}{\ln \operatorname{ch} x - x^2 / 2}; \\ 6) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{e^{\operatorname{ch} x} - (1+2x)^{1/2} - x^2}. \end{aligned}$$

K1-19.13

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{x^3/4}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2 \cos x}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{tg} x}{x(\operatorname{ch} x - e^{x^2})}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\ln(e+x)} - e^{x/(3e)} + x^2 / (3e^2)}{x \operatorname{ch} x - \sin x}; \\ 4) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - \arcsin x}{\operatorname{sh}(x-x^2) - \ln \sqrt{1+2x}}; \\ 5) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(2x/(2+x^4)) + \cos(2x/(2-x^4)) - 2e^{x^4/2}}{\operatorname{tg} \sqrt{1+x^4} - \operatorname{tg} \sqrt{1-x^4}}; \\ 6) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\cos x} - e^{2+x^2} + (3e^2/2) \sin x^2}{\ln(1+x^2) - (\operatorname{arctg} x)^2}. \end{aligned}$$

K1-19.15

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x^2}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x} - x^3 / 2}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x / x) + \operatorname{ch}(x/\sqrt{3}) - 1}{\operatorname{sh} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg} \sin x - \operatorname{tg} \operatorname{sh} 3x}{\sqrt{1+x \sin x^3} - x^2 \ln(1-16x/9)}; \\ 4) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{1+x^3} - \sin 1}{\sqrt[5]{1-2x \ln \cos x} - 1}; \\ 5) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(3+x^2) - \operatorname{arctg}(2+\cos x)}{\ln(1+x) - e^x + 1}; \\ 6) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(1/2+x^2) - \arcsin(\cos x - 1/2)}{1 + \ln(1+x^2) - \cos x}. \end{aligned}$$

K1-19.16

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1+2x^2}}{\operatorname{tg}^4 x}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8-x^4} - 2}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + x^2/2)}{e^{-x^2/2} - \cos x}; \\ 4) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/(1+x)} - \cos(1-e^{-x}) - \operatorname{arctg} x}{x^4}; \\ 5) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{e^x - \sqrt{1+2x}} - \sqrt[3]{x^6 - x^7}}{(1/e)(1+x)^{1/x} - \sqrt{1-x+7x^2/6}}; \\ 6) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{\ln(1+x) + \cos x + 4x^3/3} - \sqrt[3]{1+3x}}{\sqrt{1-x+x^2/2} - (\cos x)^{1/x}}. \end{aligned}$$

K1-19.17

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xe^x) + \sin(xe^{-x}) - 2x - 2x^3/3}{x^5}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cos x) + x \ln(1+2x^2/3) - x}{\sqrt{1+x^5} - 1}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2/2} - e^{-x^2/6}}{x^2 \ln(1+x) - (\operatorname{tg} x^3) \cos \operatorname{sh}(x/2)}; \\ 4) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + x \sin x) - (x^2/2)e^x}{(x/2) \sqrt[3]{1-x} + \sqrt{1+x^2/3} - \sin(x/2) - 1}. \end{aligned}$$

K1-19.18

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt[3]{1-4x^2}}}{(1/x) \arcsin 2x - 2 \operatorname{ch} x^2},$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+2x} - \operatorname{tg} x) + (1/2) \operatorname{arctg} x^2}{xe^{x^2} - \sin x},$

K1-19.19

Найти числа $\alpha \in R$ и $n \in N$ такие, чтобы существовал конечный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x^n} - \cos x^2}{x^8}$. Найти предел $(20 - 42)$.

K1-19.20

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{1/\sin^2 x}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} 3x} \right)^{1/x^2}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2}}{\operatorname{ch} 3x} \right)^{1/x^2}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(e+x) - \frac{x}{e} \right)^{1/\sin x}$

K1-19.21

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{x} \right)^{1/x^2}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\arcsin x} \right)^{1/x^2};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x} \right)^{1/x^2}.$

K1-19.22

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2(\sqrt{1+x}-1)} \right)^{\operatorname{ctg} x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\ln \operatorname{ch} x} \right)^{1/x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} e^{x/(1+x)} - \frac{1}{\sin x} \right)^{1/\operatorname{arctg} x};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 3x + \cos 4x - \cos 2x}{\ln \sqrt{1+3x} - \ln \sqrt{1-3x}} \right)^{1/\sin x}.$

K1-19.23

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 6 \frac{x - \sin x}{x^2} \right)^{2(\operatorname{ch} x - 1)/x^2};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^2 - (1+2x)^{1/x}}{2xe^2} \right)^{1/x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{2\sqrt{1+2x} - 2\sqrt[3]{1+3x}} \right)^{1/x}.$

K1-19.24

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x} + \ln(1-x))^{1/x^2};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg}(x/3) + 2 - \sqrt[3]{1+x})^{\operatorname{ctg}^2 x};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{(1/3)\sin x} + \sqrt[3]{1-\operatorname{tg} x} - 1)^{1/\ln(1+x^2)};$

K1-19.26

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sh} x} \right)^{1/\sin^2 x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x^2 - \sqrt{1+x^2}}{\operatorname{ch} x - 1} \right)^{1/x^2}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{e^x - \ln(1+x)} \right)^{1/x^2};$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x^2}} \right)^{1/x^2}.$$

K1-19.27

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\arcsin x)^2 - x^2}{\sin^2(x^2/\sqrt{3})} \right)^{1/\sin^2 x}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(2x/(2-x^2)) - x}{x \sin(x^2/6)} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - (\operatorname{arctg} x)^2}{x^2 \sin(2x^2/3)} \right)^{1/x^2}; \\ 4) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \arccos(1-2x^2) - 6x}{x^3} \right)^{1/x^2}. \end{aligned}$$

K1-19.28

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2e^{x-x^2} - 2}{2x - x^2} \right)^{(\sin x)/x^3}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x} - (1/2) \operatorname{sh} x} \right)^{1/\arcsin x^2}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sh}(x + \sin x)}{\sin x + \arcsin x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}. \end{aligned}$$

K1-19.29

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{x}{\ln(e^2 - xe^2)} \right)^{1/x^2};$$

K1-19.33

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\operatorname{tg} x} + \ln(1-x))^{\operatorname{ctg} x^3}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + \sin x} - (1/2) \operatorname{tg} x + x^2/8)^{\operatorname{ctg} x^3}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 - 2x + 3x^2} + x(1 - \operatorname{sh} x))^{\operatorname{ctg}^3 x}; \\ 4) & \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} - x^2/2 + \cos x - \sqrt{1+2x})^{1/\operatorname{tg} x^3}. \end{aligned}$$

K1-19.34

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1-x) + e^{x \cos x})^{1/(x^2(\sqrt{1+3x}-1))}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} ((2/\pi) \arccos x + \sin(2x/\pi))^{1/(\sqrt{1+2x^3}-1)}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{th}(xe^x) + (1/2) \ln(1-2x))^{1/x^3}. \end{aligned}$$

K1-19.35

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\operatorname{arctg} x} - 1/(1-x) + \cos x + x^2)^{1/\sin x^3}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{sh} 2x)^{1/\ln^3(1-x)}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} - x^2/2 - x \cos x)^{1/\ln^3(1-x/2)}. \end{aligned}$$

K1-19.36

$$\begin{aligned} 1) & \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} x} - (x/3)e^{-x/3})^{1/(x \ln \cos x)}; \\ 2) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-x}}{1-x} + \frac{1}{2} (\ln \sqrt{1+2x} - \operatorname{tg} x) \right)^{1/(x(\cos x - 1))}; \\ 3) & \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x-x^2} - x \sqrt[3]{1-3x/2})^{1/(\operatorname{tg} x - x)}. \end{aligned}$$

K1-19.37

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x} + x^2/2 - \sin x)^{1/(\operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} x)}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x + \operatorname{arctg} x)^{1/(\operatorname{sh} x - \sin x)}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1 - x} \ln(1 + x) - x/(1 + x))^{1/(\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x)}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x) + (1/2) \operatorname{arctg} x^2 + 4x^3)^{1/(\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x)}$.

18.1.4 Problems about Limits 1**K1-19.38**

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin 2x} - 2x - 2x^2)^{1/\sin x^4}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} + \ln(1 - x) + x^3/3)^{1/x^4}$;

K1-19.42

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x + x^2) + 2 \arcsin(xe^x) - 2x)^{\operatorname{ctg}^3 x + 1/(3x^3)}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin x^3)^{e^x/(x \sqrt[3]{\cos x - \sin x + \operatorname{tg}^3 x})}$.

K1-19.43

Доказать, что:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/x^3} (\arccos \operatorname{sh} x + x)^{\operatorname{ctg} x^3} = e^{-2/(3\pi)}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{2} e^{\pi x^2}\right) + \operatorname{sh}^2 x\right)^{1/x^2} = e^{1+2\sqrt{3}}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \operatorname{arctg}(\operatorname{ch} 3x) + \sin^2 x}{\pi}\right)^{1/x^2} = e^{10/\pi}$. Найти предел (44-60).

K1-19.44

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \ln(1+x)}{x^2} - \frac{2}{(x+1) \operatorname{sh} x}\right)^{\operatorname{ctg} x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6}{\ln(1+3 \sin^2 x)} - \frac{4}{\ln(2 - \cos 2x)}\right)^{1/x^2}$.

K1-19.54

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sin \pi x)}{\ln(1 + \ln x)}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - e^{\pi x - 2x^2}}{\cos x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{ctg} x + 2x - \pi/2}{(1 - \operatorname{tg} x)^3}$.

K1-19.55

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x(1-x^2)^{1/2} - \cos x \ln(1+x)}{\ln \sin x - \ln x}.$$

K1-19.56

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\arcsin x}\right)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x}\right)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(x+1) \operatorname{sh} x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$.

K1-19.57

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - x \ln(1 + 1/x))$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x((2e)^{1/x} + e^{1/x} - 2)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 \ln(1 + 1/x) - x^2 + x/2)$.

K1-19.58

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x^6+x^5} + \sqrt[6]{x^6-x^5} - 2x}{x \ln(1+x) - x \ln x - x \sin(1/x)};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+x-x} + \cos x \ln x)}{\ln(1+\operatorname{ch} x)};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(\sqrt[3]{x^3+x-x} + \sin x \ln(1+x))}{\ln(1+x+e^{5x})}.$

K1-19.59

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1/x} (x^2 - x + 2) - \sqrt{x^4 + x^2 + 1});$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x^3 - x^2 + x/2 + 1) e^{1/x} - \sqrt[4]{x^{12} - x^9 + 2}).$

K1-19.60

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt[5]{x^5 - x^4});$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x^3 + x) \sin(1/x) - \sqrt[3]{x^6 - 3x^4 + 1});$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x/2 - (x^3 + x + 1) \ln(1 + 1/x));$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} \left(1 - \frac{x^2+1}{x} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right).$

One-sided limits $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \text{ при } x \rightarrow 0$$

Область определения функции: $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

(?? вроде тема выучена, чуть практики осталось)

one-sided limits at point $x = 0$ for the simplest piecewise continuous function

Найти односторонние пределы в точке $x = 0$ у кусочно-непрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

Решение Найдем правый предел $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ заданной функции. Если x стремится к нулю справа, то он остается большим, чем это значение. А для $x > 0$ функция $f(x)$ задается следующим аналитическим выражением:

$$f(x) = x - 1, x > 0$$

То есть

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x - 1) = 0 + 0 - 1 = -1$$

Аналогично левый предел

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} x^2 = (0-0)^2 = 0$$

Ответ $f(0+0) = -1, \quad f(0-0) = 0$

Tasks on the limits of the form $f^n(n)$

(???)

Find $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \left(\sqrt{\frac{2}{n}} \right)$

(Michael Penn)

Можно разложить в ряд косинус, взять первый член, в итоге видим чистый второй замечательный предел. $L = e^{-1}$

Можно прологарифмировать, сделать замену $n \rightarrow 1/x$, получить неопределенность $0/0$, далее дважды по правилу Лопиталя решать, приходим к $\ln L = -1$, отсюда $L = e^{-1}$:

$$\ln(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\cos \left(\sqrt{\frac{2}{n}} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos \sqrt{2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\sqrt{2x})} \cdot (-\sin(\sqrt{2x})) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{2x})}{\sqrt{x} \cos(\sqrt{2x})}$$

(!! отработаю этот метод!)

The tricky limit from the integral (?)

$$\text{Найдите } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{4}{\sqrt[n]{x+3}} \right)^{2n} dx.$$

(тут крутые методы, которые пока что я не вписал в 1ю часть!!! еще раз решу потом.)

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(\frac{4}{\sqrt[n]{x+3}} \right)^{2n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{2n(\ln 4 - \ln(\sqrt[n]{x+3}))\} = \lim_{a \rightarrow 0} \exp\left\{2 \cdot \frac{\ln 4 - \ln(x^a + 3)}{a}\right\} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \exp\left\{-2 \frac{\partial}{\partial a} \ln(x^a + 3)\right\} = \lim_{a \rightarrow 0} \exp\left\{-\frac{2x^a \ln x}{x^a + 3}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \ln x\right\} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \end{aligned}$$

Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} n \binom{2n}{n}^2 \ln^4 \zeta(n) = \frac{1}{\pi}$

Proof by Ankush Kumar Parcha

We know, $\Gamma(m)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m), \forall m \notin \left\{-\frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \binom{2n}{n}^2 \ln^4 \zeta(n) &\Rightarrow \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} n \ln^4 \zeta(n)}{\Gamma^2(n+1)} \Gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &\left(\because \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)} \sim x^\alpha \Big|_{x \rightarrow \infty}, \alpha \in \mathbb{C}\right) \end{aligned}$$

because $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} n^2 \Gamma^2(n) \ln^4 \zeta(n)}{\Gamma^2(n+1)}$ (!! add here cancel signs!)

$$\begin{aligned} \left(\because \prod_{p-\text{prime}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s) \Rightarrow \sum_{p-\text{prime}} \ln\left(\frac{p^s}{p^s-1}\right) = \ln \zeta(s)\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p-\text{prime}} 2^n \ln\left(\frac{p^n}{p^n-1}\right) \right)^4 \\ (f(x) \rightarrow 1 \wedge g(x) \rightarrow \infty)_{x \rightarrow \infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \exp(\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1)g(x)) \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p-\text{prime}} \left(\frac{2^n-1}{p^n-1} + \frac{1}{p^n-1} \right) \right)^4 \\ \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n-1}}_{=0} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p-\text{prime} \setminus \{2\}} \frac{2^n}{p^n-1}}_{=0} \right)^4 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \binom{2n}{n}^2 \ln^4 \zeta(n) = \frac{1}{\pi} = 0 \end{aligned}$$

18.2 Analysis of Expressions

18.2.1 Problems about Continuity of Functions

(чет лень решать, не очень прикладные вроде задачи)

K1-10 .пр.1

Доказать, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$ и непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.
(?? пока не совсем понимаю, в чем сложность задачи???)

Докажем непрерывность $\sqrt{x}$ в точке $x_0 > 0$. Преобразуем и оценим модуль разности:

$$0 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$, а $1/\sqrt{x_0}$ - постоянная, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} = 0.$$

Отсюда следует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = 0$, и поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

Значит, функция $\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 > 0$. Докажем, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$ справа. Пусть ε - произвольное положительное число. Неравенство $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ равносильно неравенству $0 \leq x < \varepsilon^2$. Возьмем $\delta = \varepsilon^2$, тогда из неравенства $0 \leq x < \delta$ следует неравенство $\sqrt{x} < \varepsilon$. Значит, $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} = 0$, и поэтому функция $\sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.

K1-10 .пр.2

Доказать, что функция $y = x^4$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in R$.

Простая задача, просто нужно помнить определение непрерывности и найти приращение функции.

Для любой точки $x_0 \in R$ и любого Δx имеем

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^4 - x_0^4 = 4x_0^3 \Delta x + 6x_0^2 (\Delta x)^2 + 4x_0 (\Delta x)^3 + (\Delta x)^4.$$

Используя теоремы о пределе суммы и произведения функций, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x_0^3 \Delta x + 6x_0^2 (\Delta x)^2 + 4x_0 (\Delta x)^3 + (\Delta x)^4) = 0,$$

следовательно, функция $y = x^4$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in R$.

K1-10 .пр.5

Пусть $a > 1, b > 1$. Доказать, что уравнение

$$a^y + b^y = x$$

задает единственную непрерывную функцию $y(x)$, определенную на $(0; +\infty)$. Δ Функции a^y и b^y строго возрастают и непрерывны на R . Значит, и их сумма строго возрастает и непрерывна на R . Кроме того,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (a^y + b^y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} (a^y + b^y) = +\infty.$$

В силу этого по второй из указанных теорем о непрерывности обратной функции существует функция, обратная к функции $a^y + b^y$, $y \in R$, определенная, строго возрастающая и непрерывная на $(0; +\infty)$. Этот результат можно выразить и иначе: уравнение (1) для любого $x > 0$ имеет и притом единственное решение y , непрерывно зависящее от x и строго возрастающее с ростом x .

K1-10 .пр.6

Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным способом:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \cos x_n, \quad n \in N,$$

сходится и ее предел является решением уравнения $x = \cos x$. Δ Очевидно, x_2 и все члены с большими номерами удовлетворяют условию $0 < x_n \leq 1, n \in N$, т. е. данная последовательность ограничена (рис. 10.4). При $n \geq 3$ преобразуем разность:

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \cos x_n - \cos x_{n-2} = -2 \sin \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \sin \frac{x_n + x_{n-2}}{2}.$$

Поскольку $0 < \frac{x_n + x_{n-2}}{2} \leq 1$, $-1 \leq \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \leq 1$, имеем

$$\sin \frac{x_n + x_{n-2}}{2} > 0, \quad \operatorname{sign} \left(\sin \frac{x_n - x_{n-2}}{2} \right) = \operatorname{sign} (x_n - x_{n-2}).$$

Следовательно,

$$\operatorname{sign} (x_{n+1} - x_{n-1}) = -\operatorname{sign} (x_n - x_{n-2})$$

при $n \geq 3$, а при $n \geq 4$

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} (x_{n+1} - x_{n-1}) &= \\ &= -(-\operatorname{sign} (x_{n-1} - x_{n-3})) = \operatorname{sign} (x_{n-1} - x_{n-3}) \end{aligned}$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{2k-1}\}$ с нечетными номерами. Имеем

$$x_3 = \cos x_2 = \cos \cos 0 = \cos 1 > 0,$$

т. е. $x_3 > x_1$. Отсюда и из (2) по принципу математической индукции следует, что $\{x_{2k-1}\}$ - возрастающая последовательность: $x_{2k+1} > x_{2k-1}, k \in N$. Для подпоследовательности с четными номерами $\{x_{2k}\}$ имеем

$$x_4 = \cos x_3 = \cos \cos 1 < 1,$$

т. е. $x_4 < x_2$; отсюда и из (2) заключаем, что $\{x_{2k}\}$ - убывающая последовательность. Таким образом, подпоследовательности $\{x_{2k-1}\}$ и $\{x_{2k}\}$ ограничены и монотонны, следовательно, они сходятся. Обозначим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = a, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = b$$

Из равенства $x_{2k} = \cos x_{2k-1}, k \in N$, в силу непрерывности функции $\cos x$ следует, что

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos x_{2k-1} = \cos \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} \right) = \cos a,$$

а из равенства $x_{2k+1} = \cos x_{2k}, k \in N$, следует, что

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos x_{2k} = \cos \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} \right) = \cos b,$$

Т. е.

$$b = \cos a, \quad a = \cos b.$$

Заметим, что поскольку $0 \leq x_n \leq 1, n \in N$, то и $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$. Из соотношений (3) для разности $a - b$ имеем

$$a - b = \cos b - \cos a = 2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}.$$

Учитывая, что $0 \leq (a+b)/2 \leq 1$, а следовательно,

$$0 \leq \sin \frac{a+b}{2} \leq \sin 1$$

и что $\left| \sin \frac{a-b}{2} \right| \leq \left| \frac{a-b}{2} \right|$, получаем

$$|a - b| \leq |a - b| \cdot \sin 1.$$

Это возможно лишь, когда $|a - b| = 0$, т. е. $a = b$. Итак, обе подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ сходятся к одному и тому же пределу a , значит, и вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к этому пределу. Из (3) и того, что $a = b$, вытекает, что этот предел является решением уравнения $a = \cos a$.

К1-10.1

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 . Ее приращение Δf является бесконечно малой функцией приращения аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$. Верно ли, что функция f непрерывна в точке x_0 ? Верно ли обратное?

К1-10.2

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 . Сформулировать на "языке $\varepsilon - \delta$ " отрицание того, что: а) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ б) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$.

K1-10.3

а) Пусть функция f определена на промежутке $(a; x_0]$. Сформулировать на "языке $\varepsilon - \delta$ " отрицание того, что f непрерывна слева в точке x_0 . б) Пусть функция f определена на промежутке $[x_0; b)$. Сформулировать на "языке $\varepsilon - \delta$ " отрицание того, что f непрерывна справа в точке x_0 .

K1-10.4

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 . Может ли функция быть непрерывной в точке x_0 справа и быть не непрерывной в ней слева?

K1-10.5

Доказать, что функция $y(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения, если:

- 1) $y = 2x - 1$;
- 2) $y = x^2$;
- 3) $y = \sqrt{x}$;
- 4) $y = 1/x$
- 5) $y = ax + b, a \neq 0$; 6) $y = |x|$; 7) $y = x^3$; 8) $y = \sqrt[3]{x}$ 9) $y = 1/x^2$.

K1-10.6

Доказать, пользуясь неравенством $|\sin x| \leq |x|$, непрерывность функции y в каждой точке области определения, если:

- 1) $y = \sin x$;
- 2) $y = \cos x$; 3) $y = \sin(ax + b)$.

K1-10.7

Сформулировать на "языке $\varepsilon - \delta$ " определение непрерывной: 1) слева; 2) справа в точке x_0 функции; и записать его, используя символы $\exists, \forall$.

K1-10.8

Доказать, что: 1) функция $\sqrt[4]{1-x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 < 1$ и непрерывна слева в точке $x_0 = 1$; 2) функция $x E(x)$ непрерывна справа в каждой точке $x_0 = n, n \in \mathbb{Z}$.

K1-10.9

Доказать, пользуясь свойствами предела и результатами задач 5,6, непрерывность функции $y(x)$ в каждой точке области определения, если:

- 1) $y = \frac{2x-1}{x^2+2}$
- 2) $y = \operatorname{tg} x$
- 3) $y = x^2 + 2 \sin x$
- 4) $y = \sqrt{x} \sin 2x$;
- 5) $y = x^n, n \in \mathbb{N}$
- 6) $y = 1/x^n, n \in \mathbb{N}$.

K1-10.10

Доказать, пользуясь монотонностью функции $y = a^x, x \in \mathbb{R}$, и тем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$ (см. § 8, пример 9 и задачу 60), непрерывность в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ функции $y = a^x, x \in \mathbb{R}$.

K1-10.11

Функция f определена в окрестности точки x_0 , кроме самой точки x_0 . Доопределить функцию f , задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0 , если:

- 1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, x_0 = -1$
- 2) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}, x_0 = 1$
- 3) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, x_0 = 0$
- 4) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x_0 = 0$

K1-10.15

Функция f непрерывна в точке x_0 , и в любой окрестности этой точки имеются как значения x , в которых функция положительна, так и значения x , в которых функция отрицательна. Найти $f(x_0)$.

K1-10.16

Пусть функция определена в окрестности точки x_0 . Сформулировать, используя символы $\exists, \forall$, утверждение, что функция не является непрерывной в точке x_0 .

K1-10.17

Доказать, что функция f не является непрерывной в точке x_0 ; построить график этой функции, если:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$3) f(x) = \operatorname{sign}(x+1), x_0 = -1;$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$5) f(x) = E(x), x_0 = 2.$$

K1-10.18 Rupture points

Найти точки разрыва функции, установить их род, найти скачки функции в точках разрыва 1-го рода, построить график функции:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1/(x-1), & x < 0, \\ (x+1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1-x, & 2 < x \end{cases}$$

$$3) y = \frac{1}{x^2-4}$$

$$4) y = \frac{|x-1|}{x^2-x^3};$$

$$5) y = x - E(x);$$

$$6) y = \frac{1}{x-E(x)}; 7) y = \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x} \quad 8) y = \frac{2 \operatorname{sign}(1-x)}{(\operatorname{sign}(x+1))^2(x+1+(x-1) \operatorname{sign} x)}; 9) y = \frac{1}{\cos x}$$

$$10)$$

$$y = \frac{x}{\sin x}.$$

K1-10.19

Установить, существует или не существует значение a , при котором функция f непрерывна в точке x_0 , если:

$$1) f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$$

K1-10.20

Установить, существуют или не существуют значения a и b , при которых функция f непрерывна на своей области определения, 204 ГЯ.

K1-10.2

Предел и непрерывность функции если:

$$1) f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ ax+b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq 0 \\ x^2+ax+b, & |x| \leq 0 \\ x & |x| > 1 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & |x| \neq 1 \\ a, & x = -1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x/2)}{\sin x}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \quad x \neq 0, \quad x \neq \pi \\ a, & x = 0, \\ b, & x = \pi. \end{cases}$$

K1-10.21

Доказать, что если функция монотонна, то всякая ее точка разрыва является точкой разрыва 1-го рода.

K1-10.22

Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число,} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке.

K1-10.23

Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 0$ и разрывна в остальных точках.

K1-10.24

Доказать непрерывность функции в каждой точке ее области определения:

1) $y = 3x^5 + 1/x^3$

2) $y = \operatorname{sh} x$

3) $y = \sqrt[3]{x^2 - 6x^3}$

4) $y = \frac{\sin x^2}{x^4 + 2x^2}$

5) $y = \cos(x - \sqrt{1 - x^2})$

6) $y = xe^{(\sin x)/x}$.

K1-10.25

Исследовать на непрерывность функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ в точках, где определены эти композиции, если:

1) $f(x) = \operatorname{sign} x, g(x) = 1 + x^2$;

2) $f(x) = \operatorname{sign} x, g(x) = x^3 - x$

3) $f(x) = \operatorname{sign}(x - 1), g(x) = \operatorname{sign}(x + 1)$;

4) $f(x) = \operatorname{sign} x, g(x) = 1 + x - E(x)$.

K1-10.26

Доказать, что многочлен - непрерывная в каждой точке функция.

K1-10.27

Доказать, что функция $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q -ненулевые многочлены, непрерывна в каждой точке x_0 , где $Q(x_0) \neq 0$.

K1-10.28

1) Функция f непрерывна в точке x_0 , а функция g разрывна в точке x_0 . Доказать, что функция $f + g$ разрывна в этой точке.

2) Привести пример разрывных в точке x_0 функций f и g , сумма которых: а) разрывна в точке x_0 ; б) непрерывна в точке x_0 .

K1-10.42

Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$,

$$m = \inf_{(a,b)} f, \quad M = \sup_{(a,b)} f.$$

Доказать, что для любого $y \in (m; M)$ существует $x \in (a; b)$, такое, что $f(x) = y$.

K1-10.43

Доказать, что если функция определена и непрерывна на отрезке, то множество ее значений - отрезок.

K1-10.44

Привести пример разрывной функции, определенной на отрезке и имеющей в качестве множества значений отрезок.

K1-10.45

Привести пример непрерывной функции, которая принимает значения, равные 1 и 3, но не принимает значения 2.

K1-10.46

Пусть функция определена и монотонна на промежутке и множество ее значений - промежуток. Доказать, что эта функция непрерывна.

K1-10.47

Доказать, что уравнение $x^5 - 3x = 1$: 1) имеет хотя бы один корень на $(1; 2)$; 2) имеет не менее трех корней на R .

K1-10.48

Доказать, что: 1) любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень; 2) если многочлен четной степени принимает хотя бы одно значение, противоположное по знаку коэффициенту старшего члена, то он имеет не менее двух действительных корней.

K1-10.49

Доказать, что уравнение $x = y - \varepsilon \sin y$, где $0 < \varepsilon \leq 1$, задает одну непрерывную функцию $y = f(x)$.

K1-10.50

Доказать, что разрывная функция $y = e^{|x|} \operatorname{sign} x$ имеет непрерывную обратную. Найти точки разрыва функции, установить их род, доопределить функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва (57-59).

K1-10.57

1) $y = \frac{x}{x^2 + x - 6}$

2) $y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$

3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$;

4) $y = \frac{1+x}{1+x^3}$;

5) $y = \frac{1/x - 1/(x+1)}{1/(x-1) - 1/x}$

6) $y = \frac{2x-1}{2x^2+3x-2}$; 7) $y = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$.

K1-10.58

- 1) $y = \frac{x}{\cos x}$
- 2) $y = (\sin x) \sin \frac{1}{x}$;
- 3) $y = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}$
- 4) $y = \frac{\cos(\pi x/2)}{x^3 - x^2}$
- 5) $y = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

K1-10.59

- 1) $y = \frac{2}{1-2^x}$;
- 2) $y = \frac{1}{\lg x}$
- 3) $y = \lg(x^2 + 3x)$
- 4) $y = \lg(x-1)^2$
- 5) $y = 2^{1/x}$
- 6) $y = \frac{1}{\ln|x-1|}$; 7) $y = 3^{x/(1-x^2)}$ 8) $y = e^{-1/|x|}$ 9) $y = \ln \ln(1+x^2)$.

K1-10.60

Найти точки разрыва функции, установить их род, найти скачки в точках разрыва 1-го рода:

- 1) $y = \operatorname{sign}(x^2 - 2x - 3)$
- 2) $y = \operatorname{sign} \cos x$;
- 3) $y = (-1)^{E(x)}$;
- 4) $y = (-1)^{E(1/x)}$;
- 5) $y = \arcsin(1/x)$
- 6) $y = \operatorname{arctg}(1/x)$ 7) $y = \operatorname{arcctg}(\frac{1}{x^2})$ 8) $y = \frac{x+1}{\operatorname{arctg}(1/x)}$ 9) $y = \frac{|x|}{\operatorname{arctg} x}$;

10)

$$y = \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$$

11)

$$y = \frac{3^{1/x} + 2^{1/x}}{3^{1/x} - 2^{1/x}}$$

12)

$$y = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

K1-10.61

Доказать, что функция непрерывна в каждой точке своей области определения:

- 1) $y = \sin(x - \lg(\sqrt{x} - 1))$
- 2) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4} \operatorname{ctg} x 2^{\operatorname{tg}(\pi/x)}$
- 3) $y = \frac{x^{-5/3} - \cos \sqrt{x}}{\operatorname{tg} \arcsin |x|}$.

K1-10.63

Выяснить, можно ли доопределить функцию в точке разрыва x_0 так, чтобы она стала непрерывной в этой точке, если:

- 1) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}, x_0 = 0$;
- 2) $y = 2^{-2^{1/(1-x)}}, x_0 = 1$
- 3) $y = \frac{1}{x} e^{-1/x^2}, x_0 = 0$;
- 4) $y = \frac{\operatorname{th}(\sqrt{x}-1)}{x^2-1}, x_0 = 1$;
- 5) $y = 2^{-E(1/x)}, x_0 = 0$.

K1-10.64

Исследовать на непрерывность и построить график функции f , если:

1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$;

2) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n+1}}$

3) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n x$

4) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}$

5) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$

6) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + x e^{nx}}$ 7) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$; 8) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x))$ 9) $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}$;

10)

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + x) \operatorname{tg} xt.$$

K1-10.65

В каких точках непрерывна функция

$$y(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x - \text{иррациональное число,} \\ 0, & x - \text{рациональное число?} \end{cases}$$

K1-10.66

Пусть

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{иррациональное число,} \\ 1/q, & x = p/q, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где p/q - несократимая дробь (эту функцию называют функцией Римана). Доказать, что: 1) эта функция непрерывна в каждой иррациональной точке; 2) каждая рациональная точка является для данной функции точкой разрыва 1-го рода.

K1-10.77

Функция f непрерывна на интервале $(a; b)$ (конечном или бесконечном), и существуют конечные $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$. Доказать, что функция f ограничена на $(a; b)$.

K1-10.78

1) Доказать, что функция

$$y = \begin{cases} (x+1)2^{-(1/|x|+1/x)}, & x \neq 0, \quad |x| \leq 2 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

принимает все значения между $f(-2)$ и $f(2)$, но разрывна. Построить график этой функции. 2) Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

принимает на любом отрезке $[0; a]$ все промежуточные значения между $f(0)$ и $f(a)$, но не является непрерывной на $[0; a]$.

K1-10.79

Функция f определена на отрезке $[a; b]$ и обладает следующим свойством: для любых $x_1, x_2 \in [a; b]$ и для любого числа C , лежащего между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, существует точка $\xi \in (x_1; x_2)$ такая, что $f(\xi) = C$. 1) Указать функцию, обладающую таким свойством, но не являющуюся непрерывной на $[a; b]$. 2) Доказать, что функция, обладающая указанным свойством, не может иметь точек разрыва 1-го рода.

K1-10.80

Доказать, что если функция определена и непрерывна на промежутке, то множество ее значений - промежуток (т. е. отрезок, или интервал, или полуинтервал).

K1-10.81

Привести пример функции, непрерывной на интервале, множеством значений которой является: 1) отрезок; 2) интервал; 3) полуинтервал.

K1-10.82

Пусть функция, определенная на отрезке $[a; b]$, непрерывна и обратима. Доказать, что эта функция строго монотонна на $[a; b]$.

K1-10.95

Пусть функция f непрерывна на R , $A \subset E(f)$, $f^{-1}(A) = \{x \in R | f(x) \in A\}$. Доказать, что: 1) если A замкнуто, то и $f^{-1}(A)$ замкнуто; 2) если A открыто, то и $f^{-1}(A)$ открыто.

K1-10.96

Множество B называют плотным в множестве A , если замыкание B содержит A , т. е. $\bar{B} \supset A$. Пусть функция f непрерывна на X , множество A плотно в X , $f(X)$ - множество всех значений функции $f(x)$ при $x \in X$, $f(A)$ - множество всех значений функции при $x \in A$. Доказать, что $f(A)$ плотно в $f(X)$.

K1-10.97

1) Существует ли непрерывное отображение: а) отрезка на интервал; б) интервала на отрезок? 2) Построить взаимно однозначное отображение отрезка на интервал.

K1-10.98

1) Доказать, что функция, определенная на R , не может быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных. 2) Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках отрезка $[0; 1]$ и разрывная во всех его иррациональных точках?

K1-10.99

Доказать, что уравнение $x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ имеет единственный корень; найти этот корень с точностью до 0,1.

K1-10.100

Доказать, что уравнение $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ имеет два (и не более) действительных корня.

K1-10.101

Доказать, что уравнение

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{2k+1} + c = 0$$

где $a_k \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), $a_n > 0$, имеет лишь один действительный корень.

K1-10.104

Доказать, что уравнение имеет и притом единственное решение:

- 1) $x \cdot 2^x = 1$;
- 2) $xe^x = 2$;
- 3) $x = \varepsilon \sin x + a$, $0 < \varepsilon < 1$
- 4) $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, $a \neq 0$.

K1-10.105

Доказать, что уравнение $x = a \sin x + b$, где $0 < a < 1$, $b > 0$, имеет по крайней мере один корень на $[0; a + b]$.

K1-10.106

Доказать, что уравнение $10^{x-1} = x$ имеет только один корень $x_0 \neq 1$.

K1-10.107

Доказать, что уравнение $2^x = 4x$ имеет по крайней мере два действительных корня.

K1-10.108

Доказать, что уравнение $x \sin x - 0,5 = 0$ имеет бесконечно много решений.

K1-10.109

1) Доказать, что существует бесконечно много функций, определенных на $(a; b)$ и удовлетворяющих уравнению

$$y^2 = 1.$$

2) Пусть f - непрерывная и положительная на $(a; b)$ функция. Доказать, что существует единственная непрерывная на $(a; b)$ функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$y^2 = f(x)$$

и условию, что $\varphi(x_0) > 0$ в некоторой точке $x_0 \in (a; b)$. 3) Сколько существует непрерывных на R функций, удовлетворяющих уравнению

$$y^2 = (x^2 - 1)^2?$$

4) Сколько существует непрерывных на отрезке $[0; n]$, $n \in N$, функций, удовлетворяющих уравнению

$$y^2 + 2y + \cos^2 \pi x = 0?$$

1

K1-10.110

Доказать, что существует единственная непрерывная функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$y = \operatorname{arccotg} xy, \quad x \in R.$$

1

K1-10.115

1) Найти все непрерывные на R функции f , удовлетворяющие для любых $x, y \in R$ равенству $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 2) Привести пример разрывной функции f , удовлетворяющей для любых $x, y \in R$ равенству $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 116.- Найти все непрерывные на R функции, удовлетворяющие для любых $x, y \in R$ равенству $f(x+y) = f(x)f(y)$. 1

K1-10.117

Найти все непрерывные на $(0; +\infty)$ функции, удовлетворяющие для любых $x, y \in (0; +\infty)$ равенству:

- 1) $f(xy) = f(x) + f(y)$;
- 2) $f(xy) = f(x)f(y)$. 1

K1-10.118

Найти все непрерывные на R функции, удовлетворяющие для любых $x, y \in R$ равенству

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

и условию:

- 1) $f(x) \leq 1$;
- 2) $f(x) \geq 1$. 1

K1-10.119

Найти все непрерывные на R решения функционального уравнения

$$f(x + f(x)) = f(x), \quad x \in R.$$

1

K1-10.120

Функция f определена и непрерывна на R , и для любых $x, y \in R$ верно равенство

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

Доказать, что f -линейная функция, т. е. существуют a и b такие, что $f(x) = ax + b$. 1

K1-10.121

Доказать, что периодическая, непрерывная на всей числовой оси функция, отличная от постоянной, имеет наименьший положительный период. Привести пример периодической функции, определенной на всей числовой оси и отличной от постоянной, которая не имеет наименьшего положительного периода. 1

K1-10.122

Пусть f и g - непрерывные, периодические с периодом T функции и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Доказать, что $f = g$.
1

K1-10.136

Функция f монотонна, непрерывна на $[0; 1]$ и $0 \leq f(x) \leq 1$ для любого $x \in [0; 1]$. Доказать, что для любого $a_1 \in [0; 1]$ последовательность $a_1, a_{n+1} = f(a_n), n \in N$, сходится к одному из решений уравнения $f(x) = x$.

K1-10.137

Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$, и пусть определена последовательность $\{x_n\} : x_0 \in [a; b], x_n = f(x_{n-1}), n \in N$ (т. е. для любого $n \in N$ $f(x_{n-1}) \in [a; b]$). Доказать, что: 1) если f возрастает, то $\{x_n\}$ - монотонная последовательность и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ такой, что $c = f(c)$; 2) если f убывает, то $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ - монотонные подпоследовательности, имеющие пределы. Получить уравнения для этих пределов.

K1-10.138

Функция f строго возрастает, а функция g строго убывает на $[a; b]$ и $E(f) \cap E(g) \neq \emptyset$. 1) Доказать, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет и притом единственное решение. 2) Пусть $x_0 \in [a; b]$ таково, что $f(x_0) \in E(g)$, и для любого $n \in N$ уравнение $g(x_n) = f(x_{n-1})$ имеет решение x_n , т. е. определена последовательность $\{x_n\}$. Доказать, что подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ сходятся, каждая к одному из решений уравнения $g^{-1}(f(x)) = f^{-1}(g(x))$. 1

K1-10.139

Для последовательности $\{x_n\}$, заданной рекуррентным способом: $x_1 = 1/2, x_{n+1} = f(x_n), n \in N$, где

$$f(x) = \begin{cases} (2-3x)/5, & x < -1/6 \\ -3x, & |x| \leq 1/6 \\ -(2+3x)/5, & x > 1/6 \end{cases}$$

найти пределы подпоследовательностей $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$. Построить график функции f и показать на рисунке построение пяти первых членов последовательности.

K1-10.143

1) Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} x = ax$, $a > 0$, имеет на каждом интервале $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n), n \in N$, одно решение x_n . 2) Пусть x_n - решение уравнения $\operatorname{tg} x = ax, a > 0$, из интервала $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n), n \in N$. Доказать, что при всех достаточно больших $n \in N$

$$0 < \frac{\pi}{2} + \pi n - x_n < \frac{2/a}{\pi/2 + \pi n + \sqrt{(\pi/2 + \pi n)^2 - 4/a}}$$

3) Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$, где последовательность $\{x_n\}$ определена в 1) и 2).

K1-10.144

Для последовательности, заданной рекуррентным способом, доказать существование предела и найти его:

- 1) $x_1 \in R, x_{n+1} = \sin x_n, n \in N$
- 2) $x_1 = 0, x_{n+1} = x_n - \sin x_n + 1/2, n \in N$
- 3) $x_1 = \pi/2, x_{n+1} = x_n + \cos x_n - 1/2, n \in N$
- 4) $x_1 \in R, x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n, n \in N$
- 5) $x_1 = 0, x_{n+1} = x_n - \operatorname{arctg} x_n + \pi/4, n \in N$
- 6) $x_1 = 2, x_{n+1} = 1 + \ln x_n, n \in N$

K1-10.145

1) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. 2) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, x_n \neq 0$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = e$.

K1-10.146

Пусть $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$. Исследовать на сходимость последовательность

$$\left\{ \left(\frac{a_1 n + b_1}{a_2 n + b_2} \right)^n \right\}$$

и найти предел, если он существует.

K1-10.147

Используя непрерывность соответствующих функций, вычислить предел последовательности:

- 1) $\left\{ \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \right\}$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in R$;
- 2) $\left\{ \left(\cos \frac{x}{n} + \lambda \sin \frac{x}{n}\right)^n \right\}$, $x, \lambda \in R$
- 3) $\left\{ \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \right\}$, где $a > 0, b > 0$
- 4) $\left\{ \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 + \frac{2a}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{ka}{n}\right) \right)^n \right\}$, где $k \in N, a \in R$;
- 5) $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \right\}$; 6) $\left\{ \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right\}$; 7) $\left\{ \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right) \right\}$; 8) $\left\{ n - \frac{1}{\sin(1/n)} \right\}$ 9) $\{n - \operatorname{ctg} \frac{1}{n}\}$

10)

$$\{(\cos(x/\sqrt{n}))^n\}.$$

K1-10.148

Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $0 < a_n < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos b_n = a_n$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sqrt{1-a_n}}$.

18.2.2 Problems of uniform continuity of functions

(пар 12 т.1 кудрявцев)

(тут такое чисто задротство, для выхода на нормальный уровень по 1му семестру важно, в остальном вряд ли это нужно, потом в теории укажу применения.)

K1-12 .пр.1

Доказать, что функция $y = \sin x$ равномерно непрерывна на R . Δ Пусть x', x'' - произвольные числа; оценим модуль разности:

$$|\sin x' - \sin x''| = \left| 2 \sin \frac{x' - x''}{2} \cos \frac{x' + x''}{2} \right| \leq |x' - x''|,$$

так как

$$\left| \sin \frac{x' - x''}{2} \right| \leq \frac{|x' - x''|}{2}, \quad \left| \cos \frac{x' + x''}{2} \right| \leq 1.$$

Пусть ε - произвольное положительное число. Возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда для любых $x' \in R, x'' \in R$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ в силу (1) следует неравенство

$$|\sin x' - \sin x''| < \delta = \varepsilon.$$

Таким образом, функция $y = \sin x$ равномерно непрерывна на R .

К1-12 .пр.2

Доказать, что функция $y = 1/x$: 1) равномерно непрерывна на любом промежутке $[a; +\infty)$, где $a > 0$; 2) не является равномерно непрерывной на любом промежутке $(0; a]$. 1) Пусть $x', x'' \in [a; +\infty), a > 0$; тогда

$$\left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \frac{|x' - x''|}{x' \cdot x''} \leq \frac{1}{a^2} |x' - x''|,$$

так как $x' \geq a > 0, x'' \geq a > 0$. Пусть ε - произвольное положительное число; возьмем $\delta = a^2 \varepsilon$, тогда для любых x', x'' из $[a; +\infty)$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует, что

$$\left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| < \frac{1}{a^2} \delta = \varepsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность функции $1/x$ на промежутке $[a; +\infty), a > 0$.

2) Пусть $x', x'' \in (0; a]$, где $a > 0$. Из равенства

$$\left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \frac{|x' - x''|}{x' x''}$$

видно, что величина $|1/x' - 1/x''|$ будет расти, если при сколь угодно малой, но фиксированной разнице $|x' - x''|$ приближать меньшее из чисел x' или x'' к нулю. Возьмем $x'' = x'/2$; тогда $|x' - x''| = x'/2$,

$$\left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \frac{1}{x'}.$$

Так как $0 < x' < a$, то

$$\left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| > a.$$

Чтобы удовлетворить неравенствам $x' < a$ и $|x' - x''| = x'/2 < \delta$, достаточно взять $x' = \delta a / (\delta + a)$. Итак, возьмем $\varepsilon = a$ и для произвольного положительного числа δ возьмем $x' = \delta a / (\delta + a), x'' = \delta a / 2(\delta + a)$. Тогда

$$|x' - x''| = \frac{\delta a}{2(\delta + a)} < \delta, \quad \text{а} \quad \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| > a = \varepsilon.$$

Следовательно, функция $y = 1/x$ не является равномерно непрерывной на $(0; a]$.

К1-12 .пр.3

Доказать, что функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$. Δ Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на $[0; +\infty)$, в том числе и на $[0; 2]$. Значит, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на $[0; 2]$.

Докажем, что данная функция равномерно непрерывна на $[1; +\infty)$. Пусть $x', x'' \in [1; +\infty)$; тогда

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \leq \frac{1}{2} |x' - x''|.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = 2\varepsilon$, тогда для любых $x', x'' \in [1; +\infty)$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует неравенство $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < 0,5\delta = \varepsilon$. Значит, функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[1; +\infty)$.

Докажем, что эта функция равномерно непрерывна на всем промежутке $[0; +\infty)$. Пусть ε - произвольное положительное число. В силу равномерной непрерывности на $[0; 2]$

$\exists \delta_1 > 0 \forall x' \in [0; 2] \forall x'' \in [0; 2] (|x' - x''| < \delta_1 \rightarrow |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \varepsilon)$, (2) а в силу равномерной непрерывности на $[1; +\infty)$ $\exists \delta_2 > 0 \forall x' \in [1; +\infty) \forall x'' \in [1; +\infty) (|x' - x''| < \delta_2 \rightarrow |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \varepsilon)$. Возьмем за δ наименьшее из трех чисел δ_1, δ_2 и 1, т. е. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$. Тогда для любых $x', x'' \in [0; +\infty)$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ будет, во-первых, следовать (так как $\delta < 1$), что x' и x'' оба принадлежат либо $[0; 2]$, либо $[1; +\infty)$, а во-вторых, отсюда в силу либо (2), либо (3) будет следовать, что $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \varepsilon$.

Значит, функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$.

И р и мер

K1-12.пр .4 Continuity module for simple functions

Найти на $(0; +\infty)$ модули непрерывности функций и исследовать с их помощью заданные функции на равномерную непрерывность:

1) $y = \sqrt{x}$;

2) $y = \sin(1/x)$;

3) $y = 1/\sqrt{x}$. 1) Пусть $\delta > 0, x', x'' \in (0; +\infty), |x' - x''| \leq \delta$. Положим для определенности $x' > x''$, т. е. $x' = x'' + \Delta x$, где $0 < \Delta x \leq \delta$. Тогда при любом $x'' > 0$ имеем

$$\left| \sqrt{x'} - \sqrt{x''} \right| = \sqrt{x'' + \Delta x} - \sqrt{x''} \leq \sqrt{x'' + \delta} - \sqrt{x''}$$

а

$$\sqrt{x'' + \delta} - \sqrt{x''} = \frac{\delta}{\sqrt{x'' + \delta} + \sqrt{x''}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}$$

так как $\sqrt{x'' + \delta} + \sqrt{x''} > \sqrt{\delta}$. Итак, $\left| \sqrt{x'} - \sqrt{x''} \right| \leq \sqrt{\delta}$ при $|x' - x''| \leq \delta$, значит, и $\omega(\delta) = \sup_{|x' - x''| \leq \delta} \left| \sqrt{x'} - \sqrt{x''} \right| \leq \sqrt{\delta}$. В то же время при $x' = x'' + \delta$

$$\lim_{x'' \rightarrow 0} (\sqrt{x'' + \delta} - \sqrt{x''}) = \sqrt{\delta}$$

поэтому $\omega(\delta) \geq \sqrt{\delta}$. Отсюда и из предыдущего следует, что $\omega(\delta) = \sqrt{\delta}$, $\delta > 0$. Поскольку

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \sqrt{\delta} = 0$$

функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $(0; +\infty)$. 2) Пусть $\delta > 0, x', x'' \in (0; +\infty), |x' - x''| \leq \delta$. Очевидно,

$$\left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| \leq 2, \quad x', x'' \in (0; +\infty)$$

значит, и $\omega(\delta) \leq 2$. Рассмотрим точки $x'_n = \frac{1}{-(\pi/2) + 2\pi n}$ и $x''_n = \frac{1}{(\pi/2) + 2\pi n}$, где $\sin(1/x)$ равен соответственно -1 и 1 . Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = 0,$$

найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $0 < x'_n < \delta, 0 < x''_n < \delta$. Тогда $|x'_n - x''_n| < \delta$, а

$$\left| \sin \frac{1}{x'_n} - \sin \frac{1}{x''_n} \right| = 2.$$

Значит, $\omega(\delta) = 2$ для любого $\delta > 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 2 \neq 0$$

и поэтому функция $y = \sin(1/x)$ не является равномерно непрерывной на $(0; +\infty)$. 3) Пусть $\delta > 0, x' > 0, x'' = x' + \delta$; тогда

$$\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x''}} = \frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}}.$$

Так как то

$$\lim_{x' \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{x'}} = +\infty, \quad \lim_{x' \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

Следовательно,

$$\lim_{x' \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}} \right) = +\infty$$

$$\sup_{x' > 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}} \right) = +\infty,$$

а поскольку

$$\omega(\delta) \geq \sup_{x' > 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x' + \delta}} \right),$$

то и $\omega(\delta) = +\infty$ для любого $\delta > 0$. Отсюда следует, что функция $1/\sqrt{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0; +\infty)$.

K1-12.1

Доказать, что функция f равномерно непрерывна на множестве X , если:

- 1) $f(x) = 2x - 1, X = R$
- 2) $f(x) = x^2, X = (-1; 1)$;
- 3) $f(x) = \sqrt[3]{x}, X = [0; 2]$;
- 4) $f(x) = \sin x^2, X = (-3; 3]$;
- 5) $f(x) = x \sin(1/x), X = (0; \pi]$.

K1-12.2

Доказать, что функция не является равномерно непрерывной на множестве X :

- 1) $y = \cos(1/x), X = (0; 1)$
- 2) $y = \sin x^2, x = R$
- 3) $y = x^2, X = R$;
- 4) $y = \ln x, X = (0; 1)$. Исследовать функцию на равномерную непрерывность на множестве $X(3, 4)$.

K1-12.3

- 1) $y = e^{-\arcsin x}, X = [-1; 1]$
- 2) $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+1} + |\sin x|} \right), X = [0; 10]$;
- 3) $y = \sqrt[3]{x}, X = R$
- 4) $y = e^x, X = R$;
- 5) $y = \operatorname{ctg} x, X = (0; 1)$;

- 6) $y = \frac{x^6-1}{\sqrt{1-x^4}}, X = (-1; 1)$ 7) $y = \sin \sqrt{x}, X = [1; +\infty)$; 8) $y = \begin{cases} 1-x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1+x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}, X = [-1; 1]$ 9)

$y = x \sin(1/x), X = (0; +\infty)$.

K1-12.4

- 1) $y = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases} X = R$;
- 2) $y = \cos x \cos \frac{\pi}{x}, X = (0; 1)$
- 3) $y = \frac{\sin x}{x}, X = (0; \pi)$

K1-12.9

1) Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на ограниченном множестве, то она ограничена на этом множестве. 2) Привести пример функции, равномерно непрерывной на множестве и неограниченной на этом множестве.

K1-12.10

Нарисовать график модуля непрерывности $\omega(\delta)$ функции f на множестве X , если:

- 1) $f(x) = 1 - 2x, X = R$;
- 2) $f(x) = |x|, X = R$
- 3) $f(x) = x, X = [-2; -1] \cup [1; 2]$;
- 4) $f(x) = \frac{1}{2a}(|x+a| - |x-a|), a > 0, X = R$;
- 5) $f(x) = x^3, X = [0; 1]$; 6) $f(x) = E(x), x \in R$.

K1-12.11

Найти модуль непрерывности функции f на множестве X и, используя его, установить равномерную непрерывность функции, если:

- 1) $f(x) = 2x - 1, X = R$;
- 2) $f(x) = x^2, X = [-a; a], a > 0$;
- 3) $f(x) = 1/x, X = [a; +\infty), a > 0$;
- 4) $f(x) = \cos x, X = R$;
- 5) $f(x) = \ln x, X = [1; +\infty)$.

K1-12.12

Доказать, что для любого $\delta > 0 \omega(\delta; f; X) = +\infty$, если:

- 1) $f(x) = x^3, X = R$
- 2) $f(x) = 1/x^2, X = (0; 1)$

K1-12.13

1) Привести пример функции, модуль непрерывности $\omega(\delta)$ которой удовлетворяет условию $\omega(+0) = \varepsilon > 0$, где ε - данное число. 2) Привести пример неограниченной на промежутке функции, у которой модуль непрерывности $\omega(\delta)$ на этом промежутке удовлетворяет условию $\omega(\delta) < +\infty$ для любого $\delta > 0$.

K1-12.14

Пусть $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности функции f на множестве X . 1) Доказать, что если $\delta_1 < \delta_2$, то $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$. 2) Доказать, что если f ограничена на X , то $\omega(\delta) < +\infty$ для любого $\delta > 0$. 3) Доказать, что если множество X ограничено, а функция f неограничена на X , то $\omega(\delta) = +\infty$ для любого $\delta > 0$.

K1-12.16

Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на множестве X , а $Y \in X$, то f равномерно непрерывна и на множестве Y .

K1-12.17

Функция f равномерно непрерывна на отрезках $[a; b]$ и $[b; c]$. Доказать, что она равномерно непрерывна и на отрезке $[a; c]$.

K1-12.18

Привести пример функции, равномерно непрерывной на отрезке $[a; b]$ и на полуинтервале $(b; c]$ и не являющейся равномерно непрерывной на отрезке $[a; c]$.

K1-12.19

Доказать, что если функции f и g равномерно непрерывны на множестве X , то для любых $\alpha, \beta \in R$ функция $\alpha f + \beta g$ равномерно непрерывна на X .

K1-12.20

1) Доказать, что если функции f и g ограничены и равномерно непрерывны на $[a; +\infty)$, то и их произведение fg - равномерно непрерывная функция на $[a; +\infty)$. 2) Привести пример равномерно непрерывных на $[a; +\infty)$ функций, произведение которых не является равномерно непрерывной на $[a; +\infty)$ функцией. 3) Доказать, что если функции f и g равномерно непрерывны на ограниченном множестве, то их произведение fg - равномерно непрерывная функция на этом множестве.

K1-12.21

Доказать, что непрерывная периодическая функция равномерно непрерывна.

K1-12.22

Функция f равномерно непрерывна на $[a; +\infty)$. Доказать, что выполнено одно из трех условий: либо $f(x)$ ограничена на $[a; +\infty)$, либо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, либо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

K1-12.23

Функция f непрерывна на $[a; +\infty)$ и существует (конечный) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Доказать, что f равномерно непрерывна на $[a; +\infty)$.

K1-12.24

Доказать, что ограниченная, монотонная, непрерывная на интервале функция равномерно непрерывна на этом интервале (конечном или бесконечном).

K1-12.16

Доказать, что если функция f равномерно непрерывна на множестве X , а $Y \in X$, то f равномерно непрерывна и на множестве Y .

K1-12.17

Функция f равномерно непрерывна на отрезках $[a; b]$ и $[b; c]$. Доказать, что она равномерно непрерывна и на отрезке $[a; c]$.

K1-12.18

Привести пример функции, равномерно непрерывной на отрезке $[a; b]$ и на полуинтервале $(b; c]$ и не являющейся равномерно непрерывной на отрезке $[a; c]$.

K1-12.19

Доказать, что если функции f и g равномерно непрерывны на множестве X , то для любых $\alpha, \beta \in R$ функция $\alpha f + \beta g$ равномерно непрерывна на X .

K1-12.20

1) Доказать, что если функции f и g ограничены и равномерно непрерывны на $[a; +\infty)$, то и их произведение fg - равномерно непрерывная функция на $[a; +\infty)$. 2) Привести пример равномерно непрерывных на $[a; +\infty)$ функций, произведение которых не является равномерно непрерывной на $[a; +\infty)$ функцией. 3) Доказать, что если функции f и g равномерно непрерывны на ограниченном множестве, то их произведение fg - равномерно непрерывная функция на этом множестве.

K1-12.21

Доказать, что непрерывная периодическая функция равномерно непрерывна.

K1-12.22

Функция f равномерно непрерывна на $[a; +\infty)$. Доказать, что выполнено одно из трех условий: либо $f(x)$ ограничена на $[a; +\infty)$, либо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, либо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

K1-12.23

Функция f непрерывна на $[a; +\infty)$ и существует (конечный) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Доказать, что f равномерно непрерывна на $[a; +\infty)$.

K1-12.24

Доказать, что ограниченная, монотонная, непрерывная на интервале функция равномерно непрерывна на этом интервале (конечном или бесконечном).

K1-12.35

Доказать, что кусочно линейная на R функция равномерно непрерывна на R .

K1-12.36

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases} \quad |x| \leq 1/\pi,$$

Доказать, что ни при каком a не существует кусочно линейной на $[-1/\pi; 1/\pi]$ функции g такой, что $|f(x) - g(x)| < 1/2$ для любого $x \in [-1/\pi; 1/\pi]$.

K1-12.37

Сформулировать в позитивной форме утверждение, что функция, определенная на отрезке, не может быть аппроксимирована с любой точностью кусочно линейной функцией.

K1-12.38

Доказать, что если функция f определена, но разрывна на отрезке $[a; b]$, то ее нельзя аппроксимировать с любой точностью кусочно линейной функцией.

K1-12.39

Доказать, что если функцию f на промежутке можно аппроксимировать с любой точностью кусочно линейной функцией, то f равномерно непрерывна на этом промежутке.

K1-12.40

Доказать, что если функцию f на промежутке $[c; +\infty)$ можно аппроксимировать с любой степенью точности кусочно линейной функцией, то f имеет асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ (функция кусочно линейна на $[c; +\infty)$, если она непрерывна на $[c; +\infty)$, линейна на $[d; +\infty)$ при некотором $d > c$ и кусочно линейна на $[c; d]$).

18.2.3 Derivatives and Function Differentials Tasks

(отсюда многое удаляю, потому что тупо тривиальная бесполезная херня.)
(просто все или триаивльно, или аккуратно нужно применить лейбница или производную сложной функции, или то же, только сперва упростить выражение.)

K1-13 .пр.4

Найти производную функции:

1) $y = 2^{\operatorname{ctg}^2 x}, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z};$

2) $y = \ln \cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x, x \in \mathbb{R}.$

Аккуратно просто нужно несколько раз продифференцировать сложную функцию.

1) Применяв дважды правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \ln 2 (\operatorname{ctg}^2 x)' = 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \ln 2 \cdot 2 \operatorname{ctg} x (\operatorname{ctg} x)'$$

Следовательно,

$$y' = -2 \ln 2 \cdot 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) Применяем правило дифференцирования сложной функции четыре раза:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x} (\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x)' = \frac{-\sin \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x}{\cos \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x} (\operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x)' = \\ &= -\operatorname{tg} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} 2x \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2 2x} (\operatorname{sh} 2x)' = -\frac{\operatorname{sh} 2x}{1 + \operatorname{sh}^2 2x} \operatorname{ch} 2x \cdot (2x)' = \\ &= -\frac{2 \operatorname{sh} 2x \operatorname{ch} 2x}{1 + \operatorname{sh}^2 2x} = -2 \operatorname{th} 2x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

K1-13 .пр.5

Найти производную функции

$$y = \ln \sqrt[3]{\frac{e^x}{1 + \cos x}}, \quad x \neq \pi(2n + 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сперва упростим:

$$y = \frac{1}{3} \ln e^x - \frac{1}{3} \ln(1 + \cos x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \ln(1 + \cos x).$$

Дифференцируя, получаем

$$y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{(\cos x)'}{1 + \cos x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \operatorname{tg}(x/2)}{3}$$

K1-13 .пр.6

Найти производную функции

$$y = \frac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4 \sin^7 x}}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(!! тут крутой метод, который в 1 части укажу.)

Здесь удобно рассмотреть функцию $z = \ln |y|$. По формуле дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

Т.е.

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{dz}{dx}$$

Записав функцию z в виде

$$z = \ln |y| = \ln(1 + x^2) - \frac{4}{3} \ln |x| - 7 \ln |\sin x|$$

продифференцируем ее:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7 \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Подставив найденное выражение для $\frac{dz}{dx}$ в формулу (9), получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x} \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7 \frac{\cos x}{\sin x} \right).$$

Хорошая задача

К1-13.pr.7 Formula for differentiating the function $u^{v(x)}(x)$ (!!!!)

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции, причем $u(x) > 0$. Доказать, что

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} u'.$$

Пусть $y = u^v$; тогда $\ln y = v \ln u$, $y'/y = v' \ln u + v u'/u$, откуда получаем формулу (10).

Согласно формуле (10) производная функции u^v равна сумме двух слагаемых: первое слагаемое - производная показательной функции $a^{v(x)}$ ($a = \text{const}$), второе слагаемое - производная степенной функции $(u(x))^b$ ($b = \text{const}$). Формулу (10) можно записать в виде

$$(u^v)' = u^v \left(\ln u \cdot v' + \frac{v}{u} \cdot u' \right)$$

К1-13 .пр.8

Найти производную функции:

1) $y = (2 + \cos x)^x, x \in R$;

2) $y = x^{2^x}, x > 0$.

1) По формуле (11) находим

$$y' = (2 + \cos x)^x \left(\ln(2 + \cos x) - \frac{x \sin x}{2 + \cos x} \right), \quad x \in R.$$

2) $y' = 2^{2^x} (\ln x \cdot 2^x \ln 2 + 2^x/x) = 2^x x^{2^x} (\ln 2 \cdot \ln x + 1/x).$

К1-13 .пр.9

Доказать, что функции:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2) $g(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$ имеют бесконечную положительную производную.

1) $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$;

2) $g'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(\Delta x) - g(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1/\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x^2} = +\infty$.

K1-13.10

Найти $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$, если:

1) $f(x) = |\sin 2x|$

2) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$

1) $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x} = 2,$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\sin 2\Delta x|}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x} = -2;$$

2) $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x} = +\infty, f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{e^{1/\Delta x}}{\Delta x} = 0.$

K1-13 .пр.11

Найти производную функции, обратной к функции

$$y = x + x^3, \quad x \in R.$$

Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $\frac{dy}{dx} = 1 + 3x^2$ не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + 3x^2}.$$

K1-13 .пр.12

Найти $y'(x)$, если $x = \operatorname{sh} y$. Δ Функция $x = \operatorname{sh} y$ непрерывна и строго монотонна при всех $y \in R$. Производная $x' = \operatorname{ch} y$ не обращается в нуль ни в одной точке. Следовательно,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Функция $y(x)$, т. е. функция, обратная для гиперболического синуса, обозначается $\operatorname{arsh} x$. Таким образом,

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in R.$$

K1-13 .пр.13

Функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t, t \in (0; \pi/2)$. Найти y'_x . Δ Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при всех t , и $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t \neq 0$ на интервале $(0; \pi/2)$. По формуле (3) находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

И р и мер

K1-13 .пр.14

Функция $y = f(x)$ задана уравнением

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in (0; 2\pi/3),$$

где r и φ - полярные координаты точки (x, y) . Найти y'_x .

Перейдем к параметрическому заданию функции

$$x = r \cos \varphi = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi$$

и далее:

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = -\frac{a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi - a \sin^2 \varphi}{a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi + a \cos \varphi \sin \varphi} = -\frac{\cos \varphi + \cos 2\varphi}{\sin \varphi + \sin 2\varphi} = -\frac{\cos(3\varphi/2) \cos(\varphi/2)}{\sin(3\varphi/2) \cos(\varphi/2)} = -\operatorname{ctg} \frac{3\varphi}{2},$$

где $\varphi \in (0; \frac{2\pi}{3})$.

K1-13 .пр.15

Пусть $y = y(x)$, $x \in (-a; a)$, - положительная функция, заданная неявно уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Найти $y'(x)$. Δ Уравнение (4) в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y' = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$y'(x) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}, \quad x \in (-a; a), \quad y > 0.$$

K1-13 .пр.16

Найти дифференциал функции $y = x - 3x^2$ в точке $x = 2$.

1-й способ.

Найдем приращение функции в точке $x = 2$:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(2 + \Delta x) - y(2) = \\ &= 2 + \Delta x - 3(2 + \Delta x)^2 - 2 + 12 = -11\Delta x - 3\Delta x^2. \end{aligned}$$

Приращение функции представлено в виде (5), в данном случае оказалось, что $A = -11$ и $\alpha(\Delta x) = -3\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, $dy|_{x=2} = -11dx$.

2-й способ.

Вычислим $y'(x) = 1 - 6x$, $y'(2) = -11$, тогда

$$dy(2) = y'(2)dx = -11dx.$$

K1-13 .пр.17

Найти дифференциал функции $y = \operatorname{ctg} 3x$.

А По формуле (7) находим

$$dy = y'(x)dx = -\frac{3}{\sin^2 3x} dx, \quad x \neq \frac{\pi k}{3}, \quad k \in Z.$$

K1-13 .пр.18

Найти приближенное значение функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 3,98$.

Положив в формуле (8) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = -0,02$, получим

$$\sqrt{3,98} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0,002), \quad \sqrt{3,98} \approx 1,995. \quad \Delta$$

K1-13 .пр.19

Найти дифференциал функции

$$y = x\sqrt{64 - x^2} + 64 \arcsin(x/8).$$

Используя свойства дифференциала, получаем

$$\begin{aligned} dy &= x \frac{d(64 - x^2)}{2\sqrt{64 - x^2}} + \sqrt{64 - x^2} dx + 64 \frac{d(x/8)}{\sqrt{1 - x^2/64}} = \\ &= \frac{-x^2 dx}{\sqrt{64 - x^2}} + \sqrt{64 - x^2} dx + 64 \frac{dx}{\sqrt{64 - x^2}} = 2\sqrt{64 - x^2} dx, \quad |x| < 8 \end{aligned}$$

K1-13.pr.20

Пусть u и v - дифференцируемые функции и их дифференциалы du и dv известны. Найти dy , если

$$y = \operatorname{arctg}(u/v) + \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$$

$$dy = \frac{d(u/v)}{1 + u^2/v^2} + \frac{1}{2} \frac{d(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2} = \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2} + \frac{udu + v dv}{u^2 + v^2} = \frac{(v + u)du + (v - u)dv}{u^2 + v^2},$$

где $u^2 + v^2 > 0$.

K1-13.11

$$y = x^{\sqrt{5}} - x^{-\sqrt{5}}.$$

K1-13.12

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0.$$

K1-13.13

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 7}$$

K1-13.14

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}.$$

K1-13.15

$$y = 5x \cos x.$$

K1-13.16

$$y = (x + 1) \operatorname{tg} x.$$

K1-13.17

$$y = x^2 \operatorname{ctg} x + 2.$$

K1-13.18

$$y = \begin{cases} \sin x/x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

K1-13.19

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}.$$

K1-13.20

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}.$$

K1-13.36

$$y = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x.$$

K1-13.37

$$y = \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

K1-13.38

$y = \frac{\ln x}{\operatorname{cth} x}$. Найти производную функции $y = f(x)$ в точке $x_0(39 - 51)$.

K1-13.39

$$y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4), x_0 = -3.$$

K1-13.40

$$y = (x - a)(x - b)(x - c), x_0 = a.$$

K1-13.41

$$y = \frac{x-a}{x-b}, a \neq b, x_0 = a.$$

K1-13.42

$$y = (1 + ax^b)(1 + bx^a), x_0 = 1.$$

K1-13.43

$$y = x(x - 1)(x - 2) \dots (x - 1984)(x - 1985), x_0 = 0, x_0 = 1985.$$

K1-13.44

$$y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x, x_0 = 0.$$

K1-13.45

$$y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

K1-13.46

$$y = (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x, x_0 = 0.$$

K1-13.47

$$y = \operatorname{arctg} x \cdot \arccos x, x_0 = 0.$$

K1-13.48

$$y = \log_2 x \ln 2x, x_0 = 1.$$

K1-13.49

$$y = \frac{x^2}{\ln x}, x_0 = e.$$

K1-13.50

$$y = x^5 e^{-x}, x_0 = 5.$$

K1-13.51

$y = x \operatorname{sh} 2x, x_0 = 1$. Найти производную функции (52-152).

K1-13.52

$$y = (3x - 7)^{10}.$$

K1-13.53

$$y = \frac{1}{99}(1 - x)^{-99} - \frac{1}{49}(1 - x)^{-98} + \frac{1}{97}(1 - x)^{-97}.$$

K1-13.54

$$y = (a + bx)^\alpha.$$

K1-13.55

$$y = (0, 4 \cos(8x + 5) - 0, 6 \sin 0, 8x)^2.$$

K1-13.56

$$y = \frac{\cos 3}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x + 3).$$

K1-13.57

$$y = (a \cos x + b \sin x)^\alpha.$$

K1-13.58

$$y = Ae^{-k^2x} \sin(\omega x + \alpha).$$

K1-13.59

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}.$$

K1-13.60

$$y = \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

K1-13.61

$$y = \sqrt[13]{9 + 7\sqrt[5]{2x}},$$

K1-13.62

$$y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}.$$

K1-13.104

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

K1-13.105

$$y = 2^{\sin x^2}.$$

K1-13.106

$$y = 3^{\cos^2 x}.$$

K1-13.107

$$y = e^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}}.$$

K1-13.108

$$y = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}^2 x.$$

K1-13.109

$$y = \log_2 \log_3 \log_5 x. \quad 1$$

K1-13.110

$$y = \ln \ln \ln x^2. \quad 1$$

K1-13.111

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \left(1/x + \sqrt{1 + 1/x^2} \right). \quad 1$$

K1-13.112

$$y = \frac{2}{7} \ln \left(\sqrt{x^7} + \sqrt{1 + x^7} \right). \quad 1$$

K1-13.113

$$y = \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos^2 x. \quad 1$$

K1-13.114

$$y = \ln(\sqrt{2} \cos x + \sqrt{\cos 2x}). \quad 115y = e^{\sqrt{\ln(x^2 + x + 1)}}. \quad 1$$

K1-13.116

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}, \quad 1$$

K1-13.117

$$y = \frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2x} - 1}. \quad 1$$

K1-13.118

$$y = \frac{\operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2} - \ln \operatorname{cth} \frac{x^2}{2}. \quad 1$$

K1-13.119

$$y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x}{2} \right). \quad 1$$

K1-13.120

$$y = \arccos (\sin x^4 - \cos x^4). \quad 1$$

K1-13.121

$$y = \frac{1}{\sin^4 x + 1} + \ln \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + 1}. \quad 1$$

K1-13.122

$$y = \ln \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} \cos x}{\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos x}. \quad 1$$

K1-13.123

$$y = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x}. \quad 1$$

K1-13.124

$$y = x/2 + \sqrt{3} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x/2))/\sqrt{3}.$$

1

K1-13.136

$$y = \ln \sqrt{\frac{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{2}x}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{2}x}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4 + 1}}. \quad 1$$

K1-13.137

$$y = \ln \frac{2x^2+4x+4}{2x^2+2x+1} + 4 \operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(2x+1). \quad 1$$

K1-13.138

$$y = \frac{5x+2}{x^2+x+1} + \ln \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}} + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad 1$$

K1-13.139

$$y = \frac{3-\sin x}{2} \sqrt{\cos^2 x - 2 \sin x} + 2 \arcsin \frac{1+\sin x}{\sqrt{2}}.$$

K1-13.140

$$y = e^x \arcsin \sqrt{e^x/(e^x+1)} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^x} - \sqrt{e^x}.$$

K1-13.141

$$y = x^x.$$

K1-13.142

$$y = x^{7/\ln x}.$$

K1-13.143

$$y = \log_x 7.$$

K1-13.144

$$y = \log_2 x \cdot \log_x e + \log_2 x \cdot \ln 2.$$

K1-13.145

$$y = x^{2/\ln x} - 2x^{\log_x e} e^{1+\ln x} + e^{1+2/\log_x e}.$$

K1-13.146

$$y = x^{x^2}.$$

K1-13.147

$$y = x^{e^x}.$$

K1-13.148

$$y = 2^{x^x}.$$

K1-13.149

$$y = x^{x^x}. \quad 1$$

K1-13.150

$$y = |\sin x|^{\cos x}. \quad 1$$

K1-13.151

$$y = (\arcsin \sin^2 x)^{\operatorname{arctg} x}. \quad 1$$

K1-13.152

$y = (\operatorname{ch} x)^{e^x}$. Найти производную функции в указанных точках (153-166). 1

K1-13.153

$$y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}, x = 0, x = 1. \quad 1$$

K1-13.154

$$y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}, x = 0. \quad 1$$

K1-13.155

$$y = 2^{\operatorname{tg}(1/x)}, x = 1/\pi. \quad 1$$

K1-13.156

$$y = 3 \cos 2x - \sqrt{1 - \sin 2x}(\sin x + \cos x), x = \pi/6. \quad 1$$

K1-13.163

$$y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} \sqrt[5]{\cos \ln^3 x}}, x = 1. \quad 1$$

K1-13.164

$$y = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}, x = 0. \quad 1$$

K1-13.165

$$y = (\sqrt{1+3x})^{\ln x^2}, x = 1. \quad 1$$

K1-13.166

$$y = ((\sin x)/x)^x, x = \pi/2. \quad 1$$

K1-13.167

Решить уравнение $y'(x) = 0$, если:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 12$;

2) $y = \frac{x^2+x-6}{x^2-10x+25}$

3) $y = \frac{1}{1+\sin^2 x}$;

4) $y = x(x-1)^2(x-2)^3$;

5) $y = e^{-|x-1|}/(1+x)$; 6) $y = \max(7x - 6x^2, |x|^3)$. 1

K1-13.168

Пусть $f(x), x \in R$, - всюду дифференцируемая функция. Найти $y'(x)$, если:

1) $y = \sqrt{f(x)}, f(x) > 0$;

2) $y = \ln |f(x)|, f(x) \neq 0$;

3) $y = f(x^3)$

4) $y = f(\arcsin f(x)), |f(x)| < 1$. 1

K1-13.169

Пусть $f(x), x \in R$, и $g(x), x \in R$, всюду дифференцируемые функции. Найти $y'(x)$, если:

1) $y = \sqrt[n]{f^2(x) + g^2(x)}, f^2(x) + g^2(x) > 0$;

2) $y = \ln |f(x)/g(x)|, f(x)g(x) \neq 0$

3) $y = f(\sin^2 x) + g(\cos^2 x)$;

4) $y = (f(x))^{g(x)}, f(x) > 0$. 1

K1-13.170

Пусть функции f_{2j} ($1 \leq i, j \leq n$) дифференцируемы в некоторой точке. Доказать, что в этой точке справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{i1} & f'_{i2} & \dots & f'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

1

K1-13.175

Построить пример функции, имеющей производную всюду, за исключением точек $x_1, x_2, \dots, x_n$. 1

K1-13.176

Определить значения α и β , при которых: а) всюду непрерывны; б) всюду дифференцируемы следующие функции:

$$\begin{aligned} 3) y &= \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x, & |x| \leq 2, \\ (1/\pi) \arcsin(1/x), & |x| > 2 \end{cases} \\ 4) y &= \begin{cases} 2x - 2, & \text{если } x \leq 1, \\ \alpha(x-1)(x-2)(x-\beta), & \text{если } 1 < x < 2, \\ x/2 - 1, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 1 \end{aligned}$$

K1-13.177

Определить значения α и β , при которых функции всюду дифференцируемы:

$$\begin{aligned} 1) y &= \begin{cases} (x + \alpha)e^{-\beta x}, & \text{если } x < 0, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \\ 2) y &= \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{если } x < 0, \\ \alpha \cos x + \beta \sin x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases} \quad 1 \end{aligned}$$

K1-13.178

Определить значения α и β , при которых функция

$$y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \alpha x, & \text{если } |x| \leq 1, \\ \beta \operatorname{sign} x + \frac{x-1}{2}, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$$

1

K1-13.181

Верно ли утверждение: если функция имеет производную в точке, то она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки? 1

K1-13.182

Доказать или опровергнуть следующие утверждения: 1) если функция f имеет, а функция g не имеет производной в некоторой точке, то функция $f + g$ не имеет производной в этой точке; 2) если функции f и g не имеют производной в некоторой точке, то и функция $f + g$ не имеет производной в этой точке; 3) если функция f имеет, а функция g не имеет производной в некоторой точке, то и функция fg не имеет производной в этой точке; 4) если функции f и g не имеют производной в некоторой точке, то и функция fg не имеет производной в этой точке. 1

K1-13.183

Привести пример функции $f(x)$ такой, что $f(x)$ и $(f(x))^3$ дифференцируемы в точке x_0 , а функция $(f(x))^2$ не имеет производной в точке x_0 . 1

K1-13.184

Привести пример функции, не имеющей производной ни в одной точке $x \in R$, квадрат которой имеет производную в каждой точке $x \in R$. 1

K1-13.185

Привести пример сложной функции $f(g(x))$, имеющей производную в точке x_0 и такой, что:

- 1) $f'(g(x_0))$ существует, $g'(x_0)$ не существует;
- 2) $f'(g(x_0))$ не существует, $g'(x_0)$ существует;
- 3) $f'(g(x_0))$ и $g'(x_0)$ не существуют. 1

K1-13.186

Доказать или опровергнуть следующие утверждения: 1) если для дифференцируемых на интервале $(a; b)$ функций f и g верно неравенство $f < g$, то $f' \leq g'$ на $(a; b)$; 2) если на интервале $(a; b)$ верно неравенство $f' < g'$, то $f < g$ на $(a; b)$; 3) если $f(a) = g(a)$ и $f'(x) < g'(x)$ на интервале $(a; b)$, то $f(x) < g(x)$ на $(a; b)$. 1

K1-13.187

Доказать или опровергнуть следующие утверждения: 1) для того чтобы дифференцируемая функция $y(x)$, $x \in (a; b)$, имела монотонную на интервале $(a; b)$ производную, необходимо, чтобы $y(x)$ была монотонна на $(a; b)$; 2) для того чтобы дифференцируемая функция $y(x)$, $x \in (a; b)$, имела монотонную на интервале $(a; b)$ производную, достаточно, чтобы $y(x)$ была монотонна на интервале $(a; b)$; 3) для того чтобы дифференцируемая функция имела периодическую производную, необходимо, чтобы функция была периодической; 4) для того чтобы дифференцируемая функция имела периодическую производную, достаточно, чтобы функция была периодической.

1

K1-13.192

Найти $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$ для функции $f(x)$, если:

- 1) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{1/x}, & \text{если } x < 0, \\ \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^4}}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases} \quad 1$

K1-13.193

Найти правую и левую производные в точках разрыва функции $f(x)$, если:

- 1) $f(x) = \begin{cases} x(1-x^2)/|x|, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$
- 2) $f(x) = (1-x^2) \operatorname{sign} x$
- 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$
- 4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}((1+x)/(1-x)), & \text{если } x \neq 0 \\ \pi/2, & \text{если } x = 1 \end{cases}$
- 5) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ -\pi/2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

K1-13.201

Найти y'_x для функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

- 1) $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, 0 < t < \pi/2$
- 2) $x = e^{-t}, y = t^3, -\infty < t < +\infty;$
- 3) $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 < t < \pi;$
- 4) $x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t, -\infty < t < 0;$
- 5) $x = t^2 + 6t + 5, y = (t^3 - 54)/t, 0 < t < +\infty;$
- 6) $x = (t-1)^2(t-2), y = (t-1)^2(t-3), 5/3 < t < +\infty;$ 7) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), -\infty < t < +\infty;$
- 8) $x = \ln \sin(t/2), y = \ln \sin t, 0 < t < \pi.$

K1-13.202

Найти x'_y для функции $x = x(y)$, заданной параметрически:

- 1) $x = t + 2t^2 + t^3, y = -2 + 3t - t^3, 1 < t < +\infty;$
- 2) $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t, y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t, 1 < t < +\infty;$
- 3) $x = \operatorname{ctg} 2t, y = (2 \cos 2t - 1)/(2 \cos t), 0 < t < \pi/2.$

K1-13.203

Для функции $y = y(x)$, заданной параметрически $x = 2t + |t|$, $y = 5t^2 + 4t|t|$, $-\infty < t < \infty$, вычислить производную в точке $x = 0$.

K1-13.204

Найти y'_x для функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

K1-13.205

Найти $y'(x_0)$ для функции $y = y(x)$, заданной уравнением $r = r(\varphi)$, где r и φ - полярные координаты точки $(x; y)$:

- 1) $r = a\varphi$, $4\pi/3 < \varphi < 2\pi$, $x_0 = 0$;
- 2) $r = e^\varphi$, $-\pi/6 < \varphi < \pi/6$, $x_0 = 1$;
- 3) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 < \varphi < \pi/4$, $x_0 = a\sqrt{6}/4$.

K1-13.206

Для функции $y = y(x)$, заданной уравнением $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, Найти $y'_+(0)$ и $y'_-(a)$.

K1-13.213

Найти дифференциал:

- 1) $d(e^{-x} + \ln x)$
- 2) $d(\sqrt{x} + 2\sqrt{x + \sqrt{x}})$
- 3) $d(2\sqrt{x^3}(3 \ln x - 2))$
- 4) $d(\arccos e^x)$
- 5) $d \ln(\sqrt{1 + 2 \sin x} + \sqrt{2 \sin x - 1})$
- 6) $d(5 \operatorname{sh}^7(\frac{x}{35}) + 7 \operatorname{sh}^5(\frac{x}{35}))$ 7) $d(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}})$; 8) $d(\ln \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x})$ 9) $d(x^{x^2})$ 2

K1-13.214

Найти дифференциал в указанных точках:

- 1) $d(\frac{1}{x} + \ln \frac{x-1}{x})$, $x = -1$
- 2) $d \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{x}$, $x_1 = \frac{1}{e}$, $x_2 = e$;
- 3) $d\left(\frac{(2x-1)^3 \sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}}\right)$, $x = 0$
- 4) $d\left(\frac{x^2 2^x}{x^x}\right)$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

K1-13.215

В указанных точках найти дифференциал функции $y = y(x)$, заданной неявным или параметрическими уравнениями:

- 1) $y^3 - y = 6x^2$, $(1; 2)$;
- 2) $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$, $(1; 3)$;
- 3) $y^5 + x^4 = xy^2$, $(x_0; y_0)$;
- 4) $x + y \ln y = 0$, $(x_0; y_0)$;
- 5) $xy - \sqrt[3]{xy^2 + 6} = 0$, $(2; 1)$;
- 6) $xe^{(x/y^2-1)} - 2y = 0$, $(4; 2)$;
- 7) $3^{\sin yx^2} - 3x(y - \pi) - 1 = 0$, $(1; \pi)$;
- 8) $4xy^3 + \ln \sqrt[3]{x/(x+y)} = 0$, $(1; 0)$;
- 9) $x = (t-1)^2(t-2)$, $y = (t-1)^2(t-3)$, $(4; 0)$;

10)

$$x = e^t/t, y = (t-1)^2 e^t, (-2/\sqrt{e}; 9/(4\sqrt{e})).$$

K1-13.216

В точке $(0; a)$ найти дифференциал функции $y = y(x)$, заданной в полярной системе координат уравнением $r = a(1 + \cos \varphi)$, $0 < \varphi < \pi$.

K1-13.217

Найти дифференциал функции y , считая известными дифференциалы функций u и v :

- 1) $y = u^2 v$
- 2) $y = u^2 / v$
- 3) $y = uv / (u^2 + v^2)$
- 4) $y = e^{uv}$;

2

K1-13.218

Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенное значение функции $y = y(x)$ в указанных точках:

- 1) $y = \sqrt[3]{x}$, а) $x = 65$, б) $x = 125, 1324$
- 2) $y = \sqrt[4]{x}$, а) $x = 90$, б) $x = 15, 8$
- 3) $y = \sin x$ а) $x = 29^\circ$, б) $x = 359^\circ$
- 4) $y = \operatorname{tg} x$, $x = 44^\circ 50'$;
- 5) $y = \arcsin x$, $x = 0, 51$;
- 6) $y = \operatorname{arctg} x$, $x = 1, 05$ 7) $y = \ln \operatorname{tg} x$, $x = 47^\circ 15'$ 8) $y = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$, $x = 0, 15$. 2

K1-13.219

Доказать, что для всех малых по сравнению с x_0 значений Δx верна приближенная формула

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0} \Delta x, \quad x_0 > 0$$

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

- 1) $\sqrt{640}$
- 2) $\sqrt[3]{200}$
- 3) $\sqrt[5]{243,45}$
- 4) $\sqrt[10]{1000}$. 2

K1-13.220

Определить, на сколько приблизительно увеличится объем шара, если его радиус $R = 15$ см увеличить на $0,2$ см. 2

K1-13.221

Определить приблизительно относительную погрешность при вычислении поверхности сферы, если при определении ее радиуса относительная погрешность составила 1% . 2

K1-13.222

На сколько приблизительно изменится (в процентах) сила тока в проводнике, если его сопротивление увеличится на 1% ? 2

K1-13.223

На сколько приблизительно следует изменить длину маятника $l = 20$ см, чтобы период колебаний маятника увеличился на $0,05$ с? Период T определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

18.2.4 Problems about the geometric and physical meaning of the derivative

(!! тут кст важные задачи могут быть, все-таки геометрия вроде как именно с этим и связано)

K1-14.9

Написать уравнение нормали к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $(x_0; y_0)$

K1-14.10

Написать уравнение касательной и нормали к кривой в точке M :

1) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0, M(-1; 3);$

2) $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0, M(-2; 3);$

3) $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0, M(1; 2);$

4) $x^5 + y^5 - 2xy = 0, M(1; 1);$

5) $(4-x)y^2 = x^3, M(x_0; y_0);$

6) $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2, n \in \mathbb{N}, M(a; b)$ 7) $x = t^2, y = t^3, M(4; 8)$ 8) $x = t \cos t, y = t \sin t, M\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8}; \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$ 9) $x = \sqrt{2} \cos^3 t, y = \sqrt{2} \sin^3 t, M(1/2; 1/2);$

10)

$x = (1+t)/t^3, y = 3/(2t^2) + 1/(2t), M(2; 2);$

11)

$x = (2t-1)/t^2, y = (3t^2-1)/t^3, M(1; 2).$

K1-14.11

Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций:

1) $f_1(x) = x - x^3, f_2(x) = 5x;$

2) $f_1(x) = \sqrt{2} \sin x, f_2(x) = \sqrt{2} \cos x;$

3) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = x^3;$

4) $f_1(x) = 1/x, f_2(x) = \sqrt{x}$

5) $f_1(x) = x^3, f_2(x) = 1/x^2;$ 6) $f_1(x) = \ln x, f_2(x) = x^2/(2e);$ 7) $f_1(x) = x^2 - 4x + 4, f_2(x) = -x^2 + 6x - 4;$ 8) $f_1(x) = 4x^2 + 2x - 8, f_2(x) = x^3 - x + 10;$ 9) $f_1(x) = \varphi(x), f_2(x) = \varphi(x) \sin \pi x, \varphi(x)$ - всюду дифференцируемая функция.

K1-14.12

Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются кривые:

1) $y = x^2$ и $x = y^2;$

2) $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ и $x = 1;$

3) $y = e^{x/2}$ и $x = 2;$

4) $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x;$

5) $y^2 = 2x^3$ и $64x - 48y - 11 = 0;$

6) $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ и $y = x + 1$

K1-14.13

Доказать, что семейства парабол $y^2 = p^2 - 2px$ и $y^2 = 2qx + q^2, p \neq 0, q \neq 0$, образуют ортогональную сетку, т. е. кривые этих семейств пересекаются под прямыми углами.

K1-14.14

Доказать, что семейства гипербол $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ образуют ортогональную сетку.

K1-14.15

Доказать, что семейство эллипсов

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \cos t, \quad y = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

и семейство гипербол

$$x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \cos \alpha, \quad y = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \sin \alpha, \quad 0 < t < +\infty$$

) a и α - постоянные, причем $a > 0, \alpha \neq \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$, образуют ортогональную сетку.

K1-14.16

Определить угол между левой и правой касательными в точке M графика функции $y = f(x)$:

1) $y = |x|, M(0; 0);$

2) $y = \sqrt[3]{x^2}, M(0; 0);$

3) $y = \arccos(\cos x), M(\pi; \pi);$

4) $y = \sqrt{1 - e^{-3x^2}}, M(0; 0);$

5) $y = \sqrt{2x^3 + 9x^2}, M(0; 0);$ 6) $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, M\left(1; \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right);$ 7)

$x^3 + y^3 = 3x^2, M(0; 0);$ 8) $y = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} M(0; 0);$ 9) $y = \frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+x}, M\left(2; \frac{1}{3}\right)$

10)

$x = t - \frac{t}{1+t^2}, y = \frac{2+t^2}{1+t^2}, M(0; 2).$

K1-14.17

Найти в точке $(1; 2)$ параболы $y^2 = 4x$ длины отрезков: 1) касательной; 2) нормали; 3) подкасательной; 4) поднормали.

K1-14.18

Найти длину подкасательной графика функции $y = a^x, a > 0, a \neq 1$, в каждой его точке.

K1-14.24

Найти длины отрезков касательной, нормали, подкасательной и поднормали у циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

в каждой ее точке, не лежащей на оси абсцисс.

K1-14.25

Найти длины отрезков касательной и нормали у трактрисы $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t), \quad y = a \sin t, \quad 0 < t < \pi, \quad a > 0.$

K1-14.26

Доказать, что у кривой

$$x = 2a(\ln \sin t - \sin^2 t), \quad y = a \sin 2t, \quad 0 < t < \pi, \quad a > 0,$$

сумма длин подкасательной и поднормали постоянна и равна $2a$.

K1-14.27

Доказать, что если $r = f(\varphi)$ - уравнение кривой в полярной системе координат и ω - угол, образованный касательной и полярным радиусом точки касания, то $\operatorname{tg} \omega = r/|r'|$.

K1-14.28

Найти угол между касательной и полярным радиусом точки касания для следующих кривых: 1) спирали Архимеда $r = a\varphi$; 2) гиперболической спирали $r = a/\varphi$; 3) логарифмической спирали $r = ae^{b\varphi}$; 4) кардиоиды $r = a(\cos \varphi + 1)$; 5) дуги лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi, 0 \leq \varphi < \pi/4$.

K1-14.29

Под каким углом пересекаются кривые $r = \varphi$ и $r = 1/\varphi$ в точке $(1; 1)$?

K1-14.30

Доказать, что угол между касательной к спирали Архимеда $r = a\varphi$ и полярным радиусом точки касания при $\varphi \rightarrow +\infty$ стремится к $\pi/2$.

K1-14.31

Найти расстояние от полюса до произвольной касательной кривой $r = ae^{b\varphi}$.

K1-14.32

Записать в декартовых и в полярных координатах уравнение нормали к кардиоиде $r = a(1 + \cos \varphi)$ в точке с полярным углом $\varphi = \pi/6$

K1-14.36

Точка движется по параболе $y = 8x - x^2$ так, что ее абсцисса изменяется по закону $x = \sqrt{t}$ (x измеряется в метрах, t - в секундах). Какова скорость изменения ординаты точки через 9 с после начала движения?

K1-14.37

Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 см/с. Какова скорость изменения объема шара в момент, когда его радиус становится равным 50 см?

K1-14.38

Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан за 8 с. Найти угловую скорость через 64 с после начала движения.

K1-14.39

По оси абсцисс движутся две точки, имеющие законы движения

$$x = 100 + 5t \quad \text{и} \quad x = t^2/2.$$

С какой скоростью удаляются они друг от друга в момент встречи (x измеряется в метрах, t - в секундах)?

K1-14.40

Паром подтягивается к берегу при помощи каната, который наматывается на ворот со скоростью 3 м/мин. Определить скорость движения парома в тот момент, когда он находится в 25 м от берега, если ворот расположен на берегу выше поверхности воды на 4 м.

K1-14.41

Закон движения материальной точки, брошенной под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 , без учета сопротивления воздуха, имеет вид

$$x = (v_0 \cos \alpha) t, \quad y = (v_0 \sin \alpha) t - (gt^2)/2$$

где t - время, g - ускорение силы тяжести. Определить координаты вектора скорости и величину скорости.

K1-14.42

Точка движется по спирали Архимеда $r = a\varphi$ так, что угловая скорость вращения ее полярного радиуса постоянна и равна 6° в секунду. Определить скорость удлинения полярного радиуса r , если $a = 10$ м.

18.2.5 Problems about higher order derivatives and differentials

(в 1 части укажу, как искать обратную производную и производную больших порядков. не сложно, просто еще не указал.)

(?? я так понял, на производную n -го порядка задачи решаются нахождением первых примерно $3n$, экстраполяцией, а дальше доказательством методом индукции.)

К1-15.пр .2. $f^{(n)}(x)$ степенной функции

Найти производную порядка n функции $f(x) = 2^{3x}$. Так как

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{3x} \cdot 3 \ln 2 \\ f''(x) &= (2^{3x} \cdot 3 \ln 2)' = 2^{3x} \cdot 3^2 \ln^2 2 \\ f'''(x) &= (2^{3x} \cdot 3^2 \ln^2 2)' = 2^{3x} \cdot 3^3 \ln^3 2 \end{aligned}$$

то естественно предположить, что

$$f^{(n)}(x) = 2^{3x} \cdot 3^n \ln^n 2.$$

Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции. При $n = 1$ формула верна. Предположим, что она верна при $n = k$, т.е. $f^{(k)}(x) = 2^{3x} \cdot 3^k \ln^k 2$. Тогда

$$f^{(k+1)}(x) = (2^{3x} \cdot 3^k \ln^k 2)' = 2^{3x} \cdot 3^{k+1} \ln^{k+1} 2$$

и, следовательно, формула верна и при $n = k + 1$. Отсюда вытекает ее справедливость при всех значениях n .

К1-15.пр .3. $f^{(n)}(x)$ степенной функции

Найти производную порядка n функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

1) Функция представляется в виде суммы дробей, на разложение которых есть формула:

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \right)$$

Далее, положив в шаблонной формуле (???) $\alpha = -1, a = 1, b = \pm 2$, получим

$$\left(\frac{1}{x \pm 2} \right)^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-1 - n + 1)(x \pm 2)^{-1-n} = (-1)^n n! \frac{1}{(x \pm 2)^{n+1}}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{x^2 - 4} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4} \left(\frac{1}{(x - 2)^{n+1}} - \frac{1}{(x + 2)^{n+1}} \right).$$

2) $f(x) = x^2 \cos 2x$.

2) Формула Лейбница решает задачу, в нее подставим шаблонные формулы для производных косинусов:

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = C_n^0 x^2 (\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)' (\cos 2x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)'' (\cos 2x)^{(n-2)}$$

Остальные слагаемые равны нулю, так как $(x^2)^{(k)} = 0$ при $k > 2$. Для вычисления производных порядка $n, n - 1$ и $n - 2$ функции $\cos 2x$ используем формулу (4):

$$\begin{aligned} (\cos 2x)^{(n)} &= 2^n \cos \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right), \\ (\cos 2x)^{(n-1)} &= 2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{\pi(n-1)}{2} \right) = 2^{n-1} \sin \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right), \\ (\cos 2x)^{(n-2)} &= 2^{n-2} \cos \left(2x + \frac{\pi(n-2)}{2} \right) = -2^{n-2} \cos \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = 2^n \left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4} \right) \cos \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right) + 2^n n x \sin \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right)$$

K1-15.pr.4 $f^{(n)}(0)$ от $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Задача решается переходом к рекуррентному соотношению после взятия первой производной.
(укажу этот метод в 1 части!)

Так как $f'(x) = 1/(1+x^2)$, то

$$(1+x^2)f'(x) = 1$$

Вычислим производные порядка $n-1$ от обеих частей этого равенства. Для вычисления производной от левой части применим формулу Лейбница, положив в ней $u = f'(x)$, $v = 1+x^2$. Получим

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$$

откуда при $x = 0$ найдем рекуррентное соотношение

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$$

При четном $n(n = 2k)$, поскольку $f^{(2)}(0)$, получаем

$$f^{(2k)}(0) = 0.$$

При нечетном $n(n = 2k+1)$, поскольку $f'(0) = 1$, находим

$$f^{(2k+1)}(0) = -(2k)(2k-1)f^{(2k-1)}(0) = \dots = (-1)^k(2k)!f'(0) = (-1)^k(2k)!$$

Хорошая задача.

K1-15.pr.5 The second derivative to the function inverse to the simplest

Найти вторую производную функции, обратной к функции

$$y = x + x^5, \quad x \in R.$$

Просто применяем типичную формулу, а далее аккуратно находим от полученного выражения производную.

Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $y = 1 + 5x^4$ не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+5x^4}.$$

Дифференцируя это тождество по y , получим

$$x''_{yy} = \left(\frac{1}{1+5x^4} \right)'_x \cdot x'_y = \frac{-20x^3}{(1+5x^4)^3}$$

K1-15 .pr.6. The second derivative of the elementary parametric function

Функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in (0; 2\pi)$. Найти y''_{xx}

Обычная формула, а далее ее производная дают ответ.

По формуле для функций заданных через параметр, имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{2 \sin^2(t/2)} = \operatorname{ctg}(t/2),$$

Дифференцируя, получим

$$y''_{xx} = \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right)'_t \cdot t'_x = \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2 \sin^2(t/2)} \cdot \frac{1}{1 - \cos t} = -\frac{1}{4 \sin^4(t/2)}$$

K1-15.pr.7 Second derivative of the parametric function

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (a; b),$$

и пусть $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$ при $t \in (a; b)$. Найти y''_{xx} .

Дифференцируя обе части $y'_x = y'_t/x'_t$ по x , получаем

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t \cdot t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}.$$

(??? я где-то ей воспользуюсь? мб в теорию пренести?)

K1-15.pr.8 y''_{xx} для эллипса

Пусть $y = y(x)$, $|x| > a$, - положительная функция, заданная неявно уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Найти y''_{xx} .

Для нахождения y'_x воспользуемся уравнением (4 §13, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0.$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} y'_x = 0.$$

Из этого уравнения находим $y'_x = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, $|x| > a, y > 0$. Дифференцируя по x обе части равенства (13), найдем

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} (y'_x)^2 - \frac{y}{b^2} y''_{xx} = 0.$$

Следовательно, $y''_{xx} = \frac{1}{y} \left(\frac{b^2}{a^2} - (y'_x)^2 \right) = \frac{1}{y} \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right) =$

$$= -\frac{b^4}{a^2 y^3} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}, \quad y > 0.$$

K1-15.pr.9 Order of derivatives $y = |x|^3$ в $x = 0$

Определить, какого порядка производными обладает в точке $x = 0$ функция $y = |x|^3$.

Δ Если $x \neq 0$, то

$$y'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{при } x > 0, \\ -3x^2 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ по определению производной находим

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(0 + \Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} = 0.$$

Таким образом, первая производная существует при всех x , причем

$$y'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x.$$

Аналогично, для второй производной получаем

$$y''(x) = \begin{cases} 6x & \text{при } x > 0, \\ -6x & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

$$y''(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y'(0 + \Delta x) - y'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x^2 \operatorname{sign} \Delta x}{\Delta x} = 0,$$

т.е. вторая производная существует при всех x , причем

$$y''(x) = 6|x|$$

Функция $|x|$ недифференцируема в точке $x = 0$. Следовательно, данная функция $y = |x|^3$ обладает в точке $x = 0$ производными до второго порядка включительно.

K1-15.pr.10 Second differential $y = xe^{-x}$

Найти второй дифференциал функции $y = xe^{-x}$, считая x независимой переменной. Δ 1-й способ. По определению второго дифференциала находим

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(xde^{-x} + e^{-x}dx) = d(-xe^{-x}dx + e^{-x}dx) = \\ &= -d(xe^{-x})dx + (de^{-x})dx = -(xde^{-x} + e^{-x}dx)dx - e^{-x}dx^2 = \\ &= xe^{-x}dx^2 - e^{-x}dx^2 - e^{-x}dx^2 = (x-2)e^{-x}dx^2 \end{aligned}$$

2-й способ.

Вычисляем вторую производную:

$$y'' = (xe^{-x})'' = (e^{-x} - xe^{-x})' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x},$$

и по формуле (13) находим

$$d^2y = (x-2)e^{-x}dx^2$$

K1-15.11

Найти второй дифференциал функции $y = \sin x^2$, считая x :

- а) функцией некоторой независимой переменной;
 - б) независимой переменной.
- а) 1-й способ. По определению второго дифференциала имеем

$$d^2y = d(d \sin x^2) = d(2x \cos x^2 dx) = (2x \cos x^2) d^2x + (d(2x \cos x^2)) dx = 2x \cos x^2 d^2x + (2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2) dx^2$$

2-й способ. Вычисляем первую и вторую производные данной функции по x :

$$y'_x = 2x \cos x^2, \quad y''_{xx} = 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$$

Согласно формуле (18) получаем

$$d^2y = (2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2) dx^2 + 2x \cos x^2 d^2x.$$

- б) В этом случае $d^2x = 0$ и, следовательно,

$$d^2y = (2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2) dx^2$$

K1-15 .пр.12

Найти d^2y , если $y = u/v$ и du, dv, d^2u, d^2v известны. Δ При решении используем свойства первого дифференциала (§13):

$$\begin{aligned} d^2\left(\frac{u}{v}\right) &= d\left(d\frac{u}{v}\right) = d\left(\frac{vdu - u dv}{v^2}\right) = \frac{v^2 d(vdu - u dv) - (vdu - u dv) dv^2}{v^4} = \\ &= \frac{v^2 (vd^2u + dvdu - ud^2v - dudv) - 2v(vdu - u dv) dv}{v^4} = \\ &= \frac{1}{v} d^2u - \frac{u}{v^2} d^2v - \frac{2}{v^2} dudv + \frac{2u}{v^3} dv^2 \end{aligned}$$

K1-15.1

Найти производную второго порядка:

- 1) $y = x^2 + 13x + 11$
- 2) $y = 1 + 10x + \frac{1}{x^{98}}$
- 3) $y = \frac{x(1+3\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}};$
- 4) $y = \cos^2 x$
- 5) $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$
- 6) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 7) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- 8) $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ 9) $y = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$

10)

$$y = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x} - \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}.$$

K1-15.2

Найти вторую производную в указанной точке:

- 1) $y = e^{\sqrt{x}}, x = 4$
- 2) $y = \frac{x^5}{(x-1)^4}, x = 5$
- 3) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, x = 0$
- 4) $y = e^{\sin x} \cos(\sin x), x = 0.$

K1-15.3

Точка движется по закону $s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t^3$ (s измеряется в метрах, t - в секундах). Найти ее ускорение через 5 с после начала движения.

K1-15.4

Доказать, что при движении тела по закону $s(t) = ae^t + be^{-t}$ его ускорение численно равно пройденному пути.

K1-15.5

Доказать, что при движении тела по закону $s(t) = \sqrt{t}$ его ускорение пропорционально кубу скорости.

K1-15.6

Одна точка движется по закону $s_1(t) = t^3 + \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$, другая - по закону $s_2(t) = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ (s_1, s_2 измеряются в метрах, t - в секундах). Найти ускорения точек в тот момент, когда их скорости равны.

K1-15.7

Найти величину силы, действующей на точку с массой $m = 0,1$, движущуюся по закону $s(t) = t^2 - 4t^4$ в момент времени $t = 3$ (m, s, t заданы в системе СИ).

K1-15.8

По окружности радиуса 5 м движется точка с постоянной угловой скоростью 2 рад/с. Найти величину ускорения точки.

K1-15.9

Найти второй дифференциал функции;

- 1) $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$;
- 2) $y = 2x + \operatorname{ctg} 2x$
- 3) $y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)$;
- 4) $y = x^x$.

K1-15.10

Найти второй дифференциал функции в указанной точке:

- 1) $y = \frac{x^3}{3-x^2}, x = 1$
- 2) $y = \frac{3x+2}{x^2-2x+5}, x = 0$;
- 3) $y = x\sqrt[3]{(x-5)^2}, x = -3$
- 4) $y = \operatorname{arctg} \frac{2+x^2}{2-x^2}, x = 0$.

K1-15.11

Определить, удовлетворяет ли функция $y = y(x)$ заданному уравнению:

- 1) $y = A \cos ax + B \sin ax, y'' + a^2y = 0$
- 2) $y = Ae^{ax} + Be^{-ax}, y'' - a^2y = 0$
- 3) $y = (A \cos 3x + B \sin 3x)e^{-x}, y'' + 2y' + 10y = 0$
- 4) $y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{x}, y'' - y = \frac{x^2-2}{x^3}$
- 5) $y = 1 + \cos e^x + \sin e^x, y'' - y' + e^{2x}y = 0$;
- 6) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^{10}, (1+x^2)y'' + xy' - 100y = 0$ 7) $y = e^{10 \arcsin x}, (1-x^2)y'' - xy' - 100y = 0$ 8) $y = \cos(10 \arccos x), (1-x^2)y'' - xy' + 100y = 0$.

K1-15.12

Найти y'' , считая известными u', u'', v', v'' :

- 1) $y = (v + 2u)/u$
- 2) $y = e^{uv}$
- 3) $y = \operatorname{arctg}(v/u)$
- 4) $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

K1-15.13

Найти d^2y , считая известными du, d^2u, dv, d^2v :

- 1) $y = u(2 + v)$
- 2) $y = u \ln v$
- 3) $y = \sqrt{u^2 + v^2}$
- 4) $y = u^v$

K1-15.14

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически уравнениями:

- 1) $x = t^3, y = t^2$;
- 2) $x = \frac{t^2}{1+t^3}, y = \frac{t^3}{1+t^3}$;
- 3) $x = \ln \cos t, y = \ln \cos 2t$
- 4) $x = a \cos t, y = b \sin t$
- 5) $x = (1 + \cos^2 t) \sin t, y = \sin^2 t \cos t$
- 6) $x = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t, y = t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t$ 7) $x = \frac{e^t}{1+t}, y = (t-1)e^t$ 8) $x = \frac{1}{\cos t}, y = \operatorname{tg} t - t$ 9) $x = \sin \log_2 t, y = \operatorname{tg} \log_2 t$;

10)

$$x = 2^{\cos^2 t}, y = 2^{\sin^2 t}.$$

K1-15.15

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ в заданной точке:

- 1) $x = (t^2 + 1)e^t, y = t^2 e^{2t}, (1; 0)$;
- 2) $x = \frac{2t-t^2}{t-1}, y = \frac{t^2}{t-1}, (0; 4)$;
- 3) $x = \ln(1 + \sin \varphi), y = \ln(1 - \cos 2\varphi), (\ln(3/2); \ln(1/2))$;
- 4) $x = \operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t, y = \operatorname{ch} t \cos t - \operatorname{sh} t \sin t, (0; 1)$.

K1-15.16

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически уравнениями:

- 1) $x = -2 + 3t - t^3, y = t + 2t^2 + t^3$;
- 2) $x = \ln \operatorname{tg}(t/2), y = \ln \operatorname{tg} t$;
- 3) $x = \log_5 \sin t, y = \log_5 \cos t$;
- 4) $x = \arcsin \operatorname{tg} t, y = \sqrt{\cos 2t}$.

K1-15.17

Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная параметрически, удовлетворяет заданному уравнению:

- 1) $x = t^3 + t, y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 1, y''(1 + 3y'^2) = 1$
- 2) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, -\pi/4 < t < \pi/4, (x - y)^2 y'' = 2(xy' - y)$;
- 3) $x = \sin t, y = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t}, -\pi/2 < t < \pi/2, A$ и B - произвольные постоянные, $(1 - x^2)y'' - xy' - 2y = 0$;
- 4) $x = 3At^2 + \ln Bt, y = 2At^3 + t, A$ и B - произвольные положительные постоянные, $(3y - 2y')y'' = y'^2$.

K1-15.21

Для функции $y = y(x)$, заданной неявно, найти y'' :

- 1) $x^2 + y^2 = a^2$
- 2) $x^2 - y^2 = a^2$
- 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- 4) $y^2 = 2px$;
- 5) $e^{x-y} = x + y$; 6) $e^{2y} - 2 \ln x - 1 = 0$; 7) $y - x \operatorname{tg} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$; 8) $y^2 = e^{x^4 - y^2}$.

K1-15.22

Найти d^2y в точке $(x_0; y_0)$ для функции $y = y(x)$, заданной неявно:

- 1) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0, (1; 1);$
- 2) $2 \ln(y - x) + \sin xy = 0, (0; 1);$ 3) $x^3y + \arcsin(y - x) = 1, (1; 1);$
- 4) $3(y - x + 1) + \arctg(y/x) = 0, (1; 0).$

K1-15.23

Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная неявно, удовлетворяет уравнению:

- 1) $y = A \ln y + x + B, y \cdot y'' = (y')^2 - (y')^3;$
- 2) $(A + Bx)e^{y/x} = x, x^3y'' = (xy' - y)^2.$

K1-15.24

Найти $y^{(n)}(x)$ для заданной функции:

- 1) $y = x^3 + x + e^{3x};$
- 2) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n; 3) y = \frac{1+x}{1-x};$
- 4) $y = \frac{ax+b}{cx+d};$
- 5) $y = \ln(ax + b)$
- 6) $y = \sin^2 x$ 7) $y = \sin ax \sin bx;$ 8) $y = \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx$ 9) $y = \sin^2 x \sin 2x$

10)

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

11)

$$y = \cos^4 x$$

12)

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

13)

$$y = \frac{x}{x^2-4x-12}$$

14)

$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}; 1 \quad 5) y = \frac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}.$$

K1-15.25 Derivative of order n (!)

Найти $y^{(n)}(x)$ для заданной функции:

- 1) $y = (x-1)2^{x-1};$
- 2) $y = (2x-1)2^{3x} \cdot 3^{2x}; 3) y = (3-2x)^2 e^{2-3x};$
- 4) $y = x \log_2(1-3x)$
- 5) $y = \ln(x-1)^{2x}$
- 6) $y = x \ln \frac{3+x}{3-x}$ 7) $y = x \ln(x^2 - 3x + 2)$ 8) $y = x \cos x$ 9) $y = 2x \cos^2(x/3)$

10)

$$y = (x^2 + x) \cos^2 x.$$

(вот это хз, как решать.)

K1-15.30

Пусть $f(x) \in C^{n-1}[0; +\infty)$. Доказать, что существуют числа $a_k (1 \leq k \leq n)$ такие, что функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_k f(-kx), & \text{если } x < 0 \\ f(x), & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема на всей оси.

K1-15.31

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и удовлетворяет условию $\varphi'(x) = f(\varphi(x))$, где f имеет производные всех порядков. Доказать, что $\varphi(x)$ также имеет производные всех порядков.

K1-15.32

Доказать, что если $f^{(n)}$ существует, то

$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

K1-15.33

Пусть $P_{n,m}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^m)^n, m > 0$. Найти $P_{n,m}(1)$.

18.2.6 Problems about mean theorems for differentiable functions

(потом мб хорошо отработаю применения этих теорем, потому что пока что слабо вижу, как их использовать. укажу в 1 части, когда они могут быть полезны!!! пока вообще не до этого.)

K1-16 .пр.1

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, где $a > 0$. Доказать, что существует точка $\xi \in (a; b)$ такая, что

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Применяя теорему Коши к функциям $\psi(t) = f(t)/t$ и $\varphi(t) = 1/t$, получаем

$$\frac{f(b)/b - f(a)/a}{1/b - 1/a} = \frac{(\xi f'(\xi) - f(\xi))/\xi^2}{-1/\xi^2},$$

откуда следует равенство (6).

K1-16.pr.2. Properties of Legendre polynomials roots from the Rolle terem (??)

(нужно будет - посмотрю потом.)

Доказать, что все корни многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

действительные, простые и лежат на интервале $(-1; 1)$.

Рассмотрим многочлен $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$. Он имеет степень $2n$, и его корнями являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, причем каждый корень имеет кратность n . Поэтому если $n > 1$, то производная Q'_{2n} также имеет x_1 и x_2 своими корнями, но уже кратности $n - 1$. По теореме Ролля, у производной $Q'_{2n}(x)$ существует еще по крайней мере один корень x_3 , лежащий между x_1 и x_2 . Поскольку сумма кратностей всех корней многочлена равна его степени, а степень многочлена $Q'_{2n}(x)$ равна $2n - 1$, то кратность корня x_3 равна 1 и других корней, кроме x_1, x_2 и x_3 , у многочлена Q'_{2n} нет. Продолжая этот процесс, по индукции получим, что производная $Q_{2n}^{(n-1)}(x)$ имеет $n + 1$ простых корней $x_2(i) (i = 1, 2, \dots, n + 1)$. Занумеруем их в порядке возрастания: $-1 = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$. По теореме Ролля, на каждом

отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) лежит хотя бы один корень производной многочлена $Q_{2n}^{(n-1)}(x)$, т.е. корень многочлена Лежандра, ибо

$$[Q_{2n}^{(n-1)}(x)] = Q_{(2n)}^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x).$$

Таким образом, многочлен Лежандра имеет на интервале $(-1; 1)$ n различных корней, а так как его степень равна n , то все они простые и других корней, действительных или комплексных, у него нет.

К1-16.3

На интервале $(0; 1)$ найти такую точку ξ , что касательная к графику функции $y = x^3$ в точке $(\xi; \xi^3)$ будет параллельна хорде графика, соединяющей точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$.

К1-16.4

Доказать, что между двумя действительными корнями многочлена с действительными коэффициентами имеется корень его производной.

К1-16.5

Доказать, что если функция f дифференцируема n раз, на отрезке $[a; b]$ и обращается на нем в нуль в $n + 1$ точках, то существует такое $\xi \in (a; b)$, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

К1-16.6

Доказать, что если функция f дифференцируема n раз на отрезке $[a; b]$, $a = x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$, $x_i \in [a; b]$, n_2 - натуральные числа, $n_1 + \dots + n_k = n - 1$ и $f^{(j_2)}(x_2) = 0$, $j_2 = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, то на отрезке $[a; b]$ существует такая точка ξ , что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

К1-16.7

Доказать, что корни производной многочлена

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

действительные, простые и лежат на интервалах $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$.

К1-16.8

Доказать, что все корни уравнения $(1+x^2)^n \frac{d^n(1+x^2)^{-1}}{dx^n} = 0$ действительные.

К1-16.9

Доказать, что все корни уравнения $x^{2n} e^{-1/x} \frac{d^n e^{-1/x}}{dx^n} = 0$ действительные.

К1-16.10

Доказать, что все производные от многочлена с действительными коэффициентами, имеющего только действительные корни, также могут иметь только действительные корни.

К1-16.11

Доказать, что корни всех производных (порядка $m < 2n$) многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)}{dx^n}$$

действительные, простые и лежат в интервале $(-1; 1)$.

К1-16.12

Доказать, что у многочленов Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$$

все корни положительны.

K1-16.13. Arrangement of roots of Chebyshev-Hermit polynomials (??)

Доказать, что у многочленов Чебышева-Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

все корни действительны и лежат в интервале $(-\sqrt{2n+1}; \sqrt{2n+1})$.

(Zorich's book, p 525 and so on)

- a) Show that $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2$.
- b) Prove that $H_n(x)$ is a polynomial of degree n . The system of functions $\{H_0(x), H_1(x), \dots\}$ is called the system of Hermite polynomials.
- c) Verify that the function $H_n(x)$ satisfies the equation $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.
- d) The functions $\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ are called the Hermite functions. Show that $\psi_n''(x) + (2n+1-x^2)\psi_n(x) = 0$, and that $\psi_n(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$.
- e) Verify that $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \psi_m dx = 0$ if $m \neq n$.
- f) Show that the Hermite polynomials are orthogonal on $\mathbb{R}$ with weight e^{-x^2} .
9. The Chebyshev-Laguerre ¹¹ polynomials $\{L_n(x); n = 0, 1, 2, \dots\}$ can be defined by the formula $L_n(x) := e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$.
Verify that
 - a) $L_n(x)$ is a polynomial of degree n ;
 - b) the function $L_n(x)$ satisfies the equation

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

- c) the system $\{L_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ of Chebyshev-Laguerre polynomials is orthogonal with weight e^{-x} on the half-line $[0, +\infty[$.
10. The Chebyshev polynomials $\{T_0(x) \equiv 1, T_n(x) = 2^{1-n} \cos n(\arccos x); n \in \mathbb{N}\}$ for $|x| < 1$ can be defined by the formula

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

Show that:

- a) $T_n(x)$ is a polynomial of degree n ;
- b) $T_n(x)$ satisfies the equation

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

- c) the system $\{T_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ of Chebyshev polynomials is orthogonal with weight $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on the interval $] -1, 1[$.

11. a) In probability theory and theory of functions one encounters the following system of Rademacher ¹² functions: $\{\psi_n(x) = \varphi(2^n x); n = 0, 1, 2, \dots\}$, where $\varphi(t) = \text{sgn}(\sin 2\pi t)$. Verify that this is an orthonormal system on the closed interval $[0, 1]$.

b) The system of Haar ¹³ functions $\{\chi_{n,k}(x)\}$, where $n = 0, 1, 2, \dots$ and $k = 1, 2, 2^2, \dots$ is defined by the relations

$$\chi_{n,k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } \frac{2k-2}{2^{n+1}} < x < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \\ -1, & \text{if } \frac{2k-1}{2^{n+1}} < x < \frac{2k}{2^{n+1}} \\ 0 & \text{at all other points of } [0, 1] \end{cases}$$

Verify that Haar system is orthogonal on the closed interval $[0, 1]$.

12. a) Show that every n -dimensional vector space with an inner product is isometrically isomorphic to the arithmetic Euclidean space $\mathbb{R}^n$ of the same dimension.
- b) We recall that a metric space is called separable if it contains a countable everywhere-dense subset. Prove that if a vector space with inner product is separable as a metric space with the metric induced by the inner product, then it has a countable orthonormal basis.
- c) Let X be a separable Hilbert space (that is, X is a separable and complete metric space with the metric induced by the inner product in X). Taking an orthonormal basis $\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ in X , we construct the mapping $X \ni x \mapsto (c_1, c_2, \dots)$, where $c_i = \langle x, e_i \rangle$ are the Fourier coefficients of the expansion of the vector in the basis

¹¹ E.N. Laguerre (1834-1886) - French mathematician.

¹² H.A. Rademacher (1892-1969) - German mathematician (American after 1936).

¹³ A. Haar (1885-1933) - Hungarian mathematician.

$\{e_i\}$. Show that this mapping is a bijective, linear, and isometric mapping of X onto the space l_2 considered in Example 14.

d) Using Fig. 18.1, exhibit the basic idea of the construction of Example 14, and explain why it comes about precisely because the space in question is infinite-dimensional.

e) Explain how to construct an analogous example in the space of functions $C[a, b] \subset \mathcal{R}_2[a, b]$.

K1-16.14

Применив теорему Лагранжа к функции $1/x^\alpha$, доказать, что при любом $n \in N$ и любом $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \right].$$

K1-16.15

Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенства:

- 1) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ при $0 < a < b, n \in N$;
- 2) $x/(1+x) < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$;
- 3) $e^x \geq 1+x$ при $x \in R$;
- 4) $e^x > ex$ при $x > 1$;
- 5) $x^\alpha |\ln x|, 1/(\alpha e)$ при $0 < x < 1, \alpha > 0$.

K1-16.16

Доказать, что при $x \geq 0$ справедливо равенство

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

где $1/4 \leq \theta(x) < 1/2$, причем $\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = 1/4, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = 1/2$.

K1-16.17

Доказать: если функция f дифференцируема n раз при $x \geq 0$, $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, а $f^{(n)}(x) > 0$ при $x > 0$, то и $f(x) > 0$ при $x > 0$.

K1-16.18

Доказать: если функции f и g дифференцируемы n раз при $x \geq 0$ и $f(0) = g(0), f'(0) = g'(0), \dots, f^{(n-1)}(0) = g^{(n-1)}(0), f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ при $x > 0$, то и $f(x) > g(x)$ при $x > 0$.

K1-16.19

Доказать, что если функция f дифференцируема и неограничена на конечном интервале $(a; b)$, то ее производная также неограничена на этом интервале.

K1-16.20

Доказать, что если функция f дифференцируема на конечном или бесконечном интервале $(a; b)$ и существуют равные конечные или одного и того же знака бесконечные пределы $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f'(\xi) = 0$.

K1-16.21

Пусть $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x)), 0 < \xi(x) < x$.

Доказать, что если $f(x) = x \sin(\ln x)$ при $x > 0$ и $f(0) = 0$, то функция $\xi(x)$ разрывна в сколь угодно малом интервале $(0; \varepsilon), \varepsilon > 0$.

K1-16.22

Доказать, что если функция f дифференцируема при $x > a$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

K1-16.23

Доказать, что если функция f дифференцируема при $x > a$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$.

K1-16.24

Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$, $ab > 0$, то

$$\frac{1}{a-b} \left| \begin{vmatrix} a & b \\ f(x) & f(b) \end{vmatrix} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

где $a < \xi < b$.

K1-16.25

Доказать, что если функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[a; b]$ и не является постоянной, то на этом отрезке существуют такие точки ξ_1 и ξ_2 , что

$$f'(\xi_1) > 0, \quad f'(\xi_2) < 0.$$

K1-16.26

Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и не является линейной, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

K1-16.27

Доказать, что если функция f дважды дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и $f'(a) = f'(b) = 0$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

K1-16.28

Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки.

Доказать, что если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$, причем они не равны между собой, то функция f недифференцируема в точке x_0 .

K1-16.29

Доказать, что если функция f дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , непрерывна в самой этой точке и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, то существует и производная $f'(x_0)$, причем $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ (иначе говоря, доказать следствие 3 теоремы Лагранжа).

K1-16.30

Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[1; 2]$, то существует такая точка $\xi \in (1; 2)$, что $f(2) - f(1) = \frac{\xi^2}{2} f'(\xi)$.

K1-16.31

Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$, причем $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f(a) - f(\xi) = (\xi f'(\xi)) / 2$.

K1-16.32

Пусть функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(a; b)$ и ее производная монотонна на этом интервале.

Доказать, что если $f(x_0) = 0$, $x_0 \in (a; b)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$.

K1-16.37

Пусть функция f при любом $x \in R$ и любом $h > 0$ удовлетворяет условию $|f(x+h) - f(x-h)| < h^2$. Доказать, что $f(x) = \text{const}$.

K1-16.38

Пусть функция f дифференцируема при всех $x \in R$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Доказать, что существует точка ξ такая, что $f'(\xi) = 0$.

K1-16.39

Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и $f'(a)f'(b) < 0$. Доказать, что существует точка $x_0 \in (a; b)$ такая, что $f'(x_0) = 0$.

K1-16.40

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную второго порядка на R , и пусть существуют конечные пределы этой функции при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$. Доказать, что найдется точка x_0 такая, что $f'(x_0) = 0$.

K1-16.41

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, где $a > 0$. Доказать, что существует точка $\xi \in (a; b)$ такая, что

$$\frac{ab(bf(b) - af(a))}{b - a} = \xi^2 (f(\xi) + \xi f'(\xi)).$$

K1-16.42

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$, дифференцируема на интервале $(0; 1)$ и удовлетворяет условиям: $f(0) = 5$, $f(1) = 3$, $f'(x) \geq -2$ для всех $x \in (0; 1)$. Доказать, что $f(x)$ - линейная на отрезке $[0; 1]$ функция.

K1-16.43

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 2]$, дифференцируема на интервале $(0; 2)$ и удовлетворяет условиям: $f(0) = -5$, $f(2) = -1$; $f(x) \leq -2$ для всех $x \in (0; 2)$. Доказать, что $f(x)$ - линейная на отрезке $[0; 2]$ функция.

K1-16.44

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема при $x > 1$ и существует конечный $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Доказать, что $f'(x)$ не может иметь при $x \rightarrow +\infty$ конечного предела, не равного нулю. Может ли $f'(x)$ не иметь предела при $x \rightarrow +\infty$?

K1-16.45

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала справедливо неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|^\alpha$, где $\alpha > 1$. Доказать, что функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a; b)$.

18.2.7 Problems about the highest and lowest values

(тут хз что от кудрявцева 1, не до этого вообще)

K1-22.1

Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь S , найти прямоугольник: 1) с наименьшим периметром; 2) с наименьшей диагональю.

K1-22.2

Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса R .

K1-22.3

Найти на гиперболе $x^2/2 - y^2 = 1$ точку, ближайшую к точке $(3; 0)$.

K1-22.4

Найти на параболе $y = x^2$ точку, ближайшую к точке $A(2; 1/2)$.

K1-22.5

Найти наибольшую площадь прямоугольника, две вершины которого лежат на осях Ox и Oy прямоугольной системы координат, третья - в точке $(0; 0)$, а четвертая - на параболе $y = 3 - x^2$.

K1-22.6

Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $A(1; 2)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

K1-22.7

Найти длину боковой стороны трапеции, имеющей наименьший периметр среди всех равнобедренных трапеций с заданной площадью S и углом α между боковой стороной и нижним основанием.

K1-22.8

Через точку $A(2; 1/4)$ проводятся прямые, пересекающие положительные полуоси в точках B и C . Найти уравнение той прямой, для которой отрезок BC имеет наименьшую длину.

K1-22.26

Из всех цилиндров, вписанных в куб с ребром a так, что ось каждого цилиндра совпадает с диагональю куба, а окружности оснований касаются граней куба, найти цилиндр наибольшего объема.

K1-22.27

Найти высоту конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R .

K1-22.28

Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R .

K1-22.29

В конус, радиус основания которого равен R , а высота H , вписан цилиндр наибольшего объема. Найти радиус основания и высоту этого цилиндра.

K1-22.30

Из круглого листа жести вырезают сектор и свертывают его в коническую воронку. Каким должен быть угол сектора, чтобы воронка имела наибольший объем?

K1-22.31

Найти наименьшую боковую поверхность конуса, имеющего объем v .

K1-22.32

Найти наибольший объем конуса с данной образующей l .

K1-22.33

Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиуса r (предполагается, что основания полушара и конуса лежат в одной плоскости и концентричны).

K1-22.34

Рассмотрим пучок прямых, проходящих через точку $M(a; b)$, где $a > 0, b > 0$, и пересекающих положительные полуоси Ox и Oy . Найти наименьшую длину отрезка PQ , где P и Q - точки пересечения прямой пучка с положительными полуосями.

K1-22.35

Камень брошен с заданной начальной скоростью под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком α дальность полета камня будет наибольшей.

K1-22.36

Внутреннее сопротивление гальванического элемента равно r . При каком внешнем сопротивлении мощность тока, получаемого от этого элемента во внешней цепи, будет наибольшей?

K1-22.45

Груз, лежащий на горизонтальной плоскости P , нужно сдвинуть с места силой, приложенной к этому грузу. Определить угол, образуемый этой силой с плоскостью P , при котором величина силы будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k .

K1-22.46

Наблюдатель находится напротив картины, закрепленной на вертикальной стене. Нижний край картины расположен выше уровня глаз наблюдателя на a , верхний край - на b . На каком расстоянии от стены должен стоять наблюдатель, чтобы угол, под которым он видит картину, оказался наибольшим?

K1-22.47

Точка $A(x_0; y_0)$ расположена внутри параболы $y^2 = 2px, p > 0$, точка B - на самой параболе, F - ее фокус. Доказать, что длина ломаной ABF будет наименьшей, если отрезок AB параллелен оси параболы, а угол FBA делится нормалью к параболе в точке B пополам (принцип параболического зеркала).

K1-22.48

Точки A и B расположены соответственно в верхней и нижней полуплоскостях прямоугольной системы xOy . Частица движется по ломаной AMB , где M - точка оси Ox . Скорости движения частицы в верхней и нижней полуплоскостях соответственно равны v_1 и v_2 . Доказать, что время движения частицы будет наименьшим, если $\sin \alpha / \sin \beta = v_1 / v_2$, где α, β - углы, образуемые отрезками AM и BM с нормалью к оси Ox (в оптике эти углы называют соответственно углом падения и углом отражения).

K1-20 .пр.4

Исследовать на экстремум функцию:

$$1) f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$$

1) Функция определена и дифференцируема при всех $x \in R$, кроме точки $x = -1$. Вычисляем ее производную:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 3(x+3)^2 - (x+3)^3 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+3)^2(x-3)}{(x+1)^3},$$

и находим критические точки: $x = -3$ и $x = 3$. Легко видеть, что существует окрестность точки $x = -3$, в которой $f'(x) \geq 0$, т. е. при переходе через точку $x = -3$ знак производной не изменяется. Следовательно, эта критическая точка не является точкой экстремума. В точке $x = 3$ функция имеет строгий минимум, так как существуют левая окрестность этой точки, в которой $f'(x) < 0$, и правая окрестность этой точки, в которой $f'(x) > 0$. Вычисляя значение функции при $x = 3$, находим минимум:

$$f(3) = 6^3 / 4^2 = 13,5.$$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$$

2) Функция определена и непрерывна при всех $x \in R$. Вычисляем ее производную:

$$f'(x) = \frac{(1-x)2(x-2) - (x-2)^2}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)^4}} = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}, \quad x \neq 1, \quad x \neq 2.$$

В точках $x = 1, x = 2$ производная не существует. Таким образом, функция имеет три критические точки: $x = 1, x = 4/3, x = 2$. При переходе через точку $x = 1$ производная не меняет знака, поэтому критическая точка $x = 1$ не является точкой экстремума. При переходе через точку $x = 4/3$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому в точке $x = 4/3$ функция имеет минимум. При переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак плюс на минус, поэтому $x = 2$ - точка максимума. Минимум функции равен $f(4/3) = -\sqrt[3]{4}/2$, а максимум равен $f(2) = 0$.

K1-20.16

Найти максимумы и минимумы функции (16 – 20).

1) $y = x^4 - 8x^2 + 12$;

2) $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

3) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 3$;

4) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$;

5) $y = (x^3 - 10)(x + 5)^2$; 6) $y = (x + 2)^2(x - 3)^3$.

K1-20.17

1) $y = \frac{1}{x^2 - x}$;

2) $y = \frac{x}{x^2 + 4}$;

3) $y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$;

4) $y = \frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$;

5) $y = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$; 6) $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$.

K1-20.18

1) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$;

2) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;

3) $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$;

4) $y = x + \sin x$

5) $y = x - 2 \sin^2 x$

6) $y = x - 2 \arctg x$; 7) $y = (x - 2) \cos \pi x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x$; 8) $y = (x^2 + 1) \arctg x - \frac{\pi}{4} x^2 - x$.

K1-20.19

1) $y = (x - 1)e^{3x}$;

2) $y = (3 - x^2)e^x$;

3) $y = (x^2 - 8)e^{-x}$;

4) $y = x^3 e^{-4x}$;

5) $y = x^4 e^{-x^2}$; 6) $y = (x + 1)^5 e^{-x}$; 7) $y = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$; 8) $y = (x + 2)e^{1/x}$.

K1-20.20

1) $y = \sqrt{x} \ln x$;

2) $y = \frac{\ln^2 x}{x} \cdot 3$

3) $y = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}$

4) $y = x^2 - 4x - 1 - \ln(x^2 - 4x + 4)$;

5) $y = \ln \cos x - \cos x$;

6) $y = \ln(x^2 - 1) - 2 \arctg x$.

18.2.8 Problems about the dependence of functions on parameters (!!!!!)

(в динамических системах и скорее всего во многих других темах это очень важный раздел!!! оттренирую, тут многие задачи нужно решить!!! очень медленно пока решал их.)

18.2.9 Problems about asymptotes of functions 1

(про графики функций все в следующий раздел перекину)
(удалю потом ненужное или простое)

К1-11 .пр.1

Найти вертикальные асимптоты графика функции f и построить его, если:

1) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

3) $f(x) = \sqrt{x^4 - 1}$ 1) Функция определена и непрерывна на интервале $(-1; 1)$. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \sqrt{1-x^2} = 0$$

то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty.$$

Следовательно, прямые $x = -1$ и $x = 1$ - вертикальные асимптоты графика.

Данная функция нечетная. Она строго возрастает на интервале $(0; 1)$. Действительно, если $0 < x < 1$, то

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-x^2} - 1}$$

откуда и видно, что при возрастании x от 0 до 1 функция $1/(1-x^2)$,

а вместе с ней и функция $f(x)$ строго возрастают. Отметим еще, что $x/\sqrt{1-x^2} > x$ при $x > 0$. Для того чтобы уточнить вид графика вблизи точки $x = 0$, выделим главную часть функции при $x \rightarrow 0$. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1,$$

то $f(x)/x = 1 + o(1)$, откуда

$$f(x) = x + o(x).$$

Это означает, что график данной функции вблизи $x = 0$ "похож" на график функции $g(x) = x$ (точки этих графиков, соответствующие значению x , сближаются по вертикали быстрее, чем x убывает). График функции изображен на рис. 11.1.

2) Функция определена и непрерывна на промежутке $(0; 1]$, Так как

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{1-x}{x}} = +\infty$$

то прямая $x = 0$ - вертикальная асимптота графика. Кроме того,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1-x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x} = 1.$$

Для разности $f(x) - 1/\sqrt{x}$ имеем

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}+1} = o(1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0,$$

поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + o(1).$$

Таким образом, функция $1/\sqrt{x}$ является главной частью данной функции $f(x)$ при $x \rightarrow +0$ и, более того, расстояние по вертикали между точками графиков функций $\sqrt{(1-x)/x}$ и $1/\sqrt{x}$ стремится к §11

Асимптоты и графики функций 227 нулю при $x \rightarrow +0$. Как иногда говорят, график функции $1/\sqrt{x}$ является криволинейной асимптотой графика данной функции (рис. 11.2). Используя равенство

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{1-x} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

и учитывая, что $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$, при $x \rightarrow 1-0$ получаем

$$f(x)/\sqrt{1-x} = 1/\sqrt{x} = 1 + o(1)$$

откуда

$$f(x) = \sqrt{1-x} + o(\sqrt{1-x}).$$

Следовательно, график данной функции в окрестности точки $x = 1$

K1-11 .пр.2

Найти асимптоты графика функции f и построить его, если:

1) $f(x) = \frac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$;

1) Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6(x^2-4)}{3x^2+8} = 2$, прямая $y = 2$ является горизонтальной асимптотой графика и при $x \rightarrow +\infty$, и при $x \rightarrow -\infty$. Функция непрерывна на R , следовательно, вертикальных асимптот ее график не имеет. Данная функция четная. Из равенства

$$f(x) = 2 - \frac{40}{3x^2+8}$$

следует, что на $(0; +\infty)$ с ростом x значения функции строго возрастают. Из этого же равенства видно, что точки графика функции приближаются при $x \rightarrow \infty$ к прямой $y = 2$ снизу ($f(x) < 2$ для любого $x \in R$). При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение $f(0) = -3$. Для того чтобы уточнить вид графика вблизи точки $x = 0$, представим функцию в виде

$$f(x) = \frac{3(5x^2 - (3x^2 + 8))}{3x^2 + 8} = \frac{15x^2}{3x^2 + 8} - 3$$

и воспользуемся тем, что при $x \rightarrow 0$

$$\frac{x^2}{ax^2 + b} = \frac{x^2}{b} + o(x^2), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Последнее равенство доказывается легко:

$$\frac{x^2}{ax^2 + b} - \frac{x^2}{b} = -\frac{ax^4}{b(ax^2 + b)} = -\frac{ax^2}{b(ax^2 + b)}x^2$$

и так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ax^2}{b(ax^2 + b)} = 0$, то $\frac{-ax^2}{b(ax^2 + b)}x^2 = o(x^2)$, откуда и следует (21). Используя (21) при $a = 3, b = 8$, получаем равенство

$$f(x) = \frac{15}{8}x^2 - 3 + o(x^2)$$

которое означает, что при $x \rightarrow 0$ график данной функции "схож" с параболой $y = \frac{15}{8}x^2 - 3$. График представлен на рис. 11.4.

2) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

2) Функция определена всюду, кроме точки $x = 0$. Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -\infty,$$

прямая $x = 0$ - вертикальная асимптота графика. Далее,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1,$$

поэтому $y = 1$ - горизонтальная асимптота при $x \rightarrow +\infty$, а $y = -1$ - горизонтальная асимптота при $x \rightarrow -\infty$. Поскольку $\left| \sqrt{1+x^2}/x \right| > 1$ при $x \neq 0$, точки графика при $x \rightarrow +\infty$ приближаются сверху к прямой $y = 1$, а при $x \rightarrow -\infty$ - снизу к прямой $y = -1$. Данная функция нечетная. Если $x > 0$, то

$$f(x) = \sqrt{1/x^2 + 1},$$

поэтому с ростом x от 0 до $+\infty$ значения $f(x)$ строго убывают от $+\infty$ до 1

График функции показан на рис. 11.5.

K1-11 .пр.3

Найти все асимптоты графика функции $f(x)$ и построить его, если:

1) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$;

1) Функция определена и непрерывна всюду, кроме $x = 1$, и

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-2x}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2-2x}{x-1} = -\infty$$

следовательно, график имеет только одну вертикальную асимптоту $x = 1$. Поскольку

$$\frac{x^2-2x}{x-1} = x-1 - \frac{1}{x-1}$$

прямая $y = x-1$ является, очевидно, наклонной асимптотой графика

и при $x \rightarrow +\infty$, и при $x \rightarrow -\infty$. При $x > 1$ функции $x-1$ и $-1/(x-1)$ строго возрастают, значит, и их сумма, т. е. данная функция, строго возрастает. Аналогично, при $x < 1$ данная функция строго возрастает. Из (22) видно, что при $x \rightarrow +\infty$ точки графика приближаются к асимптоте снизу ($f(x) < x-1$), а при $x \rightarrow -\infty$ - сверху. График показан на рис. 11.6.

2) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$;

2) Функция определена и непрерывна во всех точках, кроме $x = 0$, и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|} = +\infty$$

т. е. $x = 0$ - вертикальная асимптота графика. Выясним, есть ли асимптоты при $x \rightarrow +\infty$. Находим (см.

формулы (5) и (6)) $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{4 + \frac{1}{x^4}} \rightarrow 2$ при $x \rightarrow +\infty$, $f(x)-2x = \frac{\sqrt{4x^4+1}-2x^2}{x} = \frac{1}{x(\sqrt{4x^4+1}+2x^2)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Значит, $y = 2x$ - наклонная асимптота графика при $x \rightarrow +\infty$, причем $f(x) > 2x$, т. е. точки графика

при $x \rightarrow +\infty$ приближаются к асимптоте сверху. Далее, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x^4}}\right) = -2$, ,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4x^4+1}+2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x(2x^2+\sqrt{4x^4+1})} = 0$, значит, $y = -2x$ - наклонная

асимптота при $x \rightarrow -\infty$. Отметим, что $f(x) > -2x$, т. е. точки графика при $x \rightarrow -\infty$ приближаются к асимптоте $y = -2x$ сверху. Теперь исследуем функцию на монотонность. Поскольку

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|} = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{4x^2 \frac{1}{x^2}}} = 2$$

причем знак равенства имеет место лишь при $4x^2 = 1/x^2$, т. е. при $x = \pm 1/\sqrt{2}$, значение функции $f(1/\sqrt{2}) = 2$ является наименьшим на интервале $(0; +\infty)$. На интервале $(0; 1/\sqrt{2})$ функция строго убывает, так как если $0 < x_1 < x_2 < 1/\sqrt{2}$, то

$$f^2(x_2) - f^2(x_1) = 4(x_2^2 - x_1^2) - \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = (x_2^2 - x_1^2) \frac{4x_1^2 x_2^2 - 1}{x_1^2 x_2^2} < 0$$

Аналогично доказывается, что на интервале $(1/\sqrt{2}; +\infty)$ функция строго возрастает. Функция четная. График ее изображен на рис. 117

3) $f(x) = 3\sqrt{x^2/4 - 1}$

(ниже один из первых разделов кудрявцева, я забыл, какой)

K1-7.30

Построить в одной системе координат графики функций $f(x)$ и $1/f(x)$, если:

1) $f(x) = 3x - 2$

2) $f(x) = x^2 + 1$

3) $f(x) = x^2 - 1$

4) $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$

K1-7.31

Построить в одной системе координат графики функций f_1 , f_2 и $f_1 + f_2$, если:

1) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x$;

2) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -\frac{1}{x^2}$

3) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$

4) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$.

K1-7.32

Построить в одной системе координат графики функций f_1 , f_2 и $f_1 - f_2$, если:

- 1) $f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $f_2(x) = x^2$
- 2) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$
- 3) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 4x$;
- 4) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 1/x^2$.

K1-7.33

Доказать, что функции f и g взаимно обратны:

- 1) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$
- 2) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$, $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

K1-7.34

Доказать, что график функции f симметричен относительно прямой $y = x$:

- 1) $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)
- 2) $f(x) = \sqrt[7]{2 - x^7}$

K1-7.33

Задать кривую уравнением и построить ее:

- 1) $x = 6t - t^2$, $y = 3t$
- 2) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$
- 3) $x = \cos t$, $y = \sin 2t$;
- 4) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin 2t + 2 \cos 2t$
- 5) $x = \sin 3t$, $y = \sin t$

K1-7.34

Построить кривую:

- 1) $x = \frac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{t^2}{1+t^2}$;
 - 2) $x = \frac{1}{1-t^2}$, $y = \frac{t^2}{1-t^2}$;
 - 3) $x = \frac{t}{1+|t|}$, $y = \frac{|t|}{1+t}$;
 - 4) $x = \left| \frac{t}{1-t} \right|$, $y = \frac{t}{1-|t|}$;
 - 5) $x = 3 \cos t$, $y = 4 \sin t$
 - 6) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$.
- 7) $x = \cos t$, $y = t + 2 \sin t$ 8) $x = 2^{t-1}$, $y = (t^3 + 1) / 4$.

K1-7.35

Построить график функции в полярных координатах:

- 1) $r = \frac{\varphi}{\varphi - \pi}$
- 2) $r = 2|\cos 3\varphi|$
- 3) $\varphi = \frac{r}{r-1}$
- 4) $\varphi = \arcsin(r - 1)$.

K1-11.пр 5 Cartesian sheet (!!!)

(мб порешаю, эта интересная хотя бы)
Найти асимптоты графика функции

$$r(\varphi) = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$

и построить этот график в полярных координатах. Данная функция периодическая с периодом 2π , поэтому достаточно рассмотреть отрезок $[-\pi/2; 3\pi/2]$ длины 2π . Здесь функция определена для

$$\varphi \in [-\pi/2; -\pi/4] \cup [0; \pi/2] \cup (3\pi/4; \pi]$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\pi/4-0} r(\varphi) \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = \lim_{\varphi \rightarrow -\pi/4-0} \frac{3 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{2}(1 - \cos \varphi \sin \varphi)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow (3\pi)/4+0} r(\varphi) \sin\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) = \lim_{\varphi \rightarrow (3\pi)/4+0} r(\varphi) \left(-\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Таким образом, при $\varphi \rightarrow -\pi/4 - 0$ асимптотой является прямая

$$r = -\frac{1}{\sqrt{2} \sin(\varphi + (\pi/4))}$$

а при $\varphi \rightarrow (3\pi)/4 + 0$ - прямая

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\varphi - (3\pi/4))}.$$

Поскольку $\sin((\varphi - (3\pi/4))) = -\sin((\varphi + (\pi/4)))$, то это одна и та же прямая. Строим ее: отрезок OA (рис. 11.14) длины $1/\sqrt{2}$ поворачиваем на угол $-\pi/4 + (-1)\pi/2 = -(3\pi)/4$ и через получившуюся точку A_1 проводим прямую перпендикулярно OA_1 , она и является асимптотой. Определим, как расположена кривая относительно своей асимптоты. При $\varphi \rightarrow -\pi/4 - 0$ (см. рис. 11.14) имеем

$$\begin{aligned} |MQ| &= \left| r(\varphi) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right| = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{1 - \cos \varphi \sin \varphi} - 1 \right| < \\ &< \frac{3}{\sqrt{2}} \left(+1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Значит, $|MQ| < |PQ|$, т. е. точки кривой находятся над асимптотой. Если $\varphi \rightarrow 3\pi/4 + 0$, то

$$\begin{aligned} |NS| &= r(\varphi) \sin\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1 - \cos \varphi \sin \varphi} \right) < \frac{3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

поэтому $|NS| < |RS|$ и здесь точки кривой расположены над асимптотой. Из проведенных вычислений следует, что

$$|PM| = \frac{3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{2 - \sin 2\varphi} \right),$$

и видно, что $|PM|$ строго убывает при возрастании φ от $\pi/2$ до $-\pi/4$. Аналогично устанавливаем, что $|RN|$ (см. рис. 11.14) строго

убывает при убывании φ от π до $3\pi/4$. Это и показано схематично на рис. 11.14. Кривая проходит дважды через центр O , так как $r = 0$ при $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi$ (т. е. O - точка самопересечения кривой). Исследуем вид кривой вблизи точки O . Если $\varphi \rightarrow -\pi/2$, то

$$\cos \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sim \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \sin \varphi \sim -1$$

поэтому $\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi \sim -1$ и

$$r(\varphi) \sim \frac{-3(\pi/2 + \varphi)}{-1} = 3\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right).$$

Переходя к декартовым координатам, получаем

$$x = r(\varphi) \cos \varphi \sim 3\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)^2, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi \sim -3\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

откуда $x \sim y^2/3$, т. е. при $\varphi \rightarrow -\pi/2$ кривая "сливается" с параболой $x = y^2/3$ (рис. 11.15). Аналогично, при $\varphi \rightarrow \pi$ имеем

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin(\pi - \varphi) \sim \pi - \varphi, \quad \cos \varphi \sim -1, \\ \sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi &\sim -1, \quad r(\varphi) \sim 3(\pi - \varphi), \end{aligned}$$

откуда

$$x \sim -3(\pi - \varphi), \quad y \sim 3(\pi - \varphi)^2 \sim x^2/3,$$

т. е. график данной функции $r = r(\varphi)$ "схож" с параболой $y = x^2/3$

(см. рис. 11.15). Точно так же найдем, что $y \sim x^2/3$ при $\varphi \rightarrow 0$ и $x \sim y^2/3$ при $\varphi \rightarrow \pi/2$. Оставшуюся часть графика ($\varphi \in [0; \pi/2]$) строим по точкам (рис. 11.16). Отметим, что эта часть, как и весь график, симметрична относительно прямой $\varphi = \pi/4$, так как $r(\pi/2 - \varphi) = r(\varphi)$, что равносильно равенству $r(\pi/4 + \alpha) = r(\pi/4 - \alpha)$. Более обоснованное построение "петли" $ABA'O$ будет проведено далее с использованием понятия производной.

Построенная кривая называется декартовым листом, упоминание о ней впервые встречается в письмах Р. Декарта. В декартовых координатах эта кривая, как легко проверить, задается уравнением $x^3 + y^3 = 3xy$.

K1-11pr.6. Trisector of Loschmidt (???)

Найти асимптоты кривой

$$x^3 - 3xy^2 = R(x^2 + y^2), \quad R > 0, \quad x \neq 0.$$

Коэффициент при старшей степени y (т.е. при y^2) равен $3x + R$. Следовательно, вертикальной асимптотой может быть только прямая $x = -R/3$. Для нахождения наклонных асимптот подставим в данное уравнение $y = kx + b$, получим

$$(3k^2 - 1)x^3 + (6kb + Rk^2 + R)x^2 + (3b^2 + 2Rkb)x + Rb^2 = 0$$

и, приравняв нулю коэффициенты при старших степенях x (т. е. при x^3 и x^2), придем к системе

$$\begin{cases} 3k^2 - 1 = 0 \\ 6kb + Rk^2 + R = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = \pm \frac{2R}{3\sqrt{3}}.$$

Значит, только прямые

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2R}{3\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2R}{3\sqrt{3}}$$

могут быть наклонными асимптотами данной кривой. Все три найденные прямые действительно являются асимптотами данной кривой. В этом легко убедиться, например, перейдя к полярным координатам, тогда уравнение данной кривой примет вид

$$r = R/\cos 3\varphi.$$

Можно воспользоваться и заданием этой кривой с помощью параметра $t = y/x$. Подставляя $y = tx$ в уравнение кривой, найдем, что

$$x = R \frac{1+t^2}{1-3t^2}, \quad y = R \frac{t(1+t^2)}{1-3t^2}.$$

Эти функции задают исходную кривую. Рассмотренную кривую называют трисектрисой Лоншама. Она может быть использована для деления угла на три равные части.

(?? мб в геометрии укажу это применение или тут, пока не до размышлений о применениях)

Найти асимптоты графика функции $y = y(x)(1 - 7)$.

K1-11.1

- 1) $y = \frac{1}{1-x^2}$;
- 2) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$;
- 3) $y = \frac{x^3}{6x^2-8-x^4}$;
- 4) $y = \frac{x}{1+x^2}$;
- 5) $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$;
- 6) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$;
- 7) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ 8) $y = (2-x)^{2/3} - (2+x)^{2/3}$.

K1-11.2

- 1) $y = x + \frac{1}{x^2}$;
- 2) $y = x + \frac{x^2}{x^2+1}$;
- 3) $y = \frac{x^2+8x-6}{x}$;
- 4) $y = \frac{x^2}{x+4}$;
- 5) $y = \frac{x^2}{|x|+1}$;
- 6) $y = \frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$ 7) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ 8) $y = \frac{x^2-2x+3}{x+2}$ 9) $y = \frac{x^3-3ax^2+a^3}{x^2-3bx+2b^2}$

10)

$$y = \frac{x^5}{x^4+1}.$$

K1-11.3

- 1) $y = \sqrt{x^2 - 4}$;
- 2) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$
- 3) $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x}$
- 4) $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$;
- 5) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$
- 6) $y = x\sqrt{\frac{x}{x+4}}$; 7) $y = \sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}$ 8) $y = \sqrt{x^2 - 1} - x$ 9) $y = x + \sqrt{4x^2 + 1}$.

K1-11.4

- 1) $y = e^{-1/x}$;
- 2) $y = 0, 1^{x^2}$;
- 3) $y = 2^{-1/x^2}$;
- 4) $y = 2^x/x$
- 5) $y = x^2 e^x$; 6) $y = e^{1/x} - x$; 7) $y = 1 - xe^{-1/|x|^{-1/x}}$; 8) $y = 1 + xe^{2/x}$; 9) $y = x2^{1/x^2}$;

10)

$$y = |e^x - 1|$$

11)

$$y = |x + 2|e^{-1/x}.$$

K1-11.5

- 1) $y = (1 + 1/x)^x$;
- 2) $y = x(1 - 1/x)^x$
- 3) $y = \operatorname{th} x$;
- 4) $y = \operatorname{cth} x$;
- 5) $y = \operatorname{th}^2 x$
- 6) $y = x \operatorname{th} x$ 7) $y = 2x + \operatorname{cth} x$ 8) $y = x \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

K1-11.6

- 1) $y = \log_3 (4 - x^2)$;
- 2) $y = \log_{0.5} (2x^2 - 3x + 1)$;
- 3) $y = \lg \sin 2x$;
- 4) $y = x + \frac{\ln x}{x}$;
- 5) $y = \ln (1 + e^x)$;
- 6) $y = x \lg (e + \frac{1}{x})$.

K1-11.7

- 1) $y = \frac{1}{\cos(x-\pi/6)}$
- 2) $y = \operatorname{cosec} 2x$;
- 3) $y = \frac{\cos x}{x}$;
- 4) $y = x + \frac{\sin x}{2x}$;
- 5) $y = x \sin \frac{1}{x}$
- 6) $y = 2 + \cos \frac{2}{x}$; 7) $y = \operatorname{arccotg} x$ 8) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 9) $y = \arcsin \frac{1}{x^2}$;

10)

$$y = \frac{x}{2} + \arccos \frac{1}{x+1}$$

11)

$$y = 2x - \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

K1-11.11

Используя метод выделения главной части, построить график функции $y = y(x)$, если:

$$1) y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{1-x}};$$

$$2) y = x\sqrt{4-x^2}$$

$$3) y = \sqrt{x^2 - x^4};$$

$$4) y = \sqrt[4]{9x^2 - x^4}$$

$$5) y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$6) y = \sqrt[4]{\frac{x^4}{3+x^4}} \quad 7) y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad 8) y = \sqrt{1-\frac{1}{x}} \quad 9) y = x^{3/2} - 4x^{1/2}.$$

K1-11.12

Функция f определена в окрестности точки x_0 и

$$f(x) = a(x - x_0) + o((x - x_0)), \quad a \neq 0.$$

Доказать, что:

1) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{a(x - x_0) + o(\sqrt{|x - x_0|})}$ при $a(x - x_0) \geq 0$, т. е. графики функций $\sqrt{f(x)}$ и $\sqrt{a(x - x_0)}$ "сближаются" при $x \rightarrow x_0$; 2) если $\alpha > 0$, то

$$(f(x))^\alpha = (a(x - x_0))^\alpha + o(|x - x_0|^\alpha)$$

при $a(x - x_0) > 0$, т. е. графики функций $(f(x))^\alpha$ и $(a(x - x_0))^\alpha$ "сближаются" при $x \rightarrow x_0$.

K1-11.13

1) Функция f определена в окрестности точки x_0 и

$$f(x) = a(x - x_0) + o((x - x_0)^2), \quad a \neq 0.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a(x - x_0)} + o(1),$$

т. е. графики функций $\frac{1}{f(x)}$ и $\frac{1}{a(x - x_0)}$ "сближаются" при $x \rightarrow x_0$. 2) Проверить, что функция $f(x) = x + x^{4/3}$ удовлетворяет условию

$$f(x) = x + o(x) \text{ при } x \rightarrow 0,$$

но равенство

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + o(1) \text{ при } x \rightarrow 0$$

неверно.

K1-11.15

Выяснить, какие из функций f, g имеют асимптоту при $x \rightarrow +\infty$, если:

$$1) f(x) = x + \sqrt{x}, g(x) = x + \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$2) f(x) = \ln(e^x \cdot x^{1/\sqrt{x}}), g(x) = \ln \frac{e^x}{x+2};$$

$$3) f(x) = \frac{(x+1) \ln x + 1}{\ln x + 1}, g(x) = \frac{(x+1) \ln x + x}{\ln x + 1}$$

$$4) f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}, g(x) = \sqrt[4]{x^4 + bx}$$

K1-11.16

Установить, сверху или снизу приближаются точки графика функции $y = y(x)$ к наклонной асимптоте при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$, если:

1) $y = \frac{x^2+1}{x}$

2) $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

3) $y = \frac{(x+1)^3}{(x+2)^2}$

4) $y = \frac{x^2}{|x+1|}$

5) $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$

6) $y = \frac{x^3+2\sin x}{x^2+1}$. Найти асимптоты графика функции и построить этот график (17–20).

K1-11.17

1) $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$;

2) $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$

3) $y = \frac{x^3}{1-x^3}$

4) $y = \frac{(x-3)^2}{4x-4}$

5) $y = \frac{x^3}{1+x^2}$

6) $y = \sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}$ 7) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ 8) $y = \frac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$ 9) $y = 1 - \sqrt{4x^2+1}$

10)

$$y = \sqrt{x^2+4x+5} - 2;$$

11)

$$y = \sqrt[3]{x^3-x^2}$$

K1-11.18

1) $y = e^{1/(3+x)}$

2) $y = \ln(4-x^2)$

3) $y = \frac{e^x}{e^x-1}$

4) $y = \log_x 2 - 6x + 72$;

5) $y = \ln(1+2e^x)$

6) $y = \ln \cos x$ 7) $y = \ln \operatorname{arctg} x$ 8) $y = e^{1/\sin x}$

4) $y = \frac{\sin x}{E(x/\pi)+0,5}$.

K1-11.21

Найти асимптоты кривой:

1) $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^2}, a > 0$

2) $x = \frac{t-8}{t^2-4}, y = \frac{3}{t(t^2-4)}$;

3) $x = \frac{at^4}{1-t^3}, y = \frac{at^3}{1-t^3}, a > 0$

4) $x = \frac{t^3}{t^2+1}, y = \frac{t^3-2t^2}{t^2+1}$

5) $x = \frac{5at^2}{1+t^5}, y = \frac{5at^3}{1+t^5}, a > 0$;

6) $x = t^3 + 3t + 1, y = t^3 - 3t + 1$ 7) $x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - \operatorname{arctg} t$; 8) $x = t + \sin t, y = t + \cos t$ 9) $x = te^t, y = te^{-t}$; 10) $x = t \ln t, y = t \ln(t+1)$

11)

$$x = \frac{2e^t}{t-1}, y = \frac{te^t}{t-1};$$

12)

$$x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-t}.$$

18.2.10 Problems about asymptotes of functions 2

K1-11.22

Найти асимптоты кривой и построить эту кривую:

$$1) x = \frac{1}{t}, y = \frac{t}{t+1}$$

$$2) x = \frac{2t}{1-t^2}, y = \frac{t^2}{1-t^2}$$

$$3) x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t$$

$$4) x = 2 \cos t, y = \operatorname{tg} 2t$$

$$5) x = \frac{1}{\sin t}, y = \frac{1}{\sin 2t}$$

$$6) x = \frac{t}{t^2+1}, y = \frac{t^2}{t-1} \quad 7) x = \frac{2+t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3}{1+t^2} \quad 8) x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}.$$

K1-11.23

Найти асимптоты графика функции, заданной в полярных координатах:

$$1) r = \sqrt[4]{\frac{24}{\sin 2\varphi(1-\sin 2\varphi)}}$$

$$2) r = \sqrt[4]{-\frac{4}{\sin 4\varphi}}$$

$$3) r = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

$$4) r = \frac{4 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\cos 2\varphi} \text{ (скифоид)};$$

$$5) r = \frac{3 \cos^2 \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$

$$6) r = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (\cos \varphi - 2 \sin \varphi)}.$$

K1-11.24

Найти асимптоты графика функции и построить этот график в полярных координатах:

$$1) r = \frac{\pi}{\varphi - \pi/4};$$

$$2) r = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}} \text{ (жезль)};$$

$$3) \varphi = \frac{r}{r-1}, r > 1;$$

$$4) \varphi = \frac{r}{r^2+1}, r \geq 0;$$

$$5) r = 2 \operatorname{tg} \varphi$$

$$6) r = \frac{p}{1-\varepsilon \cos \varphi}, p > 0, \varepsilon > 1; \quad 7) r = -\frac{p}{1+\varepsilon \cos \varphi}, p > 0, \varepsilon > 1; \quad 8) r = 2|1 - \operatorname{tg} \varphi|; \quad 9) r = \frac{2}{|\sin 2\varphi|};$$

10)

$$r = \frac{a}{\cos 3\varphi}, a > 0;$$

11)

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, a > 0;$$

12)

$$r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi-1}, a > 0;$$

13)

$$r = 2R \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi, R > 0 \text{ (циссоида)};$$

14)

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} \pm a \operatorname{tg} \varphi, a > 0 \text{ (спрофанда); } 1 \text{ 5) } r = a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}; 1 \text{ 6) } r = \sqrt[3]{\frac{2 \cos \varphi}{\cos^2 2\varphi}}; 17) r = \frac{\sqrt{2 \sin 2\varphi}}{|\cos 2\varphi|}; 18) \\ r = \sqrt{-\frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{2}}$$

K1-.11.25

Найти асимптоты кривой, заданной уравнением:

1) $x^2 y^2 + x - 2y = 0$;

2) $x^2 y^2 + y = 1$;

3) $(x-1)(x-2)y^2 = x^2$;

4) $x^2 y + xy^2 = 1$;

5) $y^3 - x^3 = 6x^2$;

6) $y^2(a-x) = x^2(a+x), a > 0$; 7) $x^3 - 3xy^2 = 2$;

(под конец да, такие необычные и непростые задачи.)

K2-23 .пр.1

Доказать, что

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt \sim \frac{1}{2} \ln x, \quad x \rightarrow \infty.$$

А Разбив промежуток интегрирования от 0 до x на два промежутка: от 0 до 1 и от 1 до x , а затем применив формулу $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt &= \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t} dt + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t} dt + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt \end{aligned}$$

Поскольку $\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t} dt$ - константа, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ сходится, то из равенства (7) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt}{\ln x} = 1.$$

Это означает, что выполнено асимптотическое равенство (6).

K2-23 .пр.2Найти асимптотическое разложение при $x \rightarrow +\infty$ для функции

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t} dt, \quad x > 0,$$

и доказать, что оно расходится для всех $x > 0$. Проинтегрировав по частям n раз, получим

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t} dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt$$

Обозначим $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, тогда перепишем равенство выше

$$|f(x) - S_n(x)| = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt.$$

Проинтегрировав еще раз по частям, получим

$$|f(x) - S_n(x)| = \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}} dt \leq \frac{n!}{x^{n+1}} = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ является асимптотическим рядом для функции (8). Его расходимость для всех $x > 0$ следует, например, из признака Даламбера. Доказать асимптотическое равенство (1-6).

К2-23.1

$$\int_2^x \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} \sim -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha < 0, \quad \beta \in R.$$

К2-23.2

$$\int_0^x t^\alpha e^{-1/t} dt \sim x^{\alpha+2} e^{-1/x}, \quad x \rightarrow +0$$

К2-23.3

$$\int_a^x \frac{(\ln t)^\alpha}{\sqrt{t^2+1}} dt \sim \frac{(\ln x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha > -1, \quad a > 1.$$

К2-23.4

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t+1}} e^{-t} dt \sim \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} (\sin x + \cos x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

К2-23.5

$$\int_x^{+\infty} \sqrt{t^2+1} \sin e^t dt \sim x e^{-x} \cos e^x, \quad x \rightarrow +\infty.$$

К2-23.6

$$\int_0^x \sqrt{t^2+1} e^t \sin t dt \sim \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

К2-23.7

Найти элементарную функцию, асимптотически равную при $x \rightarrow +\infty$ интегралу

$$\int_1^x \frac{\sin^4 t}{t} dt$$

К2-23.8

$$\text{Доказать, что } \int_x^{+\infty} \cos t^2 dt = -\frac{\sin x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

К2-23.9

$$\text{Доказать, что } \int_x^{+\infty} \sin t^2 dt = \frac{\cos x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

K2-23.10

Доказать, что

$$\int_x^{+\infty} \sin t^m dt = \frac{\cos x^2}{mx^{m-1}} + O\left(\frac{1}{x^{2m-1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad m > 1.$$

K2-23.11

Доказать формулу Стирлинга

$$\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi} e^{-s} s^{s+1/2}, \quad s \rightarrow +\infty,$$

где

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx, \quad s > -1,$$

- гамма-функция.

K2-23.12Доказать: если неотрицательная, непрерывная, не равная тождественно нулю функция f имеет при $t > 1$ период T :

$$f(t+T) = f(t), \quad T > 0,$$

То

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \sim A \ln x, \quad x \rightarrow +\infty, \quad A = \text{const.}$$

K2-23.13

Доказать, что

$$\int_1^x \frac{\ln(1 + \cos^2 t)}{t} dt \sim B \ln x, \quad x \rightarrow +\infty, \quad B = \text{const.}$$

K2-23.14Найти асимптотический ряд для функции $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Установить следующие асимптотические разложения при $x \rightarrow +\infty$ (15–16)**K2-23.15**

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \dots$$

K2-23.16

$$\int_x^{+\infty} e^{x^2-t^2} dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \dots$$

K2-23.17Доказать, что если ряд (1) сходится к некоторой функции, то он является и асимптотическим разложением этой функции при $x \rightarrow +\infty$.**K2-23.18**Доказать, что для того, чтобы ряд (1) являлся асимптотическим рядом при $x \rightarrow +\infty$ для функции f , необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) - S_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad n \in N,$$

где $S_n(x)$ - частичная сумма ряда (1).

K2-23.19

Доказать, что если

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty$$

то для любых чисел λ и μ имеет место

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

K2-23.20

Доказать, что если имеют место асимптотические разложения (9), то

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \text{где} \quad c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

K2-23.21

Доказать, что если $f_n(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, x \rightarrow +\infty$, и $a_0 \neq 0$, то функция $1/f(x)$ также имеет асимптотическое разложение

$$\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

где коэффициент $d_n, n \in N$, этого разложения выражается через коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$.

K2-23.25

Найти асимптотическое разложение (1) для функции $f(x) = e^{-x} \sin e^x, x \rightarrow +\infty$, и доказать, что производная $f'(x)$ не раскладывается в степенной асимптотический ряд при $x \rightarrow +\infty$.

K2-23.26

Найти асимптотическое разложение (1) при $x \rightarrow +\infty$ для функции

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{x+k}, \quad 0 < c < 1.$$

K2-23.27

Доказать, что следующие последовательности являются асимптотическими (последовательность $\{\alpha_n\}$ строго возрастает):

- 1) $\{(x-x_0)^n\}, x \rightarrow x_0$;
- 2) $\{1/x^n\}, x \rightarrow +\infty$;
- 3) $\{1/x^{\alpha_n}\}, x \rightarrow +\infty$;
- 4) $\{x^{\alpha_n}\}, x \rightarrow 0$;
- 5) $\{\ln^{\alpha_n} x\}, x \geq 1, x \rightarrow +\infty$; 6) $\{x^{\alpha_n} e^{-x}\}, x \rightarrow +\infty$.

K2-23.28

Доказать, что если $\{\varphi_n(x)\}$ - асимптотическая при $x \rightarrow x_0$ последовательность, то для того, чтобы ряд (5) являлся асимптотическим разложением функции f при $x \rightarrow x_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) - S_n(x) = O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \rightarrow x_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

K2-23.29

Доказать, что если $\varphi_n(x) \neq 0$ при $x \neq x_0, n = 0, 1, \dots$, а f раскладывается при $x \rightarrow x_0$ в асимптотический ряд (5), то его коэффициенты последовательно определяются по формулам

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\varphi_n(x)} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right).$$

K2-23.30

Разложить при $x \rightarrow +\infty$ в асимптотический ряд функцию

$$F(x; \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt, \quad x > 0, \quad \alpha > 0.$$

Доказать, что действительной и мнимой частью интеграла $\frac{1}{2}F(x^2; \frac{1}{2})$ являются неполные интегралы Френеля

$$\int_x^{+\infty} \cos t^2 dt, \quad \int_x^{+\infty} \sin t^2 dt.$$

18.2.11 Problems about function graphs

(отдельный раздел у Кудрявцева)
(пока не актуально)

K1-21 .пр.4

Построить график функции $y(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}$. Преобразуем формулу к виду $y(x) = |x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$. Данная функция определена при $x \leq 2$ и при $x > 3$, положительна при $x \neq 0$ и $x \neq 2$, $y(0) = y(2) = 0$. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} y(x) = +\infty$$

то $x = 3$ - вертикальная асимптота. При $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} y(x) &= |x| \left(\frac{1-2/x}{1-3/x} \right)^{1/2} = |x| \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{-1/2} = \\ &= |x| \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = |x| \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

отсюда при $x \rightarrow +\infty$ получаем $y(x) = x + 1/2 + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Значит, $y = x + 1/2$ - асимптота при $x \rightarrow +\infty$, а $y = -x - 1/2$ - асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

Отметим еще, что $y(x) \sim 2\sqrt{2-x}$ при $x \rightarrow 2-0$ и $y(x) \sim \sqrt{2/3}|x|$ при $x \rightarrow 0$ ($\sqrt{2/3} \approx 0,8$). Первый эскиз графика дан на рис 21.4, а. Данная функция на своей области определения бесконечно дифференцируема всюду, кроме $x = 0$ и $x = 2$. Вычисляем производные

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} \frac{2x^2-11x+12}{2(x-2)(x-3)} \operatorname{sign} x, \\ y''(x) &= \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} \frac{11x-24}{4(x-2)^2(x-3)^2} \operatorname{sign} x. \end{aligned}$$

Из (3) находим, что при $x = 3/2$ функция имеет максимум, равный $y(3/2) = \sqrt{3}/2 \approx 0,9$, а при $x = 4$ - минимум, $y(4) = 4\sqrt{2} \approx 5,7$. При $x \rightarrow 2-0$ касательная к графику становится вертикальной, так как $\lim_{x \rightarrow 2-0} y'(x) = +\infty$. Отметим еще, что

$$\lim_{x \rightarrow -0} y'(x) = -\sqrt{2/3}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y'(x) = \sqrt{2/3} \approx 0,8.$$

Из (4) следует, что при $x > 3$ и при $x < 0$ функция выпукла вниз, в частности, это означает, что график приближается к асимптоте сверху и при $x \rightarrow +\infty$, и при $x \rightarrow -\infty$. При $0 < x < 2$ функция выпукла вверх. График функции изображен на рис. 21.4, σ.

K1-21 .пр.7

Построить график уравнения

$$x^3 + y^3 = 3xy \text{ (декартов лист).}$$

Δ В примере 5§11 (рис 11.14-11.16) уже было проведено предварительное исследование этой кривой, являющейся в полярных координатах ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$) графиком функции

$$r = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.$$

Дополним это исследование, определив экстремумы и направления выпуклости и дав тем самым обоснование рис. 11.16.

Если $\cos \varphi = 0$, то из (8) следует, что и $r = 0$, т. е. получаем точку $x = y = 0$. При $\cos \varphi \neq 0$, полагая $t = \operatorname{tg} \varphi$, придем к параметрическому заданию кривой

$$x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}.$$

Из (9) и из того, что

$$x'_t = \frac{3(1 - 2t^3)}{(t^3 + 1)^2},$$

следует, что функция $x(t)$ строго возрастает на $(-\infty; -1)$ от 0 до $+\infty$ и на $(-1; 1/\sqrt[3]{2})$ от $-\infty$ до $\sqrt[3]{4}$ и строго убывает на $(1/\sqrt[3]{2}; +\infty)$

от $\sqrt[3]{4}$ до 0 (рис. 21.9). На каждом из этих интервалов функция $x(t)$ имеет обратную, и, следовательно, функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют функцию $y(x)$ при $x \in (0; +\infty)$ (часть I кривой, рис. 21.10), при $x \in (-\infty; \sqrt[3]{4})$ (часть II кривой), при $x \in (0; \sqrt[3]{4})$ (часть III). Находим

$$y'_t = \frac{3t(2 - t^3)}{(t^3 + 1)^2}$$

и

$$y'_x = \frac{t(2 - t^3)}{1 - 2t^3},$$

$$y''_{xx} = \frac{2(1 + t^3)^4}{3(1 - 2t^3)^3}.$$

Из (11) и (12) следует, что $y'_x < 0$ при $t \in (-\infty; -1)$, т. е. $y(x) y''_{xx} > 0$, то кривая выпукла вниз и, следовательно, подходит к асимптоте сверху. При $t \in (-1; 1/\sqrt[3]{2})$ функция $y(x)$ имеет минимум при $t = 0$, г. е. $x = 0$; при возрастании x от $-\infty$ до $x|_{t=1/\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$ значения $y(x)$ сначала убывают от $+\infty$ до 0 (при $x = 0$), а затем возрастают от 0 до $y|_{t=1/\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$. При этом $y''_{xx} > 0$, кривая выпукла вниз и при $x \rightarrow -\infty$ подходит к асимптоте сверху. Поскольку $\lim_{t \rightarrow 1/\sqrt[3]{2}-0} y'_x = +\infty$ и $\lim_{t \rightarrow 1/\sqrt[3]{2}+0} y'_x = -\infty$, касательная к кривой в точке $x = \sqrt[3]{4}, y = \sqrt[3]{2}$ (соответствует $t = 1/\sqrt[3]{2}$) вертикальна.

На третьем интервале $t \in (1/\sqrt[3]{2}; +\infty)$ функция $y(x)$ имеет максимум при $t = \sqrt[3]{2}$, а $x|_{t=\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$. Этот максимум равен $y|_{t=\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$. Поскольку $y''_{xx} < 0$, кривая выпукла вверх. Если $x \rightarrow +0$, что соответствует тому, что $t \rightarrow +\infty$, то $y'_x \rightarrow +\infty$, т. е. в точку $(0; 0)$ кривая "входит" с вертикальной касательной.

Таким образом, получено полное обоснование рис. 21.10 и найдены две дополнительные точки $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$ с вертикальной и горизонтальной касательными.

К1-21.1

Привести пример такой дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in (0; +\infty)$, что: 1) ее график имеет асимптоту при $x \rightarrow +\infty$, но $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ не существует; 2) ее график не имеет асимптоты при $x \rightarrow +\infty$, но $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ существует.

К1-21.2

График функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$. Доказать, что если $f''(x) > 0$ при $x \geq x_0$, то график приближается к этой асимптоте сверху, а если $f''(x) < 0$, то график приближается к асимптоте снизу. Построить график функции (3-20).

К1-21.3

- 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$
- 2) $y = -x^3 + 4x - 3$;
- 3) $y = (x - 1)^2(x + 2)$;
- 4) $y = \frac{x^2}{4} - 3x + 4$
- 5) $y = x(x - 1)^3$;
- 6) $y = (x + 2)^2(x - 1)^2$ 7) $y = (x - 1)^3(x + 1)^2$ 8) $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$.

K1-21.4

- 1) $y = \frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$;
- 2) $y = \frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$
- 3) $y = \frac{20x^2}{(x-1)^3}$

I scored for other tasks here so far

18.2.12 Problems about the properties of functions

(там просто жесть, какие свойства в табличных сборниках есть, потом мб пропишу или повывожу.)
(не пишу, потому что все равно я не тяну такие свойства)

GR-1.391 Representation of cosines and sines of multiple arcs in the form of final products

(тут жесть, я даже не знаю, что сказать)

1.

$$\sin nx = n \sin x \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} \right) \quad [n\text{-четное}].$$

2.

$$\cos nx = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}} \right) \quad [n\text{-четное}]. \quad \text{ЖЛ (56y)}$$

3.

$$\sin nx = n \sin x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} \right) \quad [n - \text{нечетное}].$$

4.

$$\cos nx = \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}} \right) \quad [n - \text{нечетное}].$$

GR-1.392

1.

$$\sin nx = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right).$$

2.

$$\cos nx = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \sin \left(x + \frac{2k-1}{2n} \pi \right).$$

18.3 Tasks about other function analysis

(тут по кудрявцеву 3, пока не выгружаю, потому что скорее всего это вообще не нужно.)

18.3.1 Problems about different types of sets in n -dimensional space

(в даль перекину. Кудрявцев 3 вроде)

18.3.2 Multiple Variable Function Tasks

18.3.3 Limit and Continuity Problems of Multiple Variable Functions

18.3.4 Display Tasks

(?? казалось бы, какие вообще могли бы тут быть задачи?)

18.3.5 Problems about Partial derivatives

18.3.6 Problems about Differential of Multiple Variables Function

18.3.7 Problems about Differentiable Mappings

18.3.8 Problems about Function Definition Scope

(вообще все очевидно, даже время лень тратить на записи.)

18.4 General questions

(потом соберу)

18.4.1 Questions on understanding the essence of matan

(????)

18.4.2 Typical Knowledge Testing Tasks

(????)

18.4.3 Questions on understanding typical details

(????)

19 Problems about integrals

19.1 Problems about Relatively Typical Integrals

19.1.1 Trivial Problems that Show How to Work with Basic Methods

Problems here are very easy, still, they illustrate how to accurately fo transformation, which is an essential skill for working with real problems.

me. Integrate $\int_0^c \sqrt{c-x} dx$, where c is a constant

$$\begin{aligned} \int_0^c \sqrt{c-x} dx &= - \int_0^c \sqrt{c-x} (-1) dx = - \int_0^{-c} \sqrt{c-x} d(-x) = - \int_0^{-c} \sqrt{c+y} dy = \\ &= \int_{-c}^0 \sqrt{c+y} dy = \int_0^c \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} c^{3/2}. \end{aligned}$$

19.1.2 Problems about Simple Fun Integrals for Worm up

Raad.196 Find $\int \frac{x^n}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}} dx$

(хорошая задача)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} = ?$$

Solution by Ankush Kumar Parcha

Consider, $f(z) := \frac{1}{z^4+z^3+z^2+z+1} & \Gamma : \gamma \cup (-R, R)$ is the semi-circular contour in the upper-half of C-plane

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+z^3+z^2+z+1} &= \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4+z^3+z^2+z+1} + \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} \\ \left(\because \text{Cauchy's Residue Theorem: } \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_k \text{Res } f(z=z_k) \right) \\ \xrightarrow[\text{Taking limit}]{R \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi i \text{Res } f(z=e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}) &= \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4+z^3+z^2+z+1}}_{=0, \because |z| \rightarrow \infty \Rightarrow z f(z) \rightarrow 0} \\ + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} &\Rightarrow 2\pi i \lim_{z \rightarrow \exp(2i\pi/5)} \frac{z - e^{4i\pi/5}}{z^4+z^3+z^2+z+1} \\ + 2\pi i \lim_{z \rightarrow \exp(4i\pi/5)} \frac{z - e^{4i\pi/5}}{z^4+z^3+z^2+z+1} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} \\ \Rightarrow \frac{2\pi i}{5} \left(\exp\left(\frac{4\pi i}{5}\right) - \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi i}{5}\right) - \exp\left(\frac{4\pi i}{5}\right) \right) \\ \xrightarrow{\because \sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/2i} \frac{4\pi}{5} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) &\Rightarrow \frac{\pi}{5} \sqrt{2(5+\sqrt{5})} \\ \xrightarrow{\because \varphi = (1+\sqrt{5})/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} &= \frac{2\pi\sqrt{\varphi}}{\sqrt[4]{125}} \end{aligned}$$

19.1.3 Problems about Integrals of Roots

(решаю в первую очередь!)

eigenchris. Integrate $\int \sqrt{\frac{r}{r-r_s}} dr$

(????????? check this solution!!!)

$$\begin{aligned} r &= Z^2 \\ \frac{dr}{dz} &= 2z \Rightarrow dr = 2z dz \\ \int \sqrt{\frac{z^2}{z^2-r_s}} 2z dz &= 2 \int \frac{z^2}{\sqrt{z^2-r_s}} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{r_s} y &= z \\ \Rightarrow \sqrt{r_s} dy &= dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int 2 \frac{z^2}{\sqrt{z^2 - r_s}} dz \\
&= \int 2 \frac{(\sqrt{r_s} y)^2}{\sqrt{(\sqrt{r_s} y)^2 - r_s}} \sqrt{r_s} dy \\
&= \int 2 \sqrt{r_s} \frac{r_s y^2}{\sqrt{r_s y^2 - r_s}} dy \\
&= \int 2 \sqrt{r_s} \frac{r_s y^2}{\sqrt{r_s} \sqrt{y^2 - 1}} dy \\
&= r_s \int 2 \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r_s \int 2 \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} dy \\
&= r_s \int 2 \frac{(\cosh \theta)^2}{\sqrt{(\cosh \theta)^2 - 1}} \sinh \theta d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \cosh \theta \\
\frac{dy}{d\theta} &= \sinh \theta \\
dy &= \sinh \theta d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_s \int 2 \frac{(\cosh \theta)^2}{\sqrt{(\cosh \theta)^2 - 1}} \sinh \theta d\theta \\
&= r_s \int 2 \frac{(\cosh \theta)^2}{\sqrt{(\sinh \theta)^2}} \sinh \theta d\theta \\
&= r_s \int 2 (\cosh \theta)^2 d\theta \\
& (\cosh \theta)^2 - (\sinh \theta)^2 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r_s \frac{1}{2} \sinh(2\theta) + r_s \theta \quad \begin{array}{l} y = \cosh \theta \\ \theta = \cosh^{-1} y \end{array} \\
&= r_s \frac{1}{2} \sinh(2(\cosh^{-1} y)) + r_s \cosh^{-1} y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\
2y &= e^x + e^{-x} \\
2ye^x &= (e^x + e^{-x}) e^x \\
2ye^x &= (e^x)^2 + 1 \\
0 &= (e^x)^2 - 2ye^x + 1 \\
e^x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2y) \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2}
\end{aligned}$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$y \geq 1; \quad x = \cosh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\begin{aligned}
& \cosh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \\
& r_s \frac{1}{2} \sinh(2(\cosh^{-1} y)) + r_s \cosh^{-1} y \\
& = r_s \frac{1}{2} \sinh(2 \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})) + r_s \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \\
& r_s \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(e^{2 \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})} - e^{-2 \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})} \right) + r_s \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \\
& r_s \frac{1}{4} \left(\left(e^{\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})} \right)^2 - \left(e^{\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})} \right)^{-2} \right) + r_s \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \\
& r_s \frac{1}{4} \left((y + \sqrt{y^2 - 1})^2 - (y + \sqrt{y^2 - 1})^{-2} \right) + r_s \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (y + \sqrt{y^2 - 1})^2 - (y + \sqrt{y^2 - 1})^{-2} \\
& \frac{(y + \sqrt{y^2 - 1})^4}{(y + \sqrt{y^2 - 1})^2} - \frac{1}{(y + \sqrt{y^2 - 1})^2} \\
& \frac{(y + \sqrt{y^2 - 1})^4 - 1}{(y + \sqrt{y^2 - 1})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (y + \sqrt{y^2 - 1})^4 - 1 \\
& \left((y + \sqrt{y^2 - 1})^2 \right)^2 - 1 \\
& (y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1} + y^2 - 1)^2 - 1 \\
& (2y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1} - 1)^2 - 1 \\
& (2y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1})^2 - 2(2y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1}) + 1 - 1 \\
& (2y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1})(2y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1} - 2) \\
& 2y(y + \sqrt{y^2 - 1})2(y^2 + y\sqrt{y^2 - 1} - 1) \\
& 2y(y + \sqrt{y^2 - 1})2(y + \sqrt{y^2 - 1})\sqrt{y^2 - 1} \\
& 4y(y + \sqrt{y^2 - 1})^2\sqrt{y^2 - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4y(y + \sqrt{y^2 - 1})^2\sqrt{y^2 - 1}}{(y + \sqrt{y^2 - 1})^2} \\
& 4y\sqrt{y^2 - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r_s \frac{1}{4} \left((y + \sqrt{y^2 - 1})^2 - (y + \sqrt{y^2 - 1})^{-2} \right) + r_s \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \\
& = r_s \frac{1}{4} (4y\sqrt{y^2 - 1}) + r_s \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \\
& = r_s y \sqrt{y^2 - 1} + r_s \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{r_s} y = z & y \geq 1 \\
& y = \frac{z}{\sqrt{r_s}} & z \geq \sqrt{r_s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_s \frac{z}{\sqrt{r_s}} \sqrt{\left(\frac{z}{\sqrt{r_s}}\right)^2 - 1} + r_s \ln \left(\frac{z}{\sqrt{r_s}} + \sqrt{\left(\frac{z}{\sqrt{r_s}}\right)^2 - 1} \right) \\
&= \sqrt{r_s} z \sqrt{\frac{z^2}{r_s} - 1} + r_s \ln \left(\frac{z}{\sqrt{r_s}} + \sqrt{\frac{z^2}{r_s} - 1} \right)
\end{aligned}$$

$$r = z^2 \Rightarrow z = \sqrt{r}$$

$$= \sqrt{r} \sqrt{r - r_s} + r_s \ln (\sqrt{r} + \sqrt{r - r_s}) + C$$

(do it again! I think, I would do it also myself if I think about it)
 (???? is it used in gravity????)

Integrate $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$

Можно преобразовать этот интеграл к такому виду, что если его сложить с собой, то получится легко вычисляемый интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1/x^2) dx}{1+(1/x)^4} = - \int_{+\infty}^0 \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(1+1/x^2) dx}{x^2+1/x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1/x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

(еще додумаю, чтобы сразу такое видеть)

Integrate $\int_a^b t \cdot \sqrt{\frac{t-a}{b-t}} dt$ (???)

Solution 1 замена (???)

Do the following substitution

$$t = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta \Rightarrow dt = (b-a) \sin 2\theta d\theta$$

Your function $\sqrt{\frac{t-a}{b-t}}$ will be tremendously simplified to $\tan \theta$. Hence, your integral will be simplified:

$$\begin{aligned}
\int_a^b t \cdot \sqrt{\frac{t-a}{b-t}} dt &= \int_0^{\pi/2} (a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta) \cdot \tan \theta ((b-a) \sin 2\theta d\theta) \\
&= a \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \cdot (b-a) \sin 2\theta d\theta + b \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2} (b-a) \sin 2\theta d\theta \\
&= (b-a) \left(2a \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta + \frac{b}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta \right) \\
&= (b-a) \left(2a \cdot \frac{3\pi}{16} + \frac{b}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \frac{\pi}{8} (b-a)(3a+b)
\end{aligned}$$

(?? додумаю, это типичные замены для таких)

Solution 2: Более просто (???)

$$\begin{aligned}
& \stackrel{2t/(b-a) \rightarrow t}{=} \frac{b-a}{2} \left[\frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 t \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt + \frac{b+a}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt \right] \\
&= \frac{(b-a)^2}{4} \int_{-1}^1 \frac{t \sqrt{1-t^2}}{1-t} dt + \frac{b^2-a^2}{4} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t} dt \\
&= \frac{(b-a)^2}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt}_{\frac{\pi}{4}} + \frac{b^2-a^2}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}_{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

(!! додумывать нужно, интересный интеграл)

K2-2.pr.1 Find $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

Раскладываем подынтегральную функцию на простые дроби, каждая из которых элементарно интегрируется, в итоге:

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{2}{5} \ln|x+2| + \frac{3}{20} \ln|x-3| + C.$$

K2-2.pr.2 Find $I = \int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} dx$

Степень числителя больше знаменателя, так что разложим:

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}.$$

Угадываем, что корень многочлена $Q(x) \equiv 2x^3 - x - 1$ есть $x = 1$, найдем:

$$Q(x) = 2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2+2x+1).$$

Трехчлен $2x^2+2x+1$ не имеет действительных корней, поэтому находим методом неопределенных коэффициентов разложение:

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} dx &= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} dx + \int \frac{1}{2x^2+2x+1} dx = \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \arctg(2x+1) + C.
\end{aligned}$$

K2-2.pr.3 Find $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx.$

Ищем разложение в виде:

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

перемножаем и приравниваем:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & 2 = A + C \\
x^2 & 1 = -A + B + D \\
x^1 & 5 = A - B + 3C \\
x^0 & 1 = B + 3D
\end{array}$$

Эта система имеет решение: $A = 0, B = 1, C = 2, D = 0$. Следовательно,

$$\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

K2-2.pr.4 $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^5+x^4-x^3-x^2}$

(??? отработаю еще этот метод, пока в нем не уверен.)

Знаменатель раскладывается как $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x+1)^2(x-1)$, поэтому ищем

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}.$$

Получаем равенство числителей

$$x^4 + 1 = Ax(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)^2 + Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x^2-1) + Ex^2(x-1).$$

Положив здесь поочередно $x=0, x=1, x=-1$, получим $B=-1, C=1/2, E=-1$.

Для A , продифференцируем и положим в нем $x=0$. При дифференцировании правой части будем выписывать только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=0$:

$$4x^3 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + 2B(x^2-1) + \dots$$

Отсюда при $x=0$ имеем $0 = -A - B$, т. е. $A=1$.

Для D дифференцируем обе части равенства числителей, причем выписываем только те слагаемые правой части, которые не обращаются в нуль при $x=-1$; получаем

$$4x^3 = Dx^2(x-1) + 2Ex(x-1) + Ex^2 + \dots$$

из которого при $x=-1$ имеем

$$-4 = -2D + 4E + E,$$

откуда находим $D = -1/2$.

Следовательно,

$$\int \frac{(x^4+1)dx}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

K2-2.pr.5 Find $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$

(да, x может ложиться еще и мнимым. 1я часть еще не доделана)

Разложение подынтегральной функции на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Следовательно, имеем равенство на коэффициенты

$$4x^2 - 8x = A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2.$$

Положив $x=1$, найдем $B=-1$.

Положив $x=i$, получаем равенство:

$$-4 - 8i = (Ei+F)(i-1)^2 = 2E - 2iF.$$

Приравняв действительные и мнимые части, найдем $E=-2, F=4$.

Продифференцируем обе части равенства на коэффициенты, причем будем выписывать только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=1$. Тогда получим

$$8x - 8 = A(x^2+1)^2 + 2B(x^2+1)2x + \dots$$

Отсюда при $x=1$ имеем $0 = 4A + 8B$, т.е. $A=2$.

Продифференцируем обе части равенства на коэффициенты, выписывая только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=i$:

$$8x - 8 = (Cx+D)(x-1)^2 2x + E(x-1)^2 + (Ex+F)2(x-1) + \dots$$

Подставив в это равенство $x=i$, найдем последние 2 коэффициента: $C=-2, D=-1$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx &= 2 \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \int \frac{(2x-1)dx}{x^2+1} - \int \frac{2x-4}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= 2 \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln(x^2+1) - \arctg x + \frac{1}{x^2+1} + 4 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}, \end{aligned}$$

где последний интеграл находим по $J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctg x \right) + C$.

Итак,

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \arctg x + \frac{1}{x-1} + \frac{1+2x}{x^2+1} + C.$$

K2-2.pr.6 Find $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$ **методом Остроградского**

Многочлен $Q(x) = (x-1)^2(x^2+1)^2$, поэтому $Q_2(x) = (x-1)(x^2+1)$, $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = (x-1)(x^2+1)$. Следовательно, по методу Остроградского существуют $P_1(x) = Ax^2 + Bx + C$ и $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, для которых

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

Дробь $\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+1)}$ удобно сразу представить в виде суммы элементарных дробей и записать:

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \left(\frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} \right) dx.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)(x^2+1)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+1},$$

откуда следует основное равенство на коэффициенты:

$$4x^2-8x = -4x^4 - 2Bx^3 + (A+B-3C)x^2 + 2(C-A)x - B-C + D(x-1)(x^2+1)^2 + (Ex+F)(x-1)^2(x^2+1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему

$$\begin{array}{l|l} x^5 & 0 = D + E, \\ x^4 & 0 = -A - D + F - 2E \\ x^3 & 0 = -2B + 2D + 2E - 2F, \\ x^2 & 4 = A + B - 3C - 2D - 2E + 2F, \\ x^1 & -8 = -2A + 2C + D + E - 2F, \\ x^0 & 0 = -B - C - D + F. \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A = 3, B = -1, C = 0, D = 2, E = -2, F = 1$. Итак,

$$\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + 2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$$

K2-2.pr.8 Find $J = \int \frac{x+x^7}{1+x^4} dx$

Степени слагаемых числителя напоминают степени знаменателя, так что разделим и приведем к табличным интегралам:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+(x^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{(1+x^4-1)d(1+x^4)}{1+x^4} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + \frac{1}{4} (1+x^4) - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C. \end{aligned}$$

K2-2.1 Simple integrals of rational functions

(лень решать, вроде все просто)

- 1) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;
- 2) $\int \frac{x dx}{2x^2-3x-2}$;
- 3) $\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13} dx$;
- 4) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$
- 5) $\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4} dx$
- 6) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10}$.

K2-2.2

(лень решать, вроде все просто)

1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)};$

2) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$

3) $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} dx;$

4) $\int \frac{(5x-3)dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)};$

5) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x};$

6) $\int \frac{(5x-14)dx}{x^3-x^2-4x+4}$ 7) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx;$ 8) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)(x^2-4)};$ 9) $\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36};$

10)

$$\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x} dx.$$

K2-2.3

1) $\int \frac{x^5-2x^2+3}{x^2-4x+4} dx;$

2) $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x-1)(x+1)^2}$

3) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$

K2-2.4

1) $\int \frac{dx}{(x+2)(4x^2+8x+7)};$

2) $\int \frac{dx}{x^3+1};$

3) $\int \frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2} dx;$

4) $\int \frac{x^5 dx}{x^3+2}$

5) $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x+3)(x^2+x+1)} dx$

6) $\int \frac{x(x^2+1)dx}{(x+1)(x^2+2x+2)};$ 7) $\int \frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x-1} dx;$ 8) $\int \frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^3-3x^2+x+5} dx.$

K2-2.5

1) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1} dx$

2) $\int \frac{x^4 dx}{1-x^4};$

3) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)} dx;$

4) $\int \frac{(21x^2-13x+18)dx}{(3x^2-4x+6)(x^2-2x-3)};$

5) $\int \frac{dx}{1-x+x^3-x^4} dx;$

6) $\int \frac{(7x^2-1)dx}{x^4+4x^2-5};$ 7) $\int \frac{3x^3-8x^2+15x-5}{(x-1)^2(x^2-4x+8)} dx;$ 8) $\int \frac{3x^3-x^2+11x-5}{(x+1)^2(x^2-4x+5)} dx;$ 9) $\int \frac{4x^3-x^2-2x+1}{(2x+1)^2(x^2+x+2)} dx$

10)

$$\int \frac{3x^3-8x^2+8x-1}{(x-3)(3x^2+x+2)} dx;$$

11)

$$\int \frac{5x^2+7x+4}{(x+1)^2(2x^2+3x+2)} dx;$$

12)

$$\int \frac{3x^3-5x^2+18x-9}{(x-3)^2(2x^2+2x+3)} dx.$$

K2-2.6

- 1) $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx;$
- 2) $\int \frac{dx}{x^4+1}$
- 3) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx;$
- 4) $\int \frac{(3x^2-2)dx}{9x^4-13x^2+4};$
- 5) $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1};$
- 6) $\int \frac{dx}{x^6+1}$ 7) $\int \frac{dx}{x^{2n}+1}; \quad n \in \mathbb{N}.$

K2-2.7

- 1) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)};$
- 2) $\int \frac{(3x^2-2)xdx}{(x+2)^2(3x^2-2x+4)};$
- 3) $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)(x^3+1)};$
- 4) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2} dx;$
- 5) $\int \frac{dx}{x^4-x^3-x+1};$
- 6) $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx;$ 7) $\int \frac{(x^4+1)dx}{(x-1)(x^4-1)};$ 8) $\int \frac{(3x^2+2x+10)dx}{(x^3+x^2)(2x^2-4x+5)};$ 9) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)};$

10)

$$\int \frac{dx}{x^8+x^6}.$$

K2-2.9

- 1) $\int \frac{x(x-2)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2};$
- 2) $\int \frac{dx}{x^6+2x^4+x^2}$
- 3) $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2};$
- 4) $\int \frac{(3x^4+4)dx}{x^2(x^2+1)^3}$
- 5) $\int \frac{x^9 dx}{(x^4-1)^2};$
- 6) $\int \frac{x(2x^2+2x-1)dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3};$ 7) $\int \frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3} dx;$ 8) $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$ 9) $\int \frac{(1-4x^5)dx}{(1+x+x^5)^2};$

10)

$$\int \frac{dx}{x^{11}+2x^6+x}.$$

K2-2.10

Найти рациональную часть интеграла:

- 1) $\int \frac{(x^6+1)dx}{(x^2+x+1)^2};$
- 2) $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2};$
- 3) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3};$
- 4) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4};$
- 5) $\int \frac{dx}{x^2(2x^2-3)^3};$
- 6) $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}.$

K2-2.11

Найти условие, при котором первообразная данной рациональной функции является функцией рациональной:

- 1) $\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}, P_n(x)$ - многочлен степени n ;
- 2) $\frac{ax^2+bx+c}{x^5-2x^4+x^3};$

$$3) \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{(a x^2 + b x + c)^2}, \quad a \neq 0, \quad b^2 \neq 4ac.$$

19.1.4 Problems about indefinite integrals from irrational functions (!!!)

(тут простейшие методы на разделение на дроби, ничего сложного, которыми все и решается, можно тренироваться!)

K2-3.pr.1 Find $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$

Подынтегральная функция является рациональной относительно $x_1 = x, x_2 = x^{1/3}, x_3 = x^{1/6}$. Данный интеграл есть интеграл вида $\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right) dx$, причем $n = 3, p_1 = 1, p_2 = 1/3, p_3 = 1/6, a = d = 1, b = c = 0$. Для рациональных чисел $p_1 = 1, p_2 = 1/3, p_3 = 1/6$ общий знаменатель $m = 6$, следовательно, нужно применить подстановку $x = t^6$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx &= 6 \int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1 + t^2)} t^5 dt = 6 \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1 + t^2} dt = \\ &= 6 \int t^3 dt + 6 \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

K2-3.pr.2 Find $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$

I приводится к виду $\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right) dx$:

$$I = \int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2}.$$

То есть, в данном случае $n = 1, p_1 = 1/3, a = -1, b = 2, c = 1, d = 2$. Поэтому полагаем $\frac{2-x}{2+x} = t^3$, откуда $x = 2 \frac{1-t^3}{1+t^3}, dx = -12 \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2}, \frac{1}{2-x} = \frac{1+t^3}{4t^3}$, получаем

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2} = -12 \int \frac{(t^3+1)^2 t^3 dt}{16t^6 (t^3+1)^2} = -\frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$$

K2-3.pr.3 Find $\int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx$

Воспользуемся одной из подстановок Эйлера. Положим

$$\sqrt{1+x+x^2} = tx + 1$$

тогда $1+x+x^2 = t^2 x^2 + 2tx + 1$, откуда $x = \frac{2t-1}{1-t^2}, dx = 2 \frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2} dt, \sqrt{1+x+x^2} = \frac{1-t+t^2}{1-t^2}, t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. Таким образом,

$$\int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx = \int \frac{-2tdt}{1-t^2} = \ln|1-t^2| + C = \ln \left| 1 - \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \right)^2 \right| + C.$$

K2-3.pr.4 Find $\int \frac{12x^3 + 16x^2 + 9x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}} dx$

Интегралы такого типа вычисляются через представление

$$\int \frac{12x^3 + 16x^2 + 9x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}} dx = (Ax^2 + Bx + C) \sqrt{4x^2 + 4x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}}.$$

Для нахождения коэффициентов A, B, C и числа λ продифференцируем обе части этого равенства. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{12x^3 + 16x^2 + 9x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}} &= (2Ax + B) \sqrt{4x^2 + 4x + 2} + \\ &+ (Ax^2 + Bx + C) \frac{4x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}}. \end{aligned}$$

После умножения на $\sqrt{4x^2 + 4x + 2}$ получим равенство многочленов:

$$12x^3 + 16x^2 + 9x + 2 = (2Ax + B)(4x^2 + 4x + 2) + (Ax^2 + Bx + C)(4x + 2) + \lambda.$$

Из равенства многочленов следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях x :

$$12A = 12, \quad 10A + 8B = 16, \quad 4A + 6B + 4C = 9, \quad 2B + 2C + \lambda = 2.$$

Решив эту треугольную систему уравнений, найдем

$$A = 1, \quad B = 3/4, \quad C = 1/8, \quad \lambda = 1/4.$$

Следовательно,

$$\int \frac{12x^3 + 16x^2 + 9x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}} dx = \left(x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}\right) \sqrt{4x^2 + 4x + 2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}}.$$

Последний интеграл при $t = 2x + 1$ сводится к табличному. Окончательно получим

$$\int \frac{12x^3 + 16x^2 + 9x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}} dx = \left(x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}\right) \sqrt{4x^2 + 4x + 2} + \frac{1}{8} \ln(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 2}) + C.$$

K2-3.pr.5 Find $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$. (!?!?!?)

(!! нихрена себе подстановка!!)

Положим $x = \frac{\alpha t + \beta}{t+1}$; тогда $x^2 + 2 = \frac{(\alpha t + \beta)^2 + 2(t+1)^2}{(t+1)^2} = \frac{(\alpha^2 + 2)t^2 + \beta^2 + 2}{(t+1)^2}$,
 $2x^2 - 2x + 5 = \frac{2(\alpha t + \beta)^2 - 2(\alpha t + \beta)(t+1) + 5(t+1)^2}{(t+1)^2} = \frac{(2\alpha^2 - 2\alpha + 5)t^2 + 2\beta^2 - 2\beta + 5}{(t+1)^2}$, где $\begin{cases} 2\alpha\beta + 4 = 0, \\ 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 10 = 0. \end{cases}$

Получившаяся система имеет два решения: $(2; -1)$ и $(-1; 2)$. Возьмем, например, $\alpha = -1, \beta = 2$; тогда

$$x = \frac{2-t}{1+t}, \quad t = \frac{2-x}{1+x}, \quad dx = \frac{-3dt}{(1+t)^2},$$

$$x^2 + 2 = \frac{3t^2 + 6}{(t+1)^2}, \quad 2x^2 - 2x + 5 = \frac{9t^2 + 9}{(t+1)^2}.$$

Заменив в интеграле переменную x на переменную t , будем иметь

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{2x^2 - 2x + 5}} = -\frac{1}{3} \int \frac{|t+1|dt}{(t^2 + 2)\sqrt{t^2 + 1}}.$$

При $t + 1 > 0$, т. е. при $x > -1$, получим

$$-\frac{1}{3} \int \frac{tdt}{(t^2 + 2)\sqrt{t^2 + 1}} - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(t^2 + 2)\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Первый интеграл подстановкой $u^2 = t^2 + 1$ приводится к интегралу

$$-\frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 + 1}.$$

Для вычисления второго применим подстановку Абеля

$$v = (\sqrt{t^2 + 1})' = t/\sqrt{t^2 + 1}$$

откуда

$$v^2(t^2 + 1) = t^2, \quad t^2 + 2 = \frac{2 - v^2}{1 - v^2}.$$

Дифференцируя равенство $v\sqrt{t^2 + 1} = t$, находим

$$dv\sqrt{t^2 + 1} + v^2dt = dt, \quad \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{dv}{1 - v^2},$$

и, следовательно, второй интеграл приводится к виду $-\frac{1}{3} \int \frac{dv}{2-v^2}$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} u - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v} + C.$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} &= \\ &= -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x} + C. \end{aligned}$$

При $x < -1$ аналогично можно получить тот же результат.

K2-3.pr.6 Find $\int \frac{dx}{(2x+1)^2 \sqrt{4x^2+4x+5}}$

Тут удачно все заменяется. Положив $t = 2x + 1$, а затем $t = 2 \operatorname{sh} u$, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2x+1)^2 \sqrt{4x^2+4x+5}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{8} \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\frac{1}{8} \operatorname{cth} u + C = \\ &= -\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}}{8 \operatorname{sh} u} + C = -\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{8(2x+1)} + C. \end{aligned}$$

K2-3.pr.7 Find $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Этот интеграл имеет вид $\int x^m (ax^n + b)^p dx$, причем $a = b = 1, m = 0, n = 4, p = -1/4$. По инструкции, так как $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$, то, применяя подстановку $1 + x^{-4} = t^4$, находим $dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-5/4} dt$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = -\frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{t^2 - 1} + \int \frac{dt}{t^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C. \end{aligned}$$

K2-3.1

- 1) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}};$
- 2) $\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx;$
- 3) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx;$
- 4) $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} dx$
- 5) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$
- 6) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}}.$

K2-3.2

- 1) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx;$
- 2) $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}} 3$
- 5) $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx;$
- 6) $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}} \frac{dx}{x^3};$ 7) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}};$ 8) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}, a \neq b.$

K2-3.4

- 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}};$
- 2) $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}};$

- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}$
- 4) $\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x}+\sqrt[12]{x^5})^3}$;
- 5) $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$;
- 6) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$.

K2-3.5

- 1) $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$;
- 2) $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$;
- 3) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;
- 4) $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx$;
- 5) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx$
- 6) $\int \sqrt{3-4x+4x^2} dx$; 7) $\int x\sqrt{x^2+2x+2} dx$ 8) $\int x^2\sqrt{x^2+4} dx$.

K2-3.3

Доказать, что интеграл $\int R(x; \sqrt[p]{(x-a)^p(x-b)^q}) dx$, где R - рациональная функция переменных x и $y = \sqrt[p]{(x-a)^p(x-b)^q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, при условии $(p+q)/n \in \mathbb{Z}$ является элементарной функцией.

K2-3.6

При каком условии интеграл $\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, $a \neq 0$, является алгебраической функцией?

K2-3.7

Для интеграла $J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, доказать рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{1}{na} \left(x^{n-1} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2}(2n-1)J_{n-1} - c(n-1)J_{n-2} \right).$$

Найти интеграл (8-14).

K2-3.8

- 1) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$;
- 2) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$;
- 3) $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2+1}}$;
- 4) $\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

K2-3.9

- 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$, $x > 0$;
- 2) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, $x > -1$;
- 3) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+2x+2x^2}}$, $x > 0$;
- 4) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$, $x > 1 + \sqrt{2}$.

K2-3.10

- 1) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+7)^{3/2}}$;
- 2) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}$;
- 3) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{7/2}}$;
- 4) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)^{3/2}}$.

K2-3.11

- 1) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{3x^2+1}};$
- 2) $\int \frac{x dx}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}}.$

K2-3.12

- 1) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}};$
- 2) $\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}};$
- 3) $\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$
- 4) $\int \frac{x dx}{(3x^2+2x+3)\sqrt{2x^2-x+2}}.$

K2-3.13

- 1) $\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}, \quad x > -1;$
- 2) $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx, x > 0;$ 3) $\int \frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}, x > 1;$
- 4) $\int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}}, \quad x > 1;$ 5) $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx, \quad x > -1;$
- 6) $\int \frac{x^3 dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$ 7) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2} dx$ 8) $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}};$ 9) $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx.$

K2-3.14

- 1) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}};$
- 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}};$
- 3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}};$
- 4) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x^2+x})^2};$
- 5) $\int \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \right)^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$
- 6) $\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2-x}}{\sqrt{x^2+3x+2+x}} dx.$

K2-3.15

Доказать, что вычисление интеграла

$$\int R(x; \sqrt{ax+b}; \sqrt{cx+d}) dx,$$

где $R(x; u; v)$ - рациональная функция переменных x, u, v , сводится к вычислению интеграла $\int R_1(t) dt$, где $R_1(t)$ - рациональная функция. Найти интеграл (16-19).

K2-3.16

- 1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}};$
- 2) $\int \frac{dx}{(\sqrt{2x-3}+2x-3)\sqrt{4-2x}}.$

K2-3.17

- 1) $\int x^{-1/3} (1-x^{1/6})^{-1} dx$
- 2) $\int x^{1/2} (1+x^{1/3})^{-2} dx;$
- 3) $\int x^{-2/3} (1+x^{1/3})^{-3} dx;$
- 4) $\int x^{-1/2} (1+x^{1/4})^{-10} dx.$

K2-3.18

- 1) $\int x^2 \sqrt[3]{(x+1)^2} dx;$
- 2) $\int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx$
- 3) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$
- 4) $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}$
- 5) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}$
- 6) $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{x^6 + 1}}.$

K2-3.19

- 1) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(2+x^3)^5}};$
- 2) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}}$
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}};$

K2-3.22

Найти псевдоэллиптический интеграл:

- 1) $\int \frac{dx}{x^7 \sqrt{x^4 + 1}}$
- 2) $\int \frac{(x^2 - 1) dx}{(x^2 + 1) \sqrt{x^4 + 1}};$
- 3) $\int \frac{(x - 1) dx}{(x + 1) \sqrt{x^3 + x^2 + x}};$
- 4) $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x \sqrt{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1}}, x > 1.$

K2-3.23

Найти замену переменной, с помощью которой интеграл $\int R(x; \sqrt{P_3(x)}) dx$ можно преобразовать в интеграл

$$\int R_1(t; \sqrt{P_4(t)}) dt$$

$R(x; y), R_1(t; u)$ - рациональные функции, $P_3(x), P_4(x)$ - многочлены третьей и четвертой степени.

K2-3.24

Доказать, что с помощью подстановки вида $x = (\alpha t + \beta)/(t + 1)$ интеграл $\int R(x; \sqrt{P_4(x)}) dx$ может быть преобразован в интеграл

$$\int R_1(t; \sqrt{A(1 + \lambda_1 t^2)(1 + \lambda_2 t^2)}) dt.$$

K2-3.25

Доказать, что любой интеграл вида $\int R(x; \sqrt{P_4(x)}) dx$ может быть выражен через элементарные функции и интеграл

$$\int \frac{R_1(t^2) dt}{\sqrt{A(1 + \lambda_1 t^2)(1 + \lambda_2 t^2)}},$$

где $R_1(u)$ - рациональная функция.

K2-3.26

Доказать, что интеграл

$$\int \frac{R(x^2) dx}{\sqrt{A(1 + \lambda_1 x^2)(1 + \lambda_2 x^2)}}, \quad A = \pm 1, \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| > 0,$$

с помощью одной из следующих подстановок:

$$\begin{aligned}\sqrt{|\lambda_1|x} = t, \quad \sqrt{|\lambda_1|x} = \sqrt{1-t^2}, \quad \sqrt{|\lambda_1|x} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ \sqrt{|\lambda_1|x} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \sqrt{|\lambda_2|x} = \sqrt{1 + \frac{|\lambda_2| - |\lambda_1|}{|\lambda_1|} t^2},\end{aligned}$$

приводится к виду $\int \frac{R_1(t^2)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, $k \in (0; 1)$.

K2-3.27

Выразить через элементарные функции и функции $F(\varphi; k)$ и $E(\varphi; k)$ эллиптический интеграл (см. (13), (14)):

- 1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{36x^4 - 13x^2 + 1}}$;
- 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x^2 - 8x^4}}$;
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 29x^2 + 100x^4}}$;
- 4) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{144x^4 + 7x^2 - 1}}$;
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^4 + 10x^2 - 1}}$;
- 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

19.1.5 Problems about Integrals from Trigonometric Functions: Warmup

(тут простейшие алгоритмы замен, которыми все и решается, можно тренироваться!)

K2-4.pr.1 Find $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$

Все хорошо преобразуется после замены $t = \operatorname{tg}(x/2)$, $-\pi < x < \pi$; тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5} &= 2 \int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2 \int (t+3)^{-2} dt = \\ &= -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{3 + \operatorname{tg}(x/2)} + C.\end{aligned}$$

K2-4.pr.2 Find $\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\sin^2 x \cos x + 9 \cos^3 x} dx$

Подынтегральная функция обладает свойством $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, поэтому применяем подстановку $t = \operatorname{tg} x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$). Разделив числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\cos^3 x$, получим

$$\begin{aligned}\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\sin^2 x \cos x + 9 \cos^3 x} dx &= \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\operatorname{tg}^2 x + 9} d \operatorname{tg} x = \int \frac{2t + 3}{t^2 + 9} dt = \\ &= \ln(t^2 + 9) + \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \ln(\operatorname{tg}^2 x + 9) + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{3} + C.\end{aligned}$$

K2-4.pr.3 Find $\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh}^8 x dx$

Подынтегральная функция обладает свойством $R(\operatorname{sh} x; -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x; \operatorname{ch} x)$, поэтому, применяя подстановку $t = \operatorname{sh} x$, получаем

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh}^8 x dx &= \int (1 + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{sh}^8 x d \operatorname{sh} x = \int (1 + t^2) t^8 dt = \\ &= \frac{t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{9} \operatorname{sh}^9 x + \frac{1}{11} \operatorname{sh}^{11} x + C.\end{aligned}$$

K2-4.pr.4 Find $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$

Используем тождество $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, разделяем на дроби:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x} = \\ &= - \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} - \int \frac{d \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C \end{aligned}$$

K2-4.pr.5 Find $\int \cos^4 x dx$

Степень понижается тождеством $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \\ &= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \end{aligned}$$

K2-4.pr.6 Find $\int \frac{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x}{4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} dx$

Удобно его быстро найти, если представить числитель подынтегральной функции в виде линейной комбинации знаменателя и производной знаменателя:

$$2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x = \alpha(4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x) + \beta(4 \operatorname{ch} x + 5 \operatorname{sh} x).$$

Приравнявая коэффициенты, находим $\alpha = 7/9, \beta = -2/9$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x}{4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} dx &= \frac{7}{9} \int dx - \frac{2}{9} \int \frac{4 \operatorname{ch} x + 5 \operatorname{sh} x}{4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} dx = \\ &= \frac{7}{9} x - \frac{2}{9} \int \frac{d(4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x)}{4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} = \frac{7}{9} x - \frac{2}{9} \ln(4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x) + C. \end{aligned}$$

K2-4.pr.7 Find $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x} dx$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям, положив $u = \operatorname{ch} x$, $dv = \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{sh}^3 x}$. Тогда $du = \operatorname{sh} x dx$, $v = \int \frac{d \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^3 x} = -\frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 x}$,

$$\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x},$$

где $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}(x/2) \operatorname{ch}(x/2)} = \int \frac{d \operatorname{th}(x/2)}{\operatorname{th}(x/2)} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + 2C$. Следовательно,

$$\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$$

K2-4.pr.8 Find $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$

Решается подстановкой $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^5 x / \cos^5 x} \cos^2 x} dx = \int (\operatorname{tg} x)^{-5/3} d \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2} (\operatorname{tg} x)^{-2/3} + C.$$

Вообще, с помощью подстановки $t = \sin x$ интеграл сводится к интегралу от дифференциального бинома

$$\int t^{-5/3} (1 - t^2)^{-2/3} dx.$$

Заметим, что число

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-5/3+1}{2} - \frac{2}{3} = -1$$

является целым, и поэтому подстановкой $-1+t^{-2} = u^3$ интеграл приводится к интегралу от рациональной функции, причем в данном случае к интегралу от постоянной.

K2-4.pr.9Integral $\int \frac{dx}{\ln^2 x}, x < 1$ **через li(x) и элементарные функции**

Выразить через интегральный логарифм li(x) и элементарные функции интеграл $\int \frac{dx}{\ln^2 x}, x < 1$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям, положив $u = x, \quad dv = \frac{dx}{x \ln^2 x}$, получим

$$du = dx, \quad v = \int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\ln^2 x} = -\frac{x}{\ln x} + \int \frac{dx}{\ln x} = -\frac{x}{\ln x} + \text{li}(x) + C.$$

K2-4.pr.9Integral $\int \text{Si}(x)dx$ **через Si(x) и элементарные функции**

Выразить через интегральный синус Si(x) и элементарные функции интеграл $\int \text{Si}(x)dx$.

Применим формулу вычисления по частям, положив $u = \text{Si}(x), \quad dv = dx$; тогда $du = \frac{\sin x}{x} dx, \quad v = x$.
Следовательно,

$$\int \text{Si}(x)dx = x\text{Si}(x) - \int \sin x dx = x\text{Si}(x) + \cos x + C.$$

K2-4.1 The simplest integrals of transcendental functions

- 1) $\int \sin x \sin 3x dx$;
 - 2) $\int \sin 2x \cos 4x dx$
 - 3) $\int \cos x \cos 4x dx$
 - 4) $\int \sin(3x+2) \cos(x-1) dx$;
 - 5) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$;
 - 6) $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$ 7) $\int \sin^2 x \cos(3x+1) dx$; 8) $\int \cos^2 2x \cos^2 3x dx$.
- (пока лень решать)

K2-4.2

- 1) $\int \text{sh } x \text{ sh } 7x dx$
 - 2) $\int \text{sh}^3 x dx$
 - 3) $\int \text{ch } x \text{ ch } 2x \text{ ch } 3x dx$;
 - 4) $\int \frac{dx}{\text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x}$.
- (пока лень решать)

K2-4.3

- 1) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$
- 2) $\int \frac{\sin 3x}{\cos x} dx$;
- 3) $\int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x} dx$
- 4) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin 4x} dx$.

K2-4.4

- 1) $\int \cos^3 x dx$;
- 2) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$
- 3) $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$;
- 4) $\int \cos^5 2x \sin^7 2x dx$
- 5) $\int \cos^3 x \cos 2x dx$
- 6) $\int \cos^2 3x \sin x dx$.

19.1.6 Problems about Integrals from Trigonometric Functions 1**Landau.tm-prim.2023Find** $\int \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{\sin^6 x + 1} dx$

(потом прорешаю, когда день матем буду устраивать себе)

(Задача интересна тем, что кажется простой, а на деле без методов ТФКП прямо я и не знаю, как сделать)

IG-integral-factory. Integral of cos, log and fraction

Evaluate $\int_0^\infty \frac{\cos(\ln(x))}{1+x+x^2} dx$.

Solution

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\cos(\ln(x))}{1+x+x^2} dx = \\ &= \mathcal{R}_e \int_0^\infty \frac{x^i dx}{(x+e^{i\pi/3})(x+1-e^{i\pi/3})} \xrightarrow{PFD} \\ \Rightarrow \mathcal{R} \left(\frac{1}{1-2e^{i\pi/3}} \int_0^\infty \frac{x^i dx}{e^{i\pi/3}(1+x/e^{i\pi/3})} + \frac{1}{2e^{i\pi/3}-1} \int_0^\infty \frac{x^i dx}{(1-e^{i\pi/3})(1+x/(1-e^{i\pi/3}))} \right) \\ & \quad \frac{x}{e^{i\pi/3}} \wedge \frac{x}{1-e^{i\pi/3}} \rightarrow x \wedge \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x^k} dx = \frac{\pi}{k} \csc(\pi s/k) \Rightarrow \\ \Rightarrow I = \mathcal{R}_e \left(\pi \csc(\pi(1+i)) \times \frac{e^{-\pi/3} - (1-e^{i\pi/3})^i}{1-2e^{i\pi/3}} \right) &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}(1+2\cosh(2\pi/3))} \end{aligned}$$

19.2 Problems about Relatively Exotic Integrals**19.2.1 Problems about Special Famous Integrals 1**

(!! мощнейший раздел)

(!!! во введение и 1 части укажу эти интегралы, потому что они крутые!)

K3-15.пр .1 Integral Dirichlet

Найти интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha; \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \quad \beta > 0.$$

При фиксированном $\beta > 0$ этот интеграл сходится для каждого $\alpha \neq 0$ по признаку Дирихле сходимости несобственных интегралов, так как функция $\frac{1}{x}e^{-\beta x}$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$, а функция $\sin \alpha x$ имеет при $\alpha \neq 0$ ограниченную первообразную $\left(\int_0^x \sin \alpha t dt = \frac{1-\cos \alpha x}{\alpha} \right)$. При $\alpha = 0$ интеграл (9) равен нулю. Кроме того, интеграл

$$K(\alpha; \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx,$$

полученный из (9) дифференцированием по α подынтегральной функции, сходится равномерно по α на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса.

Используя правило Лейбница (1) и формулу (4), получаем

$$\Phi'_\alpha(\alpha; \beta) = K(\alpha; \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Интегрируя на отрезке $[0; \alpha]$ равенство (10), находим

$$\Phi(\alpha; \beta) - \Phi(0; \beta) = \beta \int_0^\alpha \frac{dt}{t^2 + \beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Так как $\Phi(0; \beta) = 0$, то отсюда следует, что при любом $\beta > 0$ справедлива формула

$$\Phi(\alpha; \beta) = \operatorname{arctg}(\alpha/\beta),$$

Т.е.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Вычислим интеграл (8), считая, что $\alpha > 0$. Заметим, что при каждом фиксированном $\alpha > 0$ интеграл (9) сходится равномерно по β на отрезке $[0; 1]$, так как функция $\sin \alpha x$ имеет ограниченную первообразную ($\alpha > 0$ фиксировано), а функция $g = e^{-\beta x}/x$ монотонно убывает ($g'_x < 0$ при $x > 0, \beta \geq 0$) и $g(x; \beta) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ на отрезке $[0; 1]$. По признаку Дирихле интеграл (11) сходится равномерно по β на отрезке $[0; 1]$. Из равномерной сходимости интеграла (11) и непрерывности функции $e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}$ на множестве

$$G = \{(x; \beta) : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq \beta \leq 1\}$$

следует непрерывность по β функций $\Phi(\alpha; \beta)$ на отрезке $[0; 1]$ и, в частности, непрерывность по β этой функции справа в точке $\beta = 0$.

Это означает, что в интеграле (11) можно перейти к пределу при $\beta \rightarrow +0$ под знаком интеграла. Следовательно,

$$\lim_{\beta \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая, что $\frac{\sin \alpha x}{x}$ - нечетная по α функция, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha, \quad \alpha \in R.$$

Integrate Laplace

Найти интегралы Лапласа

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \quad \text{и} \quad K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx.$$

КЗ-15.пр.2 Интегралы Лапласа дифференцированием по параметру

Пусть $\alpha > 0$. Так как функция $\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}$ непрерывна при любых α и x , а интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$$

сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$, то получаем

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$$

Складывая почленно это равенство с равенством $\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, где $\alpha > 0$, находим

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx.$$

Дифференцируя полученное равенство почленно, имеем

$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

Таким образом, функция $I(\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $I''(\alpha) - I(\alpha) = 0$, общее решение которого имеет вид

$$I(\alpha) = C_1 e^\alpha + C_2 e^{-\alpha}.$$

Заметим, что

$$|I(\alpha)| \leq I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того $e^{-\alpha} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow +\infty$, а $e^\alpha \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что в формуле (

14)

$C_1 = 0$, и поэтому $I(\alpha) = C_2 e^{-\alpha}$. Полагая $\alpha = 0$ и учитывая, что $I(0) = \frac{\pi}{2}$, получаем $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$. Так как $I(\alpha)$ - четная функция, то

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Из равенства (13) следует, что $I'(\alpha) = -K(\alpha)$. Следовательно,

$$K(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} e^{-\alpha}\right)' = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

Т. е.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

откуда в силу нечетности функции $K(\alpha)$ следует, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \cdot e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

T.1 laplace integrals using the Fourier transform (???)

Вычислите интегралы Лапласа с помощью преобразования Фурье.

K3-15.pr.3 Find the Euler-Poisson integral $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Положим $x = yt$, где $t > 0$ (t - фиксированное число). Тогда $I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} t dy$, откуда

$$I \cdot e^{-t^2} = \int_0^{+\infty} e^{-(y^2+1)t^2} t dy.$$

Интегрируя по t на промежутке $[0; +\infty)$, получаем

$$I \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)} t dy.$$

Здесь левая часть равна I^2 . Вычислим правую часть, назовем её K , изменив порядок интегрирования:

$$K = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)} t dt$$

Так как

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t^2(1+y^2)} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)} \frac{d((1+y^2)t^2)}{1+y^2} = -\frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{2(1+y^2)},$$

то

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $I^2 = K = \pi/4$, откуда $I = \sqrt{\pi}/2$, т.е.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Перестановка порядка интегрирования в равенстве $\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)} t dy$ законна, так как подынтегральная функция $g = te^{-t^2(1+y^2)}$ неотрицательна при $t \geq 0, y \geq 0$ и непрерывна, интегралы от функции g , взятые по t и y , сходятся равномерно по y и t соответственно на отрезках $[0; \xi]$ и $[0; \eta]$ при любых $\xi > 0$ и $\eta > 0$ (признак Вейерштрасса), а один из повторных интегралов сходится и равен $\pi/4$.

K3-15.pr.4 Find the Laplace integral $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx$

Дифференцируя интеграл $I(\alpha)$ по α , получаем

$$I'(\alpha) = -2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin 2\alpha x dx$$

Применение правила Лейбница законно, так как функция $e^{-x^2} \cos 2\alpha x$ непрерывна при $x \geq 0, \alpha \in R$, интеграл $I(\alpha)$ сходится при каждом $\alpha \in R$, а интеграл в правой части (20) сходится равномерно по α на R (признак Вейерштрасса). Преобразуем равенство (20), применяя метод интегрирования по частям:

$$I'(\alpha) = e^{-x^2} \sin 2\alpha x \Big|_0^{+\infty} - 2\alpha \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx.$$

Из (20) и (21) следует, что $I'(\alpha) = -2\alpha I(\alpha)$ или $\frac{dI(\alpha)}{I(\alpha)} = -2\alpha d\alpha$, откуда

$$I(\alpha) = C e^{-\alpha^2}.$$

Полагая $\alpha = 0$ и учитывая, что $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (пример 3), получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}$$

K3-15.pr.5 Fresnel integrals $I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ и $I_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$

Найти интегралы Френеля

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx \quad \text{и} \quad I_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

Полагая $x^2 = t$, запишем интеграл I в следующем виде:

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

Пусть $t > 0$; тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du,$$

замену переменной по формуле $\sqrt{t}u = x$ и воспользоваться интегралом Эйлера-Пуассона. Получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t dt$$

Используя формулу $I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, находим

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4}.$$

Далее заметим, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1/x^2) dx}{1 + (1/x)^4} = - \int_{+\infty}^0 \frac{dt}{1 + t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} &= \int_0^{+\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(1 + 1/x^2) dx}{x^2 + 1/x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d(x - 1/x)}{(x - 1/x)^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - 1/x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

откуда $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Для обоснования законности перестановки порядка интегрирования в формуле (25) можно воспользоваться (см. (23)) при $\alpha \neq 0$ равенством

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t} \sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-t(u^2 + \alpha^2)} \sin t dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (u^2 + \alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ (законность перехода к пределу следует из равномерной сходимости интегралов), получим равенство (26), из которого следует, что

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

K3-15.1

Пусть $a > 0, b > 0$. Применяя формулу Фруллани (6), вычислить интеграл:

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 ax - \cos^2 bx}{x} dx;$
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax - \sin^2 bx}{x} dx$
- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx;$
- 4) $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx.$

K3-15.2 Integrals through the Dirichlet integral

Используя интеграл Дирихле (12), вычислить интеграл (2-4).

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx;$
- 2) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx;$
- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx$
- 4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx ;$
- 5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx;$
- 6) $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$

K3-15.3 Integrals through the Dirichlet integral

Используя интеграл Дирихле (12), вычислить интеграл (2-4).

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^2 x}{x} dx;$
- 3) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx;$
- 4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx; 5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^4 x}{x} dx; 6) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^+ x}{x} dx.$

K3-15.4 Integrals through the Dirichlet integral

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^6 x}{x} dx$
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{2 \sin \alpha x - \sin 2\alpha x}{x^3} dx$
- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^+ \alpha x}{x^2} dx; 4) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx;$
- 5) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x + \cos \beta x - 2}{x^2} dx, \alpha > 0, \beta > 0; 6) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos \alpha x}{x^2} dx.$

K3-15.5 Integrals from fractions with trigonometry in the numerator (!??!)

Используя интеграл Дирихле (12) или интеграл Фруллани (6), вычислить интеграл:

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta$
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin x - \sin \alpha x}{x^2} dx, \alpha > 0$

- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx, \alpha > 0, \beta > 0;$
 4) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha x \cos x - \sin \alpha x}{x^2} dx, \alpha > 0; 5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx;$
 6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x \cos \alpha x}{x^3} dx, \alpha > 3.$

K3-15.6 Using differentiation by parameter, calculate the integrals (!!!!!!!!!)

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx, \beta > 0$
 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx, \beta > 0;$
 3) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin \lambda x dx, \alpha > 0, \beta > 0, \lambda \neq 0$
 4) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x dx, \alpha > 0, \beta > 0;$
 5) $\int_0^1 \frac{\arctg \alpha x}{x \sqrt{1-x^2}} dx; 6) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2(x^2+\beta^2)} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$

K3-15.7

Доказать, что если $\alpha > 0$, то $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg \alpha x}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \ln(1+\alpha).$

K3-15.8

Используя результат примера 7, доказать, что:

- 1) $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2$
 2) $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

K3-15.9

Пользуясь тем, что $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha}$ при $\alpha > 0$, вычислить интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1} \ln^m x dx$, где $m \in \mathbb{N}$.

K3-15.10

Пользуясь формулой $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} (a > 0)$, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, где $n \in \mathbb{N}$.

K3-15.11

Пользуясь тем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ при $\alpha > 0$, доказать, что $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi(b-a)}{2}$

K3-15.12

Пользуясь тем, что $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$ при $\alpha > 0$, доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}, \quad a > 0, b > 0.$$

K3-15.13

Используя интеграл Эйлера-Пуассона (19), доказать, что:

- 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta x)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/\alpha}, \alpha > 0;$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} (ax^2 + 2bx) e^{-(\alpha x^2 + 2\beta x)} dx = \frac{(\alpha + 2\beta^2)a - 4\alpha\beta b}{2\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/\alpha}, \alpha > 0$
- 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx = 2\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}), \alpha > 0, \beta > 0;$
- 4) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta^2/(4\alpha)}, \alpha > 0;$
- 5) $\int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \alpha^2/x^2)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha}, \alpha > 0.$

K3-15.14 Find $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx.$

Пользуясь тем, что $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, где $\alpha > 0$, доказать, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\alpha^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad n \in N.$$

Найти интеграл (15 – 19).

K3-15.15

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{1+x^2} dx, \quad \alpha > 0$
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx, \alpha > 0;$
- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^4} dx; 4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2(1+x^2)} dx; 5) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx;$
- 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2 + 2bx + c} dx, a > 0, ac - b^2 > 0.$

K3-15.16

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx, \alpha > 0, \beta > 0;$
- 2) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x \frac{dx}{x}, \alpha > 0; 3) \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin \beta x dx, \alpha > 0;$
- 4) $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx, \quad n \in N; 5) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x \frac{dx}{x^2}, \alpha > 0$
- 6) $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1.$

K3-15.17

- 1) $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1$
- 2) $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \alpha \leq 1;$
- 3) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0; 4) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$

- 5) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0;$
 6) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{\beta^2+x^2} dx, \alpha > 0, \beta > 0;$ 7) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+\beta^2 x^2)}{(1+x)^2} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$

K3-15.18

- 1) $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+\alpha \cos x)}{\cos x} dx, |\alpha| \leq 1$
 2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, \alpha > 0;$
 3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^2} dx, \alpha > 0, \beta > 0;$
 4) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \operatorname{arctg} \beta x}{x^3} dx, \alpha > 0, \beta > 0;$
 5) $\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha^2/x^2} - e^{-\beta^2/x^2}) dx, \quad \alpha\beta \neq 0;$
 6) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$

K3-15.19

- 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx, a > 0;$
 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} e^{-\lambda x} dx, \lambda > 0;$ 3) $\int_0^{+\infty} \cos x^2 \cos 2ax dx;$
 4) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \cos 2ax dx$
 5) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \cos \alpha x - e^{-bx} \cos \beta x}{x} dx, a > 0, b > 0.$

K3-15.20

Доказать, что функция $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2} dx$ непрерывна и дифференцируема на R .

K3-15.21

Доказать, что если $a > 0, \delta > 0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-axt^2} dt = \sqrt{\pi/a}.$

K3-15.22

Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ имеет при $\alpha \neq 0$ производную, однако ее нельзя найти с помощью правила Лейбница.

K3-15.23

Выяснить, допустима ли перестановка порядка интегрирования в следующих случаях:

- 1) $\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} dx$
 2) $\int_1^{+\infty} dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dy.$

K3-15.24

Используя представление бесселевой функции нулевого порядка $I_0(x)$ формулой

$$I_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta,$$

доказать, что $\int_0^{+\infty} e^{-ax} I_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad a > 0.$

K3-15.25

Многочлены Чебыцева-Эрмита определяются формулами

$$H_0(x) \equiv 1, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{если } m = n \end{cases}$$

K3-15.26

Доказать, что если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то функция

$$u(x; t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} d\xi$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и начальному условию $\lim_{t \rightarrow +0} u(x; t) = f(x).$

K3-15.27

Доказать тождество:

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\sin(x-\alpha)}{x} dx, \quad \alpha > 0;$
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2+a^2} dx, \quad a > 0;$
- 3) $\int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t} dt.$

K3-15.28

Доказать, что $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2bx dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2} dt.$

K3-15.29

Доказать, что:

- 1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}, \quad a > 0;$
- 2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \sin bx^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{a^2+b^2}}, \quad a > 0;$
- 3) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \frac{\alpha^2}{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-|\alpha|\sqrt{2}} \cos |\alpha|\sqrt{2};$
- 4) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin \frac{\alpha^2}{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-|\alpha|\sqrt{2}} \sin |\alpha|\sqrt{2}.$

19.2.2 Problems about Feynman's Method 1

(в 1й части укажу случаи применения этого метода, пока плохо вижу его!?!?)
 (на ютубе они решены https://www.youtube.com/channel/UCepKxh_j0SH2cw0nbY9FwZQ/videos, пока так скинуты, потом буду разбираться.)
 thefeynmantechnique

thefeynmantechnique. Find $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$

thefeynmantechnique. Find $(2n-1)!! = \frac{2^{(n+1)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} x^{2n} e^{-x^2} dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_n^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x - \arctan 2x}{x} dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_0^{\pi} \ln(1 - \cos x) dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x) dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{-\tan x} - e^{-2 \tan x})}{\sin(2x)} dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos^2 x)}{\cos^2 x} dx \int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^8 dx$

thefeynmantechnique. Find $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$

QM. Integrals for the WCB method (!!?!?)

(вот тут укажу эти интегралы, которые меня прямо в тупик и поставили.)

19.2.3 Problems about Feynman's Method 2

see other cool https://www.youtube.com/channel/UCepKxh_j0SH2cw0nbY9FwZQ/videos, I'll do it later.
 thefeynmantechnique

19.2.4 Problems about Integrals with Parameter 1

(тут всяких особенностей много, так что раздел на них, все-таки в другом семестре они не спроста.
 не актуально то сейчас вообще!)

(!! о пределах от интеграла в 1 части есть раздел?? там и теоремы и идея рассмотреть дополнительную функцию.)

(!! важная идея, что порой проинтегрировать производную по параметру проще, чем изначальный интеграл. поэтому метод в том, чтобы найти производную, проинтегрировать её по x , дальше обратно по параметру)

K3-13.pr.1. Find $I = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos \alpha x) e^{x \sin \alpha} dx$

Так как подынтегральная функция непрерывна в прямоугольнике $K = \{(x; \alpha) : -\pi \leq x \leq \pi, -1 \leq \alpha \leq 1\}$, то просто меняем интеграл и предел:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x; 0) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} (x + \cos \alpha x) e^{x \sin \alpha} = \int_{-\pi}^{\pi} (x + 1) dx = 2\pi.$$

K3-13.Ex.2. Find $I = \int_0^1 \frac{x^{\alpha_2} - x^{\alpha_1}}{\ln x} dx, \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2.$

(!? решается гениальной переменной мест интегрирования. пропишу в 1й части!)

Рассмотрим функцию $f(x; \alpha) = x^\alpha$. Она непрерывна в прямоугольнике $K = \{(x; \alpha) : 0 \leq x \leq 1, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$, где $\alpha_1 > 0$. Меняя местами порядок интегрирования, получаем

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_0^1 x^\alpha dx \right) d\alpha = \int_0^1 \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^\alpha d\alpha \right) dx$$

Здесь левая часть равна $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \ln \frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}$, А правая $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^\alpha d\alpha = \frac{x^{\alpha_2} - x^{\alpha_1}}{\ln x} = I$. Следовательно,

$$I = \ln \frac{1 + \alpha_2}{1 + \alpha_1}.$$

(?!?! наверное, есть разные вариации этой задачи при конкретных константах, так что она полезная.)

K3-13. Problem 3. Find $I'(\alpha)$, given $I(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$

По формуле дифференцирования интеграла по параметру, $I'(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} x dx = \frac{e^{\alpha x^2}}{2\alpha} \Big|_1^2 = \frac{e^{4\alpha} - e^\alpha}{2\alpha}.$

K3-13.pr.4 Find $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x) dx, \quad \alpha \neq 0.$

Пусть $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$. Так как функция

$$f(x; \alpha) = \ln(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x)$$

непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f(x; \alpha)}{\partial \alpha}$ в прямоугольнике $K = \{(x; \alpha) : 0 \leq x \leq \pi/2, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$, где $\alpha_1 > 0$, то по формуле дифференцирования получаем

$$I'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha \cos^2 x}{\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x} dx.$$

Используя подстановку $t = \operatorname{tg} x$, находим

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)(t^2 + \alpha^2)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + \alpha^2} \right) dt = \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \left(\operatorname{arctg} t - \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\alpha + 1}, \end{aligned}$$

откуда

$$I(\alpha) = \pi \ln(\alpha + 1) + C.$$

Так как $I(\alpha)$ - функция, непрерывная при $\alpha > 0$, и $I(1) = 0$, то $C = -\pi \ln 2$. Следовательно, $I(\alpha) = \pi \ln((\alpha + 1)/2)$ при $\alpha > 0$. Учитывая, что $I(\alpha)$ - четная функция, отсюда получаем $I(\alpha) = \pi \ln((|\alpha| + 1)/2)$, если $\alpha \neq 0$.

K3-13.pr.5 Derivative of $\Phi(\alpha) = \int_{\cos \alpha}^{\sin \alpha} \operatorname{sh} \alpha x^2 dx$

Найти $\Phi'(\alpha)$, если $\Phi(\alpha) = \int_{\cos \alpha}^{\sin \alpha} \operatorname{sh} \alpha x^2 dx$.

По формуле (7) находим

$$\Phi'(\alpha) = \cos \alpha \cdot \operatorname{sh}(\alpha \sin^2 \alpha) + \sin \alpha \cdot \operatorname{sh}(\alpha \cos^2 \alpha) + \int_{\cos \alpha}^{\sin \alpha} x^2 \operatorname{ch} \alpha x^2 dx.$$

K3-13.1 Prove continuity

Доказать, что функция $I(\alpha)$ непрерывна на R , если:

- 1) $I(\alpha) = \int_0^1 \sin^2 \alpha x^2 dx$;
- 2) $I(\alpha) = \int_{-1}^2 \frac{x^2}{1+x^2+\alpha^2 x^4} dx$

K3-13.2. Limits from the integral

Найти предел:

$$1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{1 + \alpha^2 x^4} dx;$$

Просто заносим под интеграл, в итоге $I = 1$.

$$2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$$

$$3) \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_2^4 \frac{x dx}{1+x^2+\alpha^6}$$

$$4) \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 x^2 e^{\alpha x^3} dx$$

$$5) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\pi x \cos(1 + \alpha)x dx.$$

(?? просто используем формулу???)

K3-13.3

Доказать, что функция $I(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{sign}(x - \alpha) dx$ непрерывна на R .

K3-13.4

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на отрезке $[0; 1]$. Доказать, что функция

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} f(x) dx$$

разрывна при $\alpha = 0$.

K3-13.5 Can the limit be entered under the integral

Выяснить, справедливо ли равенство $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 f(x; \alpha) dx = \int_0^1 \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x; \alpha) dx$, если:

- 1) $f(x; \alpha) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-x^2/\alpha^2}$;
- 2) $f(x; \alpha) = \frac{2x\alpha^2}{(\alpha^2 + x^2)^2}$.

K3-13.6

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $a < a_0 < x < b$. Доказать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha_0}^x [f(t + \alpha) - f(t)] dt = f(x) - f(a_0).$$

K3-13.7

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ - последовательность функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a; b]$ и принимающих на этом отрезке неотрицательные значения, равномерно сходящаяся к нулю на множестве $E = \{x : 0 < \delta \leq |x| \leq 1\}$ при любом $\delta > 0$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx = 1.$$

Доказать, что для любой непрерывной на отрезке $[-1; 1]$ функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx = f(0).$$

K3-13.8

Выяснить, равны ли интегралы

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x; \alpha) d\alpha \right) dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x; \alpha) dx \right) d\alpha$$

если:

- 1) $f(x; \alpha) = \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2}$
- 2) $f(x; \alpha) = \frac{\alpha - x}{(\alpha + x)^3}$;
- 3) $f(x; \alpha) = \left(\frac{x^5}{\alpha^4} - \frac{2x^3}{\alpha^3} \right) e^{-x^2/\alpha}$.

K3-13.9

Пусть функция $f(x; \alpha)$ при каждом $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$ интегрируема по x на отрезке $[a; b]$, и пусть на этом отрезке существует функция $\varphi(x)$ такая, что $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x; \alpha) = \varphi(x)$, где $\alpha_0 \in [\alpha_1; \alpha_2]$, равномерно относительно $x \in [a; b]$. Доказать, что:

- 1) $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^b f(x; \alpha) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$
- 2) $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^b f(x; \alpha) g(x) dx = \int_a^b \varphi(x) g(x) dx$, где $g(x)$ - Функция, интегрируемая на отрезке $[a; b]$.

K3-13.10 Complex integral

Пользуясь формулой $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1 + x^2 \alpha^2}$, вычислить $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x \sqrt{1 - x^2}} dx$

K3-13.11 Complex integral

Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sin x} \ln \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dt}{a^2 - b^2 t^2 \sin^2 x},$$

где $a > b > 0$, вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} \frac{dx}{\sin x}$$

K3-13.12

Пусть $a > 0, b > 0$. Найти интеграл:

$$1) \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

$$2) \int_0^1 \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

K3-13.13

Найти $I'(\alpha)$, если:

$$1) I(\alpha) = \int_0^1 \sin(\alpha x) dx$$

$$2) I(\alpha) = \int_1^3 \frac{\cos(\alpha x^3)}{x} dx$$

$$3) I(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$$

$$4) I(\alpha) = \int_2^3 \operatorname{ch}(\alpha^4 x^2) \frac{dx}{x}.$$

K3-13.14

Найти $\Phi'(\alpha)$, если:

$$1) \Phi(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$$

$$2) \Phi(\alpha) = \int_\alpha^{2\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

$$3) \Phi(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx; \quad 4) \Phi(\alpha) = \int_{3\alpha}^{\alpha^2} e^{\alpha x^2} dx$$

$$5) \Phi(\alpha) = \int_{\cos \alpha}^{\sin \alpha} e^{\alpha^4 x^2} dx; \quad 6) \Phi(\alpha) = \int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \ln(1 + \alpha^2 x^2) \frac{dx}{x} \quad 7) \Phi(\alpha) = \int_{\alpha e^{-\alpha}}^{\alpha e^{\alpha}} \ln(1 + \alpha^2 x^2) dx \quad 8)$$

$$\Phi(\alpha) = \int_{\operatorname{ch} \alpha}^{\operatorname{sh} \alpha} \ln(1 + x^2 + \alpha^2) dx$$

19.2.5 Problems about Integrals with Parameter 2**K3-13.15**

Можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции

$$I(\alpha) = \int_0^1 \ln(x^2 + \alpha^2) dx \quad \text{при} \quad \alpha = 0?$$

K3-13.16

Пусть функция f непрерывна на R . Доказать, что функция $F(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x+t)dt$, где $a > 0$, имеет непрерывную производную на R , и найти $F'(x)$.

K3-13.17

С помощью дифференцирования интеграла $\int_0^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$ по параметру α , где $\alpha > 0$, вычислить интеграл $\int_0^b \frac{dx^0}{(x^2 + \alpha^2)^2}$.

K3-13.18

Применяя дифференцирование по параметру α , вычислить интеграл $I(\alpha)$, если:

- 1) $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 \varphi) d\varphi, \quad \alpha > 1$
- 2) $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx, \quad |\alpha| < 1;$
- 3) $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln \frac{1 + \alpha \cos x}{1 - \alpha \cos x} \frac{dx}{\cos x}, \quad |\alpha| < 1;$
- 4) $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$

K3-13.19

Пусть функция $f(x; \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике

$$K = \{(x; \alpha) : a \leq x \leq b, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\},$$

а функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$. Доказать, что: 1) функция $F(\alpha) = \int_a^b f(x; \alpha)g(x)dx$ непрерывна на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$

2) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x; \alpha)g(x) d\alpha \right) dx$; 3) функция $F(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$, причем

$$F'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(x; \alpha)}{\partial \alpha} g(x) dx,$$

при дополнительном условии, что функция $\frac{\partial f(x; \alpha)}{\partial \alpha}$ непрерывна в прямоугольнике K . 20. Пусть $F(\alpha) = \int_0^\alpha (x + \alpha)f(x)dx$, где $f(x)$ - дифференцируемая на R функция. Найти $F''(\alpha)$.

K3-13.21

Пусть $F(\alpha) = \int_a^b f(x)|x - \alpha|dx$, где $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция. Найти $F''(\alpha)$.

K3-13.22

Пусть $F(\alpha) = \frac{1}{h^2} \int_0^h \left(\int_0^h h(\xi + \eta + \alpha) d\eta \right) d\xi$, где $h > 0$, f непрерывная на R функция. Найти $F''(\alpha)$.

K3-13.23

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, $x_0 \in (a; b)$, $x \in (a; b)$, $k \neq 0$. Доказать, что функция

$$y(x) = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(t) \sin k(x-t) dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + k^2 y = f(x)$.

K3-13.24

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, $x_0 \in (a; b)$, $x \in (a; b)$. Доказать, что функция

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad \text{где } n \in N,$$

удовлетворяет условиям

$$F(x_0) = F'(x_0) = \dots = F^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad F^{(n)}(x) = f(x).$$

K3-13.25 The function satisfies the equation

Доказать, что функция $u(r) = \int_0^\pi e^{nr \cos \theta} d\theta$ при любом $n \in Z$ удовлетворяет уравнению $\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - n^2 u = 0$.
(??? ну подставить, в чем проблема???)

K3-13.26 The function satisfies the equation

Доказать, что функция (x) удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0,$$

если:

- 1) $u(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi, \quad n \in N;$
- 2) $u(x) = x^n \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) \sin^{2n} \varphi d\varphi, \quad n \in N.$

K3-13.27 Elliptic integrals

Рассмотрим полные эллиптические интегралы

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad K(k) \equiv F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

где $0 < k < 1$. Доказать, что:

- 1) $E'(k) = \frac{E-K}{k}, K'(k) = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k};$
- 2) $E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0;$
- 3) $\int_0^k t K(t) dt = E(k) - (1-k^2) K(k)$
- 4) $\int_0^k t E(t) dt = \frac{1}{3} ((1+k^2) E(k) - (1-k^2) K(k)).$

K3-13.28

Пусть $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$, $\varphi(0) = 1$. Показать, что:

- 1) $x^{n+1} \varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right) dt, \quad n \in N, x \in R;$
- 2) $|\varphi^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{n+1}, \quad n \in N, x \in R.$

K3-13.29

Пусть функция $\varphi(x)$ и ее производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[0; a]$, и пусть

$$F(t) = \int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{t-x}}.$$

Доказать, что при $t \in (0; a)$ справедливо равенство

$$F'(t) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{t-x}} dx.$$

30. Пусть $K(x; y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{если } x \leq y, \\ y(1-x), & \text{если } x > y, \end{cases}$ и пусть $\varphi(y)$ - непрерывная на отрезке $[0; 1]$ функция. Показать, что функция

$$u(x) = \int_0^1 K(x; y)\varphi(y)dy$$

удовлетворяет на отрезке $[0; 1]$ уравнению $u''(x) = -\varphi(x)$.

K3-13.31

Найти дважды дифференцируемую на R функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению:

$$1) \varphi(x) = x + \int_0^x (y-x)\varphi(y)dy$$

$$2) \varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy, \lambda > 0;$$

$$3) \varphi(x) = \lambda \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy + x^2, \quad \lambda > 0.$$

K3-13.32

Найти $F''_{xy}(x; y)$, если $F(x; y) = \int_{x/y}^{xy} (x-yt)f(t)dt$, где $f(t)$ - дифференцируемая функция, $y \neq 0$.

K3-13.33

Пусть f - дважды дифференцируемая, а F - дифференцируемая функция. Доказать, что функция

$$u(x; t) = \frac{1}{2}(f(x-at) + f(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi)d\xi$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \neq 0,$$

и следующим начальным условиями:

$$u(x; 0) = f(x), \quad u'_t(x; 0) = F(x).$$

K3-13.34

Показать, что если функция f непрерывна на отрезке $[0; a]$, $\xi \in [0; a]$ и $(x-\xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, то функция

$$u(x; y; z) = \int_0^a \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

МИТТ-Т.14а.

Вычислите: а) $\lim_{a \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{a}{a^2+x^2} f(x) dx$, где $f \in C[-R, R]$

МИТТ-Т.14б.

б) $\lim_{a \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{\sin(x/a)}{x} f(x) dx$, где $f \in C[-R, R]$ и существует $f'(0)$

19.2.6 Problems about Integrals Related to Gamma Function

(?? как там по комплану нас учили делать??? хз, потом сравню.)

Solve $\int_0^1 \ln^{2020}(x) dx$

(впишу потом в 1ю часть, что такие интегралы сразу следует пытаться через гамма функцию преобразовать!!!)

Подставим $\log x = -u$, тогда $x = e^{-u}$ и $dx = -e^{-u} du$. Интеграл сводится к гамма-функции:

$$\int_0^{+\infty} u^{2020} e^{-u} du = \Gamma(2021) = 2020!$$

Solve $\int_0^1 \ln^n x dx$

Можно представить интеграл как дифференцирование:

$$\int_0^1 \ln^n x dx = \left(\frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 x^a dx \right)_{a=0} = \left(\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{a+1} \right)_{a=0} = (-1)^n n!$$

(!!!! важно в 1ю ЭТОТ МЕТОД ДОБАВИТЬ!!!!)

K3-16.pr.1 Find $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$, $0 < \alpha < 1$ (!?!?!?)

Solution

(??? раскладываем на два интеграла, для каждого свой метод применяем. почему разные методы, кстати?)

Обозначим $I_1 = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$, $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$.

Пусть $0 < x < 1$, тогда

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{\alpha+k-1}.$$

Если $\alpha \in (0; 1)$, $x \in (0; 1)$, $f(x; \alpha) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$, $f_n(x; \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{\alpha+k-1}$, то

$$|f(x; \alpha) - f_n(x; \alpha)| = \left| \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} - \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} (1 + (-1)^{n+1} x^n) \right| = \frac{x^{\alpha+n-1}}{1+x} \leq \frac{x^{n-1}}{2}.$$

Так как $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то ряд от $f_n(x; \alpha)$ можно почленно интегрировать на отрезке $[0; 1]$.

Поэтому

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^{\alpha+k-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}.$$

Преобразуя интеграл I_2 с помощью подстановки $x = 1/t$, получаем

$$I_2 = - \int_1^0 \frac{1}{t^{\alpha-1}(1+1/t)} \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha} dt}{1+t}.$$

Интегрируя почленно на отрезке $[0; 1]$ ряд, получаемый из ряда (6) заменой $\alpha - 1$ на $-\alpha$, найдем

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha-k}.$$

Следовательно,

$$I = I_1 + I_2 + \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right).$$

Воспользуемся (!?!научусь это доказывать!) $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right)$. Полагая $z = \alpha\pi$, где $0 < \alpha < 1$, получаем

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\alpha-k} + \frac{1}{\alpha+k} \right).$$

Из равенств (7) и (8) следует, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, \quad 0 < \alpha < 1$$

K3-16.pr.2 Prove the main property of the beta function $B(p; q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $p > 0, q > 0$

Полагая $x = (1+t)y$ (где $t > 0$) в $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, получаем

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(1+t)^\alpha} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Пусть $\alpha = p + q$, где $p > 0, q > 0$. Тогда

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

до $+\infty$, получаем

$$\Gamma(p+q) \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Преобразуем интеграл в левой части равенства (10), полагая $t = x/(1-x)$; получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = B(p; q).$$

Меняя в правой части равенства (10) порядок интегрирования и используя формулу (11), находим

$$\Gamma(p+q)B(p; q) = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty} dt = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y} \frac{\Gamma(p)}{y^p} dy = \Gamma(p)\Gamma(q),$$

откуда следует формула (5). Обоснование перестановки порядка интегрирования в правой части (10) проводится аналогично тому, как это делалось в примере §15.

K3-16.4 Apparently complex integrals

$$\text{K3-16.4a)} \quad I_1 = \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(x-2)^2}$$

Подставим $\frac{x}{2-x} = t$, для нее $x = \frac{2t}{t+1}$, $1-x = \frac{1-t}{t+1}$, $\frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{dt}{2}$. Следовательно,

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 t^{-1/3} (1-t)^{1/3} dt$$

далее легко все упрощается:

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} B\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} \frac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt[6]{108}},$$

тут использовано $\Gamma(2) = 1$.
(?? и что еще??)

$$\text{K3-16.4б)} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx \quad (!?!?!?!?)$$

(пока ничего не понял, формул мало знаю)
Заменим $x = \sqrt{t}$:

$$I_2 = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/4-1}}{t+1} \ln t dt.$$

Воспользуемся формулой (12). Из этой формулы следует, что интеграл I_2 равен производной (!?!?) от функции

$$\varphi(p) = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{t+1} dt$$

в точке $p = 1/4$. Следовательно,

$$I_2 = \frac{d}{dp} \left(\frac{\pi}{4 \sin \pi p} \right) \Big|_{p=1/4} = - \frac{\pi^2 \cos \pi p}{4 \sin^2 \pi p} \Big|_{p=1/4} = - \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{4}$$

K3-16.6 Find integrals using the gamma function

$$1) \quad \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-\alpha x} dx, p > 0, \alpha > 0$$

$$\text{K3-16.62)} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx, \alpha > 0$$

$$\text{K3-16.6-3)} \quad \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^\beta} dx, \alpha > -1, \beta > 0$$

$$\text{K3-16.6-4)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} e^{-\alpha/2x^2} dx, \quad \alpha > 0, n \in \mathbb{N}$$

K3-16.6 Найти

$$5) \quad \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx, \alpha > 0, \beta > 0;$$

K3-16.6 Найти

$$6) \int_1^{+\infty} (\ln x)^p \frac{dx}{x^2}, p > -1;$$

K3-16.6 Найти

$$7) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x} e^{px} dx, \quad p > 0 ;$$

K3-16.6.8 Найти

$$8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}, \alpha > \frac{1}{2}.$$

K3-16.7. Find

$$1) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}} ;$$

K3-16.7.Найти

$$2) \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}} ;$$

K3-16.7.Найти

$$3) \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^3(2-x)}}$$

K3-16.7.Найти

$$4) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}}$$

K3-16.7.Найти

$$5) \int_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)} dx ;$$

K3-16.7.Найти

$$6) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(3-x)^3}}.$$

K3-16.8 Find complex integrals

$$1) \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \frac{dx}{(x+3)^2}$$

$$2) \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{(x+1) \sqrt[3]{x^2-x^3}}$$

$$4) \int_0^1 \frac{xdx}{(2-x) \sqrt[3]{x^2(1-x)}}$$

$$5) \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3} dx$$

$$6) \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(x+1)^3} dx$$

K3-16.9 Find

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} ;$$

K3-16.9 Найти

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx ;$$

K3-16.9 Найти

$$3) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

K3-16.9 Найти

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{x/2}}{e^{2x}+1} dx ;$$

K3-16.9 Найти

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta} dx, 0 < \alpha < \beta;$$

K3-16.9 Найти

$$6) \int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{(x+1)^3} dx, \quad -1 < \alpha < 2.$$

K3-16.10 Find

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x+1} dx ;$$

K3-16.10 Найти

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x(x+1)}} dx ;$$

K3-16.10 Найти

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx, a \neq 0;$$

K3-16.10 Найти

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{1+x^2} dx, |\alpha| < 1 ;$$

K3-16.10 Найти

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x(x+2)}} dx;$$

K3-16.10 Найти

$$6) \int_{-1}^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}.$$

K3-16.11 Find

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1} \ln(x-1)}{x^2+3x} dx ;$$

K3-16.11 Найти

$$2) \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x-2)}{(x^2-1)\sqrt{x-2}} dx$$

K3-16.11 Найти

$$3) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2} dx, a \neq 0;$$

K3-16.11 Найти

$$4) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln^2 x}{1+x^2} dx, |\alpha| < 1;$$

A couple more remain, but don't give a damn about them

Solve $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

$$t = \frac{1}{1+x^3} :$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{-2/3} dt \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-1/3} (1-t)^{-2/3} dt \\
&= \frac{1}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{3} \csc \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

19.2.7 Problems about the Fourier integral and the Fourier transform of ordinary functions

Важно понимать, что тут мы работаем с обычными функциями, с обобщенными же другие методы!

K3-17.pr.1 Fourier integral from the exponent and two pillars

Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если:

- 1) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$
- 2) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

- 1) Так как f - непрерывная на R четная функция, то, используя формулы разложения в интеграл Фурье и $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$, получаем

$$\begin{aligned}
a(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos yt dt = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + y^2)}, \\
e^{-\alpha|x|} &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{\alpha^2 + y^2} dy, \quad x \in R.
\end{aligned}$$

2) Функция f является нечетной и непрерывной на R , кроме точек $x = -1, x = 0, x = 1$. Используя формулы коэффициентов, находим

$$\begin{aligned}
b(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin ytdt = \frac{2(1 - \cos y)}{\pi y}, \\
f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y} \sin xy dy,
\end{aligned}$$

если $x \neq 0, x \neq \pm 1$. При $x = 1$ должно выполняться равенство

$$\frac{f(1-0) + f(1+0)}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y} \sin y dy.$$

Полагая $y = 2t$, находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t \cos t}{t} dt = \frac{\pi}{16}$$

Если в (11) положить $x = 1/2$, то

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos y}{y} \sin \frac{y}{2} dy.$$

Полагая здесь $y = 2t$, найдем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

K3-17.2 Fourier transform of typical elementary functions

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = e^{-\alpha|x|}, \alpha > 0$;

2) $f(x) = x^2 e^{-|x|}$;

3) $f(x) = \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$.

1) Так как функция f абсолютно интегрируема на R , то ее преобразование Фурье существует и выражается формулой

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ixy} dx.$$

Преобразуя интеграл (12) и используя формулу (4) §15, получаем

$$F[e^{-\alpha|x|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}, \quad \alpha > 0.$$

2) Применяя формулы (10) и (13), находим

$$F[x^2 e^{-|x|}] = -\{F[e^{-|x|}]\}'' = -\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+y^2}\right)'' = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}.$$

3) Используя формулу (9), получаем

$$F[f] = (iy)^3 F\left[\frac{1}{1+x^2}\right],$$

где

$$F\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixy} + e^{-ixy}}{2} \frac{dx}{1+x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|y|}$$

(см. §15, формула (15)). Следовательно, $F[f] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} y^3 e^{-|y|}$.

K3-17.1 Fourier integrals from the simplest functions

Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье (1-4).

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < \tau \\ 0, & \text{если } |x| > \tau \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a, & \text{если } |x| \leq a, \\ 0, & \text{если } |x| > a \end{cases}$

3) $f(x) = \text{sign}(x-a) - \text{sign}(x-b), b > a$;

4) $f(x) = 1/(x^2 + a^2), a \neq 0$.

K3-17.2

1) $f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}, a \neq 0$

2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } |x| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi/2; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \sin \omega x, & \text{если } |x| \leq 2\pi n/\omega, \\ 0, & \text{если } |x| > 2\pi n/\omega, \end{cases} \quad n \in N, \quad \omega > 0.$

K3-17.3

- 1) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x, \alpha > 0;$
- 2) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x, \alpha > 0;$
- 3) $f(x) = e^{-x^2}$
- 4) $f(x) = xe^{-x^2}$

K3-17.4

- 1) $f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & \text{если } x > 0, \alpha > 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 < x < \pi n, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > \pi n, n \in N. \end{cases}$

K3-17.5

Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее нечетным образом на интервал $(-\infty; 0)$, если:

- 1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi; \end{cases}$
- 2) $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{если } 0 \leq x \leq 2/3, \\ 0, & \text{если } x > 2/3. \end{cases}$

K3-17.6

Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее четным образом на интервал $(-\infty; 0)$, если:

- 1) $f(x) = e^{-\alpha x}, x \geq 0, \alpha > 0;$
- 2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{если } x > 1 \end{cases}$

K3-17.7

Найти преобразование Фурье функции $f(x)(7 - 9)$.

- 1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1; \end{cases}$
- 2) $f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & \text{если } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi; \end{cases}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } |x| \leq \pi \\ 0, & \text{если } |x| > \pi \end{cases}$
- 4) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \leq \pi \\ 0, & \text{если } |x| > \pi; \end{cases}$
- 5) $f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & \text{если } x \in [0; \pi] \\ 0, & \text{если } x \notin [0; \pi] \end{cases}$
- 6) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \in [0; \pi] \\ 0, & \text{если } x \notin [0; \pi] \end{cases}$

K3-17.8

- 1) $f(x) = xe^{-\alpha|x|}, \alpha > 0$
- 2) $f(x) = e^{-x^2/2};$
- 3) $f(x) = e^{-x^2/2} \cos \alpha x;$
- 4) $f(x) = \frac{d}{dx} (xe^{-|x|})$
- 5) $f(x) = \frac{d}{dx} (x^2 e^{-|x|});$
- 6) $f(x) = \frac{d^2}{dx^2} (xe^{-|x|}).$

K3-17.9

- 1) $f(x) = \begin{cases} x \sin x, & \text{если } |x| \leq \pi \\ 0, & \text{если } |x| > \pi \end{cases}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
4) f(x) &= \begin{cases} x^2 \cos x, & \text{если } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi; \end{cases} \\
5) f(x) &= \begin{cases} 2 - x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 1, & \text{если } 1 < |x| < 2, \\ 0, & \text{если } |x| \geq 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

K3-17.10

Пусть $f(y) = F[f(x)]$. Доказать, что:

- 1) $F[e^{i\alpha x} f(x)] = \hat{f}(y - \alpha), \quad \alpha \in R;$
- 2) $F[f(x - \alpha)] = e^{-i\alpha y} \hat{f}(y), \quad \alpha \in R;$
- 3) $F[\cos \alpha x \cdot f(x)] = \frac{\hat{f}(y - \alpha) + \hat{f}(y + \alpha)}{2}, \alpha \in R;$
- 4) $F[\sin \alpha x \cdot f(x)] = \frac{\hat{f}(y - \alpha) - \hat{f}(y + \alpha)}{2i}, \alpha \in R.$

K3-17.11

Пусть функция f непрерывна на R , абсолютно интегрируема на R и удовлетворяет условию

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow +\infty.$$

Доказать, что $F[\varphi] = -\frac{i}{y} \hat{f}(y)$, где $\hat{f}(y) = F[f]$.

K3-17.12

Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{1+x^{12}}$ имеет непрерывную производную десятого порядка.

K3-17.13

Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-|x|^3}$ есть бесконечно дифференцируемая функция.

K3-17.14

Пусть $\hat{f}(y)$ - преобразование Фурье функции $1/(1+|x|^5)$. Доказать, что:

- 1) $\hat{f}(y)$ имеет непрерывную на R производную третьего порядка,
- 2) $\hat{f}(y) = O(1/y^5)$ при $y \rightarrow \infty$; 3) $\hat{f}(y) = o(1/y^5)$ при $y \rightarrow \infty$.

K3-17.15 On the properties of the Fourier transform (??)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на R , абсолютно интегрируема на R и имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(y)|^2 dy$$

где $\hat{f}(y) = F[f]$, $\tilde{f}(y) = F^{-1}[f]$.

19.2.8 Problems about convolution

(тут тоже много задач будет, пока не тренировался особо.)

K3-17.16

Пусть функции f и g непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на R . Доказать, что:

- 1) функция $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$, которую называют сверткой функций f и g и обозначают $f * g$,

непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема на R ;

- 2) $F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$.

K3-17.17

Найти $\varphi(y)$, если:

- 1) $\int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy dy = \frac{1}{1+x^2};$
- 2) $\int_0^{+\infty} \varphi(y) \sin xy dy = e^{-x}, \quad x > 0.$

K. 2

Найдите преобразование Фурье функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, где $f = e^{-\alpha|x|^2}$, $\alpha > 0$

19.2.9 Selected Problems about Integrals of Special Functions 1

IG-integral-factory. Integral with si, log

Evaluate $\int_0^\infty \text{si}(x) \log(x) dx$

Solution

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \text{si}(x) \log(x) dx = \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-x \cos(t)} \cos(x \sin(t)) \ln(x) dx dt, \cos(t) = y, \sin(t) = a \implies \\
 &\implies \int_0^\infty e^{-xy} \cos(ax) \ln(x) dx = \mathcal{R}e \int_0^\infty e^{-x(y+ia)} \ln(x) dx \xrightarrow{x(y+ia) \rightarrow x} \\
 &\implies \frac{\text{Re} \frac{1}{y+ia}}{y^2 + a^2} - \frac{y \ln(a^2 + y^2)}{2(a^2 + y^2)} - \frac{a \tan^{-1}\left(\frac{a}{y}\right)}{a^2 + y^2} \xrightarrow{y=\cos(t) \wedge a=\sin(t)} \\
 &\implies -\gamma \cos(t) - t \sin(t) \implies \\
 &\implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t \sin(t) + \gamma \cos(t)) dt = \boxed{\ln(y+ia)} e^{-x} dx =
 \end{aligned}$$

19.2.10 Selected Problems about Integrals of Special Functions 2

(see note on special functions for now)

19.2.11 Some problems on integrals reduced to special functions (??)

MU Example.

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{\exp(-\alpha x)}{1+x^2} dx, \\
 I''(\alpha) + I(\alpha) &= \int_0^\infty \exp(-\alpha x) dx = 1/\alpha.
 \end{aligned}$$

Это уравнение легко решается методом вариации постоянных (см. разд. 1.1). В результате получаем

$$I(\alpha) = -\cos \alpha \int \frac{\sin t}{t} dt + \sin \alpha \int \frac{\cos t}{t} dt.$$

Но $I(\alpha)$ и все ее производные обращаются в нуль при $\alpha = \infty$. Таким образом,

$$I(\alpha) = \sin \alpha \int_{\infty}^{\alpha} \frac{\cos t}{t} dt - \cos \alpha \int_{\infty}^{\alpha} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Определим функции интегральный косинус и интегральный синус:

$$\text{ri } x = \int_{\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt; \quad \text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Таким образом, $I(\alpha) = \sin \alpha \cdot \text{Ci } \alpha + \cos \alpha (\pi/2 - \text{Si } \alpha)$. Функции $\text{Si } \alpha$ и $\text{Ci } \alpha$ табулированы [1].

19.2.12 Selected problems about very complicated integrals (??)

For bigger list see special note about just integrals.

Parameter: $\int_0^{\infty} \ln(1/x) e^{-ax} e^{imx} dx = ?$

Solution by Gamma Digamma (YouTube)

(??)

$$\begin{aligned} I' &= \int_0^{\infty} \ln(1/x) e^{-ax} e^{imx} dx; a, m > 0 \\ &= - \int_0^{\infty} \ln(x) e^{-(a-im)x} dx \\ &= - \int_0^{\infty} \ln\left(\frac{u}{a-im}\right) e^{-u} \frac{du}{a-im} \\ &= - \frac{1}{a-im} \left[\int_0^{\infty} \ln(u) e^{-u} du - \ln(a-im) \int_0^{\infty} e^{-u} du \right] \\ &= - \frac{1}{a-im} [-r - \ln(a-im)] = \frac{1}{a-im} [r + \ln(a-im)] \\ &= - \int_0^{\infty} \ln\left(\frac{u}{a-im}\right) e^{-u} \frac{du}{a-im} \\ &= - \frac{1}{a-im} \left[\int_0^{\infty} \ln(u) e^{-u} du - \ln(a-im) \int_0^{\infty} e^{-u} du \right] \\ &= - \frac{1}{a-im} [-r - \ln(a-im)] = \frac{1}{a-im} [r + \ln(a-im)] \\ &= \frac{ra + a/2 \ln(a^2 + m^2) + m \tan^{-1}(m/a)}{a^2 + m^2} \\ &+ i \frac{rm + m/2 \ln(a^2 + m^2) - a \tan^{-1}(m/a)}{a^2 + m^2} \\ &= \frac{2r(a+im) + (a+im) \ln(a^2 + m^2) + 2(m-ia) \tan^{-1}(m/a)}{2(a^2 + m^2)} \end{aligned}$$

Now:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \ln(1/x) e^{-ax} \cos(mx) dx \\ &= \frac{2ra + a \ln(a^2 + m^2) + 2m \tan^{-1}(m/a)}{2(m^2 + a^2)} \\ &\int_0^{\infty} \ln(1/x) e^{-ax} \sin(mx) dx \\ &= \frac{2rm + m \ln(a^2 + m^2) - 2a \tan^{-1}(m/a)}{2(m^2 + a^2)} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} I = \int_0^\infty \ln(yx) e^{-ax} dx = \frac{r + \ln(a)}{a} = -L\{\ln(x)\}$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty \ln(1/x) \sin(mx) dx = \frac{r + \ln(m)}{m} \\ \int_0^\infty \ln(1/x) \cos(mx) dx = \frac{\pi}{2m} \end{cases}$$

don't converge

if $m, a \in \mathbb{C}$ (complexity) *ab initio* then convergence of $I' \rightarrow$

$$|\operatorname{Im}(m)| < \operatorname{Re}(a) \text{ for } \operatorname{Re}(a) > 0$$

Analytic continuation

if original domain for $m, a \in \mathbb{C} \rightarrow$ analytic cont.

if original domain is real $\rightarrow$ principal value

(?????????)

https://www.youtube.com/watch?v=jJeZKnyVh4A&ab_channel=GammaDigamma

Sine, Log, degree: $\int_0^\infty \frac{\sin(\ln x)}{x^n + 1} dx = ?$

Solution by Raad (? or not by Raad?)

(???? main idea????)

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^\infty \frac{\sin(\ln x)}{x^n + 1} dx = \Im m \left(\int_0^\infty \frac{e^{i \ln x}}{x^n + 1} dx \right) = \Im m \left(\int_0^\infty \frac{x^i}{x^n + 1} dx \right) \stackrel{t=x^n}{=} \frac{1}{n} \Im m \left(\int_0^\infty \frac{\frac{i+1}{n} - 1}{t + 1} dt \right) \\ \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{t+1} dt &= B(s, 1-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \\ \Omega &= \frac{\pi}{n} \Im m \left(\frac{1}{\sin\left(\pi\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)} \right) = \frac{\pi}{n} \Im m \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{i\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right) \\ \Omega &= \frac{1}{n} \Im m \left(\frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + i \sinh\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right) = \frac{\pi}{n} \Im m \left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - i \sinh\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sinh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right) \\ \Omega &= -\frac{\pi}{n} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sinh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right) \\ \cosh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sinh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \cosh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + \left(\cosh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ \cosh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sinh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \cosh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \cosh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sinh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \frac{1}{2} \left(\cosh\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right) \\ \int_0^\infty \frac{\sin(\ln x)}{x^n + 1} dx &= -\frac{2\pi \sinh\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n \left(\cosh\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)} \\ \Omega &= \int_0^\infty \frac{\cos(n x)}{x^n + 1} dx = \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - i \sinh\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sinh^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right) \\ \int_0^\infty \frac{\cos(\ln x)}{x^n + 1} dx &= \frac{2\pi \cosh\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n \left(\cosh\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)} \end{aligned}$$

Integrate $\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^6} dx$

(гамма де гамма решил, все еще не тот уровень, чтобы на такие фокусироваться.)

GR-3.751 Trigonometric and algebraic functions

1. Найти $\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)dx}{\sqrt{x+\beta}}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)dx}{\sqrt{x+\beta}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} [\cos(a\beta) - \sin(a\beta) + 2C(\sqrt{a\beta}) \sin(a\beta) - 2S(\sqrt{a\beta}) \cos(a\beta)]$$

$$[a > 0, |\arg \beta| < \pi]$$

2. Найти $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)dx}{\sqrt{x+\beta}}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)dx}{\sqrt{x+\beta}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} [\cos a\beta + \sin(a\beta) - 2C(\sqrt{a\beta}) \cos(a\beta) - 2S(\sqrt{a\beta}) \sin(a\beta)]$$

$$[a > 0, |\arg \beta| < \pi].$$

GR-3.761 Trigonometric and power functions

$$(\Delta \equiv \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, k' \equiv \sqrt{1 - k^2})$$

1.

$$\int_0^1 x^{\mu-1} \sin(ax) dx = \frac{1}{2\mu} [{}_1F_1(\mu; \mu+1; ba) - {}_1F_1(\mu; \mu+1; -ia)]$$

$$[a > 0, \operatorname{Re} \mu > -1].$$

2.

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \sin x dx = \frac{i}{2} [e^{-\frac{\pi}{2}i\mu} \Gamma(\mu, iu) - e^{\frac{\pi}{2}i\mu} \Gamma(\mu, -iu)]$$

$$[\operatorname{Re} \mu > -1]$$

3.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x^{2n}} dx = \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \left[\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(2n-k-1)!}{a^{2n-k}} \sin\left(a + (k-1)\frac{\pi}{2}\right) + +(-1)^n \operatorname{ci}(a) \right]$$

$$[a > 0].$$

4.

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \sin(ax) dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}} \sin \frac{\mu\pi}{2} = \frac{\pi \sec \frac{\mu\pi}{2}}{2a^{\mu} \Gamma(1-\mu)}$$

$$[a > 0; 0 < |\operatorname{Re} \mu| < 1].$$

GR-2.581 Trigonometric and power functions

$$(\Delta \equiv \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, k' \equiv \sqrt{1 - k^2})$$

$$1. \int \sin^m x \cos^n x \Delta^r dx =$$

(?? даже хз, как подбратся вообще к этому??? укажу мб решение потом.)
 Ответ:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x \Delta^r dx &= \frac{1}{(m+n+r)k^2} \left\{ \sin^{m-3} x \cos^{n+1} x \Delta^{r+2} + [m+n-2(m+r-1)k^2] \times \right. \\ &\quad \times \int \sin^{m-2} x \cos^n x \Delta^r dx - (m-3) \int \sin^{m-4} x \cos^n x \Delta^r dx \Big\} = \\ &= \frac{1}{(m+n+r)k^2} \left\{ \sin^{m+1} x \cos^{n-8} x \Delta^{r+2} + [(n+r-1)k^2 - (m+n-2)k'^2] \times \right. \\ &\quad \times \int \sin^m x \cos^{n-2} x \Delta^r dx + (n-3)k'^2 \int \sin^m x \cos^{n-} x \Delta^r dx \Big\} \\ &\quad [m+n+r \neq 0] \end{aligned}$$

При $r = -3$

$$2. \int \frac{\sin^m x \cos^n x}{\Delta^2} dx = \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{k^2 \Delta} - \frac{m-1}{k^2} \int \frac{\sin^{m-2} x \cos^n x}{\Delta} dx + \frac{n-1}{k^2} \int \frac{\sin^m x \cos^{n-2} x}{\Delta} dx.$$

При $r = -5$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{\sin^m x \cos^n x}{\Delta^5} dx &= \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{3k^2 \Delta^3} - \\ &\quad - \frac{m-1}{3k^2} \int \frac{\sin^{m-2} x \cos^n x}{\Delta^2} dx + \frac{n-1}{3k^2} \int \frac{\sin^m x \cos^{n-2} x}{\Delta^4} dx. \end{aligned}$$

19.2.13 Problems about integrals of special functions (!??!)

Integrate from logarithm and zeta function $\int_0^{1/2} \ln \left(\frac{\zeta(z)}{\zeta(1-z)} \right) dz$

(гамма де гамма решил, все еще не тот уровень, чтобы на такие фокусироваться.)

19.2.14 Problems about approximate calculation of integrals and estimates (!!??)

(Этой по идее в приложениях часто буду пользоваться.)

МК-?. Evaluate the integral $I = \int_0^\infty \sin \alpha x^2 \cdot e^{-\beta x} dx$.

(потом решу)

$$\text{Ответ. } I \underset{\alpha \gg \beta^2}{\sim} \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad I \underset{\alpha \ll \beta^2}{\sim} \frac{\alpha}{\beta^3}$$

З а д а ч а.

Найти асимптотическую оценку решения уравнения для вырожденной гипергеометрической функции (уравнение $zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0$).

$$\text{О т в е т. } u \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{\alpha-\gamma} e^z, u \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} |z|^{-\alpha}.$$

19.2.15 Problems about Laplace transform

Find Laplace transform of $t \sin(\omega t)$

Solution by Action Physics (YouTube)

$$A: \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Laplace transform

$$\left. \begin{aligned} \text{ii) } \mathcal{L}[e^{at}] &= 1/s - a; \mathcal{L}[t] = 1/s^2 \\ \text{iii) } \mathcal{L}[e^{i\omega t}] &= \frac{1}{s - i\omega} = \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} - \circledast * \\ \Rightarrow \mathcal{L}[\cos(\omega t)] + i\mathcal{L}[\sin \omega t] &= \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \Rightarrow \mathcal{L}[\cos(\omega t)] &= s/s^2 + \omega^2 \\ \text{and } \mathcal{L}[\sin(\omega t)] &= \omega/s^2 + \omega^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{III) Shifting property} \rightarrow \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

$$\text{then, } \mathcal{L}[e^{\pm i\omega t} t] = \frac{1}{(S \mp i\omega)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \mathcal{L}[t \sin(\omega t)] \\ = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(s - i\omega)^2} - \frac{1}{(s + i\omega)^2} \right] = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

19.3 Analysis of Integrals

19.3.1 Problems about Convergence of integrals from sign-constant functions

$$\text{Convergence } \int_0^{+\infty} \ln^{\alpha-21}(1 + \operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{arctg}^{\alpha} \frac{x}{3+x} dx$$

(методичка ивановой, посмотрю потом еще раз)

Пусть $f = \ln^{\alpha-21}(1 + \operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{arctg}^{\alpha} \frac{x}{3+x}$, имеем $f \geq 0$, запишем

$$\int_0^{+\infty} \ln^{\alpha-21}(1 + \operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{arctg}^{\alpha} \frac{x}{3+x} dx = \int_0^1 f dx + \int_1^{+\infty} f dx.$$

Исследуем на сходимость при $x \rightarrow 0+$.

Итак, $f \sim \frac{x^{2\alpha-21}}{3^{\alpha}} = \frac{C}{x^{21-2\alpha}}$. При $21 - 2\alpha < 1 - \operatorname{сх.}$

При $\alpha > 10$ - инт. сх., при $\alpha \leq 10$ - расх.

Исследуем при $x \rightarrow +\infty$.

$\ln(1 + \operatorname{sh} x) = \ln\left(1 + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \sim \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) \sim x$, так как $1 \ll e^x$ и $e^{-x} \ll e^x$.

$\operatorname{arctg} \frac{x}{3+x} \sim \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

Итак, $f \sim Cx^{\alpha-21} = \frac{C}{x^{21-\alpha}}$. При $21 - \alpha > 1 \operatorname{сх.}$

При $\alpha < 20$ инт. сх., при $\alpha \geq 20$ - расх.

Ответ: сходится только при $\alpha \in (10, 20)$.

(тут еще много задач будет)

19.3.2 Problems about Convergence of integrals from sign-variable functions

19.3.3 Problems about the uniform convergence of improper integrals with the parameter

МИПТ-Т.15

Выясните, при каких $\beta > 0$

- а) интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится равномерно по $\alpha \in (\beta, +\infty)$;
 б) интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится равномерно по $\alpha \in (0, \beta)$.

K3-14.pr.1 Uniform convergence of $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$

Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$:

- а) сходится равномерно на множестве $E = [b; +\infty)$, где $b > 0$;
 б) сходится неравномерно на множестве $E_1 = (0; +\infty)$.

Solution а)

а) Пусть $\xi > 0, \alpha \geq b > 0$. Так как

$$\int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{e^{-\alpha \xi}}{\alpha}$$

и $\alpha \geq b$, то неравенство $0 < \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \leq \frac{e^{-\xi b}}{b} < \varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется при всех $\alpha \in E$, если $\xi > (1/b) \ln(1/\varepsilon b)$.

Обозначим $\delta_{\varepsilon} = \max(\sigma_{\varepsilon}; 0)$, где $\sigma_{\varepsilon} = (2/b) \ln(1/b\varepsilon)$. Тогда неравенство (2) для данного интеграла справедливо при всех $\xi \in [\delta_{\varepsilon}; +\infty)$ и при всех $\alpha \in E$, т. е. интеграл сходится равномерно.

Solution б)

б) Для произвольного числа $\delta > 0$ выберем $\xi_{\delta} = 1 + \delta, \alpha_{\delta} = 1/(1 + \delta)$. Тогда

$$\int_{\xi_{\delta}}^{+\infty} e^{-x\alpha_{\delta}} dx = \frac{e^{-\xi_{\delta}\alpha_{\delta}}}{\alpha_{\delta}} = (1 + \delta)e^{-1} \geq e^{-1},$$

т. е. неравенство $\left| \int_{\xi_{\delta}}^{+\infty} f(x; \alpha_{\delta}) dx \right| \geq \varepsilon_0$ выполняется при $\varepsilon_0 = e^{-1}$. Следовательно, интеграл сходится неравномерно на множестве $(0; +\infty)$.

K3-14.2 Non-uniform convergence of $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Доказать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится неравномерно на множестве $E = (1; +\infty)$.

Solution

Так как

$$K(\xi) = \sup_{\alpha \in E} \int_{\xi}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \sup_{\alpha \in E} \frac{\xi^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \frac{\xi^{1-\alpha}}{\alpha-1} = +\infty,$$

то условие (4) не выполняется, и поэтому интеграл, сходящийся при каждом $\alpha > 1$, сходится неравномерно на множестве E .

K3-14.pr .3 Uniform convergence

Доказать равномерную сходимость интеграла $I(\alpha)$ на множестве E , если:

1) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} dx, \quad E = R;$

1) Так как $\left| \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, для всех $\alpha \in R$ интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса данный интеграл сходится равномерно на множестве R .

2) $I(\alpha) = \int_3^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}} dx, \quad E = [0; 2].$

2) Если $\alpha \in [0; 2], x \in [3; +\infty)$, то $0 \leq \ln^\alpha x \leq \ln^2 x$, и поэтому

$$0 \leq \frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}} \leq \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}}.$$

Из сходимости интеграла $\int_3^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}} dx$ следует равномерная сходимость данного интеграла на множестве E .

K3-14.pr.4 Uniform convergence of $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$

Доказать, что интеграл $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ сходится равномерно по α на множестве $E = [b; +\infty)$, где $b > 0$.

Solution

Пусть $F(x; \alpha) = \int_0^x \sin \alpha t dt$; тогда

$$F(x; \alpha) = \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha}$$

и $|F(x; \alpha)| \leq 2/b$ для всех $x \in [0; +\infty)$ и для всех $\alpha \geq b$. Кроме того, $1/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, причем функция $1/x$ не зависит от α . По признаку Дирихле данный интеграл сходится равномерно по α на множестве $[b; +\infty)$, где $b > 0$.

K3-14.pr .5 Uneven convergence

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится неравномерно на множестве E , если:

1) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx, E = (0; +\infty)$

1) Для любого $\delta > 0$ выберем $\alpha_\delta = 1/(1+\delta)^2, \xi'_\delta = \delta, \xi''_\delta = \delta + 1$. Тогда

$$\int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} e^{-\alpha_\delta x^2} dx \geq e^{-\alpha_\delta (\xi''_\delta)^2} (\xi''_\delta - \xi'_\delta) = e^{-1} = \varepsilon_0,$$

т. е. выполняется условие (5). Следовательно, данный интеграл, сходящийся при каждом $\alpha \in E$, сходится неравномерно на множестве E .

2) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, E = [0; 1].$

2) Для любого $\delta > 0$ выберем $\alpha_\delta = \delta, \xi'_\delta = \pi/(3\delta), \xi''_\delta = \pi/(2\delta)$. Тогда

$$\left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} \frac{\sin \alpha_\delta x}{x} dx \right| = \left| \int_{\pi/(3\delta)}^{\pi/(2\delta)} \frac{\sin \delta x}{x} dx \right| = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt = \varepsilon_0.$$

K3-14.1 Uniform convergence of typical integrals (!?)

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E

1) (Иванова.метод.пр.1) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, E = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 1;$

Решение 1.

На множестве E_α верна оценка подынтегральной функции $0 \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}}, \alpha_0 > 1$, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_0}}$ сходится, как эталонный.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исследуемый интеграл сходится равномерно на множестве E_α .

Решение 2.

Равномерная сходимость интеграла $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ на E_α может быть доказана проверкой определения:

$$\left| \int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \left| \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\xi^{+\infty} = \frac{1}{(\alpha-1)\xi^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{(\alpha_0-1)\xi^{1-\alpha_0}} \rightarrow 0.$$

Этот способ применяется редко, так как интегрирование остатка интеграла, как правило, затруднительно.

<1

2) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, E = (0; \alpha_0), \alpha_0 < 1;$

3) $I(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}, E = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 1;$

4) $I(\alpha) = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x |\ln x|^\alpha}, E = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 1;$

5) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^4} dx, E = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 0;$

6) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-2x} dx, E = [1; 3].$

К3-14.2

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E

1) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos 2x dx, E = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 0;$

2) $I(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x \cdot \sin 3x}{(x-1)^\alpha} dx, E = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 1;$

3) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2 + \alpha^4} dx, E = R;$

4) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + (x-\alpha)^2}, E = (-\infty; a), a > 0;$

5) $I(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} \ln^3 x dx, E = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 0;$

6) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x) \cdot \operatorname{arctg} \alpha x}{x^2} dx, E = [-a; a], a > 0.$

К3-14.3

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E

1) $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{4+x^2} dx, E = R;$

2) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2-x)}} dx, E = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

3) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} \alpha x}{\sqrt{1-x^2}} dx, E = [0; 2];$

4) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, E = [a_0; +\infty), a_0 > 0;$

$$\begin{aligned} 5) I(\alpha) &= \int_2^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \cdot \ln x}{\sqrt{x}} dx, E = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 0; \\ 6) I(\alpha) &= \int_2^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{(x+1) \ln^2 x} dx, \quad E = [a_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0. \end{aligned}$$

K3-14.4

$$\begin{aligned} 1) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, E = [0; +\infty); \\ 2) I(\alpha) &= \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} e^{-\alpha x} dx, E = [0; +\infty); \\ 3) I(\alpha) &= \int_2^{+\infty} \frac{a^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2} dx, \quad E = R; \\ 4) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x^j)}{x} dx, E = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0; \\ 5) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \cos(\alpha x^2) dx, \quad E = [1; +\infty); \\ 6) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \sin(\alpha \operatorname{sh} x) dx, E = [\tfrac{1}{2}; +\infty). \end{aligned}$$

K3-14.5

$$\begin{aligned} 1) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \cos x^\alpha dx, \quad E = [\alpha_0; +\infty), \alpha_0 > 1 \\ 2) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cos(\alpha^2 x)}{\alpha + x^\alpha} dx, \quad E = [3; 5]; \\ 3) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \sin 2x \cdot \sin \frac{\alpha}{x} dx, E = [0; \tfrac{1}{2}]; \\ 4) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha^4 x)}{x + \alpha^2} dx, \quad E = [1; +\infty); \\ 5) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} (\alpha^5 + x^3) e^{-\alpha x^4} dx, \quad E = [1; 4]; \\ 6) I(\alpha) &= \int_2^{+\infty} x^\alpha e^{-2x^\alpha} dx, \quad E = [1; 2]. \end{aligned}$$

K3-14.6 (!?)

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E_1 и сходится неравномерно на множестве E_2 .

$$\begin{aligned} 1) I(\alpha) &= \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}, \quad E_1 = [-1; \tfrac{2}{3}], \quad E_2 = [-1; 1); \\ 2) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^\alpha}, \quad E_1 = [3; +\infty), \quad E_2 = (1; +\infty); \\ 3) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4 + (x-\alpha)^6}, \quad E_1 = (-\infty; 0], \quad E_2 = [0; +\infty); \\ 4) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx, \quad E_1 = [0; 2], \quad E_2 = [0; +\infty); \\ 5) I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^4} dx, E_1 = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0; \quad E_2 = (0; +\infty); \\ 6) I(\alpha) &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x} \sin x dx, \quad E_1 = [0; 1], \quad E_2 = [1; +\infty) \end{aligned}$$

K3-14.7

Исследовать интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве $E(7, 8)$.

$$1) I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}, \quad E = (1; +\infty);$$

- 2) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx, E = [0; 1];$
 3) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx, E = (0; +\infty);$
 4) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha} dx, E = [0; +\infty)$
 5) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin \alpha \cdot e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx, E = R$
 6) $I(\alpha) = \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^\alpha}, E = (0; 2).$

K3-14.8 (!?)

Исследовать интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве $E(7, 8)$.

- 1) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\arctg \frac{\alpha x}{(1-x^2)^\alpha}}{(1-x^2)^\alpha} dx, E = [0; \frac{1}{2}];$
 2) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx, E = [0; 1];$
 3) $I(\alpha) = \int_1^2 \frac{dx}{|\ln(\alpha x)|^\alpha}, E = [\frac{1}{2}; \frac{5}{8}];$
 4) $I(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx, E = [0; 1];$
 5) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{1+x^\alpha} dx, E = (0; +\infty);$
 6) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^3} e^{-\alpha/(2x^2)} dx, E = [1; +\infty)$

K3-14.9

Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Доказать, что на множестве $[0; +\infty)$ равномерно сходятся интегралы

$$\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} f(x) dx.$$

10. Доказать, что если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, а функция $g(x, \alpha)$ монотонна по x на множестве $D = [a; +\infty)$ для каждого $\alpha \in E$ и равномерно ограничена на множестве

$$G = \{(x; \alpha) : x \in D, \alpha \in E\},$$

т. е. существует число $M > 0$ такое, что $|g(x; \alpha)| \leq M$ для всех $(x; \alpha) \in G$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) g(x; \alpha) dx$ сходится равномерно по α на мно-

K3-14.11

Доказать, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x; \alpha) g(x; \alpha) dx$ сходится равномерно по α на множестве E , если функция $f(x; \alpha)$ интегрируема по x на отрезке $[a; A]$ для любого $A > a$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x; \alpha) dx$ сходится равномерно относительно α на множестве E , а функция $g(x; \alpha)$ равномерно ограничена на множестве

$$G = \{(x; \alpha) : a \leq x < +\infty, \alpha \in E\}.$$

K3-14.12

Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[0; a]$ для любого $a > 0$, и пусть существует число α_0 такое, что функция $F(A) = \int_0^A e^{-\alpha_0 x} f(x) dx$ ограничена на множестве $[0; +\infty)$. Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx$ сходится равномерно на множестве $[\alpha_0 + \delta; +\infty)$, где $\delta > 0$.

K3-14.13

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0; +\infty)$, интегрируема по Риману на отрезке $[0; A]$ для любого $A > 0$, и пусть существует число α_0 такое, что сходится интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} f(x) dx$. Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx$ сходится равномерно на

K3-14.14

Исследовать на равномерную сходимость на множестве E интеграл $I(\alpha)$:

- 1) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha^2 x)}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}(\alpha x) dx, \quad E = \{\alpha : |\alpha| \geq 1\};$
- 2) $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} \frac{dx}{4 + \alpha^2 x^2}, \quad E = R;$
- 3) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha} dx, \quad E = (2; 3);$
- 4) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} dx, \quad E = \{\alpha : -\infty < \alpha < -\frac{1}{2}\};$
- 5) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \cdot \operatorname{arctg}(\alpha x) dx, \quad E = R;$
- 6) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \cdot 2^{\alpha x} dx, \quad E = (-\infty; 1].$

K3-14.15 Limit from integral

Доказать равенство:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1} = 1$
- 2) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2} = 0;$
- 3) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx = 1;$
- 4) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \alpha^2 \sin x e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{2};$
- 5) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\pi}{2}$
- 6) $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \alpha^2 \sin x e^{-\alpha^2 x^2} dx = 0.$

K3-14.16

Доказать, что функция $F(\alpha)$ непрерывна на множестве E , если:

- 1) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx, E = R;$

- 2) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, E = R;$
 3) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin(\alpha x^2) dx, E = [1; +\infty);$
 4) $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, E = [0; 1);$
 5) $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \sin \frac{\alpha}{x^2} \sqrt{\ln x} dx, E = R.$

K3-14.17 Continuity of the function $F(\alpha)$ on the set E

- 1) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^\alpha}, E = (2; +\infty);$
 2) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, E = [0; +\infty);$
 3) $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln x}{(x-\alpha)^2+4} dx, E = R$
 4) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, E = (0; +\infty)$
 5) $F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^\alpha x}, E = [0; 1);$
 6) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x} dx, E = R$

K3-14.18 Continuity of the function $F(\alpha)$ on the set E

- 1) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x} dx, E = R$
 2) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x^2 dx, E = [0; +\infty);$
 3) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx, E = (0; 1);$
 4) $F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi-x)^\alpha} dx, E = (0; 2).$

K3-14.19

Доказать, что $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$, если функция f интегрируема на промежутке $(0; +\infty)$. 20. Доказать, что если функция f абсолютно интегрируема на промежутке $(0; +\infty)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \cos nx dx = 0.$$

K3-14.21

Доказать, что если функция f непрерывна и ограничена на промежутке $[0; +\infty)$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha f(x)}{x^2 + \alpha^2} dx = f(0).$$

K3-14.22 Legality of transition (?!?)

Законен ли переход к пределу при $\alpha \rightarrow +0$ под знаком интеграла

$$\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx?$$

K3-14.23

Доказать, что если функция f непрерывна и ограничена на промежутке $[0; \infty)$ и $f(0) = 0$, а функция g абсолютно интегрируема на $[0; +\infty)$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{\alpha}{x}\right) g(x) dx = 0.$$

K3-14.24

Пусть функция $f(x; \alpha)$ при $\alpha \in E$ интегрируема по x (в собственном смысле) на отрезке $[a; A]$ при любом $A > a$ и на каждом таком отрезке при $\alpha \rightarrow \alpha_0, \alpha_0 \in E$, стремится равномерно относительно x к предельной функции $\varphi(x)$, и пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x; \alpha) dx$ сходится равномерно на множестве E . Доказать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^{+\infty} f(x; \alpha) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

K3-14.25

Доказать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^{+\infty} f(x; \alpha) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x; \alpha) dx,$$

если $f(x; \alpha) \Rightarrow f(x; \alpha_0)$ в каждом конечном интервале $(a; A)$, где $a < A < +\infty, \alpha \in [\alpha_1; \alpha_2], \alpha_0 \in [\alpha_1; \alpha_2]$, и если существует функция $F(x)$ такая, что при $|f(x; \alpha)| \leq F(x)$ для всех $\alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$ и для всех $x \in [a, +\infty)$ интеграл $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ сходится.

19.3.4 Problems about Jordan's measure and measurable sets

(пока вообще не нужно это было, мб в раздел про задачи по теории перенесу это.)

19.3.5 Problems about the multiple of the Riemann integral and its properties

(пока вообще не нужно это было.)

19.3.6 Problems about geometric and physical applications of multiple integrals

(пока вообще не нужно это было.)

19.4 Integrals with Many variables and on Surfaces**19.4.1 Problems about Integrals with 2 variables**

Ankush-Kumar-Parcha. Integral of squares and arctangent

$$\text{Prove : } \iint_{[0,1]^2} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx dy = \frac{\pi}{3} (\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{3}$$

Proof

We have, $\iint_{[0,1]^2} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx dy$

$$\begin{aligned}
&= x \xrightarrow{y \rightarrow r \sin(\theta)} r \cos(\theta) 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} r \sin(\theta) \cos(\theta) \tan^{-1}(r \sin(\theta) \cos(\theta)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} r \sin(\theta) \cos(\theta) \tan^{-1}(r \sin(\theta) \cos(\theta)) \left\| \begin{array}{cc} \partial_r r \cos(\theta) & \partial_\theta r \cos(\theta) \\ \partial_r r \sin(\theta) & \partial_\theta r \sin(\theta) \end{array} \right\| dr d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} r \sin(\theta) \cos(\theta) \tan^{-1}(r \sin(\theta) \cos(\theta)) \left\| \begin{array}{cc} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{array} \right\| dr d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \tan^{-1}(r \sin(\theta) \cos(\theta)) dr d\theta \\
&\xrightarrow{r \rightarrow x \sec(\theta)} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{x^2 \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\csc(\theta)} \right) dx d\theta \xrightarrow{\text{I.B.P.}} 2 \int_0^1 x^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{x}{\csc(\theta)} \right) \int d \sec(\theta) \right)_0^{\frac{\pi}{4}} dx \\
&- 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{1}_{x^2 \rightarrow x} \frac{x^3}{1+x^2 \sin^2(\theta)} dx d\theta = 2\sqrt{2} \underbrace{\int_0^1 x^2 \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) dx}_{\text{I.B.P.}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{x}{1+x \sin^2(\theta)} dx d\theta \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \int d(x^3) \right)_0^1 - \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{2+x^2} dx - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d \tan^{-1}(\tan(\theta)\sqrt{1+x}) dx \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{4}{3} \int_0^1 d \left(\frac{x^2}{2} - \ln(2+x^2) \right) - \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \tan^{-1}(\sqrt{1+x}) dx}_{\text{I.B.P.}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{3}{2} \right) \right) - \frac{2}{3} \left(\tan^{-1}(\sqrt{1+x}) \int d((x-2)\sqrt{1+x}) \right)_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x-2}{x+2} dx \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{4}{3} \ln \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(-\sqrt{2} \tan^{-1}(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \int_0^1 d \left(x + 4 \ln \left(\frac{1}{x+2} \right) \right) \\
&= -\frac{\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan^{-1}(\sqrt{2}) + \frac{4}{3} \ln \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(1 - 4 \ln \left(\frac{3}{2} \right) \right) - \frac{2}{3} \\
&= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} \ln \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{4}{3} \ln \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{3} \Rightarrow \iint_{[0,1]^2} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx dy = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

19.4.2 Problems about Integrals with 3 variables**Ankush-Kumar-Parcha. Integral of fraction and squares**

Prove : $\iiint_{[0,1]^3} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2} dx dy dz = \frac{3\pi}{5} - \frac{9\sqrt{2}}{5} \tan^{-1}(\sqrt{2}) + \frac{3}{5}$

Proof

We have, $\iiint_{[0,1]^3} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2} dx dy dz \stackrel{\text{Symmetry}}{=} 3 \iiint_{[0,1]^3} \frac{x^4 y^2 z^2}{y^2 + y^2 z^2 + z^2} dx dy dz$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{5} \int_0^1 d(x^5) \iint_{[0,1]^2} \frac{y^2 z^2}{y^2 + y^2 z^2 + z^2} dy dz \stackrel{y \rightarrow r \cos(\theta)}{z \rightarrow r \sin(\theta)} \frac{6}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} \frac{r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{1 + r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\
&= \frac{6}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} \frac{r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{1 + r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} \left\| \begin{array}{cc} \partial_r r \cos(\theta) & \partial_\theta r \cos(\theta) \\ \partial_r r \sin(\theta) & \partial_\theta r \sin(\theta) \end{array} \right\| dr d\theta \\
&= \frac{6}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} \frac{r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{1 + r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} \left\| \begin{array}{cc} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{array} \right\| dr d\theta \\
&= \frac{6}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} \frac{r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{1 + r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} dr d\theta \stackrel{r \rightarrow x \sec(\theta)}{=} \frac{6}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{x^3 \tan^2(\theta)}{1 + x^2 \sin^2(\theta)} dx d\theta \\
&\stackrel{x^2 \rightarrow x}{=} \frac{3}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{x \tan^2(\theta)}{1 + x \sin^2(\theta)} dx d\theta = \frac{3}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \sec^2(\theta) dx d\theta - \frac{3}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{\sec^2(\theta)}{1 + x \sin^2(\theta)} dx d\theta \\
&= \frac{3}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d \tan(x) - \frac{3}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc^2(\theta) \sec^2(\theta) \int_0^1 d \ln(1 + x \sin^2(\theta)) d\theta \\
&\stackrel{\because \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)}{=} \frac{3}{5} - \frac{12}{5} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 + \sin^2(\theta))}{\sin^2(2\theta)} d\theta}_{\text{I.B.P.}} = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} \underbrace{\left(\ln(1 + \sin^2(\theta)) \int d \cot(2\theta) \right)}_{=0} \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&- \frac{6}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2\theta)}{1 + \sin^2(\theta)} d\theta \stackrel{\because \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}{=} \frac{3}{5} - \frac{6}{5} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + 2 \tan^2(\theta)} d\theta}_{\tan(\theta) \rightarrow x} \\
&= \frac{3}{5} - \frac{6}{5} \int_0^1 \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)(1 + 2x^2)} dx \stackrel{\text{partial fraction}}{=} \frac{3}{5} + \frac{12}{5} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} - \frac{18}{5} \int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x^2} \\
&= \frac{3}{5} + \frac{12}{5} \underbrace{\int_0^1 d \tan^{-1}(x)}_{=\frac{\pi}{4}} - \frac{9\sqrt{2}}{5} \underbrace{\int_0^1 d \tan^{-1}(x\sqrt{2})}_{=\tan^{-1}(\sqrt{2})} \\
&\Rightarrow \iiint_{[0,1]^3} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2} dx dy dz = \frac{3\pi}{5} - \frac{9\sqrt{2}}{5} \tan^{-1}(\sqrt{2}) + \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

19.4.3 Problems about Surface Integrals

K3-11.pr.1 Cylinder integral

Найти интеграл $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, если S - часть цилиндрической поверхности

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \quad z = v; \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq H.$$

ΔВ данном случае применима формула (2), причем $E = r^2, G = 1, G = 0$. Поэтому

$$\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{r du dv}{\sqrt{r^2 + v^2}} = 2\pi r \int_0^H \frac{dv}{\sqrt{r^2 + v^2}} = 2\pi r \ln \frac{H + \sqrt{r^2 + H^2}}{r}.$$

K3-11.pr.2 Simple cone integral

Найти интеграл $I = \iint_S z^2 dS$, где S - полная поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$.

Solution

Пусть S_1 - боковая поверхность конуса, S_2 - его основание; тогда

$$I = \iint_{S_1} z^2 dS_1 + \iint_{S_2} z^2 dS_2.$$

К первому интегралу применим формулу (4). На боковой поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}$. Следовательно,

$$\iint_{S_1} z^2 dS_1 = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 dr d\varphi = 8\sqrt{2}\pi.$$

На основании конуса $z = 2$, поэтому второй интеграл равен учетверенной площади основания конуса $4\pi 2^2$. Итак, $I = 8\pi(2 + \sqrt{2})$.

К3-11 .пр.3

Найти интеграл $\iint_S z dx dy$, где S - нижняя сторона части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2, 0 < z \leq H$.

Solution

Поверхность S ориентирована нормалью, составляющими тупой угол с осью z . По формуле (11), взяв в ней знак "минус", сводим интеграл двойному, который вычисляем, переходя к полярным координатам:

$$\iint_S z dx dy = - \iint_{x^2 + y^2 \leq H^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H r^2 dr = -\frac{2}{3}\pi H^3.$$

К3-11.pr.4 Simple integrals along the hemisphere

Найти интегралы:

а) $\iint_S z^2 dx dy$;

б) $\iint_S z dx dy$; где S - полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y \geq 0$, ориентированная внешней нормалью.

Solution a)

Разобьем поверхность S на части S_1 и S_2 , расположенные соответственно выше и ниже плоскости $z = 0$. Тогда

$$\iint_S z^2 dx dy = \iint_{S_1} z^2 dx dy + \iint_{S_2} z^2 dx dy.$$

Поверхности S_1 и S_2 имеют одну и ту же проекцию D на плоскость $z = 0$. Согласно формуле (11) получаем

$$\iint_{S_1} z^2 dx dy = \iint_D (R^2 - x^2 - y^2) dx dy$$

так как внешняя нормаль к поверхности S_1 образует с осью z острый угол;

$$\iint_{S_1} z^2 dx dy = - \iint_D (R^2 - x^2 - y^2) dx dy$$

так как внешняя нормаль к поверхности S_2 образует тупой угол с осью z . Следовательно,

$$\iint_S z^2 dx dy = 0$$

б)

Как и в случае а), разбивая поверхность S на части S_1 и S_2 и применяя формулу (11), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z dx dy &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, \\ \iint_{S_2} z dx dy &= - \iint_D (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) dx dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\iint_S z dx dy = 2 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \cdot \frac{\pi}{3} R^3 = \frac{2\pi}{3} R^3,$$

так как последний интеграл равен объему четвертой части шара радиуса R , где S - часть эллипсоида

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \cos v, & y &= b \sin u \cos v, & z &= c \sin v, \\ u &\in [\pi/4; \pi/3], & v &\in [\pi/6; \pi/4], \end{aligned}$$

ориентированного внешней нормалью.

Task start skipped (???)

Заметим, что функции $1/x, 1/y, 1/z$ положительны, а углы, образованные внешней нормалью с осями координат, - острые, поэтому $K > 0$. Воспользуемся формулой (8). Так как

$$\begin{aligned} x'_u &= -a \sin u \cos v, & y'_u &= b \cos u \cos v, & z'_u &= 0 \\ x'_v &= -a \cos u \sin v, & y'_v &= -b \sin u \sin v, & z'_v &= c \cos v \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a \cos u \cos v} & \frac{1}{b \sin u \cos v} & \frac{1}{c \sin v} \\ -a \sin u \cos v & b \cos u \cos v & 0 \\ -a \cos u \sin v & -b \sin u \sin v & c \cos v \end{vmatrix} = p \cos v$$

где

$$p = \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}.$$

Поэтому по формуле (8) получаем

$$K = p \int_{\pi/4}^{\pi/3} du \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos v dv = p \frac{\pi}{12} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{24} \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right).$$

КЗ-11 .пр.6

Найти интеграл

$$I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy,$$

где S - внешняя сторона боковой поверхности конуса $G: x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1$.

Solution

Обозначим через I_1 интеграл по внешней стороне полной поверхности S_1 конуса, через I_2 - интеграл по верхней стороне его основания S_2 . Тогда $I = I_1 - I_2$. К интегралу I_1 применим формулу Гаусса-Остроградского

$$I_1 = 3 \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, вычислим полученный тройной интеграл

$$I_1 = 3 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z (r^2 + z^2) r dr = \frac{9}{10} \pi.$$

Вычислим интеграл по основанию конуса:

$$I_2 = \iint_{S_2} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy = \iint_{S_2} dx dy = \pi.$$

Следовательно, $I = -\pi/10$.

K3-11.pr.7 Integral along the intersection of a paraboloid with a plane

Найти интеграл

$$A = \int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

где L - кривая пересечения параболоида $x^2 + y^2 + z = 3$ с плоскостью $x + y + z = 2$, ориентированная положительно относительно вектора $(1; 0; 0)$.

Solution

Применим формулу Стокса. За поверхность S , ограниченную кривой L , примем часть секущей плоскости $x + y + z = 2$, лежащей внутри параболоида. Единичным вектором нормали к S , направленным соответственно направлению кривой L , является вектор $(1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$. Так как $P = y^2 - z^2$, $Q = z^2 - x^2$, $R = x^2 - y^2$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= -2(z + y), & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -2(y + x) \end{aligned}$$

Применяя формулу (15), получаем

$$A = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) dS = -\frac{8}{\sqrt{3}} \iint_S dS.$$

Так как $z = 2 - x - y$ на поверхности S , то

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}$$

По формуле (4) находим

$$A = -8 \iint_D dx dy,$$

где D - проекция S на плоскость xOy . Исключая z из уравнений

$$x^2 + y^2 + z = 3, \quad x + y + z = 2,$$

получаем

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 3/2,$$

т. е. D - есть круг радиуса $\sqrt{3/2}$. Следовательно,

$$\iint_D dx dy = \frac{3}{2}\pi, \quad A = -12\pi.$$

K3-11.1

Найти интегралы (1-13).

$\iint_S (x + y + z) dS$, где:

- 1) S - часть плоскости $x + 2y + 4z = 4$, выделяемая условиями $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
- 2) S - часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, выделяемая условием $z \geq 0$.

K3-11.2

$\iint_S (x^2 + y^2) dS$, где:

- 1) S - сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
- 2) S - поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

K3-11.3 Integral of squares in different figures

- 1) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, где: S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
- 2) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, где: S — поверхность куба $|x| \leq a, |y| \leq a, |z| \leq a$;
- 3) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, где: S — поверхность октаэдра $|x| + |y| + |z| \leq a$;
- 4) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, где: S — полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq H$.

K3-11.4

$$\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}, S \text{ — поверхность тетраэдра } x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

K3-11.5

- 1) $\iint_S xyz dS$
- 2) $\iint_S |xy|z dS$; где S — часть параболоида $z = x^2 + y^2$, выделяемая условием $z \leq 1$.

K3-11.6

- 1) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$
- 2) $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$; где S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, выделяемая условием $z \leq 1$.

K3-11.7

1) $\iint_S (xy + yz + zx) dS$; 2) $\iint_S (x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) dS$; где S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенная внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

K3-11.8

- 1) $\iint_S f(x; y; z) dS$
- 2) $\iint_S \frac{dS}{f(x; y; z)}$;
- 3) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \frac{dS}{f(x; y; z)}$; где $f = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$, S — эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

K3-11.9

$$\iint_S (x^2 + y^2 + (z - a)^2)^{-n/2} dS, \quad n \in N, \quad S \text{ — сфера } x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

K3-11.10

$\iint_S z^2 dS$, S — часть конической поверхности $x = u \cos v \sin \alpha, \quad y = u \sin v \sin \alpha, \quad z = u \cos \alpha, \quad \alpha = \text{const},$
 $\alpha \in (0; \pi/2)$, выделяемая условиями $u \in [0; 1], v \in [0; 2\pi]$.

K3-11.11

$$\iint_S z dS, S \text{ — поверхность } x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v, \quad u \in [0; 1], \quad v \in [0; 2\pi].$$

K3-11.12

$$\iint_S f(r) dS, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad f(r) = \begin{cases} 1 - r^2, & r \leq 1, \\ 0, & r \geq 1, \end{cases} \quad S \text{ — плоскость } x + y + z = a.$$

K3-11.13

$$\iint_S f(r; z) dS, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad f(r; z) = \begin{cases} r^2, & r \leq z, \\ 0, & r \geq z, \end{cases} \quad S \text{ — сфера } x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

K3-11.14 Poisson's formula (???)

Доказать формулу Пуассона

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} t) dt$$

где $f(t), |t| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, - непрерывная функция, S - сферы с центром в a, b, c , радиусом R .

K3-11.26

$\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$, S - нижняя сторона круга $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$.

K3-11.27

$\iint_S (2z - x) dy dz + (x + 2z) dz dx + 3z dx dy$, S - верхняя сторона треугольника $x + 4y + z = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

K3-11.28

1) $\iint_S xz dx dy$; 2) $\iint_S yz dy dz + xz dz dx + xy dx dy$; S - внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

K3-11.29

$\iint_S f_1(x) dy dz + f_2(y) dz dx + f_3(z) dx dy$, где f_1, f_2, f_3 - непрерывные функции, S - внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$.

K3-11.30

1) $\iint_S y dz dx$; 2) $\iint_S x^2 dy dz$; S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

K3-11.31

1) $\iint_S (x^5 + z) dy dz$
2) $\iint_S x^2 y^2 z dx dy$; S - внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0$.

K3-11.32

$\iint_S x^2 dy dz + z^2 dx dy$, S - внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \leq 0, y \geq 0$.

K3-11.33

$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, S - внешняя сторона сферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

K3-11.34

$\iint_S z^2 dx dy$, S - внутренняя сторона полусферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.

K3-11.35

$\iint_S (x - 1)^3 dy dz$, S - внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2x, z \leq 0$.

19.4.4 Problems about curvilinear integrals (???)

(не так нужно, K3-10, тем не менее, добавлю потом.)

K3-10 .пр.1

Найти криволинейный интеграл

$$I = \int_{\Gamma} (x + y) ds,$$

где Γ - граница треугольника (рис. 10.1) с вершинами $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$.

Solution

Пусть I_1, I_2, I_3 - криволинейные интегралы от функции $x+y$ по отрезкам AB , BO и OA соответственно. Так как отрезок AB задается уравнением $x = 1, 0 \leq y \leq 1$, то по формуле (8) получаем

$$I_1 = \int_0^1 (y + 1) dy = \frac{3}{2}. \quad \text{Рис. 10.1}$$

Отрезки BO и OA задаются соответственно уравнениями $y = x, 0 \leq x \leq 1$, и $y = 0, 0 \leq x \leq 1$. По формуле (7) находим центром в точке $(1; 0)$.

А 1) Так как отрезок OA задается уравнением $y = 0, 0 \leq x \leq 1$, то, применяя формулы (17) и (18), находим

$$I = \int_0^1 x dx + \int_0^1 x dx = 1$$

2) Если - дуга параболы, то

$$\int_{\Gamma} y dx = \int_0^1 x^2 dx, \quad \int_{\Gamma} x dy = \int_0^1 2x^2 dx, \quad I = \int_0^1 3x^2 dx = 1.$$

3) Так как уравнение дуги окружности можно записать в виде $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$, где t меняется от π до $\pi/2$, то по формуле (16) получаем

$$I = \int_{\pi}^{\pi/2} \sin t (-\sin t) dt + \int_{\pi}^{\pi/2} (1 + \cos t) \cos t dt = \int_{\pi}^{\pi/2} (\cos t + \cos 2t) dt = 1.$$

K3-10.pr.3 Circumferential integral according to the Green's formula

Найти с помощью формулы Грина криволинейный интеграл

$$I = \int_{\Gamma} x^2 y dx - x y^2 dy,$$

где Γ -окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Solution

Воспользуемся формулой (19), где

$$P = x^2 y, \quad Q = -x y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2.$$

Тогда

$$I = - \iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

где D - круг радиуса R с центром в точке $(0; 0)$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$I = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = - \frac{\pi R^4}{2}.$$

K3-10 .пр.4 Area of the building

Пользуясь формулой (20), найти площадь S , ограниченную астроидой

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solution

Применяя формулы (20) и (16), получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt = \\ &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

K3-10 .пр.5 Integral in a straight line

Показать, что криволинейный интеграл

$$I = \int_{AB} (3x^2y + y) dx + (x^3 + x) dy,$$

где $A(1; -2)$, $B(2; 3)$, не зависит от пути интегрирования, и вычислить этот интеграл.

Solution

Так как функции $P = 3x^2y + y$, $Q = x^3 + x$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непрерывны в R^2 и выполняется условие (25), то интеграл не зависит от пути интегрирования и выражается формулой (23).

Функцию $u(x; y)$ можно найти по формуле (24). Заметим, однако, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, так как

$$(3x^2 + y) dx + (x^3 + x) dy = (3x^2y dx + x^3 dy) + (y dx + x dy) = d(x^3y) + d(xy) = d(x^3y + xy) = du.$$

Следовательно, $u = x^3y + xy$, и по формуле (23) находим

$$I = u(B) - u(A) = 30 - (-4) = 34.$$

K3-10.1 Simple curvilinear integrals

Найти криволинейный интеграл первого рода по плоской кривой Γ :

2) $\int_{\Gamma} (2x + y) ds$, Γ - ломаная $ABOA$, где $A(1; 0)$, $B(0; 2)$, $O(0; 0)$; $(1; 0)$ и $(0; 1)$;

5) $\int_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, Γ - отрезок с концами $(0; 0)$ и $(1; 2)$.

K3-10.2 Simple curvilinear integrals

Найти криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} xy ds$, если:

1) Γ - граница квадрата с вершинами $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$;

2) Γ - четверть эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, лежащая в I квадранте; 3) Γ -граница прямоугольника с вершинами $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 2)$, $(0; 2)$.

K3-10.3

Пусть Γ - гладкая кривая, заданная в полярных координатах $(r; \varphi)$ уравнением $r = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, а функция $F(x; y)$ непрерывна на Γ . Доказать, что

$$\int_{\Gamma} F(x; y) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\rho(\varphi) \cos \varphi; \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Найти криволинейный интеграл по плоской кривой $\Gamma(4 - 11)$.

K3-10.4

$$\int_{\Gamma} x^2 ds, \Gamma - \text{дуга окружности } x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0.$$

K3-10.5

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)^n ds, \Gamma - \text{окружность } x^2 + y^2 = a^2.$$

K3-10.6

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dx, \Gamma - \text{окружность } x^2 + y^2 = ax, \text{ если:}$$

$$1) f(x; y) = x - y; 2) f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

K3-10.7

$$\int_{\Gamma} f(x; y) ds, \Gamma - \text{правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением } r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \text{ если:}$$

$$1) f(x; y) = x + y; 2) f(x; y) = x\sqrt{x^2 - y^2}.$$

K3-10.8

$$\int_{\Gamma} |y| ds, \Gamma - \text{лемниската } r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

K3-10.9

$$\int_{\Gamma} (x^{4/3} + y^{4/3}) ds, \Gamma - \text{астроида } x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

K3-10.10

$$\int_{\Gamma} f(x; y) ds, \Gamma - \text{арка циклоиды } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ если:}$$

$$1) f(x; y) = y; 2) f(x; y) = y^2.$$

K3-10.11

$$\int_{\Gamma} f(x; y) ds, \Gamma - \text{дуга развертки окружности } x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ если:}$$

$$1) f(x; y) = x^2 + y^2; 2) f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \text{ Найти криволинейный интеграл по пространственной кривой } \Gamma(12 - 18).$$

K3-10.12

$$\int_{\Gamma} f(x; y; z) ds, \Gamma - \text{первый виток винтовой линии } x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt \text{ если:}$$

$$1) f(x; y; z) = z^2 / (x^2 + y^2); 2) f(x; y; z) = 1 / (x^2 + y^2 + z^2);$$

$$3) f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

K3-10.13

$$\int_{\Gamma} f(x; y; z) ds, \Gamma - \text{дуга конической винтовой линии } x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$1) f(x; y; z) = z$$

$$2) f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z.$$

K3-10.14

$$\int_{\Gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds, \Gamma - \text{окружность } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x = y.$$

K3-10.15

$\int_{\Gamma} xyz ds$, Γ - четверть окружности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$, расположенная в I октанте.

K3-10.16

$\int_{\Gamma} (x + y) ds$, Γ - четверть окружности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x$, расположенная в I октанте.

K3-10.17

$\int_{\Gamma} x^2 ds$, Γ - окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

K3-10.18

$\int_{\Gamma} z ds$, Γ - дуга кривой $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ от точки $(0; 0; 0)$ до точки $(a; a; a\sqrt{2})$, $a > 0$.

Найти криволинейный интеграл второго рода по кривой Γ , пробегаемой в направлении возрастания ее параметра $x(19, 20)$.

K3-10.19

- 1) $\int_{\Gamma} xy dx$, Γ - дуга синусоиды $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$;
- 2) $\int_{\Gamma} \left(x - \frac{1}{y}\right) dy$, Γ - дуга параболы $y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$;
- 3) $\int_{\Gamma} x dy - y dx$, Γ - кривая $y = x^3$, $0 \leq x \leq 2$;
- 4) $\int_{\Gamma} \frac{y}{x} dx + dy$, Γ - кривая $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$;
- 5) $\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy$, Γ - дуга параболы $y = \frac{x^2}{4}$, $0 \leq x \leq 2$;
- 6) $\int_{\Gamma} 2xy dx - x^2 dy$, Γ - дуга параболы $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $0 \leq x \leq 2$.

K3-10.20

- 1) $\int_{\Gamma} \cos y dx - \sin y dy$, Γ - отрезок прямой $y = -x$, $-2 \leq x \leq 2$
- 2) $\int_{\Gamma} (xy - y^2) dx + x dy$, Γ - кривая $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$;
- 3) $\int_{\Gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, Γ - дуга параболы $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$
- 4) $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, Γ - кривая $y = 1 - |x - 1|$, $0 \leq x \leq 2$.

K3-10.28

- 1) $\int_{\Gamma} (2a - y) dx + (y - a) dy$, Γ - дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
- 2) $\int_{\Gamma} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, Γ $0 \leq t \leq \pi/2$.

Найти криволинейный интеграл по замкнутой кривой Γ , пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (29, 30). ного прямыми $x = 1, x = 3, y = 1, y = 5$; образованного прямыми $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$; шинами $(0; 0), (1; 0), (1; 1)$; шинами $(0; 0), (1; 0), (0; 1)$. вершинами $(1; 1), (1; 3), (2; 2)$;

- 2) $\int_{\Gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, Γ - граница квадрата с вершинами $(1; 0), (0; 1), (-1; 0), (0; -1)$
- 3) $\int_{\Gamma} \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2 + y^2}$, Γ - окружность $x^2 + y^2 = R^2$;
- 4) $\int_{\Gamma} \frac{xy^2 dx - x^2 y dy}{x^2 + y^2}$, Γ - правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Найти криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой Γ , пробегаемой в направлении возрастания параметра $t(31 - 36)$.

K3-10.31

$$\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz, \Gamma - \text{виток винтовой линии } x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

K3-10.32

$$\int_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + 2yzdy - x^2dz, \Gamma - \kappa \text{ кивая } x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$$

K3-10.33

$$\int_{\Gamma} yzdx + z\sqrt{a^2 - y^2}dy + xydz, \Gamma - \text{дуга винтовой линии } x = a \cos t, y = a \sin t, z = at/(2\pi), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

K3-10.34

$$\int_{\Gamma} (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz, \Gamma - \text{кривая } x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi.$$

K3-10.35

$$\int_{\Gamma} xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz, \Gamma - \text{кривая } x = a \sin t, y = a \cos t, z = a(\sin t + \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

K3-10.36

$$\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz, \Gamma - \text{окружность } x = a \cos \alpha \cos t, y = a \cos \alpha \sin t, z = a \sin \alpha (\alpha = \text{const}).$$

Найти криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой Γ (37–44).

K3-10.37

$$\int_{\Gamma} xdx + ydy + (x + y - 1)dz, \Gamma - \text{отрезок } AB, \text{ пробегаемый от точки } A(1; 1; 1) \text{ к точке } B(2; 3; 4).$$

K3-10.38

$$\int_{\Gamma} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}, \Gamma - \text{отрезок } AB, \text{ пробегаемый от точки } A(1; 1; 1) \text{ к точке } B(4; 4; 4).$$

K3-10.39

$$\int_{\Gamma} x(z - y)dx + y(x - z)dy + z(y - x)dz, \Gamma - \text{ломаная } ABCA, \text{ где } A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(0; 0; a).$$

K3-10.43

$\int_{\Gamma} (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz, \Gamma - \text{окружность } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0, \text{ пробегаемая против}$
хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Oy .

K3-10.44

$$\int_{\Gamma} (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz, \Gamma - \text{линия пересечения поверхностей}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad x^2 + y^2 = 2rx, \quad 0 < r < R, \quad z \geq 0,$$

пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Oz .

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (45–55).

K3-10.45

$$\int_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy, \text{ если:}$$

1) Γ - эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; 2) Γ - окружность $x^2 + y^2 = ax$.

K3-10.46

$$\int_{\Gamma} (2xy - y)dx + x^2 dy, \Gamma - \text{эллипс } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

K3-10.47

$$\int_{\Gamma} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}, \Gamma - \text{окружность } (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

K3-10.48

$$\int_{\Gamma} (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy, \Gamma - \text{граница треугольника с вершинами } (1; 1), (3; 2), (2; 5).$$

K3-10.49

$$\int_{\Gamma} (y - x^2) dx + (x + y^2) dy, \Gamma - \text{граница кругового сектора } 0 < r < R, 0 < \varphi < \alpha \leq \pi/2, \text{ где } (r; \varphi) - \text{полярные координаты.}$$

K3-10.50

$$\int_{\Gamma} e^x [(1 - \cos y)dx + (\sin y - y)dy], \Gamma - \text{граница области } 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x.$$

K3-10.51

$$\int_{\Gamma} e^{y^2 - x^2} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy), \Gamma - \text{окружность } x^2 + y^2 = R^2. \quad x^2 + y^2 < ax, y > 0 \\ (-1; 0), (0; -1).$$

K3-10.54

$$\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y (xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dx, \Gamma - \text{окружность } x^2 + y^2 = R^2. \text{ ной отрезком } AB, \text{ где } A(1; 1), B(2; 6), \text{ и дугой параболы } y = ax^2 + bx + c, \text{ проходящей через точки } A, B, O(0; 0). \\ \text{Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой } \Gamma \text{ с началом в точке } A \text{ и концом в точке } B(56 - 68).$$

K3-10.56

$$\int_{\Gamma} x dy + y dx, A(-1; 3), B(2; 2).$$

K3-10.57

$$\int_{\Gamma} x dx + y dy, A(-1; 0), B(-3; 4).$$

K3-10.58

$$\int_{\Gamma} (x + y) dx + (x - y) dy, A(2; -1), B(1; 0).$$

K3-10.59

$$\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy, A(0; 0), B(-2; -1).$$

K3-10.60

$$\int_{\Gamma} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy, A(-2; -1), B(0; 3).$$

K3-10.61

$$\int_{\Gamma} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy, \quad A(3; 0), \quad A(0; -3).$$

K3-10.62

$$\int_{\Gamma} (3x^2 - 2xy + y^2) dx + (2xy - x^2 - 3y^2) dy, \quad A(-1; 2), B(1; -2).$$

K3-10.63

$$\int_{\Gamma} f(x+y)(dx+dy), f(t) - \text{непрерывная функция}, \quad A(0; 0), \quad B(x_0; y_0).$$

K3-10.64

$$\int_{\Gamma} \varphi(x)dx + \psi(y)dy, \varphi(t), \quad \psi(t) - \text{непрерывные функции}, \quad A(x_1; y_1), B(x_2; y_2).$$

K3-10.65

$$\int_{\Gamma} e^x \cos y dx - e^x \sin y dy, \quad A(0; 0), B(x_0; y_0).$$

K3-10.80

Доказать, что: 1) если плоская кривая Γ - график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

2) если плоская кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $a \leq \varphi \leq b$, где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на $[a; b]$, то

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi.$$

K3-10.81

Найти длину дуги плоской кривой *):

- 1) $ay^2 = x^3, 0 \leq x \leq 5a$
 2) $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/4$;
 3) $y = a \operatorname{ch}(x/a), 0 \leq x \leq x_0$; 4) $r = a \sin^3(\varphi/3)$;
 5) $r = a(1 + \cos \varphi)$; 6) $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$; 7) $x = \varphi + \sin \varphi, y = 1 - \cos \varphi, |\varphi| \leq \pi$; 8) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, a \geq b$; 9) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

K3-10.82

Найти длину дуги пространственной кривой:

- 1) $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3, 0 \leq t \leq 1$;
 2) $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \sqrt{2}$;
 3) $x = a(1 + \cos \varphi), y = a(\varphi - \sin \varphi), z = 4a \sin(\varphi/2), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$;
 4) $x = t \cos t^2, y = t \sin t^2, z = t^2, 0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$;
 5) $2px = z^2, 6p^2y = z^3, 0 \leq z \leq p$;
 6) $x^2 - y^2 = 9z^2/8, (x+y)^2 = 8(x-y)$ от точки $(0; 0; 0)$ до точки с аппликатой $z_0 = 1/3$.

K3-10.83

Пусть s_n - длина витка кривой $x = e^{-kt} \cos t, y = e^{-kt} \sin t, z = e^{-kt}, 2\pi n \leq t \leq 2\pi(n+1)t, n \in Z$. Найти отношение $s_{n+1} : s_n$.

K3-10.84

Используя таблицы, найти с погрешностью не более чем 0,1 длину дуги кривой $x^2 + y^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = y$.

Further bizarre tasks

какая-то физика, какие-то приложения, думаю, вообще можно забить на это, что почти каждый студент и сделал.

мб потом добавлю их, но супер маловероятно, ибо всегда есть дела актуальнее.

19.4.5 Plane shape area and curve length problems**K3-9.4**

Найти площадь области, ограниченной кривыми:

- 1) $4y = x^2 - 4x, x = y + 3$; 2) $y^2 = 10x + 25, y^2 = 9 - 6x$;
- 3) $y^2 = 2px + p^2, y^2 = q^2 - 2qx, p > 0, q > 0$;
- 4) $x^2 + y^2 = 4, y^2 = 4 - 4x, x < 1$;
- 5) $y^2 = 2x, y^2 = 4x - x^2, 2x < y^2$;
- 6) $y = \cos x, y = \cos 2x, 0 \leq x \leq 2\pi/3$; 7) $2x^2 + 2y^2 = 2x + 1, x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 \geq 1$; 8) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x + y = a$; 9) $(x + y)^2 + x^2 = a^2$. при отображении $u = \varphi(x; y), v = \psi(x; y)$, пусть S и S' - площади K и K' .

Изобразить множество K' , найти отношение S'/S и его предел при $h \rightarrow 0$, если:

- 1) $u = xy, v = y/x; a > 0, b > 0$;
- 2) $u + v = x, v = xy; a = 0, b = 1, 0 < h < 1$.

K3-9.6

Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно использовать полярные координаты):

- 1) $x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = 2bx, y = x, y = 0, b > a > 0$;
- 2) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 = a^2(\sqrt{x^2 + y^2} \geq a > 0)$;
- 3) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = a\sqrt{3}y$ (область вне кардиоиды, но внутри окружности);
- 4) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$; 5) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$;
- 6) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2), a > 0$; 7) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3)$.

K3-9.7

Найти площадь области, заданной на декартовой плоскости в полярных координатах:

- 1) $r \leq 1 - \sin \varphi$; 2) $3 \cos \varphi \leq r \leq 2 - \cos \varphi$.

K3-9.8

Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно воспользоваться обобщенными полярными координатами; см. задачу 119, §8):

- 1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; 2) $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 = y^2/c^2$;
- 3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = x/p + y/q, p > 0, q > 0$;
- 4) $(x + y)^4 = 6xy^2$ (площадь петли);
- 5) $(x + y)^4 = a^2(x^2 + y^2), x = 0, y = 0 (x > 0, y > 0)$;
- 6) $\sqrt[4]{x/a} + \sqrt[4]{y/b} = 1, x = 0, y = 0, a > 0, b > 0$; 7) $x^4 + y^4 = 2a^2xy$; 8) $x^3 + y^3 = axy$ (площадь петли).

K3-9.9

Найти площадь области, ограниченной данными линиями, используя подходящую замену координат:

- 1) $x = 2y, y = 3x, 3x = 2 - y, x = 4 - 2y$;
- 2) $x + y = a, x + y = b, y = \alpha x, y = \beta x, 0 < a < b, 0 < \alpha < \beta$;
- 3) $xy = a^2, xy = b^2, x = py, x = qy (x > 0), b > a > 0, q > p$;
- 4) $y^2 = ax, y^2 = bx, x = py, x = qy, b > a > 0, q > p > 0$;
- 5) $y^2 = ax, y^2 = bx, x^2 = py, x^2 = qy, b > a > 0, q > p > 0$;
- 6) $xy = a^2, xy = b^2, x^2 = py, x^2 = qy, b > a > 0, q > p > 0$; 7) $x^2 = ay, x^2 = by, x^3 = py^2, x^3 = qy^2, b > a > 0, q > p > 0$; 8) $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1, \sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 2, x/a = y/b, x/a = 9y/b, a > 0, b > 0$; 9) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}, y = x, y = 8x, b > a > 0$.

K3-9.10

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1,$$

если $\Delta = a_1b_2 - b_2a_1 \neq 0$.

K3-9.11

Найти площадь расположенной в I квадранте фигуры, ограниченной двумя эллипсами $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 a_j} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 a_j} = 1$ и двумя ортогональными им гиперболами $\frac{x^2}{\cos^2 b_j} - \frac{y^2}{\sin^2 b_j} = 1$, где $j = 1, 2, 0 < a_1 < a_2, 0 < b_1 < b_2$.

Указание. Можно воспользоваться заменой $x = \operatorname{ch} u \cos v, y = \operatorname{sh} u \sin v$.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (см. формулы (24), (25)) (12, 13).

K3-9.12

- 1) $|x + y| < \pi/2, z = \cos x \cos y, z = 0, |x - y| < \pi/2$;
- 2) $n\pi < x^2 + y^2 < (n + 1)\pi, z = \sin(x^2 + y^2), z = 0$;
- 3) $x^2 + y^2 = ax, z = x^2 + y^2, z = 0$;
- 4) $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$;
- 5) $x + y + z = a, 4x + y = a, 4x + 3y = 3a, y = 0, z = 0, a > 0$;
- 6) $x^2 + y^2 = R^2, x + y + z = a, x + y + z = -a$; 7) $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1, y = bx/a, y = 0, z = 0, a > 0, b > 0, c > 0$ ($x > 0$); 8) $x^2 + y^2 = ay, z = xy, z = 0 (x > 0)$ 9) $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

K3-9.13

- 1) $x^2 + y^2 = a^2, y + z = \pm a, y - z = \pm a$;
- 2) $z = xy, z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0$;
- 3) $x = a, y = b, z^2 = xy, a > 0, b > 0$;
- 4) $x/a + y/b + z/c = 1, 3x/a + y/b + z/c = 1, 3x/a + y/b - 3z/c = 1, y = 0, a > 0, b > 0, c > 0$;
- 5) $z = x^2 + y^2, z = x + y$; 6) $y^2 + z^2 = x, x = y$; 7) $x^2/a^2 + z^2/b^2 = 1, x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; 8) $z^2 - x^2 = a^2, z^2 - y^2 = a^2, z = a\sqrt{2}, a > 0$; 9) $x^2z^2 + a^2y^2 = c^2x^2, x = a, a > 0$. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (можно воспользоваться цилиндрическими координатами) (14, 15).

K3-9.14

- 1) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = x + y, z = 0 (x > 0)$;
- 2) $x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2, z = 0$;
- 3) $x^2 + y^2 = 1, z = e^{-(x^2 + y^2)}, z = 0$;
- 4) $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + a^2 = 2z^2, a > 0 (z > 0)$;
- 5) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 > a|x|, a > 0$;
- 6) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), a > 0, |x| \geq |y|$; 7) $y = x \operatorname{tg} \alpha, y = x \operatorname{tg} \beta, z = c \cdot \cos(\pi\sqrt{x^2 + y^2}/(2a)), z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} < a, c > 0, 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$; 8) $z = x^2 + y^2, x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2), z = 0$; 9) $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, z(x + y) = ax + by, z = 0, x > 0, y > 0, a > 0, b > 0$.

K3-9.15

- 1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z, z = 0$;
- 2) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, cz = xy, z = 0, x > 0, y > 0$;
- 3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = x/p, z/c = \sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}, z = 0, p > 0$;
- 4) $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 + z^2/c^2 = 1$;
- 5) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, x^2/a^2 + y^2/b^2 = z/c, c > 0$;
- 6) $x^4/a^4 + y^4/b^4 = x^2/a^2 + y^2/b^2, x^2/a^2 + y^2/b^2 = z/c, z = 0, c > 0$; 7) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z/c, x/a + z/c = 2, a > 0, c > 0$. Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (можно использовать сферические координаты) (16, 17).

K3-9.16

- 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2} (z < \sqrt{x^2 + y^2})$;
- 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, z = \sqrt{x^2 + y^2} (z > \sqrt{x^2 + y^2})$;
- 3) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x, a > 0$;
- 4) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$;
- 5) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz, a > 0$;
- 6) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2), a > 0$; 7) $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3z, a > 0$;
- 8) $(x^2 + y^2)^3 + z^6 = a^3xyz, a > 0$.

K3-9.17

- 1) $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = x/p, p > 0$;
- 2) $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2$;
- 3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, x^2/a^2 + y^2/b^2 = z/c, c > 0$;
- 4) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^4/c^4 = 1$; 5) $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = xyz/p^3, p > 0$.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (18-20) (все параметры положительны):

K3-9.18

- 1) $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 = 2xy/c^2, z^2 = 2xy, x > 0, y > 0, z > 0$;
- 2) $(x/a + y/b)^2 + z^2/c^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0$;
- 3) $x + y = 1, z^2 = xy, z > 0$;
- 4) $(x/a + y/b)^2 + z^2/c^2 = 1, (x/a + y/b)^2 = x/a, y > 0, z > 0$;
- 5) $x + y = 1, x^{3/2} + y^{3/2} = z, x > 0, y > 0, z > 0$;
- 6) $(x/a + y/b)^2 + z^2/c^2 = x/p + y/q, x > 0, y > 0, z > 0$; 7) $(x/a + y/b)^2 + z^2/c^2 = x/p - y/q, x > 0, y > 0, z > 0$; 8) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z/c = 1, (x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1, z = 0, ((x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} \leq 1)$ 9) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, (x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 = x^2/a^2 - y^2/b^2, ((x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 \leq x^2/a^2 - y^2/b^2)$.

K3-9.19

- 1) $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 + z^4/c^4 = z/p$;
- 2) $(x/a + y/b + z/c)^2 = z/p, x > 0, y > 0, z > 0$;
- 3) $(x/a + y/b + z/c)^2 = x/p + y/q, x > 0, y > 0, z > 0$;
- 4) $(x/a + y/b + z/c)^2 = x/p - y/q, x > 0, y > 0, z > 0$;
- 5) $(x/a + y/b + z/c)^2 = x/a + y/b - z/p, x > 0, y > 0, z > 0$;
- 6) $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} + \sqrt{z/c} = 1$; 7) $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} + (z/c)^{2/3} = 1$; 8) $((x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3})^3 + (z/c)^2 = 1$
- 9) $\sqrt[3]{x/a} + \sqrt[3]{y/b} + \sqrt[3]{z/c} = 1, x > 0, y > 0, z > 0$.

K3-9.20

- 1) $xy = a^2, xy = 3a^2, x = 2y, x = 3y, z = x^2 + y^2, z = 0$;
- 2) $y^2 = ax, y^2 = bx, x = py, x = qy, z = 1/xy, z = 0, b > a, q > p$;
- 3) $y^2 = 2x, y^2 = 3x, x^2 = y, x^2 = 2y, z = xy, z = 0$;
- 4) $xy = 1, xy = 4, y^2 = x, y^2 = 3x, z^2 = xy, z = 0$;
- 5) $x + y + z = a, x + y + z = 2a, x + y = z, x + y = 2z, y = x, y = 3x$
- 6) $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y, x > 0, y > 0$ 7) $x^2 + z^2 = a^2, x^2 + z^2 = b^2, x^2 - y^2 - z^2 = 0, x > 0, b > a$; 8) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{x/a + y/b + z/c}{x/a + y/b}, x = 0, z = 0, \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
- 8) $(x^2 + y^2)^3 + z^6 = a^3xyz, a > 0$.

K3-9.17

- 1) $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = x/p, p > 0$;
- 2) $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2$;
- 3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, x^2/a^2 + y^2/b^2 = z/c, c > 0$;
- 4) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^4/c^4 = 1$; 5) $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = xyz/p^3, p > 0$.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (18-20) (все параметры положительны):

K3-9.18

- 1) $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 = 2xy/c^2, z^2 = 2xy, x > 0, y > 0, z > 0;$
- 2) $(x/a + y/b)^2 + z^2/c^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0$
- 3) $x + y = 1, z^2 = xy, z > 0;$
- 4) $(x/a + y/b)^2 + z^2/c^2 = 1, (x/a + y/b)^2 = x/a, y > 0, z > 0;$
- 5) $x + y = 1, x^{3/2} + y^{3/2} = z, x > 0, y > 0, z > 0;$
- 6) $(x/a + y/b)^2 + z^2/c^2 = x/p + y/q, x > 0, y > 0, z > 0;$ 7) $(x/a + y/b)^2 + z^2/c^2 = x/p - y/q, x > 0, y > 0, z > 0;$ 8) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z/c = 1, (x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1, z = 0, ((x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} \leq 1)$ 9) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, (x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 = x^2/a^2 - y^2/b^2, ((x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 \leq x^2/a^2 - y^2/b^2).$

K3-9.19

- 1) $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 + z^4/c^4 = z/p;$
- 2) $(x/a + y/b + z/c)^2 = z/p, x > 0, y > 0, z > 0;$
- 3) $(x/a + y/b + z/c)^2 = x/p + y/q, x > 0, y > 0, z > 0;$
- 4) $(x/a + y/b + z/c)^2 = x/p - y/q, x > 0, y > 0, z > 0;$
- 5) $(x/a + y/b + z/c)^2 = x/a + y/b - z/p, x > 0, y > 0, z > 0;$
- 6) $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} + \sqrt{z/c} = 1;$ 7) $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} + (z/c)^{2/3} = 1;$ 8) $((x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3})^3 + (z/c)^2 = 1$
- 9) $\sqrt[3]{x/a} + \sqrt[3]{y/b} + \sqrt[3]{z/c} = 1, x > 0, y > 0, z > 0.$

K3-9.20

- 1) $xy = a^2, xy = 3a^2, x = 2y, x = 3y, z = x^2 + y^2, z = 0;$
- 2) $y^2 = ax, y^2 = bx, x = py, x = qy, z = 1/xy, z = 0, b > a, q > p;$
- 3) $y^2 = 2x, y^2 = 3x, x^2 = y, x^2 = 2y, z = xy, z = 0;$
- 4) $xy = 1, xy = 4, y^2 = x, y^2 = 3x, z^2 = xy, z = 0;$
- 5) $x + y + z = a, x + y + z = 2a, x + y = z, x + y = 2z, y = x, y = 3x$
- 6) $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y, x > 0, y > 0$ 7) $x^2 + z^2 = a^2, x^2 + z^2 = b^2, x^2 - y^2 - z^2 = 0, x > 0, b > a;$ 8) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{x/a + y/b + z/c}{x/a + y/b}, x = 0, z = 0, \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

K3-9.33

Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсеченной плоскостями $x + y = 1, x = 0, y = 0$.

K3-9.34

Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$.

K3-9.35

Найти площадь части цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, расположенной внутри шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

K3-9.36

Найти площадь части конуса $x^2 + y^2 + z^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

K3-9.37

Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

K3-9.38

Найти площадь части конуса $x^2 = y^2 + z^2$, отсеченной поверхностью $y = x^2$.

K3-9.39

Найти площадь части поверхности $2x = z^2 - y^2$, расположенной внутри цилиндра $y^2 + z^2 = 1$.

K3-9.40

Найти площадь части цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, отсеченной плоскостями $x \pm z = 0 (x > 0)$.

K3-9.41

Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 = 2z$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

K3-9.42

Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

K3-9.43

Найти площадь части поверхности $x^2/a - y^2/b = 2z$, отсеченной цилиндром $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и расположенной при $z > 0 (a > 0, b > 0)$.

K3-9.44

Найти площадь части поверхности $x^2/a + y^2/b = 2z$, отсеченной цилиндром $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 (a > 0, b > 0)$.

K3-9.45

Найти площадь поверхности $(x + y)^2 + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0$.

K3-9.46

Найти площадь поверхности $(x + y)^2 + 2z^2 = 2a^2, x > 0, y > 0, z > 0$.

K3-9.47

Найти площадь части сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x > 0, y > 0, z > 0, x + y < a$.

K3-9.48

Найти площадь части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, имеющей краем винтовую линию $x = z \cos z, y = z \sin z, 0 \leq z \leq 2\pi$, и отрезок образующей.

K3-9.49

Найти площадь части поверхности $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, y > 0$, отсеченной плоскостями $x = 1$ и $x = 2$.

K3-9.50

Найти площадь части сфер $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограниченной двумя параллелями $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2 > \psi_1$ и двумя меридианами $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2 > \varphi_1$, где φ и ψ углы сферических координат.

K3-9.58

Для треугольника $\Omega = \{x + y \geq a, a \geq x \geq 0, a \geq y \geq 0\}$ с плотностью $\rho(x; y) = x$ найти: 1) массу; 2) координаты центра масс; 3) моменты инерции относительно осей Ox и Oy ; 4) момент инерции относительно прямой $y = y_C$, где y_C -ордината центра масс.

K3-9.59

Пусть начало координат O является центром масс плоской Фигуры Ω , прямая l проходит через O и составляет с осью Ox угол α . Доказать, что

$$I_l = I_{xx} \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_{yy} \sin^2 \alpha,$$

где I_l - момент инерции Ω относительно оси l , I_{xy} -центробежный момент инерции:

$$I_{xy} = \iint_{\Omega} xy \rho(x; y) dx dy$$

K3-9.60

Найти координаты центра масс однородной плоской ($\rho = 1$) фигуры:

- 1) $y^2/a \leq x \leq 2a - y, a > 0$;
- 2) $x^2 + y^2 \leq a^2, |y| \leq x \operatorname{tg} \alpha, \alpha \in (0; \pi/2)$;
- 3) $y \leq a^2/x, y^2/(8a) \leq x \leq 2a, a > 0$
- 4) $r \leq a(1 + \sin \varphi)$; 5) ограниченной петлей декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$; 6) ограниченной аркой циклоиды $x = a(t + \sin t), y = a(1 - \cos t)$ и прямой $y = 2a$; 7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a}, x \geq 0, y \geq 0$.

K3-9.61

Найти статический момент однородного ($\rho = 1$) тела $\{(x^2 + y^2) \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ относительно плоскости Oxy .

K3-9.62

Найти координаты центра масс однородного ($\rho = 1$) тела:

- 1) $0 \leq bz \leq h(b - y), a^2y \geq bx^2, a > 0, b > 0, h > 0$;
- 2) $(y^2 + 2z^2)/4 \leq x \leq 2$.

K3-9.63

Найти координаты центра масс тела с плотностью ρ :

- 1) $[0; a] \times [0; a] \times [0; a], \rho = \rho_0(x + y + z)^2$;
- 2) $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, \rho = \rho_0/\sqrt{x^2 + y^2}$;
- 3) $R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2, y \geq 0, \rho = \rho_0(z^2 + x^2 + y^2)$;
- 4) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, \rho = \rho_0 z^2$;
- 5) $x^2 + y^2 \leq z \leq h, \rho = \rho_0\sqrt{h - z}$;
- 6) $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0, \rho = \rho_0(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$; 7) $x^2 + y^2 - z^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h, \rho = \rho_0 z$; 8) $0 \leq z \leq x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, \rho = \rho_0 z$.

K3-9.64

По пространству вне шара $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$ распределена масса с плотностью $\rho = \rho_0/r^{3+\alpha}$, где $\alpha > 0, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти эту массу.

K3-9.65

По пространству вне эллипсоида $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \geq 1$ распределена масса с плотностью

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-k\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2}\right), \quad k > 0.$$

Найти эту массу.

K3-9.66

Найти момент инерции относительно координатных осей и относительно начала координат однородной ($\rho = 1$) плоской фигуры:

- 1) $x^2 + y^2 \leq a^2, |y| \leq x \operatorname{tg} \alpha, \alpha \in (0; \pi/2)$;
- 2) $(x - a)^2 + (y - a)^2 \geq a^2, a \geq x \geq 0, a \geq y \geq 0$;
- 3) $x/a + y/c \leq 1, x/b + y/c \geq 1, y \geq 0, a > b > 0, c > 0$;
- 4) $r \leq a \sin 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$; 5) $r \leq a(1 - \sin \varphi)$;
- 6) $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$; 7) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$; 8) $xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, y = 2x (x > 0, y > 0)$.

K3-9.67

Найти полярный момент инерции относительно начала координат однородной ($\rho = 1$) плоской фигуры:

- 1) $x/a + y/b \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, a > 0, b > 0$;
- 2) $a^2 \geq y^2 \geq ax \geq 0, a > 0$; 3) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

K3-9.68

Найти момент инерции плоского однородного ($\rho = 1$) правильного треугольника со стороной относительно оси: 1) содержащей его высоту; 2) проходящей через центр масс треугольника и составляющей с его высотой угол α .

K3-9.69

По шару радиуса R распределена масса M с плотностью ρ . Найти момент инерции шара относительно его диаметра, если: 1) плотность ρ в точке пропорциональна расстоянию между этой точкой и центром шара; 2) плотность ρ в точке обратно пропорциональна расстоянию между этой точкой и центром шара.

K3-9.70

Найти моменты инерции относительно координатных осей однородных ($\rho = 1$) тел:

- 1) $[0; a] \times [0; b] \times [0; c]$; 2) $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H$;
- 3) $0 \leq Rz \leq H(R - \sqrt{x^2 + y^2})$.

K3-9.71

Найти полярный момент инерции шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ с плотностью $\rho = \rho_0(x^2 + y^2 + z^2)$ относительно его центра.

K3-9.75

Найти момент инерции тора $x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, z = a \sin \psi, 0 < a < b$, относительно: 1) оси Oz ; 2) оси Ox .

K3-9.76

Найти момент инерции однородного ($\rho = 1$) цилиндра $x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq H$ относительно прямой $x = y = z$.

K3-9.77

Пусть начало координат O совпадает с центром масс тела G , ось l проходит через точку O и составляет с осями координат углы α, β и γ . Доказать, что момент инерции I_l тела относительно оси l равен $I_l = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha$, $I_{xy} = \iiint_G xy \rho dx dy dz, I_{yz} = \iiint_G yz \rho dx dy dz, I_{zx} = \iiint_G zx \rho dx dy dz$ - центробежные моменты инерции тела.

K3-9.78

Найти логарифмический потенциал, если $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$, и, кроме того:

- 1) $\mu = \text{const}$; 2) $\mu(x; y) = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

K3-9.79

Найти ньютонов потенциал в точке M_0 , создаваемый шаром плотности ρ_0^* и радиуса R .

K3-9.80

Найти ньютонов потенциал в точке M_0 , создаваемый полым шаром с плотностью ρ_0 , если его внутренний и внешний радиусы есть R_1 и $R_2, R_1 < R_2$.

K3-9.88

Из материального шара радиуса R и плотности ρ_0 вырезан шаровой сектор с углом в осевом сечении 2α . Найти силу, с которой этот сектор притягивает точку массы m , расположенную в его вершине.

K3-9.89

Для материального шара с плотностью $\rho = f(r)$ доказать, что: 1) точка вне шара притягивается шаром с такой же силой, как и точечной массой, равной массе шара и помещенной в его центре; 2) на точку внутри шара наружный шаровой слой не оказывает никакого действия; 3) потенциал в точке вне шара таков же, как и от точечной массы, равной массе шара и помещенной в его центр; 4) если шар полый, то потенциал шара в полости постоянен.

K3-9.90

Найти силу, с которой цилиндр с плотностью ρ_0 , высотой H и радиусом R притягивает точку массы m , расположенную в центре основания цилиндра.

K3-9.91

Найти силу, с которой конус с плотностью ρ_0 , высотой и радиусом основания R притягивает точку массы m , расположенную в вершине конуса.

K3-9.92

Найти силу притяжения материальной точки массы m с координатами $(0; 0; h)$ материальным кругом $\{x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0\}$, по которому равномерно распределена масса с поверхностной плотностью ρ_0 .

K3-9.93

Найти силу притяжения материальной точки массы m с координатами $(0; 0; h)$ материальной плоскостью, по которой равномерно распределена масса с поверхностной плотностью ρ_0 .

K3-9.94

Расстояние между центрами двух шаров равно a , масса одного шара равна M_1 , другого - M_2 , плотность каждого шара постоянна.

K3-9.98

Горизонтальный уровень жидкости совпадает с плоскостью Oyz , ось Ox направлена вниз, в глубь жидкости. Плотность жидкости ρ_0 . Показать, что сила давления жидкости на вертикальную пластину Ω , расположенную в плоскости xy , равна

$$\rho_0 \iint_{\Omega} x dx dy,$$

а ее точка приложения находится на глубине h , определяемой из формулы

$$h \iint_{\Omega} x dx dy = \iint_{\Omega} x^2 dx dy.$$

K3-9.99

Показать, что кинетическая энергия твердого тела G , вращающегося вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω , равна

$$W_k = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2,$$

где I_{zz} - осевой момент инерции тела.

Academy MADE.2 area curve degree 2/3 (!???????)

Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = 10^{2/3}$

(Там Олег говорил про элегантный переход с помощью якобиана. вообще не шарю это!!!! проработаю потом!!! нужно набить руку в этом.)

19.4.6 Solid Volume and Surface Area Problems**19.4.7 Some problems of geometry and physics by integrals**

(тут же на определение центра тяжести, ничего вроде сложного, даже добавлять лень задачи.)

19.5 Problems about Integrals in Applications in Physics

19.5.1 Problems about Integrals in Statistical Physics

B-3.1.1-a2) Heat capacity under special spectrum

To calculate energy of a классического газа частиц со спектром $\varepsilon_p = cp^k (k > 0)$, one needs to compute the statistical sum $Z = z_0^N / N!$, где N - число частиц газа, а одночастичная статистическая сумма z_0 имеет вид $z_0 = \int d^d x \int \frac{d^d p}{(2\pi\hbar)^d} e^{-\varepsilon_p/T}$.

Compute it.

Solution

Для спектра $\varepsilon_p = cp^k$ мы имеем $z_0 = AVT^{d/k}$, где A - постоянная величина, V - d -мерный объем, занимаемый газом, и T - температура.

Proof:

```
Integrate[x^{d - 1} Exp[-a x^k], {x, 0, +Infinity}]
```

```
(a^{-(d/k)} Gamma[d/k])/k
```

(??? to do it analytically, just to transform to the gamma function? check!)

B-3.1.8 2D Gas in potential with pillar

Идеальный трехмерный газ помещен в центрально-симметричную ловушку с непроницаемой сердцевиной радиуса R и внешним потенциалом

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r = R \\ U_0 \ln r/R, & r > R (U_0 > 0). \end{cases}$$

Найти теплоемкость газа и предельную температуру, выше которой газ невозможно нагреть.

$$C(T) = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = N \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{U_0}{U_0 - 3T} \right)^2 \right],$$

```
Integrate[(u/(u - 3 t))^2, {t, 0, T}]
```

(???how to do the integral analytically?)

$$E = NT \left(\frac{3}{2} + \frac{U_0}{U_0 - 3T} \right).$$

Solution

(??? to think about it later!)

B-3.1.6 Gas in harmonic potential (!?!)

Идеальный газ N частиц находится в ловушке с гармоническим потенциалом

$$U(x, y, z) = \frac{m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}{2}$$

Найти одночастичную плотность состояний, химический потенциал и теплоемкость газа.

$$g(\varepsilon) = \frac{16}{8\pi^2 \hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \int_{x^2+y^2+z^2 < \varepsilon} dx dy dz \sqrt{\varepsilon - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$g(\varepsilon) = C \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} dr r^2 \sqrt{\varepsilon - r^2}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \quad \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$$

$$r^2 = u, \quad \sqrt{\varepsilon - r^2} = \sqrt{\varepsilon - u} \Rightarrow dr = \frac{du}{2\sqrt{u}} \Rightarrow r^2 \sqrt{\varepsilon - r^2} dr = u \sqrt{\varepsilon - u} \cdot \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \sqrt{u(\varepsilon - u)} du$$

```
Integrate[Sqrt[u (ve - u)], {u, 0, ve}]
```

$$I_r = \frac{\pi \varepsilon^2}{8}$$

Solution

(??? to think about it later!)

B-3.1.6 Gas in harmonic potential (!?!)

Идеальный газ N частиц находится в ловушке с гармоническим потенциалом

$$U(x, y, z) = \frac{m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}{2}$$

Найти одночастичную плотность состояний, химический потенциал и теплоемкость газа.

$$g(\varepsilon) := \int d^3r \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r})), \quad \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/(2m) + U(\mathbf{r}).$$

$$\int_0^\infty p^2 \delta\left(\frac{p^2}{2m} - (\varepsilon - U)\right) dp = \frac{p^2}{|f'(p)|} \Big|_{p=\sqrt{2m(\varepsilon-U)}} = \frac{(2mE_{\text{kin}})}{(\sqrt{2m(\varepsilon-U)}/m)} = m\sqrt{2m(\varepsilon-U)}$$

$$g(\varepsilon) = \frac{4\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_{U(\mathbf{r}<\varepsilon)} d^3r \sqrt{\varepsilon - U(\mathbf{r})}.$$

Solution

(??? to think about it later!)

thermal-cosmol. Integral for relativistic gases

(write the preface)

$$I_{\pm}(0) = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x \pm 1} dx.$$

Solution

$$\frac{1}{e^x \pm 1} = \frac{e^{-x}}{1 \pm e^{-x}} = \sum_{j=1}^{\infty} (\mp 1)^{j-1} e^{-jx}.$$

$$I_{\pm}(0) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mp 1)^{j-1} \int_0^\infty x^3 e^{-jx} dx = \sum_{j=1}^{\infty} (\mp 1)^{j-1} \frac{3!}{j^4} = 6 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^{j-1}}{j^4}.$$

$$I_{-}(0) = 6\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}.$$

$$I_{+}(0) = 6 \left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots\right) = 6\zeta(4) - \frac{12}{2^4}\zeta(4) = \left(1 - \frac{12/2^4}{6}\right) I_{-}(0) = \frac{7}{8} I_{-}(0).$$

19.5.2 Problems about Integrals in Condensed Matter

cond-matt. Integral from fluctuations of a lattice

(write a paragraph with basic idea of physics here)

Initial formulas

Solution for C0, D=3

A. $D = 3$

$$C_0^{(3)}(r) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3 \rho} \int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} \frac{k^2 dk}{ck} = \frac{1}{4\pi^2 \rho c r^2}$$

Здесь использована формула

$$\int e^{i\mathbf{a}\mathbf{n}} d\mathbf{o}_{\mathbf{n}} = 4\pi(\sin a)/a$$

Solution for C0, D=2

B. $D = 2$:

$$C_0^{(2)}(r) = \frac{1}{4\pi\rho c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{ikr \cos \theta} dk = \frac{1}{4\pi\rho c} \int_0^\infty J_0(kr) dk = \frac{1}{4\pi\rho c r}.$$

Solution for C0, D=1

B. $D = 1$

$$C_0^{(1)}(r) = \frac{1}{4\pi\rho c} \int_{-\infty}^\infty e^{ikr} \frac{dk}{|k|} = \frac{1}{2\pi\rho c} \int_0^\infty \cos kr \frac{dk}{k} = \frac{1}{2\pi\rho c^2} \ln \frac{L}{r}$$

Solution for CT, D=3

$$\Delta C_{\mathbf{T}}^{(3)}(r) = \frac{T}{2\pi^2 \rho c R} \int_0^\infty \sin(kr) \frac{dk}{k} = \frac{T}{4\pi\rho c r}$$

Solution for CT, D=2

B. $D = 2$:

$$\Delta C_{\mathbf{T}}^{(2)}(r) = \frac{T}{(2\pi)^2 \rho c^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \theta} \frac{dk d\theta}{k}$$

Этот расходящийся интеграл вычисляется так же, как и интеграл для $C_0^{(1)}(r)$:

$$\Delta C_{\mathbf{T}}^{(2)}(r) = \frac{T}{2\pi\rho c^2} \ln \frac{L}{r}$$

Solution for CT, D=1

B. $D = 1$:

$$\Delta C_{\mathbf{T}}^{(1)}(r) = \frac{T}{\pi\rho c^2} \int_{\approx L^{-1}}^\infty \cos(kr) \frac{dk}{k^2} = \alpha \frac{TL}{\rho c^2}.$$

19.5.3 Problems about Integrals in QM

QM. Integral from fluctuations of WKB

(write them)

QM.Goldman-Krivchenkov. Find $I = \int \frac{e^{-ax}}{x} dx$ (????)

(потом напишу)

19.5.4 Problems about Integrals in Field Theory

LL2-rel-Coulomb

(тот интеграл по методу Г-Я, вечно с этим методом проблемы, пропишу потом.)

19.5.5 Problems about Integrals in Gravity

(there are many of them, I'll collect them later)

19.5.6 Problems about Typical Integrals in QFT

(not typical - topic for a whole book, see QFT about it for now)

19.5.7 Problems about Integrals in classical Mechanics

(write later)

20 Rows and Limits Tasks

20.1 Limit Finding Tasks

20.1.1 Problems about the simplest limits of sequences (!!!)

(тут вот хорошо нужно развивать этот раздел!!! нетривиальные порешаю)

(огромнейший просто раздел!!!)

(мб ближе к началу вставлю)

(?? потренироваться нужно строго доказывать задачи, а то я совсем не владею строгими методами!)

Магистратура МФТИ-1019.2 (!?!?!?)

Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\ln(\operatorname{th} x)|^{\operatorname{arctg} x}$.

Ответ: $\exp(-2)$. При $x \rightarrow +\infty$ имеем:

$$|\ln(\operatorname{th} x)| = 2e^{-2x} + o(e^{-2x}), \quad \operatorname{arctg} x = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$|\ln(\operatorname{th} x)|^{\operatorname{arctg} x} = \exp\left[\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)(\ln(2e^{-2x}) + o(1))\right] = \exp(-2 + o(1)).$$

(тут рука не набита, так что я даже не могу разложить $\operatorname{th}(x)$ в ряд, так что на этом я жестко засидаю. потом вернусь к задачам этим, когда Тейлора освою.)

K1-8.пр.1

Доказать исходя из определения, что число 1 является пределом последовательности $x_n = n/(n+1)$ ($n = 1, 2, \dots$). А Рассмотрим модуль разности

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполнено, если $1/(n+1) < \varepsilon$, т. е. при $n > 1/\varepsilon - 1$. В качестве N возьмем какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N > 1/\varepsilon - 1$, т. е. $1/(N+1) < \varepsilon^*$. Тогда для всех $n \geq N$ выполнены неравенства

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Это и означает, что 1 есть предел последовательности $\{n/(n+1)\}$, Т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

K1-8.пр.2

Доказать исходя из определения, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/3)^n = 0.$$

Так как $3^n > n$ для любого $n \geq 1$, то

$$|(1/3)^n - 0| = 1/3^n < 1/n$$

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем натуральное N такое, что $1/N < \varepsilon$. Тогда для любого $n \geq N$ имеем

$$|(1/3)^n - 0| < 1/n \leq 1/N < \varepsilon.$$

Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/3)^n = 0$.

K1-8.пр.3

Доказать, что последовательность $\{(-1)^n + 1/n\}$ расходится. Δ Нужно доказать, что никакое число не является пределом данной последовательности.

Отметим на числовой прямой несколько членов последовательности, например,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3/2, \quad x_3 = -2/3, \quad x_4 = 5/4, \quad x_5 = -4/5,$$

$$x_6 = 7/6, \quad x_{12} = 13/12, \quad x_{13} = -12/13.$$

Рис. 8.1 показывает, что расстояние между двумя соседними членами последовательности больше 1. Докажем, что это действительно так для любых двух соседних членов. Из этих членов один имеет четный номер $n = 2k$, и

$$x_{2k} = 1 + 1/(2k) > 1.$$

Соседний член имеет нечетный номер $2k+1$ (или $2k-1$), и

$$x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} < 0 \quad (\text{или } x_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \leq 0).$$

Отсюда следует, что $|x_n - x_{n+1}| > 1$.

Для произвольного числа a возьмем окрестность единичной длины - интервал $(a-1/2; a+1/2)$. Любые соседние члены x_n и x_{n+1} оба вместе не могут находиться в этой окрестности, так как расстояние между ними больше 1. По крайней мере один из этих членов будет лежать вне окрестности.

Таким образом, для любого числа a существует $\varepsilon = 1/2$ такое, что для любого натурального N найдется n , равное либо N , либо $N+1$ такое, что $|x_n - a| > 1/2 = \varepsilon$. Это и означает, что данная последовательность расходится.

K1-8.пр.4

Доказать, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ расходится. Докажем, что данная последовательность неограниченна. Имеем $x_n = n - 10/n \geq n - 10$.

Пусть C - произвольное положительное число. Возьмем какое-нибудь натуральное число $n_0 > C + 10$, тогда $x_{n_0} \geq n_0 - 10 > C$. Это означает, что последовательность $\{(n^2 - 10)/n\}$ неограниченна, а поэтому расходится.

Пример 5.

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}$. Δ Преобразуем формулу для общего члена к виду

$$x_n = \frac{5 - 3/n}{1 + 1/n^3}.$$

Учитывая, что $\{1/n\}$ и $\{1/n^3\}$ - бесконечно малые последовательности, и используя теоремы о пределах, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3/n}{1 + 1/n^3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - 3/n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n^3)} = \frac{5}{1} = 5.$$

К1-8.пр.6

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n/n^n) = 0$. Δ Для всех $n \geq 15$ верно неравенство $5/n \leq 1/3$, поэтому $0 < (5/n)^n \leq (1/3)^n$ при $n \geq 15$. Здесь слева и справа стоят члены последовательности, имеющие пределом нуль. Значит, по теореме о трех последовательностях и

$$\lim (5/n)^n = 0.$$

К1-8.пр.7

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и $x_n \geq -1$ для любого n ; пусть p - натуральное число. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{1 + x_n} = 1.$$

Если $x_n \geq 0$, то $1 + x_n \geq 1$, поэтому

$$1 \leq \sqrt[p]{1 + x_n} \leq (\sqrt[p]{1 + x_n})^p = 1 + x_n = 1 + |x_n|$$

а если $-1 \leq x_n < 0$, то $0 \leq 1 + x_n < 1$, поэтому

$$1 > \sqrt[p]{1 + x_n} \geq (\sqrt[p]{1 + x_n})^p = 1 + x_n = 1 - |x_n|.$$

Объединяя эти результаты, для любого $x_n \geq -1$ получаем

$$1 - |x_n| \leq \sqrt[p]{1 + x_n} \leq 1 + |x_n|.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |x_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + |x_n|) = 1.$$

Отсюда следует, что и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{1 + x_n} = 1$$

Пример 8. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$. Преобразуем формулу общего члена:

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1}.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + 1/n} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Пример

К1-8.пр.9

Пусть $a > 1$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Δ Обозначим $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$, тогда $\alpha_n > 0$ и $a = (1 + \alpha_n)^n \geq n\alpha_n$ (по неравенству Бернулли, §2), $0 < \alpha_n \leq a/n$, для всех n . Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1$.

K1-8.10

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Δ Обозначим $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$, тогда $\alpha_n \geq 0$ и

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2$$

при $n \geq 2$ (см. § 4). Так как $n-1 \geq n/2$ при $n \geq 2$, то $n \geq n^2 \alpha_n^2 / 4$, откуда получаем $0 \leq \alpha_n \leq 2/\sqrt{n}$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) = 1.$$

В следующих двух примерах дано сравнение скорости роста трех возрастающих последовательностей $\{a^n\}$, $\{n\}$ и $\{\log_a n\}$, где $a > 1$.

При мер

K1-8.11

Пусть $a > 1$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/a^n) = 0$. Δ Поскольку $a - 1 > 0$, имеем

$$a^n = (1 + a - 1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} (a-1)^2 \geq \frac{n^2}{4} (a-1)^2$$

для всех $n \geq 2$. Отсюда следует, что

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{4}{n} (a-1)^2.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} (a-1)^2 \right) = 0$$

то и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{a^n} \right) = 0$$

K1-8.12

Пусть $a > 1$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$. Δ Для доказательства воспользуемся определением предела и результатом предыдущего примера.

Пусть $\varepsilon > 0$. На множестве натуральных чисел n неравенство

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

равносильно неравенству $n < (a^\varepsilon)^n$. Поскольку $a^\varepsilon > 1$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(a^\varepsilon)^n} = 0,$$

поэтому существует натуральное N такое, что для всех $n \geq N$

$$\frac{n}{(a^\varepsilon)^n} < 1$$

т. е. $n < a^{\varepsilon n}$. Отсюда следует, что для всех $n \geq N$

$$0 \leq \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$$

это и означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0. \Delta$$

Таким образом, из трех последовательностей $\{a^n\}$, $\{n\}$, $\{\log_a n\}$, $a > 1$, первая возрастает существенно быстрее других, а третья медленнее других.

Пр и мер

K1-8.13

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n'} = 0$. Δ Если $k \geq 4$, то $2/k \leq 1/2$, поэтому при $n \geq 4$

$$0 < \frac{2^n}{n'} = \frac{8}{123} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{n} \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \frac{32}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{32}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n'} = 0$

П р и м е р

K1-8.16

Для последовательности

$$x_n = \frac{(3 \cos(\pi n/2) - 1)n + 1}{n}, \quad n \in N,$$

найти множество частичных пределов $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, а также $\sup \{x_n\}$ и $\inf \{x_n\}$. Δ При $n = 4k$ имеем

$$x_n = \frac{2n + 1}{n} = 2 + \frac{1}{n},$$

и, значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k} = 2$, $2 < x_{4k} \leq 2 + 1/4$, причем $x_4 = 9/4$. При $n = 4k + 1$ или $n = 4k + 3$ имеем

$$x_n = \frac{-n + 1}{n} = -1 + \frac{1}{n},$$

и, значит, $-1 < x_n < 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k+3} = -1$. При $n = 4k + 2$ имеем

$$x_n = \frac{-4n + 1}{n} = -4 + \frac{1}{n},$$

значит, $-4 < x_n < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{4k+2} = -4$.

Таким образом, числа $2, -1, -4$ являются частичными пределами данной последовательности. Рассмотренные четыре подпоследовательности $\{x_{4k}\}, \{x_{4k+1}\}, \{x_{4k+2}\}, \{x_{4k+3}\}$ составляют вместе всю данную последовательность. Отсюда следует, что других частичных пределов данная последовательность не имеет. Очевидно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -4.$$

Из предыдущих рассуждений следует также, что

$$\sup \{x_n\} = x_4 = 9/4, \quad \inf \{x_n\} = -4.$$

K1-8.17

Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \dots + \frac{\cos n}{3^n}, \quad n \in N,$$

сходится. Оценим модуль разности $x_{n+p} - x_n$:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - 1/3^p}{1 - 1/3} < \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}.$$

Пусть ε - произвольное положительное число. Поскольку $\lim (1/3^n) = 0$, для этого ε существует N такое, что для любого $n \geq N$ верно неравенство $1/3^n < \varepsilon$. Значит, если $n \geq N$, а p - произвольное натуральное число, то $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

Таким образом, условие Коши выполнено, и поэтому данная последовательность сходится.

K1-8.18

Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \in N,$$

расходится. А Оценим разность $x_{n+p} - x_n$:

$$\begin{aligned} x_{n+p} - x_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \\ &\geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}. \end{aligned}$$

Если здесь взять $p = n$, то получим

$$x_{2n} - x_n \geq n/(n+n) = 1/2, \quad n \in N.$$

Отсюда видно, что данная последовательность удовлетворяет отрицанию условия Коши. А именно, при $\varepsilon = 1/2$ для любого натурального N возьмем $n = N, m = 2N$, тогда будем иметь

$$|x_{2N} - x_N| = x_{2N} - x_N \geq 1/2.$$

Значит, данная последовательность не имеет конечного предела, т.е. расходится.

K1-8.19

Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$, $n \in N$, имеет предел, и найти его. Составим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)! \cdot (2n+1)!!}{(2n+3)!! \cdot n!} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Поскольку $(n+1)/(2n+3) < 1/2$ для любого $n \geq 1$, $x_{n+1} < x_n/2 < x_n$. Значит, данная последовательность убывающая. Очевидно, для любого $n \geq 1$ выполнены неравенства $0 < x_n \leq x_1 = 1/3$, т. е. последовательность ограничена. Отсюда следует, что она сходится.

Обозначим $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Последовательность $\{x_{n+1}\}$ является подпоследовательностью данной последовательности, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c$. Переходя теперь к пределу в равенстве $x_{n+1} = x_n \frac{n+1}{2n+3}$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

откуда $c = \frac{1}{2}c$, $c = 0$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

K1-8.20

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$, $n \in N$, имеет предел, и найти его. В примере 24, 1) пар. 7 было доказано, что данная последовательность строго возрастает. Докажем ее ограниченность. Очевидно, для любого $n \in N$

$$x_n \geq 0 \quad \text{и} \quad x_n^2 < x_{n+1}^2 = 6 + x_n,$$

т.е.

$$x_n^2 - x_n - 6 < 0$$

откуда $x_n < 3$. Таким образом, $\{x_n\}$ - ограниченная возрастающая последовательность, и, значит, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Заметим, что $c > 0$. Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$ и учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c$, получаем $c^2 = 6 + c$, откуда находим $c = 3$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

K1-8.21

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad \text{где} \quad k \in N, k \geq 2.$$

Δ Очевидно, $(1 + k/n)^n > 0$, а из неравенства

$$1 + \frac{k}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k, \quad n \in N,$$

следует, что

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn} < e^k$$

Значит, данная последовательность ограничена. Обозначим общий член последовательности через x_n и рассмотрим отношение x_{n+1}/x_n :

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(1 + k/(n+1))^{n+1}}{(1 + k/n)^n} = \left(\frac{1 + k/(n+1)}{1 + k/n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \\ &= \left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \frac{n+k}{n}. \end{aligned}$$

Так как $(n+1)(n+k) = n(n+k+1) + k$, то

$$\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)} = \frac{(n+1)(n+k) - k}{(n+1)(n+k)} = 1 - \frac{k}{(n+1)(n+k)}$$

В силу неравенства Бернулли

$$\left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{k}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} > 1 - \frac{k}{n+k} = \frac{n}{n+k}.$$

Учитывая это, получаем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \frac{n+k}{n} > \frac{n}{n+k} \frac{n+k}{n} = 1$$

т.е. $x_{n+1} > x_n$, и, значит, $\{x_n\}$ - возрастающая последовательность. Из доказанного следует, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Рассмотрим подпоследовательность $x_{pk} = ((1 + 1/p)^p)^k$ при $n = pk, p \in \mathbb{N}$. Так как $\lim_{p \rightarrow \infty} (1 + 1/p)^p = e$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{pk} = e^k$. Значит, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{p \rightarrow \infty} x_{pk} = e^k$$

K1-8.1

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, указав для каждого $\varepsilon > 0$ такое N , что для любого $n \geq N$ верно неравенство $|x_n| < \varepsilon$, если:

- 1) $x_n = 1/n$;
- 2) $x_n = a/n$ (a - произвольное данное число);
- 3) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;
- 4) $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$;
- 5) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$;
- 6) $x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$. Отметить на числовой прямой (в случае 2) взять $a = -1$) первые шесть членов этих последовательностей.

K1-8.2

Доказать, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+b}{n} = 1$, где $b \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2}$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{2+n} = -1$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$;
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$, где $p \geq 1$.

K1-8.3

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что существуют натуральные p и n_0 такие, что $y_n = x_{n+p}$ (или $y_n = x_{n-p}$) для любого $n \geq n_0$. Доказать, что последовательность y_n сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$. Иными словами, изменение (в частности, отбрасывание или добавление) конечного числа членов сходящейся последовательности оставляет ее сходящейся к тому же пределу.

K1-8.4

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, указав для каждого $\varepsilon > 0$ такое N , что для любого $n \geq N$ верно неравенство $|x_n| < \varepsilon$, если:

- 1) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$;
- 2) $x_n = \frac{2}{\sqrt{2n-1}}$;
- 3) $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}$;
- 4) $x_n = \frac{1}{\sqrt[k]{n}}, k \in \mathbb{N}$.

K1-8.5

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

K1-8.6

Доказать, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-0,5)^n = 0$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,99)^n = 0$.

K1-8.7

Доказать, что если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

K1-8.8

Доказать, что $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность, если:

- 1) $x_n = \frac{n^2-1}{n^3}$
- 2) $x_n = \frac{2n+3}{n^2}$
- 4) $x_n = \frac{2n+1}{(n+1)2^n}$;
- 5) $x_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$
- 3) $x_n = \frac{q^n}{n}, |q| \leq 1$

K1-8.9

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{|x_n|\}$ была бесконечно малой. Доказать.

K1-8.10

Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N : \quad x_n < \varepsilon$$

и такой, что: 1) она не имеет предела; 2) она имеет предел. Может ли этот предел быть равным 1?

K1-8.11

Сформулировать на языке " $\varepsilon - N$ " отрицание того, что $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность, и записать его, используя символы $\exists, \forall$.

K1-8.12

Доказать, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если:

- 1) $x_n = (-1)^n, a = -1$
- 2) $x_n = \frac{2 - \cos \pi n}{2 + \cos \pi n}, a = 3$
- 3) $x_n = \cos(\pi n/3), a = 1/2$
- 4) $x_n = 2^{(-1)^n}, a = 0$.

K1-8.13

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если:

- 1) $x_n = (-1)^n$;
- 2) $x_n = n$; 3) $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$;
- 4) $x_n = E\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$
- 5) $x_n = \sin n$
- 6) $x_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$.

K1-8.14

Последовательность $\{x_n\}$ расходится, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что существуют натуральные p и n_0 такие, что $y_n = x_{n+p}$ (или $y_n = x_{n-p}$) для любого $n \geq n_0$. Доказать, что последовательность $\{y_n\}$ расходится. Иными словами, изменение (в частности, добавление или отбрасывание) конечного числа членов расходящейся последовательности оставляет ее расходящейся.

K1-8.15

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если:

- 1) $x_n = (-1)^n n$;
- 2) $x_n = n^{(-1)^n}$;
- 3) $x_n = \frac{n^2 - 2n}{n+1}$
- 4) $x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{4}$
- 5) $x_n = (0, 5)^{((-1)^n - 1)n}$.

K1-8.16

Привести пример такой последовательности $\{x_n\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и из двух последовательностей $\{\text{sign } x_n\}$, $\{(\text{sign } x_n)^2\}$: 1) обе сходятся; 2) обе расходятся; 3) первая расходится, а вторая сходится.

K1-8.17

1) Последовательность $\{x_n\}$ сходится, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Доказать, что сходится и последовательность $\{|x_n|\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$. 2) Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, для которой последовательность $\{|x_n|\}$ сходится.

K1-8.18

У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательности $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ имеют один и тот же предел. Доказать, что и сама последовательность сходится к этому пределу.

K1-8.19

Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = b, a \neq b$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится.

K1-8.22

Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одно и то же множество значений и таких, что:

- 1) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, но $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 2) $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится.

K1-8.23

Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Множества значений этих последовательностей совпадают. Доказать, что эти множества конечны.

K1-8.24

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, m_n = \inf_{k \geq n} \{x_k\}, M_n = \sup_{k \geq n} \{x_k\}, n \in N$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = x$.

K1-8.25

Доказать, что если $x_n \geq 0, n \in N, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{a}, p \in N$.

K1-8.26

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если:

- 1) $x_n = \sqrt{9 + \frac{1}{n}}$;
- 2) $x_n = \left(8 - \frac{1}{n^2}\right)^{-1/3}$;
- 3) $x_n = \sqrt[3]{\frac{n+0,25}{8n+1}}$
- 4) $x_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$;
- 6) $x_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$ 7) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n+n}}$; 8) $x_n = \sqrt{n^2-1} - n - 1$ 9) $x_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$

10)

$$x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n$$

11)

$$x_n = \frac{n}{2} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right).$$

K1-8.34

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если:

- 1) $x_n = \frac{9+n/(n+1)}{2+1/n}$
- 2) $x_n = \frac{3+0,5^n}{0,3^{n+1}+5}$
- 3) $x_n = \frac{n}{3n+2}$
- 4) $x_n = \frac{2-n}{n+1} + \frac{n \cdot 2^{-n}}{n+2}$
- 5) $x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^5$
- 6) $x_n = \frac{n^3+27}{n^4-15}$ 7) $x_n = \frac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}$ 8) $x_n = \frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1}$ 9) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}/n}{1/n^2 - (-1)^n}$;

10)

$$x_n = \frac{3n}{5+3^{n+1}};$$

11)

$$x_n = \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}.$$

K1-8.35

Известно, что $x_n \neq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, если:

- 1) $y_n = \frac{2x_n-1}{x_n-2}$
- 2) $y_n = \frac{x_n-1}{x_n^2-1}$
- 3) $y_n = \frac{x_n^2+x_n-2}{x_n-1}$;
- 4) $y_n = \frac{x_n^2-3x_n+2}{x_n^2-1}$.

K1-8.36

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если:

- 1) $x_n = \frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}$
- 2) $x_n = \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}$
- 3) $x_n = \frac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}$
- 4) $x_n = \frac{(-1)^n \cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 6^{n+1}}$
- 5) $x_n = \frac{a^n}{1+a^n}, a \neq -1;$
- 6) $x_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ 7) $x_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}, a \neq 0$

K1-8.37

Верно ли, что: 1) если $a_n^2 \rightarrow a^2$, то $a_n \rightarrow a$ 2) если $a_n^3 \rightarrow a^3$, то $a_n \rightarrow a$?

K1-8.38

Последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел a . На координатной плоскости проведены прямые AA_n через точки $A(a; a^2)$ и $A_n(x_n; x_n^2), n \in N$. Пусть a_n - абсцисса точки пересечения прямой AA_n с осью Ox . Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

K1-8.39

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2}$
- 2) $\frac{(n^2+3n+4)^3 - (n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3 - (n^2+5n-6)^3}$
- 3) $\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}$
- 4) $n - \frac{3}{3/n - 3/n^2 + 1/n^3}$
- 5) $\frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$
- 6) $\frac{\lg^2 10n}{\lg^2 n}$ 7) $\frac{\ln(n^2 - n + 1)}{\ln(n^{10} + n + 1)}$ 8) $\frac{\lg(n^2 + 2n \cos n + 1)}{1 + \lg(n+1)}; 9) n^2 \left(\left(1 + \frac{p}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{q}{n}\right)^p \right)$, где $p, q \in N$.

K1-8.40

Пусть a_n - общий член, а S_n - сумма первых n членов арифметической прогрессии с разностью $d \neq 0$.
Найти:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n^2} (a_n \neq 0)$

K1-8.41

Пусть $|q| < 1, S_n = \sum_{k=0}^n aq^k$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

K1-8.42

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если:

- 1) $x_n = 0, \underbrace{11 \dots 1}_n;$
- 2) $x_1 = 0, 4, x_2 = 0, 45, x_3 = 0, 454, x_4 = 0, 4545, x_5 = 0, 45454, \dots, \dots, x_{2k} = 0, 4545 \dots 45, \dots;$
- 3) $x_1 = 0, 2, x_2 = 0, 23, x_3 = 0, 234, x_4 = 0, 2342, x_5 = 0, 23423, x_6 = 0, 234234, \dots$

K1-8.43

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

K1-8.44

Найти:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \right)$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$.

K1-8.45Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$;
- 2) $\frac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2}$;
- 3) $\frac{3}{1-\sqrt[n]{8}} - \frac{5}{1-\sqrt[n]{32}}$
- 4) $\frac{\sqrt[n]{a^m}-1}{\sqrt[n]{a^k}-1}$, $a > 1, k, m \in N$.

K1-8.46Привести примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ и:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ не существует.

K1-8.47Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$. Следует ли отсюда, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$; 2) хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ стремится к нулю?

K1-8.47Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$. Следует ли отсюда, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$; 2) хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ стремится к нулю?

K1-8.48Привести примеры расходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, для которых сходится последовательность:

- 1) $\{x_n + y_n\}$
- 2) $\{x_n y_n\}$
- 3) $\{x_n / y_n\}$.

K1-8.49Последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Доказать, что при $b \neq 0$ последовательность $\{ax_n + by_n\}$ расходится.**K1-8.50**Последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, x \neq 0$, последовательность $\{y_n\}$ расходится. Доказать, что последовательность $\{x_n y_n\}$ не сходится.**K1-8.51**Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\{x_n\}$ сходится, $\{y_n\}$ расходится, а $\{x_n y_n\}$ сходится.**K1-8.52**Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, x_n \neq 0, n \in N$. 1) Существует ли $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$? 2) Доказать, что если этот предел существует и равен q , то $|q| \leq 1$. 3) Может ли последовательность $\{x_{n+1}/x_n\}$ быть неограниченной?

K1-8.53

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$
- 2) $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$
- 3) $\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}$;
- 4) $\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 2002} - n$
- 5) $n^{3/2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$
- 6) $\frac{n^3}{3} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} - 1 \right)$.

K1-8.54

При каких a последовательность

$$x_n = \sqrt{an^2 + bn + 2} - n, \quad n \in N,$$

имеет предел? Чему равен этот предел?

K1-8.55

Найти:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n+a_1)(n+a_2)} - n \right)$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)} - n \right)$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2) \dots (n+a_p)} - n \right), p \in N$.

K1-8.56

Пусть $x_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha, n \in N$. Доказать, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ при $0 < \alpha < 1$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ при $\alpha > 1$.

K1-8.57

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}$
- 2) $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$;
- 3) $\frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$
- 4) $\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n-1}$
- 5) $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$
- 6) $\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}$ 7) $\frac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$.

K1-8.58

Найти:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2002}{n} \right)^n$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{n} \right)^n$ (a - произвольное число);
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n^2} \right)^n$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+10}{2n-1} \right)^n$.

K1-8.59

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$.

K1-8.60

Пусть $0 < a \leq 1$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

K1-8.61

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[3n]{8}$;

2) $\sqrt[2n]{0,5}$; 3) $\sqrt[n^2]{6}$

4) $\frac{\sqrt[n]{10}-2}{1+\sqrt[n]{0,01}}$

5) $\sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$

6) $\sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$ 7) $\sqrt[n]{\frac{2n+5}{n-0,5}}$ 8) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$ 9) $\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1}$

10)

$$\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$$

11)

$$4^{(n+2)/(n+1)}$$

12)

$$(1+11^n)^{1/(n+2)}$$

13)

$$a^{1/(n+p)}, \text{ где } a > 0, p > 0.$$

K1-8.62

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

1) $\sqrt[n]{n^2}$;

2) $\sqrt[n]{5n}$; 3) $\sqrt[2n]{2n}$

4) $\sqrt[4n]{n}$

5) $\sqrt[n^2]{n}$

6) $\sqrt[n]{n+3}$ 7) $\frac{1+\sqrt[n]{2}}{1+\sqrt[n]{2n}}$; 8) $\frac{\sqrt[n]{n^3}+\sqrt[n]{7}}{3\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{3n}}$ 9) $\sqrt[n]{3n-2}$

10)

$$\sqrt[n]{n^3+3n}$$

11)

$$\sqrt[n]{\frac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}.$$

K1-8.63

Доказать, что:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$, где $|q| < 1$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5^n} = 0$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, где $|a| > 1, k$ - натуральное число.

K1-8.64

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\frac{n^3 + 3^n}{n + 3^{n+1}}$
- 2) $\frac{n^{10} - 1}{1 + n1,1^n}$
- 3) $\sqrt[n]{3^n + n \cdot 2^n}$
- 4) $\sqrt[n]{\frac{n^2 + 4^n}{n + 5^n}}$
- 5) $\sqrt[n]{\frac{10}{n} - \frac{1}{1,26n}}$.

K1-8.65

Пусть $0 < a < 1$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

K1-8.66

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\frac{n \lg n}{n^2 - 1}$;
- 2) $\frac{5n + \lg n}{n - 3,5}$
- 3) $\frac{\log_2(n+3)}{n - 1,3}$
- 4) $\frac{\log_5(n^2 + 1)}{n}$
- 5) $\frac{n - \lg n}{\log_2(4^n + 1)}$.

K1-8.67

Доказать, что для любого a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n'} = 0$.

K1-8.68

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\frac{(-2)^n}{(n+2)^1}$
- 2) $\frac{1}{(0,3)^n n'}$; 3) $\frac{n3^n + 1}{n' + 1}$;
- 4) $\frac{4^n + n^2 2^n - 1}{n^4 + (n')^2}$
- 5) $\frac{10^n + n'}{2^n + (n+1)'}.$
- 6) $\frac{(-3)^{n^2 - n}}{(n^3)^1}$ 7) $\frac{2^{n/2} + (n+1)'}{n(3^n + n')}$.

K1-8.69

Привести пример такой последовательности $\{x_n\}$, что:

- 1) $x_n > -1$ для любого $n \in N$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$;
- 2) $x_n < 2$ для любого $n \in N$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$;
- 3) $x_n > 100$ для $n = 1, 2, \dots, 100$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5$ и для любого N найдутся $n \geq N$ и $m \geq N$ такие, что $x_n < 5$, а $x_m > 5$.

K1-8.70

Привести пример таких последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что:

- 1) $x_n < y_n$ для любого $n \in N$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_n$;
- 2) $x_n > y_n$ для $n = 1, 2, \dots, 1000$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
- 3) $x_n/y_n \geq 1000$ для любого $n \in N$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

K1-8.71

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\frac{n'}{n^n}$
- 2) $\frac{n \sin n'}{n\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$
- 3) $\frac{n \operatorname{arctg} n}{n^2 - 2}$
- 4) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (-1)^k k$

$$5) \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{(n-1)/(n+1)} \quad 6) \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(1-\sqrt{n})/(1-n)} \quad 7) \left(\frac{2n-1}{5n+1}\right)^{n^2} \quad 8) \left(\frac{3n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n^3/(1-n)}; 9) \frac{1}{\sqrt[n]{n^1}}$$

K1-8.72

Пусть $a_n \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = q$, где $q > 1$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

K1-8.73

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)(1+a^n)}$, $a > 0$.

K1-8.74

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно.

- 1) $\sqrt[n]{3^n - 2^n}$
- 2) $\sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^3-2}}$
- 3) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a > 0, b > 0$

K1-8.75

Найти:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

K1-8.76

Доказать, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/\sqrt{n}} = 1$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/\sqrt{n}} = 1, a > 0$.

K1-8.77

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\sqrt[3]{n}$
- 2) $n^{p/n^k}, p, k \in N$;
- 3) $\sqrt[n]{n+a}$
- 4) $\sqrt[n]{an+b}$
- 5) $\sqrt[n]{n^3-3n+1}$; 6) $\sqrt[2n]{n^2-1}$ 7) $\sqrt[n]{2n^2+2n-1}$ 8) $\sqrt[n]{\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}}$ 9) $\frac{\sqrt[n]{n^4+2} \sqrt[n]{n^2-3}}{\sqrt[n]{n^2-3} \sqrt[n]{n+2}}$

10)

$$\sqrt[3n]{\frac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$$

11)

$$\sqrt[n^2]{\frac{n-1}{n+1}} + \sqrt[n]{3n^3+2}.$$

K1-8.78

Доказать, что если для любого $n \in N$

$$0 < a/n^k \leq x_n \leq bn^p, \quad k, p \in N,$$

То

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$$

K1-8.79

Доказать, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - 0,5n) = -\infty$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n = \infty$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$, где $|a| > 1$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n-100} = +\infty$;
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/p} = +\infty$, где $p \in \mathbb{N}$; 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lg n = +\infty$; 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n = +\infty$, где $a > 1$; 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n = -\infty$, где $0 < a < 1$.

K1-8.80Доказать, что для того, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$.**K1-8.81**Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$) и для всех n , начиная с некоторого, $x_n \geq cy_n$ (соответственно $x_n \leq cy_n$), где $c > 0$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (соответственно $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).**K1-8.82**Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ и для всех n , начиная с некоторого, $|x_n| \geq cy_n$, где $c > 0$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.**K1-8.83**

Доказать, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = +\infty$, где $p \geq 1$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-5)^5 = +\infty$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lg n)^3 = +\infty$;
- 5) $\lim (\log_a n)^p = +\infty$, где $a > 1, p \geq 1$;

Дальше забил на выгрузки

(там еще на самом деле много задач, но думаю, что основные я уже выгрузил, нужно будет - еще добавлю, пока не думаю, что нужно.)

K1-8.175Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если x_n равно:

- 1) $\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^n$
- 2) $\left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$
- 3) $\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$
- 4) $\left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$
- 5) $\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$.

K1-8.176Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$:

- 1) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e^{1-1/n}$
- 2) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

K1-8.177

Найти:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_a(n+1) - \log_a n}, a > 0, a \neq 1$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

K1-8.178

Доказать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{e}$.

K1-8.207

Доказать, что разность $e - S_n, n \in \mathbb{N}$ (S_n из задачи 206), убывает с ростом n быстрее, чем разность $e - (1 + 1/n)^n$.

K1-8.208

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) = \frac{1}{e}$.

K1-8.209

Доказать, что число иррационально.

K1-8.210

Пусть $\sigma_n = 3 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}, n \in \mathbb{N}$. Доказать, что:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = e$; 2) разность $\sigma_n - e$ убывает быстрее, чем разность $e - S_n$, где S_n из задачи 206.

K1-8.211

Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$e < (1 + 1/n)^n (1 + 1/(2n)).$$

K1-8.212

Последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_1 = a, x_{n+1} = qx_n + d, n \in \mathbb{N}$, называют арифметико-геометрической прогрессией со знаменателем q и разностью d . Доказать, что: 1) при $|q| < 1$ эта последовательность сходится, и найти ее предел; 2) при $|q| > 1$ и $a \neq d/(1 - q)$ эта последовательность расходится.

K1-8.213

Пусть $\{x_n\}$ - арифметико-геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 1$ и разностью d (см. задачу 212), $S_n = x_1 + \dots + x_n, n \in \mathbb{N}$. Найти:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - nx_n)$

Найдите $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{4}{\sqrt[n]{x+3}}\right)^{2n} dx$. Если в ответе получится десятичная дробь, то запишите ее в формате 1.23 или -1.23

20.1.2 Interesting tasks about limits (???)

(тут крутые задачи!! источник утерян, но не важно, потом подумаю пр эти задачи!!!!)

ФР-?

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2 + x_n}.$$

ФР-?

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}.$$

ФР-?

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = 1 - x_n^2 + x_n^3.$$

20.1.3 Problems about the limits of the form $\infty - \infty$ **20.2 Problems about evaluation of sums****20.2.1 Problems about elementary summation****K1-4.пр.1**

Найти суммы:

$$1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)};$$

2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. 1) Так как $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то по формуле (1) находим $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ 3) Используя равенство

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

и формулу (1), получаем $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$.

K1-4.пр.2

Найти сумму $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. А Рассмотрим тождество

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

Полагая в этом тождестве $x = 1, 2, \dots, n$ и складывая почленно получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

то, используя формулу (1), получаем

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

откуда

$$S_n = \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Итак,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Замечание. В §2 (пример 4) равенство (7) было доказано методом индукции.

Найти $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$.

Рассмотрим равенство

$$S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^n 2 \sin kx \sin \frac{x}{2}$$

Так как

$$2 \sin kx \sin \frac{x}{2} = \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x$$

то по формуле (1) находим

$$S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x = 2 \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x$$

откуда

$$S_n(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}, \quad \text{если} \quad \sin \frac{x}{2} \neq 0;$$

если $\sin(x/2) = 0$, то $S_n(x) = 0$. При мер

К1-4.пр.4

Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = ax_{n-1} + b$. Выразить через x_1, a, b и n :

1) x_n

2) $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$. 1) Так как $x_k = ax_{k-1} + b, x_{k-1} = ax_{k-2} + b$, то

$$x_k - x_{k-1} = a(x_{k-1} - x_{k-2}) = a^2(x_{k-2} - x_{k-3}) = \dots = a^{k-2}(x_2 - x_1),$$

т.е.

$$x_k - x_{k-1} = a^{k-2}(x_2 - x_1).$$

Полагая в этой формуле $k = 2, 3, \dots, n$ и складывая получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1}) = (x_2 - x_1) \sum_{k=2}^n a^{k-2}$$

или

$$x_n - x_1 = (x_2 - x_1) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} = ((a - 1)x_1 + b) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}$$

откуда

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}, \quad a \neq 1.$$

При $a = 1$ последовательность $\{x_n\}$ является арифметической прогрессией с разностью b , и поэтому

$$x_n = x_1 + (n - 1)b.$$

$$2) S_n = x_1 + \sum_{k=2}^n x_k = x_1 + a \sum_{k=2}^n x_{k-1} + (n - 1)b$$

$$S_n = x_1 + a(S_n - x_n) + (n - 1)b$$

$$S_n(1 - a) = x_1 - ax_n + (n - 1)b = x_1 - a^n x_1 - ab \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} + (n - 1)b \text{ откуда}$$

$$S_n = \frac{(n - 1)b}{1 - a} + \frac{ab}{(a - 1)^2} (a^{n-1} - 1) + \frac{a^n - 1}{a - 1} x_1, \quad a \neq 1$$

К1-4.пр.5

Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой

$$x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha\beta x_{n-2},$$

где $\alpha\beta \neq 0$. Выразить x_n через x_0, x_1, α, β и n . А Исходное равенство можно записать так:

$$x_n - \alpha x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha x_{n-2}).$$

Обозначим $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$, тогда $y_n = \beta y_{n-1}$, откуда $y_n = \beta^{n-1} y_1$, т. е. $x_n - \alpha x_{n-1} = \beta^{n-1} y_1$, или

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta^{n-1} y_1.$$

Полагая $x_n = \beta^n z_n$, получаем

$$z_n = \frac{\alpha}{\beta} z_{n-1} + \frac{y_1}{\beta}.$$

Считая $\alpha \neq \beta$ и используя результат предыдущего примера, находим

$$z_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} z_1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \cdot \frac{y_1}{\beta}$$

где $z_1 = x_1/\beta, y_1 = x_1 - \alpha x_0$. Отсюда получаем

$$x_n = x_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \alpha\beta x_0 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Если $\alpha = \beta$, то $x_n = n\alpha^{n-1}x_1 - x_0(n-1)\alpha^n$

К1-4.пр.6 Найти $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$

Рассмотрим тождество $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Приравнявая в этом тождестве коэффициенты при x^n и используя формулу (4), получаем

$$C_n^0 C_n^0 + C_n^{n-1} C_n^1 + \dots + C_n^{n-k} C_n^k + \dots + C_n^0 C_n^n = C_{2n}^n$$

Это равенство в силу (3) можно записать в виде $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

К1-4.пр.7

Найти сумму $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}$. А Используя равенства

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-k)}{(n+1)(k+1)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

получаем

$$\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

К1-4.пр.8 Доказать неравенство Коши-Буняковского

Если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то в (6) имеет место равенство. Пусть хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ отлично от нуля, тогда $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен относительно x

$$ax^2 + 2bx + c = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2$$

где

$$a = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^n b_k^2$$

Если $\alpha = \beta$, то $x_n = n\alpha^{n-1}x_1 - x_0(n-1)\alpha^n$

K1-4.пр.6

Найти сумму $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$. Рассмотрим тождество $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Приравнявая в этом тождестве коэффициенты при x^n и используя формулу (4), получаем

$$C_n^n C_n^0 + C_n^{n-1} C_n^1 + \dots + C_n^{n-k} C_n^k + \dots + C_n^0 C_n^n = C_{2n}^n$$

Это равенство в силу (3) можно записать в виде $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

K1-4.пр.7

Найти сумму $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}$.

Используя равенства

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n+1-k)}{(n+1)(k+1)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

получаем

$$\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

Пример

K1-4.пр.8

Доказать неравенство Коши-Буняковского (6). Если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то в (6) имеет место равенство. Пусть хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ отлично от нуля, тогда $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен относительно x

$$ax^2 + 2bx + c = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2$$

где

$$a = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^n b_k^2$$

Так как $(a_k x + b_k)^2 \geq 0, x \in R (k = 1, 2, \dots, n)$, то дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + 2bx + c$ неположителен: $b^2 \leq ac$. Следовательно,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Выясним, в каком случае в (6) имеет место равенство. Пусть $b^2 = ac$. Тогда если $a = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то, положив $\alpha = 1, \beta = 0$ ($a^2 + \beta^2 \neq 0$), получим

$$\alpha a_k + \beta b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $a \neq 0$, тогда квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ имеет корень x_0 (так как дискриминант трехчлена равен нулю), т. е.

$$ax_0^2 + 2bx_0 + c = \sum_{k=1}^n (a_k x_0 + b_k)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $a_k x_0 + b_k = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Положив $\alpha = x_0, \beta = 1$, получаем $\alpha a_k + \beta b_k = 0$, где $a^2 + \beta^2 \neq 0 (k = 1, 2, \dots, n)$.

Легко проверить, что при выполнении условий $\alpha a_k + \beta b_k = 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ соотношение (6) превращается в равенство.

K1-4.1

Доказать, что если положительные числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

также являются последовательными членами арифметической прогрессии. р

K1-4.2

Доказать, что если положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$. р

K1-4.3

Пусть S_n - сумма первых n членов арифметической прогрессии. Доказать, что:

- 1) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$
- 2) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$. р

K1-4.4

Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией, то при любом $n \geq 3$ и любом $k \in N$ справедливо равенство

$$a_1^k - C_n^1 a_2^k + C_n^2 a_3^k - \dots + (-1)^n C_n^n a_{n+1}^k = 0.$$

р

K1-4.5

Пусть S_n - сумма первых n членов геометрической прогрессии. Доказать, что $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$. р

K1-4.6

Доказать, что для любого числа a и для любого $n \in N$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})(1 + a + a^2 + \dots + a^{n+1}) = \\ = (1 + a + a^2 + \dots + a^n)^2 - a^n. \end{aligned}$$

р

K1-4.7

Найти следующие суммы:

- 1) $1 + 11 + 111 + \dots + 11\dots1$ (последнее слагаемое - n -значное число);
- 2) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$;
- 3) $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n$
- 4) $x^n + 2x^{n-1} + \dots + (n-1)x^2 + nx$.

р

K1-4.8

Доказать, что последовательность $\{b_n\}$ отличных от нуля чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда при каждом $n \geq 3$ выполняется равенство $(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n-1}^2)(b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2) = (b_1 b_2 + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n)^2$. р

K1-4.9

Найти двойную сумму $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$, если:

- 1) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$
- 2) $a_{ij} = i$
- 3) $a_{ij} = i - j$;
- 4) $a_{ij} = |i - j|$.

K1-4.10

Доказать, что для любых чисел a и b справедливы равенства:

- 1) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k}$
- 2) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b^k a^{2n-k}$.

K1-4.11

Доказать тождество Лагранжа

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

K1-4.12

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - заданные последовательности чисел. Доказать: 1) если $B_m = \sum_{j=1}^m b_j$, то при любом $n \in N$ справедливо равенство (преобразование Абеля)

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

а при любом $n \in N$ и при любом $p \in N$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n$$

- 2) если $D_s = \sum_{j=n+1}^{n+s} b_j$, то для любого $p \in N$ выполняется равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j} - a_{n+j+1}) D_j + a_{n+p} D_p$$

K1-4.13

Найти сумму:

- 1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$
- 3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$;
- 4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$
- 5) $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$.

K1-4.14

Пусть $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля. Доказать, что справедливо равенство:

- 1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right);$
- 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \right);$
- 3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3d} \left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}} \right).$

K1-4.15

Пусть $S_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p$, $p \in \mathbb{N} : 1$) доказать формулу $\sum_{p=1}^m C_{m+1}^p S_n(p) = (n+1)^{m+1} - (n+1)$; 2) вычислить по этой формуле $S_n(3)$, пользуясь тем, что

$$S_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

K1-4.16

Доказать равенство:

- 1) $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = C_{2n+1}^3$
- 2) $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$
- 3) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$
- 4) $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$
- 5) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
- 6) $\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ 7) $\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

K1-4.17

Доказать равенство:

- 1) $\sum_{k=0}^n \cos(x + ka) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right) \cos\left(x + \frac{n}{2}a\right)}{\sin \frac{a}{2}}, a \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$
- 2) $\sum_{k=0}^n \sin(x + k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \sin\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

K1-4.18

Найти сумму:

- 1) $\sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x$
- 2) $\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x$
- 3) $\sum_{k=1}^n \sin^2 kx$
- 4) $\sum_{k=1}^n \cos^2 kx$
- 5) $\sum_{k=1}^n \sin^3 kx$
- 6) $\sum_{k=1}^n \cos^3 kx.$

K1-4.19

Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$. Выразить x_n через x_0, x_1 и n , если:

- 1) $a = 2, \quad b = 3;$
- 2) $a = 3, b = -2;$
- 3) $a = \alpha, \quad b = 1 - \alpha, \quad \alpha \neq 2.$

K1-4.20

Написать формулу бинома Ньютона:

- 1) $(1+x)^5;$
- 2) $(a+b)^6$
- 3) $(x+y)^7$
- 4) $(a-b)^8.$

K1-4.21

Найти член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3 .

K1-4.22

Найти коэффициент многочлена:

- 1) $(1-x+x^2)^3$ при x^3 ;
- 2) $(1+2x-3x^2)^4$ при x^3 и x^4 ;
- 3) $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8 ;
- 4) $(1+x^2+x^3)^7$ при x^{11}
- 5) $\sum_{k=3}^{15} (1+x)^k$ при x^3 .

K1-4.23

Найти сумму:

- 1) $\sum_{k=1}^n (k+1)C_n^k$
- 2) $\sum_{k=1}^n (k-1)C_n^k$
- 3) $\sum_{k=1}^n C_{2n}^{2k}$
- 4) $\sum_{k=1}^n C_{2n}^{2k-1}$
- 5) $\sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k, \quad m < n$
- 6) $\sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2$

K1-4.24

Доказать равенство:

- 1) $\sum_{k=1}^n kC_n^k = n2^{n-1}$
- 2) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} kC_n^k = 0$
- 3) $\sum_{k=0}^s C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s$
- 4) $\sum_{k=0}^m C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1};$
- 5) $\sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}C_n^k}{k+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$
- 6) $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}C_n^k}{k+1} = \frac{n}{n+1}.$

K1-4.25

Найти члены разложения, являющиеся целыми числами:

- 1) $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^5$,
- 2) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^8$.

K1-4.26

Найти наибольший коэффициент многочлена:

- 1) $(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x)^4$
- 2) $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x)^{10}$.

K1-4.27

Найти наибольший член разложения $(1 + \sqrt{2})^{30}$.

K1-4.28

Доказать формулу:

- 1) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$;
- 2) $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$
- 3) $(a + b + c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 12(a^2bc + b^2ac + c^2ab)$

K1-4.29

Доказать формулу

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_p = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p},$$

где суммирование ведется по всем целым неотрицательным $k_1, k_2, \dots, k_p$ таким, что $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$.

K1-4.30

Доказать, что для любого натурального $n \geq 2$ справедливо неравенство:

- 1) $2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3$
- 2) $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$
- 3) $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$.

K1-4.31

Доказать неравенство $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} > 1$

K1-4.32

Пусть $a > 0$, $n \in N$, $k \in N$, $k \leq n$. Доказать, что $(1 + a)^n > 1 + C_n^k a^k$

K1-4.33

Доказать, что если $x > 0$, то справедливы неравенства

$$1 + \frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

K1-4.34

Доказать, что если $|x| < 1$ и $n \in N$, $n \geq 2$, то

$$(1 - x)^n + (1 + x)^n < 2^n$$

K1-4.35

Пусть $a > 0$, $n \in N$. Доказать, что

$$a + a^2 + \dots + a^{2n-1} \leq n(1 + a^{2n}) - a^n$$

K1-4.36

Пусть $a > 0$, $n \in N, m \in N, m \leq n$. Доказать, что

$$a^m + \frac{1}{a^m} \leq a^n + \frac{1}{a^n}.$$

(и там еще много задач, я просто забил выгружать, итак есть, чем заняться.)

20.2.2 Typical Amount Tasks (!???)

(потом очень хорошо это отработаю, пока познакомился - и хорошо.)

Найти $\sum \frac{1}{n^2}$

(!!!! тут многие разные методы укажу, важное очень дополнение!! её важно уметь каждому математику решать разными способами!!)

МУ вычислить $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

Почленно интегрируя, имеем

$$\int_0^x f(x) dx = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \cdot x$$

Далее дифференцируем:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

[Этот результат можно было получить и непосредственно из биномиального ряда (2.11).]

МУ вычислить $f(x) = -\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \frac{x^3}{4 \cdot 5} + \dots$

$$x^2 f(x) = \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots$$

Дважды дифференцируя, находим

$$(x^2 f)'' = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Константы интегрирования в этой процедуре нужно вычислять, рассматривая ряд при определенных значениях x ; например, при $x = 0$ ряд (2.24) дает $f(0) = 1/2$.

Пример.

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + \dots = \\ &= \operatorname{Re} (1 + a \exp(i\theta) + a^2 \exp(2i\theta) + \dots) . \end{aligned}$$

Это простая геометрическая прогрессия; следовательно,

$$f(\theta) = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - a \exp(i\theta)} = \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}.$$

Пример.

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$$

Определим

$$f(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots$$

Тогда $S = f(1)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots = x \exp(x) \\ f(x) &= \int_0^x x \exp(x) dx = x \exp(x) - \exp(x) + 1 \\ S &= f(1) = 1 \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} S &= 1 + m + \frac{m(m-1)}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} + \dots = \\ &= \sum_n \frac{m!}{n!(m-n)!}. \end{aligned}$$

Положим $f(x) = \sum_n \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n$, $S = f(1)$. Но $f(x) = (1+x)^m$, поэтому $S = 2^m$.

Теперь рассмотрим на первый взгляд очень простой случай [ср. с (2.2)]

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \zeta(2).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = ?$$

Solution by The Feynman Technique (YouTube)

To achieve this, we utilize the given integral representation of a function $f(x)$ on the interval $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \sin(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right).$$

Step 1: Setting $f(x) = \cosh(x)$ Let us define the function $f(x) = \cosh(x)$. Substituting into the given formula, we have:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x) \cos(nx) dx + \sin(nx) \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x) \sin(nx) dx \right).$$

Since $\cosh(x)$ is an even function, the integral simplifies to:

$$I_0 = 2 \int_0^{\pi} \cosh(x) dx = 2[\sinh(x)]_0^{\pi} = 2 \sinh(\pi)$$

Since $\cosh(x)$ is an even function, the integral simplifies to:

$$I_0 = 2 \int_0^{\pi} \cosh(x) dx = 2[\sinh(x)]_0^{\pi} = 2 \sinh(\pi)$$

2.3. Integral of $\cosh(x) \sin(nx)$ over $[-\pi, \pi]$

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x) \sin(nx) dx.$$

Since $\cosh(x)$ is even and $\sin(nx)$ is odd, their product is odd. Therefore, the integral over the symmetric interval $[-\pi, \pi]$ is zero:

$$J_n = 0.$$

Step 3: Simplifying the Expression for $\cosh(x)$ Substituting the evaluated integrals back into the expression for $\cosh(x)$, we get:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \sinh(\pi) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(nx) \cdot I_n + \sin(nx) \cdot 0),$$

which simplifies to:

$$\cosh(x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(nx)$$

Step 4: Evaluating I_n

$$I_n = 2 \int_0^{\pi} \cosh(x) \cos(nx) dx = \frac{e^{-\pi((e^{2\pi}+1)n \sin(\pi n) + (e^{2\pi}-1) \cos(\pi n))}}{n^2 + 1}$$

(by IBP 2 times)

$$\cosh(\pi) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi)}{n^2 + 1}$$

Noting that $\cos(n\pi) = (-1)^n$, the equation simplifies to:

$$\cosh(\pi) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Step 7: Solving for the Series S Rearranging the equation to solve for S :

$$\cosh(\pi) - \frac{\sinh(\pi)}{\pi} = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} S.$$

Dividing both sides by $\frac{2 \sinh(\pi)}{\pi}$:

$$S = \frac{\pi}{2 \sinh(\pi)} \left(\cosh(\pi) - \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \right).$$

Simplifying the expression:

Simplifying the expression:

$$S = \frac{\pi \cosh(\pi) - \sinh(\pi)}{2 \sinh(\pi)}.$$

Utilizing the identity $\coth(\pi) = \frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)}$, we can rewrite the expression as:

$$S = \frac{\pi \coth(\pi) - 1}{2}$$

Therefore, we have:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} (\pi \coth \pi - 1)$$

(???? how to guess about it????)

https://www.youtube.com/watch?v=wiBFV0Fz0S4&ab_channel=TheFeynmanTechnique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = ?$$

Solution by The Feynman Technique (YouTube)

1. Starting with the Given Formula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \sin(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right]$$

2. Setting $f(x) = \cosh(ax)$

$$\begin{aligned}\cosh(ax) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(ax) dx \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(ax) \cos(nx) dx + \sin(nx) \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(ax) \sin(nx) dx \right] \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(ax) \sin(nx) dx &= 0\end{aligned}$$

c. Computing the Integral Involving $\cos(nx)$

The integral involving $\cos(nx)$ is evaluated using integration by parts twice, resulting in:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(ax) \cos(nx) dx &= \frac{2a(-1)^n \sinh(a\pi)}{a^2 + n^2} \\ \cosh(ax) &= \frac{\sinh(a\pi)}{\pi a} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \cdot \frac{2a(-1)^n \sinh(a\pi)}{a^2 + n^2} \\ &= \frac{\sinh(a\pi)}{\pi a} + \frac{2a \sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{a^2 + n^2}\end{aligned}$$

5. Evaluating the Series at $x = \pi$

Since $\cos(n\pi) = (-1)^n$, substitute $x = \pi$:

$$\cosh(a\pi) = \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} + \frac{2a \sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{a^2 + n^2}$$

Thus, the integral expression is:

$$\begin{aligned}\cosh(a\pi) &= \frac{\sinh(a\pi)}{\pi a} + \frac{2a \sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} \\ S &= \left(\cosh(a\pi) - \frac{\sinh(a\pi)}{\pi a} \right) \cdot \frac{\pi}{2a \sinh(a\pi)}\end{aligned}$$

Simplify the numerator:

$$\cosh(a\pi) - \frac{\sinh(a\pi)}{\pi a} = \frac{\pi a \cosh(a\pi) - \sinh(a\pi)}{\pi a}$$

Thus, the sum S is:

$$S = \frac{\pi a \cosh(a\pi) - \sinh(a\pi)}{2a^2 \sinh(a\pi)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n} = ?$$

Solution by The Feynman Technique (YouTube)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \sin(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right].$$

Next, we substitute $f(x) = x$, leading to:

$$x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx + \sin(nx) \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \right].$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}$$

$$x = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}$$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$$

To find the value of the sum $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$, we set $x = 1$

$$1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(n)}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n} = -\frac{1}{2}$$

20.2.3 Tasks for calculating special amounts

cond-matt. Prove that $\sum_n \frac{e^{in\vartheta}}{n+M} = \frac{2\pi i e^{-i(M)\vartheta}}{1-e^{-2\pi i(M)\vartheta}}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi] \text{ (????)}$

Solution

(была идея сказать, что у нас ряд фурье и найти функцию, которой он соответствует, но что-то не прокатило, почему - даже не знаю пока)

Мое доказательство пока просто за счет смотра на графики:

```
1 zz = 2.4
2 Plot[Re[E^(-I th) (-HurwitzLerchPhi[E^(-I th), 1, 1 - zz] +
3   E^(I th) HurwitzLerchPhi[E^(I th), 1, zz])], {th, 0, Pi}]
4 Plot[Re[2 Pi I Exp[-I zz th]/(1 - Exp[-2 Pi I zz])], {th, 0, Pi}]
```

Michael-Penn. Find $S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(n^2 + n + 1)$

Solution

(!?! в 1ю часть вобью этот метод, максимально куртой!)

Используем формулу $\operatorname{arctg}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, а далее в обратную сторону формулу $\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{(n+1)-1}{1+n(n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\arctan(n+1) - \arctan(n))$$

Далее переписываем это через предел от разности конечных сумм, меняем в одной индексы суммирования, в итоге у нас под пределом сокращаются все члены кроме первого и последнего, последний в пределе - предел тангенса, в итоге ответ $S = \pi/2$.

(!!! отработаю потом!!!)

20.2.4 Finite Amount Tasks (?)

20.2.5 Problems about Arithmetic and geometric progressions

(вроде уже были выше они выгружены?)

20.2.6 Problems about sums from physics

LL9.42.Matsubara. Prove that $\sum_{s=-\infty}^{\infty} [(2s+1)^2\pi^2 + a^2]^{-1} = \frac{1}{2a} \operatorname{th} \frac{a}{2}$

Solution

Эту формулу можно получить, написав

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2s+1)^2\pi^2 + a^2} &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a + i\pi(2s+1)} + \frac{1}{a - i\pi(2s+1)} \right] = \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} e^{-ax} [e^{-i\pi(2s+1)x} + e^{i\pi(2s+1)x}] dx \end{aligned}$$

(add comments, where it is used?? In Andreev's current somewhere?? add exact formulas!!!)

20.3 Problems about decomposition into series

20.3.1 Problems about the simplest Taylor series expansions (!??)

(еще с 1го курса осталась важная доработка, доделать этот раздел!!! наконец-то дошел до него, потом сяду, очень важный)
(удалю очевидные!!! тут как-то многовато их слишком. ну или деление придумаю.)

К1-18.пр.пр.1

Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \sin(2x + \pi/4).$$

А Так как

$$f^{(k)}(x) = 2^k \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad f^{(k)}(0) = 2^k \sin\frac{\pi}{4}(2k+1),$$

то по формуле (6) получаем

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \sin\frac{\pi}{4}(2k+1) \cdot x^k + o(x^n)$$

Пример

К1-18.пр.пр.2

Представить формулой Маклорена до $o(x^n)$ функцию $f(x)$, если:

1) $f(x) = e^{x/2+2}$

2) $f(x) = \sqrt{1+x}$

3) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

4) $f(x) = \ln(5-4x)$.

1) Используя формулу (9) и равенство $e^{x/2+2} = e^2 \cdot e^{x/2}$, получаем

$$e^{x/2+2} = \sum_{k=0}^n \frac{e^2}{2^k k!} x^k + o(x^n).$$

2) Так как $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$, то, применяя формулу (14) при $\alpha = 1/2$, находим

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^n C_{1/2}^k x^k + o(x^n)$$

где

$$C_{1/2}^k = \frac{(1/2)(1/2-1)\dots(1/2-(k-1))}{k!} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!}$$

$$(2k-3)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)$$

Следовательно,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n).$$

3) Используя равенство $\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3(1+2x/3)}$ и формулу (15), получаем

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k x^k + o(x^n)$$

Т. е.

$$\frac{1}{2x+3} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^k}{3^{k+1}} x^k + o(x^n)$$

4) Из равенства $\ln(5-4x) = \ln 5 + \ln(1-4x/5)$ и формулы (19) следует, что
Пример

K1-18.пр.пр.3

Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию $f(x)$, если:

1) $f(x) = (x+5)e^{2x}$;

2) $f(x) = \ln \frac{3+x}{2-x}$;

3) $f(x) = e^x \ln(1+x)$, $n=4$.

1) Используя равенство $f(x) = xe^{2x} + 5e^{2x}$ и формулу (9),
 по $f(x) = x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k x^k}{k!} + o(x^{n-1}) \right) + 5 \sum_{k=0}^n \frac{2^k x^k}{k!} + o(x^n) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k x^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{5 \cdot 2^k x^k}{k!} + o(x^n)$$

Так как $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1} x^k}{(k-1)!}$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{2^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{5 \cdot 2^k}{k!} \right) x^k + o(x^n) = \\ &= 5 + \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{k!} (k+10) x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{k!} (k+10) x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

2) Из равенства $f(x) = \ln \frac{3}{2} + \ln \left(1 + \frac{x}{3}\right) - \ln \left(1 - \frac{x}{2}\right)$ и формул (18), (19) следует, что

$$f(x) = \ln \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{3^k} \right) x^k + o(x^n).$$

3) Используя формулы (9) и (18), получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right) = \\ &= x + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) x^3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) x^4 + o(x^4) = \\ &= x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + o(x^4). \end{aligned}$$

П р и м е р

K1-18.пр.пр.4

Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию $f(x) = \cos x + |x|^3$. Какие значения может принимать n ?

А Пусть $g(x) = |x|^3$; тогда $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$, а $g'''(0)$ не существует (§15, пример 9). Поэтому для $g(x)$ формулы Маклорена до (x^n) при $n=1$ и $n=2$ имеют вид соответственно $g(x) = o(x)$ и $g(x) = o(x^2)$ а представление функции $g(x)$ формулой Маклорена с $o(x^3)$ не существует. Используя для функции $\cos x$ формулу Маклорена с $o(x^n)$ при $n=1$ и $n=2$ (формула (13)), получаем формулу Маклорена $f(x)$ при $n=1$ и $n=2$:

$$f(x) = 1 + o(x), \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Представление формулой Маклорена функции $f(x)$ до $o(x^3)$ не существует.

Для получения формулы Тейлора рациональной дроби эту дробь обычно представляют в виде суммы многочлена и элементарных дробей.

П р и м е р

K1-18.пр.пр.5

Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ рациональную дробь

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + x - 12}.$$

А Так как $f(x)$ не является правильной дробью, то, разделив числитель на знаменатель, представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = 1 + \frac{17 - x}{(x + 4)(x - 3)} = 1 - \frac{3}{x + 4} + \frac{2}{x - 3}$$

Преобразуем $f(x)$ так, чтобы можно было использовать формулы (15) и (16):

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4(1 + x/4)} - \frac{2}{3(1 - x/3)}$$

Отсюда получаем

$$f(x) = 1 - \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{4^k} - \frac{2}{3} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{3^k} + o(x^n)$$

или

$$f(x) = -\frac{5}{12} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3(-1)^{k+1}}{4^{k+1}} - \frac{2}{3^{k+1}} \right) x^k + o(x^n).$$

K1-18.пр.пр.6

Представить формулой Маклорена с $o(x^{2n+1})$ функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 3x^2 - 4}.$$

А Представим $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - 4)(x^2 + 1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 + 1} \right)$$

Заметим, что нет необходимости заменять дробь $\frac{1}{x^2 - 4}$ суммой элементарных дробей вида $\frac{A}{x-2}$ и $\frac{B}{x+2}$.
Записав эту дробь в виде $-\frac{1}{4(1-x^2/4)}$ и используя формулы (15), (16), получаем

$$f(x) = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4(1-x^2/4)} - \frac{1}{1+x^2} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \left((-1)^{k+1} - \frac{1}{4^{k+1}} \right) \frac{x^{2k}}{5} + o(x^{2n+1})$$

Чтобы получить формулу Маклорена произведения тригонометрических функций, часто бывает полезным представить это произведение в виде суммы тригонометрических функций. цию $f(x)$, если:

1) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$;

2) $f(x) = \cos^3 x$. 1) Так как $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x)$, то, применяя формулу (13), получаем

$$\sin^2 x \cos^2 x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} 2^{4k-3}}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

2) Используя равенство $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, получаем

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x = \sum_{k=0}^n \frac{3(-1)^k}{4(2k)!} (3^{2k-1} + 1) x^{2k} + o(x^{2n+1}). \text{ П р и м е р}$$

К1-18.пр.пр.8

Применяя метод неопределенных коэффициентов, получить формулу Маклорена с $o(x^5)$ функции $\operatorname{tg} x$.

Так как $\operatorname{tg} x$ - нечетная функция и $\operatorname{tg} x = x + o(x)$, то

$$\operatorname{tg} x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6).$$

Используя формулу $\sin x = \operatorname{tg} x \cos x$ и равенства (12) и (13), получаем

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6)) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right).$$

Приравнявая коэффициенты при x^3 и x^5 , находим

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + a_3, \quad \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} - \frac{a_3}{2!} + a_5.$$

Из этой системы получаем $a_3 = 1/3$, $a_5 = 2/15$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

Заметим, что это равенство можно получить и по общей формуле (6).

Пример

К1-18.пр.пр.9

Представить формулой Маклорена с $o(x^3)$ функцию $e^{x \cos x}$. Δ Искомая формула должна иметь вид

$$e^{x \cos x} = \sum_{k=0}^3 a_k x^k + o(x^3).$$

Так как $x \cos x = x + o(x)$, $(x \cos x)^k = x^k + o(x^k)$ при $k = 1, 2, \dots$, то в формуле

$$e^w = \sum_{k=0}^n \frac{w^k}{k!} + o(w^n)$$

где $w = x \cos x$, нужно взять $n = 3$. При этом функции w^k ($k = 1, 2, 3$) следует представить формулой Маклорена с $o(x^3)$. Используя разложение (13), получаем

$$w = x \cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4), \quad w^2 = x^2 + o(x^3), \quad w^3 = x^3 + o(x^3).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^{x \cos x} &= \sum_{k=0}^3 \frac{w^k}{k!} + o(w^3) = 1 + x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4) + \frac{1}{2!} (x^2 + o(x^3)) + \\ &+ \frac{1}{3!} (x^3 + o(x^3)) + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{x} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Пример

К1-18.пр.10

Представить формулой Маклорена с $o(x^6)$ функцию

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + \sin x}.$$

А Искомая формула должна иметь вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^6 a_k x^k + o(x^6).$$

Поэтому функцию $\frac{1}{1+\sin x}$ следует представить формулой Маклорена с $o(x^4)$. Так как $\sin x = x + o(x)$, то в формуле

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^n (-1)^k z^k + o(z^n)$$

где $z = \sin x$, нужно взять $n = 4$. Применяя формулу (12), получаем

$$\begin{aligned} z = \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), & z^2 &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4), \\ z^3 &= x^3 + o(x^4), & z^4 &= x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sin x} &= 1 - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) - x^3 + x^4 + o(x^4) = \\ &= 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

и

$$f(x) = x^2 - x^3 + x^4 - \frac{5}{6}x^5 + \frac{2}{3}x^6 + o(x^6).$$

К1-18.пр.11

Представить формулой Маклорена с (x^{2n+1}) функцию:

1) $\operatorname{arctg} x$;

2) $\arcsin x$. 1) Так как $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$ (формула (22)), то по формуле (24) получаем

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Полагая в равенстве (26) $n = 2$, находим

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6).$$

2) Используя равенство (23), получаем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}),$$

откуда по формуле (24) находим

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k! (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Из формулы (27) при $n = 2$ получаем Представление функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 заменой $x - x_0 = t$ обычно сводят к представлению функции $g(t) = f(x_0 + t)$ по формуле Маклорена.

Пример

К1-18.пр.12

Представить функцию $f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ формулой Тейлора в окрестности точки $x = -1$ с $o((x+1)^{2n})$.
 Δ Пусть $x+1 = t$; тогда

$$f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{3t}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{3}{2}t \left(1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-1/2} = g(t).$$

Для получения формулы Тейлора для функции $f(x)$ нужно представить функцию $g(t)$ формулой Маклорена с $o(t^{2n})$. Применяя формулу (14), находим

$$g(t) = \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}t \sum_{k=1}^{n-1} C_{-1/2}^k (-1)^k \frac{t^{2k}}{4^k} + o(t^{2n})$$

где

$$C_{-1/2}^k (-1)^k = (-1)^k \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-(k-1))}{k!} = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Следовательно,

$$g(t) = \frac{3}{2}t + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!} t^{2k+1} + o(t^{2n})$$

Заменяя t на $x+1$, получаем

$$f(x) = \frac{3}{2}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!} (x+1)^{2k+1} + o((x+1)^{2n}).$$

Пример

K1-18.пр.13

Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x = 2$ с $o((x-2)^n)$ функцию $f(x) = \ln(2x - x^2 + 3)$.

Так как $2x - x^2 + 3 = (3-x)(x+1)$, то, полагая $x-2 = t$, получаем $2x - x^2 + 3 = (1-t)(3+t) = 3(1-t)(1+t/3)$. Отсюда следует, что

$$f(x) = g(t) = \ln 3 + \ln(1-t) + \ln(1+t/3).$$

Представив функцию $g(t)$ по формуле Маклорена с $o(t^n)$, получаем

$$g(t) = \ln 3 - \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k3^k} + o(t^n).$$

Следовательно,

$$f(x) = \ln 3 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k-1}}{3^k} - 1 \right) \frac{(x-2)^k}{k} + o((x-2)^n).$$

K1-18.1

Представить формулой Маклорена с $o(x^n)$ функцию (1-4).

- 1) e^{5x-1} ;
- 2) $\sin(2x+3)$
- 3) $\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$;
- 4) $\frac{1}{1-2x}$;
- 5) $\frac{1}{3x+4}$;
- 6) $\frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ 7) $\ln(ex+2)$ 8) 3^{2-x} 9) $\frac{1}{(1-x)^2}$.

K1-18.2

- 1) $(x-1)e^{x/2}$;
- 2) $(x^2-x)e^{-x}$
- 3) $\frac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$
- 4) $(2x+1)\sqrt{1-x}$;
- 5) $(2x-3)\ln(5x+6)$
- 6) $\ln \frac{1+2x}{1-x}$ 7) $\ln \frac{2-3x}{3+2x}$; 8) $\ln(x^2+3x+2)$ 9) $\ln(2+x-x^2)$.

K1-18.3

- 1) $(1+x^2)\ln\sqrt{1+x}$
- 2) $(x-1)(x+\ln(1+x))$
- 3) $(1-x)\ln(1+x) - (1+x)\ln(1-x)$
- 4) $x\sqrt[3]{4-4x+x^2}$;
- 5) $\frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}$; 6) $\ln \frac{x+4}{x^2-5x+6}$; 7) $\ln(6+11x+6x^2+x^3)$ 8) $\ln\left(\frac{2x^2-5x+2}{2}\right)^{1/x}$ 9) $(1-x)\ln(1+5x+6x^2)$

K1-18.4

- 1) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$;
- 2) $\frac{2x-3}{x+1}$
- 3) $\frac{x^2+1}{2x-3}$
- 4) $\frac{x^3}{x-1}$;
- 5) $\frac{2x+5}{x^2+5x+4}$;
- 6) $\frac{3x-1}{x^2+x-6}$ 7) $\frac{x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$ 8) $\frac{1-2x^2}{2+x-x^2}$; 9) $\frac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2}$.

Представить формулой Маклорена с (x^{2n}) функцию (5, 6).

K1-18.5

- 1) $\operatorname{sh}(x/2)$;
- 2) $x \operatorname{ch} 3x$
- 3) $x \sin^2 2x$
- 4) $x \operatorname{ch}^2 x$
- 5) $\sin x \cos 2x$;
- 6) $\sin^3 x$ 7) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} 2x$; 8) $\sin^3 x \cos x$

K1-18.6

- 1) $\frac{x^4+1}{x^2+1}$;
- 2) $\frac{x^2}{3x^2-4}$;
- 3) $\frac{1}{3x^4+10x^2+3}$;
- 4) $\frac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1}$
- 5) $\frac{x}{3} \ln \frac{x^2-1}{x^2-e}$
- 6) $(1+2x)e^{-2x} - (1-2x)e^{2x}$

Представить формулой Маклорена с $o(x^{2n+1})$ функцию (7–9).

K1-18.7

- 1) $\cos 3x$;
- 2) $x^2 \cos^2 x$;
- 3) $\cos x \cos 3x \cos 5x$;
- 4) $\sin x \sin 3x$;
- 5) $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x$; 6) $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} 5x$; 7) $(4x - x^3) \operatorname{sh} 2x$.

K1-18.8

- 1) $\operatorname{sh}^2 x$;
- 2) $\cos^4 x$;
- 3) $\sin^2 x \cos^4 x$;
- 4) $\cos^4 x + \sin^4 x$;
- 5) $\cos^6 x + \sin^6 x$

K1-18.9

- 1) $\frac{x-1}{2-x^2-x^4}$;
- 6) $\sin^8 x + \cos^8 x$.
- 2) $\frac{1}{x^4-8x^2+15}$;
- 3) $x \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$;
- 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2-x^2}}$;
- 5) $\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$
- 6) $\ln \sqrt[3]{\frac{2+x^2}{x^4-3x^2+2}}$ 7) $\frac{1}{1-x+x^2-x^3}$.

K1-18.10

Представить формулой Маклорена с $o(x^{3n})$ функцию:

- 1) $\frac{1}{2x^6-10x^3+12}$;
- 2) $\frac{5x^6-11}{x^6-x^3-2}$;
- 3) $\frac{1}{1+x+x^2}$.

K1-18.11

Представить формулой Маклорена с $o(x^{3n+1})$ функцию:

- 1) $\frac{x}{(1+x^3)^2}$;
- 2) $\ln \sqrt{\frac{e-x^3}{1-ex^3}}$;
- 3) $\frac{5x^3+28}{14+5x^3-x^6}$. Представить формулой Тейлора в окрестности точки x_0 с $((x-x_0)^n)$ функцию (12–16).

K1-18.12

- 1) $1/x, x_0 = 2$;
- 2) $\sqrt{x}, x_0 = 1$; 3) $\sin(2x-3), x_0 = 1$;
- 4) $xe^{2x}, x_0 = -1$;
- 5) $x^2e^{-2x}, x_0 = -1$; 6) $(x^2-1)e^{2x}, x_0 = -1$; 7) $\sin(x+1)\sin(x+2), x_0 = -1$; 8) $(x^2+4x+2)e^{-3x}, x_0 = -2$.

K1-18.13

- 1) $\ln(2x+1), x_0 = 1/2$;
- 2) $\log_3 \sqrt[3]{3x-1/3}, x_0 = 3$
- 3) $\ln(2+x-x^2), x_0 = 1$;
- 4) $\ln(x^2-7x+12), x_0 = 1$

K1-18.14

- 1) $\ln \sqrt[3]{7x-2}, x_0 = 1$
- 2) $\ln \sqrt[4]{\frac{x-2}{5-x}}, x_0 = 3$
- 3) $x \ln(2-3x+x^2), x_0 = -2$
- 4) $\ln \frac{(x-1)^{x-2}}{3-x}, x_0 = 2$;
- 5) $\frac{2x+1}{x-1} \ln x, x_0 = 1$
- 6) $\ln(5+14x+14x^2+6x^3+x^4), x_0 = -2$.

K1-18.15

- 1) $\frac{2x-1}{x-1}, x_0 = 2$;
- 2) $\frac{(x-2)^2}{3-x}, x_0 = 2$
- 3) $\frac{x}{4+x}, x_0 = 10$;
- 4) $\frac{x+5}{2x-4}, x_0 = -\frac{1}{10}$;
- 5) $\frac{x^2+3x}{x+1}, x_0 = 1$
- 6) $\frac{x^2-3x+3}{x-2}, x_0 = 3$; 7) $\frac{x+7}{x(2x+7)}, x_0 = -2$; 8) $\frac{x-2}{(x-3)^2}, x_0 = 2$.

K1-18.16

- 1) $\frac{x^2+4x+4}{x^2+10x+25}, x_0 = -2$;
- 2) $\frac{x^2-4x+5}{x^2-5x+6}, x_0 = 1$;
- 3) $\frac{x^2-5x+7}{x^2-9x+20}, x_0 = -2$
- 4) $\frac{2x}{1-x^2}, x_0 = 2$;
- 5) $\frac{x^3-5x^2+4x+5}{x^2-5x+6}, x_0 = 1$
- 6) $x \left(\frac{1}{(x-1)^3} - 1 \right), x_0 = 2$. Представить формулой Тейлора в окрестности точки x_0 с $((x-x_0)^{2n})$ функцию (17–19).

K1-18.17

- 1) $e^{x^2+2x-1}, x_0 = -1$; 2) $(x+3)e^{3x^2+18x}, x_0 = -3$;
- 3) $(x+2)\ln(2x^2+8x+11), x_0 = -2$
- 4) $(x-5)\ln(26-10x+x^2), x_0 = 5$
- 5) $\ln \frac{\sqrt[3]{x+3}}{x^2+2x+2}, x_0 = -1$.

K1-18.18

- 1) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, x_0 = 1$;
- 2) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}, x_0 = -1$;
- 3) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}, x_0 = 2$
- 4) $\frac{x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x(2-x)}}, x_0 = 1$
- 5) $\frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2+2x+2}}, x_0 = -1$.

K1-18.21

- 1) $\sin^2(x-1)\cos(x-1), x_0 = 1$;
- 2) $\sin \frac{9}{2}x \cos \frac{3}{2}x, x_0 = \frac{\pi}{6}$
- 3) $(x + \frac{\pi}{4})(\sin x + \cos x), x_0 = -\frac{\pi}{4}$
- 4) $(x^2 - \pi x)\cos(x + \frac{\pi}{2}), x_0 = \frac{\pi}{2}$
- 5) $\frac{x^2+x}{2x+1}\cos \pi x, x_0 = -\frac{1}{2}$

K1-18.22

- 1) $\log_2(3x^2 - 24x + 50), x_0 = 4$;
- 2) $(x+2)\ln(2-x^2-2x), x_0 = -1$; 3) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{2x-1}{3-2x}}, x_0 = 1$;
- 4) $(x^2+4x+2)\ln(-2x^2-8x-5), x_0 = -2$.

K1-18.23

- 1) $\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x+5}}, x_0 = 2$;
- 2) $\frac{x-1}{\sqrt{1+4x-x^2}}, x_0 = 2$
- 3) $\sqrt{\frac{x}{2-x}}, x_0 = 1$
- 4) $\frac{1-4x+4x^2}{\sqrt{x+\sqrt{1-x}}}, x_0 = \frac{1}{2}$;
- 5) $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}, x_0 = \frac{3}{2}$;
- 6) $\frac{2x^2-8x+5}{x^2-4x+3}, x_0 = 2$ 7) $\frac{(x+1)^2}{(2x^2+4x+1)(x^2+2x+3)}, x_0 = -1$; 8) $(3x^2-6x+1)\sqrt{2x-x^2}, x_0 = 1$.

K1-18.24

Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ с $o((x-x_0)^{3n})$ функцию $2^{x^3-3x^2+3x}$.

K1-18.25

Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ с $o((x-2)^{2n+2})$ функцию $\sqrt{x/(4-x)} - \sqrt{(4-x)/x}$.

K1-18.26

Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ с $o((x-2)^{3n+1})$ функцию $(x-2)/\sqrt[3]{(x-4)(x^2-2x+4)}$.

K1-18.27

Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ с $o((x-1)^{4n+1})$ функцию $(1-\sqrt{2x-x^2})/(1-\sqrt{x^2-2x+2})$.

K1-18.28

Представить формулой Тейлора в окрестности точки x_0 с $o((x-x_0)^{4n})$ функцию:

- 1) $\sin(x^2 - 2x + 3), x_0 = 1$
- 2) $\cos(x^2 - 4x + 3), x_0 = 2;$
- 3) $\sin(3x^2 + 6x + 4), x_0 = -1.$

K1-18.31

Найти $f^{(k)}(0)$, если:

- 1) $f(x) = e^{-x^2}, k = 6;$
- 2) $f(x) = 1/(1+x+x^2), k = 32;$
- 3) $f(x) = 1/(1-x^4), k = 60.$

K1-18.32

Пусть $P_n(x)$ - многочлен степени не выше n . Доказать, что

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

K1-18.33

Представить функцию $f(x)$ в виде многочлена по степеням $x-x_0$, если:

- 1) $f(x) = x^3, x_0 = 1$
- 2) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 17, x_0 = -2;$
- 3) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3, x_0 = -1;$
- 4) $f(x) = (x^3 - 8)^2, x_0 = 2.$

K1-18.34

Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$. Доказать, что

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k (x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}).$$

K1-18.35

Пусть $f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta h)$, где $0 < \theta < 1$, и пусть существует $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

K1-18.36

Представить формулой Маклорена с $o(x^2)$ функцию:

- 1) $e^{\operatorname{tg} x}$
- 2) $e^{\sqrt{1+2x}};$
- 3) $\operatorname{ch}(\sin x)$
- 4) $\cos(\operatorname{sh}(x/\sqrt{5}))$
- 5) $(1-x+x^2)^3$
- 6) $\ln \cos x.$

K1-18.37

Представить формулой Маклорена с $o(x^3)$ функцию:

- 1) $(1 - x + x^2) / (1 + x + x^2)$
- 2) $\sqrt{1 + 2x - x^2} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^3}$;
- 3) $\sqrt[3]{1 - 3x \cos 2x}$;
- 4) $\operatorname{arctg}(\sin x)$;
- 5) $e^{\sin x}$; 6) $\ln^3(1 - x/2)$; 7) $(1 + x)^{1/x}$ 8) $\sqrt[3]{1 + 3 \sin x}$ 9) $\ln(1 + \arcsin x)$.

K1-18.40

Представить формулой Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с $o((x - x_0)^n)$:

- 1) $f(x) = \operatorname{th} x, x_0 = 0, n = 6$;
- 2) $f(x) = \frac{1 - 2x\sqrt{e+ex^2}}{\sqrt{-\ln(2x-x^2\sqrt{e})}}, x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}, n = 9$;
- 3) $f(x) = (6 - \sqrt{1 - 10x^4})^{\cos 2x^3}, x_0 = 0, n = 9$;
- 4) $f(x) = (x^2 - 1)^{1973}, x_0 = 1, n = 1973$.

K1-18.41

Найти такие числа A и B , чтобы при $x \rightarrow 0$ были справедливы асимптотические равенства:

- 1) $Ae^x - \frac{B}{1-x} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$;
- 2) $\sin x(A + B \cos x) = x + o(x^4)$;
- 3) $A \arcsin x + B \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + o(x^6)$;
- 4) $\operatorname{tg} x = \frac{x+Ax^3}{1+Bx^2} + o(x^6)$.

K1-18.42

С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (25) приближенно вычислить (с точностью до 10^{-3}):

- 1) $\sqrt{127}$;
- 2) $\sqrt[4]{83}$;
- 3) $\sqrt[5]{250}$
- 4) $\sqrt[3]{e}$
- 5) $\sin 85^\circ$
- 6) $\cos 72^\circ$ 7) $\ln 1,3$; 8) $\operatorname{arctg} 0,8$.

K1-18.43

Оценить с помощью формулы Тейлора (25) абсолютную погрешность приближенных формул:

- 1) $e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, 0 \leq x \leq 1; \quad 2) \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, |x| \leq 1$;
- 3) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, |x| \leq 0,5$;
- 4) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}, |x| \leq 0,1$;
- 5) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}, |x| \leq 0,1$;
- 6) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}, 0 \leq x \leq 0,2$.

20.3.2 Problems about the Taylor series**МФТИ.Иванова.2.3.**

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = e^x + x^2|x|$ до $o(x^n)$. Какие значения может принимать n ?

В соответствии с определением точность представления формулой Тейлора в окрестности точки x_0 не может быть выше, чем наибольший порядок производной, существующей в этой точке.

Пусть $g(x) = x^2|x|$, тогда $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0, g'''(0)$ не существует. Поэтому представления формулой Маклорена функции $g(x)$ до $o(x^n)$ имеют вид: $g(x) = o(x)$ при $n = 1$; $g(x) = o(x^2)$ при $n = 2$; при $n \geq 3$ представления не существуют.

Используя табличное представление показательной функции (15) и правило сложения представлений, имеем $f(x) = 1 + x + o(x)$ при $n = 1$; $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $n = 2$; при $n \geq 3$ представление не существует.

При возведении в степень и перемножении представлений формулой Тейлора точность представления определяется наименьшим порядком o -малого в результирующем выражении. Члены более высокого порядка можно не выписывать и не учитывать в вычислениях, так как они являются o -малым.

МФТИ.Иванова.2.4.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = e^x \cdot \sqrt{1+x}$ до $o(x^2)$. $e^x \sim 1$ и $\sqrt{1+x} \sim 1$ при $x \rightarrow 0$, то находим представления обеих функций до искомого порядка:

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)$$

Раскрываем первую скобку, в каждом слагаемом учитываем только те члены второго множителя, степень которых после раскрытия всех скобок не превосходит 2, то есть точности представления, тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) + x \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) + \\ &+ \frac{x^2}{2}(1 + o(1)) = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{8} + o(x^2), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.5.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \sin x \cdot \ln(1+x)$ до $o(x^5)$. $\triangleright$ Так как $\sin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$, то $\sin x$ и $\ln(1+x)$ представляем формулой Маклорена до $o(x^4)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = \\ &= x \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) - \frac{x^3}{3!} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Остальные члены опущены по правилам преобразования. При возведении в степень представления формулой Тейлора важно не потерять члены, являющиеся попарными произведениями слагаемых, например:

$$\begin{aligned} (x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3))^2 &= x^2 + (2x^2)^2 + (3x^3)^2 + \\ &+ 2(x \cdot 2x^2 + x \cdot 3x^3 + 2x^2 \cdot 3x^3) + o(x^3)(x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)). \end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.6.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = e^{x-x^2}$ до $o(x^3)$. $\triangleright f(x)$ является сложной функцией (см. с. 11-12). Внутренняя функция $x - x^2 \sim x$ при $x \rightarrow 0$, поэтому внешнюю функцию представляем формулой Маклорена до искомого порядка: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$, где $t = (x - x^2) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Тогда

$$f(x) = 1 + (x - x^2) + \frac{(x - x^2)^2}{2} + \frac{(x - x^2)^3}{6} + o(x^3)$$

Полученное представление не является представлением формулой Маклорена, для получения представления формулой Маклорена раскрываем скобки и получаем

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

МФТИ.Иванова.2.7.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = e^{\sin \ln(1+2x)}$ до $o(x^3)$. $\triangleright$ Функция $f(x)$ является сложной функцией с несколькими вложенными функциями. Представление начинаем с внутренней функции. Так как $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, где $t = 2x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3).$$

Обозначая $u = \left(2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\right)$, имеем $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, $\sin u = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$, тогда

$$\begin{aligned}\sin \ln(1+2x) &= \left(2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}(2x + o(x))^3 = \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

Для $y = \left(2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right)$ имеем $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$, тогда

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}(2x - 2x^2 + o(x^2))^2 + \\ &+ \frac{1}{6}(2x + o(x))^3 + o(x^3) = 1 + 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

▷ Решение примера можно записать в другой форме. Представление начинаем с внутренних функций, выписывая "схему" представления соответствующей функции и подставляя в нее соответствующий аргумент:

$$\begin{aligned}f(x) &= \exp \left\{ \sin \left(2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \left(2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3) \right) - \frac{1}{6}(2x + o(x))^3 + o(x^3) \right\} = \\ &= \exp \left\{ 2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right\} = \\ &= 1 + \left(2x - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right) + \frac{1}{2}(2x - 2x^2 + o(x^2))^2 + \\ &+ \frac{1}{6}(2x + o(x))^3 + o(x^3) = 1 + 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3), x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.8.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \frac{\arcsin x^3}{\ln(1+x^2)}$ до (x^5) . ▷ Так как $\arcsin x^3 \sim x^3$, $\ln(1+x^2) \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$, то $\arcsin x^3$ представляем формулой Маклорена до $o(x^7)$, а $\ln(1+x^2)$ - до (x^6) и сокращаем дробь:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^3 + o(x^7)}{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)} = \frac{x + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \\ &= (x + o(x^5)) \left(1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \right) + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2 \right) = \\ &= (x + o(x^5)) \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \right) = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^5).\end{aligned}$$

Замечание 8. При решении задач представление формулой Тейлора сложной функции используется для небольших фиксированных n , так как этап раскрытия скобок в общем случае трудно выполним для произвольного n . Исключение составляют частные случаи, типа $\varphi(x) = Ax^m$, $m \in \mathbb{N}$. В других случаях целесообразно преобразовать функцию таким образом, чтобы избежать представления сложной функции формулой Тейлора.

МФТИ.Иванова.2.9.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ до (x^6) . ▷ Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, тогда $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$. Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная, то ее представление формулой Маклорена с неопределенными коэффициентами берем только по нечетным степеням. Приравниваем представления формулами Маклорена с точностью до $o(x^6)$: $\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)$.

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}x: & a = 1 \\ x^3: & -\frac{a}{2} + b = -\frac{1}{6} \\ x^5: & \frac{a}{24} - \frac{b}{2} + c = \frac{1}{120}.\end{aligned}$$

Решая симметрично, получаем $a = 1, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{15}$. Итак,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), x \rightarrow 0.$$

Замечание 9. Аналогично предыдущему примеру можно получить представление формулой Маклорена функции $y = \operatorname{th} x$ до $o(x^6)$. А именно,

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), x \rightarrow 0.$$

МФТИ.Иванова.2.10.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \arcsin x$ до $o(x^6)$. ▷ Найдем представление формулой Маклорена производной до $o(x^6)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5).$$

Интегрируя представление производной и учитывая, что $\arcsin 0 = 0$, имеем (см. формулу (27), с. 13):

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6).$$

МФТИ.Иванова.2.11.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \arccos(\frac{1}{2} + x)$ до $o(x^2)$. ▷ Аргумент функции не стремится к нулю при $x \rightarrow 0$. Тем не менее можно воспользоваться связью представлений формулой Маклорена функции и ее производной:

$$\begin{aligned} \left(\arccos\left(\frac{1}{2} + x\right) \right)' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + x\right)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{4(x+x^2)}{3}}} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2(x+x^2)}{3} + o(x) \right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4x}{3\sqrt{3}} + o(x) \end{aligned}$$

Тогда $f(x) = \arccos(\frac{1}{2} + x) = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{2x^2}{3\sqrt{3}} + o(x^2), x \rightarrow 0$.

МФТИ.Иванова.2.12.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ до $o(x^{2n})$. ▷ Найдем представление формулой Маклорена производной функции $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. По формуле (4.7.) при $\alpha = -\frac{1}{2}$, где $C_{-\frac{1}{2}}^k = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!} = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!}$, и правилу представления формулой Маклорена сложной функции имеем

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n}), x \rightarrow 0.$$

Учитывая, что $f(0) = \ln 1 = 0$, получаем

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{2^k k! (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n}), x \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f(x) &= x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \\ &= x^2 \left(x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k! (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n}) \right) = \\ &= x^3 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k! (2k+1)} x^{2k+3} + o(x^{2n}), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Замечание 10. Типичной ошибкой является применение приема дифференцирования к произведению трансцендентной функции на многочлен, например, к функции $f(x)$ в примере 2.12. В этом случае выражение производной сложнее исходного произведения. 2.2.2. Показательная функция Показательную функцию приводим к основанию e и пользуемся правилом представления сложной функции (см. с. 12 – 13).

МФТИ.Иванова.2.13.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = 5^{x^2}$ до $o(x^{2n+1})$.

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= \exp\{x^2 \ln 5\} = \sum_{k=0}^n \frac{(x^2 \ln 5)^k}{k!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k} \ln^k 5}{k!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.14.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \exp\{4 \cos x\}$ до $o(x^3)$.

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= \exp\left\{4\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right\} = \\ &= e^4 \cdot \exp\{-2x^2 + o(x^3)\} = e^4 \cdot (1 - 2x^2 + o(x^3)) = \\ &= e^4 - 2e^4 x^2 + o(x^3), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.15.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\sin x}$ до $o(x^5)$

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= \exp\{\sin x \cdot \ln \operatorname{ch} x\} = \\ &= \exp\left\{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \ln\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\right\} = \\ &= \exp\left\{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \left(\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\right)\right\} = \\ &= \exp\left\{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)\right\} = \\ &= \exp\left\{\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} + o(x^5)\right\} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{6} + o(x^5), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.2.3. Гиперболические функции Для получения представления произведения гиперболических функций преобразуем исходное выражение в сумму гиперболических функций других аргументов:

МФТИ.Иванова.2.16.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch} x$ до $o(x^{2n+1})$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1) \operatorname{ch} x = \frac{1}{4}(\operatorname{ch} 3x - \operatorname{ch} x) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(3x)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{3^{2k} - 1}{4 \cdot (2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Замечание 11. Для преобразования выражений удобно использовать формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1; \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1); \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1); \\ \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x; \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y &= \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y) \\ 2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y) \\ 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y) \end{aligned}$$

2.2.4. Тригонометрические функции

МФТИ.Иванова.2.17.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$ до $o(x^{2n+1})$.

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= \sin^2 x \cdot \cos x = \frac{(1 - \cos 2x)}{2} \cos x = \frac{\cos x - \cos 3x}{4} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(3x)^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1 - 3^{2k}}{4 \cdot (2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.18.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \sin(\operatorname{ch} x)$ до $o(x^3)$.

$$\triangleright f(x) = \sin(\operatorname{ch} x) = \sin \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)$$

Так как аргумент синуса не стремится к нулю при $x \rightarrow 0$, то используя формулу синуса суммы, получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) = \sin 1 \cdot \cos \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) + \\ &+ \cos 1 \cdot \sin \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) = \sin 1 + \cos 1 \cdot \frac{x^2}{2} + o(x^3), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.2.5. Степенная функция

МФТИ.Иванова.2.19.

Представить формулой Маклорена функции $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $\sqrt[3]{1+x}$ до $o(x^3)$ а) Используя табличное представление (20) степенной функции при $\alpha = \frac{1}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{6}x^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

б) Используя табличное представление (20) степенной функции при $\alpha = -\frac{1}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{6}x^3 + o(x^3) = \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

в) Используя табличное представление (20) степенной функции при $\alpha = \frac{1}{3}$, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{6}x^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + o(x^3), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Замечание 12. Для упрощения вычислений полезно использовать рекуррентное соотношение

$$C_{\alpha}^{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))(\alpha-k)}{(k+1)!} = C_{\alpha}^k \cdot \frac{\alpha-k}{k+1}.$$

МФТИ.Иванова.2.20.

Представить формулой Маклорена функции $\sqrt{1+x^2}$ и $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ до $o(x^{2n+1})$. $\triangleright$ Используя правило сложной функции, свойства представлений четных функций и представления функций $\sqrt{1+x}$ и $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k \cdot k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0; \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.21.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \sqrt{4+x}$ до $o(x^n)$. $\triangleright$ Так как $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k \cdot k!} x^k + o(x^n)$, $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \text{то } \sqrt{4+x} &= 2\sqrt{1+\frac{x}{4}} = \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{4} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k \cdot k!} \left(\frac{x}{4}\right)^k + o(x^n)\right) = \\ &= 2 + \frac{x}{4} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^{3k-1} \cdot k!} x^k + o(x^n), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.2.6. Дробно-рациональная функция 1. Дробь представляем в виде суммы многочлена (возможно нулевого) и правильной дроби. 2. При необходимости правильную дробь раскладываем на сумму дробей со знаменателем вида $1 + \alpha t^m$, отвечающих или сводящихся к табличным представлениям. 3. Получаем представления по формуле Маклорена для всех входящих в представления дробей. Приводим подобные слагаемые.

Для получения представления дроби вида $\frac{P_k(t)}{1+\alpha t^m}$ формулой Маклорена, где $P_k(t)$ - многочлен, имеющий несколько отличных от нуля слагаемых, можно представить формулой Маклорена дробь $\frac{1}{1+\alpha t^m}$ и умножить ее на многочлен.

МФТИ.Иванова.2.22.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \frac{x^2+2x+7}{1-x^4}$ до $o(x^{4n+3})$. $\triangleright \frac{1}{1-x^4} = \sum_{k=0}^n x^{4k} + o(x^{4n+3})$, $x \rightarrow 0$. Умножим полученное ⁴ представление на многочлен $x^2 + 2x + 7$ и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 2x + 7) \left(\sum_{k=0}^n x^{4k} + o(x^{4n+3}) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n x^{4k+2} + o(x^{4n+5}) + \sum_{k=0}^n 2 \cdot x^{4k+1} + o(x^{4n+4}) + \sum_{k=0}^n 7 \cdot x^{4k} + o(x^{4n+3}) = \\ &= \sum_{k=0}^n (7 \cdot x^{4k} + 2 \cdot x^{4k+1} + x^{4k+2}) + o(x^{4n+3}), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.23.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-2}$ до $o(x^n)$ $\triangleright$ Представим функцию в виде суммы многочлена и правильной дроби и разложим правильную дробь на сумму

$$f(x) = 2 - \frac{3}{x^2+x-2} = 2 + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1}.$$

Тогда $f(x) = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x} = 2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^k + o(x^n) \right) + \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$, $x \rightarrow 0$. Так как члены нулевой степени не попадают под общую формулу, то, приводя подобные слагаемые, выписываем константу отдельно:

$$f(x) = \frac{7}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^k}{2^{k+1}} + 1 \right) x^k + o(x^n), x \rightarrow 0.$$

Замечание 13. Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то остаточный член в представлении формулой Маклорена $(1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^{\alpha} C_{\alpha}^k x^k$ равен нулю. О представлении многочлена формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 \neq 0$ см. пример 2.2%. 2.2.7. Логарифмическая функция Замечание 14. Так как $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ и $\ln 1 = 0$, то формула (23) может быть получена интегрированием формулы (21). Формула (24) может быть получена из формулы (23) по правилу сложной функции.

Представление логарифмической функции выполняются, записав функцию в виде линейной комбинации функций вида $\ln(1 + \alpha x^m)$ и, возможно, константы.

МФТИ.Иванова.2.24.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \ln \frac{4-x}{(3-2x)(5-x)}$ до $o(x^n)$.

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= \ln \frac{4}{15} + \ln \left(1 - \frac{x}{4}\right) - \ln \left(1 - \frac{2x}{3}\right) - \ln \left(1 - \frac{x}{5}\right) = \\ &= \ln \frac{4}{15} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{4^k k} + \sum_{k=1}^n \frac{2^k x^k}{3^k k} + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{5^k k} + o(x^n) = \\ &= \ln \frac{4}{15} + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{5^k} - \frac{1}{4^k} \right) + o(x^n), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.25.

Представить формулой Маклорена функцию $f(x) = \ln \frac{4+x^3}{3-x^3}$ до $o(x^{3n+2})$.

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= \ln \frac{4}{3} + \ln \left(1 + \frac{x^3}{4}\right) - \ln \left(1 - \frac{x^3}{3}\right) = \\ &= \ln \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{3k}}{4^k k} + \sum_{k=1}^n \frac{x^{3k}}{3^k k} + o(x^{3n+2}) = \\ &= \ln \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^n \frac{x^{3k}}{k} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{4^k} + \frac{1}{3^k} \right) + o(x^{3n+2}), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.3. Представление формулой Тейлора. Замена переменной Решение задачи представления функции формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 \neq 0$ состоит из трех этапов: а) заменой переменной $t = x - x_0$ и сходная задача сводится к представлению формулой Маклорена функции $g(t) = f(x_0 + t)$ до того же порядка о-малого, что и исходная задача; б) решается задача представления формулой Маклорена функции $g(t) = f(x_0 + t)$; в) выполняется обратная замена переменного, то есть подстановка выражения $x - x_0$ вместо переменной t .

МФТИ.Иванова.2.26.

Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ функцию $f(x) = \ln(x+2)$ до $o((x+1)^n)$.

$\triangleright$ Пусть $t = x + 1$. Так как $f(x) = \ln(x+2) = \ln(1 + (1+x))$, то $g(t) = \ln(1+t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} + o(t^n), t \rightarrow 0$.

Тогда

$$f(x) = \ln(1 + (1+x)) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x+1)^k}{k} + o((x+1)^n),$$

$x \rightarrow -1.$

Замечание 15. Не забывайте выполнить обратную замену переменных. Получение представления формулой Маклорена функции $g(t) = f(x_0 + t)$ не является решением поставленной задачи.

МФТИ.Иванова.2.27.

Представить формулой Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ многочлена $f(x) = x^3$.

$$f(x) = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1.$$

Опускать скобки нельзя даже в линейном члене.

Теория осталась

Так как формула Тейлора является специального вида представлением функции в некоторой окрестности точки представления, то при решении задач необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Представление формулой Тейлора в окрестности точки x_0 функции $f(x)$ должно представлять собой сумму слагаемых вида $a_k (x - x_0)^k$, в которой приведены все подобные слагаемые.

2. Недопустимо раскрытие скобок в выражении $(x - x_0)^k$ при любом k .

3. Представление функции суммой по степеням $(x - x_0)^k$ при $x \neq x_0$ по определению не является представлением формулой Тейлора в окрестности точки x_0 .

2.4. Представление формулой Тейлора при $x \rightarrow \infty$

Для получения представления формулой Тейлора функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ до $o(\frac{1}{x^n})$ выполняем замену переменной $t = \frac{1}{x}$, представляем формулой Маклорена функцию $f(\frac{1}{t})$ до $o(t^n)$ и выполняем обратную замену переменной.

МФТИ.Иванова.2.28.

Представить формулой Тейлора функцию $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 1} - x$ до $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$. $\triangleright$ Пусть $t = \frac{1}{x}$, тогда $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 1} - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{1 - (t + t^2)} - 1}{t}.$$

Так как результирующее представление до $o(t^2)$, то числитель представляем до $o(t^3)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1 - \frac{1}{2}(t + t^2) - \frac{1}{8}(t + t^2)^2 - \frac{1}{16}(t + t^2)^3 + o((t + t^2)^3) - 1}{t} = \\ &= \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{2}t - \frac{5}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + o(t^3) \right) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{8}t - \frac{5}{16}t^2 + o(t^2), t \rightarrow 0. \\ f(x) &= \sqrt{x^2 - x - 1} - x = -\frac{1}{2} - \frac{5}{8x} - \frac{5}{16x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2.5. Представление формулой Тейлора

произведения многочлена на трансцендентную или иррациональную функцию

Задача представления формулой Тейлора произведения многочлена на трансцендентную или иррациональную функцию решается в несколько этапов: 1. Заменой переменной сводим задачу к представлению формулой Маклорена. 2. Трансцендентную или иррациональную функцию представляем формулой Маклорена. 3. Умножаем полученное представление на многочлен (как правило, двучлен).

4. Приводим подобные члены, при необходимости используя замену индекса суммирования. 5. Выполняем обратную замену.

МФТИ.Иванова.2.29.

Представить формулой Тейлора функцию $f(x) = (x + 1) \ln \frac{x^2 + 2x + 2}{1 - 2x - x^2}$ в окрестности точки $x_0 = -1$ до $o((x + 1)^{2n})$. $\triangleright$ Выполним замену переменной $t = x + 1$. Получим $g(t) = t \ln \frac{1+t^2}{2-t^2} = t \left(-\ln 2 + \ln(1 + t^2) - \ln\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \right)$. Представление необходимо выполнить с точностью до $o(t^{2n})$, но так как логарифмические функции умножаются на t , то их можно представить с точностью до $o(t^{2n-1})$:

$$\begin{aligned} \ln(1 + t^2) &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{t^{2k}}{k} + o(t^{2n-1}), t \rightarrow 0 \\ \ln\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) &= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{2k}}{2^k \cdot k} + o(t^{2n-1}), t \rightarrow 0. \\ g(t) &= t \left(-\ln 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} t^{2k}}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{2k}}{2^k \cdot k} + o(t^{2n-1}) \right) = \\ &= -t \cdot \ln 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left((-1)^{k-1} + \frac{1}{2^k} \right) \frac{t^{2k+1}}{k} + o(t^{2n}), t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Выполняем обратную замену:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x + 1) \ln 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left((-1)^{k-1} + \frac{1}{2^k} \right) \frac{(x + 1)^{2k+1}}{k} + \\ &\quad + o((x + 1)^{2n}), x \rightarrow -1. \end{aligned}$$

МФТИ.Иванова.2.30.

Представить формулой Тейлора функцию $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \cos(2x - 4)$ в окрестности точки $x_0 = 2$ до $o((x - 2)^{2n+1})$.

▷ Пусть $t = x - 2$. Получим $g(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 2\right) \cos 2t$. Представление необходимо выполнить с точностью до $o(t^{2n+1})$, тригонометрическая функция умножается на многочлен с отличным от нуля младшим членом, следовательно, при умножении на многочлен точность представления не повысится.

Представим формулой Маклорена функцию $y(t) = \cos 2t$ до $o(t^{2n+1})$:

$$\cos 2t = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^{2k} \cdot t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}), t \rightarrow 0.$$

$$\text{Тогда } g(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 2\right) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^{2k} \cdot t^{2k}}{(2k)!} + o(t^{2n+1})\right).$$

Для приведения подобных слагаемых выполним замену индекса суммирования. Раскроем первую скобку и внесем множители под знак и суммирования:

$$g(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k+2} \cdot 2^{2k-1}}{(2k)!} + o(t^{2n+3}) - \\ - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k+1}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}).$$

Заметим, что при фиксировании индекса суммирования в обеих суммах степени переменной соответственно равны $2k+2$ и $2k$. Значит, заменив в первой сумме $k+1$ на новый индекс суммирования, мы получим в обеих суммах одинаковые степени переменной при одинаковых индексах суммирования. Выделяем в явном виде $k+1$ во в сех местах вхождения индекса суммирования в первой сумме:

$$g(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1-1} \frac{t^{2(k+1)} \cdot 2^{2(k+1)-3}}{(2(k+1)-2)!} + o(t^{2n+3}) - \\ - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k+1}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}).$$

При изменении k от 0 до n новый индекс $k+1$ изменяется от 1 до $n+1$, обозначая новый индекс суммирования любой буквой, например, k , получаем

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k-3}}{(2k-2)!} + o(t^{2n+3}) - \\ - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k+1}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}).$$

Приводим подобные слагаемые: первый член второй суммы - константа - не попадает под общую формулу, так как эта степень присутствует только во второй сумме, его выпишем отдельно. Кроме того, отбрасываем члены представления, содержащиеся в $o(t^{2n+1})$:

$$g(t) = 2 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (2k^2 - k + 8) \frac{t^{2k} \cdot 2^{2k-2}}{(2k)!} + o(t^{2n+1}), t \rightarrow 0.$$

После обратной замены переменной имеем

$$f(x) = 2 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (2k^2 - k + 8) \frac{(x-2)^{2k} \cdot 2^{2k-2}}{(2k)!} + o((x-2)^{2n+1}), \\ x \rightarrow 2.$$

Второй вариант выполнения замены индекса в которой степень переменной при одинаковом значении текущего индекса суммирования больше, в данном случае в первой сумме:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k+2} \cdot 2^{2k-1}}{(2k)!} + o(t^{2n+3}).$$

Обозначим немой индекс суммирования в другой сумме через l . Для того чтобы можно было привести подобные слагаемые, необходимо, чтобы при одинаковых значениях индекса суммирования степени переменной в первой и во второй суммах совпадали, то есть $2k+2 = 2l$. Тогда $k = l-1$. Новый индекс меняется от 1 до $n+1$. Подставляя, получаем

$$\sum_{l=1}^{n+1} (-1)^{l-1} \frac{t^{2l} \cdot 2^{2l-3}}{(2l-2)!} + o(t^{2n+3})$$

Вновь заменив немой индекс суммирования на k , приводим подобные слагаемые так же, как в первом решении.

МФТИ.Иванова.2.31.

Представить формулой Тейлора функцию $f(x) = (x^2 + 6x + 7) 3^{-x-1}$ в окрестности точки $x_0 = -3$ до $o((x+3)^n)$ ▷ Выполним замену переменной $t = x + 3$. Получим $g(t) = 9(t^2 - 2)e^{-t \ln 3}$

Представим формулой Маклорена функцию $y(t) = e^{-t \ln 3}$ до $o(t^n)$:

$$y(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k \ln^k 3}{k!} + o(t^n), t \rightarrow 0.$$

Тогда $g(t) = 9(t^2 - 2) \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k \ln^k 3}{k!} + o(t^n) \right)$. Выполняем замену индекса суммирования, обозначая новый индекс суммирования буквой k

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot 9 \cdot t^{k+2} \ln^k 3}{k!} + o(t^{n+2}) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot 18 \cdot t^k \ln^k 3}{k!} + o(t^n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+2-2} \cdot 9 \cdot t^{k+2} \ln^{k+2-2} 3}{((k+2)-2)!} + o(t^{n+2}) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot 18 \cdot t^k \ln^k 3}{k!} + o(t^n) = \\ &= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{(-1)^{k-2} \cdot 9 \cdot t^k \ln^{k-2} 3}{(k-2)!} + o(t^{n+2}) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \cdot 18 \cdot t^k \ln^k 3}{k!} + o(t^n) = \\ &= -18 + 18t \cdot \ln 3 + \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k \cdot 9 \cdot t^k \ln^{k-2} 3}{k!} (k(k-1) - 2 \ln^2 3) + o(t^n), t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

После обратной замены переменной при $x \rightarrow -3$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= -18 + 18(x+3) \cdot \ln 3 + \\ &+ \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k \cdot 9 \cdot (x+3)^k \ln^{k-2} 3}{k!} (k^2 - k - 2 \ln^2 3) + o((x+3)^n). \end{aligned}$$

Замечание 16. Нельзя раскрывать скобки в линейном члене представления, так как оно выполнено в окрестности точки $x_0 = -3$.

МФТИ.Иванова.2.32.

Представить формулой Тейлора функцию $f(x) = (x^2 - 2x - 1) (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ в окрестности точки $x_0 = 1$ до $o((x-1)^{2n+1})$. ▷ Пусть $t = x - 1$. Получим $g(t) = (t^2 - 2) \sqrt{1 - t^2}$. Представим формулой Маклорена функцию $y(t) = \sqrt{1 - t^2}$ до $o(t^{2n+1})$:

$$y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (2k-3)!!}{2^k \cdot k!} t^{2k} + o(t^{2n+1}), t \rightarrow 0.$$

Имеем

$$g(t) = (t^2 - 2) \left(1 - \frac{t^2}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (2k-3)!!}{2^k \cdot k!} t^{2k} + o(t^{2n+1}) \right).$$

Выполняем замену индекса суммирования

$$\begin{aligned}
 g(t) &= -2 + 2t^2 - \frac{t^4}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (2k-3)!!}{2^k \cdot k!} t^{2k+2} + o(t^{2n+3}) - \\
 &- \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (2k-3)!!}{2^{k-1} \cdot k!} t^{2k} + o(t^{2n+1}) = \\
 &= -2 + 2t^2 - \frac{t^4}{2} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (2k-5)!!}{2^{k-1} \cdot (k-1)!} t^{2k} + o(t^{2n+1}) + \\
 &+ \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (2k-3)!!}{2^{k-1} \cdot k!} t^{2k} + o(t^{2n+1}) = \\
 &= -2 + 2t^2 - \frac{t^4}{4} + \sum_{k=3}^n \frac{(-1)^k (2k-5)!!}{2^{k-1} \cdot k!} (k-3) t^{2k} + o(t^{2n+1}), t \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

После обратной замены переменной имеем

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -2 + 2(x-1)^2 - \frac{(x-1)^4}{4} + \\
 &+ \sum_{k=3}^n \frac{(-1)^k (2k-5)!!}{2^{k-1} \cdot k!} (k-3)(x-1)^{2k} + o((x-1)^{2n+1}), x \rightarrow 1.
 \end{aligned}$$

К2-21.пр.1. Элементарные разложения

Доказать, что: 1)

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1$$

$$2) \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad |x| < 1$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < 1;$$

$$4) \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Тут важно аккуратно преобразовать биномиальный коэффициент.

1) Заменяя в формуле (

10)

x на x^2 , получаем степенной ряд (34), радиус сходимости которого равен 1.

2) Так как

$$C_{-2}^n = \frac{-2(-2-1)(-2-2)\dots(-2-(n-1))}{n!} = (-1)^n (n+1),$$

то, заменяя в формуле $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n x^n$ x на $-x$ и полагая $\alpha = -2$, получаем ряд (35), сходящийся при $|x| < 1$.

3) Заметим, что

$$C_{-1/2}^n = \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-(n-1))}{n!} = \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

Полагая в формуле $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n x^n$ $\alpha = -1/2$ и заменяя x на $-x^2$, получаем ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}$$

радиус сходимости которого равен 1. Отсюда, учитывая, что

$$2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) = (2n)!!,$$

получаем разложение $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$, $|x| < 1$.

4) Так как

$$\begin{aligned} C_{1/2}^n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right) \frac{1}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^n n!} = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}, \quad n \geq 2 \text{ и } C_{1/2}^1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

то из формулы $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n x^n$ следует равенство (37).

К2-21.пр.2

Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}.$$

Представим рациональную функцию $f(x)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в $3x+8 = A(x^2+4) + (Bx+C)(2x-3)$, получим $A=2$, $B=-1$, $C=0$. Поэтому

$$f(x) = \frac{2}{2x-3} - \frac{x}{x^2+4} = -\frac{2}{3(1-2x/3)} - \frac{x}{4(1+x^2/4)}.$$

Используя шаблонные разложения, получаем

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}},$$

или

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2} \right) x^{2n+1}$$

Радиус сходимости ряда равен $3/2$.

К2-21.пр.3

Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ функцию $f(x) = \ln(4+3x-x^2)$.

Так как $4+3x-x^2 = (4-x)(x+1)$, то, полагая $x-2=t$, то

$$f(x) = g(t) = \ln((2-t)(3+t)) = \ln 6 + \ln(1-t/2) + \ln(1+t/3).$$

Используя шаблонные формулы, находим

$$g(t) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{3^n n},$$

откуда получаем

$$f(x) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ((-1)^{n-1} 3^{-n} - 2^{-n}) (x-2)^n,$$

радиус сходимости ряда равен 2.

К2-21.пр.4

Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \pi/4$ функцию $f(x) = \sin^4 x$.

Так как $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, то

$$f(x) = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x.$$

Обозначим $t = x - \pi/4$; тогда $x = t + \pi/4$, имеем $\cos 2x = -\sin 2t$, $\cos 4x = -\cos 4t$, и поэтому

$$f(x) = g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{8} \cos 4t.$$

Разлагая, получаем

$$g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n} t^{2n}}{(2n)!},$$

откуда находим

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{4n-3}}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}.$$

Радиус сходимости ряда равен $+\infty$.

К2-21.пр.5 ряд Маклорена функцию $f(x)$ и радиус сходимости, вычисляя производную

(укажу в 1 части этот метод.)

$$1) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Заметим, что

$$\left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

Интегрируя, получаем

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1.

$$2) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3}.$$

Решаем интегрирование ряда из производной.

Так как

$$f'(x) = \frac{\left(-\frac{6}{(x-3)^2} \right)}{1 + ((x+3)/(x-3))^2} = -\frac{3}{x^2 - 9} = -\frac{1}{3(1 + x^2/9)} = f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{3^{2n+1}}.$$

Интегрируя полученный ряд, находим

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}} \int_0^x t^{2n} dt$$

или

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

где

$$f(0) = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4.$$

Радиус сходимости этого ряда равен 3.

К2-21.пр.6. о ряде с числами Бернулли (!??!)

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x/(e^x - 1), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Запишем ряд Маклорена для $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^{2n}.$$

Доказать, что коэффициенты B_n (числа Бернулли) можно найти при $n \geq 2$ из рекуррентных соотношений

$$C_{n+1}^0 B_0 + C_{n+1}^1 B_1 + C_{n+1}^2 B_2 + \dots + C_{n+1}^{n-1} B_{n-1} + C_{n+1}^n B_n = 0,$$

где C_{n+1}^k - биномиальные коэффициенты ($C_{n+1}^0 = 1$),

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -1/2.$$

(????? короче, это я просто не понимаю, откуда формула ниже??? нужно больше опыта)
Из (40) и (3) следует, что

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right).$$

Так как $B_0 = f(0) = 1$ и коэффициенты при $x^n (n \geq 1)$ в левой части равенства (42) равны нулю, то

$$\sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n+1-k)!} = 0,$$

откуда, используя формулу

$$C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!},$$

получаем

$$(n+1)! \sum_{k=0}^n B_k C_{n+1}^k = 0.$$

Равенство (41) доказано.

По формуле $R = \min |z_k - a|$, где минимум берется по всем особым точкам z_k функции комплексного переменного $f(z)$. Особыми точками являются корни уравнения $e^z = 1$. Это уравнение согласно формуле (24) имеет корни

$$z_k = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ближайшими к точке $a = 0$ являются точки $2\pi i$ и $-2\pi i$, поэтому $R = |2\pi i| = 2\pi$, т. е. радиус сходимости равен 2π .

(????? окей, я в это не совсем въехал, потом посмотрю. полюсы пока не получилось определить.)

Замечание. Можно показать, что $B_{2k+1} = 0 (k \in \mathbb{N})$.

К2-21.пр.7

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z = 0$ функцию $f(z) = e^z \cos z$.

Для нахождения искомого разложения можно перемножить ряды экспоненты и косинуса. Однако для эффективного вычисления коэффициентов степенного ряда для $f(z)$ удобнее записать $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Получаем

$$f(z) = e^z \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^{z(1+i)} + e^{z(1-i)}).$$

Раскладываем экспоненты, преобразуя $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \left(\frac{e^{i\pi n/4} + e^{-i\pi n/4}}{2} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos \frac{\pi n}{4} \cdot z^n.$$

Ряд сходится во всей комплексной плоскости.

(тут все просто, разве что нужно догадаться преобразовать мнимые числа, чтобы свернулись к косинусу. пропишу в 1 части потом это лучше.)

К2-21.пр.8 Уравнение Эйри методом рядов (?)

Найти решение уравнения

$$y'' - xy = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$1) y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$2) y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(пример показывает, что метод через ряды уж точно не тот, которым нужно пользоваться первым!)
(так и не отработал уравнение Айри, потом пропишу его в диффурах. как вообще решаем его в типичном случае???)

Пусть

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Тогда

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n,$$

$$xy = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n,$$

и уравнение (43) примет вид

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в этом тождестве, получаем

$$a_2 = 0, \quad (n+1)(n+2)a_{n+2} = a_{n-1}, \quad n \in N.$$

Так как $a_2 = 0$, то из рекуррентной формулы (47) следует, что $a_5 = 0$, $a_8 = 0$ и, вообще, Из этой же формулы находим

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \dots ((3n-1) \cdot 3n)}, \quad a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \dots (3n(3n+1))}.$$

Если выполняются условия (44), то из (46) следует, что $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, а если выполняются условия (45), то $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Обозначим y_1 и y_2 решения уравнения Айри, удовлетворяющие начальным условиям 1) и 2) соответственно. Тогда из равенств (48) и (49) следует, что

$$y_1 = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)} + \dots + \frac{x^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \dots ((3n-1) \cdot 3n)} + \dots$$

$$y_2 = x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)} + \dots + \frac{x^{3n+1}}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \dots (3n(3n+1))} + \dots$$

Заметим, что ряды (50) и (51) сходятся при любых $x \in R$, а решение уравнения (43), удовлетворяющее любым начальным условиям, является линейной комбинацией решений y_1 и y_2 .

Короче, решили уравнение Айри.

К2-21.пр.9

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

В§20 (пример 4) было показано, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Дифференцируя почленно этот ряд, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

откуда находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1$$

П р и мер

K2-21.10

Найти сумму $f(x)$ степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)},$$

а затем с помощью метода Абеля (§ 20, (11)) найти сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}.$$

Дважды дифференцируя почленно степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$$

и используя разложение (13), находим

$$f''(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{2}{1+x^2}, \quad |x| < 1.$$

Откуда, последовательно интегрируя дважды, получаем

$$f'(x) = 2 \operatorname{arctg} x + C,$$

$f(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + Cx + C_1$. Заметим, что $f(0) = f'(0) = 0$, и поэтому $C = C_1 = 0$. Следовательно, $f(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$$

Так как данный степенной ряд сходится при $x = 1$, а функция f непрерывна в точке $x = 1$, то, применив формулу (

11)

§20, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

Этот же результат можно получить, используя равенства (30) и (33).

K2-21.11

Найти интеграл $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. А Используя разложение (11), получаем

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n},$$

откуда находим

$$J = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

и формул (32) и (31) следует, что $J = \pi^2/12$. П р и м е р

K2-21.12

Доказать справедливость равенства

$$\ln(m+1) = \ln m + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}, \quad m \in N,$$

и с помощью этого равенства Найти $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-5} Δ Используя разложения (11) и (12), находим

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

откуда при $x = 1/(2m+1)$ получаем равенство (52). Обозначим

$$R_p(x) = 2 \sum_{n=p}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

и воспользуемся при $x > 0$ неравенством

$$|R_p(x)| \leq \frac{2x^{2p+1}}{(2p+1)(1-x^2)}.$$

Отсюда, при $x = 1/3 (m=1)$ получаем $R_p \leq 10^{-5}$ при всех $p \geq 5$, а при $x = 1/5 (m=2)$ находим $R_p \leq 10^{-5}$ для всех $p \geq 3$. По формуле (52) имеем

$$\ln 2 \approx 2 \sum_{n=0}^4 \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} \approx 0,69315$$

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 2 \sum_{n=0}^2 \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} \approx 1,09861.$$

K2-21.13

Найти с точностью до 0,001 интеграл

$$J = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

А Используя формулу (3), получаем

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},$$

откуда находим

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Полученный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница (§ 15) Поэтому для его m -го остатка

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

справедливо неравенство

$$|r_m| \leq \frac{1}{(m+1)!(2m+3)}.$$

Так как неравенство $|r_m| \leq 0,001$ выполняется при $m \geq 4$, то

$$J \approx \sum_{n=0}^4 \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216},$$

откуда $J \approx 0,747$.

K2-21.1

Используя разложения (3)-(7) доказать, что:

- 1) $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ax_0} \frac{a^n}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in R;$
- 2) $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n, \quad a > 0, \quad x \in R;$
- 3) $\operatorname{ch} ax = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in R;$
- 4) $\sin ax = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in R.$

K2-21.2

Используя разложения $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n x^n$, (34), (36), (37), доказать, что:

- 1) $\frac{1}{a+bx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}} x^n, \quad |x| < \left| \frac{a}{b} \right|, \quad ab \neq 0;$
- 2) $\frac{1}{x^2+a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2(n+1)}} x^{2n}, \quad |x| < |a|, \quad a \neq 0$
- 3) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{a^{2n+1} (2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0;$
- 4) $\sqrt{a^2+x^2} = a + \frac{x^2}{2a} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{(2n)!! a^{2n-1}} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0.$

K2-21.3

Используя разложения (11), (12), доказать, что:

- 1) $\ln(a+bx) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{x^n}{n}, \quad |x| < \frac{a}{|b|}, \quad a > 0, \quad b \neq 0;$
- 2) $\ln \frac{a+x}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}, \quad |x| < a, \quad a > 0.$ Разложить функцию в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда (4-12).

K2-21.4

- 1) e^{-x^2}
- 2) $\frac{x^2}{(1+x)^2};$
- 3) $\frac{1}{(1-x^3)^2};$
- 4) $(1-x^2)^{-3/2}$
- 5) $\sin \frac{x^2}{3};$
- 6) $\operatorname{ch}(x\sqrt{2});$ 7) $\frac{x^3}{\sqrt{1-2x}};$ 8) $\sqrt{1-x^2}.$

K2-21.5

- 1) $e^{2x} + 2e^{-x}$
- 2) $(1+x)e^{-x};$
- 3) $x^2 \ln(4+x^2)$
- 4) $(1-x) \ln(1-x);$
- 5) $\ln \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}};$
- 6) $(1+x^2) \operatorname{arctg} x;$ 7) $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} x + \sin x)$ 8) $\arccos x.$

K2-21.6

- 1) $\frac{5x-4}{x+2};$
- 2) $\frac{1}{x^2-2x-3};$
- 3) $\frac{1}{2x^2+5x-3};$
- 4) $\frac{3x+4}{x^2+x-6};$
- 5) $\frac{5-2x}{x^2-5x+6}$

$$6) \frac{1}{(x^2+2)^2}; 7) \frac{x}{(x+1)(x^2-1)} \quad 8) \frac{1}{5-4x^2-x^4} \quad 9) \frac{5-3x}{2x^2+5x-3}$$

10)

$$\frac{7-4x}{6-5x-6x^2}.$$

K2-21.7

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1}{3x^4+10x^2+3}; \\ 2) & \frac{1}{2x^4+5x^2+2}; \\ 3) & \frac{1}{(1-x^2)(x^2+4)}; \\ 4) & \frac{2x^2+x+3}{(1-x)^2(2+x)}; \\ 5) & \frac{1}{1-x-x^2}; \\ 6) & \frac{1}{1+x+x^2}. \end{aligned}$$

K2-21.8

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1}{x^3+x^2+3x+3}; \\ 2) & \frac{1}{x^3+x^2-4x-4}; \\ 3) & \frac{x-2}{x^3+x^2+2x+2}; \\ 4) & \frac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}. \end{aligned}$$

K2-21.9

$$\begin{aligned} 1) & \ln \frac{3-2x}{2+3x}; \\ 2) & \ln (12-x-x^2) \\ 3) & \ln \frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}; \\ 4) & \ln \frac{|x^2-2|}{x^2+1}; \\ 5) & \ln \frac{2+x^2}{1-x}; \\ 6) & (x^2+5) \ln \frac{9-x^2}{4-x^2}. \end{aligned}$$

K2-21.4

$$\begin{aligned} 1) & e^{-x^2} \\ 2) & \frac{x^2}{(1+x)^2}; \\ 3) & \frac{1}{(1-x^3)^2}; \\ 4) & (1-x^2)^{-3/2} \\ 5) & \sin \frac{x^2}{3}; \\ 6) & \operatorname{ch}(x\sqrt{2}); 7) \frac{x^3}{\sqrt{1-2x}}; 8) \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

K2-21.5

$$\begin{aligned} 1) & e^{2x} + 2e^{-x} \\ 2) & (1+x)e^{-x}; \\ 3) & x^2 \ln (4+x^2) \\ 4) & (1-x) \ln (1-x); \\ 5) & \ln \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}; \\ 6) & (1+x^2) \operatorname{arctg} x; 7) \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x + \sin x) \quad 8) \arccos x. \end{aligned}$$

K2-21.6

- 1) $\frac{5x-4}{x+2}$;
- 2) $\frac{1}{x^2-2x-3}$;
- 3) $\frac{1}{2x^2+5x-3}$;
- 4) $\frac{3x+4}{x^2+x-6}$;
- 5) $\frac{5-2x}{x^2-5x+6}$;
- 6) $\frac{1}{(x^2+2)^2}$; 7) $\frac{x}{(x+1)(x^2-1)}$ 8) $\frac{1}{5-4x^2-x^4}$ 9) $\frac{5-3x}{2x^2+5x-3}$

10)

$$\frac{7-4x}{6-5x-6x^2}.$$

K2-21.7

- 1) $\frac{1}{3x^4+10x^2+3}$;
- 2) $\frac{1}{2x^4+5x^2+2}$;
- 3) $\frac{1}{(1-x^2)(x^2+4)}$;
- 4) $\frac{2x^2+x+3}{(1-x)^2(2+x)}$;
- 5) $\frac{1}{1-x-x^2}$;
- 6) $\frac{1}{1+x+x^2}$.

K2-21.8

- 1) $\frac{1}{x^3+x^2+3x+3}$;
- 2) $\frac{1}{x^3+x^2-4x-4}$;
- 3) $\frac{x-2}{x^3+x^2+2x+2}$;
- 4) $\frac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

K2-21.9

- 1) $\ln \frac{3-2x}{2+3x}$;
- 2) $\ln(12-x-x^2)$
- 3) $\ln \frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$;
- 4) $\ln \frac{|x^2-2|}{x^2+1}$;
- 5) $\ln \frac{2+x^2}{1-x}$;
- 6) $(x^2+5) \ln \frac{9-x^2}{4-x^2}$.
- 5) $5 + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

K2-21.17

Доказать, что:

$$1) \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + 2 \cos x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}, -\infty < x < +\infty;$$

$$2) \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-x/2} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, -\infty < x < +\infty;$$

$$3) \frac{x^2+2x}{4} + \frac{1}{2}(1-x^2) \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}, |x| < 1$$

$$4) \frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(1-x)^2 \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}, |x| < 1. \text{ Разложить функцию в ряд Тейлора в}$$

окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (18-21).

K2-21.18

- 1) $\frac{1}{x^2-5x+6}, x_0 = 1;$
- 2) $\frac{1}{(x^2-2x+3)^2}, x_0 = 1;$
- 3) $\frac{1}{(x^2-6x+18)^2}, x_0 = 3;$
- 4) $\frac{x^3-3x^2+4x-1}{x^2-2x+2}, x_0 = 1.$

K2-21.19

- 1) $\frac{1}{\sqrt{x^2-12x+40}}, x_0$
- 3) $\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+18}}, x_0 = 3$
- 2) $\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}}, x_0 = 5;$
- 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-6x+36}}, x_0 = 3;$
- 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}, x_0 = 2;$ 7) $\arcsin \sqrt{1+2x+2x^2}, x_0 = -1/2;$ 8) $(x+1) \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3+x}, x_0 = -1;$ 9) $(x+2) \arccos \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}, x_0 = -2.$

K2-21.20

- 1) $(x+1) \cos^2 x, x_0 = -1;$
- 2) $(2x+1) \sin x \sin(x+1), x_0 = -1/2;$
- 3) $\sin^3 x, x_0 = \pi/4;$
- 4) $\cos^4 x, x_0 = -\pi/2;$
- 5) $\cos^2 x - (x(x-\pi) + \pi^2/4) \cos 2x, x_0 = \pi/2;$
- 6) $\pi + \int_{\pi/2}^x \frac{\cos^2 t}{t-\pi/2} dt, x_0 = \frac{\pi}{2}.$

K2-21.24

Разложить в ряд Маклорена функцию $f^{(3)}(x)$ и найти радиус сходимости полученного ряда, если:

- 1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$
- 2) $f(x) = \arcsin x;$
- 3) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 \arcsin 4x.$ Разложить в ряд Маклорена данную функцию, используя ряд Маклорена для ее производной. Найти радиус сходимости полученного ряда (25 – 32).

K2-21.25

- 1) $\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$
- 2) $\operatorname{arctg} \frac{x+1/2}{x-1/2}$
- 3) $\operatorname{arctg} \frac{2x-3}{x+6}$
- 4) $\operatorname{arctg} \frac{2-x}{1+2x}.$

K2-21.26

- 1) $\operatorname{arctg} \frac{2+x^2}{2-x^2};$
- 2) $\operatorname{arctg} \frac{3-4x^2}{6+2x^2};$
- 3) $\operatorname{arctg} \frac{2-2x^2}{1+4x^2};$
- 4) $\operatorname{arctg} \frac{6+x^2}{3-2x^2};$
- 5) $x^2 \operatorname{arctg} \frac{1/3+3x^2}{x^2-1};$
- 6) $x^3 \operatorname{arctg} \frac{2-x^3/2}{1+x^3}.$

K2-21.27

- 1) $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$
- 2) $\operatorname{arctg} (x + \sqrt{1+x^2})$
- 3) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2};$
- 4) $x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

K2-21.28

- 1) $\operatorname{arctg} \frac{2x^3}{1-x^6};$
- 2) $\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$
- 3) $\operatorname{arctg} \frac{2x^2}{\sqrt{1-4x^4}};$
- 4) $\operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

K2-21.29

- 1) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2};$
- 2) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$
- 3) $1 + \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}};$
- 4) $2x \arcsin \frac{2x^3}{\sqrt{1+4x^6}};$
- 5) $\arcsin (2x\sqrt{1-x^2}).$ 30.
- 1) $\frac{1}{8} \arccos \frac{4x^2}{\sqrt{1+16x^4}};$
- 2) $x \arccos \frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}; 3) \arccos \frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}};$
- 4) $x \arccos \frac{x}{\sqrt{9+x^2}};$
- 5) $x^3 \arccos \frac{6x}{9+x^2}$
- 6) $x \arccos (2x\sqrt{1-x^2}).$

K2-21.31

- 1) $\int_0^x e^{-t^2} dt;$
- 2) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$
- 3) $\int_0^x t^2 \operatorname{sh} t dt$
- 4) $\int_0^x \frac{1-\operatorname{ch} t}{t} dt$
- 5) $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$
- 6) $\int_0^x t \operatorname{arctg} \frac{t+10}{2t-5} dt$

K2-21.32

- 1) $\int_0^x \frac{\ln(1+4t)}{t} dt$
- 2) $\int_0^x \ln \frac{1+t}{1-t} \frac{dt}{t};$
- 3) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$
- 4) $\int_0^x \frac{t dt}{\sqrt{1+t^4}};$
- 5) $\int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}};$
- 6) $\int_x^1 \ln \frac{3+t}{3-t} dt;$
- 7) $\int_0^x t^2 \operatorname{arctg} \frac{2t-2}{t+4} dt$
- 8) $\ln (x + \sqrt{3+x^2})$
- 9) $+ x \int_0^x \frac{e^{-t^2}-1}{t} dt$
- 10) $\operatorname{arctg} \frac{3x+1}{3x-1} + x \int_0^x \frac{1-\cos t}{t} dt; \arccos \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} + x \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t^2}{t} dt.$

K2-21.33

Найти первые четыре (отличные от нуля) члена ряда Маклорена данной функции:

- 1) $\ln (1 + e^x);$

- 2) $(1+x)^x$
- 3) $\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}$
- 4) $e^{\sin x}$
- 5) $e^{\operatorname{tg} x}$
- 6) $e^{\arcsin x}$.

K2-21.34

Показать, что функция $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ является решением дифференциального уравнения $y' - xy = 0$.

K2-21.35

Показать, что функция $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ является решением дифференциального уравнения $xy' = (x+1)y$.

K2-21.36

Показать, что функция $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ является решением дифференциального уравнения $xy'' + y' - y = 0$.

K2-21.37

Показать, что функция $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ является решением дифференциального уравнения $y'' - xy' - y = 0$.

K2-21.40

Найти разложение в ряд Маклорена решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

- 1) $y' - y = 0, y(0) = 1$
- 2) $(1+x^2)y' - 1 = 0, y(0) = 0$
- 3) $y'' + \lambda^2 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = \lambda;$
- 4) $y'' + xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0;$
- 5) $(1-x^2)y'' - xy' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$
- 6) $(1-x^2)y'' - 5xy' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

K2-21.41

Найти первые четыре (отличные от нуля) члена ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сумма которого удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - xy' + y = e^x$ и начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

K2-21.42

Найти первые четыре (отличные от нуля) члена ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

сумма которого удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' = (y')^2 + xy$ и начальным условиям $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

K2-21.43

Найти первые пять (отличных от нуля) членов ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сумма которого удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = x^3 + y^2$ и начальному условию $y(0) = 1$.

K2-21.44

Пользуясь тем, что функция $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)y' - xy = 1$ и условию $y(0) = 0$, доказать, что

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

K2-21.47

Доказать, что:

- 1) $\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{x^{2n}}{n+1}, \quad |x| < 1;$
- 2) $\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) \frac{x^n}{n+2},$
- 3) $\operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$
- 4) $\frac{1}{2x(1-x^2) \ln \frac{1+x}{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right) x^{2n}, \quad |x| < 1;$
- 5) $\frac{1}{6} \ln(1-x^3) - \frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2},$
- 6) $\frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}, \quad |x| < 1$

K2-21.48

Доказать, что:

- 1) $(\arcsin x)^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12 \cdot (2n)!}{(2n+1)(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \quad |x| < 1$
- 2) $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad |x| < 1;$
- 3) $\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}{(2n)!} (-1)^{n-1} x^{2n}, \quad |x| < 1;$
- 4) $\sqrt{1+x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} (n!)^2}{2n(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$

K2-21.49

Используя разложение $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$, где $B_1 = 1, B_{2k+1} = 0, k \in \mathbb{N}$ (пример 5), доказать, что:

- 1) $x \operatorname{ctg} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad |x| < \pi;$
- 2) $\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{n(2n)!} x^{2n}, \quad |x| < \pi;$
- 3) $\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} (1-2^{2n})}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, \quad |x| < \pi;$
- 4) $\frac{x}{\sin x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} x^{2n}, \quad |x| < \pi;$
- 5) $\ln \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} (2^{2n}-1)}{n(2n)!} B_{2n} x^{2n}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$

K2-21.50

Пусть разложение в ряд Маклорена функции $1/\cos x$ записано в виде

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Доказать, что

$$E_0 = 1, \quad E_0 + C_{2n}^2 E_2 + C_{2n}^4 E_4 + \dots + C_{2n}^{2n} E_{2n} = 0, \quad n \in N.$$

K2-21.51

Доказать, что

$$\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n+1)(2n)!} x^{2n+1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

K2-21.53

Пользуясь определением функций комплексного переменного $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ (формулы (15) и (16)), доказать, что:

- 1) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;
- 2) $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z$.

K2-21.54

Разложить в ряд по степеням z функцию:

- 1) $e^z \sin z$;
- 2) $\operatorname{ch} z \cos z$
- 3) $e^{z \operatorname{ctg} \alpha} \cos z, \quad \sin \alpha \neq 0$
- 4) $e^{z \cos \alpha} \cos(z \sin \alpha)$.

K2-21.55

Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда:

- 1) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$
- 2) $x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \dots + \frac{x^{2n}}{n} + \dots$

K2-21.56

Применяя интегрирование, вычислить сумму ряда:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$. Найти сумму ряда (57-61).

K2-21.57

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!}$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{2^n n!}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$
- 5) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

K2-21.58

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n;$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+1)x^n;$
- 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)x^{3n}}{n!};$
- 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n};$
- 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$

K2-21.59

- 1) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n;$
- 2) $\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1.4}{3.6} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots;$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$
- 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{4n+1}}{4n+1}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n.$

K2-21.60

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n;$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)};$
- 3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1};$
- 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)(n+2)}$
- 5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$
- 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{(2n+1)!}.$

K2-21.61

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$

K2-21.62

Коэффициенты ряда

$$1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + 24x^6 + \dots$$

обладают тем свойством, что каждый коэффициент (начиная с четвертого) равен сумме трех предыдущих. Найти сумму этого ряда. Найти сумму числового ряда (63-65). 63.

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!};$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}$
- 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$

- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;
 5) $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$;
 6) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$

K2-21.65

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$
 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+3)}$
 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$;
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3n+1)}$
 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3n+1)}$

K2-21.66

Пусть $a_n > 0$, $n \in N$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ расходится. Найти сумму ряда $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \frac{a_3}{a_4+x} + \dots$
 $\dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_2+x)(a_3+x) \dots (a_{n+1}+x)} + \dots$ предполагая, что $x > 0$.

K2-21.67

Найти сумму ряда

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} + \dots$$

K2-21.68

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ при $|x| < 1$ и при $|x| > 1$.

K2-21.69

Найти сумму ряда

$$\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{n!}{(x+1)(x+2) \dots (x+n)} + \dots$$

где $x \neq -k$ ($k \in N$).

K2-21.70

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить интеграл

- 1) $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx$; $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx$
 3) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2\pi x} - 1} dx$
 4) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}$.

K2-21.74

Используя равенство $\pi/6 = \arcsin(1/2)$, вычислить число π с помощью ряда Маклорена для функции $\arcsin x$ с точностью до 10^{-4} .

K2-21.75

Используя равенство

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

вычислить число π с точностью до 10^{-9} .

K2-21.76

Используя ряд Маклорена для $f(x)$, вычислить интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ с точностью до 10^{-3} , если:

- 1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;
- 2) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cos x$;
- 3) $f(x) = \cos x^2$;
- 4) $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$;
- 5) $f(x) = \sin x^2$;
- 6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

K2-21.77

Вычисли

- 1) $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$
- 2) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx$ до 10^{-3} :
- 3) $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$
- 4) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$
- 5) $\int_5^{10} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$
- 6) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x} dx$ 7) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ 8) $\int_0^1 x^x dx$

K2-21.78

Доказать, что если существуют числа $\delta > 0, \lambda > 0$ такие, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n$, то в каждой точке x из интервала $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ представляется сходящимся к ней рядом Тейлора (1).

K2-21.79

Пусть существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x_0)| \leq M$. Следует ли отсюда, что: 1) ряд Тейлора (1) сходится на некотором интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ 2) функция $f(x)$ представляется в некоторой окрестности точки x_0 сходящимся к ней рядом Тейлора?

K2-21.80

Доказать, что для функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

можно составить ряд Маклорена, но сумма этого ряда не совпадает с $f(x)$ при $x \neq 0$.

K2-21.81

Пусть $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Верно ли, что $S_n(x) \rightarrow \sin x, x \in \mathbb{R}$?

20.3.3 Problems about Trigonometric Fourier series 1

(в задании от физтеха из этого раздела были задачи, потом дорешаю мб.)

Суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ **С помощью равенства Парсеваля**

К2-22.пр.1

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{ch} x, -\pi \leq x \leq \pi$. Построить график суммы ряда. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x) = \operatorname{ch} x$ (при вычислении воспользуемся результатом, полученным в примере 20§6):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch} x dx = \frac{\operatorname{sh} x}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx dx = (-1)^n \frac{2 \operatorname{sh} x}{\pi (1 + n^2)}, \quad n \in N.$$

В силу четности функции f все коэффициенты $b_n = 0, n \in N$. Согласно теореме 1 ряд Фурье функции f на отрезке $[-\pi; \pi]$ сходится к самой функции f :

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + n^2} \cos nx \right), \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

На рис. 22.1 сплошной линией изображен график суммы ряда Фурье функции $\operatorname{ch} x$, а штрихами - график самой функции $\operatorname{ch} x$ вне отрезка $[-\pi; \pi]$.

К2-22.пр.2

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sh} x, -\pi < x < \pi$. Построить график суммы ряда.

А Вычислим коэффициенты Фурье. Интегрируя по частям и используя снова результат, полученный в примере 20§6, будем иметь $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} x d \cos nx =$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left(\operatorname{sh} x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left((-1)^n \operatorname{sh} \pi - \frac{(-1)^n \operatorname{sh} \pi}{1 + n^2} \right) = (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh} \pi}{\pi (1 + n^2)}, \quad n \in N.$$

В силу нечетности функции $\operatorname{sh} x$ все коэффициенты $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$, равны нулю. Согласно теореме 1 ряд Фурье функции $\operatorname{sh} x$ на интервале $(-\pi; \pi)$ сходится к самой функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi,$$

а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ его сумма равна

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{\operatorname{sh}(-\pi) + \operatorname{sh} \pi}{2} = 0.$$

На рис. 22.2 сплошными линиями изображен график суммы ряда Фурье функции $\operatorname{sh} x$, а штрихами - график самой функции вне

П р и м е р

К2-22.пр.3

Разложить в ряд Фурье функцию, получающуюся периодическим продолжением с периодом 2π из функции $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$, $0 \leq x < 2\pi$, (31) и доказать с помощью этого разложения, что

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(ряд, стоящий в правой части этой формулы, называется рядом Лейбница).

А При периодическом продолжении с периодом 2π функции (31) получится функция, отличающаяся от нечетной только значением в нуле. Поэтому для нее $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x) d \cos nx = -\frac{1}{n\pi} (\pi-x) \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}$ Таким образом,

$$\frac{\pi-x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Из теоремы 1 следует, что на интервале $(0; 2\pi)$, выполняется равенство

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

При $x = 0$ и $x = 2\pi$ это равенство уже не имеет места. График суммы ряда Фурье (33) изображен на рис. 22.3.

Из равенства (34) при $x = \pi/2$ следует равенство (32). Выведем его и другим способом, получив из (34) еще два интересных разложения.

Заменив в (34) x на $2x$ и разделив обе части получившегося равенства на 2, получим

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}, \quad 0 < x < \pi.$$

Вычтя это равенство из равенства (12), будем иметь

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad 0 < x < \pi.$$

Положив здесь $x = \pi/2$, получим соотношение (32). П р и м е р

К2-22.пр.4

Найти комплексную форму ряда Фурье периодической с периодом π функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

и сумму полученного ряда в точке $x = \pi$. Δ Находим коэффициенты Фурье (здесь $2l = \pi$):

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x e^{-2nxi} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin x - 2ni \cos x}{1 - 4n^2} e^{-2nxi} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \frac{2ni + e^{n\pi i}}{1 - 4n^2} = \frac{2ni + (-1)^n}{\pi(1 - 4n^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2ni + (-1)^n}{1 - 4n^2} e^{2inx}.$$

На интервале $(0; \pi)$ ряд сходится к функции $f(x)$, в точке $x = \pi - \kappa$ $\frac{f(+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{1}{2}$.

П р и м е р 5. Доказать, что кусочно гладкая на отрезке $[0; l]$ функция может быть разложена на этом отрезке в ряд вида (15):

1) по синусам; 2) по косинусам. Δ Пусть функция f кусочно гладкая на интервале $[0; l]$. Если продолжить функцию f с полуинтервала $(0; l]$ на полуинтервал $[-l; 0)$ нечетным образом и положить

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq l \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

то функция F будет кусочно гладкой на отрезке $[-l; l]$ и потому, согласно теореме 1, может быть разложена на этом отрезке в ряд (15). В силу нечетности функции F в этом ряду будут иметься только члены с синусами. На отрезке $[-l; l]$ указанный ряд будет разложением заданной функции f по синусам.

Если продолжить функцию f с отрезка $[0; l]$ четным образом на отрезок $[-l; 0]$, то продолженная функция, согласно теореме 1, будет также раскладываться на отрезке $[-l; l]$ в ряд Фурье, а так как она четная, то этот ряд содержит только члены с косинусами и ясно, что на отрезке $[0; l]$ он дает разложение функции f по косинусам.

К2-22.пр.6

Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $2l$ функцию f , если $f(x) = x$ при $a \leq x < a + 2l$. Выяснить, для каких значений x будет справедливо это разложение? Чему будет равна сумма ряда Фурье в остальных точках? А Найдем коэффициенты Фурье функции f (см. (12)):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l} \int_a^{a+2l} x dx = \frac{x^2}{4l} \Big|_a^{a+2l} = a + l, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{l}, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{2l}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{l}, \quad n \in N. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x) &\sim a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right] = \\ &= a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} (a - x). \end{aligned}$$

Сумма получившегося ряда в точках $x \in (a; a + 2l)$ равна x , в точках $x = a$ и $x = a + 2l$ равна

$$\frac{f(a+0) + f(a+2l-0)}{2} = a + l,$$

а в остальных точках числовой оси сумма в силу ее $2l$ -периодичности находится из ее значений в точках отрезка $[a; a + 2l]$.

К2-22.пр.7

Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad |a| < 1, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

А Согласно формулам Эйлера (19), имеем

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin x = \frac{z^2 - 1}{2zi},$$

где $z = e^{ix}$. Подставим выражения для синуса и косинуса (36) в формулу (35) и представим получившуюся рациональную функцию параметра a в виде суммы двух дробей следующим образом:

$$\frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{a(z^2 - 1)}{2i(1 - az)(z - a)} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - az} - \frac{1}{1 - a/z} \right).$$

Поскольку

$$|az| = |ae^{ix}| = |a| < 1, \quad |a/z| = |ae^{-ix}| = |a| < 1,$$

то дроби $1/(1 - az)$ и $1/(1 - a/z)$ можно разложить в степенные ряды (эти дроби представляют собой суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий). В результате получится ряд Фурье функции (35) в комплексной форме:

$$\frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \right) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n (e^{inx} - e^{-inx}) \right).$$

Заметив, что

$$\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \sin nx,$$

будем иметь

$$\frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx.$$

К2-22.пр.8

Разложить в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию $f(x) = \ln |2 \cos(x/2)|$. Δ 1-й способ. Непосредственно вычислим коэффициенты Фурье функции (37). Функция f четная, поэтому

$b_n = 0, n \in N, a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(2 \cos \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(2 \cos \frac{x}{2}) dx + \frac{\pi/2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(2 \cos \frac{x}{2}) dx$. Сделав во втором интеграле замену переменного $x = \pi - t$, убедимся, что $a_0 = 0$. При вычислении коэффициентов $a_n, n \in N$, проинтегрируем по частям и сделаем замену переменного x на $\pi - x$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \ln\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) \frac{\sin nx}{x} \Big|_0^{\pi} + \\ &+ \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \sin(x/2)}{\cos(x/2)} dx = (-1)^{n-1} \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos(x/2)}{\sin(x/2)} dx. \end{aligned}$$

Представив подынтегральную функцию в виде суммы

$$\frac{\sin nx \cos(x/2)}{\sin(x/2)} = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin(x/2)} + \frac{\sin(n - 1/2)x}{2 \sin(x/2)}$$

и используя для вычисления интеграла от каждого слагаемого тождества

$$\frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin(x/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx, \quad \frac{\sin(n - 1/2)x}{2 \sin(x/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos kx,$$

будем иметь

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \in N.$$

Поэтому

$$\ln \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n}, \quad x \neq \pi(2k+1), \quad k \in Z.$$

2-й способ. Применим для разложения в ряд Фурье функции (37) метод, основанный на применении формул Эйлера (16). Положив $z = e^{ix}$, $-\pi < x < \pi$ (следовательно, $z \neq -1$), в силу формул (16) будем иметь $\ln |2 \cos \frac{x}{2}| = \ln(2 \cos \frac{x}{2}) = \ln \frac{1+e^{ix}}{e^{ix/2}} =$

$$= \ln(1 + e^{ix}) - \ln e^{ix/2} = \ln(1 + z) - \frac{ix}{2}.$$

Заметив, что $|z| = |e^{ix}| = 1$, $z \neq -1$ и $z^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, получим, разложив в степенной ряд логарифм $\ln(1 + z)$ (см. § 21),

$$\begin{aligned} \ln(1 + z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{inx}}{n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}. \end{aligned}$$

В результате будем иметь

$$\ln \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} + i \left(-\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \right).$$

Поскольку в левой части этого равенства стоит действительное число, мнимая часть его правой части равна нулю:

$$-\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = 0,$$

и, следовательно, из формулы (39) следует разложение (38). Отметим, что попутно получилось разложение в ряд Фурье функции $x/2$. Действительно, из равенства (40) имеем

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi.$$

К2-22.пр.9

Доказать формулу (17). А Подставив в сумму Фурье

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

выражения (3) для коэффициентов Фурье, получим

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(x) dt. \end{aligned}$$

Сделав в получившемся интеграле замену переменного $u = t - x$, получим формулу (17).

К2-22.10

Доказать: если все коэффициенты Фурье непрерывной периода 2π функции равны нулю, то сама функция тождественно равна нулю. Из формулы (24) и условий $a_0 = 0, a_n = b_n = 0, n \in N$, следует, что для любого $x \in [-\pi : \pi]$ имеет место равенство

$$\int_0^x f(t) dt = 0.$$

Дифференцируя его, получим $f(x) \equiv 0$. П р и м е р

К2-22.11

Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \ln(1 - 2a \cos x + a^2), \quad |a| < 1.$$

Δ Для производной $f'(x) = \frac{2a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2}$ заданной функции $f(x)$ мы уже получили разложение в ряд Фурье в примере 7:

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx.$$

Проинтегрировав это равенство, получим

$$\ln(1 - 2a \cos x + a^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx + c.$$

Положив $a = 0$, будем иметь $c = 0$. Поэтому

$$\ln(1 - 2a \cos x + a^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx.$$

Пример

K2-22.12

Пусть квадрат функции f интегрируем на отрезке $[-\pi; \pi]$. Доказать равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x; f))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

А Возведя в квадрат подынтегральное выражение в левой части равенства и интегрируя его, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x; f))^2 dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \left(a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \right)^2 dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) - \\ &- 2 \left(a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \right) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) - 2\pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right). \end{aligned}$$

Из формул (26) и (41) следует, что для любой функции, квадрат которой интегрируем на отрезке $[-\pi; \pi]$, ряд Фурье этой функции сходится к ней в смысле среднего квадратичного на этом отрезке, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x; f))^2 dx = 0.$$

Пример

K2-22.13

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[0; \pi]$ и имеет производную, квадрат которой интегрируем на этом отрезке. Доказать: если

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$$

то справедливо равенство

$$\int_0^{\pi} (f(x))^2 dx \leq \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx$$

А В силу условия (43) разложение функции f по косинусам на отрезке $[0; \pi]$ имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (т. е. $a_0 = 0$), поэтому $f'(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin nx$. Поскольку $a_n^2 \leq n^2 a_n^2, n \in \mathbb{N}$, то из равенства Парсеваля для функций f и f'

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x))^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$$

сразу следует неравенство (44).

K2-22.14

Используя разложение (34) функции $f(x) = (\pi - x)/2$ в ряд Фурье, найти с помощью равенства Парсеваля сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. В силу равенств (12) и (35) имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} x dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x dx + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$. 15. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

А Наряду с рядом (45), который сходится при $x \neq 2\pi k, k \in Z$, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Этот ряд сходится на всей числовой оси. В данном случае для функции $f(z)$ (см. (15)) имеем

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z) = \ln \frac{1}{1-z}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq 1.$$

Следовательно, обозначая сумму ряда (45) через $u(x)$, а сумму ряда (46) через $v(x)$, получим

$$u(x) + iv(x) = \ln \frac{1}{1 - e^{ix}}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком логарифма:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{ix}} &= \frac{1}{(1 - \cos x) - i \sin x} = \\ &= \frac{1}{2 \sin^2(x/2) - 2i \sin(x/2) \cos(x/2)} = \frac{1}{2 \sin(x/2)} \frac{1}{\sin(x/2) - i \cos(x/2)} = \\ &= \frac{1}{2 \sin(x/2)} \left(\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin(x/2)} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, модуль числа $1/(1 - e^{ix})$ равен $1/(2 \sin(x/2))$, а аргумент $(\pi - x)/2$. Поэтому из равенства (47) будем иметь

$$\begin{aligned} u(x) + iv(x) &= \ln \frac{1}{1 - e^{ix}} = \ln \frac{1}{2 \sin(x/2)} + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \\ &= \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) + \frac{i(\pi - x)}{2}. \end{aligned}$$

Откуда сразу находится сумма ряда (45):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right), \quad 0 < x < 2\pi.$$

Заметим, что заодно мы доказали, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

K2-22.1

Разложить в ряд Фурье функцию:

- 1) $\sin^2 x$
- 2) $\cos^3 x$
- 3) $\sin^4 x$;
- 4) $\sin^6 x \cos^4 x$
- 5) $\sin^8 x + \cos^8 x$
- 6) $\sin^5 x$.

K2-22.2

Каков будет ряд Фурье для тригонометрического полинома

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Gamma$$

K2-22.3

Найти частичную сумму $S_3(x; f)$ ряда Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq l/2 \\ l/2, & l/2 \leq x \leq l \end{cases}$$

периодически продолженной с периодом $2l$. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, указать промежутки, в которых сумма ряда Фурье равна функции $f(x)$, и найти сумму ряда в указанной точке $x_0(4-11)$.

K2-22.4

$$f(x) = x, -\pi \leq x \leq \pi, x_0 = \pi.$$

K2-22.5

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq x < 0; \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

K2-22.6

$$f(x) = \begin{cases} \pi/4, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -\pi/4, & -\pi \leq x < 0; \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

20.3.4 Problems about Trigonometric Fourier series 2**K2-22.12**

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sign} x, -\pi < x < \pi$, и, пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на указанном промежутке, длина промежутка является периодом (13-26).

K2-22.13

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ A/2, & x = l, \\ 0, & l < x < 2l, \end{cases} \quad \text{на интервале } (0, 2l).$$

K2-22.14

$$f(x) = |x| \text{ на отрезке } [-1; 1].$$

K2-22.15

$$f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0, \\ bx, & 0 \leq x < \pi, \end{cases} \quad \text{на интервале } (-\pi, \pi).$$

K2-22.16

$$f(x) = \begin{cases} a, & -\pi/2 < x < \pi/2, \\ b, & \pi/2 \leq x < 3\pi/2, \end{cases} \quad \text{на интервале } (-\pi/2, 3\pi/2).$$

K2-22.17

$f(x) = x + \operatorname{sign} x$ на интервале $(-\pi; \pi)$.

K2-22.18

$f(x) = \pi^2 - x^2$ на интервале $(-\pi; \pi)$.

K2-22.19

$f(x) = x^3$ на интервале $(-\pi; \pi)$.

K2-22.20

$f(x) = e^{ax}, a \neq 0$, на интервале $(-\pi; \pi)$.

K2-22.21

$f(x) = e^{2|x|}$ на интервале $(-\pi; \pi)$.

K2-22.22

$f(x) = \sin ax, a \in Z$ на интервале $(-\pi; \pi)$.

K2-22.23

$f(x) = \cos ax, a \notin Z$ на отрезке $[-\pi; \pi]$. Доказать с помощью получившегося разложения, что

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi n^2}.$$

K2-22.24

$f(x) = x \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

K2-22.25

$f(x) = x \cos x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$.

K2-22.26

$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

K2-22.30

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \pi - 2x, 0 < x \leq \pi$, продолжив ее на отрезок $[-\pi; 0]$: 1) четным образом; 2) нечетным образом. Нарисовать в обоих случаях график суммы ряда.

20.3.5 Problems about Trigonometric Fourier series 3**K2-22.31**

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0; \pi]$ и продолженную на отрезок $[-\pi; 0]$ четным образом. Нарисовать график суммы ряда:

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi/2, & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

2) $f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right), 0 \leq x \leq \pi$. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию (32-39).

K2-22.32

$f(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$.

K2-22.33

$$f(x) = \arcsin(\cos x).$$

K2-22.34

$$f(x) = \arcsin(\sin x).$$

K2-22.35

$$f(x) = x - [x].$$

K2-22.36

$f(x) = (x)$ - расстояние от x до ближайшего целого числа.

K2-22.37

$$f(x) = |\cos x|.$$

K2-22.38

$$f(x) = |\sin x|.$$

K2-22.39

$$f(x) = |\cos(x/2)|.$$

K2-22.40

Разложить функцию $f(x) = x, 0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье по косинусам.

K2-22.41

Разложить функцию $f(x) = \cos 2x, 0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье по синусам.

K2-22.42

Разложить в ряд Фурье на $(0; \pi)$ по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 - x, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

K2-22.43

Разложить в ряд Фурье на интервале $(0; \pi)$ по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

K2-22.44

Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0; 2]$.

K2-22.51

Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

K2-22.52

Разложить функцию $f(x) = e^{ax}, 0 < x < \pi$: 1) в ряд Фурье по косинусам; 2) в ряд Фурье по синусам.

K2-22.53

Разложить функцию $f(x) = \sin ax, 0 \leq x \leq \pi$, в ряд Фурье по косинусам.

K2-22.54

Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & a < x \leq \pi \end{cases}$$

K2-22.55

Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/2a, & 0 \leq x \leq 2a \\ 0, & 2a < x \leq \pi \end{cases}$$

K2-22.56

Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4} = \frac{1}{96} \pi(\pi-2x)(\pi^2+2\pi x-2x^2), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

20.3.6 Problems about Trigonometric Fourier series 3**K2-22.57**

Найти ряд Фурье в комплексной форме функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

K2-22.58

Разложить в ряд Фурье в комплексной форме периодическую с периодом 2π функцию $f(x) = e^x, -\pi < x < \pi, f(\pi) = \operatorname{ch} \pi$.

K2-22.59

Разложить в ряд Фурье в комплексной форме периодическую с периодом 3 функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 3, \end{cases} \quad f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$$

K2-22.60

Разложить в ряд Фурье с помощью комплексной формы ряда Фурье функцию:

$$1) f(x) = \frac{1-a^2}{1-2a \cos x + a^2}, |a| < 1;$$

$$2) f(x) = \frac{1-a \cos x}{1-2a \cos x + a^2}, |a| < 1.$$

K2-22.61

Разложить в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию:

$$1) f(x) = \ln |\sin(x/2)|$$

$$2) f(x) = \ln |\operatorname{tg}(x/2)|.$$

K2-22.62

Используя разложение функции $f(x) = x$ в ряд Фурье (см. задачу 4), доказать, что:

- 1) $x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1}, -\pi \leq x \leq \pi;$
- 2) $x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{n^2-1}, -\pi < x < \pi.$

K2-22.63

Используя разложение функции $\ln | -2 \cos(x/2) |$ в ряд Фурье (см. пример 6), доказать, что:

- 1) $\sin x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{4} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \sin nx, -\pi < x < \pi;$
- 2) $\cos x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-1} \cos nx, -\pi < x < \pi.$

K2-22.64

Доказать, что если абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция f удовлетворяет условию:

- 1) $f(x + \pi) = f(x)$, то $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0, n \in N;$
- 2) $f(x + \pi) = -f(x)$, то $a_0 = 0, a_{2n} = b_{2n} = 0, n \in N.$

K2-22.65

Доказать, что если абсолютно интегрируемая на отрезке $[0; \pi]$ функция f удовлетворяет условию $f(\pi - x) = f(x)$, то ее коэффициенты Фурье обладают следующими свойствами: 1) при разложении f в ряд Фурье по косинусам $a_{2n-1} = 0, n \in N;$ 2) при разложении f в ряд Фурье по синусам $b_{2n} = 0, n \in N.$

K2-22.71

Доказать при $0 < x < \pi$ равенство:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} = \frac{\pi x}{8} (\pi - x);$
- 2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{8} \cos^2 x - \frac{1}{3} \cos x.$

K2-22.72

Какими особенностями обладают коэффициенты Фурье функции периода 2π , если ее график: 1) имеет центр симметрии в точках $(0; 0)$ и $(\pm\pi/2; 0)$; 2) имеет центр симметрии в начале координат и оси симметрии $x = \pm\pi/2$.

K2-22.73

Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и α_n, β_n функций f и g , если $f(-x) = g(x)$?

K2-22.74

Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и α_n, β_n функций f и g , если $f(-x) = -g(x)$?

K2-22.75

Доказать, что ряд Фурье конечной линейной комбинации 2π -периодических, абсолютно интегрируемых на периоде функций равен такой же линейной комбинации рядов Фурье заданных функций.

K2-22.76

Пусть f — 2π -периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде. Доказать, что если a_n^*, b_n^* — коэффициенты Фурье функции $f^*(x) = f(x + h)$, а a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции f , то

$$\begin{aligned} a_0^* &= a_0, & a_n^* &= a_n \cos nh + b_n \sin nh, \\ b_n^* &= b_n \cos nh - a_n \sin nh. \end{aligned}$$

В задачах 77-79 $f = u + iv$ — 2π -периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде и $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

K2-22.77

Доказать, что $f(x + \alpha) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{in\alpha}) e^{inx}$, $\alpha \in R$.

K2-22.78

Доказать, что если $k \in Z$, то $f(x) e^{ikx} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} e^{inx}$.

K2-22.79

Доказать, что $\bar{f} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{-n} e^{inx}$.

20.3.7 Problems about Trigonometric Fourier series 4**K2-22.80**

Пусть функции f и g 2π -периодические, $|f|^2$ и $|g|^2$ интегрируемы (в несобственном смысле) на отрезке $[-\pi; \pi]$,

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}.$$

Доказать, что тогда произведение fg является 2π -периодической, абсолютно интегрируемой на периоде функцией, и если

$$fg \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n e^{inx}, \quad \text{то } k_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{n-m}.$$

K2-22.81

Доказать, что

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} = \begin{cases} x - [x] & \text{для нецелых } x, \\ 1/2 & \text{для целых } x. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться разложением (12) в примере 3.

K2-22.82

Доказать, что для любого $x \in R, x \neq \pi m, m \in Z$, выполняется равенство

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n} \right).$$

Указание. Воспользоваться результатом задачи 23

K2-22.83

Доказать, что если функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[x; x + \pi]$, то

$$f(x + \pi) - f(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_x^{x+\pi} f(t) \cos((2n+1)(t-x)) dt$$

(Стеклов)

K2-22.86

Доказать, что ядро Дирихле D_n является четной непрерывной 2π -периодической функцией, $D_n(0) = n + 1/2$,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$$

и при $t \neq 2\pi k, k \in Z$, имеет место равенство

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + 1/2)t}{2 \sin(t/2)}.$$

K2-22.87

Доказать, что если f — 2π -периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция и $S_n(x)$ — ее сумма Фурье порядка n , то:

1) $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt$; 2) для любого $\delta \in (0; \pi)$ и любого $x \in R$ имеет место асимптотическое равенство

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

K2-22.88

Доказать, что если f — 2π -периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция, то существование и значение предела последовательности ее сумм Фурье $S_n(x)$ в каждой точке $x_0 \in R$ зависит только от существования и значения предела при $n \rightarrow \infty$ интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} D_n(t)[f(x_0+t) + f(x_0-t)]dt,$$

где δ — сколь угодно малое положительное число (это утверждение называется принципом локализации рядов Фурье).

K2-22.89

Пусть f — 2π -периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде. Доказать, что если x_0 является точкой непрерывности или точкой разрыва первого рода и при некотором $\delta > 0$ сходится интеграл

$$\int_0^{\delta} \frac{|f_{x_0}^*(t)|}{t} dt$$

K2-22.91

Функция f , определенная в некоторой окрестности U точки x , называется удовлетворяющей условию Гёльдера степени $\alpha > 0$ в этой точке, если существуют односторонние пределы $f(x+0)$, $f(x-0)$ и такая постоянная $c > 0$, что для всех $h > 0$, для которых $x+h \in U$ и $x-h \in U$, выполняются неравенства

$$|f(x+h) - f(x+0)| < ch^\alpha, \quad |f(x-h) - f(x-0)| < ch^\alpha.$$

Доказать, что если 2π -периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция f удовлетворяет в точке x условию Гёльдера степени $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье сходится в этой точке и его сумма равна

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

K2-22.92

Доказать, что если 2π -периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция имеет в окрестности данной точки ограниченную производную, то ряд Фурье функции сходится в этой точке к значению функции.

K2-22.93

Доказать, что ядро Фейера Φ_n является четной непрерывной 2π -периодической функцией,

$$\Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = 1$$

и при $t \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, имеет место равенство

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2((n+1)t/2)}{2(n+1)\sin^2(t/2)}.$$

K2-22.94

Доказать, что ядро Фейера Φ_n для любого $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) = 0.$$

K2-22.95

Доказать: если функция непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$ и принимает на его концах равные значения, то последовательность ее сумм Фейера равномерно сходится на этом отрезке к рассматриваемой функции.

K2-22.98

Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то для любого $\sigma > 0$ существует тригонометрический многочлен

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

такой, что для всех $x \in [-\pi; \pi]$ выполняется неравенство $|f(x) - T(x)| < \sigma$ (Вейерштрасс).

K2-22.99

Доказать, что для функции $s(x; r)$ (см. (21)) имеет место формула (Пуассон).

$$s(x; r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-x) + r^2} dt$$

K2-22.100

Доказать, что если 2π -периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция f имеет в точке x пределы слева и справа $f(x \pm 0)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-0} s(x; r) &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-x) + r^2} dt \\ &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \end{aligned}$$

т. е. ряд Фурье функции f суммируем методом Пуассона-Абеля к значению $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

K2-22.101

Доказать, что если f — 2π -периодическая, непрерывная функция, то $s(x; r)$ равномерно стремится на всей числовой оси к функции f при $r \rightarrow 1-0$.

K2-22.102

Доказать, что:

1) $\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $-\pi < x < \pi$; 2) частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье функции $\operatorname{sign} x$ имеют максимум при $x_n = \pi/(2n)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 1$$

K2-22.104

Функция $\bar{D}_n(x) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ называется сопряженным ядром Дирихле. Доказать, что:

- 1) $\bar{D}_n(x) = \frac{\cos(x/2) - \cos(n+x/2)x}{2 \sin(x/2)}$, $x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 2) $|D_n(x)| < \frac{\pi}{2|x|}$, $|\bar{D}_n(x)| \leq \frac{\pi}{|x|}$, $0 < |x| \leq \pi$.

K2-22.105

Числа $L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$ называются константами Лебега. Доказать, что:

- 1) $L_n = \frac{2}{\pi} J_n + O(1)$, $n \rightarrow \infty$, где $J_n = \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$
 2) $L_n \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n$, $n \rightarrow \infty$.

K2-22.106

Рядом, сопряженным к тригонометрическому ряду (1), называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx).$$

Пусть ряд (1) является рядом Фурье функции f . Доказать, что в этом случае частичные суммы $\bar{S}_n(x; f)$ сопряженного ряда могут быть записаны в виде

$$\bar{S}_n(x; f) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \bar{D}_n(t-x) dt,$$

где $\bar{D}_n(x)$ определена в задаче 104.

K2-22.107

Доказать, что если f - интегрируемая по Риману на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция и, следовательно, существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in [-\pi; \pi]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$, то

$$|S_n(x; f)| \leq cM \ln n, \quad |\bar{S}_n(x; f)| \leq cM \leq n,$$

$|x| \leq \pi$, где c - некоторая абсолютная постоянная.

K2-22.108

Пусть f - 2π -периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция и

$$\omega(\delta; f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)| dx$$

(функция $\omega(\delta; f)$ называется интегральным модулем непрерывности функции f). Доказать, что для комплексных коэффициентов Фурье c_n функции f выполняются неравенства

$$|c_n| \leq \frac{1}{4\pi} \omega\left(\frac{\pi}{n}; f\right), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

K2-22.109

В предположениях предыдущей задачи доказать, что для коэффициентов Фурье a_n и b_n функции f , принимающей только действительные значения, выполняются неравенства

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \omega\left(\frac{\pi}{n}; f\right), \quad |b_n| \leq \frac{1}{2\pi} \omega\left(\frac{\pi}{n}; f\right), \quad n \in N.$$

K2-22.10

Доказать, что если тригонометрический ряд сходится равномерно, то он является рядом Фурье своей суммы. 1

K2-22.11

Являются ли нижеследующие тригонометрические ряды рядами Фурье:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2};$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 1

20.3.8 Problems about Trigonometric Fourier series 5**K2-22.12**

Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

1

K2-22.13

Доказать, что если тригонометрический ряд имеет подпоследовательность частичных сумм, равномерно сходящуюся на отрезке $[-\pi; \pi]$ к некоторой функции, то этот ряд является ее рядом Фурье. 1

K2-22.17

Доказать, что тригонометрический ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$$

является, а ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

не является рядом Фурье. 1

K2-22.18

Доказать, что если две непрерывные периода 2π функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то эти функции тождественно равны. 1

K2-22.19

Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$ и ее ряд Фурье сходится равномерно на этом отрезке, то в любой точке отрезка $[-\pi; \pi]$ сумма ряда равна функции f в этой точке.

K2-22.120

Доказать, что если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- ее ряд Фурье, то для любых точек $x' \in [-\pi; \pi]$ и $x'' \in [-\pi; \pi]$ справедливо равенство

$$\int_{x'}^{x''} f(x) dx = \int_{x'}^{x''} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'}^{x''} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

K2-22.123

Используя результаты задачи 122, оценить коэффициенты Фурье функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi; \pi]$, если:

- 1) $f(x) = x^{10}$
- 2) $f(x) = x^5$;
- 3) $f(x) = (x^2 - \pi^2)^{10}$
- 4) $f(x) = (x^2 - \pi^2) \sin^2 x$;
- 5) $f(x) = (x^2 - \pi^2)^4 \sin^2 2x$;
- 6) $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2 (\cos 5x - \cos 3x)^2$.

K2-22.124

Доказать, что если функция f имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и интегрируемую по Риману производную порядка $k \geq 1$, причем $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, $|f^{(k)}(x)| \leq c_k$, $-\pi \leq x \leq \pi$, то

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leq A c_k \frac{\ln n}{n^k}, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

где A - абсолютная постоянная. Указан и е. Воспользоваться результатом задачи 122.

K2-22.125

Доказать, что если функция $f = u + iv$ имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, кусочно непрерывную производную порядка $k \leq 1$ и

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad f^{(k)} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} e^{inx}$$

то

$$c_n = c_n^{(k)} / (in)^k$$

1

K2-22.131

Доказать, что если последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$: 1) сходится на всей числовой оси; 2) при любом $\delta > 0$ сходится равномерно на отрезке $[\delta; 2\pi - \delta]$. 1

K2-22.132

Доказать, что если последовательность $\{b_n\}$ убывает, то для равномерной сходимости на отрезке $[0; 2\pi]$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} n b_n = 0$. 1

K2-22.133

Привести пример тригонометрического ряда, который сходится равномерно на отрезке $[-\pi; \pi]$, но не сходится абсолютно во всех точках этого отрезка. 1

K2-22.134

Доказать, что последовательность $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right\}$ ограничена на всей числовой оси. 1

K2-22.135

Доказать, что если последовательность $\{b_n\}$ убывает, а последовательность $\{nb_n\}$ ограничена, то частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ограничены в совокупности, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [-\pi; \pi]$ и всех $n \in N$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \right| \leq c.$$

1

K2-22.136

Пусть f - непрерывная функция с периодом 2π . Выразить коэффициенты Фурье A_n, B_n свертки

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

через коэффициенты Фурье a_n, b_n функции f .
1

K2-22.140

Доказать, что если все коэффициенты Фурье функции f с интегрируемым на отрезке $[-\pi; \pi]$ квадратом равны нулю, то $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx = 0$. В частности, если при этом функция f непрерывна, то $f(x) = 0$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

В задачах 141 и 142 квадраты функций f и g интегрируемы на отрезке $[-\pi; \pi]$:

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$g \sim \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

1

K2-22.141

Доказать, что если $a_0 = \alpha_0, a_n = \alpha_n, b_n = \beta_n, n \in N$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|dx = 0.$$

В частности, если при этом функции f и g непрерывны, то $f(x) = g(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$. 1

K2-22.142

Доказать, что $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 2a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$. 1

K2-22.143

Пусть функции f и g имеют интегрируемые квадраты на отрезке $[-\pi; \pi]$. Доказать, что ряд Фурье произведения fg функций f и g может быть получен почленным перемножением рядов Фурье этих функций. 1

K2-22.144

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[0; \pi]$, имеет производную, квадрат которой интегрируем на этом отрезке, и $f(0) = f(\pi) = 0$. Доказать, что тогда

$$\int_0^{\pi} (f(x))^2 dx \leq \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx.$$

1

K2-22.145

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, имеет производную, квадрат которой интегрируем

$$= f(\pi) \text{ и } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0. \text{ Доказать, что тогда}$$

на этом отрезке, $f(-\pi) =$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \leq \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx.$$

20.3.9 Sums of rows from Fourier decomposition (!!!)

Найти сумму ряда (146-178).

K2-22.146

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} \cdot 1$$

K2-22.147

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} \cdot 1$$

K2-22.148

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!} \cdot 1$$

K2-22.149

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!} \cdot 1$$

K2-22.150

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2nx}{(2n)!} \cdot 1$$

K2-22.151

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2nx}{(2n)!} \cdot 1$$

K2-22.152

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n(n+1)} \cdot 1$$

K2-22.153

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)} \quad 1$$

K2-22.154

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1} \cdot 1$$

K2-22.155

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^2-1} \cdot \quad \mathbf{156.} \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1} \cos nx \cdot 1$$

K2-22.157

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1} \sin nx.$$

K2-22.158

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}.$$

K2-22.159

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}$$

K2-22.160

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}.$$

K2-22.161

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}$$

K2-22.162

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{n}.$$

K2-22.169

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

K2-22.170

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n} \cdot 1$$

K2-22.171

$$\cos x + \frac{1}{2} \frac{\cos 3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos 5x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\cos 7x}{7} + \dots \quad 1$$

K2-22.172

$$\sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin 5x}{5} + \dots \quad 1$$

K2-22.173

$$\frac{\cos x}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{\cos 3x}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos 5x}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\cos 7x}{7 \cdot 8} + \dots$$

K2-22.174

$$\frac{\sin x}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos 5x}{5 \cdot 6} + \dots$$

K2-22.175

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx, |a| < 1.$$

K2-22.176

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}.$$

K2-22.177

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

K2-22.178

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{r^n \sin nx}{n}, |r| \leq 1$$

МФТИ.Т.17

Докажите, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^\alpha}$ является рядом Фурье непрерывной функции при $\alpha > 1$ и не является рядом Фурье интегрируемой по Лебегу функции при $\alpha \leq 0$.

МФТИ.Т.18

Найдите ряд Фурье функции $f(x) = D(x)e^{10x} \sin^7 x$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и 2π -периодически продолженной на $\mathbb{R}$. Здесь

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

МФТИ.Т.19

Найдите в точке $x = 0$ сумму ряда Фурье функции $f(x) = x^{2/3}$: заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и 2π -периодически продолженной на $\mathbb{R}$.

МФТИ.Т.20

Сходятся ли равномерно ряды Фурье функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ на отрезке $[0; \pi/2]$ по следующим степеням: а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$; в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$? Постройте графики сумм этих рядов.

МФТИ.Т.21 Убывание коэффициентов Фурье

Не вычисляя коэффициентов Фурье, определить порядок их убывания для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

- а) x^{2021} ;
- б) x^{2022} ;
- в) $|\sin x|^3$;
- г) $\sin^2 x (\pi^2 - x^2)^5$.

МФТИ.гарм.Т.3. Убывание коэффициентов Фурье

Не вычисляя коэффициентов Фурье, определить порядок их убывания для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$: а) x^7 б) x^{10} в) $x^5 + x^6$; г) $(\pi^2 - x^2)^2$ д) $|\sin \frac{x}{2}|^3$; е) $x^3 \sin^2 x$.

20.3.10 Decomposition into atypical rows (!?!)

Задача про ряд для КТП от гауссова интеграла с $-\frac{\lambda}{4!}x^4$ (!?!?!?!)

Consider the integral

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2!} - \frac{\lambda}{4!}x^4}$$

Find a series expansion for $Z(\lambda)$ for $\lambda \gg 1$ of the form

$$\hat{Z}_N(\lambda) = \sum_{n=0}^N d_n \lambda^{-(2n+1)/4}$$

Is this series convergent? For what value of N will you obtain a value for $\hat{Z}_N(0.1)$ which is close to the exact value $Z(0.1)$.

(вообще хз.)

20.4 Tasks on the analysis of series and sequences**20.4.1 Converging Series Properties Tasks**

(важный раздел, где все про их анализ, по сути центральный про ряды!!!)

К2-13.пр.1

1) Пусть $|q| < 1$. Доказать, что ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$;

сходятся, и найти их суммы.

А 1) Используя формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии, получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q},$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$. Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

2)

Пусть $|q| < 1$. Доказать, что ряды: $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$; сходятся, и найти их суммы.

2) Так как $S_n = \sum_{k=1}^n kq^k$, то $S_n - S_n q = (q + 2q^2 + \dots + nq^n) - (q^2 + 2q^3 + \dots + (n-1)q^n + nq^{n+1}) = q + q^2 + \dots + q^n - nq^{n+1}$ откуда

$$S_n(1 - q) = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} - nq^{n+1}, \quad S_n = \frac{q}{(1 - q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1 - q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1 - q}.$$

Если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nq^{n+1} = 0,$$

и поэтому существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2},$$

Т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad |q| < 1.$$

К2-13.пр.2

Доказать, что если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ представимы в виде $a_n = b_{n+1} - b_n$, и если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то ряд сходится и его сумма равна $b - b_1$, т. е. Т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = b - b_1.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = b$, то отсюда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = b - b_1,$$

т. е. справедлива формула (6).

К2-13.пр.3

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и найти его сумму, если:

1) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$;

2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

3) $a_n = \frac{1}{n(n+m)}$, $m \in N$. 1) Воспользуемся равенством $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Обозначим $b_n = -1/n$; тогда $a_n = b_{n+1} - b_n$, $n \in N$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b = 0$. По формуле (6) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

2) Так как

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{(n+3) - n}{3n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}, \end{aligned}$$

то, полагая

$$b_n = -\frac{1}{3n(n+1)(n+2)},$$

получаем $a_n = b_{n+1} - b_n$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. По формуле (6) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = -b_1 = \frac{1}{18}.$$

3) Используя равенство $\frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right)$, получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+m} \right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k},$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k},$$

Т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right)$$

Пример

K2-13.4

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если:

1) $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+3}$;

2) $a_n = \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

3) $a_n = \sin n\alpha$, где $\alpha \neq \pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$). - 1) Последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела, так как $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$, а $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -1$. Поэтому ряд расходится.

2) $a_n = \frac{(1-3/2n^2)^{n^2}}{(1+1/2n^2)^{n^2}}$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{e^{-3/2}}{e^{1/2}} = e^{-2} \neq 0$, и поэтому ряд расходится. 3) Предположим, что ряд сходится. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\alpha = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+1)\alpha = 0,$$

Т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n\alpha \cos \alpha + \cos n\alpha \sin \alpha) = 0,$$

откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\alpha = 0$, так как $\sin \alpha \neq 0$ (по условию $\alpha \neq \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$). И так,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\alpha = 0,$$

что невозможно:

$$\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$, где $\alpha \neq \pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$), расходится. Заметим, что если $\alpha = \pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$), то ряд сходится, и его сумма равна нулю.

При мер

K2-13.5

Доказать, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$ выполняется необходимое условие сходимости, но этот ряд расходится. А Здесь

$$a_n = \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Пользуясь тем, что при $k = 1, 2, \dots, n$ справедливы неравенства

$$a_k = \frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

му, если:

1) $z_n = \frac{1}{(1+i)^n}$;

2) $z_n = a^n e^{in\varphi}$, где $0 < a < 1, \varphi \in \mathbb{R}$. А 1) Так как числа $z_n = 1/(1+i)^n, n \in \mathbb{N}$, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1/(1+i)$, где $|q| = 1/\sqrt{2}$, то по формуле (3) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{i} = -i.$$

2) $z_n = a^n e^{in\varphi} = (ae^{i\varphi})^n$, где $|ae^{i\varphi}| = |a| = a < 1$. Применяя формулу (3) при $q = ae^{i\varphi}$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{in\varphi} &= \frac{ae^{i\varphi}}{1 - ae^{i\varphi}} = \frac{a(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1 - a \cos \varphi - ia \sin \varphi} = \\ &= a \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)(1 - a \cos \varphi + ia \sin \varphi)}{(1 - a \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{a}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} (\cos \varphi - a + i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Пример

K2-13.7

Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, используя критерий Коши.

А Докажем, что для этого ряда выполняется условие Коши (4). Используя неравенства

$$z_k = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$

при $k > 1$ и замечая, что $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $0 < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} +$

$$+ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Итак, для любых $n \in N, p \in N$ выполняется неравенство

$$|z_{n+1} + \dots + z_{n+p}| < 1/n.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$, следует существование номера N_ε такого, что для всех $n \geq N_\varepsilon$ и для любого $p \in N$ будет выполняться неравенство (4). Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Пример 8. Доказать с помощью критерия Коши, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Δ Для любого $k \in N$ возьмем $n = k, p = k$. Тогда

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2},$$

т. е. условие (5) выполняется при $\varepsilon = 1/2$. Следовательно, гармонический ряд расходится. ЗАДАЧИ Найдите n -ю частичную сумму S_n ряда и сумму S этого ряда (1-6).

K2-13.1

- 1) $\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots$;
- 2) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} + \dots$;
- 3) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)^9 + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) + \dots$
- 4) $\left(3 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{18}\right) + \dots \dots + \left(\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}}\right) + \dots$
- 5) $\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}\right) + \left(\frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^9} + \frac{5}{10^4}\right) + \dots$

$$\dots + \left(\frac{1}{10^n} + \frac{2}{10^{n+1}} + \frac{5}{10^{n+2}}\right) + \dots$$

2. 1) $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$
- 2) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$
- 3) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$;
- 4) $\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \dots$
- 5) $\frac{1}{a(a+1)(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)} + \dots \dots + \frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)(a+n+3)} + \dots$

K2-13.3

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 + 5n - 6}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 24n - 5}$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{49n^2 + 7n - 12}$

K2-13.4

- 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1};$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+4n-3};$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-15};$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2+12n-35}.$

K2-13.5

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)};$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+9}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)};$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2};$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}};$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$

K2-13.6

- 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$
- 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right);$
- 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^3-1}{n^3+1}$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)};$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n};$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} \cos \frac{3\alpha}{2^{n+1}};$ 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)};$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$

K2-13.7

Доказать, что если $a_k = \frac{1}{u_k u_{k+1} \dots u_{k+m}}$, где $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ последовательные члены арифметической прогрессии с разностью d ,

причем $d \neq 0, u_k \neq 0 (k \in \mathbb{N})$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n u_{n+1} \dots u_{n+m}} = \frac{1}{m d u_1 u_2 \dots u_m}$$

Найти сумму ряда $(8 - 10)$.

K2-13.8

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)};$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)};$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+5)};$

- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$. 9. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{i}{5^n} \right)$;
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{4^n}$
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2+in}{n(n+1)(n+2)}$
 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1-i)^n} \cdot 1$

K2-13.0

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\alpha, \alpha \in R, a \in R, |a| < 1$;
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\alpha, \alpha \in R, a \in R, |a| < 1$ Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие сходимости (11, 12). 1

K2-13.1

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+1}$
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3n+4}{5n+1}}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$
 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,02}$
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n$;
 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4} \right)^{n^3} \cdot 1$

K2-13.2

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$;
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2) \ln \frac{n^2+1}{n^2}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{n+2}$;
 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3} \arcsin \frac{1}{n^2+2}$
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$
 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n} \cdot 1$

K2-13.3

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

- 1) $a_n = \frac{\cos nx}{2^n}$;
 2) $a_n = \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$;
 3) $a_n = \frac{\cos \alpha^n}{n^2}$;
 4) $a_n = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} \cdot 1$

K2-13.4

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

- 1) $a_n = \frac{1}{2n+1}$;

- 2) $a_n = \frac{n+1}{n^2+4}$;
 3) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;
 4) $a_n = \ln(1 + 1/n)$. 1

K2-13.5

Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходятся и их суммы соответственно равны s и σ , то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$, где $\zeta_n = \lambda z_n + \mu w_n$, сходится при любых комплексных λ, μ и его сумма равна $\lambda s + \mu \sigma$. 1

K2-13.6

Доказать, что: 1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то при любом m сходится его m -й остаток; 2) если какой-либо остаток ряда сходится, то сходится и сам ряд. При этом справедливо равенство $S = S_m + r_m$, где S и S_m сумма его m -го остатка. 1

K2-13.7

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и его сумма равна S , то сходится и ряд $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$, где $w_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_{k_1}$, $w_2 = z_{k_1+1} + z_{k_1+2} + \dots + z_{k_2}$, $\dots$ ($\{k_j\}$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел) и при этом $\sum_{j=1}^{\infty} w_j = S$. 1

K2-13.8

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, где $a_n \in R (n \in N)$, сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$. 1

K2-13.9

Выяснить, что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = a_n + b_n (n \in N)$, если известно, что:

- 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится;
 2) оба эти ряда расходятся. 2

K2-13.0

Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, где $a_n \in R, b_n \in R (n \in N)$, сходятся, то сходятся и ряды:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$.

20.4.2 Problems about Rows with non-negative members**K2-14.пр.1**

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$. А Так как $0 \leq \frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то $\sum_{k=1}^n \frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$, поэтому ряд сходится.

K2-14.пр.2

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \frac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}}$; 2) $a_n = \frac{n+1}{n^2}$. - 1) Так как при всех $n \in N$ выполняются неравенства $2 \leq 5+3(-1)^n \leq 8$, то $0 < a_n \leq \frac{1}{2^n}$, и из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}}$. 2) Так как $a_n > 1/n$, то из расходимости гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$.

K2-14.пр.3

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \frac{e^n + n^4}{3^n + \ln^2(n+1)}$;

2) $a_n = \frac{2n^2 + 5n + 1}{\sqrt{n^6 + 3n^2 + 2}}$. А 1) Из асимптотических формул

$$e^n + n^4 \sim e^n, \quad 3^n + \ln^2(n+1) \sim 3^n \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

следует, что $a_n \sim \left(\frac{e}{3}\right)^n$, где $\frac{e}{3} < 1$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. 2) Так как

$$2n^2 + 5n + 1 \sim 2n^2, \quad \sqrt{n^6 + 3n^2 + 2} \sim n^3,$$

то $a_n \sim \frac{2}{n}$, и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

K2-14.пр.4

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$;

2) $a_n = n^2 e^{-n^3}$;

3) $a_n = \frac{1}{n \ln^\beta n}$, $n \geq 2$. А 1) При $\alpha > 0$ функция $f(x) = 1/x^\alpha$ неотрицательна и убывает

на промежутке $[1, +\infty)$. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$. Поэтому

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$ (интегральный признак).

Если $\alpha \leq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ расходится, так как в этом случае

$$a_n = 1/n^\alpha \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$. 2) Функция $f(x) = x^2 e^{-x^3}$ неотрицательна и убывает при $x \geq 1$. Несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx$$

сходится, так как существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, где $F(x) = -e^{-x^3}/3$ - первообразная функции $x^2 e^{-x^3}$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ сходится. 3) Рассмотрим при $x \geq 2$ функцию $f(x) = 1/(x \ln^\beta x)$.

Эта функция принимает положительные значения на промежутке $[2, +\infty)$, а ее производная равна

$$f'(x) = -\frac{\ln x + \beta}{x^2 \ln^{\beta+1} x}.$$

Если $\ln x + \beta$, т. е. $x > e^{-\beta}$, то $f'(x) < 0$. Следовательно, функция f положительна и убывает на промежутке $[a, +\infty)$, где $a = \max(2; e^{-\beta})$. Так как интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x}$$

сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leq 1$ (§12, пример 13), то ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$$

сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leq 1$.

К2-14.пр.5

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = 1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}};$

2) $a_n = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{n-1}{n+1}}\right)^\alpha$

3) $a_n = \ln \frac{1+\operatorname{tg}(1/\sqrt{n})}{1+\operatorname{arctg}(1/\sqrt{n})}$. Δ 1) Так как $\cos t = 1 - t^2/2 + o(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, то

$$a_n = 1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{4/3}} \right),$$

откуда $a_n \sim \pi^2 / (2n^{4/3})$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ сходится. 2) Заметив, что $\frac{n-1}{n+1} = \frac{1-1/n}{1+1/n}$, и применив асимптотическую формулу

$$(1+t)^\beta = 1 + \beta t + o(t), \quad t \rightarrow 0,$$

при $\beta = 1/3$ и $\beta = -1/3$ получим $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/3} = \left(1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $a_n \sim \left(\frac{2}{3n}\right)^\alpha$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно, ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. 3) Используя разложения

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad \operatorname{tg} t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, $t \rightarrow 0$, находим

$$\begin{aligned} \ln(1 + \operatorname{tg} t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}t^3 + o(t^3) \\ \ln(1 + \operatorname{arctg} t) - t - \frac{t^2}{2} &+ o(t^3), \quad t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{2}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

т. е. $a_n \sim 2/3n^{3/2}$, и поэтому ряд сходится.

К2-14.пр.6

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Даламбера, если:

1) $a_n = a^n/n!$, $a > 0$;

2) $a_n = 3^n n! / n^n$. Δ 1) Так как $a_{n+1}/a_n = a/(n+1)$, то для любого $a > 0$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

и поэтому ряд сходится.

3 замечание. Используя необходимое условие сходимости ряда, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

2) Так как $a_{n+1} = n!3^{n+1}/(n+1)^n$, то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{(1+1/n)^n},$$

откуда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1,$$

и поэтому ряд расходится.

К2-14.пр.7

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Коши, если:

1) $a_n = n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n$;

2) $a_n = \left(\frac{3n}{n+5} \right)^n \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}$;

3) $a_n = \frac{n!}{n\sqrt{n}}$. А 1) Так как $\sqrt[n]{a_n} = n^{5/n} \frac{3n+2}{4n+3}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 3/4,$$

и поэтому ряд сходится. 2) В этом случае

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{3n}{n+5} \left(\frac{1+2/n}{1+3/n} \right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{e} > 1,$$

и поэтому ряд расходится. 3) Используя асимптотическую формулу Стирлинга

$$n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

получаем

$$\sqrt[n]{a_n} \sim e^{-1} (2\pi)^{1/(2n)} n^{1/(2n)-1/\sqrt{n}} n \sim \frac{n}{e}, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда следует, что ряд расходится.

К2-14.пр.8

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Раабе, если

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

- Так как

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2(n+1))!!} = \frac{(2n-1)!!(2n+1)}{(2n)!!(2n+2)} = a_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

То

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \frac{1}{2},$$

и поэтому ряд сходится.

К2-14.пр.9

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Гаусса, если

$$a_n = (2 - \sqrt[n]{a})(2 - \sqrt[n+1]{a}) \dots (2 - \sqrt[n+1]{a}), \quad a > 0.$$

А Заметим, что $a_n/a_{n+1} = 1/(2 - \sqrt[n+1]{a})$, где

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{a} &= \exp \left\{ \frac{\ln a}{n+1} \right\} = \\ &= 1 + \frac{\ln a}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{\ln^2 a}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}, \quad \text{где } |\gamma_n| < c. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{1 - (\ln a)/n - \gamma_n/n^2} = 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\tilde{\gamma}_n}{n^2},$$

где $|\tilde{\gamma}_n| < M$. Если $\ln a > 1$, т. е. $a > e$, то ряд сходится. Если же $a \leq e$, то ряд расходится.

ЗАДАЧИ

К2-14.1

Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, установив ограниченность сверху последовательности его частичных сумм:

1) $a_n = \frac{\sin^4 2n}{(n+1)(n+2)};$

2) $a_n = \frac{\pi - \arctg n}{(n+1)(n+2)(n+3)};$

3) $a_n = \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right) q^n, 0 < q < 1;$ 4) $a_n = \frac{n2^n + 5}{n3^n + 4}.$ Используя признак сравнения, исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

на сходимость (2, 3).

К2-14.2

1) $a_n = \frac{5+3(-1)^{n+1}}{2^n};$

2) $a_n = \frac{\arctg n}{n^2+1};$

3) $a_n = \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}};$

4) $a_n = \frac{\cos(\pi/4n)}{\sqrt[5]{2n^5-1}};$

5) $a_n = \sin \frac{3+(-1)^n}{n^2};$ 6) $a_n = \frac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2 \ln n}$ 7) $a_n = \frac{n+2}{n^2(4+3 \sin(\pi n/3))};$ 8) $a_n = \frac{\ln(1+(3+(-1)^n \arctg 2n)/n)}{\ln^2 n}, n \geq 2.$

К2-14.3

1) $a_n = \frac{\arcsin((n-1)/(n+1))}{n\sqrt{\ln(n+1)}};$

2) $a_n = \frac{\arctg(n^2+2n)}{3^n+n^2};$

3) $a_n = \frac{\cos^4(2n/(n+1))}{\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}};$

4) $a_n = \frac{n^3(\sqrt{2+\sin \sqrt{n}})}{2^n+n^2};$

5) $a_n = \frac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[4]{n^4+3n^2+1} \ln^3(n+2)};$

6) $a_n = n^2 e^{-n};$

7) $\dot{a}_n = (3\tilde{n} + \tilde{n}^3) \tilde{e}^{-\sqrt{n}} \ln \tilde{n};$ 8) $a_n = \frac{(3-2 \cos^2(\pi n/3))e^n}{n^2 2^n}.$ Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, получив

асимптотическую формулу вида $a_n \sim c/n^\alpha$ при $n \rightarrow \infty$ (4–6).

К2-14.4

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}};$ 2) $a_n = 1 - \cos \frac{2\pi}{n};$

3) $a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \right)$

4) $a_n = \frac{3n+1}{(2n+1)^2};$

5) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \arctg \frac{1}{2\sqrt{n}};$

6) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \arcsin \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}};$ 7) $a_n = (e^{1/n} - 1) \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}};$ 8) $a_n = \frac{n^3+3n^2+5}{n\sqrt[5]{n^{16}+n^4+1}}.$

K2-14.5

- 1) $a_n = \sin \frac{2n+1}{n^3+5n+3}$;
- 2) $a_n = n \operatorname{tg} \frac{n+2}{n^2+3}$;
- 3) $a_n = \exp \left\{ \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n^2+3} \right\} - 1$
- 4) $a_n = \frac{\ln(1+\sin(1/n))}{n+\ln^2 n}$;
- 5) $a_n = \ln \frac{n+3}{n^2+4}$;
- 6) $a_n = \ln \frac{n^2+4}{n^2+3}$ 7) $a_n = \sqrt{n} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{n} \right) - 1 \right)$; 8) $a_n = \arcsin \frac{(\sqrt{n+1})^3}{n^3+3n+2}$.

K2-14.6

- 1) $a_n = \ln \frac{1}{\cos(2\pi/n)}$; 2) $a_n = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{2}{n} \right)} \ln \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}, n \geq 2$;
- 3) $a_n = \sqrt{\frac{n-1}{n^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}$;
- 4) $a_n = n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1$;
- 5) $a_n = \left(1 - \frac{\ln n}{n} \right)^{2n}$;
- 6) $a_n = \log_{2^n} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{n} \right)$; 7) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$; 8) $a_n = \sqrt{n+1} \ln \operatorname{ch} \left(\frac{1}{n} \right)$. Найти все значения α , при которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(7-13)$.

K2-14.7

- 1) $a_n = (1 - n \sin(1/n))^\alpha$; 2) $a_n = (\operatorname{sh}(1/n) - \sin(1/n))^\alpha$;
- 3) $a_n = (n \operatorname{sh}(1/n) - \operatorname{ch}(1/n))^\alpha$; 4) $a_n = (-\cos(1/n) + \operatorname{ch}(1/n))^\alpha$;
- 5) $a_n = (\operatorname{arctg}(1/n) - \ln(1 + 1/n))^\alpha$;
- 6) $a_n = (e^{\operatorname{tg}(1/n)} - 1)^\alpha$; 7) $a_n = \left(\exp \left\{ \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right\} - 1 - \frac{1}{n} \right)^\alpha$ 8) $a_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n^2-n}}{n} \right)^\alpha$.

K2-14.8

- 1) $a_n = n \sin^\alpha \left(\frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right)$;
- 2) $a_n = \left(\exp \left\{ \frac{-1}{2n^2} \right\} - \cos \frac{1}{n} \right)^\alpha$;
- 3) $a_n = \left(\ln \operatorname{sh} \frac{1}{n} - \ln \frac{1}{n} \right)^\alpha$;
- 4) $a_n = \left| \ln n + \ln \sin \frac{1}{n} \right|^\alpha$;
- 5) $a_n = \left(\exp \left\{ 1 - \cos \frac{1}{n} \right\} - 1 \right)^\alpha \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$;
- 6) $a_n = \left| \ln \frac{n+1}{n-1} - \frac{2}{n-1} \right|^\alpha, n \geq 2$; 7) $a_n = \frac{\ln^\alpha(1+\sqrt{\operatorname{arctg}(1/n)})}{\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$; 8) $a_n = (n+1) \left(e^{\operatorname{tg}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} - 1 \right)^\alpha$; 9) $a_n = \left(n \sin \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n\sqrt{3}} \right)^\alpha$;

10)

$$a_n = n^\alpha (\ln(n^2+1) - 2 \ln n);$$

11)

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n^\alpha};$$

12)

$$a_n = \left(\cos \cos \frac{1}{n} - \cos \operatorname{ch} \frac{1}{n} \right)^\alpha.$$

K2-14.9

- 1) $a_n = \left(e^{1/2n} - \left(1 + \operatorname{sh} \frac{1}{n} \right)^{1/2} \right)^\alpha$;
- 2) $a_n = \left(\frac{1}{n \sin(1/n)} - \cos \frac{1}{n} \right)^\alpha$;
- 3) $a_n = \left| \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right|^\alpha$;

- 4) $a_n = \left(1 - \sin \frac{\pi n^2}{2n^2+1}\right)^\alpha$
 5) $a_n = \left(\frac{e^2 - (1+2/n)^n}{n}\right)^\alpha$;
 6) $a_n = \left(\left(\frac{\operatorname{sh}(1/n)}{\sin(1/n)}\right)^{3n} - 1\right)^\alpha$; 7) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha \ln \frac{2n+1}{2n-1}$; 8) $a_n = \left(1 - \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{1/n}\right)^\alpha$.

K2-14.10

- 1) $a_n = (n^2 + 1) \ln^\alpha \frac{\operatorname{sh}(1/n)}{\sin(1/n)}$;
 2) $a_n = \frac{(e - (1+1/n)^n)^\alpha}{(1 - \cos(1/n))^2}$;
 3) $a_n = \left(\sqrt[4]{n^2 + n + 1} - \sqrt{n + \frac{1}{2}}\right)^\alpha$;
 4) $a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right)^\alpha$;
 5) $a_n = \ln^\alpha \frac{\operatorname{ch}(1/n)}{\cos(1/n)}$;
 6) $a_n = \left(\frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n} - \sqrt{n}}}}{n}\right)^\alpha$; 7) $a_n = \left|\ln \cos \left(\sin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{1}{n}\right)\right|^\alpha$; 8) $a_n = \left(\frac{\pi}{2n+2} - \cos \frac{\pi n}{2n+2}\right)^\alpha$.

K2-14.11

- 1) $a_n = \alpha^{-\ln n}$, $\alpha > 0$; 2) $a_n = \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha n}$;
 3) $a_n = n^\alpha - \left(\exp \left\{n \arcsin \frac{1}{n^2}\right\} - 1\right)$;
 4) $a_n = \exp \left\{n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}\right\} - 1 - n^\alpha$;
 5) $a_n = \exp \left\{n \sin \frac{1}{n^2}\right\} - n^\alpha$;
 6) $a_n = \frac{1}{n} - \ln^\alpha \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)$; 7) $a_n = \left(n \arcsin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} - 1$; 8) $a_n = 1 - \left(n \ln \cos \frac{1}{n} + 1\right)^{n^\alpha}$.

K2-14.12

- 1) $a_n = \frac{n^{2n}}{(n+\alpha)^{n+2}(n+2)^{n+\alpha}}$, $\alpha > -1$;
 2) $a_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^\alpha} - 1$;
 3) $a_n = \exp \left\{\frac{1}{2n^\alpha}\right\} - \left(1 + \sin^2 \left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right)^{1/2}$;
 4) $a_n = \left(e^{1/n} - \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} - 1$;
 5) $a_n = \ln \left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) - \ln \cos \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$;
 6) $a_n = \left(\frac{\operatorname{ch}(1/n)}{\cos(1/n)}\right)^{n^\alpha} - 1$; 7) $a_n = \ln \left(1 + \ln \operatorname{ch} \frac{1}{n^\alpha}\right) - \frac{1}{2n^{2\alpha}}$, $\alpha > 0$; 8) $a_n = \sqrt{n + \operatorname{arctg} n^\alpha} - \sqrt{n}$.

K2-14.13

- 1) $a_n = 1 - \left(\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + e^{1/n}\right)^{n^\alpha}$;
 2) $a_n = \frac{n^2}{n+1} \ln \left(\cos \frac{1}{n} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{n}\right)$;
 3) $a_n = \left|\ln \left(\frac{2}{\pi} \left(\arccos \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n}\right)\right)\right|^\alpha$;
 4) $a_n = \frac{1}{n} \left(\exp \left\{\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right\} - 1\right)$;
 5) $a_n = \left(\ln \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - \frac{4}{\sqrt{n^2+n/2} + \sqrt{n^2-n/2}}\right)^\alpha$;
 6) $a_n = \alpha^{1/n} + \alpha^{-1/n} - 2$, $\alpha > 0$; 7) $a_n = \alpha^{1/n} - \alpha^{1/(n+1)}$, $\alpha > 0$.

K2-14.14

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, получив асимптотическую формулу вида $a_n \sim \frac{c}{n^\alpha \ln^\beta n}$ при

- $\frac{n-1}{n} \rightarrow \infty$: 1) $a_n = \frac{n \ln(n^2+1)}{\sqrt{n^5+3n+2}}$;
 2) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{(2n+1)^2 \ln^2(n+1)}$;
 3) $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$;
 4) $a_n = \frac{\cos(1/n)}{n \ln^2 \operatorname{tg}(1/n)}$;
 5) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^3+2}}$;
 6) $a_n = \frac{\ln(e^n + n^2)}{n^2 \ln^2(n+1)}$; 7) $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$; 8) $a_n = 1 + \frac{\ln(2/n - \ln(1+1/n)^2)}{\ln(n^2+n)}$.

K2-14.15

Найти все значения α , при которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 1) $a_n = \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch}(1/n)}{\ln^2(n+1)}$;

2) $a_n = \frac{1}{n \ln^2(1+n^\alpha)}$;

3) $a_n = \frac{1}{n} \left| \ln \left(\sqrt{n^2+1} - n \right) \right|^\alpha$;

4) $a_n = \frac{(\arcsin \operatorname{tg}(1/n))^\alpha}{\ln(1+n+n^2)}$;

5) $a_n = \frac{\operatorname{arctg}(e-(1+1/n)^n)}{\ln^\alpha(1+n^2)}$;

6) $a_n = \frac{\ln(n^2-n+1)}{(\arcsin(e^{1/\sqrt{n}}-1))^\alpha}$;

7) $a_n = \frac{\ln(n^2+n+2)}{(\sqrt{n^2+1}-n)^\alpha}$; 8) $a_n = \frac{\arcsin((n+1)/(2n))-\pi/6}{\ln^\alpha(n+1)}$; 9) $a_n = \left(n^{1/(n^2+1)} - 1 \right)^\alpha$; 10) $a_n = n^{n^\alpha} - 1$;

11)

$$a_n = n \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi n}{n^2+1} \right)^\alpha;$$

12)

$$a_n = ((n+1)^n - n^n)^\alpha e^{-n};$$

13)

$$a_n = (n + \sqrt{n \operatorname{arctg} n})^\alpha \ln \frac{1+n^2}{2+n^2};$$

14)

$$a_n = \frac{\sin(1/(n^\alpha+n^{1-\alpha}))}{\ln^2(1+n^2)}; \quad 1) \quad 5) \quad a_n = \frac{(\sqrt[n]{n}-1)^\alpha}{\sqrt{\ln n}}, \quad n > 1; \quad 6) \quad a_n = \frac{(n-\operatorname{ctg}(1/n))^\alpha}{\sqrt[3]{\ln n}}, \quad n > 1; \quad 17) \quad a_n = \frac{(1-\sqrt[n]{\cos(1/n)})^\alpha}{\ln^3 n}, \quad n > 1 \quad 18) \quad a_n = \frac{(e-(1+1/n^2)^{n^2})^\alpha}{\ln^2 n}, n > 1.$$

K2-14.16

Доказав сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$, получить асимптотическую формулу $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + C + \alpha_n$, где C - эйлерова постоянная ($C = 0,577215\dots$), $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

K2-14.17

Выяснить, какому условию должны удовлетворять положительные числа a, b, c , чтобы сходиллся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = 2a^{1/n} - b^{1/n} - c^{1/n}.$$

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Даламбера (18-20).

K2-14.18

1) $a_n = \frac{n^{10}}{(n+1)!}$;

2) $a_n = \frac{n^3}{3^n}$;

3) $a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \dots (5n-4)}$;

4) $a_n = \frac{n! a^n}{n^n}, a \neq e, \quad a > 0$;

5) $a_n = \frac{1 \cdot 5 \dots (4n-3)}{2 \cdot 6 \dots (4n-2)}$;

6) $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^{2n}}$; 7) $a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n+2)}$

K2-14.19

- 1) $a_n = \frac{n^n}{n!(2,7)^{n+1}}$
 2) $a_n = \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$;
 3) $a_n = \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \dots (3n+1)}$;
 4) $a_n = \frac{a(a+1)\dots(a+(n-1))}{(2n-1)!!}$, $a > 0$;
 5) $a_n = \frac{2 \cdot 5 \dots (3n+2)}{2^n(n+1)!}$; 6) $a_n = \frac{(2n+1)!!}{3^n n!}$; 7) $a_n = \frac{3 \cdot 6 \dots (3n)}{(n+1)!} \arcsin \frac{1}{2^n}$; 8) $a_n = \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$ 9) $a_n = \frac{5^{2n}(n!)^3}{(3n)!}$;

10)

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!3^{2n}}$$

11)

$$a_n = \frac{n^{2n}(2n)!}{5^{2n}(n!)^4}$$

12)

$$a_n = \frac{(5n)!}{25^n(2n)!(3n)!}$$

13)

$$a_n = \frac{3^{2n}(n!)^4}{(3n)!(n+1)!}$$

14)

$$a_n = \frac{3^{2n}(2n)!}{n^n n!}; \text{ 1 5) } a_n = \frac{n! \operatorname{ch} n}{\sqrt{(2n)!}} \text{ 1 6) } a_n = \frac{n^{2n}}{(2n)! \operatorname{sh} n}.$$

K2-14.20

- 1) $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$;
 2) $a_n = \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Коши (21, 22).

K2-14.21

- 1) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$, $n \geq 2$
 2) $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^n$;
 3) $a_n = \left(\frac{an}{n+2}\right)^n$, $a > 0$
 4) $a_n = 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;
 5) $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{3/2}}$;
 6) $a_n = 3^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; 7) $a_n = \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$; 8) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$; 9) $a_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$

10)

$$a_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

11)

$$a_n = \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(1/\sqrt{n})} \right)^{n^2}$$

12)

$$a_n = \left(n \operatorname{sh} \frac{1}{n} \right)^{-n^3};$$

13)

$$a_n = \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n^2};$$

14)

$$a_n = \left(n \arcsin \frac{1}{n} \right)^{n^3}.$$

K2-14.22

- 1) $a_n = 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2};$
- 2) $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n(n-1)};$
- 3) $a_n = \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}};$
- 4) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{\sqrt{n^3+3n+1}};$
- 5) $a_n = \frac{n^\alpha}{(\ln(n+1))^{n/2}}, \quad \alpha > 0;$
- 6) $a_n = \left(\frac{6n+1}{5n-3} \right)^{n/2} \left(\frac{5}{6} \right)^{2n/3}.$

K2-14.23

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Раябле или признака Гаусса: 1) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!};$

- 2) $a_n = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right)^\alpha \frac{1}{n^\beta};$
- 3) $a_n = \left(\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)} \right)^\alpha, \quad a > 0, b > 0;$
- 4) $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\alpha}};$
- 5) $a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\dots(a+\sqrt{n+1})}, \quad a > 0;$
- 6) $a_n = \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)n^\alpha}, \quad \beta > 0;$ 7) $a_n = \frac{1 \cdot 4 \dots (3n-2) \cdot 2 \cdot 5 \dots (3n+2)}{n!(n+1)!9^n};$
- 8) $a_n = \frac{\ln 2 \ln 3 \dots \ln(n+1)}{\ln(2+a) \ln(3+a) \dots \ln(n+1+a)}, \quad a > 0.$ Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(24-28).$

K2-14.24

- 1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{n};$ 2) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right);$
- 3) $a_n = \frac{n \sin^2 2n}{\sqrt{n^5+3}};$
- 4) $a_n = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)};$
- 5) $a_n = \frac{\operatorname{arctg}(3+(-1)^n 2)}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}};$
- 6) $a_n = \frac{n^2+3}{n^3(3-2 \sin(\pi n/3))};$ 7) $a_n = \frac{\arcsin((n+1)/2n)}{\sqrt[4]{3n^4+2}};$ 8) $a_n = e^{\sqrt{n}/(n^2+1)} - 1.$

K2-14.25

- 1) $a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n} - a$ **3)** $a_n = \left(\frac{3n+1}{2n+3}\right)^n$;
2) $a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} \ln \frac{3n-1}{3n+1}$;
6) $a_n = n^\alpha q^n, 0 < q < 1$;
4) $a_n = \frac{1}{n^3} \left(\frac{3n^2+4}{2n^2+3}\right)^n$;
5) $a_n = n^5 e^{-\sqrt{n}}$; **9)** $a_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}, n \geq 2$; **7)** $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; **8)** $a_n = \frac{(n+1)!}{7^n (n^2+4)^3}$;

11)

$$a_n = \operatorname{tg} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n;$$

10)

$$a_n = \sin \frac{n^2}{(3+1/n)^n};$$

13)

$$a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^{n^2};$$

12)

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n};$$
 1 5) $a_n = 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2};$

14)

$$a_n = \left(\sqrt{n^2+1} - n + 1\right)^{-n^2};$$

K2-14.26

- 1)** $a_n = \frac{(2,6)^n n!}{n^n}$; **1 6)** $a_n = \left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}\right)^{n^5}$.
4) $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$;
5) $a_n = \frac{(2n+2)!}{\pi^n (n!)^2}$;
6) $a_n = \frac{9^{2n} n!}{(2n)!}$; **7)** $a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+1)}{n! n^\beta}, \alpha > 0$; **8)** $a_n = \frac{a(a+c)(a+2c)\dots(a+nc)}{b(b+c)(b+2c)\dots(b+nc)}, a > 0, b > 0, c > 0$; **9)**
 $a_n = n^{n^2/2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2};$

10)

$$\left(\sqrt{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n^2+n}};$$

11)

$$a_n = n! \operatorname{arctg} \frac{2^n}{n^n}.$$

K2-14.27

- 1) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$;
- 2) $a_n = (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \dots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$;
- 3) $a_n = \frac{(n!)^3}{3^{n^4/3}}$;
- 4) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \quad n \geq 2$;
- 5) $a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}, \quad n \geq 3$;
- 6) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \quad n \geq 3$; 7) $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}, \quad n \geq 2$; 8) $a_n = \frac{((n+1)!)^n}{2!4! \dots (2n)!}$; 9) $a_n = \frac{n^n}{\sqrt{(2n)!} \operatorname{ch} n}$;

10)

$$a_n = \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n^3} \right)^n (3n)!;$$

11)

$$a_n = \frac{1^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 \dots (3n+1)^2}{(2n)!} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n};$$

12)

$$a_n = \frac{2^2 \cdot 5^2 \cdot 8^2 \dots (3n+2)^2}{(2n+1)!} \sin \frac{1}{3^n}.$$

K2-14.28

- 1) $a_n = \frac{1}{\ln(n!)}, \quad n \geq 2$;
- 2) $a_n = \left(\sum_{k=1}^n \ln^2 k \right) / n^\alpha$;
- 3) $a_n = \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}, \quad n \geq 2$;
- 4) $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha (\ln \ln n)^\beta}, \quad n > 2$.

K2-14.29

Установив сходимость соответствующего ряда, показать, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{a^n} = 0, a > 1$.

K2-14.30

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}$, где $\mu(n)$ - число цифр числа n .

K2-14.31

Пусть $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_n(n \geq 1)$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ сходится.

K2-14.32

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ - положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$, расположенные в порядке возрастания. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$ сходится.

K2-14.33

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$1) a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4} dx$$

$$2) a_n = \int_n^{n+2} e^{-\sqrt[4]{x}} dx$$

$$3) a_n = \int_{\pi n}^{\pi + \pi n} \frac{\cos^2 x}{x} dx;$$

$$4) a_n = \int_0^{\pi/n} \frac{x \sin^5 x}{1+x^2} dx$$

K2-14.34

Пусть $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots, a_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

K2-14.35

Доказать, что если $a_n \geq 0, b_n > 0$ для всех $n \geq n_0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

K2-14.36

Доказать, что если $a_n \geq 0, b_n > 0$ для всех $n \geq n_0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится.

K2-14.37

Доказать, что если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$, где $a \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится.

K2-14.38

Доказать, что если $a_n > 0, a_{n+1} \leq a_n$ для всех $n \in N$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

K2-14.39

Доказать, что если $a_n \geq 0 (n \in N)$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Справедливо ли обратное утверждение?

K2-14.40

Доказать, что ряд с неотрицательными членами сходится, если ограничена сверху хотя бы одна подпоследовательность последовательности его частичных сумм.

K2-14.41

Доказать, что если последовательность $\{na_n\}$, где $a_n \geq 0 (n \in N)$, ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится.

K2-14.42

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$, где $a_n \geq 0 (n \in N)$, сходится и $a_{n+1} \leq a_n (n \in N)$, то также сходящимся является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

K2-14.43

Доказать, что если $a_n \geq 0, b_n \geq 0, c_n \geq 0 (n \in N)$ и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3, \sum_{n=1}^{\infty} c_n^3$ сходятся, то сходится также и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$.

K2-14.44

Пусть $a_n \geq 0, b_n \geq 0 (n \in N)$ и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Выяснить, следует ли отсюда, что расходится ряд:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$

K2-14.45

Доказать, что если $a_n > 0 (n \in N)$ и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то $a_n = o(q_1^n)$, где $q_1 > q$.

K2-14.46

Доказать, что если $a_n > 0 (n \in N)$ и для всех $n \geq m$ справедливо неравенство $a_{n+1}/a_n \leq \lambda < 1$, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq a_m \frac{\lambda^{n-m+1}}{1-\lambda}$$

Для всех $n \geq m$.

K2-14.47

Доказать, что если $a_n > 0 (n \in N)$ и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (обобщенный признак Даламбера).

K2-14.48

Доказать, что если $a_n \geq 0 (n \in N)$ и существует то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в случае, когда $q < 1$, и расходится в случае, когда $q > 1$ (обобщенный признак Коши).

K2-14.49

Доказать, что если $a_n > 0, a_{n+1} \leq a_n (n \in N)$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в случае, когда $q < \frac{1}{2}$, и расходится в случае, когда $q > \frac{1}{2}$.

K2-14.50

Доказать, что если $a_n \geq 0 (n \in N)$ и существует номер m такой, что для всех $n > m$ выполняется неравенство

$$\frac{n}{\ln n} (1 - \sqrt[n]{a_n}) \geq \lambda > 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если же для всех $n > m$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (признак Жамэ).

K2-14.51

Доказать, что если $a_n > 0 (n \in N)$ и существуют номер m и число $\alpha > 0$ такие, что для всех $n \geq m$ выполняется неравенство

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если же

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1$$

для всех $n \geq m$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (логарифмический признак).

K2-14.52

Доказать, что если $a_n > 0, a_{n+1} \leq a_n (n \in N)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

K2-14.53

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, где $f(x)$ - положительная и убывающая на промежутке $[1; +\infty)$ функция такая, что существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda,$$

сходится в случае $\lambda < 1$ и расходится в случае $\lambda > 1$ (признак Ермакова).

K2-14.54

Доказать, что если $a_n > 0, a_{n+1} \leq a_n (n \in N), \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{m=1}^{\infty} q_m 2^{-m}$, где q_m - наибольший номер членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющих условию $a_n \geq 2^{-m} (n = 1, 2, \dots, q_m)$ (признак Лобачевского).

K2-14.55

Доказать, что если $f(x)$ - положительная, убывающая на про-

$$\text{справедливы неравенства} \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \\ \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < r_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx.$$

20.4.3 Problems about Absolutely and not absolutely convergent rows

Пример

K2-15.1

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если:

1) $a_n = \frac{(n+1) \cos 2n}{\sqrt[5]{n^7+3n+4}}$

2) $a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{n}$;

3) $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. А 1) Используя неравенства $n+1 \leq 2n, |\cos 2n| \leq 1, n^7 + 3n + 4 > n^7$,

получаем $|a_n| < \frac{2}{n^{4/3}}$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{4/3}}$ по признаку сравнения следует сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, т. е. абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 2) Заметим, что при $t \geq 0$ справедливы неравенства $0 \leq \ln(1+t) \leq t$, а при любом $t \in R$ - неравенство $|\operatorname{arctg} t| \leq |t|$. Поэтому

$$|a_n| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n^{6/5}},$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3) Используя формулу $1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$ и неравенство $|\sin t| \leq |t|, t \in R$, получаем

$$|a_n| \leq \frac{1}{2n \ln^2(n+1)}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \ln^2(n+1)}$$

сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. И р и мер

K2-15.2

Доказать сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}$.

А 1) Последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = 1/\sqrt{n}$, монотонно стремится к нулю (удовлетворяет условиям (3), (4)). По признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ сходится. 2) Обозначим $\varphi(x) = (\ln^2 x)/x$; тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

(правило Лопиталя) и

$$\varphi'(x) = \frac{\ln x}{x^2} (2 - \ln x),$$

откуда следует, что $\varphi'(x) < 0$ при $x > e^2$. Поэтому последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = (\ln^2 n)/n$, удовлетворяет условию (3), а при $n > e^2$ - условию (4). По признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}$ сходится.

И р и м е р

K2-15.3

Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ сходится при любом $\alpha \in R$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ сходится при $\alpha \neq 2\pi m, m \in Z$. А Обозначим

$B_n = \sum_{k=1}^n \sin k\alpha, C_n = \sum_{k=1}^n \cos k\alpha$. Тогда

$$B_n = \frac{\sin((n+1)\alpha/2) \sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}, \quad C_n = \frac{\cos((n+1)\alpha/2) \sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)},$$

$$\alpha \neq 2\pi m, \quad m \in Z.$$

Для доказательства формул (8) можно воспользоваться равенствами

$$\begin{aligned} 2 \sin k\alpha \sin(\alpha/2) &= \cos(k-1/2)\alpha - \cos(k+1/2)\alpha \\ 2 \cos k\alpha \sin(\alpha/2) &= \sin(k+1/2)\alpha - \sin(k-1/2)\alpha \end{aligned}$$

Если $\alpha \neq 2\pi m$, где $m \in Z$, то

$$|B_n| \leq \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}, \quad |C_n| \leq \frac{1}{|\sin(\alpha/2)|}$$

и по признаку Дирихле ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ сходятся. Если $\alpha = 2\pi m$, где $m \in Z$, то $\cos n\alpha = 1$, а $\sin n\alpha = 0$ при всех $n \in N$. Поэтому при $\alpha = 2\pi m$, $m \in Z$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

может как сходиться, так и расходиться. Пример

К2-15.4

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln(n+2)} \cos \frac{1}{n}$. Δ Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln(n+2)}$ сходится (пример 3), а последовательность $\{\cos(l/n)\}$ монотонна и ограничена, то по признаку Абеля ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln(n+2)} \cos \frac{1}{n}$$

сходится при любом $\alpha \in R$. Пример

К2-15.5

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

- 1) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n-1}}}$; 2) $a_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} \right)$
 3) $a_n = \frac{\cos n}{n}$. А 1) Запишем a_n в следующем виде:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right)^{-1}$$

и воспользуемся асимптотической формулой

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

Тогда получим

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \alpha_n, \quad \text{где} \quad |\alpha_n| \leq \frac{C}{n^{3/2}}, \quad C > 0.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или

расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (пример 2) и расходимости гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, хотя $a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится. 2) Используя асимптотическую формулу

$$\ln(1+t) = t + O(t^2) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0,$$

получаем

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} + b_n, \quad \text{где} \quad |b_n| \leq \frac{C}{n^{4/3}}, \quad C > 0.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}$ сходится условно (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2/3}}$ расходится), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. 3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ сходится (пример 3). Докажем, что этот ряд не является абсолютно сходящимся, т. е. докажем расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$. Используя неравенство $|\cos n| \geq \cos^2 n$ и формулу $\cos^2 n = (1 + \cos 2n)/2$, получаем

$$\frac{|\cos n|}{n} \geq \frac{1 + \cos 2n}{2n}.$$

Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2n}{2n}$ расходится, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ расходится. По признаку сравнения (§ 14) из (9) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$ расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ сходится условно. ЗАДАЧИ Локажать, что ряды абсолютно сходятся (1, 2).

K2-15.1

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+\pi/4)}{n\sqrt[3]{n+2}}$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/4)}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^{n+1} \ln^2 n}{2^n}$;
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin \frac{\pi}{4n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^3+2}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin n \cdot e^{-\sqrt{n}}$.

K2-15.2

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2(n+1)}{n\sqrt{n+1}}$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 3n}{n \ln(n+1) \cdot \ln^2(n+2)}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \right)$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \sin(1/n)} - \cos \frac{1}{n} \right) \cos \pi n$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

Исследовать на сходимость ряды (3, 4).

K2-15.3

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln \ln(n+2)}{\ln(n+1)}$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[3]{n+1}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right) \sin \frac{1}{n}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right)$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{\sqrt{n^2+4}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

K2-15.4

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[5]{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+\pi/4)}{\ln^2(n+1)}$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin^2(n/2)}{\sqrt[5]{n+1}}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n+2)} \cos 3n$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{n}} \sin 2n$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2$.

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды (5-7).

K2-15.5

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}}$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 2^n}{3^{n+1}}$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \sin 2n}{n^2 - \ln n};$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}};$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1) \ln \ln(n+2)}.$

K2-15.6

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+4)}{\sqrt[3]{n^2+1}(2+\sqrt{n^2+3})};$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{6}\right) \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right);$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n} + (-1)^{n-1}}$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 \ln(n+2)}{\ln(n+1)} \sin \frac{\pi n}{4};$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n \ln(n+1)}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \cos(1/n)}{\sqrt[4]{n}}.$

K2-15.7

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6};$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n};$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-2n+3}}{n};$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{n}$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 n - 3/8}{\sqrt{n+1}}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{3/2+\ln^3 n}}{n^{3/2} \ln(n+1)}.$ Исследовать на сходимость ряды (8, 9).

K2-15.8

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 n}{\sqrt{n}};$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^5 2n}{\ln(n+1)}$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n+\sin n}};$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{(\cos n)/\sqrt{n}} - \cos \frac{1}{n}\right)$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n/(2\sqrt{n})}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^{2/3}+(-1)^n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^3};$

10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \cos n$$

11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\sqrt{n^2 - 1} - n)$$

12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sh} \frac{n^2 + 1}{2n^3 - n^2}.$$

K2-15.9

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cos \frac{\pi(n^2 + 1)}{n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln \ln(n+1)}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ln n}}{n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n} \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln^2(n+1)}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n + \ln n}; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n + 1} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \operatorname{arctg} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}};$$

11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\operatorname{tg} \frac{1}{n} - 1} \right) \frac{\sin n}{\ln(n+1)};$$

12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \cos \frac{\sqrt{n}}{n+2}. \quad 1$$

K2-15.0

Пусть $f(x) = P_m(x)/Q_p(x)$, где

$$P_m(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m,$$

$$Q_p(x) = x^p + b_1 x^{p-1} + \dots + b_{p-1} x + b_p$$

- многочлен, причем $Q_p(x) \neq 0$ при $x \geq 1$. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n). \quad 1$$

K2-15.1

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{n \ln(n+1)}$, где

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 5k + 1 \text{ и } n = 5k + 2, \\ -1, & \text{если } n = 5k, n = 5k - 1, n = 5k - 2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Найти все значения α , при которых ряд: а) абсолютно сходится; б) условно сходится (12-14). 1

K2-15.2

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$;
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\alpha}$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+n-1}}$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^\alpha} \right)$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+(-1)^n)^\alpha}$;
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n+1}+(-1)^n)^\alpha} \cdot 1$

K2-15.3

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n]}}{n^\alpha}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^\alpha}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n \ln^2 n}{n^\alpha}$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right)^\alpha$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(n-1))}{n!}$;
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln^\alpha(n+1)}$, $0 < x < \pi$.

1

K2-15.4

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^{2n} \alpha}{n}$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \cos^{2n} \alpha}{\sqrt{n}}$
- 3) $1 + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots$;
- 4) $1 + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \frac{1}{11^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha} + \dots$ 1

K2-15.5

Найти все значения α и β , при которых ряд: а) абсолютно сходится; б) условно сходится:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+\alpha)(2+\alpha) \dots (n+\alpha)}{n^\beta n!}$
- 2) $\frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\beta} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\beta} + \dots$;
- 3) $1 - \frac{2}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} - \frac{2}{5^\beta} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{2}{8^\beta} + \frac{1}{9^\alpha} + \dots$ 1

K2-15.6

Доказать, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{n})}{n^\alpha}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x\sqrt{n})}{n^\alpha}$, где $x \neq 0$, сходятся при $\alpha > 1/2$ и расходятся при $\alpha < 1/2$. 1

K2-15.7

Показать, что ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$ полученный из сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ перестановкой его членов, расходится. 1

K2-15.8

Из гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ выброшены все члены, номера которых содержат цифру 1.

K2-15.9

Доказать, что полученный ряд будет сходящимся, а его сумма меньше 20. 1

K2-15.9

Пользуясь одним из равенств

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. задачу 16), доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

2

K2-15.0

Пользуясь тем, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ равна $\ln 2$, найти суммы следующих рядов, полученных из данного перестановкой его членов:

- 1) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$;
- 2) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots$;
- 3) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots$ 2

K2-15.1

Доказать, что если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ переставить так, что каждую группу p последовательных его положительных членов сменяет группа m последовательных отрицательных членов, то сумма полученного ряда будет равна

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{m}.$$

2

K2-15.2

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ получен из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ перестановкой его членов так, что члены одного знака расположены в новом ряду в порядке убывания их модулей, а отношение числа положительных слагаемых суммы $\sum_{k=1}^n u_k$ к числу отрицательных слагаемых этой суммы имеет при $n \rightarrow \infty$ предел, равный λ . Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ln \sqrt{4\lambda}.$$

2

K2-15.3

Доказать, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ останется расходящимся, если, не переставляя его членов, изменить знаки этих членов так, чтобы за каждой группой из p положительных членов следовала группа m отрицательных членов, где $p \neq m$. Показать, что при $p = m$ полученный ряд будет сходящимся. 2

K2-15.4

Пусть $\alpha > 0$ и S - сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$. Доказать, что $1/2 < S < 1$. 2

K2-15.5

Пусть $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Следует ли отсюда, что знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится? 2

K2-15.6

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится? 2

K2-15.7

Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и при всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства

$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. 2

K2-15.8

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, где $a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, сходится, если существует число $\alpha > 0$ такое, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

2

K2-15.9

Показать, что сумма не абсолютно сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения более, чем на m мест, где m - заданное число. 3

K2-15.0

Показать, что члены не абсолютно сходящегося ряда можно без перестановки сгруппировать так, что полученный ряд будет абсолютно сходящимся. 3

K2-15.1

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если выполняются следующие условия: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится. 3

K2-15.2

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если выполняются следующие условия: 1) частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, т. е. существует число $M > 0$ такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M$; 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 3

K2-15.3

Пусть заданы числовая последовательность $\{a_n\}$ и строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{p_k\}$ такая, что

$$p_k - p_{k-1} < c,$$

c - заданное число, $k \in N$. Обозначим

$$A_1 = \sum_{j=1}^{p_1} a_j, \quad A_2 = \sum_{j=p_1+1}^{p_2} a_j, \quad \dots, \quad A_k = \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j \quad (k \geq 2).$$

Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. 3

K2-15.4

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Обозначим $\alpha_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$, $\beta_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$; $A_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n \beta_k$. Доказать, что:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$; 2) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = 1$. 3

K2-15.5

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Доказать, что можно так переставить члены этого ряда, что для полученного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ будет выполняться условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k = +\infty.$$

3

K2-15.6

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k}$, A_n и B_n - суммы соответственно всех положительных и отрицательных слагаемых, содержащихся в S_n . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{A_n} = -1.$$

20.4.4 Problems about Properties of uniformly convergent functional sequences and series

K2-19.пр.1

Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$, и найти эту сумму.

А Члены ряда непрерывны на отрезке $[0; 1]$, а ряд сходится равномерно (§18, пример 3,6)). Поэтому сумма $S(x)$ этого ряда непрерывна на отрезке $[0; 1]$.

Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем e^{-x} , находим

$$S(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x - 1}, \quad x > 0.$$

При $x = 0$ члены ряда равны нулю, и поэтому $S(0) = 0$.

К2-19.пр.2

Найти сумму $S(x)$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, а затем вычислить сумму σ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

А Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Этот ряд сходится на интервале $(-1, 1)$, а его сумма $1/(1+x^2)$. На отрезке $[-q; q]$, где $0 < q < 1$, ряд сходится равномерно, а его члены - непрерывные функции. Интегрируя этот ряд почленно на отрезке $[0; x]$, где $x \in (-1; 1)$, получаем

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt$$

или

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Таким образом, $S(x) = \operatorname{arctg} x$. Полагая в (2) $x = 1/\sqrt{3}$, получаем $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$, откуда $\sigma = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

К2-19.пр.3

Найти сумму ряда: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ А 1) Члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ непрерывные функции, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, составленный из производных членов исходного ряда, сходится равномерно на отрезке $[-q; q]$, где $0 < q < 1$, а его сумма равна $1/(1-x)$,
 $x \in (-1; 1)$. Дифференцируя почленно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = f(x)$$

получаем

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

откуда

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad -1 < x < 1.$$

2) Дифференцируя почленно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = g(x)$$

получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = g'(x)$$

откуда, в силу (3), находим $g'(x) = -\ln(1-x)$. Следовательно,

$$\int_0^x g'(t)dt = g(x) - g(0) = -\int_0^x \ln(1-t)dt$$

или

$$g(x) - g(0) = \int_0^x \ln(1-t)d(1-t) = (1-t)\ln(1-t)|_0^x + \int_0^x dt$$

откуда находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x).$$

Заметим, что равенство (4) справедливо при $x \in [-1; 1]$, а равенство (3) - при $x \in [-1; 1)$.

K2-19.1

. Доказать непрерывность суммы функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E :

- 1) $u_n(x) = \frac{\arctg nx}{\sqrt[3]{n^4+x}}, \quad E = R$
- 2) $u_n(x) = \arcsin \frac{1}{n^2+x^4}, \quad E = R;$
- 3) $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}, E = [2; 5];$
- 4) $u_n(x) = xe^{-n^2x}, E = [0; +\infty);$
- 5) $u_n(x) = 2^n \ln \left(1 + \sin \frac{1}{3^n+x}\right), E = (0; \infty);$
- 6) $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cos nx, E = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$

K2-19.2

. Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ непрерывна при $x > 0$, и Найти $\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)dx$.

K2-19.3

. Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2+x^2}$ непрерывна на R , и Найти $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

K2-19.4

. Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ непрерывна на R , и Найти $\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

K2-19.5

. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)xe^{-(n+1)x} - nxe^{-nx})$ сходится неравномерно на отрезке $[0; 1]$, однако его сумма - функция, непрерывная на этом отрезке.

K2-19.6

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{2(n+1)} - x^{2n})$ сходится неравномерно на отрезке $[-1; 1]$, но его можно почленно интегрировать на этом отрезке.

K2-19.7

. Известно, что сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где $\{a_n\}$ - заданная числовая последовательность, является нечетной периодической с периодом 2π функцией, такой, что

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0; \pi) \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ и } x = \pi \end{cases}$$

Верно ли, что этот ряд сходится неравномерно на $R\Gamma$

K2-19.8

. Найти множество E всех значений x , при которых определена функция $f(x)$, и исследовать ее на непрерывность на E , если:

- 1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}$;
- 2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x^2} \cos nx$;
- 3) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x + \frac{1}{n})^n$;
- 4) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

K2-19.9

. Найти множество E всех значений x , при которых определена функция $f(x)$, и исследовать ее на дифференцируемость на множестве E , если:

- 1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$;
- 2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}$
- 3) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{5/2}}$
- 4) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$.

K2-19.10

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln^2(n+1)}$ можно дифференцировать почленно на R .

K2-19.11

Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ непрерывна на R , за исключением точек $x = n, n \in N$.

K2-19.12

Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ имеет непрерывную производную на R .

K2-19.13

Доказать, что ряд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$ можно почленно дифференцировать на отрезке $[-1; 1]$ любое число раз.

K2-19.14

Доказать, что дзета-функция Римана $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ непрерывна на множестве $(1; +\infty)$ и имеет на этом множестве производные любого порядка.

K2-19.15

Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

K2-19.16

Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ непрерывна при $x \geq 0$ и дифференцируема при $x > 0$.

K2-19.17

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, сходится на отрезке $[0; 1]$, но

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

K2-19.18

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$, сходится равномерно на R , но

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1).$$

K2-19.19

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = x / (1 + nx^2),$$

сходится равномерно на R к функции f и что равенство

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

выполняется при всех x , кроме $x = 0$.

K2-19.20

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = x^3 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

сходится равномерно на R , но $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

K2-19.21

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = (\sin nx) / \sqrt{n},$$

сходится равномерно на R к дифференцируемой функции $f(x)$, но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) \neq f'(0)$$

K2-19.22

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = nx (1 - x^2)^n,$$

сходится на отрезке $[0; 1]$ к непрерывной функции $f(x)$, но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

K2-19.23

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = nx(1-x)^n$, сходится неравномерно на отрезке $[0; 1]$, однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

K2-19.24

Выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} \right) dx.$$

K2-19.25

Можно ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ почленно дифференцировать на $R\Gamma$

K2-19.26

Можно ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{1/(2n-1)} - x^{1/(2n+1)})$ почленно интегрировать на отрезке $[0; 1]\Gamma$

K2-19.27

Найти все значения α , при которых для последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

K2-19.28

Может ли последовательность $\{f_n(x)\}$ разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

K2-19.29

Пусть на множестве R определены и ограничены в совокупности функции $f_n(x)$, $n \in N$, и, кроме того, $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, $x \in R$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} f_n(x) = \sup_{x \in R} f(x)$$

K2-19.30

Пусть функция f определена на R , бесконечно дифференцируема и

$$\left| f^{(n)}(x) - f^{(n-1)} \right| < 1/n^2 \text{ для любого } x \in R.$$

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = Ce^x$, где $C = \text{const}$.

K2-19.31

Пусть функция f бесконечно дифференцируема на R , а последовательность $\{f^{(n)}(x)\}$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на каждом конечном интервале $(a; b)$. Доказать, что $\varphi(x) = Ce^x$, где $C = \text{const}$.

K2-19.32

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2(\pi/x), & \text{если } x \in [1/(n+1); 1/n], \\ 0, & \text{если } x \notin [1/(n+1); 1/n], \end{cases}$$

сходится на R к непрерывной функции, но неравномерно.

K2-19.33

Доказать, что если функции $f_n(x), n \in N$, непрерывны на множестве E и $f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in E$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$$

для каждой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in E, x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$, где $x \in E$. 3

K2-19.4

Пусть $\{f_n(x)\}$ - последовательность монотонных на отрезке $[a; b]$ функций, сходящихся к функции $f(x)$, непрерывной на $[a; b]$. Доказать, что

$$f_n(x) \Rightarrow f(x), \quad x \in [a; b].$$

3

K2-19.5

Пусть функции $f_n(x), n \in N$, интегрируемы на отрезке $[a; b]$, и пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена на $[a; b]$, т. е.

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in [a; b] \quad \forall n \in N : |f_n(x)| \leq M.$$

Показать, что из последовательности $\{F_n(x)\}$, где

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad x \in [a; b],$$

можно выделить подпоследовательность $\{F_{n_k}(x)\}$, равномерно сходящуюся на отрезке $[a; b]$.

K2-19.36

Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n(n+1)x^2-1)}{(1+n^2x^2)(1+(n+1)^2x^2)}$ сходится неравномерно на отрезке $[-1; 1]$, но его сумма непрерывна на этом отрезке.

K2-19.37

Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}$ сходится равномерно на R , но его нельзя почленно дифференцировать ни в каком промежутке.

K2-19.38

Доказать, что: 1) при $a > 1$ сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}}$ непрерывна на R ; 2) при $a > 2$ этот ряд можно почленно дифференцировать; 3) при $a \in (1; 2)$ функция $S(x)$ не дифференцируема.

K2-19.39

Пусть $r_n, n \in N$, - рациональные числа отрезка $[0; 1]$. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - r_n|}{3^n}, \quad x \in [0; 1],$$

непрерывна на отрезке $[0; 1]$, дифференцируема в иррациональных точках и недифференцируема в рациональных точках этого отрезка.

K2-19.40

Найти предел:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n+1}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1} - x^n);$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$

K2-19.41

Пусть функции $u_n(x), n \in N$, непрерывны на отрезке $[a; b]$ и $u_n(x) > 0, x \in [a; b], n \in N$. Показать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a; b]$ к функции $f(x)$, непрерывной на этом отрезке, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow f(x), \quad x \in [a; b].$$

K2-19.42

Пусть $\varphi(x)$ - периодическая с периодом 1 функция такая, что $\varphi(x) = |x|$ при $x \in [-1/2; 1/2]$. Показать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(4^n x)}{4^n}$$

непрерывна на R , но не дифференцируема ни в одной точке $x \in R$.

K2-19.43

Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется равномерно непрерывной на отрезке $[a; b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a; b] |x' - x''| < \delta \forall n \in N : |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$. Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций равномерно сходится на отрезке $[a; b]$, то она равномерно ограничена (см. задачу 35) и равномерно непрерывна на отрезке $[a; b]$.

K2-19.44

Доказать, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена и равномерно непрерывна (см. задачу 43) на отрезке $[a; b]$, то из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на этом отрезке (теорема Арцела).

20.4.5 Problems about Power series**K2-20.пр.1**

Найти радиус сходимости R степенного ряда:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n 2^n} z^n$
- 4) $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n z^{3n}$. А 1) Так как существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1,$$

то по формуле (5) находим $R = 1$. 2) В этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty,$$

и поэтому $R = +\infty$ (формула (5)). 3) Так как $|1+i| = \sqrt{2}$ и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\sqrt{2})^n}{n2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то по формуле (6) получаем $R = \sqrt{2}$. 4) Обозначим $5z^3 = t$; тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^n z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (5z^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Заметим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ сходится, если $|t| < 1$, и расходится, если $|t| > 1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n z^{3n}$ сходится, если $5|z|^3 < 1$, т. е. при $|z| < 1/\sqrt[3]{5}$, и расходится при $|z| > 1/\sqrt[3]{5}$. Итак, радиус сходимости ряда $R = 1/\sqrt[3]{5}$. Заметим, что R можно найти и по формуле (4). В самом деле, так как

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n} = \sqrt[3]{5}$$

то по формуле (4) получаем $R = 1/\sqrt[3]{5}$.

К2-20.пр.2 Найти область сходимости степенного ряда

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n \ln^2(n+1)}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{n^2}$ А 1) По формуле (5) находим радиус сходимости ряда $R = 1$. Ряд сходится в интервале $(0; 2)$. При $x = 2$ ряд расходится, так как для его n -го члена a_n справедлива асимптотическая формула $a_n \sim 2/(3n)$. При $x = 0$ получаем сходящийся по признаку Лейбница ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (-1)^n$$

Следовательно, область сходимости ряда - полуинтервал $0 \leq x < 2$. 2) Радиус сходимости ряда равен $1/2$ (формула (5)). При $x = -3/2$ и $x = -1/2$ ряд абсолютно сходится, так как по интегральному признаку сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)}.$$

Поэтому область сходимости ряда - отрезок $[-3/2; -1/2]$. 3) По формуле (4) находим, что радиус сходимости ряда $R = 1/3$. При $x = \pm 1/3$ ряд расходится (не выполняется необходимое условие сходимости). Следовательно, область сходимости ряда - интервал $(-1/3; 1/3)$

К2-20.пр.3

Пользуясь формулой (9), найти радиус сходимости R степенного ряда (8), для функции $f(z)$:

$$1) f(z) = \frac{z}{z^2-4}, \quad a = 3;$$

$$2) f(z) = \frac{z^2-z+1}{(z^2+1)(z+2)}, \quad a = 1;$$

$$3) f(z) = \frac{1}{3z^4+7z^2+2}, \quad a = 0.$$

А 1) Многочлен $z^2 - 4$ имеет корни $z_1 = 2, z_2 = -2$, а наименьшее из чисел $|z_k - a| = |z_k - 3|, k = 1, 2$, равно $|2 - 3| = 1$. Поэтому $R = 1$.

2) Многочлен $(z+2)(z^2+1)$ имеет корни $z_1 = -2, z_2 = i, z_3 = -i$, причем $|z_1 - 1| = 3, |z_2 - 1| = |z_3 - 1| = \sqrt{2}$. Поэтому $R = \sqrt{2}$.

3) Из равенства $3z^4 + 7z^2 + 2 = (3z^2 + 1)(z^2 + 2)$ следует, что многочлен $3z^4 + 7z^2 + 2$ имеет корни $z_1 = i/\sqrt{3}, z_2 = -i/\sqrt{3}, z_3 = i\sqrt{2}, z_4 = -i\sqrt{2}$. Так как

$$\min_{1 \leq k \leq 4} |z_k - a| = \min_{1 \leq k \leq 4} |z_k| = 1/\sqrt{3},$$

то $R = 1/\sqrt{3}$.

K2-20.пр.4

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. А Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Этот ряд сходится, если $|x| < 1$ (его радиус сходимости $R = 1$), а сумма ряда равна $x/(1-x)$. Дифференцируя почленно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{x-1},$$

получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Степенные ряды можно использовать при вычислении сумм числовых рядов. Если известно, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то его сумму можно найти по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

K2-20.пр.5

Доказать, что: 1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

2) - 1) Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Его сумма равна $\arctg x$ (§19, пример 2). Радиус сходимости этого ряда равен 1, в точке $x = 1$ ряд сходится (признак Лейбница). Применив формулу (11), получаем равенство (12). 2) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, полученный в §19 (пример 3). Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x).$$

Так как этот ряд сходится при $-1 < x \leq 1$, то из (14) по формуле (11) следует равенство (13).

K2-20.1

Найти радиус сходимости R степенного ряда (1-5).

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z+1)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n z^n$
- 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z-2)^n}{4^{n+2}}$
- 5) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$
- 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2} z^n$.

K2-20.2

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n} (z-3)^n$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!} z^n$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^{4n}}{n^2}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n} z^{5n}$

K2-20.3

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^\alpha}, \alpha > 0$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^\alpha} z^n, \alpha > 1$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn)!}{n!(n+1)! \dots (n+k-1)!}, k \in \mathbb{N}$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n!}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (2 - \sqrt[n]{e})(2 - \sqrt[n]{e}) \dots (2 - \sqrt[n]{e}) z^n$.

K2-20.4

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{2n^3} z^n$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(3\pi n/4)}{n} z^n$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left((1 - \frac{1}{n})^n \operatorname{arctg} e^{-n}\right) (z+1)^n$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^3} (z-1)^n$;
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^2}\right)^n (z+2)^2$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \cos \frac{1}{3^n}\right) z^n$.

K2-20.5

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (1+i)^{3n}}{(n+1)(n+2)} z^n$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2}\right)^n z^{2n}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i\sqrt{5})^n}{(3-i\sqrt{7})^{2n}} (z-i)^{3n}$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{(1+i)(1+2i) \dots (1+ni)}$.

K2-20.6

Найти интервал сходимости степенного ряда:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}))(x+1)^n$

- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n^2}{2^n} \right) (x-3)^n;$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n^n} (x-1)^{2n}$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n} \right) (x-3)^n;$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2+3}{n^2\sqrt{3}+1} \right)^{-n} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^n;$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{nx}{e} \right)^n.$

Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости (7-11).

K2-20.7

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}};$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n$
- 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1};$
- 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n+3}{3n^2+4} x^{2n+1}$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n.$

K2-20.8

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n;$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x+3)^n$
- 5) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (n^3 + 2) (x-1)^{2n}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} (x+1)^{n^2},$

K2-20.9

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} (x+2)^n$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n};$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) (x-1)^n;$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} (x+1)^n;$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2\cos(\pi n/4))^n x^n}{\ln^2(n+1)}.$

K2-20.10

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^\alpha}$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^\alpha x^n$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n, a > 0, b > 0;$

- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a > 0, \quad b > 0;$
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-(n-1))}{n!} x^n$
 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n (u!)^2}{(2n+1)!} \right)^\alpha (x-1)^n.$

K2-20.11

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}} (x-1)^n; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n;$
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n} \right)^n$
 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n (x-1)^n$
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1-x)^n, \quad \nu(n) - \text{число цифр числа } n.$

K2-20.12

Найти область сходимости степенного ряда:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2};$
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{a^{\sqrt{n}}}, \quad a > 0$
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n, \quad a > 1.$

K2-20.13

Определить область сходимости гипергеометрического ряда

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} x^n + \dots$$

Исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость в концах интервала сходимости.

K2-20.14

Найти область сходимости ряда:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln^n x}{3^n (n+1)!}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n};$
 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^{-nx}$
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos^n x$
 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x.$

K2-20.15

Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен R . Найти радиус сходимости степенного ряда:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n, \quad k \in \mathbb{N};$
 2) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn}, \quad k \in \mathbb{N};$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{1+|c_n|} z^n.$$

K2-20.16

Пусть радиусы сходимости степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ равны R_1 и R_2 соответственно. Найти условие, которому должен удовлетворять радиус сходимости R степенного ряда:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n.$$

K2-20.17

Доказать, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри его интервала сходимости.

K2-20.18

Пусть

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

R - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Доказать, что $l \leq R \leq L$.

K2-20.19

Доказать, что степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ имеют один и тот же радиус сходимости.

K2-20.20

Доказать, что если функция $f(z)$ представима в круге $|z - z_0| < R$, где $R > 0$, сходящимся к ней степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, то 1) для n -го остатка этого ряда справедлива асимптотическая формула

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = o((z - z_0)^n),$$

т. е.

$$\left| \frac{r_n(z)}{(z - z_0)^n} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0;$$

2) коэффициенты c_n степенного ряда определяются однозначно (единственность разложения регулярной функции в степенной ряд).

K2-20.21

Найти радиус сходимости R степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, если:

$$1) f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}, a \neq 0;$$

$$2) f(z) = \frac{1}{z^m + a}, a \neq 0, \quad m \in \mathbb{N};$$

$$3) z(x) = \frac{1}{3z^4 + 10z^2 + 3};$$

$$4) z(x) = \frac{1}{2z^3 - 6z^2 + z - 3}.$$

K2-20.22

Найти радиус сходимости R степенного ряда

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

не находя коэффициентов a_n , если:

- 1) $P(x) = x^2 - x - 2, x_0 = 0$;
- 2) $P(x) = x^2 + 1, x_0 = -1$;
- 3) $P(x) = x^2 - x - 6, x_0 = 1$;
- 4) $P(x) = x^2 - x + 1, x_0 = 2$;
- 5) $P(x) = 2x^2 + 3x - 2, x_0 = -1/2$;
- 6) $P(x) = x^3 - 8, x_0 = -3$.

K2-20.23

Доказать, что если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в точке z_0 , то он равномерно сходится на отрезке, соединяющем точку $z = 0$ с точкой $z = z_0$.

K2-20.24

Пусть сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и S - его сумма. Обозначим $S = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\sigma = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$. Доказать, что: 1) для всех $x \in (0; 1)$ сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; 2) для всех x таких, что $|x| < \min(1; R)$, где R - радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, выполняются равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n, \quad S - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (S - S_n) x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sigma_n x^n$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

K2-20.25

Доказать, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S , то существует

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S.$$

Справедливо ли обратное утверждение?

K2-20.26

Пусть $a_n \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и существует

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S.$$

Доказать, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$.

K2-20.27

Доказать, что если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x \in (0; 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

То

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$

K2-20.28

Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 1 и $a_n > 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Доказать, что: 1) если сумма $f(x)$ этого ряда ограничена на промежутке $[0; 1)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$; 2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$.

K2-20.29

Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $(0; 1)$, а его сумма равна $f(x)$. Если существует $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = A$, то говорят, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем методом Пуассона-Абеля, а число A называют "обобщенной" (в смысле Пуассона-Абеля) суммой" данного числового ряда.

Показать, что следующие ряды суммируемы по методу Пуассона-Абеля, и найти соответствующие обобщенные суммы:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$
- 2) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta, -\pi \leq \theta \leq \pi;$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta, -\pi \leq \theta \leq \pi.$

K2-20.30

Доказать, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем по методу средних арифметических (см. задачу 47 из 16), то он суммируем и по методу Пуассона-Абеля к той же сумме (теорема Фробениуса).

K2-20.31

Доказать, что если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ суммируемы по методу Пуассона-Абеля к суммам A и B соответственно, то и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_n + a_n b_0)$, т. е. произведение данных рядов, суммируем по методу Пуассона-Абеля к сумме AB .

K2-20.32

Пусть $a_n > 0, b_n > 0, \forall n \in N$. Доказать, что: 1) если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n / \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right) = A$$

2) если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = A$, где $A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, и если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ расходится, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n / \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right) = A.$$

20.4.6 Problems about Sequence Properties (!!!!!!!)

(!!!!!! нужно прорешать, продолб обнаружен в этом!!!)

Акд-MADE.5 Большое значение рекуррентной последовательности (!!!!!!!)

Данная функция $f: R \rightarrow R$ такая что для любого $x \in R$

$$f(x+2) + af(x) = f(x+1), \quad f(3) = 2013, \quad a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Найдите $f(2013)$.

(да вообще хз, как такие решаются)

К1-7.22

Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{5^n}{n!}, \quad n \in N,$$

строго убывает, начиная с некоторого номера. Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5^{n+1}n!}{(n+1)!5^n} = \frac{5}{n+1}.$$

Видно, что при $n \geq 5$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{5}{6} < 1,$$

и, значит, $x_{n+1} < x_n$ (так как $x_n > 0$). Итак, данная последовательность строго убывает, начиная с $n = 5$.

К1-7.пр.23

Доказать, что последовательность

$$x_n = (1 + 1/n)^n, \quad n \in N,$$

строго возрастает. Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \frac{n+1}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Из неравенства Бернулли имеем для любого $n \in N$

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Поэтому для любого $n \in N$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n} = 1,$$

т. е. $x_{n+1} > x_n$, и, значит, данная последовательность строго возрастает. П р имер

K1-7.пр.24

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \quad n \in N :$$

1) строго возрастает, если $a = 0$;

2) строго убывает, если $a = 4$. Δ Для $n \in N$ имеем $x_{n+2}^2 = 6 + x_{n+1}$, $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$, откуда

$$x_{n+2}^2 - x_{n+1}^2 = x_{n+1} - x_n.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. 1) Если $x_1 = 0$, то $x_2 = \sqrt{6} > x_1$. Допустим, что неравенство $x_{n+1} > x_n$ верно для $n \in N$. Тогда из (12) следует, что $x_{n+2}^2 > x_{n+1}^2$, и так как $x_{n+2} > 0$ и $x_{n+1} > 0$, то верно неравенство $x_{n+2} > x_{n+1}$. Значит, $x_{n+1} > x_n$ для любого $n \in N$, т. е. последовательность строго возрастает. 2) В этом случае $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{10} < x_1$. Как и выше, легко доказать, что для любого $n \in N$ из неравенства $x_{n+1} < x_n$ следует неравенство $x_{n+2} < x_{n+1}$. Значит, $x_{n+1} < x_n$ для любого $n \in N$, т. е. в этом случае последовательность строго убывает.

2

K1-7.269

Пусть $x_1 = p, p \in N, x_{n+1} = x_n + 2^n, n \in N$. Доказать, что существует подпоследовательность этой последовательности, все члены которой делятся на 3. 2

K1-7.270

Пусть

$$S_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

$$a_n = 3 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 2!} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3!} - \dots - \frac{1}{(n-1)n \cdot n!}.$$

Доказать, что

$$a_n = S_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

2

K1-7.271

Доказать, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - ограниченные последовательности, то ограничены и последовательности

- 1) $\{x_n \cdot y_n\}$
- 2) $\{\alpha x_n + \beta y_n\}, \alpha, \beta \in R$. 2

K1-7.272

Привести пример ограниченных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}, y_n \neq 0, n \in N$, таких, что последовательность $\{x_n/y_n\}$ неограниченна. 2

K1-7.273

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет условию: существует $C > 0$ такое, что для любого $n \in N$ верно неравенство $|y_n| \geq C$. Доказать, что последовательность $\{x_n/y_n\}$ ограничена. 2

K1-7.274

Последовательность $\{x_n\}$ неограниченна. Доказать, что она содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \geq k, k \in N$, или $x_{n_k} < -k, k \in N$. 2

K1-7.275

Доказать ограниченность последовательности:

- 1) $\left\{ \frac{2n^2-1}{2+n^2} \right\}$
- 2) $\left\{ \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}} \right\}$
- 3) $\left\{ \frac{n+(-1)^n}{3n-1} \right\}$
- 4) $\left\{ \frac{n^2+4n+8}{(n+1)^2} \right\}$
- 5) $\left\{ \frac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-1)} \right\}$. 2

K1-7.276

Доказать неограниченность последовательности:

- 1) $\{(-1)^n n\}$
- 2) $\{n^2 - n\}$; 3) $\{(1-n)/\sqrt{n}\}$
- 4) $\{n + (-1)^n n\}$
- 5) $\{n^{(-1)^n}\}$; 6) $\{(1-n)^{\sin(\pi n/2)}\}$ 7) $\{n^3/(n^2+1)\}$ 8) $\{(n-n^4)/(n+2)^3\}$. 2

K1-7.277

Доказать ограниченность последовательности:

- 1) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, n \in N$
- 2) $x_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}, n \in N;$
- 3) $x_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 j, n \in N$. 2

K1-7.278

Доказать, что если $a_1 = 1, a_{n+1} = (n+1)(a_n+1), n \in N$, то последовательность $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$ ограничена *). 2

K1-7.279Доказать ограниченность последовательности $\{x_n\}$ и найти $\sup \{x_n\}, \inf \{x_n\}$, если:

- 1) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, n \in N;$
- 2) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}, n \in N;$
- 3) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}, n \in N$
- 4) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}, n \in N$. Доказать ограниченность последовательности (280-282). 2

K1-7.280

- 1) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)2k}, n \in N;$
- 2) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(a+(k-1)d)(a+kd)}, n \in N;$
- 3) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}, n \in N;$
- 4) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, n \in N;$
- 5) $x_n = \log_2 \left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right), n \in N, n \geq 2$. 2

K1-7.281

- 1) $\left\{ \frac{3n+5}{\sqrt{4n^2-1}} \right\}$
- 2) $\left\{ \frac{\sqrt{n^3+2}}{(n+3)(\sqrt{n+1})} \right\};$
- 3) $\left\{ \frac{\sqrt[3]{n^6+2n+\sqrt{n^3+2}}}{3n-2n^2} \right\}.$ *) $\prod_{k=1}^n c_k$ - произведение чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$.

K1-7.282

- 1) $\{\sqrt{n^2+1}-n\};$ 2) $\{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}\};$
- 3) $\left\{ n \left(\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4-n} \right) \right\};$
- 4) $\left\{ \sqrt[3]{9n-n^3} + \sqrt[3]{9n+n^3} \right\};$
- 5) $\left\{ \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2-1} \right\}$
- 6) $\left\{ \sqrt{\frac{n^4+n^3}{n^2+1}} - \sqrt{n^2-1} \right\}.$ 2

K1-7.283

Доказать неограниченность последовательности:

- 1) $\left\{ \sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1} \right\};$
- 2) $\left\{ \sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}} - n \right\}.$ 2

K1-7.284

Найти $p, q, 0 \leq q < p$, при которых ограничена последовательность:

- 1) $\left\{ \sqrt{n^p+n^q+1} - \sqrt{n^p-n^q+1} \right\};$
- 2) $\left\{ \sqrt[3]{n^p-n^q+1} - \sqrt[3]{n^p+1} \right\};$
- 3) $\left\{ \sqrt[k]{n^p+an^q+1} - \sqrt[k]{n^p+bn^q+1} \right\}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2, a \neq b.$ 2

K1-7.285

Доказать ограниченность последовательности:

- 1) $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$
- 2) $\left\{ \sqrt[n]{n} \right\}$
- 3) $\left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right\}, x > 0$

K1-7.286

1) Доказать, что последовательность $\{(\ln n)/n\}$ ограничена сверху числом $\ln 2$. 2) Найти $\sup\{(\ln n)/n\}.$ 2

K1-7.287

Доказать ограниченность последовательности:

- 1) $\left\{ \frac{2^n+1}{3^n-2} \right\}$
- 2) $\left\{ \frac{5^{2n+1}+2^n}{1-25^n} \right\}$
- 3) $\left\{ \frac{\ln^2 n+10}{\ln^2 n^2+2} \right\}$
- 4) $\{\lg(3n+5) - \lg(n+1)\}$
- 5) $\left\{ \ln \left(\sqrt{2n^2+1} - n \right) - \ln n \right\}$
- 6) $\left\{ \frac{\ln(n^2+1) - \ln(n+1)}{\ln(n+0,5)} \right\}$ 7) $\left\{ \frac{n+\ln n}{n+1} \right\}$ 8) $\left\{ n \ln \frac{n+1}{n} \right\}$ 9) $\{\ln^2(n+1) - \ln^2 n\}.$ 2

K1-7.288

Доказать неограниченность последовательности:

- 1) $\{5^n - 4^n\}$
- 2) $\left\{ \frac{3^n-2^n}{2^{n+1}} \right\}$
- 3) $\sqrt[n]{n!}$

- 4) $\left\{ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right\} *$
 5) $\left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\}$
 6) $\left\{ \frac{a^n}{n^k} \right\}, |a| > 1, k \in R$ 7) $\left\{ \frac{n+1}{\log_2(n+1)} \right\}. 2$

K1-7.289

Доказать ограниченность последовательности:

- 1) $\{n/3^n\}$
 2) $\{n^2/2^n\}$
 3) $\{n^p/2^n\}, p \in R$
 4) $\{nq^n\}, |q| < 1$
 5) $\{n^p q^n\}, p \in R, |q| < 1. 2$

K1-7.290

Доказать: 1) ограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^n kq^k, \quad n \in N, \quad |q| < 1$$

2) неограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^n kq^{n-k}, \quad n \in N, \quad q \in R, \quad q \neq 0.$$

2

K1-7.291

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n}, \quad n \in N :$$

1) ограничена снизу числом $1/5$; 2) ограничена сверху числом 2. 2

K1-7.292

Доказать ограниченность последовательности:

- 1) $x_1 = a > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{b^2}{x_n} \right)$
 2) $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}. 2$

K1-7.293

Доказать неограниченность последовательности:

- 1) $x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n;$
 2) $x_1 = -4, x_2 = 3, x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n. 2$

K1-7.294

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{x_n}{2^n}, n \in N$, ограничена. 2

K1-7.295

Пусть $\{x_n\}$ - последовательность натуральных чисел такая, что последовательность

$$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}, \quad n \in N,$$

ограничена. Доказать, что последовательность

$$y_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{x_k} \right), \quad n \in N$$

ограничена. 2

K1-7.296

Доказать неограниченность последовательности

$$x_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что данная последовательность монотонна, начиная с некоторого номера (299 – 301). 2

K1-7.299

- 1) $\left\{ \frac{n+1}{2n-1} \right\}$
- 2) $\left\{ \frac{3n+4}{n+2} \right\}$
- 3) $\left\{ \frac{100n}{n^2+16} \right\}$
- 4) $\{n^3 - 6n^2\}$
- 5) $\left\{ \frac{n^2+24}{n+1} \right\}$
- 6) $\left\{ \frac{n^3}{n^2-3} \right\}$ 7) $\left\{ \frac{n^2}{n^3+32} \right\}$ 8) $\left\{ \frac{1-n}{\sqrt{n}} \right\}$.

K1-7.300

- 1) $\{\sqrt{3n-2}\}$;
- 2) $\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\}$
- 3) $\{\sqrt[3]{n^3-1} - n\}$
- 4) $\{\sqrt{n^2+n} - n\}$;
- 5) $\left\{ \frac{n+1}{\sqrt{n^2+7}} \right\}$;
- 6) $\left\{ \frac{n-3}{\sqrt{n^2+1}} \right\}$.

K1-7.301

- 1) $\{2^n - 100n\}$;
- 2) $\{3^n - 2^n\}$
- 3) $\{2^{n+1} - 3^{n-2}\}$;
- 4) $\left\{ \frac{6^{n+1} - 5^{n+1}}{6^n + 5^n} \right\}$
- 5) $\left\{ \frac{4^{n-1} + 3^{n-1}}{4^n + 3^n} \right\}$
- 6) $\left\{ \frac{100^n}{n!} \right\}$ 7) $\left\{ \frac{2^n}{n} \right\}$ 8) $\{\lg(n+1) - \lg n\}$; 9) $\{\ln(n^2 + 9n) - 2 \ln n\}$.

K1-7.302Доказать, что последовательность $\{nq^n\}$, $0 < q < 1$, монотонна, начиная с некоторого номера; указать этот номер.**K1-7.303**При каких соотношениях между a, b, c, d последовательность $\left\{ \frac{an+b}{cn+d} \right\}$, начиная с некоторого номера, будет: 1) возрастающей; 2) убывающей?**K1-7.304**

Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

монотонна.

K1-7.305

Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n k \cdot k!, \quad n \in N,$$

возрастает и ограничена. Найти $\inf \{x_n\}, \sup \{x_n\}$.

K1-7.307

Доказать, что данная последовательность немонотонна:

- 1) $\{(-1)^n\}$
- 2) $\{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}\}$
- 3) $\{n + (-1)^n\}$
- 4) $\{\sin n\}$;
- 5) $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, n \in N$.

K1-7.308

Доказать, что если $\{x_n\}$ - монотонная последовательность, то и последовательность $\left\{\frac{1}{x_1+x_2+\dots+x_n}\right\}$ монотонна.

K1-7.309

Доказать, что данная последовательность убывает, начиная с некоторого номера:

- 1) $\{n/4^n\}$
- 2) $\{(3n+1)^2/3^n\}$
- 3) $\{n^3/2^n\}$
- 4) $\{n^{1/n}\}$. 3

K1-7.310

Доказать монотонность последовательности:

- 1) $\{n - 6 \lg n\}$
- 2) $\{\lg n - n\}$
- 3) $\{(\lg n)/n\}$. 3

K1-7.311

Доказать, что последовательность:

- 1) $\{(1 + 1/(2n))^n\}$ возрастает;
- 2) $\{(1 + 1/n)^{n+1}\}$ убывает. 3

K1-7.312

Доказать, что при любом $x > 0$: 1) последовательность $\{(1 + x/n)^n\}$ возрастает; 2) последовательность $\{(1 + x/n)^{n+1}\}$, где $l \in N, l > x$, убывает. 3

K1-7.313

Доказать, что при $a \neq 1, a > 0$ возрастает последовательность:

- 1) $\left\{\frac{a^n - 1}{n}\right\}$;
- 2) $\{n(1 - a^{1/n})\}$. 3

K1-7.314

Доказать, что последовательность $x_1 = -10, x_{n+1} = \frac{x_n+1}{n+1}, n \in N$, убывает, начиная с некоторого номера; указать этот номер.

20.4.7 Other tasks for series convergence

(K2-16)

K2-16.11

Сложить ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и вычислить сумму получившегося ряда, если:

- 1) $a_n = \frac{1}{5^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{n^2}, b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2};$
- 2) $a_n = \frac{(-1)^n n + \sin^2(\pi/n)}{3^n}, b_n = \frac{\cos^2(\pi/n) + (-1)^{n+1}(n+1)}{3^n};$
- 3) $a_n = \frac{\cos(\pi n/3)}{2^n}, b_n = \frac{\sin^2(\pi n/6)}{2^{n-1}};$
- 4) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$

K2-16.12

Найти разность расходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и Найти сумму получившегося ряда, если он сходится:

- 1) $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n+1};$
- 2) $a_n = \frac{n+3}{n(n+1)}, b_n = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}.$

K2-16.13

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ - ряд, полученный при перемножении рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Найти $c_n^{n=1}$, если:

- 1) $a_n = a^{n-1}, b_n = b^{n-1}, |a| < 1, |b| < 1;$
- 2) $a_n = q^{n-1}, b_n = \frac{q^n}{n(n+1)}, |q| < 1;$
- 3) $a_n = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}, b_n = \frac{3^{n-1}}{(n-1)!};$
- 4) $a_n = \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}, b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$
- 5) $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}, b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}.$

K2-16.14

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ есть разность рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Выяснить, можно ли утверждать, что этот ряд расходится, если: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится; 2) оба эти ряда расходятся.

K2-16.15

Показать, что квадрат сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ есть ряд расходящийся.

K2-16.16

Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$. Показать, что произведение двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta}$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha + \beta > 1$, и расходящийся, если $\alpha + \beta < 1$.

K2-16.17

Показать, что:

- 1) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \right) = 1;$
- 2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n}{n!}.$

K2-16.11

Сложить ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и вычислить сумму получившегося ряда, если:

- 1) $a_n = \frac{1}{5^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{n^2}, b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2};$
- 2) $a_n = \frac{(-1)^n n + \sin^2(\pi/n)}{3^n}, b_n = \frac{\cos^2(\pi/n) + (-1)^{n+1}(n+1)}{3^n};$
- 3) $a_n = \frac{\cos(\pi n/3)}{2^n}, b_n = \frac{\sin^2(\pi n/6)}{2^{n-1}};$
- 4) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$

K2-16.12

Найти разность расходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и Найти сумму получившегося ряда, если он сходится:

- 1) $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n+1};$
- 2) $a_n = \frac{n+3}{n(n+1)}, b_n = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}.$

K2-16.13

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ - ряд, полученный при перемножении рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Найти $c_n^{n=1}$, если:

- 1) $a_n = a^{n-1}, b_n = b^{n-1}, |a| < 1, |b| < 1;$
- 2) $a_n = q^{n-1}, b_n = \frac{q^n}{n(n+1)}, |q| < 1;$
- 3) $a_n = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}, b_n = \frac{3^{n-1}}{(n-1)!};$
- 4) $a_n = \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}, b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$
- 5) $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}, b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}.$

K2-16.14

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ есть разность рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Выяснить, можно ли утверждать, что этот ряд расходится, если: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится; 2) оба эти ряда расходятся.

K2-16.15

Показать, что квадрат сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ есть ряд расходящийся.

K2-16.16

Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$. Показать, что произведение двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta}$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha + \beta > 1$, и расходящийся, если $\alpha + \beta < 1$.

K2-16.17

Показать, что:

- 1) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \right) = 1;$
- 2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n}{n!}.$

K2-16.18

Показать, что ряд, полученный при перемножении двух расходящихся рядов

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} (2^n + 2^{-(n+1)})$$

абсолютно сходится.

K2-16.19

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n > 0 (n \in N)$, сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n > 0 (n \in N)$, расходится. Показать, что произведение этих рядов есть ряд расходящийся.

K2-16.110

Доказать, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \right)$$

сходятся и их суммы равны соответственно A, B и C , то справедливо равенство $C = AB$.

K2-16.111

Используя оценку (5), найти наименьший номер n_0 такой, чтобы для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, где $a_n > 0$, при всех $n \geq n_0$ выполнялось неравенство $r_n < 10^{-3}$, если:

- 1) $a_n = 1/n$;
- 2) $a_n = 1/n^2$;
- 3) $a_n = 1/n^3$;
- 4) $a_n = 1/n!$.

K2-16.112

Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нужно взять, чтобы ошибка при замене суммы S этого ряда его n -й частичной суммой S_n не превышала α , т. е. чтобы $|S - S_n| = |r_n| \leq \alpha$, если:

- 1) $a_n = 1/n^2, \alpha = 10^{-5}$;
- 2) $a_n = 1/n!, \alpha = 10^{-3}$;
- 3) $a_n = (-1)^{n+1} / (n2^n), \alpha = 10^{-3}$;
- 4) $a_n = 1/(2n-1)!, \alpha = 10^{-5}$.

K2-16.113

Оценить порядок убывания при $n \rightarrow \infty$ остатка r_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, получив асимптотическую формулу вида $r_n \sim Mn^p$ при $n \rightarrow \infty$, где $M > 0$ и M не зависит от n , если:

- 1) $a_n = 1/n^3$;
- 2) $a_n = 1/n^5$;
- 3) $a_n = 1/n^\alpha, \quad \alpha > 1$.

K2-16.114

Привести пример такого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln \ln(n+2)$ расходится.

K2-16.115

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

- 1) $a_1 = 1, a_{n+1} = (3/4 + (-1)^n/2) a_n, n \geq 1$;
- 2) $a_1 = 1, a_{n+1} = \cos a_n, n \geq 1$;
- 3) $a_1 = \sin \alpha, a_{n+1} = (-1)^n \sin a_n, n \geq 1$.

K2-16.116

Доказать, что гипергеометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = 1$,
 $a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n-1)}$, $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, n \geq 2$, сходится, если $\gamma > \alpha + \beta$.

K2-16.117

Найти все значения α , при которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha$, если:

- 1) $a_1 = \sin x$, $a_{n+1} = \sin a_n$, $n \geq 1$, $\sin x \neq 0$;
- 2) $a_1 = \operatorname{arctg} x$, $a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n$, $n \geq 1$, $x \neq 0$.

K2-16.118

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx_0}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ сходится абсолютно при любом $x > x_0$.

K2-16.119

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$, сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

K2-16.120

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится. Следует ли отсюда, что $a_n = o(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$?

K2-16.121

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ также сходится.

K2-16.122

Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), расходится. Следует ли отсюда, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, если:

- 1) $b_n = \frac{a_n}{1+na_n}$
- 2) $b_n = \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$
- 3) $b_n = \frac{a_n}{1+a_n^2} \Gamma$

K2-16.123

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами расходится, то: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ расходится;
 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$, где $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

K2-16.124

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится, то: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$, где $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, расходится; 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ сходится.

K2-16.125

Доказать, что если a_n монотонно стремится к нулю и, кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ расходится, причем $\sum_{k=1}^n k(a_1 - a_{k+1}) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

K2-16.126

Обозначим $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет при всех $n \in N$ условию $\Delta^2 a_n \geq 0$ (такую последовательность называют выпуклой) и ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n$ сходится.

K2-16.127

Доказать, что если $a_n \neq 0 (n \in N)$, a_n монотонно стремится к нулю и $\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O(a_n)$, то $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = O\left(\frac{1}{a_n}\right)$.

K2-16.128

Доказать, что если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lambda \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \mu,$$

причем $|\lambda\mu| < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.

K2-16.129

Привести пример такого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится.

K2-16.130

Пусть $\{a_n\}$ - последовательность положительных чисел, a_n монотонно стремится к нулю, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, где $\{n_k\}$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая при всех $k \in N$ условию $n_{k+1} - n_k < c$ (c не зависит от k), также расходится.

K2-16.131

Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится, то существует последовательность $\{b_n\}$, монотонно стремящаяся к $+\infty$ и такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также сходится.

K2-16.132

Пусть $f(x)$ - положительная, строго возрастающая при $x > 0$ функция, $g(x)$ - функция, обратная к f . Доказать, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(a_n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n g(b_n),$$

где $a_n > 0, b_n > 0 (n \in N)$, сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n g(b_n).$$

K2-16.133

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны, и пусть $\{\lambda_n\}$ - последовательность положительных чисел такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}$ рас- ходится. Обозначим

$$B_n = \lambda_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \lambda_{n+1}.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 1) сходится, если существует номер n_0 и число $\sigma > 0$ такие, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $B_n \geq \sigma$; 2) расходится, если для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $B_n \leq 0$ (признак Куммера).

K2-16.134

Доказать, что если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n = A,$$

то при $A > 1$ этот ряд сходится, а при $A < 1$ расходится (признак Бертрانا).

K2-16.135

Пусть $\{a_n\}$ - монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Локазать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$ схлится, если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, и расходится, если эта последовательность не ограничена.

K2-16.136

Пусть заданы последовательность $\{a_n\}$ положительных чисел и число $p \in N(p > 1)$ такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ сходится. Обозначим

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p$ сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

K2-16.137

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится. Обозначим

$$c_n = \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

K2-16.138

Пусть заданы две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ положительных чисел, а также числа p и q такие, что $p > 1, 1/p + 1/q = 1$. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q$ сходятся, то: 1) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{1/q};$$

2) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^p$, причем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p \right)^{1/p}$$

K2-16.139

Пусть S_n и σ_n — n -е частичные суммы соответственно рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причем $b_n > 0 (n \in \mathbb{N})$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится и существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

Там еще пара задач, которые лень выгружать

21 Other problems**21.1 Problems about scalar and vector fields (!!!!)****21.1.1 Problems about scalar and vector fields (!!!!)****Магистратура МФТИ 2019.4**

Поверхность

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - z^2 = x^2 + y^2 \leq 2z\}$$

ориентирована полем единичных нормалей, имеющих острый угол с положительным направлением оси z . Найти поток векторного поля $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ через поверхность S . Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $2\sqrt{2}\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

Единичная нормаль к S в точке $(x, y, z) \in S$ равна $\vec{n} = (x, y, z)$, тогда

$$(\vec{F}, \vec{n}) = x^3 + y^3 + z^3.$$

В сферических координатах

$$x = \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \cos \theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi].$$

$$0 \leq 1 - z^2 \leq 2z, \quad \rightarrow \quad \sqrt{2} - 1 \leq z = \cos \theta \leq 1, \quad \rightarrow \quad \theta \in [0, \arccos(\sqrt{2} - 1)]$$

$$\int_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \int_0^{\arccos(\sqrt{2}-1)} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} (x^3 + y^3 + z^3) d\varphi =$$

$$\left\{ \int_0^{2\pi} x^3 d\varphi = \int_0^{2\pi} y^3 d\varphi = 0 \right\} = \int_0^{\arccos(\sqrt{2}-1)} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} z^3 d\varphi = \int_0^{\arccos(\sqrt{2}-1)} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_{\sqrt{2}-1}^1 z^3 dz = \frac{\pi}{2} (1 - (\sqrt{2} - 1)^4) = 2\sqrt{2}\pi(3 - 2\sqrt{2}).$$

К3-12.пр.2

Пусть скалярное поле u , а также векторные поля $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ дифференцируемы на Ω , $\mathbf{c}$ - постоянный вектор. Показать, используя правила действия с ∇ , что:

$$1) \operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}) + u \operatorname{div} \mathbf{a}, \text{ т. е.}$$

$$(\nabla, u\mathbf{a}) = (\nabla u, \mathbf{a}) + u(\nabla, \mathbf{a})$$

$$2) \operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b}), \text{ т. е.}$$

$$(\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]) - (\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}])$$

$$3) \operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{c} \operatorname{div} \mathbf{a} - (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a}, \text{ т. е.}$$

$$[\nabla, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = \mathbf{c}(\nabla, \mathbf{a}) - (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a}.$$

А 1) Сначала преобразуем выражение $(\nabla, u\mathbf{a})$ с учетом дифференциального характера ∇ :

$$(\nabla, u\mathbf{a}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{u} \mathbf{a}) + (\nabla, u\mathbf{a}).$$

В первом слагаемом перенесем скаляр $\overset{\downarrow}{u}$ к ∇ , не переставляя их:

$$(\nabla, \overset{\downarrow}{u} \mathbf{a}) = (\nabla \overset{\downarrow}{u}, \mathbf{a}).$$

Здесь ∇ соединен операцией (3) с u , поэтому опускаем метку:

$$(\nabla \overset{\downarrow}{u}, \mathbf{a}) = (\nabla u, \mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}).$$

Во втором слагаемом из (38) выносим скаляр u , переставляя его с ∇ :

$$(\nabla, u \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = u(\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}),$$

и, поскольку ∇ соединен операцией (9) с вектором $\mathbf{a}$, опускаем метку:

$$(\nabla, u \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = u(\nabla, \mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Складывая результаты, получаем равенство (35). 2) Имеем

$$(\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]) + (\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]).$$

Для первого слагаемого воспользуемся формулой циклической перестановки в смешанном произведении

$$(\mathbf{p}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\mathbf{p}, \mathbf{a}])$$

и получим

$$(\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}])$$

Здесь ∇ соединен с $\mathbf{a}$ операцией (10), поэтому метку можно опустить: $(\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]) = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$. Во втором слагаемом сначала совершим перестановку

$$[\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}] = -[\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}, \mathbf{a}],$$

затем преобразуем его, как и первое, и получим

$$(\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]) = -(\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}, \mathbf{a}]) = -(\mathbf{a}, [\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]) = -(\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b})$$

Сложив результаты, приходим к равенству (36). 3) Имеем

$$[\nabla, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = [\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{c}}, \mathbf{a}]] + [\nabla, [\mathbf{c}, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}]]$$

Поскольку $\mathbf{c} = \text{const}$, результат действия ∇ на $\mathbf{c}$ есть нуль, поэтому и первое слагаемое равно нулю. Для второго слагаемого воспользуемся формулой преобразования двойного векторного произведения

$$[\mathbf{p}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = (\mathbf{p}, \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{p}, \mathbf{c})\mathbf{a}$$

Получим

$$[\nabla, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = [\nabla, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = (\nabla, \mathbf{a})\mathbf{c} - (\nabla, \mathbf{c})\mathbf{a}$$

Переставив ∇ и $\mathbf{c}$ в произведении $(\nabla, \mathbf{c})$

(это будет символ вида (7)), приходим к

требуемому результату:

$$[\nabla, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = (\nabla, \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a}.$$

К3-12.пр.2

Найти поток поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ через поверхность $S = \{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{r}\}$, нормаль на которой направлена от начала координат.

Очевидно, $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$. Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского. Рассмотрим область G - "криволинейный тетраэдр" $OABC$ (рис. 12.1). Часть его границы, лежащую в плоскости Oxy , обозначим S_1 , в плоскости Oyz - S_2 , в плоскости Ozx - S_3 . Потoki поля $\mathbf{a}$ через S, S_1, S_2, S_3 (нормаль - внешняя к G) обозначим соответственно Π, Π_1, Π_2, Π_3 . По теореме Гаусса-Остроградского

$$\iint_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dV = 0$$

т. е. $\Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 0$, а $\Pi = -(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)$. Вычислим, например, Π_3 :

$$\Pi_3 = \iint_{S_3} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS.$$

Здесь $\mathbf{n} = (0; -1; 0)$, $\mathbf{a} = z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. За параметры на S_3 - криволинейном треугольнике AOC - возьмем x и z . Дуга AC задается уравнением $\sqrt{x} + \sqrt{z} = \sqrt{r}$, т. е. $x = (\sqrt{r} - \sqrt{z})^2, 0 \leq z \leq r$. Находим

$$\Pi_3 = \iint_{OAC} (-z) dx dz = - \int_0^r z dz \int_0^{(\sqrt{r}-\sqrt{z})^2} dx = -\frac{r^3}{30}.$$

Таковы же Π_1 и Π_2 . Следовательно, $\Pi = 3 \cdot r^3/30 = r^3/10$.

К3-12.пр.3

Доказать формулу (27). А По формуле (35), полагая $\mathbf{a} = \nabla v$, получаем

$$\operatorname{div}(u \nabla v) = (\nabla u, \nabla v) + u(\nabla, \nabla v).$$

Отсюда, учитывая, что $(\nabla, \nabla v) = \operatorname{div} \operatorname{grad} v = \Delta v$, находим

$$(\nabla u, \nabla v) = \operatorname{div}(u \nabla v) - u \Delta v$$

и, следовательно,

$$\iiint_G (\nabla u, \nabla v) dV = \iiint_G \operatorname{div}(u \nabla v) dV - \iiint_G u \Delta v dV$$

Полагая $\mathbf{a} = u \nabla v$ и применяя к первому слагаемому правой части формулу (23), получаем (27).

К3-12.пр.4 Работа поля вдоль линии пересечения эллипсоида и цилиндра

(большая задача, пока вообще лень смотреть)

Пусть γ - часть линии пересечения эллипсоида $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ с цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, лежащая в замкнутой области $x \geq 0, z \geq 0$ и ориентированная по возрастанию ординат точек. Найти работу поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$:

- 1) вдоль γ ;
- 2) вдоль γ_1 - части γ , лежащей в первом октанте.

1)

Легко найти, что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$. Воспользуемся формулой Стокса (19). Замкнем γ дугой $\gamma' = AC$ (см. рис. 12.2), лежащей в пересечении эллипсоида с плоскостью Oyz . Контур $\Gamma = ABCA$ - это край части S поверхности эллипсоида. По формуле (19)

$$\int_{\Gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) dS = 0.$$

Отсюда

$$\int_{\gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r} + \int_{\gamma'} \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0.$$

Дугу γ' замкнем отрезком AC , направленным от A к C . Получившийся контур служит краем части плоскости Oyz . Из того, что $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, как и выше, получаем

$$\int_{\gamma'} \mathbf{a} d\mathbf{r} + \int_{AC} \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0$$

На отрезке AC

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}, \quad d\mathbf{r} = (0; dy; 0),$$

поэтому

$$\mathbf{a} d\mathbf{r} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{AC} \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0.$$

Отсюда следует, что и

$$\int_{\gamma'} \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0, \quad \int_{\gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0.$$

2) Способ I.

Вычислим работу по γ' непосредственно, используя параметризацию γ' . Полагая

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

из уравнения эллипсоида получаем $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi$. Тогда на γ'

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \mathbf{k}, \\ d\mathbf{r} &= \left(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \mathbf{k} \right) d\varphi, \end{aligned}$$

поэтому

$$\int_{\gamma'} = \int_0^{\pi/2} \left(-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{3}{8}.$$

Способ II.

Контур γ взаимно однозначно проектируется на ось Oy . Опустим перпендикуляры из точек контура на эту ось. Они образуют гладкую поверхность, край которой состоит, кроме γ' , еще из ломаной $CD\dot{O}B$. Используя формулу (19) и то, что $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, получаем

$$\int_{\gamma'} \mathbf{a} d\mathbf{r} + \int_{CD} \mathbf{a} d\mathbf{r} + \int_{DO} \mathbf{a} d\mathbf{r} + \int_{OB} \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0.$$

На OB $\mathbf{a} = x\mathbf{j}$, $d\mathbf{r} = \mathbf{j} dx$, поэтому

$$\mathbf{a} d\mathbf{r} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{OB} \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0.$$

Аналогично, $\int_{DO} \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0$. Поэтому

$$\int_{\gamma'} \mathbf{a} d\mathbf{r} = - \int_{CD} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \int_{DC} \mathbf{a} d\mathbf{r}.$$

На DC $\mathbf{a} = \mathbf{i} + z\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = \mathbf{k} dz$, поэтому

$$\int_{CD} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \int_0^{\sqrt{3}/2} z dz = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, как и ранее, $\int_{\gamma'} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \frac{3}{8}$. ЗАДАЧИ

K3-12.1

Найти поверхность уровня поля $u = x^2 - y^2 + z^2$, содержащую точку: а) $(1; 1; 1)$; б) $(1; 2; 1)$.

K3-12.2

Написать уравнение нормали в точке $(2; 2; -2)$ к поверхности уровня поля $u = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2})$, проходящей через эту точку.

K3-12.3

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ - постоянные векторы, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{r} = (x; y; z)$. Найти поверхность уровня поля:

- 1) $u = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{(\mathbf{b}, \mathbf{r})}$
- 2) $u = e^{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})}$.

K3-12.4

Найти поверхности уровня поля $u = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{((x-1)^2 + y^2 + z^2)}$ и $\max u$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

K3-12.5

Найти поверхности уровня поля $u = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $\max u$, $\min u$ в шаре $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{2})^2 \leq 1$.

K3-12.6

Найти $\text{grad } u(M_0)$, если:

- 1) $u = xy + yz + zx$; $M_0(1; 1; 1)$;
- 2) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $M_0(1; 1; -1)$;
- 3) $u = 9(x + y + z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $M_0(1; -2; -2)$;
- 4) $u = ze^{x^2 + y^2 + z^2}$; $M_0(0; 0; 0)$.

K3-12.7

В каких точках $\text{grad}(x + y^2 + 18z^3 - 3xyz)$: а) перпендикулярен оси Oz ; б) параллелен оси Oz ; в) равен нулю?

K3-12.8

Найти угол между $\text{grad } u(M_1) \arctg(x/(y+x))$ и $\text{grad } u(M_2)$, если:

- 1) $u = (x+y)e^{x+y}$; $M_1(0; 0)$, $M_2(1; 1)$;
- 2) $u = \arctg(x/(y+z))$; $M_1(1; 1; 0)$, $M_2(-1; 0; 1)$;
- 3) $u = x/(x^2 + y^2 + z^2)$; $M_1(1; 2; 2)$, $M_2(-3; 1; 0)$;
- 4) $u = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $M_1(3; \sqrt{3}; -2)$, $M_2(\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{3})$.

K3-12.9

На поверхности уровня поля $u = x/(x^2 + y^2 + z^2)$, проходящей через точку $(1; 1; 1)$, найти наименьшее значение $|\text{grad } u|$.

K3-12.10

Найти $\inf |\text{grad } u|$ и $\sup |\text{grad } u|$ в области $1 < z < 2$, если $u = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

K3-12.11

Пусть u и v - дифференцируемы поля, α и β - числа. Доказать, что:

- 1) $\text{grad}(u+v) = \text{grad } u + \text{grad } v$; 2) $\text{grad}(\alpha u) = \alpha \text{grad } u$;
- 3) $\text{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha \text{grad } u + \beta \text{grad } v$;
- 4) $\text{grad}(uv) = v \text{grad } u + u \text{grad } v$;
- 5) $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{grad } u - u \text{grad } v}{v^2}$, $v \neq 0$.

K3-12.12

Указать в R^3 такие дифференцируемые поля u и v , что векторы ∇u и ∇v не коллинеарны ни в одной точке (для обычного вектора $\mathbf{p}$ векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}v$ обязательно коллинеарны).

K3-12.13

Пусть u - дифференцируемое поле, $f(t)$ - дифференцируемая функция, $t \in R$. Доказать, что

$$\text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u.$$

K3-12.14

Пусть u и v - дифференцируемые поля, $f(t; s)$ - дифференцируемая функция, $(t; s) \in R^2$. Доказать, что

$$\text{grad } f(u; v) = \frac{\partial f}{\partial t}(u; v) \text{grad } u + \frac{\partial f}{\partial s}(u; v) \text{grad } v.$$

K3-12.15

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ - постоянные векторы, $\mathbf{r} = ix + jy + kz$, $r = |\mathbf{r}|$. Найти $\text{grad } u$, если:

1) $u = r$; 2) $u = r^2$; 3) $u = 1/r$; 4) $u = \ln r$; 5) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$;

6) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$; 7) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\mathbf{b}, \mathbf{r})$; 8) $u = \|\mathbf{a}, \mathbf{r}\|^2$.

K3-12.16

Доказать, что $\text{grad } u(M)$ перпендикулярен поверхности уровня поля u , проходящей через точку M .

K3-12.17

Пусть u - непрерывно дифференцируемое поле, $u_0 = u(M_0)$, $\nabla u(M_0) \neq 0$; l_0 - нормаль в точке M_0 к поверхности уровня $u = u_0$. 1) Доказать, что существуют такие окрестность точки M_0 и число $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon, |\varepsilon| < \varepsilon_0$, в этой окрестности есть только одна точка пересечения $M = M(\varepsilon)$ нормали l_0 с поверхностью уровня $u = u_0 + \varepsilon$;

K3-12.18

Пусть $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ - радиус-векторы двух фиксированных точек, $\mathbf{r} = ix + jy + kz$,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}, \quad j = 1, 2,$$

$$u = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|.$$

Доказать, что $\text{grad } u$ в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$ составляет равные углы с векторами $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$. Объяснить, используя это, оптическое свойство эллипсоида.

K3-12.19

Пусть функция $f(r)$ дифференцируема, $\mathbf{r} = ix + jy + kz$, $r = |\mathbf{r}|$. Доказать, что $\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$.

K3-12.20

Пусть вектор-функции $\mathbf{a}(r)$ и $\mathbf{b}(r)$ дифференцируемы, $\mathbf{r} = ix + jy + kz$, $r = |\mathbf{r}|$. Доказать, что:

1) $\nabla(\mathbf{a}(r), \mathbf{r}) = \mathbf{a}(r) + (\mathbf{a}'(r), \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r}$;

2) $\nabla(\mathbf{a}(r), \mathbf{b}(r)) = ((\mathbf{a}', \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}')) \frac{\mathbf{r}}{r}$.

K3-12.21

Выразить $\text{grad } u$: 1) в цилиндрических координатах r, φ, z ; 2) в сферических координатах r, φ, ψ , используя соответствующие орты $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\psi$, касательные к координатным линиям.

K3-12.22

Проверить, что вектор $\text{grad } u$ не зависит от выбора декартовой системы координат.

K3-12.23

Доказать, что для дважды дифференцируемых полей u и v

$$\Delta(uv) \equiv \nabla^2(uv) = v\nabla^2u + 2(\nabla u, \nabla v) + u\nabla^2v.$$

K3-12.24

Найти производную поля по направлению единичного вектора $\mathbf{n} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$, если $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mathbf{r} = (x; y; z)$:

- 1) $u = r$; 2) $u = 1/r$; 3) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$, $\mathbf{a} = \text{const}$; 4) $u = f(r)$.

K3-12.25

Найти производную поля $u = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$ в точке $M(x; y; z)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

K3-12.26

Пусть u и v - дифференцируемые поля. Найти производную поля u по направлению вектора $\text{grad } v$.

K3-12.27

По какой кривой следует двигаться из точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, чтобы поле $u = x^2/2 + y^2 - z^2$ имело наибыстрейшее убывание, если: а) $M_0(1; 1; 0)$; б) $M_0(1; 1; 1)$?

K3-12.28

Найти линии набыстрейшего изменения плоских полей:

- 1) $u = x^2 - y^2$; 2) $u = xy$; 3) $u = x^2/2 + y^2$; 4) $u = y^2/x$.

K3-12.29

Найти линии набыстрейшего изменения трехмерных полей:

- 1) $u = x^2 + 2y^2 + z^2$; 2) $u = x^2 + y^2 + z^2$; 3) $u = xyz$.

K3-12.30

Пусть в звездной *) относительно точки A области Ω задано гладкое поле u и $|\nabla u| \leq c$. Доказать, что для любой точки $B \in \Omega$

$$|u(B) - u(A)| \leq c|B - A|,$$

где $|B - A|$ - расстояние между A и B . Для выпуклой области доказать справедливость этого неравенства для любых A и B из Ω . Найти векторные линии поля а (31, 32).

K3-12.31

- 1) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{a} = z\mathbf{j} - y\mathbf{k}$; 3) $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 4) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$;
 5) $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

K3-12.32

- 1) $\mathbf{a} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \text{const}$;
 3) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$;
 4) $\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, $\mathbf{c} = \text{const}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;
 5) $\mathbf{a} = (\mathbf{b}, \mathbf{r})\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ - постоянные векторы, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;
 6) $\mathbf{a} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$; 7) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

K3-12.33

Найти векторную линию поля $\mathbf{a}$, проходящую через точку M , если:

- 1) $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $c = \text{const}$, $M(1; 0; 0)$;
 2) $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; $M(1/2; -1/2; 1)$;
 3) $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$; $M(1; 1; 0)$.

К3-12.34

Найти векторные линии напряженности магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника постоянного тока.

К3-12.35

Для поля $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ найти уравнение векторной трубки, содержащей окружность $z = 1, x^2 + y^2 = 4$.

К3-12.36

Для поля $\mathbf{a} = \mathbf{j}/z - \mathbf{k}/y$ найти векторную трубку, содержащую кривую $y = z, x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

К3-12.37

Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать их и проверить, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β - числа, $u, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ - дифференцируемые скалярное и векторные поля):

- 1) $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{a} + \beta \operatorname{div} \mathbf{b}$;
- 2) $\operatorname{div}(u \mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}) + u \operatorname{div} \mathbf{a}$.

К3-12.38

Полагая $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$, найти $\operatorname{div} \mathbf{a}$, если:

- 1) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$; 2) $\mathbf{a} = r\mathbf{r}$; 3) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r$; 4) $\mathbf{a} = (-x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2}$;
- 5) $\mathbf{a} = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5)\mathbf{i} + (4x^3 + xz + 2)\mathbf{j} + (xy - 3xz^2 - 3)\mathbf{k}$.

К3-12.39

Выразить в координатной форме $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$.

К3-12.40

Найти:

- 1) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; 2) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

К3-12.41

Найти ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$): 1) $\operatorname{div} \operatorname{grad} r^2$; 2) $\operatorname{div} \operatorname{grad}(1/r)$; 3) $\operatorname{div} r\mathbf{c}, \mathbf{c} = \text{const}$; 4) $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{r})$; 5) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r)$; 6) $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{c}), \mathbf{c} = \text{const}$; 7) $\operatorname{div}[\mathbf{c}, \mathbf{r}], \mathbf{c} = \text{const}$; 8) $\operatorname{div}[\mathbf{r}, [\mathbf{c}, \mathbf{r}]], \mathbf{c} = \text{const}$.

К3-12.42

Решить уравнение ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$):

- 1) $\operatorname{div}(u(r)\mathbf{r}) = 0$; 2) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u(r) = 0$; 3) $\operatorname{div}(u(r)\mathbf{r}) = \lambda u(r), \lambda \neq 3$.

К3-12.43

Найти дивергенцию гравитационного поля нескольких точечных масс.

К3-12.44

Среда вращается как твердое тело вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω . Найти в фиксированный момент времени дивергенцию поля линейных скоростей $\mathbf{v}$ и поля ускорений $\mathbf{w}$ точек среды.

К3-12.45

Доказать, что $\operatorname{div} \mathbf{a}$ не зависит от выбора декартовой системы координат.

К3-12.46

Найти $\operatorname{div} \mathbf{a}$ плоского поля $\mathbf{a}$ в полярных координатах.

K3-12.47

Найти $\operatorname{div} \mathbf{a}$ трехмерного поля: 1) в цилиндрических координатах; 2) в сферических координатах.

K3-12.48

Найти $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$:
1) $\operatorname{div} \mathbf{a}(r)$; 2) $\operatorname{div}(u(r)\mathbf{a}(r))$.

K3-12.49

Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать и проверить их, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β - числа, $u, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ - дифференцируемые скалярное и векторные поля, $\mathbf{c}$ - постоянный вектор):

- 1) $\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{a} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{b}$; 2) $\operatorname{rot}(u\mathbf{c}) = [\operatorname{grad} u, \mathbf{c}]$;
- 3) $\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}]$; 4) $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{c} \operatorname{div} \mathbf{a} - (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a}$
- 5) $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}$;
- 6) $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b})$.

K3-12.50

Найти $(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|, \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ - постоянные векторы, $u(r)$ - дифференцируемое поле):
1) $\operatorname{rot} \mathbf{r}$; 2) $\operatorname{rot}(r\mathbf{a})$; 3) $\operatorname{rot}((\mathbf{r}, \mathbf{a})\mathbf{b})$; 4) $\operatorname{rot}(u(r)\mathbf{a})$; 5) $\operatorname{rot}(u(r)\mathbf{r})$.

K3-12.51

Найти $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ в точке M_0 , если:

- 1) $\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + (2x + 3y - z)\mathbf{j} + (x^2 + z^2)\mathbf{k}; M_0(1; 3; 2)$
- 2) $\mathbf{a} = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{z}{x}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k}; M_0(1; 2; -2)$.

K3-12.52

Для любого вектора $\mathbf{p}$ векторы $[\mathbf{p}, \mathbf{a}]$ и $\mathbf{a}$ перпендикулярны (если они не нулевые). Верно ли это для векторов $[\nabla, \mathbf{a}]$ и $\mathbf{a}$?

K3-12.53

Найти угол между $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M_1)$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M_2)$, если:

- 1) $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$
- 2) $\mathbf{a} = z^3\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}; M_1(1; 2; 0), M_1(1; 2; 3), M_2(1; 1; -1)$;

K3-12.54

Найти:

- 1) $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{r}], \mathbf{c} = \text{const}$; 2) $\operatorname{rot}[\mathbf{r}, [\mathbf{c}, \mathbf{r}]], \mathbf{c} = \text{const}$.

K3-12.55

Проверить в координатной форме: 1) формулу (14); 2) формулу (15).

K3-12.56

Равенство $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$ проверить в координатной форме, а также записать и получить его, используя символ ∇ и правила действия с ним.

K3-12.57

Найти $\operatorname{rot} \operatorname{grad}(1/r)$.

K3-12.58

Получить формуль:

- 1) $\nabla(\nabla, u\mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \nabla)\nabla u, \mathbf{c} = \text{const}$;
- 2) $\nabla(\nabla, u\mathbf{a}) = u\nabla(\nabla, \mathbf{a}) + (\nabla, \mathbf{a})\nabla u + [\nabla u, [\nabla, \mathbf{a}]] + (\nabla u, \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla)\nabla u$
- 3) $[\nabla, [\nabla u, \mathbf{c}]] = (\mathbf{c}, \nabla)\nabla u - \mathbf{c}\Delta u$.

K3-12.59

Показать, что:

1) $\operatorname{div}[\nabla u, \nabla v] = 0$; 2) векторы $\mathbf{a} = u \operatorname{grad} v$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ перпендикулярны.**K3-12.60**Найти компоненты $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ плоского поля $\mathbf{a}$ в полярных координатах.**K3-12.61**Найти компоненты $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ трехмерного поля $\mathbf{a}$: 1) в цилиндрических координатах; 2) в сферических координатах.**K3-12.62**Найти $\operatorname{rot}(u(r)\mathbf{a}(r))$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.**K3-12.63**Записать $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$: 1) в цилиндрических координатах; 2) в сферических координатах.**K3-12.64**Среда вращается как твердое тело вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω . Пусть $\mathbf{v}$ - поле линейных скоростей точек в фиксированный момент времени. Найти $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ (воспользоваться цилиндрическими координатами).**K3-12.65**

В простейшем случае система уравнений Максвелла электромагнитного поля имеет вид

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = [\nabla, \mathbf{H}], \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = [\nabla, \mathbf{E}], \quad (\nabla, \mathbf{E}) = 0, \quad (\nabla, \mathbf{H}) = 0.$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ - векторные поля электрической и магнитной напряженности, $\varepsilon, \mu, c = \text{const} > 0$. Полагая все функции достаточно гладкими, доказать, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \Delta \mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \Delta \mathbf{H}.$$

K3-12.66Пусть в области Ω введена ортогональная система криволинейных координат $(\xi; \eta; \zeta)$:

$$x = x(\xi; \eta; \zeta), \quad y = y(\xi; \eta; \zeta), \quad z = z(\xi; \eta; \zeta),$$

где правые части - непрерывно дифференцируемые функции. Пусть $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ - единичные орты этой системы (векторы, касательные к координатным линиям и направленные по возрастанию координат, $\mathbf{e}_\xi \perp \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\eta \perp \mathbf{e}_\zeta, \mathbf{e}_\zeta \perp \mathbf{e}_\xi$)*. Пусть H_ξ, H_η, H_ζ - коэффициенты Ламэ, т. е.
$$H_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$
 и т. д. Доказать, что:

- 1) $\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \mathbf{e}_\xi + \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta + \frac{1}{H_\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \mathbf{e}_\zeta$;
- 2) $\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta} \left(\frac{\partial(H_\eta H_\zeta a_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_\xi H_\zeta a_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(H_\xi H_\eta a_\zeta)}{\partial \zeta} \right)$; (40)
- 3) $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta} \begin{vmatrix} H_\xi \mathbf{e}_\xi & H_\eta \mathbf{e}_\eta & H_\zeta \mathbf{e}_\zeta \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ H_\xi a_\xi & H_\eta a_\eta & H_\zeta a_\zeta \end{vmatrix}$.

K3-12.67Пользуясь формулами (39)-(41), получить выражения для $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \mathbf{a}$, $\operatorname{rot} \mathbf{a}$: 1) в цилиндрических координатах; 2) в сферических координатах. Найти поток поля $\mathbf{a}$ через ориентированную нормалью $\mathbf{n}$ поверхность $S(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|)$ (68, 69).

K3-12.68

- 1) $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, где $a_x, a_y, a_z = \text{const}$, S - круг радиуса R , лежащий в плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = d$;
- 2) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, S - внешняя сторона конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$;
- 3) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, S - внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h$;
- 4) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$, S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
- 5) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$, S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

K3-12.69

- 1) $\mathbf{a} = (x-2z; x+3y+z; 5x+y)$; S - противоположная началу координат сторона плоского треугольника с вершинами $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$;
- 2) $\mathbf{a} = (x^2; y^2; z^2)$; S - внешняя сторона полной поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$;
- 3) $\mathbf{a} = (y^2; x^2; z^2)$; S - часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, расположенная в первом октанте между плоскостями $z=0$ и $z=a, a>0$;
- 4) $\mathbf{a} = (0; y^2; z)$; S - ограниченная часть внешней стороны параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченная плоскостью $z=2$;
- 5) $\mathbf{a} = (x; y; \sqrt{x^2 + y^2 - 1})$; S - часть внешней стороны гиперboloида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, заключенная между плоскостями $z=0$ и $z=\sqrt{3}$;
- 6) $\mathbf{a} = (y; z; x)$; S - часть внутренней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$; расположенная в области $x > |z|$;
- 7) $\mathbf{a} = (3x; -y; -z)$; S - часть внешней стороны параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$, расположенная в первом октанте;
- 8) $\mathbf{a} = (xy; yz; zx)$; S - часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенная в первом октанте;
- 9) $\mathbf{a} = (xz; yz; z^2)$; S - часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, расположенная в области $z > 2$;

10)

$\mathbf{a} = (x; y; xyz)$; S - часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, расположенная в области $x > |y|$ и отсеченная плоскостью $z=0$ и параболоидом $z = x^2 - y^2$;

11)

$\mathbf{a} = (xy - y^2; -x^2 + xy + 2x; z)$; S - часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, отсеченная конусом $z^2 = x^2/2 + y^2$.

K3-12.70

Найти поток поля $\mathbf{a}$ через поверхность S непосредственно или по теореме Гаусса-Остроградского, если:

- 1) $\mathbf{a} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$, S - внешняя поверхность куба $|x| < a, |y| < a, |z| < a$
- 2) $\mathbf{a} = (z-y)\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} + (y-x)\mathbf{k}$; S - полная внешняя поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x+y+z=1, x+y-z=1, y=0, x=0$
- 3) $\mathbf{a} = y^2 z \mathbf{i} - y z^2 \mathbf{j} + x(y^2 + z^2) \mathbf{k}$; S - полная внешняя поверхность цилиндра $y^2 + z^2 \leq a^2, 0 \leq x \leq a$;
- 4) $\mathbf{a} = 2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} - z \mathbf{k}$; S - полная внешняя поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H$;
- 5) $\mathbf{a} = (x+z)\mathbf{i} + (y+x)\mathbf{j} + (z+y)\mathbf{k}$; S - внешняя поверхность тела $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq y$;
- 6) $\mathbf{a} = x^2 y \mathbf{i} + x y^2 \mathbf{j} + x y z \mathbf{k}$; S - внешняя поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
- 7) $\mathbf{a} = x^2 y z \mathbf{i} + x y^2 z \mathbf{j} + x y z^2 \mathbf{k}$; S - часть внешней стороны эллипсоида $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, расположенная в первом октанте;
- 8) $\mathbf{a} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$; S - половина внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$;
- 9) $\mathbf{a} = (z^n - y^n) \mathbf{i} + (x^n - z^n) \mathbf{j} + (y^n - x^n) \mathbf{k}$; S - половина внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$.

K3-12.71

Пусть $A(\mathbf{r}) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ - положительно определенная квадратичная форма, $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$.

Найти поток поля $\mathbf{a} = \mathbf{r} \cdot (A(\mathbf{r}))^{-3/2}$ через единичную сферу $|\mathbf{r}| = 1$. поля $\mathbf{a}$: 1) из задачи 38,4) через внешнюю сторону сферы с центром $(3; 4; 0)$ и радиусом ε ; 2) из задачи 38,5) через внешнюю сторону поверхности куба с центром $(1; 1; 2)$ и ребром длины ε .

K3-12.73

Доказать формулу (24).

K3-12.74

Пусть поле $\mathbf{a}$ непрерывно дифференцируемо в Ω , G - произвольная область с кусочно гладкой границей, $\bar{G} \subset \Omega$. Доказать, что поток $\text{rot } \mathbf{a}$ через ∂G равен нулю.

K3-12.75

Пусть ограниченная область G имеет кусочно гладкую границу ∂G , ориентированную внешней нормалью. Доказать, что поток радиус-вектора $\mathbf{r}$ через ∂G равен $3\mu G$, где μG - объем G .

K3-12.76

Пусть кусочно гладкая граница ∂G области G , ориентирована нормалью $\mathbf{n}$, c - постоянный вектор. Доказать, что

$$\iint_{\partial G} \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{c}}) dS = 0.$$

K3-12.77

Доказать формулы: 1) (25); 2) (26); 3) (28); 4) (29); 5) (30).

K3-12.78

Пусть поле u дважды непрерывно дифференцируемо в Ω , G - область из Ω такая, что $\bar{G} \subset \Omega$ и граница ∂G является поверхностью уровня поля. Доказать, что

$$\iiint_G \Delta u dV = \pm \iint_{\partial G} |\nabla u| dS,$$

где следует выбрать один из знаков. Объяснить выбор знака.

K3-12.79

Доказать, что

$$\iiint_G (\nabla u, [\nabla, \mathbf{a}]) dV = \iint_{\partial G} (\mathbf{a}, \nabla u, \mathbf{n}) dS.$$

K3-12.80

Пусть u и $\mathbf{a}$ - непрерывно дифференцируемые поля в Ω , G - область из Ω , $\bar{G} \subset \Omega$, ∂G - кусочно гладкая поверхность, ориентированная внешней нормалью. Доказать, что

$$\iint_{\partial G} (u\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iiint_G (u(\nabla, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \nabla u)) dV.$$

K3-12.81

Пусть S - гладкая поверхность, ориентированная нормалью $\mathbf{n}$, и пусть замыкание S не содержит начала координат. Показать, что интеграл

$$\iint_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{n}})}{r^2} dS$$

есть поток некоторого поля через S .

K3-12.82

Пусть G - ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной внешней нормалью $\mathbf{n}$, $O \notin \bar{G}$, $\mathbf{r} = (x; y; z)$, $r = |\mathbf{r}|$. Доказать, что:

- 1) $\iiint_G \frac{1}{r} dV = \frac{1}{2} \iint_{\partial G} \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{n}}) dS$;
- 2) $\iiint_G \frac{1}{r^p} dV = \frac{1}{3-p} \iint_{\partial G} \frac{\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{r}})}{r^{p-1}} dS, p \neq 3$.

К3-12.94

Найти по формуле Стокса (19) циркуляцию поля $\mathbf{a}$ вдоль контура Γ , ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если:

- 1) $\mathbf{a} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$; $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$;
- 2) $\mathbf{a} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; $\Gamma = \{4(x^2 + y^2) = z^2, x + y + z = 1\}$;
- 3) $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; $\Gamma = \{z = x^2 + y^2, z + y = 2\}$;
- 4) $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$;
- 5) $\mathbf{a} = z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$; $\Gamma = \{y^2 + z^2 = 9, 3z + 4x = 5\}$;
- 6) $\mathbf{a} = zx\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$; $\Gamma = \{y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.

К3-12.95

Для поля $\mathbf{a} = -y\mathbf{i}/(x^2 + y^2) + x\mathbf{j}/(x^2 + y^2)$ найти циркуляцию: 1) по окружности $x^2 + y^2 = R^2, z = z_0$, ориентированной против часовой стрелки при взгляде из точек оси Oz , где $z > z_0$; 2) по окружности $(x - R)^2 + (y - 2R)^2 = R^2, z = z_0$, ориентация произвольна.

К3-12.96

Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2) + z\mathbf{k}$ по окружности $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$, ориентированной против часовой стрелки при взгляде из точек оси Oz , где $z > 1$.

К3-12.97

В условиях задачи 64 найти циркуляцию поля $\mathbf{v}$: 1) по окружности радиуса R , которая лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и ориентирована по направлению вращения; 2) по окружности радиуса R , которая ориентирована так же, как и в 1), но плоскость которой составляет угол α с осью вращения.

К3-12.98

В условиях задачи 64 примем ось вращения за ось Oz , направив ее по вектору угловой скорости. Пусть G - ограниченная односвязная область в плоскости Oxy с границей γ - кусочно гладким простым замкнутым контуром, Π - цилиндр с основанием $\bar{G}$ и образующими, параллельными оси вращения. Пусть Γ - замкнутая кусочно гладкая кривая на поверхности цилиндра Π , которая взаимно однозначно проектируется на γ . Доказать, что циркуляция поля $\mathbf{v}$ по Γ равна $2\omega \cdot \mu G$, где μG - площадь G .

10

К3-12.8

Доказать, что потенциал u непрерывно дифференцируемого поля $\mathbf{a}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{a}$. 10

К3-12.9

Доказать, что если поле $\mathbf{a}$ потенциально в звездной (см. задачу 30) относительно точки $M_0(r_0)$ области Ω , то его потенциал в точке $M(\mathbf{r})$ определяется формулой

$$u(\mathbf{r}) = \int_0^1 (\mathbf{a}(\mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)), \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dt + \text{const}.$$

К3-12.110

Доказать, что положения устойчивого равновесия частицы в потенциальном силовом поле $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} u$ находятся в точках минимума потенциала u .

К3-12.111

Доказать, что потенциальное поле не имеет замкнутых векторных линий.

K3-12.112

Является ли поле $\mathbf{a}$ потенциальным, соленоидальным, если $(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|)$:

1) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r$?

K3-12.113

Является ли поле $\mathbf{a}$ соленоидальным, если:

1) $\mathbf{a} = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 + x^2)\mathbf{k}$

2) $\mathbf{a} = (1 + 2xy)\mathbf{i} - y^2z\mathbf{j} + (z^2y - 2yz + 1)\mathbf{k}$

3) $\mathbf{a} = x^2yz\mathbf{i} + zy^2z\mathbf{j} - xyz^2\mathbf{k}$; 4) $\mathbf{a} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2) + xy\mathbf{k}$.

K3-12.114

Доказать, что условие (34) необходимо и достаточно для соленоидальности поля.

K3-12.115

Найти такую дифференцируемую функцию Φ , чтобы поле $\mathbf{a} = \Phi(r)\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, было соленоидальным.

K3-12.116

Поток поля $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$, $r = |\mathbf{r}|$, определенного в области $r > 0$, через сферу $r = 1$ равен 4π . Означает ли это, что данное поле несоленоидально при том определении соленоидальности, которое принято в этом параграфе?

K3-12.117

1) Пусть $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ - векторные потенциалы поля $\mathbf{a}$; доказать, что поле $\mathbf{b} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ безвихревое; 2) пусть $\mathbf{A}$ - векторный потенциал поля $\mathbf{a}$, поле $\mathbf{b}$ безвихревое; доказать, что $\mathbf{A} + \mathbf{b}$ - также векторный потенциал поля $\mathbf{a}$.

K3-12.129

В условиях задачи 128 пусть $x \in G$, $\Omega_\varepsilon(x)$ - шар с центром x и радиусом ε , лежащий в G . Взяв

$$v = \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad y \in \bar{G}, \quad y \neq x,$$

и применив формулу Грина (28) к области $G \setminus \Omega_\varepsilon(x)$, доказать, что

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \left(u(y) \nabla_y \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \nabla u(y), \mathbf{n}(y) \right) dS_y,$$

где нижний символ y указывает переменную точку, $\mathbf{n}(y)$ - единичная внешняя нормаль к границе в точке y .

K3-12.130

Пусть функция u гармонична в окрестности точки $x \in R^3$, $S_R(x)$ и $\Omega_R(x)$ - сфера и шар радиуса R с центром x , лежащие в этой окрестности. Доказать теоремы о среднем для гармонических функций:

1) $u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R(x)} u(y) dS$; 2) $u(x) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{\Omega_R(x)} u(y) dV$.

K3-12.131

Из уравнений электростатики

$$(\nabla, \mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0, \quad [\nabla, \mathbf{E}] = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{E}$ - поле электрической напряженности, ρ - плотность распределения зарядов, $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$, вывести закон Гаусса

$$\iint_{\partial G} (\mathbf{n}, \mathbf{E}) dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

о пропорциональности потока напряженности через границу области G (с внешней нормалью $\mathbf{n}$) и полного заряда Q , находящегося в этой области.

K3-12.132

Пусть поле скоростей $\mathbf{v}$ движущейся сплошной среды потенциально. Доказать, что если среда несжимаема, то потенциал и поля $\mathbf{v}$ гармоничен (можно воспользоваться тем, что объемный расход среды через любую замкнутую поверхность равен нулю).

21.1.2 Problems about integrals from vector and tensor fields (!!?)**МУ**

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I_1(\mathbf{k}) = \int \frac{d\Omega}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \frac{1}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}},$$

рические угловые координаты: $\hat{\mathbf{r}}_x = \sin\theta \cos\varphi$, $\hat{\mathbf{r}}_y = \sin\theta \sin\varphi$, $\hat{\mathbf{r}}_z = \cos\theta$. Так как ориентация системы 55 координат произвольна, то можно выбрать ось z вдоль $\mathbf{k}$ и получить (предполагая $k < 1$)

$$I_1(\mathbf{k}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos\theta)}{1 + k \cos\theta} = \frac{2\pi}{k} \ln \frac{1+k}{1-k}.$$

Интегралы

$$I_m(\mathbf{k}) = \int d\Omega / (1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^m$$

можно вычислить посредством дифференцирования I_1 (для этого следует заменить в знаменателе 1 на α , продифференцировать по α и положить α равным снова 1). Например,

$$I_2(\mathbf{k}) = \int d\Omega / (1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2 = 4\pi / (1 - k^2)$$

МУ

Другой пример:

$$I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \int \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{r}} d\Omega / (1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}).$$

Этот интеграл сложнее по той причине, что два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{k}$ задают два направления, и поэтому нельзя выбрать полярную ось вдоль обоих направлений. Однако направление $\mathbf{a}$ тривиально в том смысле, что его можно «выделить». Рассмотрим интеграл

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \int \tilde{\mathbf{r}} d\Omega / (1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})$$

Ясно, что $I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}\mathbf{J}$. Вектор $\mathbf{J}(\mathbf{k})$ должен быть направлен вдоль $\mathbf{k}$, так как нет другого выделенного направления. Следовательно,

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = A\mathbf{k}.$$

Чтобы вычислить скаляр A , умножим на $\mathbf{k}$ обе части (3.22). Получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k^2} \mathbf{k}\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}} d\Omega = \\ &= \frac{1}{k^2} \int d\Omega \left(1 - \frac{1}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}} \right) = \frac{4\pi}{k^2} \left(1 - \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = A\mathbf{a}k = \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{a}\mathbf{k} \left[1 - \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right].$$

МУ

Пример. Чтобы вычислить интеграл

$$I_2(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = \int \hat{\mathbf{r}} d\Omega / (1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2,$$

заменим в интеграле $I_1(\mathbf{k}, \mathbf{a})$ 1 на α и продифференцируем, как это делалось выше. Более простой метод состоит в дифференцировании $I_1(\mathbf{k})$ по k . С одной стороны,

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \int \frac{d\Omega}{1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}} = - \int \frac{d\Omega \hat{\mathbf{r}}}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2}.$$

С другой стороны, используя (3.17), имеем

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial I_1(\mathbf{k})}{\partial k} = \frac{2\pi \mathbf{k}}{k^2} \left(\frac{2}{1 - k^2} - \frac{1}{k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right).$$

Сравнивая (3.24) и (3.25), находим

$$\int \frac{d\Omega \hat{\mathbf{r}}}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2} = \frac{2\pi \mathbf{k}}{k^2} \left(-\frac{2}{1 - k^2} + \frac{1}{k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right)$$

и, следовательно,

$$\int \frac{\mathbf{a}\hat{\mathbf{r}} d\Omega}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2} = \mathbf{a} \int \frac{\hat{\mathbf{r}} d\Omega}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})^2} = \frac{2\pi \mathbf{k}\mathbf{a}}{k^2} \left(-\frac{2}{1 - k^2} + \frac{1}{k} \ln \frac{1+k}{1-k} \right).$$

Теория (?)

Другие примеры использования соображений симметрии-вычисление таких интегралов, как $\Phi_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{a})(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{b})$, $\Phi_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{a})(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{b})(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{c})(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{d})$ } Чтобы вычислить Φ_1 , заметим, что эта величина есть скаляр, линейный по $\mathbf{a}$ и по $\mathbf{b}$. Единственная возможность такова, что $\Phi_1 = A(\mathbf{a}\mathbf{b})$, где A - число. Чтобы найти A , положим $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равными $\hat{\mathbf{z}}$. Тогда

$$\Phi_1(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) = A = \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{z}})^2 = \int d\Omega \cos^2 \theta = 4\pi/3.$$

Следовательно, $\Phi_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (4\pi/3)(\mathbf{a}\mathbf{b})$. Расчет Φ_2 выполняется аналогично. Так как Φ_2 - скаляр, линейный по четырем векторам $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ и инвариантный к любой перестановке этих векторов, то он должен иметь вид

$$\Phi_2 = B[(\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{c}\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\mathbf{c})(\mathbf{b}\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{c})],$$

где B - число; B находится, если доложить $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d} = \hat{\mathbf{z}}$, так что

$$\Phi_2(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}) = 3B = \int d\Omega (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^4 = \int d\Omega \cos^4 \theta = 4\pi/5$$

Следовательно, $B = 4\pi/15$ и

$$\Phi_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{4\pi}{15} [(\mathbf{a}\mathbf{b})(\mathbf{c}\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\mathbf{c})(\mathbf{b}\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\mathbf{d})(\mathbf{b}\mathbf{c})].$$

В заключение упомянем еще тождество

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{du}{[au + b(1-u)]^2},$$

которое было использовано Фейнманом для упрощения вычисления интегралов, возникающих в квантовой теории поля. В качестве примера применения (3.28) вычислим интеграл

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \int \frac{d\Omega}{(1 + \mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})(1 + \mathbf{l}\hat{\mathbf{r}})}.$$

Используя (3.28), преобразуем (3.29) к следующему виду:

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \int_0^1 du \int \frac{d\Omega}{\{1 + \mathbf{r}[\mathbf{k}u + \mathbf{l}(1-u)]\}^2}.$$

В (3.30) интеграл по телесному углу в точности равен $I_2[\mathbf{k}u + \mathbf{l}(1-u)]$, причем I_2 находится из (3 : 19). Таким образом,

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = 4\pi \int_0^1 \frac{du}{1 - [\mathbf{k}u + \mathbf{l}(1-u)]^2}$$

Это элементарный интеграл, хотя и весьма громоздкий. Ответ имеет интересную форму

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \frac{4\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} \operatorname{arch} \frac{A}{B},$$

где $A = 1 - \mathbf{k}\mathbf{l}$, $B = \sqrt{(1 - k^2)(1 - l^2)}$.

МУ

(далее имеется в виду, что по единичной сфере мы интегрируем!)

БЛУ-1.1.28 Выражение $\oint_s (\mathbf{r} d\mathbf{S})$. (????)

(???? тут слабый матан, отдельно переучить нужно!!! самая типичнейшая задача, однако это не сделано ещё. не знаю, как решать пока что.)

БЛУ-1.1.29 Выражение $\oint_s z dx dy$.

$$\oint_s z dx dy = \oint_V dz dx dy = V.$$

БЛУ-1.1.30 Выражение

Считая вектор $\mathbf{c}$ постоянным, вычислить $\oint_s \mathbf{r}(\mathbf{c} d\mathbf{S})$.

БЛУ-1.1.31 Выражение

Считая вектор $\mathbf{c}$ постоянным, вычислить $\oint_s (\mathbf{c} \mathbf{r}) d\mathbf{S}$.

БЛУ-1.1.32 Выражение $\oint_s [d\mathbf{S} \times \mathbf{A}]$.

БЛУ-1.1.33 Выражение

Считая вектор $\mathbf{c}$ постоянным, вычислить $\oint_s (\mathbf{c} d\mathbf{S}) \mathbf{A}$.

БЛУ-1.1.34 Выражение

Преобразовать интеграл по контуру от скалярной функции к поверхностному:

$$\oint_l f d\mathbf{l}.$$

БЛУ-1.1.35 Выражение

Доказать формулу:

$$\frac{1}{2} \oint_l [d\mathbf{r} \times \mathbf{r}] = \int_s d\mathbf{S}$$

21.2 Problems about curves and vector functions

(тут и достаточно замысловатые задачи, к которым я пока не готов. много введений в другие разделы, мб потом буду думать про это.)

При мер

K1-24.6

Представить пересечение шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ в виде параметрически заданной кривой (точнее, носителя кривой).

А Из уравнения $x^2 + y^2 = Rx$ следует, что $0 \leq x \leq R$. Поэтому можно положить $x = R \sin^2 t$. Тогда

$$\begin{aligned} y^2 &= Rx - x^2 = R^2 \sin^2 t \cos^2 t \\ z^2 &= R^2 - (x^2 + y^2) = R^2 - Rx = R^2 \cos^2 t \end{aligned}$$

и легко проверить, что кривая

$$x = R \sin^2 t, \quad y = R \sin t \cos t, \quad z = R \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

совпадает с пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, причем точка $(R; 0; 0)$ получается при значениях параметров $t = \pi/2$ и $t = 3\pi/2$, т.е. является точкой самопересечения. Кривая (48) называется кривой Вивиани (рис. 24.7).

K1-24.пр.7

Найти касательные прямые и нормальные плоскости кривой $z = x^2 + y^2, y = x$.

Примем переменную x за параметр на данной кривой. Тогда представление кривой будет иметь вид $\mathbf{r}(x) = (x; x; 2x^2)$. Рис. 24.7

Найдя отсюда касательный вектор $\mathbf{r}'(x) = (1; 1; 4x)$, получим, в силу формулы (4), уравнение касательной в точке $(x_0; x_0; 2x_0^2)$ в виде

$$x - x_0 = y - x_0 = (z - 2x_0^2) / (4x_0).$$

Поскольку вектор $\mathbf{r}'(x_0) = (1; 1; 4x_0)$ перпендикулярен нормальной плоскости кривой в рассматриваемой точке, то уравнение этой плоскости имеет вид

$$(x - x_0) + (y - x_0) + 4x_0(z - 2x_0^2) = 0,$$

т.е.

$$x + y + 4x_0z = 2x_0 + 8x_0^3.$$

K1-24.пр.8

При каких значениях кривая

$$x = e^{at} \cos t, \quad y = e^{at} \sin t, \quad z = e^{at}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под углом $\pi/4$? Δ Простой подстановкой в уравнение конуса легко проверить, что кривая (49) действительно лежит на нем. Если $\mathbf{r}(t)$ - вектор с координатами (49), то касательный вектор $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)$ к кривой (49) имеет вид

$$\mathbf{r}'(t) = (e^{at}(a \cos t - \sin t); e^{at}(a \sin t + \cos t); ae^{at}),$$

а вектор $\mathbf{l} = \mathbf{l}(t)$, направленный по образующей конуса $x^2 + y^2 = z^2$ в той же точке кривой (49), - вид

$$\mathbf{l}(t) = (x; y; \sqrt{x^2 + y^2}) = (e^{at} \cos t; e^{at} \sin t; e^{at}).$$

Поскольку

$$|\mathbf{r}'(t)| = e^{at} \sqrt{2a^2 + 1}, \quad |\mathbf{l}(t)| = e^{at} \sqrt{2},$$

то

$$\cos(\widehat{\mathbf{r}'\mathbf{l}}) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{l})}{|\mathbf{r}'| |\mathbf{l}|} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 1}}$$

Поэтому, если угол между векторами $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{l}$ равен $\pi/4$ или $3\pi/4$, то из (50) получается уравнение

$$\frac{|a|\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $a = \pm 1/\sqrt{2}$.

K1-24.пр.9

Найти длину дуги $s(t)$ винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

и получить параметризацию винтовой линии, когда за параметр на ней принята переменная длина дуги.

А Поскольку для касательного вектора $\mathbf{r}'(t)$ винтовой линии имеет место формула $\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t; a \cos t; b)$, то, в силу формулы (14), для производной по параметру t длины дуги, отсчитываемой в сторону возрастания параметра, будем иметь

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Если производная некоторой функции постоянна, то сама функция линейна, и так как в данном случае $s(0) = 0$, то

$$s(t) = t\sqrt{a^2 + b^2}, \quad t \geq 0.$$

Подставляя $t = s / (\sqrt{a^2 + b^2})$ в формулы (51), получим

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tau &= \left(\frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; \frac{dz}{ds} \right) = \\ &= \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \text{Отсюда } \frac{d\tau}{ds} &= \left(-\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}; -\frac{a}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}; 0 \right). \\ k &= \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу первой формулы Френе (см. (21)) имеем

$$\nu = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}; -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}; 0 \right)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \beta &= [\tau, \nu] = \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{b}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{i} + \frac{b}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{j} = -\frac{b}{a^2 + b^2} \nu.$$

Отсюда, согласно третьей формуле Френе, $\kappa = b / (a^2 + b^2)$.

K1-24.11

Найти радиус кривизны и эволюту эллипса

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad a \geq b > 0.$$

Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Заметив, что $x' = -a \sin t, y' = b \cos t, x'' = -a \cos t, y'' = -b \sin t$, получим (см. (20), (33))

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$

Отсюда, воспользовавшись формулами (34), получим уравнения эволюты

$$\begin{aligned}\xi &= a \cos t - b \cos t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t \\ \eta &= b \sin t - a \sin t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t\end{aligned}$$

Таким образом, эволютой эллипса является астроида. П р и м е р

K1-24.12

Доказать, что при монотонном изменении радиуса кривизны на некоторой части плоской кривой его приращение равно соответствующему приращению длины дуги эволюты (т. е. длине пути, пройденного центром кривизны по эволюте).

А Уравнение эволюты кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); 0 \leq s \leq S\}$, где s переменная длина дуги кривой Γ , имеет вид

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(s) + R(s)\boldsymbol{\nu}(s).$$

Поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{dR}{ds}\boldsymbol{\nu} + R\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds},$$

где

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \quad R\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -Rk\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\tau}$$

(так как $Rk = 1$). Таким образом, $\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \frac{dR}{ds}\boldsymbol{\nu}$, откуда

$$\left| \frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} \right| = \left| \frac{dR}{ds} \right|.$$

Обозначим через σ переменную длину дуги эволюты кривой Γ , отсчитываемой в направлении возрастания длины дуги s самой кривой Γ . Тогда

$$\left| \frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} \right| = \frac{d\sigma}{ds}$$

(см. (14)). Если, для определенности, на рассматриваемом участке кривой Γ ее радиус кривизны возрастает, т. е. $dR/ds \geq 0$, то из (52) следует, что

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dR}{ds},$$

т. е. $\sigma(s) = R(s) + c$, где c - некоторая постоянная. Отсюда сразу и получается, что для указанных значений параметра s приращение длины дуги эволюты $\Delta\sigma = \sigma(s + \Delta s) - \sigma(s)$ совпадает с соответствующим приращением радиуса кривизны $\Delta R = R(s + \Delta s) - R(s)$, т. е. $\Delta\sigma = \Delta R$.

П р и м е р

K1-24.13

Если кручение кривой тождественно равно нулю, то кривая плоская. Δ Если у кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); 0 \leq s \leq S\}$, s - переменная длина дуги, ее кручение во всех точках равно нулю: $\varkappa = 0$, то в силу третьей формулы Френе (см. (23)) имеем $d\boldsymbol{\beta}/ds = 0$, т. е. бинормаль $\boldsymbol{\beta}$ кривой Γ является постоянным вектором. Обозначим его через $\boldsymbol{\beta}_0$. Тогда для любой точки кривой Γ будем иметь $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\beta}_0) = 0$, или

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s), \boldsymbol{\beta}_0 \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\beta}_0) = 0.$$

Следовательно, $(\mathbf{r}(s), \boldsymbol{\beta}_0) = c$, где c - некоторая постоянная. Это означает, что концы всех радиус-векторов $\mathbf{r}(s)$ лежат на плоскости $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}_0) = c$ (здесь $\mathbf{r} = (x; y; z)$ - текущий радиус-вектор точек плоскости, на которой лежит кривая Γ).

K1-24.1

Построить годограф вектор-функции $(-\infty < t < +\infty)$:

- 1) $x = \cos t, y = \sin t, z = 1$;
- 2) $x = \sin t, y = \cos t, z = t^2$;
- 3) $x = 1, y = t, z = t^2$;
- 4) $x = t, y = t^2, z = t^3$;
- 5) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 0, a > 0$;
- 6) $x = t^2 - 2t + 3, y = t^2 - 2t + 1, z = 0$; 7) $x = a \sin^2 t, y = b \cos^2 t, z = t$.

K1-24.2

Доказать, что годограф вектор-функции

$$\mathbf{r} = \sin 2\varphi \mathbf{i} + (1 - \cos 2\varphi) \mathbf{j} + 2 \cos \varphi \mathbf{k}$$

лежит на сфере.

K1-24.3

Доказать, что годограф вектор-функции

$$\mathbf{r} = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1) \mathbf{i} + (a_2 t^2 + b_2 t + c_2) \mathbf{j} + (a_3 t^2 + b_3 t + c_3) \mathbf{k}$$

лежит в некоторой плоскости, и найти уравнение этой плоскости.

K1-24.4

Доказать, что если $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$, то $\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{a}|$. Верно ли обратное утверждение?

K1-24.5

Доказать, что вектор-функция $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ является бесконечно малой при $t \rightarrow 0$.

K1-24.6

Найти предел вектор-функции:

- 1) $\mathbf{r}(t) = \frac{1-t}{1+t} \mathbf{i} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{j} - \frac{\ln(1-t)}{t} \mathbf{k}$ при $t \rightarrow 0$;
- 2) $\mathbf{r}(t) = \frac{\sin t}{t-\pi} \mathbf{i} + \frac{\ln(t/\pi)}{\pi-t} \mathbf{j} + \mathbf{k}$ при $t \rightarrow \pi$.

K1-24.7

Доказать, что для того, чтобы вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имела при $t \rightarrow t_0$ предел, равный $\mathbf{a}$, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\alpha}(t),$$

где $\boldsymbol{\alpha}(t)$ - бесконечно малая при $t \rightarrow t_0$ вектор-функция.

K1-24.8

Доказать, что если $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lambda$, то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \mathbf{r}(t) = \lambda \mathbf{a}.$$

K1-24.9

Доказать, что если $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{a}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{b}$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{c}$, То:

- 1) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$
- 4) $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

K1-24.10

Доказать, что если скалярные функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и векторфункции $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)$ непрерывны в точке t_0 , то в этой точке непрерывны и функции:

- 1) $\lambda_1(t)\mathbf{r}_1(t) + \lambda_2(t)\mathbf{r}_2(t)$;
- 2) $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))$
- 3) $[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)]$
- 4) $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t))$
- 5) $|\mathbf{r}_1(t)|$.

K1-24.11

Найти производную вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ и написать уравнение касательной в произвольной точке ее годографа, если:

- 1) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$;
- 2) $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \mathbf{k}$
- 3) $\mathbf{r}(t) = a \sin^2 \omega t\mathbf{i} + b \cos^2 \omega t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

K1-24.12

Найти производную функций:

- 1) $\mathbf{r}^2(t)$
- 2) $\sqrt{\mathbf{r}^2(t)}$
- 3) $[(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)), \mathbf{r}''(t)]$;
- 4) $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t))$

K1-24.13

Доказать, что если длина векторов $\mathbf{r}(t)$ постоянна в окрестности точки t_0 и существует производная $\mathbf{r}'(t_0)$, то векторы $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}'(t_0)$ ортогональны. Каков механический смысл этого факта?

K1-24.14

Доказать, что для того, чтобы во всех точках некоторого интервала векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы скалярная функция $|\mathbf{r}(t)|$ была постоянной на этом интервале.

K1-24.15

Доказать, что для того, чтобы дифференцируемая и не обращающаяся в нуль на интервале $(a; b)$ вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имела постоянное направление (т. е. чтобы при любом $t \in (a; b)$ вектор $\mathbf{r}(t)$ был коллинеарен, например, с вектором $\mathbf{r}((a+b)/2)$), необходимо и достаточно, чтобы векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ были коллинеарны.

K1-24.16

Пусть вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ имеет в точке t_0 производную. Будет ли дифференцируема в этой точке функция $|\mathbf{r}(t)|$? Верны ли в этой точке равенства $|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}'|$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r}||\mathbf{r}'|$?

K1-24.17

Доказать, что если

$$\mathbf{r} = x_1(x, y, z, t)\mathbf{i} + x_2(x, y, z, t)\mathbf{j} + x_3(x, y, z, t)\mathbf{k},$$

где x_1, x_2, x_3 - непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, а x, y, z - непрерывно дифференцируемые функции от t , То

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

K1-24.18

Построить годографы вектор-функции

$$\mathbf{r}(t) = (a \sin t, -a \cos t, bt^2)$$

и ее производной.

K1-24.19

Пользуясь определением производной вектор-функции, доказать формулы:

- 1) $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2'$;
- 2) $(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}'$, f - скалярная функция;
- 3) $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2')$;
- 4) $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]' = [\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2']$;
- 5) $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3')$.

K1-24.20

Доказать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t$, где ω , $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ постоянные, то:

- 1) $[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}] = [\omega\mathbf{a}, \mathbf{b}]$
- 2) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{0}$

K1-24.24

Пусть для дважды дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ во всех точках этого отрезка выполняются условия $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)) = 0$, $[\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)] \neq 0$

Доказать, что тогда годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ лежит на некоторой плоскости.

K1-24.25

Доказать, что если у дважды дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ во всех точках этого отрезка векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ отличны от нуля и коллинеарны, то годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является отрезком прямой.

K1-24.26

Доказать, что годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$, $t \in R$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ - постоянные векторы, причем векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не коллинеарны, является парабола. Что будет представлять собой годограф, если векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны?

K1-24.27

Доказать, что годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \cos t\mathbf{b} + \sin t\mathbf{c}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ - постоянные векторы, причем векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не коллинеарны, является эллипсом.

K1-24.28

Доказать, что траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской.

K1-24.29

Траектория движения точки задана в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{r}(t) = (\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi; z),$$

где t - время, $\rho(t), \varphi(t), z(t)$ - известные функции. Найти: 1) косинус угла α между радиус-вектором движущейся точки и вектором ее мгновенной скорости; 2) величину ускорения в случае движения по цилиндру $\rho = \rho_0$.

K1-24.30

Траектория движущейся точки задана в сферических координатах:

$$\mathbf{r}(t) = (\rho \cos \varphi \cos \theta; \rho \sin \varphi \cos \theta; \rho \sin \theta),$$

где t - время, $\rho(t), \varphi(t), \theta(t)$ - известные функции. Найти величину мгновенной скорости.

K1-24.36

Прямая OL , не перпендикулярная оси Oz , равномерно вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω . Точка M движется по прямой OL : 1) со скоростью, пропорциональной расстоянию OM подвижной точки M до точки O ; 2) с постоянной скоростью. В первом случае точка M описывает коническую спираль, а во втором - коническую винтовую линию. Написать параметрические уравнения этих кривых.

K1-24.37

Доказать, что уравнения

$$\begin{aligned}x &= \cos t, \quad y = \sin t, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2, \\x &= \sqrt{t(2-t)}, \quad y = t-1, \quad 0 \leq t \leq 2,\end{aligned}$$

являются параметризациями одной и той же кривой.

K1-24.38

Доказать, что уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad -\pi < t < \pi,$$

и $x = a(1-t^2)/(1+t^2)$, $y = b(2t)/(1+t^2)$, $-\infty < t < +\infty$, являются параметризациями одной и той же кривой. Как точка движется по этой кривой, когда параметр t растет от $-\infty$ до $+\infty$?

K1-24.39

Показать, что кривая $x = e^{at} \cos t$, $y = e^{at} \sin t$, $z = e^{at}$ лежит на конусе $z^2 = x^2 + y^2$.

K1-24.40

Показать, что кривая

$$x = t/(1+t^2+t^4), \quad y = t^2/(1+t^2+t^4), \quad z = t^3/(1+t^2+t^4)$$

является сферической кривой.

K1-24.41

При каком условии на матрицу (a_{ij}) ($i, j = 1, 2, 3$) кривая

$$\begin{aligned}x &= a_{11}\varphi(t) + a_{12}\psi(t) + a_{13}\xi(t) + b_1, \\y &= a_{21}\varphi(t) + a_{22}\psi(t) + a_{23}\xi(t) + b_2, \\z &= a_{31}\varphi(t) + a_{32}\psi(t) + a_{33}\xi(t) + b_3\end{aligned}$$

является плоской кривой?

K1-24.42

Доказать, что проекция кривой Вивиани

$$x = R \sin^2 t, \quad y = R \sin t \cos t, \quad z = R \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

на плоскость переменных x и z является дугой параболы.

K1-24.43

Найти проекцию кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = t$, $-\infty < t < +\infty$, на плоскость переменных x и y .

K1-24.44

Доказать, что проекция винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad -\infty < t < +\infty,$$

на плоскость переменных y и z является синусоидой.

K1-24.45

Доказать, что при переносе начала координат в точку $O_1 = (0; 0; \beta b)$ и повороте осей абсцисс и ординат вокруг новой оси аппликат на угол β представлению винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ можно придать вид $x_1 = a \cos t_1, y_1 = a \sin t_1, z_1 = bt_1$. Это показывает, что винтовая линия способна скользить сама по себе.

K1-24.46

Найти уравнение касательной к кривой:

- 1) $x = e^t, y = e^{-t}, z = t^2$ при $t = 1$;
- 2) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ при $t = 0$.

K1-24.47

Составить уравнение касательной к кривой

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \sin(t/2)$$

при $t = \pi/2$. Какой угол образует эта касательная с осью Oz ?

K1-24.48

Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости кривой $x = t^4, y = t^3, z = t^2$ в произвольной ее точке.

K1-24.49

Найти касательную к кривой Вивиани (см. задачу 42), параллельную плоскости $y = 0$.

K1-24.50

В каких точках касательная к кривой $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3$ параллельна плоскости $3x + y + z + 2 = 0$?

K1-24.51

Найти нормальную плоскость кривой $z = x^2 + y^2, y = x$, перпендикулярную прямой $x = y = z$.

K1-24.52

Найти касательную к кривой $x^2 + y^2 = 10, y^2 + z^2 = 25$ в точке $(1; 3; 4)$.

K1-24.67

Доказать, что стереографическая проекция дает конформное отображение, т. е. что кривые на плоскости пересекаются под тем же углом, что и их образы на сфере.

K1-24.68

Доказать, что кривая $\rho = e^{\lambda\varphi}$, расположенная на плоскости переменных x и y так, что полярная ось совпадает с положительной частью оси x , при стереографической проекции (54) отображается на локсодромиию.

K1-24.69

Доказать, что окружности на шаре при стереографической проекции переходят в окружности или прямые на плоскости.

K1-24.70

Центральная проекция координатной плоскости переменных x, y на полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, 0 \leq z < a$, состоит в следующем. Произвольно фиксированная точка $M = (x; y; 0)$ плоскости переменных x и y соединяется прямой с центром указанной полусферы, т. е. с точкой $A = (0; 0; a)$. Точка M_1 , в которой эта прямая пересекает полусферу, принимается за изображение точки M на полусфере. Доказать, что эта проекция не является конформным отображением, т. е. она не сохраняет, вообще говоря, углы между кривыми.

K1-24.71

Найти производную длины дуги по параметру для: 1) цепной линии $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, $-a \leq x \leq a$; 2) эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$; 3) гиперболы $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $-\infty < t < +\infty$; 4) астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$; 5) циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $-\infty < t < +\infty$; 6) винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $-\infty < t < +\infty$; 7) кривой Вивиани $x = R \sin^2 t$, $y = R \sin t \cos t$, $z = R \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

K1-24.72

Пусть плоская кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на некотором отрезке $[a; b]$. Доказать, что если $s = s(\varphi)$ есть длина дуги

K1-24.76

Найти кривизну и радиус кривизны в произвольной точке: 1) параболы $y = ax^2$; 2) кубической параболы $y = x^3$; 3) синусоиды $y = \sin x$; 4) цепной линии $y = a \operatorname{ch}(x/a)$; 5) кривой $y = a \ln \cos(x/a)$.

K1-24.77

Найти кривизну и центр кривизны в произвольной точке: 1) гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$; 2) полукубической параболы $3ay^2 = 2x^3$; 3) астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

K1-24.78

Найти кривизну кривой в произвольной точке: 1) эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $|t| \leq \pi$; 2) гиперболы $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$; 3) циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.

K1-24.79

Найти эволюту кривой:

1) $x = t^2$, $y = t^3$; 2) Гиперболы $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$; 3) циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; 4) эвольвенты круга $x = a(t - \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.

K1-24.80

Найти кривизну в точке M_0 графика функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$:

- 1) $F(x, y) = y^5 + y - x^2$, $M_0(\sqrt{2}; 1)$;
- 2) $F(x, y) = y^3 + y - 2x^3$, $M_0(1; 1)$;
- 3) $F(x, y) = y^5 + y - 2x^3$, $M_0(1; 1)$;
- 4) $F(x, y) = x^2 - y - y^3$, $M_0(\sqrt{2}; 1)$.

K1-24.81

Найти наибольшую кривизну кривой:

- 1) $y = \ln x$;
- 2) $y = a \ln(1 - x^2/a^2)$;
- 3) $y = a \operatorname{ch}(x/a)$;
- 4) $y = \ln(1 + e^2)$, $x \in \mathbb{R}$;
- 5) $y = \sqrt{1 + x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
- 6) $y = \ln \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$; 7) $y = (2 \ln x - x^2)/4$; 8) $y = x^3/6 + 1/(2x)$.

K1-24.82

Доказать, что радиус кривизны параболы $x^2 = 2py$ равен $R =$

K1-24.94

Доказать, что для точек спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ при $\varphi \rightarrow +\infty$ величина разности между длиной радиус-вектора и радиусом кривизны стремится к нулю.

K1-24.95

Доказать, что в условиях задачи 94 центр кривизны перемещается по кривой, стремящейся к совпадению с окружностью $\rho = 1$.

K1-24.96

Пусть $\rho = \rho(\varphi)$, $a \leq \varphi \leq \beta$, - представление дважды непрерывно дифференцируемой кривой в полярных координатах, $\alpha = \alpha(\varphi)$ - угол наклона ее касательной в некоторой точке M к полярной оси, а ψ - угол, образованный этой касательной с продолжением радиус-вектора $\overline{OM}$ точки касания M . Пусть прямая ON перпендикулярна прямой OM , прямая MN - нормаль к заданной кривой в точке M , а C - центр кривизны кривой в той же точке. Доказать, что

$$\frac{NC}{CM} = \frac{d\psi}{d\varphi}.$$

K1-24.97

Доказать, что у кривых $\rho^n = a^n \cos n\varphi$, $a > 0$, полярная нормаль (т. е. отрезок нормали от точки кривой до точки ее пересечения с полярной осью) в $n + 1$ раз больше радиуса кривизны.

K1-24.98

Доказать, что у кривых $\rho^n = a^n \sin n\varphi$, $a > 0$, длина части радиус-вектора, заключенной внутри круга кривизны, равна $2\rho/(n + 1)$

K1-24.99

Пусть r - длина радиус-вектора точки данной дважды непрерывно дифференцируемой кривой, p - длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную в указанной точке прямой, и R - радиус кривизны. Доказать, что $dr/dp = R/r$.

K1-24.100

Доказать, что на эллипсе существуют, вообще говоря, три таких точки, что круги кривизны к эллипсу в этих точках проходят через данную точку эллипса.

K1-24.101

Доказать, что центры кривизны в точках спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, лежащих на одном луче, расположены на эллипсе, полуоси которого не зависят от выбора луча.

K1-24.106

Найти параболу с осью симметрии, параллельной оси y , имеющую с синусоидой $y = \sin x$ в точке $(\pi/2; 1)$ общие касательную и кривизну.

K1-24.107

Доказать: если $(\xi; \eta)$ - координаты центра кривизны дважды непрерывно дифференцируемой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, То

$$\frac{x^{t^2} + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}$$

K1-24.108

Пользуясь свойствами эволюты, найти длины следующих кривых: 1) одной дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; 2) астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ между точками $(a; 0)$ и $(0; a)$; 3) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

K1-24.109

Написать уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей для произвольной точки кривой: 1) винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$;

- 2) $x = t, y = t^2, z = t^3$;
- 3) $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}$
- 4) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$;
- 6) $y = \varphi(x), z = a\varphi(x) + b$.
- 5) $y^2 = x, x^2 = z$ 1

K1-24.110

Найти уравнение главной нормали и бинормали кривой:

- 1) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$;
- 2) $x = y^2, z = x^2$
- 3) $x = t^4/4, y = t^3/3, z = t^2/2$. 1

K1-24.111

Доказать, что главная нормаль винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ перпендикулярна оси z , а ее бинормаль образует с этой осью постоянный угол, косинус которого равен $a/\sqrt{a^2 + b^2}$. 1

K1-24.119

Найти вектор τ, ν и β в произвольной точке кривой;

- 1) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t$;
- 2) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a \cos(t/2)$. 1

K1-24.120

Доказать, что кривизна кривой тождественно равна нулю в том и только том случае, когда кривая является промежутком прямой. 1

K1-24.121

Найти кривизну конической винтовой линии $x = t \cos t, y = t \sin t, z = at$ в начале координат. 1

K1-24.122

Найти кривизну следующей кривой:

- 1) $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, z = bt$;
- 2) $x = \ln \cos t, y = \ln \sin t, z = t\sqrt{2}$;
- 3) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin(t/2)$;
- 4) $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}$;
- 5) $x = a \operatorname{ch} t \cos t, y = a \operatorname{ch} t \sin t, z = at$;
- 6) $x = a \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}, y = a \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}, z = a(t - \operatorname{th} t)$; 7) $x^2 = 2az, y^2 = 2bz$. 1

K1-24.123

Найти кручение кривой:

- 1) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$;
- 2) $x = a \operatorname{ch} t \cos t, y = a \operatorname{ch} t \sin t, z = at$;
- 3) $y^2 = x, x^2 = z$. 1

K1-24.124

Найти кривизну и кручение кривой:

- 1) $2ay = x^2, 6a^2z = x^3$;
 - 2) $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, z = at$;
 - 3) $x = 2abt, y = a^2 \ln t, z = b^2 t^2$
 - 4) $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3$;
- 1

K1-24.127

Доказать, что для трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); 0 \leq s \leq S\}$, s - переменная длина дуги, выполняются соотношения

$$\left| \frac{d^3 \mathbf{r}}{ds^3} \right|^3 = k^4 + k^2 \kappa^2 + \left(\frac{dk}{ds} \right)^2, \\ \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right) = 0, \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^3 \mathbf{r}}{ds^3} \right) = -k^2, \quad \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3 \mathbf{r}}{ds^3} \right) = k \frac{dk}{ds}.$$

1

K1-24.128

В предположениях предыдущей задачи доказать, что

$$\left(\tau, \beta, \frac{d\beta}{ds} \right) = \kappa, \quad \left(\frac{d\beta}{ds}, \frac{d^2 \beta}{ds^2}, \frac{d^3 \beta}{ds^3} \right) = \kappa^5 \frac{d}{ds} \frac{k}{\kappa}, \quad \left(\frac{d\tau}{ds}, \frac{d^2 \tau}{ds^2}, \frac{d^3 \tau}{ds^3} \right) = k^5 \frac{d}{ds} \frac{\kappa}{k}.$$

1

K1-24.129

Доказать, что если в точке M_0 кривизна k кривой Γ не равна нулю, то k равна кривизне проекции Γ на ее соприкасающуюся плоскость в точке M_0 . 1

K1-24.130

Доказать, что если все нормальные плоскости дважды непрерывно дифференцируемой кривой без особых точек и с кривизной, не обращающейся в нуль, параллельны постоянному вектору, то эта кривая плоская. 1

K1-24.131

Доказать, что у кривой $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, z = e^t$ каждое ребро сопровождающего трехгранника Френе образует с осью z постоянный угол. 1

K1-24.132

На бинормальных винтовой линии $x = a \cos t, y = a \sin t, z = e^t$ отложены отрезки одной и той же длины. Найти уравнение кривой, образованной концами этих отрезков. 1

K1-24.133

Кривая называется линией откоса, если касательные к ней образуют постоянный угол с какой-либо прямой.

Доказать, что дважды непрерывно дифференцируемая кривая с не равной нулю кривизной является линией откоса тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: 1) все главные нормали параллельны некоторой плоскости;

1

K1-24.141

Доказать, что для трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{M(s); 0 \leq s \leq S\}$, где s - переменная длина дуги: 1) справедлива формула

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s) = \left(\Delta s - \frac{1}{6} k^2(s) \Delta s^3 \right) \tau(s) + \left(\frac{1}{2} k(s) \Delta s^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} k'(s) \Delta s^3 \right) \nu(s) + \frac{1}{6} k(s) \kappa(s) \Delta s^3 \beta(s) + o(\Delta s^3), \quad \Delta s \rightarrow 0$$

2) если через ξ, η, ζ обозначить координаты точки в системе координат, задаваемой ортами $\tau(s), \nu(s), \beta(s)$, то в окрестности точки кривой $M(s)$ проекция кривой на соприкасающуюся плоскость имеет вид

$$\eta = \frac{1}{2} k(s) \xi^2 + o(\xi^2), \quad \xi \rightarrow 0,$$

проекция на нормальную плоскость - вид

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{9k(s)}{2\kappa^2(s)}}\zeta^{2/3} + o(\zeta^{2/3}), \quad \zeta \rightarrow 0, \quad \kappa(s) \neq 0,$$

проекция на спрямляющую плоскость - вид

$$\zeta = \frac{1}{6}k(s)\kappa(s)\xi^3 + o(\xi^3), \quad \xi \rightarrow 0.$$

1

K1-24.142

Доказать, что если на трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); 0 \leq s \leq S\}$, s - переменная длина дуги, параметр s рассматривать как время, то при его изменении сопровождающий трехгранник Френе будет двигаться вдоль кривой как твердое тело с угловой скоростью $\omega = \kappa\tau + k\beta$. Тем самым кривизна численно равна скорости вращения трехгранника Френе вокруг бинормали (причем это вращение всегда происходит от касательного вектора τ к вектору главной нормали ν), а кручение - его скорости вращения вокруг касательной. 1

K1-24.143

Доказать, что формулы Френе можно записать в виде

$$\frac{d\tau}{ds} = [\omega, \tau], \quad \frac{d\nu}{ds} = [\omega, \nu], \quad \frac{d\beta}{ds} = [\omega, \beta]$$

(вектор ω определен в предыдущей задаче).1

K1-24.141

Доказать, что для трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{M(s); 0 \leq s \leq S\}$, где s - переменная длина дуги: 1) справедлива формула

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s) = & \left(\Delta s - \frac{1}{6}k^2(s)\Delta s^3 \right) \tau(s) + \left(\frac{1}{2}k(s)\Delta s^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6}k'(s)\Delta s^3 \right) \nu(s) + \frac{1}{6}k(s)\kappa(s)\Delta s^3\beta(s) + o(\Delta s^3), \Delta s \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2) если через ξ, η, ζ обозначить координаты точки в системе координат, задаваемой ортами $\tau(s), \nu(s), \beta(s)$, то в окрестности точки кривой $M(s)$ проекция кривой на соприкасающуюся плоскость имеет вид

$$\eta = \frac{1}{2}k(s)\xi^2 + o(\xi^2), \quad \xi \rightarrow 0,$$

проекция на нормальную плоскость - вид

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{9k(s)}{2\kappa^2(s)}}\zeta^{2/3} + o(\zeta^{2/3}), \quad \zeta \rightarrow 0, \quad \kappa(s) \neq 0,$$

проекция на спрямляющую плоскость - вид

$$\zeta = \frac{1}{6}k(s)\kappa(s)\xi^3 + o(\xi^3), \quad \xi \rightarrow 0.$$

1

K1-24.142

Доказать, что если на трижды непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); 0 \leq s \leq S\}$, s - переменная длина дуги, параметр s рассматривать как время, то при его изменении сопровождающий трехгранник Френе будет двигаться вдоль кривой как твердое тело с угловой скоростью $\omega = \kappa\tau + k\beta$. Тем самым кривизна численно равна скорости вращения трехгранника Френе вокруг бинормали (причем это вращение всегда происходит от касательного вектора τ к вектору главной нормали ν), а кручение - его скорости вращения вокруг касательной. 1

K1-24.143

Доказать, что формулы Френе можно записать в виде

$$\frac{d\tau}{ds} = [\omega, \tau], \quad \frac{d\nu}{ds} = [\omega, \nu], \quad \frac{d\beta}{ds} = [\omega, \beta]$$

(вектор ω определен в предыдущей задаче).

21.3 Problems about the basic properties of mathematical analysis

(тут 1я часть кудрявцева и школа, думаю, одного раздела хватит на все это.)

21.3.1 Problems about sets (?)

(неплохо бы это прорешать, но сейчас не актуально.)

K1-1.1

Даны множества A, B, C . С помощью операций объединения и пересечения записать множество, состоящее из элементов, принадлежащих: 1) всем трем множествам; 2) хотя бы одному множеству; 3) по крайней мере двум из этих множеств.

K1-1.2

Доказать, что равенства:

- 1) $A \cup B = B$;
- 2) $A \cap B = A$; верны тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

K1-1.3

Доказать, что равенство $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ верно тогда и только тогда, когда $A \supset C$.

K1-1.4

Доказать равенство:

- 1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; 2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
- 3) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; 4) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

K1-1.5

Доказать, что включение $A \setminus B \subset C$ верно тогда и только тогда, когда $A \subset B \cup C$.

K1-1.6

Доказать, что:

- 1) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$
- 2) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

K1-1.7

Определить, в каком отношении ($X \subset Y, X \supset Y, X = Y$) находятся множества X и Y , если:

- 1) $X = A \cup (B \setminus C), \quad Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;
- 2) $X = (A \cap B) \setminus C, \quad Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
- 3) $X = A \setminus (B \cup C), \quad Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

K1-1.8

Пусть A и B - произвольные подмножества множества U . Доказать равенство:

- 1) $(A \setminus B)' = A' \cup B$;
- 2) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$;
- 3) $(A \cup B) \cap (A' \cup B') = A \cup B$.

K1-1.9

Пусть $A \subset U, B \subset U$. Найти множество $X \subset U$, удовлетворяющее уравнению

$$(X \cup A)' \cup (X \cup A') = B.$$

K1-1.10

Найти подмножества A и B множества U , если известно, что для любого множества $X \subset U$ верно равенство $X \cap A = X \cup B$

K1-1.11

Пусть $A_s \subset U, s \in S$. Доказать:

- 1) $(\bigcup_{s \in S} A_s)' = \bigcap_{s \in S} A_s'$;
- 2) $(\bigcap_{s \in S} A_s)' = \bigcup_{s \in S} A_s'$.

K1-1.12

Дана система произвольных множеств $A_s, s \in N$. 1) Пусть $B_n = \bigcup_{s=1}^n A_s, n \in N$. Доказать, что $\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s$. 2) Пусть $B_n = \bigcap_{s=1}^n A_s, n \in N$. Доказать, что $\bigcap_{s=1}^{\infty} B_s = \bigcap_{s=1}^{\infty} A_s$.

K1-1.13

Доказать, что множество является бесконечным тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

K1-1.14

Доказать, что если множество A бесконечное, а множество B счетное, то $(A \cup B) \sim A$.

K1-1.15

Доказать, что если $A \setminus B \sim B \setminus A$, то $A \sim B$.

K1-1.16

Доказать, что если $A \subset B \subset C$ и $A \sim C$, то $A \sim B$.

K1-1.17

Доказать счетность следующих множеств: 1) множества всех чисел вида $2^k, k \in N$; 2) множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты; 3) множества всех точек плоскости с рациональными координатами; 4) множества всех многочленов с рациональными коэффициентами.

K1-1.18

Доказать, что следующие множества имеют мощность континуума: 1) множество всех точек непустого интервала $(a; b)$; 2) множество всех последовательностей, составленных из цифр 0 и 1; 3) множество всех последовательностей действительных чисел; 4) множество всех точек квадрата; 5) множество всех точек круга; 6) множество всех подмножеств счетного множества; 7) множество всех счетных подмножеств множества мощности континуума.

K1-1.19

В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если: 1) один из них должен быть старшим; 2) старшего быть не должно?

K1-1.20

На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если: 1) все путевки различны; 2) все путевки одинаковы?

K1-1.21

Сколькими способами можно расположить в ряд пять белых и четыре черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая: 1) шары одного цвета неотличимы друг от друга; 2) все шары разные.

K1-1.22

Сколько диагоналей имеет выпуклый n -угольник?

K1-1.23

Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определить число точек пересечения диагоналей.

K1-1.24

На первой из двух параллельных прямых лежат 15 точек, на второй

K1-1.21

Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

K1-1.25

Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 ладей одного цвета, чтобы они не били друг друга и стояли только на черных клетках?

K1-1.26

Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел? Сколько среди них четных чисел?

K1-1.27

Сколько различных десятизначных чисел можно записать, используя цифры 1 и 2?

K1-1.28

Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: 1) зебра; 2) баран; 3) водород; 4) абракадабра?

K1-1.29

Сколькими способами можно раздать 28 костей домино четырем игрокам так, чтобы каждый получил 7 костей?

K1-1.30

Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

21.3.2 Problems about fundamental properties of mathematics

Relation between fundamental constants

Why $\pi = e^{3/2} \prod_{n=2}^{\infty} e \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$?

Solution

(see https://www.youtube.com/watch?v=bMEpIKmQgZo&ab_channel=MichaelPenn for now)

21.3.3 Problems about combinatorics

21.3.4 Problems about mathematical logic

(вроде задачи крутые, так что была бы вообще сделана структура и в жизни я разобрался бы - пару дней на это бы выделил, супер крутой раздел!!!)

К1-2.1

Доказать, что для любых высказываний A и B справедливы равенства $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$, $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$.

К1-2.2

Выяснить, какое из утверждений A и B следует из другого, используя символы $\rightarrow, \leftrightarrow$:

- 1) $A \equiv \{ \text{каждое из чисел } a, b \text{ делится на } 7 \}, B \equiv \{ \text{сумма } a + b \text{ делится на } 7 \}$
- 2) $A \equiv \{ \text{последняя цифра числа } a \text{ четная} \}, B \equiv \{ \text{число } A \text{ делится на } 4 \}$
- 3) $A \equiv \{ \text{треугольник } A_1B_1C_1 \text{ равнобедренный} \}, B \equiv \{ \text{две медианы треугольника } A_1B_1C_1 \text{ равны между собой} \};$
- 4) $A \equiv \{ \text{из отрезков, длины которых равны } a, b, c, \text{ можно составить треугольник} \}, B \equiv \{ \text{положительные числа } a, b, c \text{ связаны неравенствами } a + b > c, b + c > a, c + a > b \}.$

К1-2.3

Доказать, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения при всех $x \in R$ тогда и только тогда, когда $D = b^2 - 4ac < 0$ и $a < 0$.

К1-2.4

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ - квадратный трехчлен, $D = b^2 - 4ac, x_1$ и x_2 - корни квадратного трехчлена, $x_1 \leq x_2 (D \geq 0), x_0 = -\frac{b}{2a}$ - абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c, M$ и K - заданные числа. Доказать, что:

- 1) $\{x_1 < M, x_2 < M\} \leftrightarrow \{D \geq 0, x_0 < M, af(M) > 0\}$
- 2) $\{x_1 > M, x_2 > M\} \leftrightarrow \{D \geq 0, x_0 > M, af(M) > 0\}$
- 3) $\{x_1 < M < x_2\} \leftrightarrow \{af(M) < 0\};$
- 4) $\{K < x_1 < M, K < x_2 < M\} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \{D \geq 0, K < x_0 < M, f(K)f(M) > 0\}$$

- 5) $\{x_1 < K < M < x_2\} \leftrightarrow \{af(K) < 0, af(M) < 0\}.$

К1-2.5

Пусть $A_k(x)$ и $B_k(x) (k = 1, 2, \dots, n)$ - неопределенные высказывания, заданные на множестве M и такие, что:

А) для любого $x \in M$ хотя бы одно из высказываний $A_k(x)$ является истинным; Б) $A_k(x) \rightarrow B_k(x), k = 1, 2, \dots, n$; В) высказывания $B_1(x), \dots, B_n(x)$ взаимно исключают друг друга, т. е. если одно из них для каждого $x \in M$ истинно, то все остальные ложны.

Доказать, что $B_k(x) \rightarrow A_k(x), k = 1, 2, \dots, n$, а высказывания $A_1(x), \dots, A_n(x)$ взаимно исключают друг друга.

К1-2.6

Пусть $A_k, B_k (k = 1, 2, 3)$ - неопределенные высказывания, заданные на множестве всех треугольников со сторонами a, b, c и соответствующими углами A, B, C : $A_1 \equiv \{ \text{угол } A \text{ острый} \}, A_2 \equiv \{ \text{угол } A \text{ прямой} \}, A_3 \equiv \{ \text{угол } A \text{ тупой} \},$

$$B_1 \equiv \{a^2 < b^2 + c^2\}, \quad B_2 \equiv \{a^2 = b^2 + c^2\}, \quad B_3 \equiv \{a^2 > b^2 + c^2\}.$$

Доказать, что $A_k \leftrightarrow B_k (k = 1, 2, 3)$. Методом математической индукции решить задачи 7-13.

K1-2.7

Доказать, что при каждом $n \in N$ верны равенства:

- 1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$;
- 2) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;
- 3) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$;
- 4) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- 5) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

K1-2.8

Доказать, что при каждом $n \in N$: 1) число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19 ; 2) число $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6 ; 3) число $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11 ; 4) число $n^5 - n$ делится на 5.

K1-2.9

Доказать, что при каждом $n \in N$ справедливо неравенство Бернулли $(1+a)^n \geq 1+na$, если $a > -1$.

K1-2.10

Доказать, что при каждом $n \in N$ верно неравенство:

- 1) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$;
- 2) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$;
- 3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;
- 4) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

K1-2.11

Доказать равенство $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{8} + \dots + \arctg \frac{1}{2n^2} = \arctg \frac{n}{n+1}$, $n \in N$.

K1-2.12

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - произвольные положительные числа такие, что $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Доказать, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

K1-2.13

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - произвольные положительные числа. Доказать, что

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

21.3.5 Problems about Mathematical induction method**21.3.6 Problems about Real numbers****K1-3.1**

Записать бесконечную периодическую десятичную дробь a в виде $\frac{p}{q}$, если p и q - натуральные числа, не имеющие общих делителей:

- 1) $a = 2, (13)$;
- 2) $a = 1, 3(18)$
- 3) $a = 0, 125(0)$
- 4) $a = 3, 4(31)$

K1-3.2

Доказать, что числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональные.

K1-3.3

Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

K1-3.4

Доказать, что для любых рациональных чисел a и b таких, что $a < b$, найдется иррациональное число c , удовлетворяющее условию $a < c < b$.

K1-3.5

Доказать, что для любых рациональных чисел p, q, r , из которых хотя бы одно не равно нулю, число $p\sqrt{2} + q\sqrt{3} + r\sqrt{2/3}$ иррациональное.

K1-3.6

Сравнить следующие действительные числа: 1) 3,3 и 3,298; 2) 3,1416 и 3,14159; 3) 3,141592 и $22/7$;

4) $\sqrt{3} + 2$ и $\sqrt{2} + \sqrt{5}$

5) $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{19}$

K1-3.7

Доказать, что если $|b| < \frac{|a|}{2}$, то $\frac{1}{|a-b|} < \frac{2}{|a|}$.

K1-3.8

Пусть $X = \{x : x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$. Доказать, что множество X не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов. Найти $\sup X$ и $\inf X$.

K1-3.9

Найти $\sup X$ и $\inf X$, если множество X состоит из элементов, являющихся членами последовательности $\{x_n\}$, где:

1) $x_n = \frac{1}{n}$;

2) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$;

3) $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

K1-3.10

Пусть X, Y - непустые ограниченные множества действительных чисел, а $X + Y$ - множество всевозможных чисел вида $x + y$, где $x \in X, y \in Y$. Показать, что $X + Y$ - ограниченное множество, причем $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$, $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

K1-3.11

Пусть X, Y - непустые ограниченные множества неотрицательных действительных чисел, XY - множество всевозможных чисел xy , где $x \in X, y \in Y$. Показать, что XY - ограниченное множество, причем $\sup XY = \sup X \cdot \sup Y$, $\inf XY = \inf X \cdot \inf Y$.

K1-3.12

Пусть X и Y - множества действительных чисел, $X - Y$ - множество всевозможных чисел вида $x - y$, где $x \in X, y \in Y$. Показать, что $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$.

K1-3.13

Пусть X - множество действительных чисел, а $-X$ - множество чисел вида $y = -x$, где $x \in X$. Доказать, что $\inf(-X) = -\sup X$, $\sup(-X) = -\inf X$.

K1-3.14

Пусть X и Y - непустые множества действительных чисел такие, что: а) для любого $x \in X$ и для любого $y \in Y$ справедливо неравенство $x \leq y$ б) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $x_\varepsilon \in X$ и $y_\varepsilon \in Y$ такие, что $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$. Показать, что $\sup X = \inf Y$.

K1-3.15

Доказать, что множество всех чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p \in N, q \in N, 0 < p < q$, не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Найти его точную верхнюю и точную нижнюю грани.

21.3.7 Problems about Rational Fractions

(тут вроде прямо изи)

21.3.8 Problems about Polynomials

(в принципе тоже такие задачи могут встретиться, но пока на них забиваю.)
(в 1й части укажу, где используются эти задачи. по идее в интегралах, где можно разложить интеграл на сумму интегралов. если другие места применения будут - тоже укажу.)

K1-6.1

Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x - 1$ и $x - 2$ равны соответственно 3 и 4. Найти остаток от деления $P(x)$ на $(x - 1)(x - 2)$. Δ Пусть $r(x)$ - искомый остаток. Тогда $r(x) = ax + b$ и справедливо равенство

$$P(x) = Q(x)(x - 1)(x - 2) + ax + b.$$

Полагая в этом равенстве $x = 1$ и $x = 2$, получаем $3 = a + b, 4 = 2a + b$, откуда $a = 1, b = 2$. О твет. $x + 2$

K1-6.2

Разложить многочлен $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ на множители на множестве R .

А Делителями свободного члена многочлена $P(x)$ являются числа $1, -1, 2, -2$. Так как $P(-1) = 0, P(2) = 0$, то числа -1 и 2 - корни многочлена $P(x)$, и поэтому этот многочлен должен делиться нацело на $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$. Тогда существует многочлен $Q(x)$ второй степени, старший коэффициент которого равен 1, такой, что $Q(x) = x^2 + px + q$ и

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x^2 - x - 2)(x^2 + px + q).$$

Приравнивая в этом тождестве свободные члены и коэффициенты при x^3 , получаем $q = 1, -1 = -1 + p$, откуда $p = 0$, т. е. $Q(x) = x^2 + 1$. Ответ. $(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$.

Замечание. Коэффициенты p и q можно получить, разделив "углом" $P(x)$ на $x^2 - x - 2$.

Приравнивая в этом тождестве свободные члены и коэффициенты при x^3 , получаем $q = 1, -1 = -1 + p$, откуда $p = 0$, т. е. $Q(x) = x^2 + 1$. Ответ. $(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$

Замечан и е. Коэффициенты p и q можно получить, разделив "углом" $P(x)$ на $x^2 - x - 2$.

К-пр.3

Представить рациональную дробь $\frac{x^4}{x^2 - x + 1}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби. Δ Используя метод деления "уголком", получаем

$$\frac{x^4}{x^2 - x + 1} = x^2 + x - \frac{x}{x^2 - x + 1}.$$

К-пр.4

Указать вид разложения правильной рациональной дроби $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x - 1)(x + 2)^3(x^2 + 4)^2}$ на элементарные дроби на множестве R . Δ Многочлен, стоящий в знаменателе дроби, имеет действительные корни 1 и -2 кратностей 1 и 3 соответственно, а также пару комплексно сопряженных корней кратности 2 . Следовательно,

$$f(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{A_1}{(x + 2)^3} + \frac{A_2}{(x + 2)^2} + \frac{A_3}{x + 2} + \frac{Bx + D}{(x^2 + 1)^2} + \frac{B_1x + D_1}{x^2 + 1}$$

К-пр.5

Разложить на множестве R рациональную дробь $f(x)$ на элементарные дроби, если:

1) $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 11}{(x-1)^2(x^2+4)}$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$.

1) $\frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 11}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Bx+D}{x^2+4}$. В правой части этого равенства приведем дроби к общему знаменателю, а затем приравняем числители левой и правой частей получившегося равенства:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 - 4x^2 + 3x - 11 = \\ &= A_1(x^2 + 4) + A_2(x-1)(x^2 + 4) + (Bx + D)(x-1)^2 \end{aligned}$$

Из равенства многочленов следует равенство их коэффициентов при одинаковых степенях x , т.е.

$$\begin{cases} 2 = A_2 + B \\ -4 = A_1 - A_2 + D - 2B \\ 3 = 4A_2 + B - 2D \\ -11 = 4A_1 - 4A_2 + D \end{cases}$$

Решив эту линейную систему, найдем искомые коэффициенты разложения. Эти коэффициенты можно найти, используя значения $P(1)$ и $P'(1)$. Так как $P(1) = -10 = 5A_1$, то $A_1 = -2$. Далее, $P'(1) = 1 = 2A_1 + 5A_2$, откуда $A_2 = 1$. Из первого уравнения системы (9) находим $B = 1$, а из третьего уравнения следует, что $D = 1$. Искомое разложение имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+4}.$$

2) Искомое разложение можно получить с помощью следующих преобразований:

$$f(x) = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

К1-6.1

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:

1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$, $Q(x) = x + 1$

2) $P(x) = 2x^{10} - 8x^8 + 7$, $Q(x) = x - 2$;

3) $P(x) = 3x^4 + 4x^2$, $Q(x) = 3x + 2$;

4) $P(x) = x^5 + 4x^4 + x^2 + 3$, $Q(x) = (x+2)(x+4)$

5) $P(x) = x^7 + x^6 - 6x^5 + x^2 - 5$, $Q(x) = (x+3)(x-2)$

6) $P(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$.

К1-6.2

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x+4)(x-5)$, если остатки от деления этого многочлена на $x+4$ и $x-5$ равны соответственно 5 и 14.

К1-6.3

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x+2)(x+4) \times \times (x-3)$, если остатки от деления этого многочлена на $x+2$, $x+4$, $x-3$ равны соответственно 6, 12, 26.

К1-6.4

Доказать, что многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $Q(x)$, и найти частное, если:

1) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5$, $Q(x) = x^2 + 1$

2) $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x + 2$, $Q(x) = x^2 - x + 1$.

К1-6.5

Найти частное $T(x)$ и остаток $R(x)$ от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:

1) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 3$, $Q(x) = x^2 - 8x + 16$

2) $P(x) = x^{30} - 1$, $Q(x) = x^5 + 1$.

K1-6.6

Найти такие числа b и c , чтобы многочлен $x^6 + bx^5 + cx^4$ делился нацело на многочлен $Q(x)$, если:

- 1) $Q(x) = (x+2)(x-3)$
- 2) $Q(x) = (x-3)(x-5)$.

K1-6.7

Найти целые корни уравнения:

- 1) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$
- 2) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$
- 3) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84 = 0$
- 4) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8 = 0$.

K1-6.8

Определить кратность корня x_0 уравнения:

- 1) $3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$, $x_0 = 1$;
- 2) $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, $x_0 = 2$.

K1-6.9

Найти действительные корни уравнения:

- 1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$;
- 2) $x^3 + x^2 - 2x - 8 = 0$;
- 3) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$;
- 4) $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$.

K1-6.10

Найти все корни уравнения:

- 1) $2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0$;
- 2) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = 0$;
- 3) $x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32 = 0$;
- 4) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72 = 0$.

K1-6.11

Представить многочлен $P(x)$ в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами, если:

- 1) $P(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$;
- 2) $P(x) = x^5 - x^4 + x - 4$
- 3) $P(x) = x^6 + 27$;
- 4) $P(x) = (x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$;
- 5) $P(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$;
- 6) $P(x) = x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 1$; 7) $P(x) = x^4 + 1$.

K1-6.12

Число $1 + \sqrt{3}$ - корень уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 2 = 0$. Найти остальные корни этого уравнения, если a и b - рациональные числа.

K1-6.13

Пусть x_1, x_2, x_3 - корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Доказать, что $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$.

K1-6.14

Доказать, что при любых целых m, n, p многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится нацело на $x^2 + x + 1$.

K1-6.15

Доказать, что при любом $c \in R$ уравнение $x^3 - x^2 + x + c = 0$ имеет только один действительный корень.

K1-6.16

Доказать, что при $a \geq 0$ и любом $b \in R$ уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет только один действительный корень.

K1-6.17

Доказать, что если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает при всех $x \in R$ положительные значения, то он представляется в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами.

K1-6.18

Пусть x_1, x_2, x_3 - корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами, а $P(x)$ - произвольный многочлен с целыми коэффициентами. Доказать, что $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)$ - целое число.

K1-6.19

Разложить на элементарные дроби рациональную дробь:

- 1) $\frac{x}{(x-3)(x+4)}$
- 2) $\frac{x+1}{x^2+x-6}$ 3)
- 5) $\frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}$ $\frac{x^2+5x-34}{(x-1)(x+2)(x-4)}$ 6) $\frac{5x^2+6x-23}{(x-2)(x+1)^2(x-1)^3}$

K1-6.20

Разложить на множестве R рациональную дробь на элементарные:

- 1) $\frac{6}{x^3-1}$
- 2) $\frac{3}{x^2-x^5}$;
- 3) $\frac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$;
- 4) $\frac{6x^2+2x+1}{(1-4x)(2x^2-x+2)}$;
- 5) $\frac{6x^2-8x+3}{(1-3x)(-3x^2+x-1)}$;
- 6) $\frac{4x+1}{(3x+2)^2(-3x^2+x-1)}$ 7) $\frac{6x+5}{(2x+3)^2(4x^2+12x+10)}$ 8) $\frac{1-2x}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

K1-6.21

Представить на множестве R в виде суммы многочлена и элементарных дробей рациональную дробь:

- 1) $\frac{2x^4-5x^3+11x^2-17x+19}{x^3-2x^2+3x-6}$;
- 2) $\frac{3x^3+x^2-20x+17}{x^2+x-6}$
- 3) $\frac{x^4+2x^3-5x^2+x+1}{x^3+2x^2-5x-6}$
- 4) $\frac{2x^4-x^3-6x^2+4x+1}{x^3-3x-2}$.

21.3.9 Problems about the basics of complex numbers

(более подробно в комплексном анализе)

K1-5.1

Найти сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2 , если

- 1) $z_1 = 4 + 5i, z_2 = 3 - 2i$,
- 2) $z_1 = 0, 5 - 3, 2i, z_2 = 1, 5 - 0, 8i$,
- 3) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i, z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$

K1-5.2

Найти разность $z_2 - z_1$ и частное z_2/z_1 , если

- 1) $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 0, 4 - 0, 2i$,
- 2) $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 0, 6$
- 3) $z_1 = \sqrt{5} - i, z_2 = \sqrt{5} - 2i$

K1-5.3

Найти мнимую часть z , если

1) $z = (2 - i)^3(2 + 11i)$,

2) $z = \frac{2-3i}{1+4i} + i^6$

3) $z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} - \frac{1}{i}$

K1-5.4

Выполнить действия

1) $i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}$

2) $2i \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

3) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

4) $\frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(1+2i)^2}{2+i}$

5) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$

K1-5.5

Определить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа

$$z_1 = y^2 - 7y + 9xi \quad \text{и} \quad z_2 = -12 + 20i + x^2i$$

равны

K1-5.6

Определить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа

$$z_1 = 8x^2 - 20i^9 \quad \text{и} \quad z_2 = 9x^2 - 4 + 10yi^3$$

являются сопряженными

K1-5.7

Решить уравнение

1) $(1 + 2i)(z - i) + (4i - 3)(1 - iz) + 1 + 7i = 0$

2) $z^2 + \bar{z} = 0$

K1-5.8

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

K1-5.9

На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3 , являющиеся вершинами треугольника. Найти точку пересечения его медиан

K1-5.10

В точках $z_1, z_2, \dots, z_n$ комплексной плоскости расположены материальные точки соответственно с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. Найти центр тяжести такой системы материальных точек

K1-5.11

На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3 , являющиеся тремя последовательными вершинами некоторого параллелограмма. Найти четвертую вершину этого параллелограмма.

K1-5.12

На комплексной плоскости даны точки $z_1 = 6 + 8i, z_2 = 4 - 3i$. Найти комплексные числа, соответствующие точкам, лежащим на биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2 .

K1-5.13

Найти модуль комплексного числа z :

- 1) $z = -4$;
- 2) $z = -i$
- 3) $z = -5 - 2\sqrt{6}i$
- 4) $z = 1 + \cos(8\pi/7) + i \sin(8\pi/7)$.

K1-5.14

Решить уравнение:

- 1) $z^2 + 3|z| = 0$;
- 2) $z^2 + 2|z| = 1$
- 3) $z^2 + |z|^2 = 0$
- 4) $z^2 + z|z| + |z^2| = 0$.

K1-5.15

Найти множество точек комплексной плоскости, заданное условием:

- 1) $|z + 1| = 1$;
- 2) $|z - i| < |z + i|$
- 3) $|z + 2i - 1| \leq 2$
- 4) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$
- 5) $|z - 2| + |z + 2| = 26$
- 6) $\sin |z| > 0$ 7) $\lg |z - 10i| < 1$ 8) $|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$

K1-5.16

Решить систему уравнений:

- 1) $|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + i|$;
- 2) $\begin{cases} |z + 1| = |z + 2|, \\ |3z + 9| = |5z + 10i|; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} (1 - i)\bar{z} = (1 + i)z, \\ |z^2 + 51i| = 1. \end{cases}$

K1-5.17

Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} |z + 1 - i| = \sqrt{2} \\ |z| = 3 \end{cases}$$

не имеет решений.

K1-5.18

Найти аргументы комплексного числа:

- 1) $z = i$;
- 2) $z = -1$;
- 3) $z = 8$
- 4) $z = 2 - 2i$
- 5) $z = \sin(\pi/9) - i \cos(\pi/9)$;
- 6) $z = 1 + \cos(\pi/7) + i \sin(\pi/7)$.

K1-5.19

Найти множество точек комплексной плоскости, если один из аргументов φ числа z : 1) равен нулю; 2) равен $5\pi/2$; 3) удовлетворяет неравенствам $2\pi < \varphi < 3\pi$; 4) удовлетворяет неравенствам $0 \leq \varphi < 2\pi$.

K1-5.20

Среди комплексных чисел z , удовлетворяющих условию:

- 1) $|z + 1 - i| = 1$
- 2) $|z + 3 - \sqrt{3}i| \leq \sqrt{3}$ найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

K1-5.21

Где находится точка z^2 , если точка $z = x + iy$ принадлежит прямой $y = 1$?

K1-5.22

Где находится точка z комплексной плоскости, если точка z^2 принадлежит мнимой оси?

K1-5.23

Пусть $z \neq \pm 1$. Доказать, что точка $(z-1)/(z+1)$ принадлежит мнимой оси тогда и только тогда, когда точка z принадлежит окружности радиуса $R = 1$ с центром в точке $z = 0$.

K1-5.24

Может ли точка $z = 0$ принадлежать какому-нибудь многоугольнику, вершины которого находятся в точках

$$z_k = 1 + z + z^2 + \dots + z^{k+1}, \quad |z| < 1?$$

K1-5.25

Представить комплексное число z в тригонометрической форме:

- 1) $z = -\sqrt{3} + i$
- 2) $z = -1$;
- 3) $z = -\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$;
- 4) $z = 1 + \cos \frac{10\pi}{9} + i \sin \frac{10\pi}{9}$
- 5) $z = \operatorname{tg} 1 - i$.

K1-5.26

Записать комплексное число z в алгебраической и в тригонометрической формах:

- 1) $z = \frac{i(\cos(5\pi/3) + i \sin(5\pi/3))}{\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)}$
- 2) $z = \frac{1}{\cos(4\pi/3) - i \sin(4\pi/3)}$;
- 3) $z = \frac{i}{(1+i)^2}$;
- 4) $z = \frac{-\cos(5\pi/12) + i \sin(5\pi/12)}{\cos(13\pi/12) - i \sin(13\pi/12)}$
- 5) $z = \frac{(\cos(\pi/3) - i \sin(\pi/3))(1/2 + i\sqrt{3}/2)}{i}$.

K1-5.27

Представить в тригонометрической форме комплексное число z :

- 1) $z = \frac{5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)}{3(\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ)}$;
- 2) $z = \frac{\sin(2\pi/5) + i(1 - \cos(2\pi/5))}{i-1}$.

K1-5.28

При повороте на угол $\pi/2$ по часовой стрелке и удлинении в два раза вектор $z_1 = 2 + 5i$ переходит в вектор z_2 . Найти комплексное число, соответствующее вектору z_2 .
(и там еще несколько)

21.4 Problems about equations and inequalities**21.4.1 The simplest problems of numerical inequalities**

(подробнее - в теории чисел.)

21.4.2 Problems about Trigonometric Equations

(порешаю потом мб тоже, давно все пройдено, простые формулы, ничего сложного, но решения могут быть на пару страниц)

21.4.3 Problems about equations with two unknowns

(типа найти пары чисел, удовлетворяющие уравнению со степенями. потом мб порешаю, пока не так интересно.)

21.4.4 Problems about equations with three unknowns

(типа найти пары чисел, удовлетворяющие уравнению со степенями. потом мб порешаю, пока не так интересно.)

21.4.5 Problems about Algebraic Equations

21.4.6 Problems about Elementary inequalities

(чисто школа, там полно таких было задач)

21.4.7 Problems about Inequalities with logarithms

(чисто школа, там полно таких было задач, небольшие особенности, но ничего другого. решения могут быть очень разными и есть детали, тем не менее, пара формул и методов решают все.)

Неравенство $\log_{\sqrt{6-x}}(6+x) + \log_{\sqrt{6+2}}(6-x) \leq 5$

Заменяем $a \equiv \log_{6-x}(6+x)$, получаем $a \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, 2]$,
для первого интервала

получаем систему $\frac{(6+1)-1}{(6-x)-1} \leq 0$, $x \in (-6, 6)$, тогда нам подходят решения $x \in (-6, -5) \cup (5, 6)$
для второго интервала

1) получаем по стандартным формулам для решения неравенств систему $\frac{(6+x)-(6-x)^2}{(6-x)-1} \leq 0$, $x \in (-5, 5)$,
находя корни и рисуя отрезки знакопеременования, получаем решения $x \in (-5, 3]$

2) получаем по стандартным формулам для решения неравенств систему $\frac{(6+x)^2-(6-x)}{(6-x)-1} \geq 0$, $x \in (-5, 5)$,
находя корни и рисуя отрезки знакопеременования, получаем решения $x \in [-3, 5)$

Объединяя, получим ответ: $x \in (-6, -5) \cup [-3, 3] \cup (5, 6)$.

В задаче важно 1) знать четкие формулы преобразований неравенств, 2) не обсчитаться с корнями и нужными интервалами. Надеюсь, больше не повторю ошибки!!!

Неравенство $\log_{2x-5}(5x-2) \geq 1$

Решается стандартными формулами на такие неравенства:

$$\begin{aligned} \log_{2x-5}(5x-2) &\geq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)}{\log_2(2x-5)} - 1 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_9(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5) - \log_2 1} &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(5x-2)-(2x-5)}{(2x-5)-1} \geq 0, \\ 5x-2 > 0, \\ 2x-5 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+3}{2x-6} \geq 0, \\ x > \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-3} \geq 0, \\ x > 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3. \end{aligned}$$

неравенство $\log_{|x+2|} (4 + 7x - 2x^2) \leq 2$

Как всегда решается:

$$\begin{aligned} \log_{|x+2|} (4 + 7x - 2x^2) \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{\log_2 (4 + 7x - 2x^2)}{\log_2 |x+2|} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_2 (4 + 7x - 2x^2) - \log_2 |x+2|^2}{\log_2 |x+2| - \log_2 1} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(4+7x-2x^2)-(x+2)^2}{|x+2|-1} \leq 0, \\ 4 + 7x - 2x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3x^2+3x}{(x+2)^2-1^2} \leq 0, \\ 2x^2-7x-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)} \\ -0,5 < x < 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Последняя система легко решается методом интервалов.

Ответ: $(-0,5; 0]$ И $[1; 4)$.

21.4.8 Problems about Trivial Inequalities

(подробнее - отдельная запись про них, тут тонна задач может быть.)

К1-?.42

Функция f такова, что для любых $x_1, x_2 \in R$ верно неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)).$$

Доказать, что для любых $x_1, x_2, x_3 \in R$ верно неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) < \frac{1}{3}(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

2

К1-?.43

Функция f выпукла вниз на R . Доказать, что для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ и любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0 \leq \alpha_j \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, верно неравенство (неравенство Йенсена)

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

21.4.9 Problems about Infinite productions

(?? в теории укажу, где это нужно, задачи прикольные, тем не менее, не встречал нигде еще их)

К2-24.пр.1

Найти $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n})$. А Поскольку в данном случае $P_n = (1 + x) \dots (1 + x^{2^n})$, то $(1 - x)P_n = (1 - x^2)(1 + x^2) \dots (1 + x^{2^n}) = \dots = 1 - x^{2^{n+1}}$. Поэтому

$$P_n = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x},$$

и если $|x| < 1$, то

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x},$$

а если $|x| \geq 1, x \neq 1$, то

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} = +\infty.$$

При $x = 1$ получим $2 \cdot 2 \cdot 2 \dots = +\infty$. Таким образом,

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \begin{cases} 1/(1 - x), & |x| < 1 \\ +\infty, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Пр имер

K2-24.2

Доказать формулу Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}.$$

Δ Проинтегрировав неравенство $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ от 0 до $\pi/2$, получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx,$$

и поскольку (см. задачу 208§6)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

то

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Отсюда

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 x_n \stackrel{\text{def}}{=} y_n.$$

В силу этих неравенств

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \leq \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, т. е. отрезки $[x_n; y_n]$ содержат точку $\pi/2$ и их длины стремятся к нулю. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi/2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \pi/2.$$

Поскольку

$$x_n = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)} = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1},$$

то первое из равенств (6) и означает справедливость формулы Валлиса (5). ЗАДАЧИ

K2-24.1

Выяснить, сходится или расходится бесконечное произведение:

- 1) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;
- 2) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$
- 3) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n}$. Доказать равенство (2-11).

K2-24.2

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

K2-24.3

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$$

K2-24.4

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{3}.$$

K-5

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right) = 2.$$

K2-24.6

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$$

K-7

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

K2-24.8

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}. \text{ Указание.}$$

В задачах 7 и 8 воспользоваться формулой Валлиса (5)

K2-24.9

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

K2-24.10

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{ch} x}{x}.$$

K2-24.11

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

K2-24.12

Доказать, что если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то сходятся и все его остаточные произведения $\prod_{m=n}^{\infty} p_m^{n=1}, n \in N$, и если сходится хотя бы одно остаточное произведение $\prod_{m=n}^{\infty} p_m$ и $p_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, n-1$, то сходится и бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$.

K2-24.13

Доказать, что если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$. То $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$.

K2-24.14

Доказать: если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится и $Q_n = \prod_{m=n+1}^{\infty} p_m$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1$.

K2-24.15

Доказать, что если бесконечное произведение сходится, то, начиная с некоторого номера, все его сомножители имеют один и тот же знак.

K2-24.16

Доказать, что для того, чтобы бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n, p_n > 0, n \in N$, сходилась, необходимо и достаточно, чтобы сходилась ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$, и что при выполнении этого условия

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = e^S, \quad \text{где} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n.$$

K2-24.17

Следует ли из сходимости бесконечных произведений $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod_{n=1}^{\infty} q_n, p_n > 0, q_n > 0, n \in N$, сходимость произведений:

- 1) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$
- 2) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n)$;
- 3) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$;
- 4) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} \Gamma$

K2-24.18

Доказать: если для всех $nu_n \neq -1$ и для всех n , начиная с некоторого, выполнено неравенство $u_n > 0$ (или $u_n < 0$), то для сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$;

- 1) необходимо, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; 2) необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

K2-24.19

Доказать, что бесконечное произведение

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots$$

сходится, а ряд

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots$$

расходится.

K2-24.20

Доказать: если $u_n \neq -1$ для всех n и если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2,$$

то сходится и бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$.

K2-24.21

Доказать, что если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$, где

$$u_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & n = 2k - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & n = 2k, \end{cases}$$

сходится, а оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ расходятся.

K2-24.22

Доказать, что для того, чтобы бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n, p_n > 0, n \in N$, равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\infty$.

K2-24.23

Доказать, что если $-1 < u_n < 0, n \in N$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = 0$.

K2-24.27

Доказать, что для того, чтобы бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n, p_n > 0, n \in N$, сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое n_0 , что для всех $n > n_0$ и всех $k > 0$ выполнялось неравенство

$$\left| \prod_{m=n}^{n+k} p_m - 1 \right| < \varepsilon.$$

K2-24.28

Доказать, что для абсолютной сходимости бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$, где $u_n \neq -1$ для всех n , необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходиллся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

K2-24.29

Доказать, что $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1+1/n} = e^C$, где C - постоянная Эйлера:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

K2-24.30

Доказать, что если $\mathbf{F}(k)$ - полный эллиптический интеграл 1-го рода (см. задачи 230 и 231§6), то

$$\mathbf{F}(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + k_n), \quad k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}, \quad k_0 = k, \quad |k| < 1.$$

K2-24.31

Найти $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^n}{e}$.

K2-24.32

Выяснить, сходится или расходится бесконечное произведение

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{\beta + n}{\alpha + n}, \quad \alpha > \beta,$$

и можно ли говорить о его значении. Доказать сходимость и найти следующие бесконечные произведения (33-36).

Исследовать сходимость следующих бесконечных произведений (38 – 45)

K2-24.38

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

K2-24.39

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

K2-24.40

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

K2-24.41

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^p.$$

K2-24.42

$$\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

K2-24.43

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

K2-24.44

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$$

K2-24.45

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n} \text{ Выяснить, при каких значениях } x \text{ сходятся бесконечные произведения (46-55).}$$

K2-24.46

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^x}\right).$$

K2-24.47

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^x}\right)$$

K2-24.48

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}$$

K2-24.49

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{x/n}, \quad c > 0. \quad \mathbf{50} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

K2-24.51

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right).$$

K2-24.52

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(1+1/n)^{n^2}}{x^n}\right).$$

K2-24.53

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \exp \left\{ \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n} \right\}. \quad \mathbf{554} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(x/n)}{x/n} \right)^p.$$

K2-24.55

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln x}$$

K2-24.56

Доказать абсолютную сходимость бесконечного произведения

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \quad x \neq m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость следующие бесконечные произведения (57-63).

K2-24.57

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right). \quad \mathbf{58} \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right).$$

K2-24.59

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right).$$

K2-24.60

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+(-1)^n}}.$$

K2-24.61

$$\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$$

K2-24.65

Пусть $0 < x_n < \pi/2, n \in N$. Доказать, что бесконечные произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$$

сходятся тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$.

K2-24.66

Доказать, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha_n)$, где $|\alpha_n| < \frac{\pi}{4}$, сходится, если абсолютно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

K2-24.67

Доказать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = 1 / \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}), \quad 0 < q < 1$$

(Эйлер).

K2-24.68

Доказать асимптотическое равенство

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

K2-24.69

Доказать, что

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{((2n-1)\pi/2)^2} \right).$$

произведение (см. (4)).

K2-24.70

Доказать, что: 1) бесконечное произведение $\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^x}{1+x/n}$ абсолютно сходится при всех $x \neq m, m = 0, -1, -2, \dots$;

2) $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$;

3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (Эйлер).

K2-24.71

Доказать, что $\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x/n}$, где C - постоянная Эйлера (Вейершттрасс). Указание. Воспользоваться результатом задачи 29.

K2-24.74

Доказать, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$, где p_n ходятся (Эйлер).

K2-24.75

Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$ имеет конечный не равный нулю предел. Получить отсюда формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n} (1 + \varepsilon_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Указание. $a = x_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Для нахождения значения a воспользоваться формулой Валлиса (5).

K2-24.76

Пусть функции f_n непрерывны на отрезке $[a; b]$, $|f_n(x)| \leq c_n$, $a \leq x \leq b$, $n \in N$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Доказать, что: 1) функция $F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(x))$ непрерывна на отрезке $[a; b]$; 2) если функции f_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}$$

равномерно сходится на $[a; b]$, то функция $F(x)$ также непрерывно дифференцируема на $[a; b]$ и

$$F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}.$$

A Fantastic Ramanujan Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{k+a}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{k+b}\right)^2} dx$

Solution by Gamma Digamma

Recall First Barnes Lemma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha_1 - s) \Gamma(\alpha_2 - s) \Gamma(\beta_1 + s) \Gamma(\beta_2 + s) ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1) \Gamma(\alpha_1 + \beta_2) \Gamma(\alpha_2 + \beta_1) \Gamma(\alpha_2 + \beta_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(\alpha_i + \beta_j) > 0 \text{ st. } -\operatorname{Re} \beta_j < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \alpha_i \forall i, j$$

Consider the product

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a+k}\right)^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(a+k)(a+k)}{(a+k)^2 + x^2} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(a+k)(a+k)}{(a+k+ix)(a+k-ix)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{k}\right) \left(1 + \frac{a}{k}\right)}{\left(1 + \frac{a+ix}{k}\right) \left(1 + \frac{a-ix}{k}\right)} \end{aligned}$$

Using the Weierstrass definition:

$$\Gamma(z+1) = e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{z/k}}{1 + \frac{z}{k}}$$

Set $z = a$, $z = a + ix$ & $z = a - ix$, multiply them

$$\frac{\Gamma(a+ix+1)\Gamma(a-ix+1)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a)} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-r(a+ix)}e^{-r(a-ix)}}{e^{-ra}e^{-ra}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{(a+ix)/k}e^{(a-ix)/k}}{e^{a/k}e^{a/k}} \cdot \frac{(1+\frac{a}{k})(1+\frac{a}{k})}{(1+\frac{a+ix}{k})(1+\frac{a-ix}{k})} \\
& \Rightarrow \frac{\Gamma(a+ix+1)\Gamma(a-ix+1)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{a}{k})(1+\frac{a}{k})}{(1+\frac{a+ix}{k})(1+\frac{a-ix}{k})} \\
& \Rightarrow \frac{(a+ix)\Gamma(a+ix)(a-ix)\Gamma(a-ix)}{a\Gamma(a)a\Gamma(a)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a+k}\right)^2} \\
& \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)}{\Gamma^2(a)} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a+k}\right)^2} \\
& \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)}{\Gamma^2(a)} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a+k}\right)^2} \\
& = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a+k}\right)^2}
\end{aligned}$$

Now, evaluation:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{k+a}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{k+b}\right)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a-ix)\Gamma(a+ix)}{\Gamma^2(a)} \cdot \frac{\Gamma(b+ix)\Gamma(b-ix)}{\Gamma^2(b)} dx
\end{aligned}$$

(??? special integral curve)

No poles since $\operatorname{Re}(a, b) > 0$

$$x \rightarrow ix$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+x)\Gamma(a-x)\Gamma(b+x)\Gamma(b-x)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)} \frac{dx}{i} \\
I &= \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+x)\Gamma(a-x)\Gamma(b+x)\Gamma(b-x)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)} \frac{dx}{i}
\end{aligned}$$

Use First Barnes Lemma for $\alpha_1 = \beta_1 = a$ & $\alpha_2 = \beta_2 = b$ We need $\operatorname{Re}(\alpha_i + \beta_j) > 0 \quad \forall i, j$.

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(a+a) > 0, \operatorname{Re}(b+b) > 0, \operatorname{Re}(a+b) > 0,$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2\pi}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)} \cdot \frac{\Gamma(2a)\Gamma(a+b)\Gamma(a+b)\Gamma(2b)}{\Gamma(2a+2b)} \\
&= 2\pi \frac{\beta(2a, 2b)}{\beta^2(a, b)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{k+a}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{k+b}\right)^2} dx \\
&= 2\pi \frac{\beta(2a, 2b)}{\beta^2(a, b)}
\end{aligned}$$

21.4.10 Problems about numerical solution of equations

(мб это важно, но пока пропускаю, потому что времени на это нет. итак полно всего, что нужно делать. именно так почти все и поступают, касаясь этого раздела. вычматы начну - буду готовить его!)

K1-23.19

Доказать, что уравнение $x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 5 = 0$ имеет единственный корень, и указать интервал его изоляции, длина которого не превосходит 0,1.

K1-23.20

1) Доказать, что если $4p^3 + 27q^2 > 0$, то уравнение $x^3 + px + q = 0, p, q \in R$, имеет один действительный корень, а если $4p^3 + 27q^2 < 0$, то это уравнение имеет три действительных корня; 2) при каком условии на a, b, c все корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ действительны?

K1-23.21

При каком условии на p и q все корни уравнения $x^5 - 5px^2 + 5p^2x + 2q = 0$ действительны?

K1-23.22

При каком условии на p и q все корни уравнения $x^m + px^n + q = 0$, где $m > n > 0, m, n \in N, q \neq 0, p \neq 0$, действительны?

K1-23.23

Доказать, что уравнение

$$x^{2n+1} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_nx = a_0$$

где $a_2 \in R (i = 0, 1, \dots, n)$: 1) имеет хотя бы один корень в интервале $(-2; 2)$, если $|a_0| < 2$; 2) имеет корень в интервале $(-2l; 2l)$, где $l = (|a_0|/2)^{1/(2n+1)}$ (теорема Чебышева).

K1-23.24

Указать в зависимости от значений $a \in R$ количество действительных корней уравнения:

- 1) $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$
- 2) $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$.

K1-23.25

Найти все значения $a \in R$, при которых уравнение имеет указанное число действительных корней:

- 1) $2x^3 + 13x^2 - 20x + a = 0$, один корень;
- 2) $3x^3 + 1, 5x^2 - 12x + a = 0$, один двукратный корень и один простой;
- 3) $3x^4 + 8x^3 + a = 0$, два простых корня;
- 4) $9x^4 + 14x^3 - 15x^2 + a = 0$, четыре различных корня.

K1-23.26

Доказать, что уравнение $2e^x + x^2 + 18x - 6 = 0$ имеет единственный положительный корень; указать его интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,2.

K1-23.33

Отделить действительные корни уравнения, указав интервалы изоляции, длины которых не превосходят единицы:

- 1) $x^3 + 2x - 7 = 0$;
- 2) $x^3 - 27x - 17 = 0$;
- 3) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$
- 4) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 2 = 0$
- 5) $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$
- 6) $x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ 7) $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$; 8) $x^5 + 5x^3 - 7x + 2 = 0$ 9) $x^5 + 7x^3 - 5x + 11 = 0$;

10)

$$x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 17x + 1 = 0.$$

K1-23.34

Отделить корни уравнения $\frac{p^2}{a^2+x} + \frac{q^2}{b^2+x} + \frac{r^2}{c^2+x} = 1$, где $p, q, r, a, b, c \in R, a^2 > b^2 > c^2, pqr \neq 0$.

K1-23.35

Отделить действительные корни уравнения, указав для каждого корня интервал изоляции, длина которого не превосходит 0,1:

- 1) $x - \sin 2x = 0$;
- 2) $x = 4 \cos x$;
- 3) $e^x - x - 5/4 = 0$
- 4) $2x^2 - e^{x+1} = 0$;
- 5) $x + \ln(x + 2) = 0$.

K1-23.36

Методом деления пополам решить уравнение с указанной погрешностью Δ :

- 1) $x^4 + x - 10 = 0, \Delta = 10^{-2}$;
- 2) $x^3 - 12x - 8 = 0, \Delta = 10^{-2}$;
- 3) $x^3 + x^2 - 5x - 12 = 0, \Delta = 10^{-2}$
- 4) $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0, \Delta = 10^{-3}$;
- 5) $x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0, \Delta = 10^{-3}$;
- 6) $(x - 1)^2 - 2 \sin x = 0, \Delta = 10^{-2}$; 7) $e^x = 2(1 - x)^2, \Delta = 10^{-2}$; 8) $10(x - 1) = \sin x, \Delta = 10^{-3}$; 9) $10 \ln x = x^3 - 3, \Delta = 10^{-3}$;

10)

$$xe^x = 1, \Delta = 10^{-3}.$$

21.5 Functional Analysis Introduction Tasks

(в том числе тут задачи конца Кудрявцева 3.)

21.5.1 Problems about types of convergence

(всякая мелочь неинтересная)

21.5.2 Metric Space Tasks**21.5.3 Problems about Normalized and semi-normalized spaces****21.5.4 Problems about Hilbert spaces****21.5.5 Problems about Topological Spaces - Generalized Functions**

.

21.5.6 Linear Functional and Linear Operator Normality Tasks

(какие-то тут задачи и методы есть еще)
Т.

T-.11

Найдите норму линейного функционала $l : C[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, заданного формулой $l(x) = \sum_{k=1}^n c_k x(t_k)$, где $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Т.

T-.12

Пусть $y \in C[a, b]$ и

$$l(x) = \int_a^b y(t)x(t)dt \quad \forall x \in L_1[a, b]$$

1) Найдите норму линейного функционала $l : C[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. 2) Найдите норму линейного функционала $l : L_1[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Т.

T-.13

Найдите норму линейного функционала $l : C[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, заданного формулой $l(x) = \int_0^1 x(t^\alpha) dt$, $\alpha > 0$. Т.

T-.14

Найдите норму линейного оператора $A : C[a; b] \rightarrow C[a; b]$, заданного формулой $Ax(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t)x(t_k)$, где $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$, $c_1, \dots, c_n \in C[a; b]$. Т.

T-.15

Пусть $K \in C([a, b] \times [a, b])$. Интегральный оператор Фредгольма определяется формулой

21.5.7 Tasks on the completeness of metric spaces**МФТИ.Т.1**

Исследуйте полноту пространства c_{00} финитных числовых последовательностей с нормой

$$\|x\|_{00} = \max_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$$

МФТИ.Т.2

Исследовать полноту пространства $C^1[a, b]$ - пространства непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций с нормой $\|f\|_1 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, и полноту пространства $\tilde{C}^1[a, b]$ - пространства непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

МФТИ.Т.3*

Исследовать полноту пространства c_0 - пространства всех бесконечно малых числовых последовательностей с нормой

$$\|x\|_0 = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad x = (x_1, x_2, \dots)$$

МФТИ.Т.4*

Является ли полным пространство ℓ_p в котором в качестве нормы берётся норма пространства ℓ_q при условии, что $1 \leq p < q \leq \infty$?

21.5.8 Problems about Everywhere dense sets, completeness of function systems, basis**МФТИ.Т.5**

Является ли всюду плотным

а) множество всех финитных числовых последовательностей

1) в пространстве ℓ_1 ;

2) в пространстве ℓ_2 ; 3) в пространстве ℓ_∞ ?

б) множество всех непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2[a, b]$?

- в))* множество $\left\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\right\}$ в ℓ_2 ?
- г))* множество $\left\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0\right\}$ в ℓ_2 ?

МФТИ.Т.6

- Докажите, что система степенных функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a, b]$ и $L_2[a, b]$.
- Является ли данная система функций базисом в соответствующих пространствах?

МФТИ.Т.7

- Полны ли системы функций а) $\{x^{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ б) $\{\cos(2n-1)\}_{n=1}^{\infty}$ в) $\{1, x, x^3, \dots, x^{2n-1}, \dots\}$ А) в $BC[1, 2]$ Б) в $C[0, 1]$?
- Являются ли данные системы функций базисами в соответствующих пространствах?

МФТИ.Т.8

- Полны ли системы функций а) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$ б) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ А) в $L_2[0, \pi/2]$ Б) в $C[0, \pi/2]$?
- Являются ли данные системы функций базисами в соответствующих пространствах?

МФТИ.Т.9

Полна ли в $L_2[-\pi, \pi]$ система функций, полученная из стандартной тригонометрической системы отбрасыванием константы? Является ли такая система функций базисом в $L_2[-\pi, \pi]$?

МФТИ.Т.10".

Полна ли в $L_1[-\pi, \pi]$ система функций, полученная из стандартной тригонометрической системы отбрасыванием константы? Является ли такая система функций базисом в $L_1[-\pi, \pi]$?

МФТИ.Т.11*.

Полна ли в $C[-\pi, \pi]$ система функций, полученная из стандартной тригонометрической системы отбрасыванием константы? Является ли такая система функций базисом в $C[-\pi, \pi]$?

МФТИ.Т.12*.

Полна ли в $L_2[0, \pi]$ система функций, полученная из стандартной тригонометрической системы отбрасыванием константы?

МФТИ.Т.13

Докажите, что функции Хаара, задаваемые формулами $\chi_1(t) = 1$,

$$\chi_{2^k+s}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[\frac{2s-2}{2^{k+1}}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}\right], \\ -1, & t \in \left[\frac{2s-1}{2^{k+1}}, \frac{2s}{2^{k+1}}\right], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad s \in \overline{1, 2^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

составляют ортогональный базис пространства $L_2[0, 1]$.

21.5.9 Problems about Generalized Functions**МФТИ.Т.3**

Докажите, что в $\mathcal{D}'$ справедливы равенства:

- $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{a^2+x^2} = \pi\delta(x)$
- $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{a} = \pi\delta(x)$.

Т.4

Найдите $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{ax}{(a^2+x^2)^2}$ в $\mathcal{D}'$.

МФТИ.Т.5

Упростите в $\mathcal{D}'$ выражения:

- а) $(e^x + \sin x) \delta(x)$
 б) $\left(\frac{e^x}{1+x^2} + x\right) \delta'(x)$.

МФТИ.Т.6

Найдите в $\mathcal{D}'$ первые и вторые производные:

- а) $(e^x + \sin^2 x) \operatorname{sig} nx$
 б) $|x| \cos x$.

МФТИ.Т. 7*

Найдите все функционалы $f \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющие алгебраическим уравнениям:

- а) $xf = 0$;
 б) $xf = 1$
 в) $x^2 f = 0$.

21.5.10 Problems about Fourier transform of generalized functions, applications

C.3821 : 104; 105; 113; 115; 118.

МФТИ.Т.8

Найдите преобразование Фурье в S' функций $\sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$, где параметр $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

Т.9

Докажите, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$. **Т.10°.** Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывна в точке $t \in \mathbb{R}$ и имеет финитный спектр: её преобразование Фурье $F[f](\omega) = 0$ при $|\omega| > a$. Докажите формулу Котельникова-Найквиста-Шеннона:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi k}{a}\right) \operatorname{sinc} \left[a \left(t - \frac{\pi k}{a} \right) \right], \quad \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

МФТИ.Т.11

Пусть $f \in S(\mathbb{R})$, а $F[f]$ - её преобразование Фурье. Докажите формулу суммирования Пуассона:

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[f](n)$$

Part IX

Other Topics

22 Proofs from the Book by Aigner, Ziegler

22.1 Number Theory

22.1.1 Six proofs of the infinity of primes

It is only natural that we start these notes with probably the oldest Book Proof, usually attributed to Euclid (Elements IX, 20). It shows that the sequence of primes does not end.

- Euclid's Proof. For any finite set $\{p_1, \dots, p_r\}$ of primes, consider the number $n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$. This n has a prime divisor p . But p is not one of the p_i : otherwise p would be a divisor of n and of the product $p_1 p_2 \cdots p_r$, and thus also of the difference $n - p_1 p_2 \cdots p_r = 1$, which is impossible. So a finite set $\{p_1, \dots, p_r\}$ cannot be the collection of all prime numbers.

Before we continue let us fix some notation. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ is the set of natural numbers, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ the set of integers, and $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ the set of primes.

In the following, we will exhibit various other proofs (out of a much longer list) which we hope the reader will like as much as we do. Although they use different view-points, the following basic idea is common to all of them: The natural numbers grow beyond all bounds, and every natural number $n \geq 2$ has a prime divisor. These two facts taken together force $\mathbb{P}$ to be infinite. The next proof is due to Christian Goldbach (from a letter to Leonhard Euler 1730), the third proof is apparently folklore, the fourth one is by Euler himself, the fifth proof was proposed by Harry Fürstenberg, while the last proof is due to Paul Erdős.

- Second Proof. Let us first look at the Fermat numbers $F_n = 2^{2^n} + 1$ for $n = 0, 1, 2, \dots$. We will show that any two Fermat numbers are relatively prime; hence there must be infinitely many primes. To this end, we verify the recursion

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2 \quad (n \geq 1)$$

from which our assertion follows immediately. Indeed, if m is a divisor of, say, F_k and F_n ($k < n$), then m divides 2, and hence $m = 1$ or 2. But $m = 2$ is impossible since all Fermat numbers are odd.

To prove the recursion we use induction on n . For $n = 1$ we have $F_0 = 3$ and $F_1 - 2 = 3$. With induction we now conclude

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n F_k &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k \right) F_n = (F_n - 2) F_n = \\ &= (2^{2^n} - 1) (2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2 \end{aligned}$$

□ □

$$\begin{aligned} F_0 &= 3 \\ F_1 &= 5 \\ F_2 &= 17 \\ F_3 &= 257 \\ F_4 &= 65537 \\ F_5 &= 641 \cdot 6700417 \end{aligned}$$

The first few Fermat numbers

Lagrange's theorem

If G is a finite (multiplicative) group and U is a subgroup, then $|U|$ divides $|G|$.

- Proof. Consider the binary relation

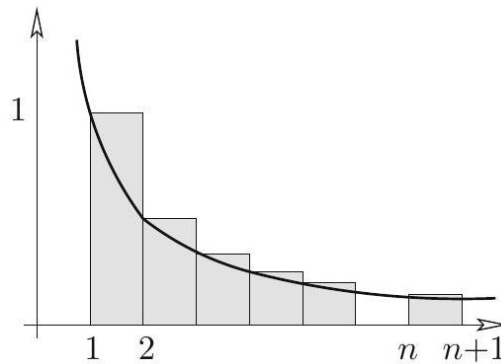
$$a \sim b : \Longleftrightarrow ba^{-1} \in U.$$

It follows from the group axioms that $\sim$ is an equivalence relation. The equivalence class containing an element a is precisely the coset

$$Ua = \{xa : x \in U\}.$$

Since clearly $|Ua| = |U|$, we find that G decomposes into equivalence classes, all of size $|U|$, and hence that $|U|$ divides $|G|$.

In the special case when U is a cyclic subgroup $\{a, a^2, \dots, a^m\}$ we find that m (the smallest positive integer such that $a^m = 1$, called the order of a) divides the size $|G|$ of the group. In particular, we have $a^{|G|} = 1$.



Steps above the function $f(t) = \frac{1}{t}$

- Third Proof. Suppose $\mathbb{P}$ is finite and p is the largest prime. We consider the so-called Mersenne number $2^p - 1$ and show that any prime factor q of $2^p - 1$ is bigger than p , which will yield the desired conclusion. Let q be a prime dividing $2^p - 1$, so we have $2^p \equiv 1 \pmod{q}$. Since p is prime, this means that the element 2 has order p in the multiplicative group $\mathbb{Z}_q \setminus \{0\}$ of the field $\mathbb{Z}_q$. This group has $q - 1$ elements. By Lagrange's theorem (see the box) we know that the order of every element divides the size of the group, that is, we have $p \mid q - 1$, and hence $p < q$.

Now let us look at a proof that uses elementary calculus.

- Fourth Proof. Let $\pi(x) := \#\{p \leq x : p \in \mathbb{P}\}$ be the number of primes that are less than or equal to the real number x . We number the primes $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ in increasing order. Consider the natural logarithm $\log x$, defined as $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Now we compare the area below the graph of $f(t) = \frac{1}{t}$ with an upper step function. (See also the appendix on page 12 for this method.) Thus for $n \leq x < n + 1$ we have

$$\begin{aligned} \log x &\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \\ &\leq \sum \frac{1}{m}, \text{ where the sum extends over all } m \in \mathbb{N} \text{ which have} \\ &\quad \text{only prime divisors } p \leq x. \end{aligned}$$

Since every such m can be written in a unique way as a product of the form $\prod_{p \leq x} p^{k_p}$, we see that the last sum is equal to

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k} \right)$$

The inner sum is a geometric series with ratio $\frac{1}{p}$, hence

$$\log x \leq \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \frac{p}{p-1} = \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{p_k}{p_k-1}.$$

Now clearly $p_k \geq k+1$, and thus

$$\frac{p_k}{p_k-1} = 1 + \frac{1}{p_k-1} \leq 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$$

and therefore

$$\log x \leq \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{k+1}{k} = \pi(x) + 1$$

Everybody knows that $\log x$ is not bounded, so we conclude that $\pi(x)$ is unbounded as well, and so there are infinitely many primes.

- Fifth Proof. After analysis it's topology now! Consider the following curious topology on the set $\mathbb{Z}$ of integers. For $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, we set

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Each set $N_{a,b}$ is a two-way infinite arithmetic progression. Now call a set $O \subseteq \mathbb{Z}$ open if either O is empty, or if to every $a \in O$ there exists some $b > 0$ with $N_{a,b} \subseteq O$. Clearly, the union of open sets is open again. If O_1, O_2 are open, and $a \in O_1 \cap O_2$ with $N_{a,b_1} \subseteq O_1$ and $N_{a,b_2} \subseteq O_2$, then $a \in N_{a,b_1 b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$. So we conclude that any finite intersection of open sets is again open. So, this family of open sets induces a bona fide topology on $\mathbb{Z}$.

Let us note two facts:

- (A) Any nonempty open set is infinite.
- (B) Any set $N_{a,b}$ is closed as well.

Indeed, the first fact follows from the definition. For the second we observe

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b},$$

which proves that $N_{a,b}$ is the complement of an open set and hence closed.

So far the primes have not yet entered the picture - but here they come. Since any number $n \neq 1, -1$ has a prime divisor p , and hence is contained in $N_{0,p}$, we conclude

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}.$$

Now if $\mathbb{P}$ were finite, then $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ would be a finite union of closed sets (by (B)), and hence closed. Consequently, $\{1, -1\}$ would be an open set, in violation of (A). $\square$

- Sixth Proof. Our final proof goes a considerable step further and demonstrates not only that there are infinitely many primes, but also that the series $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ diverges. The first proof of this important result was given by Euler (and is interesting in its own right), but our proof, devised by Erdős, is of compelling beauty.

Let $p_1, p_2, p_3, \dots$ be the sequence of primes in increasing order, and assume that $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ converges. Then there must be a natural number k such that $\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$. Let us call $p_1, \dots, p_k$ the small primes, and $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots$ the big primes. For an arbitrary natural number N we therefore find

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}. \quad (1)$$



"Pitching flat rocks, infinitely"

Let N_b be the number of positive integers $n \leq N$ which are divisible by at least one big prime, and N_s the number of positive integers $n \leq N$ which have only small prime divisors. We are going to show that for a suitable N

$$N_b + N_s < N,$$

which will be our desired contradiction, since by definition $N_b + N_s$ would have to be equal to N .

To estimate N_b note that $\left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor$ counts the positive integers $n \leq N$ which are multiples of p_i . Hence by (1) we obtain

$$N_b \leq \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2}. \quad (2)$$

Let us now look at N_s . We write every $n \leq N$ which has only small prime divisors in the form $n = a_n b_n^2$, where a_n is the square-free part. Every a_n is thus a product of different small primes, and we conclude that there are precisely 2^k different square-free parts. Furthermore, as $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$, we find that there are at most $\sqrt{N}$ different square parts, and so

$$N_s \leq 2^k \sqrt{N}.$$

Since (2) holds for any N , it remains to find a number N with $2^k \sqrt{N} \leq \frac{N}{2}$ or $2^{k+1} \leq \sqrt{N}$, and for this $N = 2^{2k+2}$ will do. $\square$

Appendix: Infinitely many more proofs



Issai Schur

Our collection of proofs for the infinitude of primes contains several other old and new treasures, but there is one of very recent vintage that is quite different and deserves special mention. Let us try to identify sequences S of integers such that the set of primes $\mathbb{P}_S$ that divide some member of S is infinite. Every such sequence would then provide its own proof for the infinity of primes. The Fermat numbers F_n studied in the second proof form such a sequence, while the powers of 2 don't. Many more examples are provided by a theorem of Issai Schur, who showed in 1912 that for every nonconstant polynomial $p(x)$ with integer coefficients the set of all nonzero values $\{p(n) \neq 0 : n \in \mathbb{N}\}$ is such a sequence. For the polynomial $p(x) = x$, Schur's result gives us Euclid's theorem. As another example, for $p(x) = x^2 + 1$ we get that the "squares plus one" contain infinitely many different prime factors. The following result due to Christian Elsholtz is a real gem: It generalizes Schur's theorem, the proof is just clever counting, and it is in a certain sense best possible.

Let $S = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ be a sequence of integers. We say that

- S is almost injective if every value occurs at most c times for some constant c ,
- S is of subexponential growth if $|s_n| \leq 2^{2^{f(n)}}$ for all n , where $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ is a function with $\frac{f(n)}{\log_2 n} \rightarrow 0$.

Theorem. If the sequence $S = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ is almost injective and of subexponential growth, then the set $\mathbb{P}_S$ of primes that divide some member of S is infinite.

- **Proof.** We may assume that $f(n)$ is monotonely increasing. Otherwise, replace $f(n)$ by $F(n) = \max_{i \leq n} f(i)$; you can easily check that with this $F(n)$ the sequence S again satisfies the subexponential growth condition.

Let us suppose for a contradiction that $\mathbb{P}_S = \{p_1, \dots, p_k\}$ is finite. For $n \in \mathbb{N}$, let

$$s_n = \varepsilon_n p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad \text{with } \varepsilon_n \in \{1, 0, -1\}, \alpha_i \geq 0$$

where the $\alpha_i = \alpha_i(n)$ depend on n . (For $s_n = 0$ we can put $\alpha_i = 0$ for all i .) Then

$$2^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} \leq |s_n| \leq 2^{2^{f(n)}} \quad \text{for } s_n \neq 0$$

and thus by taking the binary logarithm

$$0 \leq \alpha_i \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \leq 2^{f(n)} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k.$$

Hence there are not more than $2^{f(n)} + 1$ different possible values for each $\alpha_i = \alpha_i(n)$. Since f is monotone, this gives a first estimate

$$\# \{ \text{distinct } |s_n| \neq 0 \text{ for } n \leq N \} \leq \left(2^{f(N)} + 1 \right)^k \leq 2^{(f(N)+1)k}$$

On the other hand, since S is almost injective only c terms in the sequence can be equal to 0, and each nonzero absolute value can occur at most $2c$ times, so we get the lower estimate

$$\# \{ \text{distinct } |s_n| \neq 0 \text{ for } n \leq N \} \geq \frac{N - c}{2c}$$

Altogether, this gives

$$\frac{N - c}{2c} \leq 2^{k(f(N)+1)}$$

Taking again the logarithm with base 2 on both sides, we obtain

$$\log_2(N - c) - \log_2(2c) \leq k(f(N) + 1) \quad \text{for all } N.$$

This, however, is plainly false for large N , as k and c are constants, so $\frac{\log_2(N-c)}{\log_2 N}$ goes to 1 for $N \rightarrow \infty$, while $\frac{f(N)}{\log_2 N}$ goes to 0.

In place of 2 we could take any other base larger than 1; for example, $|s_n| \leq e^{e^{f(n)}}$ leads to the same class of sequences.

Can one relax the conditions? At least neither of them is superfluous. That we need the "almost injective" condition can be seen from sequences S like $(2, 2, 2, \dots)$ or $(1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 8, \dots)$, which satisfy the growth condition, while $\mathbb{P}_S = \{2\}$ is finite.

As for the subexponential growth condition, let us remark that it cannot be weakened to a requirement of the form $\frac{f(n)}{\log_2 n} \leq \varepsilon$ for a fixed $\varepsilon > 0$. To see this, one analyzes the sequence of all numbers of the form $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ arranged in increasing order, where $p_1, \dots, p_k$ are fixed primes and k is large. This sequence S grows roughly like $2^{2^{f(n)}}$ with $\frac{f(n)}{\log_2 n} \approx \frac{1}{k}$, while $\mathbb{P}_S$ is finite by construction.

References

- [1] B. Artmann: Euclid - The Creation of Mathematics, Springer-Verlag, New York 1999.
- [2] C. Elsholtz: Prime divisors of thin sequences, Amer. Math. Monthly 119 (2012), 331-333.
- [3] P. Erdős: Über die Reihe $\sum \frac{1}{p}$, Mathematica, Zutphen B 7 (1938), 1-2.
- [4] L. Euler: Introductio in Analysin Infinitorum, Tomus Primus, Lausanne 1748; Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 8.
- [5] H. Fürstenberg: On the infinitude of primes, Amer. Math. Monthly 62 (1955), 353.
- [6] I. Schur: Über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einigen speziellen arithmetischen Progressionen, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft 11 (1912), 40-50.

We have seen that the sequence of prime numbers $2, 3, 5, 7, \dots$ is infinite. To see that the size of its gaps is not bounded, let $N := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p$ denote the product of all prime numbers that are smaller than $k + 2$, and note that none of the k numbers

$$N + 2, N + 3, N + 4, \dots, N + k, N + (k + 1)$$

is prime, since for $2 \leq i \leq k + 1$ we know that i has a prime factor that is smaller than $k + 2$, and this factor also divides N , and hence also $N + i$. With this recipe, we find, for example, for $k = 10$ that none of the ten numbers

$$2312, 2313, 2314, \dots, 2321$$

is prime.

But there are also upper bounds for the gaps in the sequence of prime numbers. A famous bound states that "the gap to the next prime cannot be larger than the number we start our search at." This is known as Bertrand's postulate, since it was conjectured and verified empirically for $n < 3000000$ by Joseph Bertrand. It was first proved for all n by Pafnuty Chebyshev in 1850. A much simpler proof was given by the Indian genius Ramanujan. Our Book Proof is by Paul Erdős: it is taken from Erdős first published paper, which appeared in 1932, when Erdős was 19.

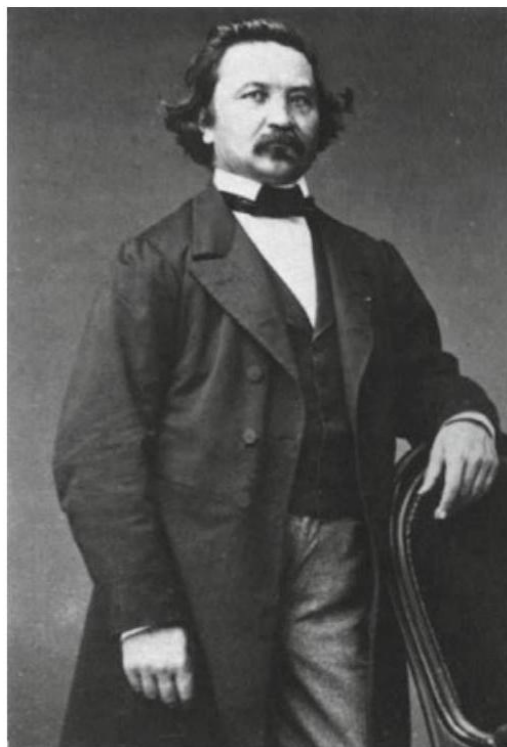
22.1.2 Bertrand's postulate

For every $n \geq 1$, there is some prime number p with $n < p \leq 2n$.

- Proof. We will estimate the size of the binomial coefficient $\binom{2n}{n}$ carefully enough to see that if it didn't have any prime factors in the range $n < p \leq 2n$, then it would be "too small." Our argument is in five steps.
 (1) We first prove Bertrand's postulate for $n \leq 511$. For this one does not need to check 511 cases: it suffices (this is "Landau's trick") to check that

2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 521

is a sequence of prime numbers, where each is smaller than twice the previous one. Hence every interval $\{y : n < y \leq 2n\}$, with $n \leq 511$, contains one of these 11 primes.



Joseph Bertrand

Beweis eines Satzes von Tschebyschef.

Von P. Erdős in Budapest.

Für den zuerst von Tschebyschef bewiesenen Satz, laut dessen es zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer zweifachen stets wenigstens eine Primzahl gibt, liegen in der Literatur mehrere Beweise vor. Als einfachsten kann man ohne Zweifel den Beweis von Ramanujan') bezeichnen. In seinem Werk Vorlesungen über Zahlentheorie (Leipzig, 1927), Band I, S. 66-68 gibt Herr Landau einen besonders einfachen Beweis für einen Satz über die Anzahl der Primzahlen unter

einer gegebenen Grenze, aus welchem unmittelbar folgt, daß für ein geeignetes q zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer q -fachen stets eine Primzahl liegt. Für die augenblicklichen Zwecke des Herm Landau kommt es nicht auf die numerische Bestimmung der im Beweis auftretenden Konstanten an; man überzeugt sich aber durch eine numerische Verfolgung des Beweises leicht, daß q jedenfalls größer als 2 ausfällt.

In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß man durch eine Verschärfung der dem Landauschen Beweis zugrunde liegenden Ideen zu einem Beweis des oben erwähnten Tschebyscheffschen Satzes gelangen kann, der - wie mir scheint - an Einfachheit nicht hinter dem Ramanujanischen Beweis steht. Griechische Buchstaben sollen im Folgenden durchwegs positive, lateinische Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen; die Bezeichnung p ist für Primzahlen vorbehalten.

1. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

¹⁾) Sis. Ramanujan, A Proof of Bertrand's Postulate, Journal of the Indian Mathematical Society, 11 (1919), S. 181-182 - Collected Papers of Shintvasa Ramanujan (Cambridge, 1977), S. 208-200.

Handwritten notes showing a proof of Bertrand's Postulate. The notes include the inequality $\prod_{p \leq n} p < 4^n$, the binomial coefficient $\binom{2m+1}{m} < 4^m$, and the inequality $\prod_{p \leq 2m+1} p < \binom{2m+1}{m} \prod_{p \leq m+1} p$. The notes are signed 'Gandy' and 'Wright'.

Legendre's theorem

The number $n!$ contains the prime factor p exactly

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

times.

- Proof. Exactly $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ of the factors of $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ are divisible by p , which accounts for $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ p -factors. Next, $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ of the factors of $n!$ are even divisible by p^2 , which accounts for the next $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ prime factors p of $n!$, etc.
- (2) Next we prove that

$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \quad \text{for all real } x \geq 2 \quad (1)$$

where our notation - here and in the following - is meant to imply that the product is taken over all prime numbers $p \leq x$. The proof that we present for this fact uses induction on the number of these primes. It is not from Erdős' original paper, but it is also due to Erdős (see the margin), and it is a true Book Proof. First we note that if q is the largest prime with $q \leq x$, then

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \quad \text{and} \quad 4^{q-1} \leq 4^{x-1}$$

Thus it suffices to check (1) for the case where $x = q$ is a prime number. For $q = 2$ we get " $2 \leq 4$," so we proceed to consider odd primes $q = 2m + 1$. (Here we may assume, by induction, that (1) is valid for all integers x in the set $\{2, 3, \dots, 2m\}$.) For $q = 2m + 1$ we split the product and compute

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m \binom{2m+1}{m} \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}.$$

All the pieces of this "one-line computation" are easy to see. In fact,

$$\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m$$

holds by induction. The inequality

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$$

follows from the observation that $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ is an integer, where the primes that we consider all are factors of the numerator $(2m+1)!$, but not of the denominator $m!(m+1)!$. Finally

$$\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$$

holds since

$$\binom{2m+1}{m} \text{ and } \binom{2m+1}{m+1}$$

are two (equal!) summands that appear in

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}.$$

(3) From Legendre's theorem (see the box) we get that $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ contains the prime factor p exactly

$$\sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

times. Here each summand is at most 1, since it satisfies

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2 \left(\frac{n}{p^k} - 1 \right) = 2$$

and it is an integer. Furthermore the summands vanish whenever $p^k > 2n$. Thus $\binom{2n}{n}$ contains p exactly

$$\sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \leq \max \{r : p^r \leq 2n\}$$

times. Hence the largest power of p that divides $\binom{2n}{n}$ is not larger than $2n$. In particular, primes $p > \sqrt{2n}$ appear at most once in $\binom{2n}{n}$.

Furthermore - and this, according to Erdős, is the key fact for his proof - primes p that satisfy $\frac{2}{3}n < p \leq n$ do not divide $\binom{2n}{n}$ at all! Indeed, $3p > 2n$ implies (for $n \geq 3$, and hence $p \geq 3$) that p and $2p$ are the only multiples of p that appear as factors in the numerator of $\frac{(2n)!}{n!n!}$, while we get two p -factors in the denominator.

(4) Now we are ready to estimate $\binom{2n}{n}$, benefitting from a suggestion by Raimund Seidel, which nicely improves Erdős' original argument. For $n \geq 3$, using an estimate from page 14 for the lower bound, we get

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p.$$

Now, there are no more than $\sqrt{2n}$ primes in the first factor; hence using (1) for the second factor and letting $P(n)$ denote the number of primes between n and $2n$ we get

$$\frac{4^n}{2n} < \left((2n)^{\sqrt{2n}} \right) \cdot \left(4^{\frac{2}{3}n} \right) \cdot (2n)^{P(n)}$$

that is,

$$4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\sqrt{2n}+1+P(n)} \quad (2)$$

(5) Taking the logarithm to base 2, the last inequality is turned into

$$P(n) > \frac{2n}{3 \log_2(2n)} - (\sqrt{2n} + 1) \quad (3)$$

It remains to verify that the right-hand side of (3) is positive for n large enough. We show that this is the case for $n = 2^9 = 512$ (actually, it holds from $n = 468$ onward). By writing $2n - 1 = (\sqrt{2n} - 1)(\sqrt{2n} + 1)$ and cancelling the $(\sqrt{2n} + 1)$ -factor it suffices to show

$$\sqrt{2n} - 1 > 3 \log_2(2n) \quad \text{for } n \geq 2^9 \quad (4)$$

For $n = 2^9$, (4) becomes $31 > 30$, and comparing the derivatives $(\sqrt{x} - 1)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ and $(3 \log_2 x)' = \frac{3}{\log 2} \frac{1}{x}$ we see that $\sqrt{x} - 1$ grows faster than $3 \log_2 x$ for $x > \left(\frac{6}{\log 2} \right)^2 \approx 75$ and thus certainly for $x \geq 2^{10} = 1024$.

One can extract even more from this type of estimates: Comparing the derivatives of both sides, one can sharpen (4) to

$$\sqrt{2n} - 1 \geq \frac{21}{4} \log_2(2n) \quad \text{for } n \geq 2^{11}$$

which with a little arithmetic and (3) implies

$$P(n) \geq \frac{2}{7} \frac{n}{\log_2(2n)}.$$

This is not that bad an estimate: the "true" number of primes in this range is roughly $n / \log n$. This follows from the "prime number theorem," which says that the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \leq n : p \text{ is prime}\}}{n / \log n}$$

exists, and equals 1. This famous result was first proved by Hadamard and de la Vallée-Poussin in 1896; Selberg and Erdős found an elementary proof (without complex analysis tools,

but still long and involved) in 1948.

On the prime number theorem itself the final word, it seems, is still not in: for example a proof of the Riemann hypothesis (see page 64), one of the major unsolved open problems in mathematics, would also give a substantial improvement for the estimates of the prime number theorem. But also for Bertrand's postulate, one could expect dramatic improvements. In fact, the following is a famous unsolved problem:

Is there always a prime between n^2 and $(n+1)^2$?

For additional information see [3, p. 19] and [4, pp. 248, 257].

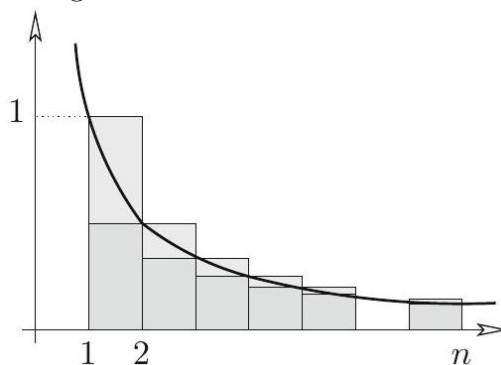
Appendix: Some estimates

Estimating via integrals

There is a very simple-but-effective method of estimating sums by integrals (as already encountered on page 4). For estimating the harmonic numbers

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

we draw the figure in the margin and derive from it



$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{t} dt = \log n$$

by comparing the area below the graph of $f(t) = \frac{1}{t}$ ($1 \leq t \leq n$) with the area of the dark shaded rectangles, and

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{t} dt = \log n$$

by comparing with the area of the large rectangles (including the lightly shaded parts). Taken together, this yields

$$\log n + \frac{1}{n} < H_n < \log n + 1$$

In particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n \rightarrow \infty$, and the order of growth of H_n is given by $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\log n} = 1$. But much better estimates are known (see [2]), such as

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

where $\gamma \approx 0.5772$ is "Euler's constant."

Estimating factorials - Stirling's formula

The same method applied to

$$\log(n!) = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n = \sum_{k=2}^n \log k$$

yields

$$\log((n-1)!) < \int_1^n \log t dt < \log(n!)$$

where the integral is easily computed:

$$\int_1^n \log t dt = [t \log t - t]_1^n = n \log n - n + 1$$

Thus we get a lower estimate on $n!$

$$n! > e^{n \log n - n + 1} = e \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

and at the same time an upper estimate

$$n! = n(n-1)! < n e^{n \log n - n + 1} = en \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Here a more careful analysis is needed to get the asymptotics of $n!$, as given by Stirling's formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

And again there are more precise versions available, such as

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{5140n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

Estimating binomial coefficients

Just from the definition of the binomial coefficients $\binom{n}{k}$ as the number of k -subsets of an n -set, we know that the sequence $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ of binomial coefficients

Here $O\left(\frac{1}{n^6}\right)$ denotes a function $f(n)$ such that $f(n) \leq c \frac{1}{n^6}$ holds for some constant c .

Here $f(n) \sim g(n)$ means that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
 \end{array}$$

Pascal's triangle

- sums to $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- is symmetric: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

From the functional equation $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$ one easily finds that for every n the binomial coefficients $\binom{n}{k}$ form a sequence that is symmetric and unimodal: it increases towards the middle, so that the middle binomial coefficients are the largest ones in the sequence:

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1.$$

Here $\lfloor x \rfloor$ resp. $\lceil x \rceil$ denotes the number x rounded down resp. rounded up to the nearest integer.

From the asymptotic formulas for the factorials mentioned above one can obtain very precise estimates for the sizes of binomial coefficients. However, we will only need very weak and simple estimates in this book, such as the following: $\binom{n}{k} \leq 2^n$ for all k , while for $n \geq 2$ we have

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq \frac{2^n}{n},$$

with equality only for $n = 2$. In particular, for $n \geq 1$,

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$$

This holds since $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, a middle binomial coefficient, is the largest entry in the sequence $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$, whose sum is 2^n , and whose average is thus $\frac{2^n}{n}$. On the other hand, we note the upper bound for binomial coefficients

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}},$$

which is a reasonably good estimate for the "small" binomial coefficients at the tails of the sequence, when n is large (compared to k).

References

- [1] P. Erdős: Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Sci. Math. (Szeged) 5 (1930-32), 194-198.
- [2] R. L. Graham, D. E. Knuth & O. Patashnik: Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science, Addison-Wesley, Reading MA 1989.
- [3] G. H. Hardy & E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth edition, Oxford University Press 1979.
- [4] P. Ribenboim: The New Book of Prime Number Records, Springer-Verlag, New York 1989.

22.1.3 Binomial coefficients are (almost) never powers

There is an epilogue to Bertrand's postulate which leads to a beautiful result on binomial coefficients. In 1892 Sylvester strengthened Bertrand's postulate in the following way:

If $n \geq 2k$, then at least one of the numbers $n, n-1, \dots, n-k+1$ has a prime divisor p greater than k .

Note that for $n = 2k$ we obtain precisely Bertrand's postulate. In 1934, Erdős gave a short and elementary Book Proof of Sylvester's result, running along the lines of his proof of Bertrand's postulate. There is an equivalent way of stating Sylvester's theorem:

The binomial coefficient

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \quad (n \geq 2k)$$

always has a prime factor $p > k$.

With this observation in mind, we turn to another one of Erdős' jewels:

When is $\binom{n}{k}$ equal to a power m^ℓ ?

The case $k = \ell = 2$ leads to a classical topic. Multiplying $\binom{n}{2} = m^2$ by 8 and rearranging terms gives $(2n-1)^2 - 2(2m)^2 = 1$, which is a special case of Pell's equation, $x^2 - 2y^2 = 1$. One learns in number theory that this equation has infinitely many positive solutions (x_k, y_k) , which are given by $x_k + y_k\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k$ for $k \geq 1$. The smallest examples are $(x_1, y_1) = (3, 2)$, $(x_2, y_2) = (17, 12)$, and $(x_3, y_3) = (99, 70)$, yielding $\binom{2}{2} = 1^2$, $\binom{9}{2} = 6^2$, and $\binom{50}{2} = 35^2$. For $k = 2$ and $\ell > 2$ there are no further solutions, and for $k = 3$ it is known that $\binom{n}{3} = m^\ell$ has the unique solution $n = 50, m = 140, \ell = 2$, see Györy [3]. But now we are at the end of the line. For $k \geq 4$ and any $\ell \geq 2$ no solutions exist, and this is what Erdős proved by an ingenious argument.

Theorem. The equation $\binom{n}{k} = m^\ell$ has no integer solutions with $\ell \geq 2$ and $4 \leq k \leq n-4$.

- **Proof.** Note first that we may assume $n \geq 2k$ because of $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Suppose the theorem is false, and that $\binom{n}{k} = m^\ell$. The proof, by contradiction, proceeds in the following four steps.

(1) By Sylvester's theorem, there is a prime factor p of $\binom{n}{k}$ greater than k , hence p^ℓ divides $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Clearly, only one of the factors $n-i$ can be a multiple of any such $p > k$, and we conclude $p^\ell \mid n-i$, and therefore

$$n \geq p^\ell > k^\ell \geq k^2.$$

(2) Consider any factor $n-j$ of the numerator and write it in the form $n-j = a_j m_j^\ell$, where a_j is not divisible by any nontrivial ℓ -th power. We note by (1) that a_j has only prime divisors less than or equal to k . We want to show next that $a_i \neq a_j$ for $i \neq j$. Assume to the contrary that $a_i = a_j$ for some $i < j$. Then $m_i \geq m_j + 1$ and

$$\begin{aligned} k &> (n-i) - (n-j) = a_j (m_i^\ell - m_j^\ell) \geq a_j ((m_j+1)^\ell - m_j^\ell) \\ &> a_j \ell m_j^{\ell-1} \geq \ell (a_j m_j^\ell)^{1/2} \geq \ell (n-k+1)^{1/2} \\ &\geq \ell \left(\frac{n}{2} + 1\right)^{1/2} > n^{1/2} \end{aligned}$$

which contradicts $n > k^2$ from above.

(3) Next we prove that the a_i 's are the integers $1, 2, \dots, k$ in some order. (According to Erdős, this is the crux of the proof.) Since we already know that they are all distinct, it suffices to prove that

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1} \text{ divides } k!.$$

Substituting $n-j = a_j m_j^\ell$ into the equation $\binom{n}{k} = m^\ell$, we obtain

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1} (m_0 m_1 \cdots m_{k-1})^\ell = k! m^\ell.$$

Cancelling the common factors of $m_0 \cdots m_{k-1}$ and m yields

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1} u^\ell = k! v^\ell$$

with $\gcd(u, v) = 1$. It remains to show that $v = 1$. If not, then v contains a prime divisor p . Since $\gcd(u, v) = 1$, p must be a prime divisor of $a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$ and hence is less than or equal to k . By the theorem of Legendre (see page 8) we know that $k!$ contains p to the power $\sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor$. We now estimate the exponent of p in $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Let i be a positive integer, and let $b_1 < b_2 < \cdots < b_s$ be the multiples of p^i among $n, n-1, \dots, n-k+1$. Then $b_s = b_1 + (s-1)p^i$ and hence

$$(s-1)p^i = b_s - b_1 \leq n - (n-k+1) = k-1,$$

which implies

$$s \leq \left\lfloor \frac{k-1}{p^i} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1$$

So for each i the number of multiples of p^i among $n, \dots, n-k+1$, and hence among the a_j 's, is bounded by $\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1$. This implies that the exponent of p in $a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$ is at most

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} \left(\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1 \right)$$

with the reasoning that we used for Legendre's theorem in Chapter 2. The only difference is that this time the sum stops at $i = \ell - 1$, since the a_j 's contain no ℓ -th powers.

Taking both counts together, we find that the exponent of p in v^ℓ is at most

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} \left(\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1 \right) - \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor \leq \ell - 1$$

and we have our desired contradiction, since v^ℓ is an ℓ -th power.

This suffices already to settle the case $\ell = 2$. Indeed, since $k \geq 4$ one of the a_i 's must be equal to 4, but the a_i 's contain no squares. So let us now assume that $\ell \geq 3$.

(4) Since $k \geq 4$, we must have $a_{i_1} = 1, a_{i_2} = 2, a_{i_3} = 4$ for some i_1, i_2, i_3 , that is,

$$n - i_1 = m_1^\ell, \quad n - i_2 = 2m_2^\ell, \quad n - i_3 = 4m_3^\ell.$$

We claim that $(n - i_2)^2 \neq (n - i_1)(n - i_3)$. If not, put $b = n - i_2$ and $n - i_1 = b - x, n - i_3 = b + y$, where $0 < |x|, |y| < k$. Hence

$$b^2 = (b - x)(b + y) \quad \text{or} \quad (y - x)b = xy$$

where $x = y$ is plainly impossible. Now we have by part (1)

$$|xy| = b|y - x| \geq b > n - k > (k - 1)^2 \geq |xy|$$

which is absurd.

So we have $m_2^2 \neq m_1 m_3$, where we assume $m_2^2 > m_1 m_3$ (the other case being analogous), and proceed to our last chains of inequalities. We obtain

$$\begin{aligned} 2(k-1)n &> n^2 - (n-k+1)^2 > (n-i_2)^2 - (n-i_1)(n-i_3) \\ &= 4[m_2^{2\ell} - (m_1 m_3)^\ell] \geq 4[(m_1 m_3 + 1)^\ell - (m_1 m_3)^\ell] \\ &\geq 4\ell m_1^{\ell-1} m_3^{\ell-1} \end{aligned}$$

Since $\ell \geq 3$ and $n > k^\ell \geq k^3 > 6k$, this yields

$$\begin{aligned} 2(k-1)n m_1 m_3 &> 4\ell m_1^\ell m_3^\ell = \ell(n-i_1)(n-i_3) \\ &> \ell(n-k+1)^2 > 3\left(n - \frac{n}{6}\right)^2 > 2n^2 \end{aligned}$$

We see that our analysis so far agrees with $\binom{50}{3} = 140^2$, as

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

$$49 = 1 \cdot 7^2$$

$$48 = 3 \cdot 4^2$$

and $5 \cdot 7 \cdot 4 = 140$.

Now since $m_i \leq n^{1/\ell} \leq n^{1/3}$ we finally obtain

$$kn^{2/3} \geq km_1 m_3 > (k-1)m_1 m_3 > n$$

or $k^3 > n$. With this contradiction, the proof is complete.

References

- [1] P. Erdős: A theorem of Sylvester and Schur, J. London Math. Soc. 9 (1934), 282-288.
- [2] P. Erdős: On a diophantine equation, J. London Math. Soc. 26 (1951), 176-178.
- [3] K. Györy: On the diophantine equation $\binom{n}{k} = x^l$, Acta Arithmetica 80 (1997), 289-295.
- [4] J. J. Sylvester: On arithmetical series, Messenger of Math. 21 (1892), 1-19, 87-120; Collected Mathematical Papers Vol. 4, 1912, 687-731.

22.1.4 Representing numbers as sums of two squares

Which numbers can be written as sums of two squares?

This question is as old as number theory, and its solution is a classic in the field. The "hard" part of the solution is to see that every prime number of the form $4m + 1$ is a sum of two squares. G. H. Hardy writes that this two square theorem of Fermat "is ranked, very justly, as one of the finest in arithmetic." Nevertheless, one of our Book Proofs below is quite recent.

Let's start with some "warm-ups." First, we need to distinguish between the prime $p = 2$, the primes of the form $p = 4m + 1$, and the primes of the form $p = 4m + 3$. Every prime number belongs to exactly one of these three classes. At this point we may note (using a method "à la Euclid") that there are infinitely many primes of the form $4m + 3$. In fact, if there were only finitely many, then we could take p_k to be the largest prime of this form. Setting

$$N_k := 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k - 1$$

(where $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ denotes the sequence of all primes), we find that N_k is congruent to $3 \pmod{4}$, so it must have a prime factor of the form $4m + 3$, and this prime factor is larger than p_k – contradiction.

Our first lemma characterizes the primes for which -1 is a square in the field $\mathbb{Z}_p$ (which is reviewed in the box on the next page). It will also give us a quick way to derive that there are infinitely many primes of the form $4m + 1$.

Lemma 1. For primes $p = 4m + 1$ the equation $s^2 \equiv -1 \pmod{p}$ has two solutions $s \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, for $p = 2$ there is one such solution, while for primes of the form $p = 4m + 3$ there is no solution.

- **Proof.** For $p = 2$ take $s = 1$. For odd p , we construct the equivalence relation on $\{1, 2, \dots, p-1\}$ that is generated by identifying every element with its additive inverse and with its multiplicative inverse in $\mathbb{Z}_p$. Thus the "general" equivalence classes will contain four elements

$$\{x, -x, \bar{x}, -\bar{x}\}$$

since such a 4-element set contains both inverses for all its elements. However, there are smaller equivalence classes if some of the four numbers are not distinct:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 + 0^2 \\ 2 &= 1^2 + 1^2 \\ 3 &= \\ 4 &= 2^2 + 0^2 \\ 5 &= 2^2 + 1^2 \\ 6 &= \\ 7 &= \\ 8 &= 2^2 + 2^2 \\ 9 &= 3^2 + \\ 10 &= 3^2 \\ 11 &= \end{aligned}$$

Pierre de Fermat

For $p = 11$ the partition is $\{1, 10\}, \{2, 9, 6, 5\}, \{3, 8, 4, 7\}$; for $p = 13$ it is $\{1, 12\}, \{2, 11, 7, 6\}, \{3, 10, 9, 4\}, \{5, 8\}$: the pair $\{5, 8\}$ yields the two solutions of $s^2 \equiv -1 \pmod{13}$.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Addition and multiplication in $\mathbb{Z}_5$

- $x \equiv -x$ is impossible for odd p .
- $x \equiv \bar{x}$ is equivalent to $x^2 \equiv 1$. This has two solutions, namely $x = 1$ and $x = p - 1$, leading to the equivalence class $\{1, p - 1\}$ of size 2.
- $x \equiv -\bar{x}$ is equivalent to $x^2 \equiv -1$. This equation may have no solution or two distinct solutions $x_0, p - x_0$: in this case the equivalence class is $\{x_0, p - x_0\}$.

The set $\{1, 2, \dots, p - 1\}$ has $p - 1$ elements, and we have partitioned it into quadruples (equivalence classes of size 4), plus one or two pairs (equivalence classes of size 2). For $p - 1 = 4m + 2$ we find that there is only the one pair $\{1, p - 1\}$, the rest is quadruples, and thus $s^2 \equiv -1 \pmod{p}$ has no solution. For $p - 1 = 4m$ there has to be the second pair, and this contains the two solutions of $s^2 \equiv -1$ that we were looking for.

Lemma 1 says that every odd prime dividing a number $M^2 + 1$ must be of the form $4m + 1$. This implies that there are infinitely many primes of this form: Otherwise, look at $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots q_k)^2 + 1$, where q_k is the largest such prime. The same reasoning as above yields a contradiction.

Prime fields

If p is a prime, then the set $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p - 1\}$ with addition and multiplication defined "modulo p " forms a finite field. We will need the following simple properties:

- For $x \in \mathbb{Z}_p, x \neq 0$, the additive inverse (for which we usually write $-x$) is given by $p - x \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$. If $p > 2$, then x and $-x$ are different elements of $\mathbb{Z}_p$.
- Each $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ has a unique multiplicative inverse $\bar{x} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, with $x\bar{x} \equiv 1 \pmod{p}$. The definition of primes implies that the map $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p, z \mapsto xz$ is injective for $x \neq 0$. Thus on the finite set $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ it must be surjective as well, and hence for each x there is a unique $\bar{x} \neq 0$ with $x\bar{x} \equiv 1 \pmod{p}$.
- The squares $0^2, 1^2, 2^2, \dots, h^2$ define different elements of $\mathbb{Z}_p$, for $h = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$. This is since $x^2 \equiv y^2$, or $(x + y)(x - y) \equiv 0$, implies that $x \equiv y$ or that $x \equiv -y$. The $1 + \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ elements $0^2, 1^2, \dots, h^2$ are called the squares in $\mathbb{Z}_p$.

At this point, let us note "on the fly" that for all primes there are solutions for $x^2 + y^2 \equiv -1 \pmod{p}$. In fact, there are $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$ distinct squares x^2 in $\mathbb{Z}_p$, and there are $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$ distinct numbers of the form $-(1 + y^2)$. These two sets of numbers are too large to be disjoint, since $\mathbb{Z}_p$ has only p elements, and thus there must exist x and y with $x^2 \equiv -(1 + y^2) \pmod{p}$.

Lemma 2. No number $n = 4m + 3$ is a sum of two squares.

- Proof. The square of any even number is $(2k)^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod{4}$, while squares of odd numbers yield $(2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$. Thus any sum of two squares is congruent to 0, 1 or 2 $\pmod{4}$.

This is enough evidence for us that the primes $p = 4m + 3$ are "bad." Thus, we proceed with "good" properties for primes of the form $p = 4m + 1$. On the way to the main theorem, the following is the key step.

Proposition. Every prime of the form $p = 4m + 1$ is a sum of two squares, that is, it can be written as $p = x^2 + y^2$ for some natural numbers $x, y \in \mathbb{N}$.

We shall present here two proofs of this result - both of them elegant and surprising. The first proof features a striking application of the "pigeonhole principle" (which we have already used "on the fly" before Lemma 2; see Chapter 28 for more), as well as a clever move to arguments "modulo p " and back. The idea is due to the Norwegian number theorist Axel Thue.

- **Proof.** Consider the pairs (x', y') of integers with $0 \leq x', y' \leq \sqrt{p}$, that is, $x', y' \in \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor\}$. There are $(\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1)^2$ such pairs. Using the estimate $\lfloor x \rfloor + 1 > x$ for $x = \sqrt{p}$, we see that we have more than p such pairs of integers. Thus for any $s \in \mathbb{Z}$, it is impossible that all the values $x' - sy'$ produced by the pairs (x', y') are distinct modulo p . That is, for every s there are two distinct pairs

$$(x', y'), (x'', y'') \in \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor\}^2$$

with $x' - sy' \equiv x'' - sy'' \pmod{p}$. Now we take differences: We have $x' - x'' \equiv s(y' - y'') \pmod{p}$. Thus if we define $x := |x' - x''|$, $y := |y' - y''|$, then we get

$$(x, y) \in \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor\}^2 \quad \text{with} \quad x \equiv \pm sy \pmod{p}$$

Also we know that not both x and y can be zero, because the pairs (x', y') and (x'', y'') are distinct.

Now let s be a solution of $s^2 \equiv -1 \pmod{p}$, which exists by Lemma 1. Then $x^2 \equiv s^2 y^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$, and so we have produced

$$(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{with} \quad 0 < x^2 + y^2 < 2p \quad \text{and} \quad x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

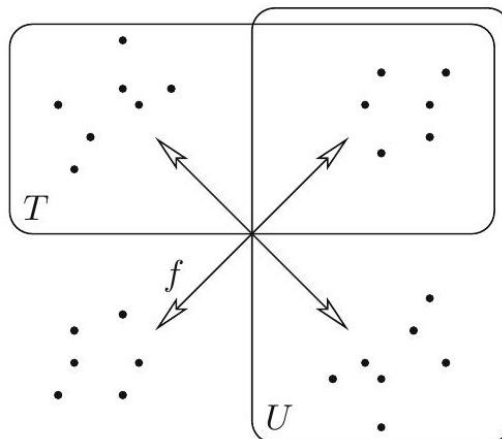
But p is the only number between 0 and $2p$ that is divisible by p . Thus $x^2 + y^2 = p$: done!

Our second proof for the proposition - also clearly a Book Proof was discovered by Roger Heath-Brown in 1971 and appeared in 1984. (A condensed "one-sentence version" was given by Don Zagier.) It is so elementary that we don't even need to use Lemma 1.

Heath-Brown's argument features three linear involutions: a quite obvious one, a hidden one, and a trivial one that gives "the final blow." The second, unexpected, involution corresponds to some hidden structure on the set of integral solutions of the equation $4xy + z^2 = p$.

For $p = 13$, $\lfloor \sqrt{p} \rfloor = 3$ we consider $x', y' \in \{0, 1, 2, 3\}$. For $s = 5$, the sum $x' - sy' \pmod{13}$ assumes the following values:

y'	0	1	2	3
x'	0	8	3	11
1	1	9	4	12
2	2	10	5	0
3	3	11	6	1



- Proof. We study the set

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : 4xy + z^2 = p, \quad x > 0, \quad y > 0\}.$$

This set is finite. Indeed, $x \geq 1$ and $y \geq 1$ implies $y \leq \frac{p}{4}$ and $x \leq \frac{p}{4}$. So there are only finitely many possible values for x and y , and given x and y , there are at most two values for z .

1. The first linear involution is given by

$$f : S \longrightarrow S, \quad (x, y, z) \longmapsto (y, x, -z),$$

that is, "interchange x and y , and negate z ." This clearly maps S to itself, and it is an involution: Applied twice, it yields the identity. Also, f has no fixed points, since $z = 0$ would imply $p = 4xy$, which is impossible. Furthermore, f maps the solutions in

$$T := \{(x, y, z) \in S : z > 0\}$$

to the solutions in $S \setminus T$, which satisfy $z < 0$. Also, f reverses the signs of $x - y$ and of z , so it maps the solutions in

$$U := \{(x, y, z) \in S : (x - y) + z > 0\}$$

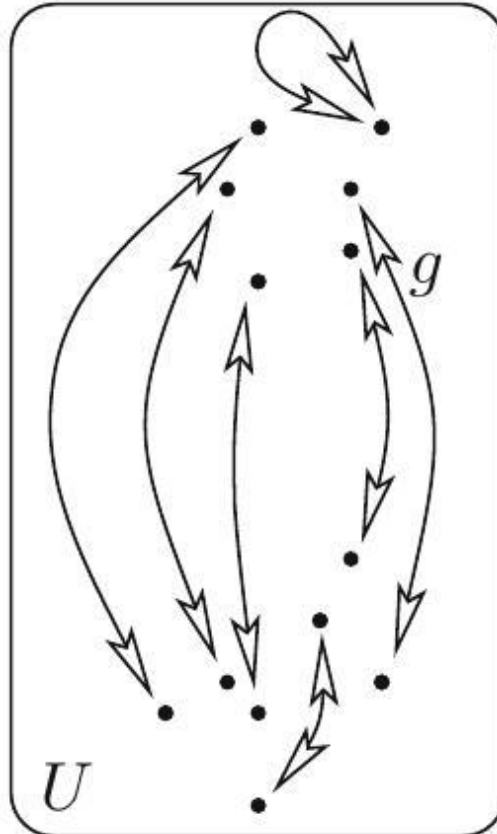
to the solutions in $S \setminus U$. For this we have to see that there is no solution with $(x - y) + z = 0$, but there is none since this would give $p = 4xy + z^2 = 4xy + (x - y)^2 = (x + y)^2$.

What do we get from the study of f ? The main observation is that since f maps the sets T and U to their complements, it also interchanges the elements in $T \setminus U$ with these in $U \setminus T$. That is, there is the same number of solutions in U that are not in T as there are solutions in T that are not in U - so T and U have the same cardinality.

2. The second involution that we study is an involution on the set U :

$$g : U \longrightarrow U, \quad (x, y, z) \longmapsto (x - y + z, y, 2y - z).$$

First we check that indeed this is a well-defined map: If $(x, y, z) \in U$, then $x - y + z > 0, y > 0$ and $4(x - y + z)y + (2y - z)^2 = 4xy + z^2$, so $g(x, y, z) \in S$. By $(x - y + z) - y + (2y - z) = x > 0$ we find that indeed



$g(x, y, z) \in U$.

Also g is an involution: $g(x, y, z) = (x - y + z, y, 2y - z)$ is mapped by g to $((x - y + z) - y + (2y - z), y, 2y - (2y - z)) = (x, y, z)$.

And finally g has exactly one fixed point:

$$(x, y, z) = g(x, y, z) = (x - y + z, y, 2y - z)$$

implies that $y = z$, but then $p = 4xy + y^2 = (4x + y)y$, which holds only for $y = z = 1$ and $x = \frac{p-1}{4}$.

But if g is an involution on U that has exactly one fixed point, then the cardinality of U is odd.

3. The third, trivial, involution that we study is the involution on T that interchanges x and y :

$$h : T \longrightarrow T, \quad (x, y, z) \longmapsto (y, x, z).$$

This map is clearly well-defined, and an involution. We combine now our knowledge derived from the other two involutions: The cardinality of T is equal to the cardinality of U , which is odd. But if h is an involution on a finite set of odd cardinality, then it has a fixed point: There is a point $(x, y, z) \in T$ with $x = y$, that is, a solution of

$$p = 4x^2 + z^2 = (2x)^2 + z^2$$

Roger Heath-Brown came up with this proof in 1971, after studying an account of Liouville's papers on identities for parity functions. The second involution seems magical, and it was presented without an explanation how one could come up with it. There is, however, a geometric interpretation that beautifully visualizes and "explains" the involution and yields something like a "proof without words": We will summarize it (for $p = 37$) in a full-page picture on the next page. This version of the proof was apparently found by Alexander Spivak, a Moscow mathematics teacher, who presented it in a 2007 lecture for the "Mathematics Circle" for highschool students at Moscow State University.

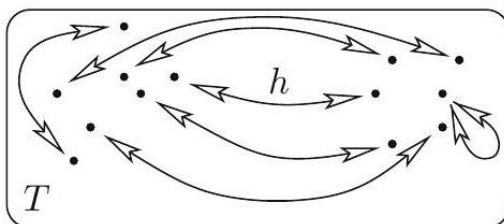
- Proof. Again we fix a prime number $p = 4n + 1$ and consider the set of solutions

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : 4xy + z^2 = p\}$$

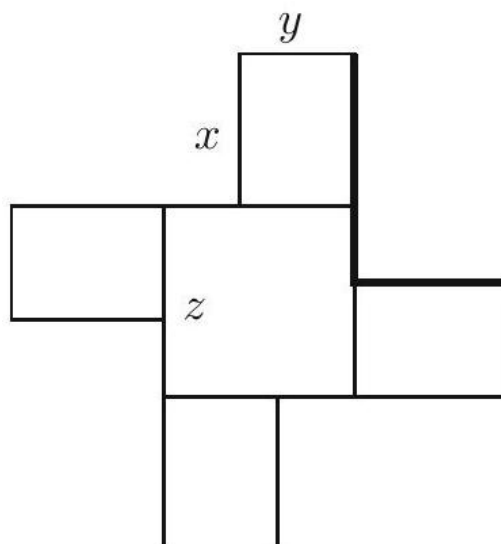
Each element of this set gives rise to a winged square: This is the figure consisting of a square and four rectangles in the plane that you get if you start with a square of side length z and at each vertex attach a rectangle of side-lengths x and y in a rotation-symmetric way, such that the edge of length x points away from the square, while the edge of length y runs along the side of the square.

We consider two winged squares "the same" if they are congruent. One way to make this unique, such that the representation of the winged square depends only on its boundary curve, is to require that the L formed by the two edges in the upper right-hand corner is at least as high as it is wide. If this condition is not satisfied, then a mirror image (reflected, e.g., in a vertical axis), will repair this. So each solution in T corresponds to a unique winged square of area $4xy + z^2 = p$, and indeed this is reversible: From each winged square we can read off a solution.

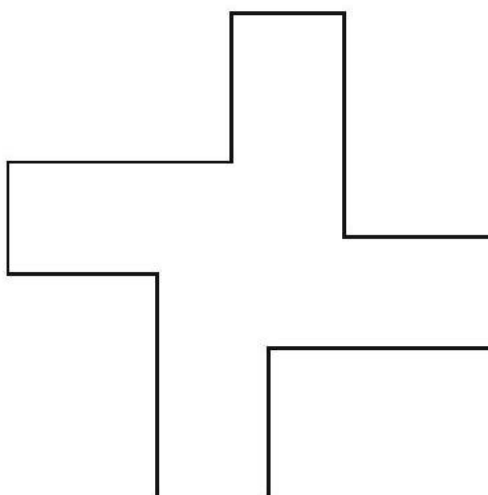
Taking the union of the square and the four rectangles, we get for each winged square what we will call a unique winged shape: This is a polyomino of area p with four-fold rotation symmetry, which has twelve vertices: eight convex ones with inner right angle and four non-convex ones with outer right angle. (We can't get a square shape, since p is a prime, so it can't be a square number.) Again we will consider winged shapes "the same" if they are congruent, so we might assume that the L shape in the upper right-hand corner is at least as high as it is wide.



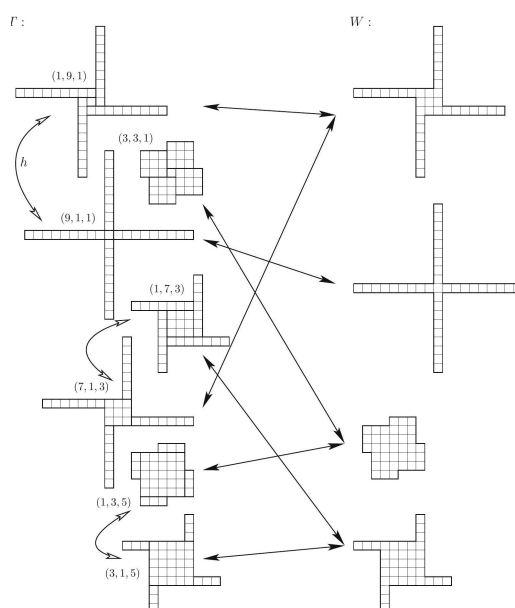
On a finite set of odd cardinality, every involution has at least one fixed point.



The winged square of area $4xy + z^2 = 73$ that corresponds to $(x, y, z) = (4, 3, 5)$, with the L shape highlighted...



and its winged shape.



Spivak's proof, for $n = 9$ and $p = 37$, where the set T of winged squares has cardinality 7, while the set W of winged shapes has cardinality 4.

Now we are getting very close to the punch line: For each winged shape we get either one

or two winged squares, by simultaneously drawing, in a rotation-symmetric way, vertical and horizontal lines to the interior starting at the non-convex vertices. We get only one solution if the shape has the symmetry of a square, that is, if the two arms of the L shapes have the same length. This happens exactly if $y = z$, but then $p = 4xz + z^2 = (4x + z)z$; assuming that p is a prime, this implies that $z = 1$ and $x = n$. In other words: Exactly one winged shape yields a single winged square, while all other winged shapes yield two winged squares each. Consequently, the number $|T|$ of winged squares is odd.

However, the winged squares with non-square rectangles (with $x \neq y$) come in pairs, as we can always flip the four rectangular wings between vertical and horizontal format (that is, exchange x and y). As $|T|$ is odd, this implies that there is an odd number of winged squares whose wings are squares, that is, T contains an odd number of triples (x, y, z) with $x = y$, and hence at least one, and this yields a solution to $(2x)^2 + z^2 = p$.

In any representation of $p = 4n + 1$ as a sum of two squares, one of the squares is even, the other one is odd. Thus the involution proof yields more than just that p can be written as a sum of two squares: The number of these representations in positive integers is odd. (The representation is actually unique, see [3].) Also note that the proofs we have presented are not effective: Try to find x and y for a ten digit prime! Efficient ways to find such representations are discussed in [1] and [8].

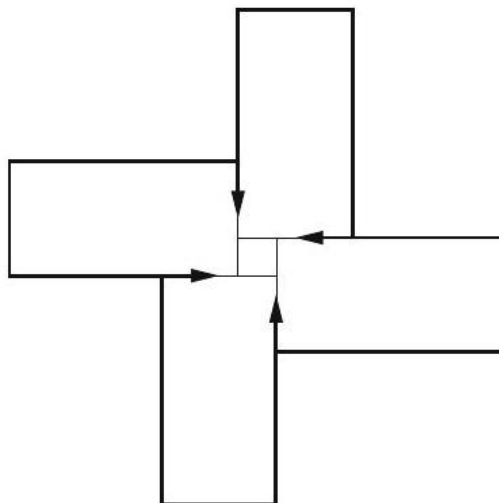
The following theorem completely answers the question which started this chapter.

Theorem. A natural number n can be represented as a sum of two squares if and only if every prime factor of the form $p = 4m + 3$ appears with an even exponent in the prime decomposition of n .

- Proof. Call a number n representable if it is a sum of two squares, that is, if $n = x^2 + y^2$ for some $x, y \in \mathbb{N}_0$. The theorem is a consequence of the following five facts.
 - (1) $1 = 1^2 + 0^2$ and $2 = 1^2 + 1^2$ are representable. Every prime of the form $p = 4m + 1$ is representable.
 - (2) The product of any two representable numbers $n_1 = x_1^2 + y_1^2$ and $n_2 = x_2^2 + y_2^2$ is representable: $n_1 n_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$.
 - (3) If n is representable, $n = x^2 + y^2$, then also $n z^2$ is representable, by $n z^2 = (xz)^2 + (yz)^2$.

Facts (1), (2) and (3) together yield the "if" part of the theorem.

- (4) If $p = 4m + 3$ is a prime that divides a representable number $n = x^2 + y^2$, then p divides both x and y , and thus p^2 divides n . In fact, if we had $x \not\equiv 0 \pmod{p}$, then we could find $\bar{x}$ such that $x\bar{x} \equiv 1 \pmod{p}$, multiply the equation $x^2 + y^2 \equiv 0$ by $\bar{x}^2$, and thus we would obtain that



The second winged square derived from the winged shape of area 73 in the margin on page 23. It represents the solution $(6, 3, 1)$.

$1 + y^2 \bar{x}^2 = 1 + (\bar{x}y)^2 \equiv 0 \pmod{p}$, which is impossible for $p = 4m + 3$ by Lemma 1.

- (5) If n is representable, and $p = 4m + 3$ divides n , then p^2 divides n , and n/p^2 is representable. This follows from (4), and completes the proof.

Two remarks close our discussion:

- If a and b are two natural numbers that are relatively prime, then there are infinitely many primes of the form $am + b$ ($m \in \mathbb{N}$) - this is a famous (and difficult) theorem of

Dirichlet. More precisely, one can show that the number of primes $p \leq x$ of the form $p = am + b$ is described very accurately for large x by the function $\frac{1}{\varphi(a)} \frac{x}{\log x}$, where $\varphi(a)$ denotes the number of b with $1 \leq b < a$ that are relatively prime to a . (This is a substantial refinement of the prime number theorem, which we had discussed on page 12.)

- This means that the primes for fixed a and varying b appear essentially at the same rate. Nevertheless, for example for $a = 4$ one can observe a rather subtle, but still noticeable and persistent tendency towards "more" primes of the form $4m + 3$. The difference between the counts of primes of the form $4m + 3$ and those of the form $4m + 1$ changes sign infinitely often. Nevertheless, if you look for a large random x , then chances are that there are more primes $p \leq x$ of the form $p = 4m + 3$ than of the form $p = 4m + 1$. This effect is known as "Chebyshev's bias"; see Riesel [4] and Rubinstein and Sarnak [5].

References

- [1] F. W. Clarke, W. N. Everitt, L. L. Littlejohn & S. J. R. Vorster: H. J. S. Smith and the Fermat Two Squares Theorem, *Amer. Math. Monthly* 106 (1999), 652-665.
- [2] D. R. Heath-Brown: Fermat's two squares theorem, *Invariant* (1984), 2-5. ETEX version, with appendix on history, January 2008, at eprints.maths.ox.ac.uk/677/1/invariant.pdf.
- [3] I. Niven & H. S. Zuckerman: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth edition, Wiley, New York 1972.
- [4] H. Riesel: *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*, Second edition, *Progress in Mathematics* 126, Birkhäuser, Boston MA 1994.
- [5] M. Rubinstein & P. Sarnak: Chebyshev's bias, *Experimental Mathematics* 3 (1994), 173-197.
- [6] A. Spivak: Winged squares [in Russian], Lecture notes for the mathematical circle at Moscow State University, 15th lecture 2007, mmmf.msu.ru/lect/spivak/summa_sq.pdf.
- [7] A. Thue: Et par antydninger til en taltheoretisk metode, *Kra. Vidensk. Selsk. Forh.* 7 (1902), 57-75.
- [8] S. Wagon: Editor's corner: The Euclidean algorithm strikes again, *Amer. Math. Monthly* 97 (1990), 125-129.
- [9] D. Zagier: A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1 \pmod{4}$ is a sum of two squares, *Amer. Math. Monthly* 97 (1990), 144.

22.1.5 The law of quadratic reciprocity

Which famous mathematical theorem has been proved most often? Pythagoras would certainly be a good candidate or the fundamental theorem of algebra, but the champion is without doubt the law of quadratic reciprocity in number theory. In an admirable monograph Franz Lemmermeyer lists as of the year 2000 no fewer than 196 proofs. Many of them are of course only slight variations of others, but the array of different ideas is still impressive, as is the list of contributors. Carl Friedrich Gauss gave the first complete proof in 1801 and followed up with seven more. A little later Ferdinand Gotthold Eisenstein added five more - and the ongoing list of provers reads like a Who is Who of mathematics.

With so many proofs present the question which of them belongs in the Book can have no easy answer. Is it the shortest, the most unexpected, or should one look for the proof that had the greatest potential for generalizations to other and deeper reciprocity laws? We have chosen two proofs (based on Gauss' third and sixth proofs), of which the first may be the simplest and most pleasing, while the other is the starting point for fundamental results in more general structures.

As in the previous chapter we work "modulo p ", where p is an odd prime; $\mathbb{Z}_p$ is the field of residues upon division by p , and we usually (but not always) take these residues as $0, 1, \dots, p-1$. Consider some $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, that is, $p \nmid a$. We call a a quadratic residue modulo p if $a \equiv b^2 \pmod{p}$ for some b , and a quadratic nonresidue otherwise. The quadratic residues are therefore $1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, and so there are $\frac{p-1}{2}$ quadratic residues and $\frac{p-1}{2}$ quadratic non-residues. Indeed, if $i^2 \equiv j^2 \pmod{p}$ with $1 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$, then $p \mid i^2 - j^2 = (i-j)(i+j)$. As $2 \leq i+j \leq p-1$ we have $p \mid i-j$, that is, $i \equiv j \pmod{p}$.

At this point it is convenient to introduce the so-called Legendre symbol. Let $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, then

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 1 & \text{if } a \text{ is a quadratic residue,} \\ -1 & \text{if } a \text{ is a quadratic nonresidue.} \end{cases}$$

The story begins with Fermat's "little theorem": For $a \not\equiv 0 \pmod{p}$,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (1)$$

In fact, since $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ is a group with multiplication, the set $\{1a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a\}$ runs again through all nonzero residues,

$$(1a)(2a) \cdots ((p-1)a) \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod{p},$$

and hence by dividing by $(p-1)!$, we get $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.



Carl Friedrich Gauss

For $p = 13$, the quadratic residues are $1^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 4, 3^2 \equiv 9, 4^2 \equiv 3, 5^2 \equiv 12$, and $6^2 \equiv 10$; the nonresidues are 2, 5, 6, 7, 8, 11.

Alternatively, this is just $a^{|G|} = 1$ for the group $G = \mathbb{Z}_p^*$ (see the box on Lagrange's theorem, p. 4).

For example, for $p = 17$ and $a = 3$ we have $3^8 = (3^4)^2 = 81^2 \equiv (-4)^2 \equiv -1 \pmod{17}$, while for $a = 2$ we get $2^8 = (2^4)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{17}$. Hence 2 is a quadratic residue, while 3 is a nonresidue.

Example: $\left(\frac{3}{17}\right) = \left(\frac{17}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$, so 3 is a nonresidue mod 17.

In other words, the polynomial $x^{p-1} - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$ has as roots all nonzero residues. Next we note that

$$x^{p-1} - 1 = \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$$

Suppose $a \equiv b^2 \pmod{p}$ is a quadratic residue. Then by Fermat's little theorem $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Hence the quadratic residues are precisely the roots of the first factor $x^{\frac{p-1}{2}} - 1$, and the $\frac{p-1}{2}$ nonresidues must thus be the roots of the second factor $x^{\frac{p-1}{2}} + 1$. Comparing this to the definition of the Legendre symbol, we obtain the following important tool.

Euler's criterion. For $a \not\equiv 0 \pmod{p}$,

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

This gives us at once the important product rule

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right), \quad (2)$$

since this obviously holds for the right-hand side of Euler's criterion. The product rule is extremely helpful when one tries to compute Legendre symbols: Since any integer is a product of ± 1 and primes we only have to compute $\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{2}{p}\right)$, and $\left(\frac{q}{p}\right)$ for odd primes q .

By Euler's criterion $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ if $p \equiv 1 \pmod{4}$, and $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ if $p \equiv 3 \pmod{4}$, something we have already seen in the previous chapter. The case $\left(\frac{2}{p}\right)$ will follow from the Lemma of Gauss below: $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ if $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$, while $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ if $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$.

Euler, Legendre, and Gauss did lots of calculations with quadratic residues and, in particular, studied the relations between q being a quadratic residue modulo p and p being a quadratic residue modulo q , when p and q are odd primes. Euler and Legendre thus discovered the following remarkable theorem, but they managed to prove it only in special cases. However, Gauss was successful: On April 8, 1796 he was proud to record in his diary the first full proof.

Law of quadratic reciprocity. Let p and q be different odd primes. Then

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$$

If $p \equiv 1 \pmod{4}$ or $q \equiv 1 \pmod{4}$, then $\frac{p-1}{2}$ (resp. $\frac{q-1}{2}$) is even, and therefore $(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} = 1$; thus $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$. When $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$, we have $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$. Thus for odd primes we get $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ unless both p and q are congruent to $3 \pmod{4}$.

First proof. The key to our first proof (which is Gauss' third) is a counting formula that soon came to be called the Lemma of Gauss:

Lemma of Gauss. Suppose $a \not\equiv 0 \pmod{p}$. Take the numbers $1a, 2a, \dots, \frac{p-1}{2}a$ and reduce them modulo p to the residue system smallest in absolute value, $ia \equiv r_i \pmod{p}$ with $-\frac{p-1}{2} \leq r_i \leq \frac{p-1}{2}$ for all i . Then

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s, \text{ where } s = \#\{i : r_i < 0\}$$

- Proof. Suppose $u_1, \dots, u_s$ are the residues smaller than 0, and that $v_1, \dots, v_{\frac{p-1}{2}-s}$ are those greater than 0. Then the numbers $-u_1, \dots, -u_s$ are between 1 and $\frac{p-1}{2}$, and are all different from the v_j 's (see the margin); hence $\{-u_1, \dots, -u_s, v_1, \dots, v_{\frac{p-1}{2}-s}\} = \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. Therefore

$$\prod_i (-u_i) \prod_j v_j = \frac{p-1}{2}!,$$

which implies

$$(-1)^s \prod_i u_i \prod_j v_j \equiv \frac{p-1}{2}! \pmod{p}.$$

Now remember how we obtained the numbers u_i and v_j ; they are the residues of $1a, \dots, \frac{p-1}{2}a$. Hence

$$\frac{p-1}{2}! \equiv (-1)^s \prod_i u_i \prod_j v_j \equiv (-1)^s \frac{p-1}{2}! a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Cancelling $\frac{p-1}{2}!$ together with Euler's criterion gives

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^s \pmod{p}$$

and therefore $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s$, since p is odd.

With this we can easily compute $\left(\frac{2}{p}\right)$: Since $1 \cdot 2, 2 \cdot 2, \dots, \frac{p-1}{2} \cdot 2$ are all between 1 and $p-1$, we have

$$s = \#\left\{i : \frac{p-1}{2} < 2i \leq p-1\right\} = \frac{p-1}{2} - \#\left\{i : 2i \leq \frac{p-1}{2}\right\} = \left\lceil \frac{p-1}{4} \right\rceil.$$

Check that s is even precisely for $p = 8k \pm 1$.

The Lemma of Gauss is the basis for many of the published proofs of the quadratic reciprocity law. The most elegant may be the one suggested by Ferdinand Gotthold Eisenstein, who had learned number theory from Gauss' famous *Disquisitiones Arithmeticae* and made important contributions to "higher reciprocity theorems" before his premature death at age 29. His proof is just counting lattice points!

If $-u_i = v_j$, then $u_i + v_j \equiv 0 \pmod{p}$. Now $u_i \equiv ka, v_j \equiv \ell a \pmod{p}$ implies $p \mid (k + \ell)a$. As p and a are relatively prime, p must divide $k + \ell$ which is impossible, since $k + \ell \leq p-1$.



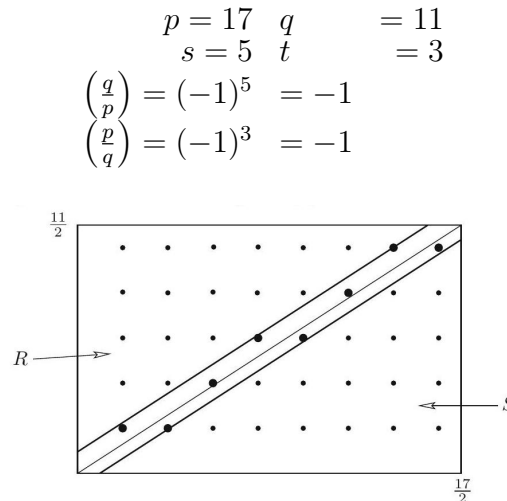
Let p and q be odd primes, and consider $\left(\frac{q}{p}\right)$. Suppose iq is a multiple of q that reduces to a negative residue $r_i < 0$ in the Lemma of Gauss. This means that there is a unique integer j such that $-\frac{p}{2} < iq - jp < 0$. Note that $0 < j < \frac{q}{2}$ since $0 < i < \frac{p}{2}$. In other words, $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^s$, where s is the number of lattice points (x, y) , that is, pairs of integers x, y satisfying

$$0 < py - qx < \frac{p}{2}, 0 < x < \frac{p}{2}, 0 < y < \frac{q}{2}. \quad (3)$$

Similarly, $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^t$ where t is the number of lattice points (x, y) with

$$0 < qx - py < \frac{q}{2}, 0 < x < \frac{p}{2}, 0 < y < \frac{q}{2}. \quad (4)$$

Now look at the rectangle with side lengths $\frac{p}{2}, \frac{q}{2}$, and draw the two lines parallel to the diagonal $py = qx$, $y = \frac{q}{p}x + \frac{1}{2}$ or $py - qx = \frac{p}{2}$, respectively, $y = \frac{q}{p}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ or $qx - py = \frac{q}{2}$. The figure shows the situation for $p = 17$, $q = 11$.



The proof is now quickly completed by the following three observations:

1. There are no lattice points on the diagonal and the two parallels. This is so because $py = qx$ would imply $p \mid x$, which cannot be. For the parallels observe that $py - qx$ is an integer while $\frac{p}{2}$ and $\frac{q}{2}$ are not.
2. The lattice points observing (3) are precisely the points in the upper strip $0 < py - qx < \frac{p}{2}$, and those of (4) the points in the lower strip $0 < qx - py < \frac{q}{2}$. Hence the number of lattice points in the two strips is $s + t$.
3. The outer regions $R : py - qx > \frac{p}{2}$ and $S : qx - py > \frac{q}{2}$ contain the same number of points. To see this consider the map $\varphi : R \rightarrow S$ which maps (x, y) to $\left(\frac{p+1}{2} - x, \frac{q+1}{2} - y\right)$ and check that φ is an involution.

Since the total number of lattice points in the rectangle is $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$, we infer that $s + t$ and $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ have the same parity, and so

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{s+t} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

Second proof. Our second choice does not use Gauss' lemma, instead it employs so-called "Gauss sums" in finite fields. Gauss invented them in his study of the equation $x^p - 1 = 0$ and the arithmetical properties of the field $\mathbb{Q}(\zeta)$ (called cyclotomic field), where ζ is a p -th root of unity. They have been the starting point for the search for higher reciprocity laws in general number fields.

Let us first collect a few facts about finite fields.

A. Let p and q be different odd primes, and consider the finite field F with q^{p-1} elements. Its prime field is $\mathbb{Z}_q$, whence $qa = 0$ for any $a \in F$. This implies that $(a + b)^q = a^q + b^q$, since any binomial coefficient $\binom{q}{i}$ is a multiple of q for $0 < i < q$, and thus 0 in F . Note that Euler's criterion is an equation $\left(\frac{p}{q}\right) = p^{\frac{q-1}{2}}$ in the prime field $\mathbb{Z}_q$.

B. The multiplicative group $F^* = F \setminus \{0\}$ is cyclic of size $q^{p-1} - 1$ (see the box on the next page). Since by Fermat's little theorem p is a divisor of $q^{p-1} - 1$, there exists an element $\zeta \in F$ of order p , that is, $\zeta^p = 1$, and ζ generates the subgroup $\{\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^p = 1\}$ of F^* .

Note that any $\zeta^i (i \neq p)$ is again a generator. Hence we obtain the polynomial decomposition $x^p - 1 = (x - \zeta)(x - \zeta^2) \cdots (x - \zeta^p)$.

Now we can go to work. Consider the Gauss sum

$$G := \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p} \right) \zeta^i \in F$$

where $\left(\frac{i}{p} \right)$ is the Legendre symbol. For the proof we derive two different expressions for G^q and then set them equal.

First expression. We have

$$G^q = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p} \right)^q \zeta^{iq} = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p} \right) \zeta^{iq} = \left(\frac{q}{p} \right) \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{iq}{p} \right) \zeta^{iq} = \left(\frac{q}{p} \right) G \quad (5)$$

where the first equality follows from $(a + b)^q = a^q + b^q$, the second uses that $\left(\frac{i}{p} \right)^q = \left(\frac{i}{p} \right)$ since q is odd, the third one is derived from (2), which yields $\left(\frac{i}{p} \right) = \left(\frac{q}{p} \right) \left(\frac{iq}{p} \right)$, and the last one holds since iq runs with i through all nonzero residues modulo p .

Second expression. Suppose we can prove

$$G^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \quad (6)$$

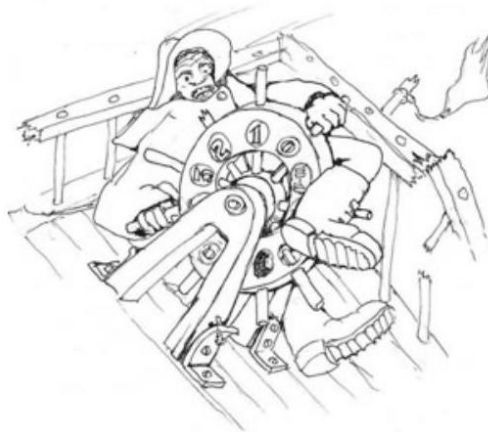
then we are quickly done. Indeed,

$$G^q = G (G^2)^{\frac{q-1}{2}} = G (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} = G \left(\frac{p}{q} \right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \quad (7)$$

Equating the expressions in (5) and (7) and cancelling G , which is nonzero by (6), we find $\left(\frac{q}{p} \right) = \left(\frac{p}{q} \right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$, and thus

$$\left(\frac{q}{p} \right) \left(\frac{p}{q} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$$

Example: Take $p = 3, q = 5$. Then $G = \zeta - \zeta^2$ and $G^5 = \zeta^5 - \zeta^{10} = \zeta^2 - \zeta = -(\zeta - \zeta^2) = -G$, corresponding to $\left(\frac{5}{3} \right) = \left(\frac{2}{3} \right) = -1$.



"Even in total chaos we can hang on to the cyclic group"

The multiplicative group of a finite field is cyclic

Let F^* be the multiplicative group of the field F , with $|F^*| = n$. Writing $\text{ord}(a)$ for the order of an element, that is, the smallest positive integer k such that $a^k = 1$, we want to find an element $a \in F^*$ with $\text{ord}(a) = n$. If $\text{ord}(b) = d$, then by Lagrange's theorem, d divides n (see the margin on page 4). Classifying the elements according to their order, we have

$$n = \sum_{d|n} \psi(d), \text{ where } \psi(d) = \#\{b \in F^* : \text{ord}(b) = d\}. \quad (8)$$

If $\text{ord}(b) = d$, then every element $b^i (i = 1, \dots, d)$ satisfies $(b^i)^d = 1$ and is therefore a root of the polynomial $x^d - 1$. But, since F is a field, $x^d - 1$ has at most d roots, and so the elements $b, b^2, \dots, b^d = 1$ are precisely these roots. In particular, every element of order d is of the form b^i .

On the other hand, it is easily checked that $\text{ord}(b^i) = \frac{d}{(i,d)}$, where (i,d) denotes the greatest common divisor of i and d . Hence $\text{ord}(b^i) = d$ if and only if $(i,d) = 1$, that is, if i and d are relatively prime. Denoting Euler's function by $\varphi(d) = \#\{i : 1 \leq i \leq d, (i,d) = 1\}$, we thus have $\psi(d) = \varphi(d)$ whenever $\psi(d) > 0$. Looking at (8) we find

$$n = \sum_{d|n} \psi(d) \leq \sum_{d|n} \varphi(d)$$

But, as we are going to show that

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n \quad (9)$$

we must have $\psi(d) = \varphi(d)$ for all d . In particular, $\psi(n) = \varphi(n) \geq 1$, and so there is an element of order n .

The following (folklore) proof of (9) belongs in the Book as well. Consider the n fractions

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

reduce them to lowest terms $\frac{k}{n} = \frac{i}{d}$ with $1 \leq i \leq d, (i,d) = 1, d | n$, and check that the denominator d appears precisely $\varphi(d)$ times.

It remains to verify (6), and for this we first make two simple observations:

- $\sum_{i=1}^p \zeta^i = 0$ and thus $\sum_{i=1}^{p-1} \zeta^i = -1$. Just note that $-\sum_{i=1}^p \zeta^i$ is the coefficient of x^{p-1} in $x^p - 1 = \prod_{i=1}^p (x - \zeta^i)$, and thus 0.
- $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) = 0$ and thus $\sum_{k=1}^{p-2} \left(\frac{k}{p}\right) = -\left(\frac{-1}{p}\right)$, since there are equally many quadratic residues and nonresidues.

We have

$$G^2 = \left(\sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) \zeta^i \right) \left(\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta^j \right) = \sum_{i,j} \left(\frac{ij}{p}\right) \zeta^{i+j}$$

Setting $j \equiv ik \pmod{p}$ we find

$$G^2 = \sum_{i,k} \left(\frac{k}{p}\right) \zeta^{i(1+k)} = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \sum_{i=1}^{p-1} \zeta^{(1+k)i}$$

For $k = p-1 \equiv -1 \pmod{p}$ this gives $\left(\frac{-1}{p}\right) (p-1)$, since $\zeta^{1+k} = 1$. Move $k = p-1$ in front and write

$$G^2 = \left(\frac{-1}{p}\right)(p-1) + \sum_{k=1}^{p-2} \left(\frac{k}{p}\right) \sum_{i=1}^{p-1} \zeta^{(1+k)i}$$

Euler's criterion: $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

Since ζ^{1+k} is a generator of the group for $k \neq p-1$, the inner sum equals $\sum_{i=1}^{p-1} \zeta^i = -1$ for all $k \neq p-1$ by our first observation. Hence the second summand is $-\sum_{k=1}^{p-2} \left(\frac{k}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)$ by our second observation. It follows that $G^2 = \left(\frac{-1}{p}\right)p$ and thus with Euler's criterion $G^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$, which completes the proof.

For $p = 3, q = 5, G^2 = (\zeta - \zeta^2)^2 = \zeta^2 - 2\zeta^3 + \zeta^4 = \zeta^2 - 2 + \zeta = -3 = (-1)^{\frac{3-1}{2}}3$, since $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$.

References

- [1] A. BAKER: A Concise Introduction to the Theory of Numbers, Cambridge University Press, Cambridge 1984.
- [2] F. G. Eisenstein: Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste, J. Reine Angewandte Mathematik 28 (1844), 186-191.
- [3] C. F. Gauss: Theorema arithmetici demonstratio nova, Comment. Soc. regiae sci. Göttingen XVI (1808), 69; Werke II, 1-8 (contains the 3rd proof).
- [4] C. F. Gauss: Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et amplicationes novae (1818), Werke II, 47-64 (contains the 6th proof).
- [5] F. Lemmermeyer: Reciprocity Laws, Springer-Verlag, Berlin 2000.



"I'm pushing 196 proofs for quadratic reciprocity"

22.1.6 Every finite division ring is a field

Rings are important structures in modern algebra. If a ring R has a multiplicative unit element 1 and every nonzero element has a multiplicative inverse, then R is called a division ring. So, all that is missing in R from being a field is the commutativity of multiplication. The best-known example of a noncommutative division ring is the ring of quaternions discovered by Hamilton. But, as the chapter title says, every such division ring must of necessity be infinite. If R is finite, then the axioms force the multiplication to be commutative.

This result which is now a classic has caught the imagination of many mathematicians, because, as Herstein writes: "It is so unexpectedly interrelating two seemingly unrelated things, the number of elements in a certain algebraic system and the multiplication of that system."

Theorem. Every finite division ring is commutative.

This beautiful theorem which is usually attributed to MacLagan Wedderburn has been proved by many people using a variety of different ideas. Wedderburn himself gave three proofs

in 1905, and another proof was given by Leonard E. Dickson in the same year. More proofs were later given by Emil Artin, Hans Zassenhaus, Nicolas Bourbaki, and many others. One proof stands out for its simplicity and elegance. It was found by Ernst Witt in 1931 and combines two elementary ideas towards a glorious finish.

- **Proof.** Our first ingredient comes from a blend of linear algebra and basic group theory. For an arbitrary element $s \in R$, let C_s be the set $\{x \in R : xs = sx\}$ of elements which commute with s ; C_s is called the centralizer of s . Clearly, C_s contains 0 and 1 and is a sub-division ring of R . The center Z is the set of elements which commute with all elements of R , thus $Z = \bigcap_{s \in R} C_s$. In particular, all elements of Z commute, 0 and 1 are in Z , and so Z is a finite field. Let us set $|Z| = q$. We can regard R and C_s as vector spaces over the field Z and deduce that $|R| = q^n$, where n is the dimension of the vector space R over Z , and similarly $|C_s| = q^{n_s}$ for suitable integers $n_s \geq 1$. Now let us assume that R is not a field. This means that for some $s \in R$ the centralizer C_s is not all of R , or, what is the same, $n_s < n$. On the set $R^* := R \setminus \{0\}$ we consider the relation

$$r' \sim r \quad :\Longleftrightarrow \quad r' = x^{-1}rx \quad \text{for some } x \in R^*.$$



Ernst Witt

It is easy to check that $\sim$ is an equivalence relation. Let

$$A_s := \{x^{-1}sx : x \in R^*\}$$

be the equivalence class containing s . We note that $|A_s| = 1$ precisely when s is in the center Z . So by our assumption, there are classes A_s with $|A_s| \geq 2$. Consider now for $s \in R^*$ the map $f_s : x \mapsto x^{-1}sx$ from R^* onto A_s . For $x, y \in R^*$ we find

$$\begin{aligned} x^{-1}sx = y^{-1}sy &\Longleftrightarrow (yx^{-1})s = s(yx^{-1}) \\ &\Longleftrightarrow yx^{-1} \in C_s^* \Longleftrightarrow y \in C_s^*x, \end{aligned}$$

for $C_s^* := C_s \setminus \{0\}$, where $C_s^*x = \{zx : z \in C_s^*\}$ has size $|C_s^*|$. Hence any element $x^{-1}sx$ is the image of precisely $|C_s^*| = q^{n_s} - 1$ elements in R^* under the map f_s , and we deduce $|R^*| = |A_s||C_s^*|$. In particular, we note that

$$\frac{|R^*|}{|C_s^*|} = \frac{q^n - 1}{q^{n_s} - 1} = |A_s| \quad \text{is an integer for all } s.$$

We know that the equivalence classes partition R^* . We now group the central elements Z^* together and denote by $A_1, \dots, A_t$ the equivalence classes containing more than one element. By our assumption we know $t \geq 1$. Since $|R^*| = |Z^*| + \sum_{k=1}^t |A_k|$, we have proved the so-called class formula

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{k=1}^t \frac{q^n - 1}{q^{n_k} - 1} \quad (1)$$

where we have $1 < \frac{q^n - 1}{q^{n_k} - 1} \in \mathbb{N}$ for all k .

With (1) we have left abstract algebra and are back to the natural numbers. Next we claim that $q^{n_k} - 1 \mid q^n - 1$ implies $n_k \mid n$. Indeed, write $n = an_k + r$ with $0 \leq r < n_k$, then $q^{n_k} - 1 \mid q^{an_k+r} - 1$ implies

$$q^{n_k} - 1 \mid (q^{an_k+r} - 1) - (q^{n_k} - 1) = q^{n_k} (q^{(a-1)n_k+r} - 1)$$

and thus $q^{n_k} - 1 \mid q^{(a-1)n_k+r} - 1$, since q^{n_k} and $q^{n_k} - 1$ are relatively prime. Continuing in this way we find $q^{n_k} - 1 \mid q^r - 1$ with $0 \leq r < n_k$, which is only possible for $r = 0$, that is, $n_k \mid n$. In summary, we note

$$n_k \mid n \quad \text{for all } k \quad (2)$$

Now comes the second ingredient: the complex numbers $\mathbb{C}$. Consider the polynomial $x^n - 1$. Its roots in $\mathbb{C}$ are called the n -th roots of unity. Since $\lambda^n = 1$, all these roots λ have $|\lambda| = 1$ and lie therefore on the unit circle of the complex plane. In fact, they are precisely the numbers $\lambda_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$, $0 \leq k \leq n-1$ (see the box on the next page). Some of the roots λ satisfy $\lambda^d = 1$ for $d < n$; for example, the root $\lambda = -1$ satisfies $\lambda^2 = 1$. For a root λ , let d be the smallest positive exponent with $\lambda^d = 1$, that is, d is the order of λ in the group of the roots of unity. Then $d \mid n$, by Lagrange's theorem ("the order of every element of a group divides the order of the group" - see the box in Chapter 1). Note that there are roots of order n , such as $\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Roots of unity

Any complex number $z = x + iy$ may be written in the "polar" form

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

where $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ is the distance of z to the origin, and φ is the angle measured from the positive x -axis. The n -th roots of unity are therefore of the form

$$\lambda_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n), \quad 0 \leq k \leq n-1$$

since for all k

$$\lambda_k^n = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1.$$

We obtain these roots geometrically by inscribing a regular n -gon into the unit circle. Note that $\lambda_k = \zeta^k$ for all k , where $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Thus the n -th roots of unity form a cyclic group $\{\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}, \zeta^n = 1\}$ of order n .

Now we group all roots of order d together and set

$$\phi_d(x) := \prod_{\lambda \text{ of order } d} (x - \lambda).$$

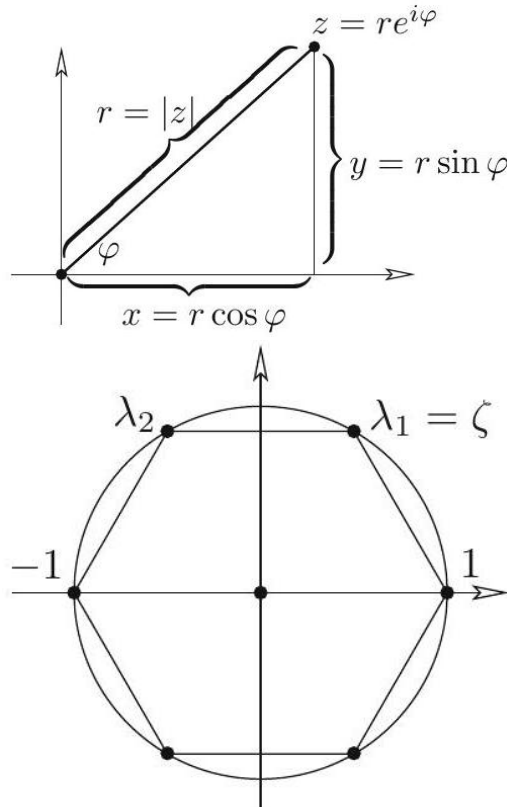
Note that the definition of $\phi_d(x)$ is independent of n . Since every root has some order d , we conclude that

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x) \quad (3)$$

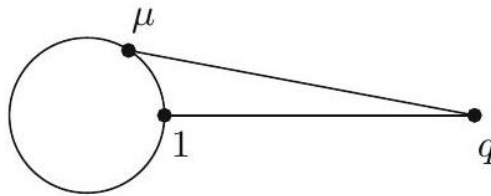
Here is the crucial observation: The coefficients of the polynomials $\phi_n(x)$ are integers (that is, $\phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ for all n), where in addition the constant coefficient is either 1 or -1. Let us carefully verify this claim. For $n = 1$ we have 1 as the only root, and so $\phi_1(x) = x - 1$. Now we proceed by induction, where we assume $\phi_d(x) \in \mathbb{Z}[x]$ for all $d < n$, and that the constant coefficient of $\phi_d(x)$ is 1 or -1. By (3),

$$x^n - 1 = p(x)\phi_n(x) \quad (4)$$

where $p(x) = \sum_{j=0}^{\ell} p_j x^j$, $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-\ell} a_k x^k$, with $p_0 = 1$ or $p_0 = -1$. Since $-1 = p_0 a_0$, we see $a_0 \in \{1, -1\}$. Suppose we already know that $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$. Computing the coefficient of x^k on both sides of (4)



The roots of unity for $n = 6$



$$|q - \mu| > |q - 1|$$

we find

$$\sum_{j=0}^k p_j a_{k-j} = \sum_{j=1}^k p_j a_{k-j} + p_0 a_k \in \mathbb{Z}.$$

By assumption, all $a_0, \dots, a_{k-1}$ (and all p_j) are in $\mathbb{Z}$. Thus $p_0 a_k$ and hence a_k must also be integers, since p_0 is 1 or -1.

We are ready for the coup de grâce. Let $n_k \mid n$ be one of the numbers appearing in (1). Then

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x) = (x^{n_k} - 1) \phi_n(x) \prod_{d|n, d \nmid n_k, d \neq n} \phi_d(x).$$

We conclude that in $\mathbb{Z}$ we have the divisibility relations

$$\phi_n(q) \mid q^n - 1 \quad \text{and} \quad \phi_n(q) \nmid \frac{q^n - 1}{q^{n_k} - 1}. \quad (5)$$

Since (5) holds for all k , we deduce from the class formula (1)

$$\phi_n(q) \mid q - 1$$

but this cannot be. Why? We know $\phi_n(x) = \prod (x - \lambda)$ where λ runs through all roots of $x^n - 1$ of order n . Let $\tilde{\lambda} = a + ib$ be one of those roots. By $n > 1$ (because of $R \neq \mathbb{Z}$) we have $\tilde{\lambda} \neq 1$, which implies that the real part a is smaller than 1. Now $|\tilde{\lambda}|^2 = a^2 + b^2 = 1$, and hence

$$\begin{aligned} |q - \tilde{\lambda}|^2 &= |q - a - ib|^2 = (q - a)^2 + b^2 \\ &= q^2 - 2aq + a^2 + b^2 = q^2 - 2aq + 1 \\ &> q^2 - 2q + 1 \quad (\text{because of } a < 1) \\ &= (q - 1)^2, \end{aligned}$$

and so $|q - \tilde{\lambda}| > q - 1$ holds for all roots of order n . This implies

$$|\phi_n(q)| = \prod_{\lambda} |q - \lambda| > q - 1$$

which means that $\phi_n(q)$ cannot be a divisor of $q - 1$, contradiction and end of proof.

References

- [1] L. E. Dickson: On finite algebras, Nachrichten der Akad. Wissenschaften Göttingen Math.-Phys. Klasse (1905), 1-36; Collected Mathematical Papers Vol. III, Chelsea Publ. Comp, The Bronx, NY 1975, 539-574.
- [2] J. H. M. Wedderburn: A theorem on finite algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), 349-352.
- [3] E. Witt: Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 8 (1931), 413.

22.1.7 The spectral theorem and Hadamard's determinant problem

A fundamental theorem of linear algebra asserts that every symmetric real matrix A can be diagonalized. That is, for every such matrix A there is a nonsingular real matrix Q such that

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \lambda_2 \\ & & & & & \ddots & \lambda_t \\ O & & & & & & \lambda_t & \\ & & & & & & & \lambda_t \end{pmatrix}$$

is in diagonal form. The (real) λ_i 's are the eigenvalues of A , and the columns of Q form a basis of eigenvectors. We will make use of this result in several chapters to come. What's more, the matrix Q can be chosen to be an orthogonal matrix, which means that $Q^T = Q^{-1}$, or equivalently that the columns of Q form an orthonormal basis with respect to the usual inner product.

Theorem 1. For every real symmetric matrix A there is a real orthogonal matrix Q such that $Q^T A Q$ is diagonal.

Moving Q and Q^T to the right-hand side we may equivalently express the theorem as a representation of A as a linear combination of matrices P_i that correspond to projections onto the eigenspaces C_{λ_i} ,

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_t P_t, \\ I_n &= P_1 + \cdots + P_t, \end{aligned}$$

with $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ for all i and j . In this form the statement is usually called the spectral theorem.

The standard proofs of the theorem proceed by induction on the order of A (with some care in the presence of multiple eigenvalues), construct the basis of eigenvectors step by step, and use the fact that the characteristic polynomial splits into linear factors over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers.

The following proof due to Herb Wilf does it in one stroke and is truly inspired. It is very different from the usual proofs: It does not even refer to the eigenvalues, but instead employs an elegant compactness argument in a surprising way.

- Proof. We start with some preliminary facts. Let $O(n) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ be the set of real orthogonal matrices of order n . Since

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1} P^{-1} = Q^T P^T = (PQ)^T$$

for $P, Q \in O(n)$, we see that the set $O(n)$ is a group. Regarding any matrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ as a vector in $\mathbb{R}^{n^2}$, we find that $O(n)$ is a compact set. Indeed, as the columns of an orthogonal matrix $Q = (q_{ij})$ are unit vectors, we have $|q_{ij}| \leq 1$ for all i and j , thus $O(n)$ is bounded. Furthermore, the set $O(n)$ is defined as a subset of $\mathbb{R}^{n^2}$ by the equations

$$x_{i1}x_{j1} + x_{i2}x_{j2} + \cdots + x_{in}x_{jn} = \delta_{ij} \quad \text{for } 1 \leq i, j \leq n$$

hence it is closed, and thus compact.

For any real square matrix A let $\text{Od}(A) = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2$ be the sum of the squares of the off-diagonal entries. Suppose we can prove the following.

Lemma. If A is a real symmetric $n \times n$ matrix that is not diagonal, that is, $\text{Od}(A) > 0$, then there exists $U \in O(n)$ such that $\text{Od}(U^T A U) < \text{Od}(A)$.

Given the lemma, the theorem follows in three quick steps. Let A be a real symmetric $n \times n$ matrix.

(A) Consider the map $f_A : O(n) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ with $f_A(P) := P^T A P$. The map f_A is continuous on the compact set $O(n)$, and so the image $f_A(O(n))$ is compact.

(B) The function $\text{Od} : f_A(O(n)) \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous, hence it assumes a minimum, say at $D = Q^T A Q \in f_A(O(n))$.

(C) The value $\text{Od}(D)$ must be zero, and hence D is a diagonal matrix as required.

Indeed, if $\text{Od}(D) > 0$, then applying the Lemma we find $U \in O(n)$ with $\text{Od}(U^T D U) < \text{Od}(D)$. But

$$U^T D U = U^T Q^T A Q U = (QU)^T A (QU)$$

is in $f_A(O(n))$ (remember $O(n)$ is a group!) with Od -value smaller than that of D - contradiction, and end of proof.

It remains to prove the lemma, and for this we use a very clever method attributed to Carl Gustav Jacob Jacobi. Suppose that $a_{rs} \neq 0$ for some $r \neq s$. Then we claim that the matrix U that agrees with the identity matrix except that $u_{rr} = u_{ss} = \cos \vartheta$, $u_{rs} = \sin \vartheta$, $u_{sr} = -\sin \vartheta$ does the job, for some choice of the (real) angle ϑ :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \cos \vartheta & & \sin \vartheta & & \\ & & & 1 & & & \\ & & -\sin \vartheta & & \cos \vartheta & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}_r$$

Clearly, U is orthogonal for any ϑ .

Now let us compute the (k, ℓ) -entry $b_{k\ell}$ of $U^T A U$. We have

$$b_{k\ell} = \sum_{i,j} u_{ik} a_{ij} u_{j\ell} \quad (1)$$

For $k, \ell \notin \{r, s\}$ we get $b_{k\ell} = a_{k\ell}$. Furthermore, we have

$$\begin{aligned} b_{kr} &= \sum_{i=1}^n u_{ik} \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{jr} \\ &= \sum_{i=1}^n u_{ik} (a_{ir} \cos \vartheta - a_{is} \sin \vartheta) \\ &= a_{kr} \cos \vartheta - a_{ks} \sin \vartheta \quad (\text{for } k \neq r, s) \end{aligned}$$

Similarly, one computes

$$b_{ks} = a_{kr} \sin \vartheta + a_{ks} \cos \vartheta \quad (\text{for } k \neq r, s).$$

It follows that

$$\begin{aligned} b_{kr}^2 + b_{ks}^2 &= a_{kr}^2 \cos^2 \vartheta - 2a_{kr}a_{ks} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{ks}^2 \sin^2 \vartheta \\ &\quad + a_{kr}^2 \sin^2 \vartheta + 2a_{kr}a_{ks} \sin \vartheta \cos \vartheta + a_{ks}^2 \cos^2 \vartheta \\ &= a_{kr}^2 + a_{ks}^2 \end{aligned}$$

and by symmetry

$$b_{r\ell}^2 + b_{s\ell}^2 = a_{r\ell}^2 + a_{s\ell}^2 \quad (\text{for } \ell \neq r, s)$$

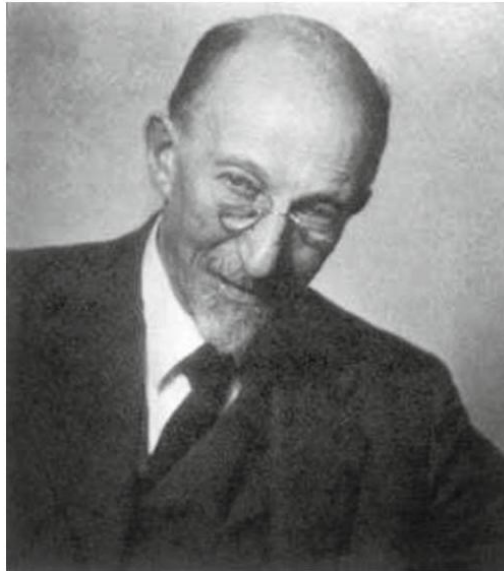
We conclude that the function Od , which sums the squares of the offdiagonal values, agrees for A and $U^T A U$ except for the entries at (r, s) and (s, r) , for any ϑ . To conclude the proof we now show that ϑ_0 can be chosen suitably as to make $b_{rs} = 0$, which will result in

$$\text{Od}(U^T A U) = \text{Od}(A) - 2a_{rs}^2 < \text{Od}(A)$$

as required.



"Diagonalizing by applying a rotation and removing off-diagonal elements"



Jacques Hadamard

Using (1) we find

$$b_{rs} = (a_{rr} - a_{ss}) \sin \vartheta \cos \vartheta + a_{rs} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta).$$

For $\vartheta = 0$ this becomes a_{rs} , while for $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ it is $-a_{rs}$. Hence by the intermediate value theorem there is some ϑ_0 between 0 and $\frac{\pi}{2}$ such that $b_{rs} = 0$, and we are through.

So this was beautiful, and we want to immediately apply the theorem to a famous (and unsolved) problem.

The Hadamard determinant problem

How large can $\det A$ be on the set of all real $n \times n$ matrices $A = (a_{ij})$ with $|a_{ij}| \leq 1$ for all i and j ?

Since the determinant is a continuous function in the a_{ij} (considered as variables) and the matrices form a compact set in $\mathbb{R}^{n^2}$, this maximum must exist. Furthermore, the maximum is attained for some matrix all of whose entries are $+1$ or -1 , because the function $\det A$ is linear in each single entry a_{ij} (if we keep all other entries fixed). Thus we can start with any matrix A and move one entry after the other to $+1$ or to -1 , in every single step not decreasing the

determinant, until we arrive at a ± 1 -matrix. In the search for the largest determinant we may thus assume that all entries of A are ± 1 .

Here is the trick: Instead of A we consider the matrix $B = A^T A = (b_{ij})$. That is, if $c_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T$ denotes the j -th column vector of A , then $b_{ij} = \langle c_i, c_j \rangle$, the inner product of c_i and c_j . In particular,

$$b_{ii} = \langle c_i, c_i \rangle = n \text{ for all } i,$$

and

$$\text{trace } B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = n^2, \quad (2)$$

which will come in handy in a moment.

Now we can go to work. First of all, from $B = A^T A$ we get $|\det A| = \sqrt{\det B}$. Since multiplication of a column of A by -1 turns $\det A$ into $-\det A$, we see that the maximum problem for $\det A$ is the same as for $\det B$. Furthermore, we may assume that A is nonsingular, and hence that B is nonsingular as well.

Since $B = A^T A$ is a symmetric matrix the spectral theorem tells us that for some $Q \in O(n)$,

$$Q^T B Q = Q^T A^T A Q = (A Q)^T (A Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & O & \\ & & & \ddots \\ & O & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

where the λ_i are the eigenvalues of B . Now, if d_j denotes the j -th column vector of AQ (which is nonzero since A is nonsingular), then

$$\lambda_j = \langle d_j, d_j \rangle = \sum_{i=1}^n d_{ij}^2 > 0$$

Thus $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ are positive real numbers and

$$\det B = \lambda_1 \cdots \lambda_n, \quad \text{trace } B = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Whenever such a product and sum of positive numbers turn up, it is always a good idea to try the arithmetic-geometric mean inequality (see Chapter 20). In our case this gives with (2)

$$\det B = \lambda_1 \cdots \lambda_n \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n} \right)^n = \left(\frac{\text{trace } B}{n} \right)^n = n^n, \quad (4)$$

and out comes Hadamard's upper bound

$$|\det A| \leq n^{n/2}. \quad (5)$$

When do we have equality in (5) or, what is the same, in (4)? Easy enough: if and only if the geometric mean of the λ_i 's equals the arithmetic mean, or equivalently, if and only if $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. But then $\text{trace } B = n\lambda = n^2$, and so $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = n$. Looking at (3) this means $Q^T B Q = nI_n$, where I_n is the $n \times n$ identity matrix. Now recall $Q^T = Q^{-1}$, multiply by Q on the left, by Q^{-1} on the right, to obtain

$$B = nI_n$$

Going back to A this means that

$$|\det A| = n^{n/2} \iff \langle c_i, c_j \rangle = 0 \text{ for } i \neq j. \quad (6)$$

Matrices A with ± 1 -entries that achieve equality in (5) are aptly called Hadamard matrices. So an $n \times n$ matrix A with ± 1 -entries is a Hadamard matrix if and only if

$$A^T A = A A^T = n I_n$$

This leads to another unsolved and apparently very difficult problem:

For which n does a Hadamard matrix of size $n \times n$ exist?

A short argument shows that if n is greater than 2, then it must be a multiple of 4. Indeed, suppose that A is an $n \times n$ Hadamard matrix, $n \geq 2$, whose rows are the vectors $r_1, \dots, r_n$. Clearly, multiplication of any row or column by -1 gives another Hadamard matrix. So we may assume that the first row consists of 1's only. Since $\langle r_1, r_i \rangle = 0$ for $i \neq 1$, every other

Statements (5) and (6) form an instance of Hadamard's inequality: The absolute value of the determinant of a matrix is at most the product of the lengths of its columns, with equality if and only if the columns are pairwise orthogonal.

For $n = 4$, with the numbering $C_1 = \emptyset$, $C_2 = \{1\}$, $C_3 = \{2\}$, $C_4 = \{1, 2\}$ this yields the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Optimal matrices for $n = 2, 3$, and 4 , with determinants $2, 4$, and 16 .
row must contain $\frac{n}{2} 1$'s and $\frac{n}{2} - 1$'s; in particular, n must be even. Assume now that $n > 2$ and consider rows r_2 and r_3 , and denote by a, b, c, d the numbers of columns that have $\begin{matrix} +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{matrix}$ and $\begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}$ in rows 2 and 3, respectively. Then from $\langle r_1, r_2 \rangle = 0$ and $\langle r_1, r_3 \rangle = 0$ we get

$$a + b = c + d = a + c = b + d = \frac{n}{2}$$

which gives $b = c, a = d$. But from $\langle r_2, r_3 \rangle = 0$ we also have $a + d = b + c$, resulting in $2a = 2b$. We conclude that $a = b = c = d = \frac{n}{4}$. Thus the order of the Hadamard matrix is either $n = 1$ or $n = 2$, or $n = a + b + c + d = 4a$, a multiple of 4.

Does a Hadamard matrix exist for all $n = 4a$? No one knows. The answer is yes for n up to the current record $n = 664$, and for certain infinite series such as the powers of 2 (see the box). But the general answer seems at present out of reach.

Hadamard matrices exist for all $n = 2^m$

Consider an m -set X and index the 2^m subsets $C \subseteq X$ in any way $C_1, \dots, C_{2^m}$. The matrix $A = (a_{ij})$ is defined as

$$a_{ij} = (-1)^{|C_i \cap C_j|}$$

We want to verify $\langle r_i, r_j \rangle = 0$ for $i \neq j$. From the definition,

$$\langle r_i, r_j \rangle = \sum_k (-1)^{|C_i \cap C_k| + |C_j \cap C_k|} \quad (*)$$

Now, as $C_i \neq C_j$ there exists an element $a \in X$ with $a \in C_i \setminus C_j$ or $a \in C_j \setminus C_i$; suppose $a \in C_i \setminus C_j$. Half the subsets of X contain a , and half do not. Let C run through all subsets

that contain a , then the pairs $\{C, C \setminus a\}$ will comprise all subsets of X . But for each such pair $\{C, C \setminus a\}$, $|C_i \cap C| + |C_j \cap C|$ and $|C_i \cap (C \setminus a)| + |C_j \cap (C \setminus a)|$ have different parity, and so the corresponding terms in (*) will sum to 0. But then the whole sum is 0, as required.

For $n = 4a$ we have thus reduced the original problem to the existence of Hadamard matrices. But how large can $\det A$ be when n is not a multiple of 4? This is again a hard problem, but maybe we can find a good lower bound for the maximum. Here is a method that often proves successful and it does in our case.

Let us look at all 2^{n^2} matrices with ± 1 -entries and consider some averages of the determinant. The arithmetic mean $\frac{1}{2^{n^2}} \sum_A \det A$ is 0 (clear?), so this is no big help. But if we consider the mean square average instead,

$$D_n := \sqrt{\frac{\sum_A (\det A)^2}{2^{n^2}}},$$

then things brighten up. Clearly,

$$\max_A \det A \geq D_n$$

so this will give us a lower bound for the maximum.

The following stunningly simple calculation of D_n^2 probably appeared first in an article by George Szekeres and Paul Turán. We learnt it from a beautiful paper of Herb Wilf who heard it from Mark Kac. In the words of Mark Kac: "Just write $(\det A)^2$ out twice, interchange summation, and everything simplifies." So we want to do just that.

From the definition of the determinant we get

$$\begin{aligned} D_n^2 &= \frac{1}{2^{n^2}} \sum_A \left(\sum_{\pi} (\text{sign } \pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2^{n^2}} \sum_A \sum_{\sigma} \sum_{\tau} (\text{sign } \sigma)(\text{sign } \tau) a_{1\sigma(1)} a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} a_{n\tau(n)}, \end{aligned}$$

where σ and τ run independently through all permutations of $\{1, \dots, n\}$. Interchange of summation yields

$$D_n^2 = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{\sigma, \tau} (\text{sign } \sigma)(\text{sign } \tau) \left(\sum_A a_{1\sigma(1)} a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} a_{n\tau(n)} \right).$$

This doesn't look too promising, but wait. Look at a fixed pair (σ, τ) . The inner sum $\sum_A$ is really a summation over n^2 variables, one for each a_{ij} :

$$\sum_{a_{11}=\pm 1} \sum_{a_{12}=\pm 1} \cdots \sum_{a_{nn}=\pm 1} a_{1\sigma(1)} a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} a_{n\tau(n)}. \quad (7)$$

Suppose $\sigma(i) = k \neq \tau(i)$. Then every summand contains a_{ik} , and therefore the whole sum has the factor $\sum_{a_{ik}=\pm 1} a_{ik} = 0$, and hence is 0 as well. The only way that the sum fails to be 0 is when $\sigma = \tau$, and everything simplifies indeed: For $\sigma = \tau$, the inner product is 1 as is the term $(\text{sign } \sigma)^2$. The sum in (7) is therefore

$$\sum_{a_{11}=\pm 1} \cdots \sum_{a_{nn}=\pm 1} 1 = 2^{n^2}$$

and wrapping things up we obtain

$$D_n^2 = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{\sigma} 2^{n^2} = n!$$

and thus the following result.

Theorem 2. There exists an $n \times n$ matrix with entries ± 1 whose determinant is greater than $\sqrt{n!}$.

It is a characteristic feature of averaging that, while we learn that such a matrix exists, we have no clue how to construct it efficiently. But, surprisingly, the bound is quite good. Invoking Stirling's formula from page 13 we have

$$\sqrt{n!} \sim (2\pi n)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}$$

and this is not too bad in comparison to the upper bound $n^{n/2}$. Using the biquadratic mean average Szekeres and Turán got the even better lower bound $\frac{1}{4}\sqrt{n!}\sqrt{n}$, but the correct growth for the maximum as n goes to infinity is still not known.

References

- [1] J. Hadamard: Résolution d'une question relative aux déterminants, Bulletin des Sciences Mathématiques 17 (1893), 240-246.
- [2] G. Szekeres & P. Turán: An extremal problem in the theory of determinants, in: "Collected Papers of Paul Turán" (P. Erdős, ed.), Akadémiai Kiadó, Budapest 1990, Vol. 1, pp. 81-87.
- [3] H. Wilf: An algorithm-inspired proof of the spectral theorem in E^n , Amer. Math. Monthly 88 (1981), 49-50.
- [4] H. Wilf: Some examples of combinatorial averaging, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 250-261.

22.1.8 Some irrational numbers

" π is irrational "

This was already conjectured by Aristotle, when he claimed that diameter and circumference of a circle are not commensurable. The first proof of this fundamental fact was given by Johann Heinrich Lambert in 1766. In fact, Lambert even showed that $\tan r$ is irrational for rational $r \neq 0$; the irrationality of π follows from this since $\tan \frac{\pi}{4} = 1$. Our Book Proof is due to Ivan Niven, 1947: an extremely elegant one-page proof that needs only elementary calculus. Its idea is powerful, and quite a bit more can be derived from it, as was shown by Iwamoto and Koksma, respectively:

- π^2 is irrational and
- e^r is irrational for rational $r \neq 0$.

Niven's method does, however, have its roots and predecessors: It can be traced back to the classical paper by Charles Hermite from 1873 which first established that e is transcendental, that is, that e is not a zero of a polynomial with rational coefficients.

Before we treat π we will look at e and its powers, and see that these are irrational. This is much easier, and we thus also follow the historical order in the development of the results. To start with, it is rather easy to see (as did Fourier in 1815) that $e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ is irrational. Indeed, if we had $e = \frac{a}{b}$ for integers a and $b > 0$, then we would get

$$n!be = n!a$$

for every $n \geq 0$. But this cannot be true, because on the right-hand side we have an integer, while the left-hand side with

$$e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots\right)$$

decomposes into an integral part

$$bn! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

and a second part

$$b \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right)$$



Charles Hermite

$$\begin{aligned}
 e &:= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \\
 &= 2.718281828 \cdots \\
 e^x &:= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Geometric series

For the infinite geometric series

$$Q = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots$$

with $q > 1$ we clearly have

$$qQ = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots = 1 + Q$$

and thus

$$Q = \frac{1}{q-1}$$

On prouve dans les éléments que le nombre e , base des logarithmes népériens, n'a pas une valeur rationnelle. On devrait, ce me semble, ajouter que la même méthode prouve aussi que e ne peut pas être racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, en sorte que l'on ne peut pas avoir $ae + \frac{b}{e} = c$, a étant un entier positif et b, c , des entiers positifs ou négatifs. En effet, si l'on remplace dans cette équation e et $\frac{1}{e}$ ou e^{-1} par leurs développements déduits de celui de e^x , puis qu'on multiplie les deux membres par $1.2.3...n$, on trouvera aisément

$$\frac{a}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \dots \right) \pm \frac{b}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2} + \dots \right) = \mu,$$

μ étant un entier. On peut toujours faire en sorte que le facteur

$$\pm \frac{b}{n+1}$$

soit positif; il suffira de supposer n pair si b est < 0 et n impair si b est > 0 ; en prenant de plus n très grand, l'équation que nous venons d'écrire conduira dès lors à une absurdité; car son premier membre étant essentiellement positif et très petit, sera compris entre 0 et 1, et ne pourra pas être égal à un entier μ . Donec, etc.

Liouville's paper

which is approximately $\frac{b}{n}$, so that for large n it certainly cannot be integral: It is larger than $\frac{b}{n+1}$ and smaller than $\frac{b}{n}$, as one can see from a comparison with a geometric series:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Now one might be led to think that this simple multiply-by- $n!$ trick is not even sufficient to show that e^2 is irrational. This is a stronger statement: $\sqrt{2}$ is an example of a number which is irrational, but whose square is not. From John Cosgrave we have learned that with two nice ideas/observations (let's call them "tricks") one can get two steps further nevertheless: Each of the tricks is sufficient to show that e^2 is irrational, the combination of both of them even yields the same for e^4 . The first trick may be found in a one page paper by J. Liouville from 1840 - and the second one in a two page "addendum" which Liouville published on the next two journal pages.

Why is e^2 irrational? What can we derive from $e^2 = \frac{a}{b}$? According to Liouville we should write this as

$$be = ae^{-1},$$

substitute the series

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

and

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \pm \dots$$

and then multiply by $n!$, for a sufficiently large even n . Then we see that $n!be$ is nearly integral:

$$n!b \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

is an integer, and the rest

$$n!b \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \right)$$

is approximately $\frac{b}{n}$: It is larger than $\frac{b}{n+1}$ but smaller than $\frac{b}{n}$, as we have seen above. At the same time $n!ae^{-1}$ is nearly integral as well: Again we get a large integral part, and then a rest

$$(-1)^{n+1}n!a \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} \mp \cdots \right)$$

and this is approximately $(-1)^{n+1}\frac{a}{n}$. More precisely: for even n the rest is larger than $-\frac{a}{n}$, but smaller than

$$-a \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3} - \cdots \right) = -\frac{a}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < 0$$

But this cannot be true, since for large even n it would imply that $n!ae^{-1}$ is just a bit smaller than an integer, while $n!be$ is a bit larger than an integer, so $n!ae^{-1} = n!be$ cannot hold. $\square$

In order to show that e^4 is irrational, we now courageously assume that $e^4 = \frac{a}{b}$ were rational, and write this as

$$be^2 = ae^{-2}$$

We could now try to multiply this by $n!$ for some large n , and collect the non-integral summands, but this leads to nothing useful: The sum of the remaining terms on the left-hand side will be approximately $b\frac{2^{n+1}}{n}$, on the right side $(-1)^{n+1}a\frac{2^{n+1}}{n}$, and both will be very large if n gets large.

So one has to examine the situation a bit more carefully, and make two little adjustments to the strategy: First we will not take an arbitrary large n , but a large power of two, $n = 2^m$; and secondly we will not multiply by $n!$, but by $\frac{n!}{2^{n-1}}$. Then we need a little lemma, a special case of Legendre's theorem (see page 10): For any $n \geq 1$ the integer $n!$ contains the prime factor 2 at most $n-1$ times - with equality if (and only if) n is a power of two, $n = 2^m$.

This lemma is not hard to show: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ of the factors of $n!$ are even, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ of them are divisible by 4, and so on. So if 2^k is the largest power of two which satisfies $2^k \leq n$, then $n!$ contains the prime factor 2 exactly

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{2^k} = n \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) \leq n-1$$

times, with equality in both inequalities exactly if $n = 2^k$. Let's get back to $be^2 = ae^{-2}$. We are looking at

$$b \frac{n!}{2^{n-1}} e^2 = a \frac{n!}{2^{n-1}} e^{-2} \tag{1}$$

and substitute the series

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \cdots + \frac{2^r}{r!} + \cdots$$

and

$$e^{-2} = 1 - \frac{2}{1} + \frac{4}{2} - \frac{8}{6} \pm \cdots + (-1)^r \frac{2^r}{r!} + \cdots$$

For $r \leq n$ we get integral summands on both sides, namely

$$b \frac{n!}{2^{n-1}} \frac{2^r}{r!} \quad \text{resp.} \quad (-1)^r a \frac{n!}{2^{n-1}} \frac{2^r}{r!}$$

where for $r > 0$ the denominator $r!$ contains the prime factor 2 at most $r - 1$ times, while $n!$ contains it exactly $n - 1$ times. (So for $r > 0$ the summands are even.) And since n is even (we assume that $n = 2^m$), the series that we get for $r \geq n + 1$ are

$$2b \left(\frac{2}{n+1} + \frac{4}{(n+1)(n+2)} + \frac{8}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right)$$

resp.

$$2a \left(-\frac{2}{n+1} + \frac{4}{(n+1)(n+2)} - \frac{8}{(n+1)(n+2)(n+3)} \pm \cdots \right)$$

These series will for large n be roughly $\frac{4b}{n}$ resp. $-\frac{4a}{n}$, as one sees again by comparison with geometric series. For large $n = 2^m$ this means that the left-hand side of (1) is a bit larger than an integer, while the right-hand side is a bit smaller - contradiction!

So we know that e^4 is irrational; to show that e^3, e^5 etc. are irrational as well, we need heavier machinery (that is, a bit of calculus), and a new idea - which essentially goes back to Charles Hermite, and for which the key is hidden in the following simple lemma.

Lemma. For some fixed $n \geq 1$, let

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

- (i) The function $f(x)$ is a polynomial of the form $f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i$, where the coefficients c_i are integers. where the coefficients c_i are integers.
- (ii) For $0 < x < 1$ we have $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.
- (iii) The derivatives $f^{(k)}(0)$ and $f^{(k)}(1)$ are integers for all $k \geq 0$.

- Proof. Parts (i) and (ii) are clear.

For (iii) note that by (i) the k -th derivative $f^{(k)}$ vanishes at $x = 0$ unless $n \leq k \leq 2n$, and in this range $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k$ is an integer. From $f(x) = f(1-x)$ we get $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$ for all x , and hence $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0)$, which is an integer.

Theorem 1. e^r is irrational for every $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

- Proof. It suffices to show that e^s cannot be rational for a positive integer s (if $e^{\frac{s}{t}}$ were rational, then $(e^{\frac{s}{t}})^t = e^s$ would be rational, too). Assume that $e^s = \frac{a}{b}$ for integers $a, b > 0$, and let n be so large that $n! > as^{2n+1}$. Put

$$F(x) := s^{2n} f(x) - s^{2n-1} f'(x) + s^{2n-2} f''(x) \mp \cdots + f^{(2n)}(x),$$

where $f(x)$ is the function of the lemma.

$F(x)$ may also be written as an infinite sum

$$F(x) = s^{2n} f(x) - s^{2n-1} f'(x) + s^{2n-2} f''(x) \mp \cdots,$$

since the higher derivatives $f^{(k)}(x)$, for $k > 2n$, vanish. From this we see that the polynomial $F(x)$ satisfies the identity

$$F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1} f(x).$$

Thus differentiation yields

$$\frac{d}{dx} [e^{sx} F(x)] = se^{sx} F(x) + e^{sx} F'(x) = s^{2n+1} e^{sx} f(x)$$

and hence

$$N := b \int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} f(x) dx = b [e^{sx} F(x)]_0^1 = aF(1) - bF(0)$$

This is an integer, since part (iii) of the lemma implies that $F(0)$ and $F(1)$ are integers. However, part (ii) of the lemma yields estimates for the size of N from below and from above,

$$0 < N = b \int_0^1 s^{2n+1} e^{sx} f(x) dx < b s^{2n+1} e^s \frac{1}{n!} = \frac{a s^{2n+1}}{n!} < 1$$

which shows that N cannot be an integer: contradiction.
Now that this trick was so successful, we use it once more.
Theorem 2. π^2 is irrational.

- Proof. Assume that $\pi^2 = \frac{a}{b}$ for integers $a, b > 0$. We now use the polynomial

$$F(x) := b^n \left(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) \mp \dots \right),$$

which satisfies $F''(x) = -\pi^2 F(x) + b^n \pi^{2n+2} f(x)$.
From part (iii) of the lemma we get that $F(0)$ and $F(1)$ are integers. Elementary differentiation rules yield

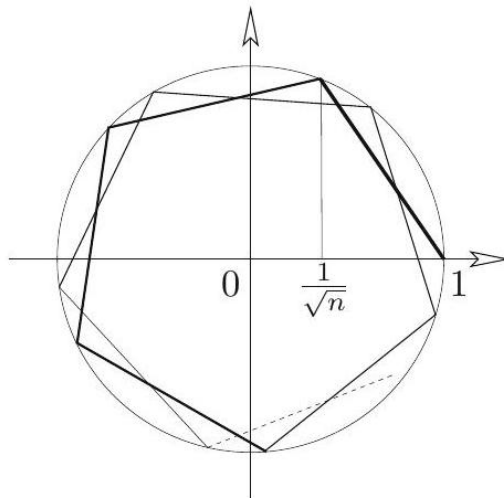
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x] &= (F''(x) + \pi^2 F(x)) \sin \pi x \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x) \sin \pi x \\ &= \pi^2 a^n f(x) \sin \pi x \end{aligned}$$

and thus we obtain

$$\begin{aligned} N := \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x dx &= \left[\frac{1}{\pi} F'(x) \sin \pi x - F(x) \cos \pi x \right]_0^1 \\ &= F(0) + F(1) \end{aligned}$$

which is an integer. Furthermore N is positive since it is defined as the integral of a function that is positive (except on the boundary). However, if we choose n so large that $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$, then from part (ii) of the lemma we obtain

$$\begin{aligned} \frac{22}{7} &= 3.142857142857... \\ \frac{355}{113} &= 3.141592920353... \\ \frac{104348}{33215} &= 3.141592653921... \\ \frac{\pi}{\pi} &= 3.141592653589... \end{aligned}$$



integral of a function that is positive (except on the boundary). However, if we choose n so large that $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$, then from part (ii) of the lemma we obtain

$$0 < N = \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin \pi x dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

a contradiction.

Here comes our final irrationality result.

Theorem 3. For every odd integer $n \geq 3$, the number

$$A(n) := \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

is irrational.

We will need this result for Hilbert's third problem (see Chapter 10) in the cases $n = 3$ and $n = 9$. For $n = 2$ and $n = 4$ we have $A(2) = \frac{1}{4}$ and $A(4) = \frac{1}{3}$, so the restriction to odd integers is essential. These values are easily derived by appealing to the diagram in the margin, in which the statement " $\frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ is irrational" is equivalent to saying that the polygonal arc constructed from $\frac{1}{\sqrt{n}}$, all of whose chords have the same length, never closes into itself.

We leave it as an exercise for the reader to show that $A(n)$ is rational only for $n \in \{1, 2, 4\}$. For that, distinguish the cases when $n = 2^r$, and when n is not a power of 2.

- Proof. We use the addition theorem

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

from elementary trigonometry, which for $\alpha = (k+1)\varphi$ and $\beta = (k-1)\varphi$ yields

$$\cos(k+1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos k\varphi - \cos(k-1)\varphi \quad (2)$$

For the angle $\varphi_n = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$, which is defined by $\cos \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ and $0 \leq \varphi_n \leq \pi$, this yields representations of the form

$$\cos k\varphi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k},$$

where A_k is an integer that is not divisible by n , for all $k \geq 0$. In fact, we have such a representation for $k = 0, 1$ with $A_0 = A_1 = 1$, and by induction on k using (2) we get for $k \geq 1$

$$\cos(k+1)\varphi_n = 2 \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{A_k}{\sqrt{n}^k} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}} = \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}}.$$

Thus we obtain $A_{k+1} = 2A_k - nA_{k-1}$. If $n \geq 3$ is odd, and A_k is not divisible by n , then we find that A_{k+1} cannot be divisible by n , either.

Now assume that

$$A(n) = \frac{1}{\pi} \varphi_n = \frac{k}{\ell}$$

is rational (with integers $k, \ell > 0$). Then $\ell\varphi_n = k\pi$ yields

$$\pm 1 = \cos k\pi = \frac{A_\ell}{\sqrt{n}^\ell}.$$

Thus $\sqrt{n}^\ell = \pm A_\ell$ is an integer, with $\ell \geq 2$, and hence $n \mid \sqrt{n}^\ell$. With $\sqrt{n}^\ell \mid A_\ell$ we find that n divides A_ℓ , a contradiction.

References

- [1] C. Hermite: Sur la fonction exponentielle, Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris) 77 (1873), 18-24; Euvres de Charles Hermite, Vol. III, Gauthier-Villars, Paris 1912, pp. 150-181.
- [2] Y. Iwamoto: A proof that π^2 is irrational, J. Osaka Institute of Science and Technology 1 (1949), 147-148.
- [3] J. F. Koksma: On Niven's proof that π is irrational, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 23 (1949), 39.
- [4] J. Liouville: Sur l'irrationalité du nombre $e = 2,718\dots$, Journal de Mathématiques Pures et Appl. (1) 5 (1840), 192; Addition, 193-194.
- [5] I. NIVEN: A simple proof that π is irrational, Bulletin Amer. Math. Soc. 53 (1947), 509.

22.1.9 Four times $\pi^2/6$

We know that the infinite series $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ does not converge. Indeed, in Chapter 1 we have seen that even the series $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ diverges.

However, the sum of the reciprocals of the squares converges (although very slowly, as we will also see), and it produces an interesting value.

Euler's series

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

This is a classical, famous and important result by Leonhard Euler from 1734. One of its key interpretations is that it yields the first nontrivial value $\zeta(2)$ of Riemann's zeta function (see the appendix on page 62). This value is irrational, as we have seen in Chapter 8.

But not only the result has a prominent place in mathematics history, there are also a number of extremely elegant and clever proofs that have their history: For some of these the joy of discovery and rediscovery has been shared by many. In this chapter, we present four such proofs.

- **Proof.** The first proof appears as an exercise in William J. LeVeque's number theory textbook from 1956. But he says: "I haven't the slightest idea where that problem came from, but I'm pretty certain that it wasn't original with me."

The proof consists in two different evaluations of the double integral

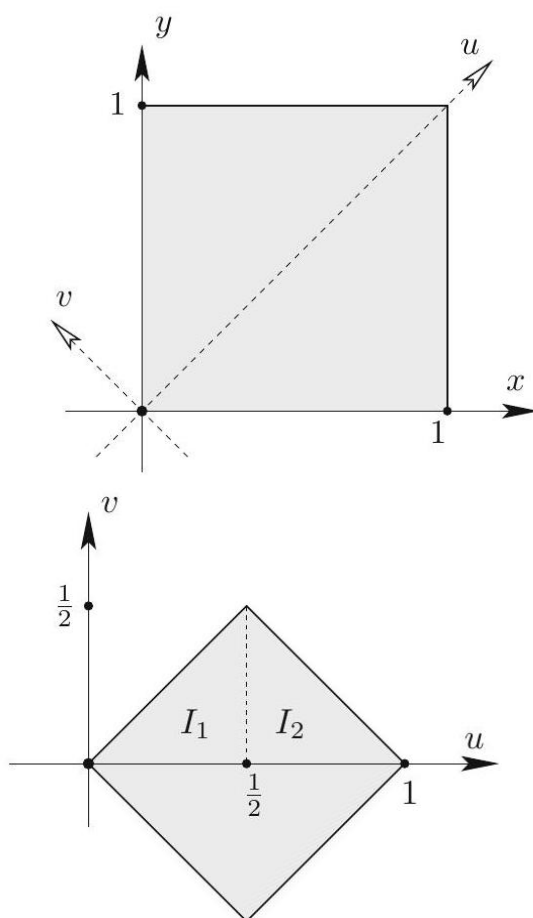
$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$$

For the first one, we expand $\frac{1}{1-xy}$ as a geometric series, decompose the summands as products, and integrate effortlessly:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (xy)^n dx dy = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 x^n dx \right) \left(\int_0^1 y^n dy \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 1 &= 1.000000 \\
 1 + \frac{1}{4} &= 1.250000 \\
 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} &= 1.361111 \\
 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} &= 1.423611 \\
 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} &= 1.463611 \\
 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} &= 1.491388 \\
 \pi^2/6 &= 1.644934.
 \end{aligned}$$



This evaluation also shows that the double integral (over a positive function with a pole at $x = y = 1$) is finite. Note that the computation is also easy and straightforward if we read it backwards - thus the evaluation of $\zeta(2)$ leads one to the double integral I .

The second way to evaluate I comes from a change of coordinates: in the new coordinates given by $u := \frac{y+x}{2}$ and $v := \frac{y-x}{2}$ the domain of integration is a square of side length $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, which we get from the old domain by first rotating it by 45° and then shrinking it by a factor of $\sqrt{2}$. Substitution of $x = u - v$ and $y = u + v$ yields

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-u^2+v^2}.$$

To transform the integral, we have to replace $dx dy$ by $2du dv$, to compensate for the fact that our coordinate transformation reduces areas by a constant factor of 2 (which is the Jacobi determinant of the transformation; see the box on the next page). The new domain of integration, and the function to be integrated, are symmetric with respect to the u -axis, so we just need to compute two times (another factor of 2 arises here!) the integral over the upper half domain, which we split into two parts in the most natural way:

$$I = 4 \int_0^{1/2} \left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + 4 \int_{1/2}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du$$

Using $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$, this becomes

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du \\ &\quad + 4 \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du \end{aligned}$$

These integrals can be simplified and finally evaluated by substituting $u = \sin \theta$ resp. $u = \cos \theta$. But we proceed more directly, by computing that the derivative of $g(u) := \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right)$ is $g'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, while the derivative of $h(u) := \arctan \left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) = \arctan \left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \right)$ is $h'(u) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. So we may use $\int_a^b f'(x)f(x)dx = [\frac{1}{2}f(x)^2]_a^b = \frac{1}{2}f(b)^2 - \frac{1}{2}f(a)^2$ and get

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{1/2} g'(u)g(u)du + 4 \int_{1/2}^1 -2h'(u)h(u)du \\ &= 2 [g(u)^2]_0^{1/2} - 4 [h(u)^2]_{1/2}^1 \\ &= 2g\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2g(0)^2 - 4h(1)^2 + 4h\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 - 0 + 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

This proof extracted the value of Euler's series from an integral via a rather simple coordinate transformation. An ingenious proof of this type - with an entirely nontrivial coordinate transformation - was later discovered by Beukers, Calabi and Kolk. The point of departure for that proof is to split the sum $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ into the even terms and the odd terms. Clearly the even terms $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k)^2}$ sum to $\frac{1}{4}\zeta(2)$, so the odd terms $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ make up three quarters of the total sum $\zeta(2)$. Thus Euler's series is equivalent to

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- Proof. As above, we may express this as a double integral, namely

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} dx dy = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

So we have to compute this integral J . And for this Beukers, Calabi and Kolk proposed the new coordinates

$$u := \arccos \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}} \quad v := \arccos \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}$$

To compute the double integral, we may ignore the boundary of the domain, and consider x, y in the range $0 < x < 1$ and $0 < y < 1$. Then u, v will lie in the triangle $u > 0, v > 0, u + v < \pi/2$. The coordinate transformation can be inverted explicitly, which leads one to the substitution

$$x = \frac{\sin u}{\cos v} \quad \text{and} \quad y = \frac{\sin v}{\cos u}$$

It is easy to check that these formulas define a bijective coordinate transformation between the interior of the unit square $S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ and the interior of the triangle $T = \{(u, v) : u, v \geq 0, u + v \leq \pi/2\}$. Now we have to compute the Jacobi determinant of the coordinate transformation, and magically it turns out to be

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 u} & \frac{\cos^2 v}{\cos u} \end{pmatrix} = 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} = 1 - x^2 y^2.$$

But this means that the integral that we want to compute is transformed into

$$J = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-u} 1 \, du \, dv$$

which is just the area $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$ of the triangle T . $\square$

The Substitution Formula

To compute a double integral

$$I = \int_S f(x, y) \, dx \, dy$$

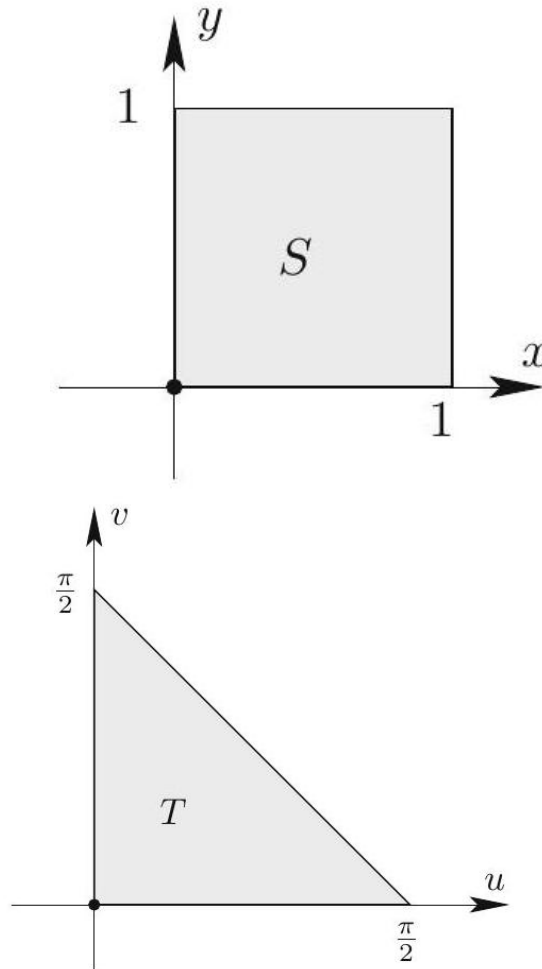
we may perform a substitution of variables

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v),$$

if the correspondence of $(u, v) \in T$ to $(x, y) \in S$ is bijective and continuously differentiable. Then I equals

$\int_T f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| \, du \, dv$, where $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ is the Jacobi determinant:

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{pmatrix}$$



For $m = 1, 2, 3$ this yields $\cot^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$
 $\cot^2 \frac{\pi}{5} + \cot^2 \frac{2\pi}{5} = 2 \cot^2 \frac{\pi}{7} + \cot^2 \frac{2\pi}{7} + \cot^2 \frac{3\pi}{7} = 5$

Beautiful - even more so, as the same method of proof extends to the computation of $\zeta(2k)$ in terms of a $2k$ -dimensional integral, for all $k \geq 1$. We refer to the original paper of Beuker, Calabi and Kolk [2], and to Chapter 26, where we'll achieve this on a different path, using the Herglotz trick and Euler's original approach.

After these two proofs via coordinate transformation we can't resist the temptation to present another, entirely different and completely elementary proof for $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. It appears in a sequence of exercises in the problem book by the twin brothers Akiva and Isaak Yaglom, whose Russian original edition appeared in 1954. Versions of this beautiful proof were rediscovered and presented by F. Holme (1970), I. Papadimitriou (1973), and by Ransford (1982) who attributed it to John Scholes.

- **Proof.** The first step is to establish a remarkable relation between values of the (squared) cotangent function. Namely, for all $m \geq 1$ one has

$$\cot^2 \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) + \cot^2 \left(\frac{2\pi}{2m+1} \right) + \cdots + \cot^2 \left(\frac{m\pi}{2m+1} \right) = \frac{2m(2m-1)}{6}. \quad (1)$$

To establish this, we start with the relation $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Taking the n -th power $e^{inx} = (e^{ix})^n$, we get

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$$

The imaginary part of this is

$$\sin nx = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \cdots \quad (2)$$

Now we let $n = 2m + 1$, while for x we will consider the m different values $x = \frac{r\pi}{2m+1}$, for $r = 1, 2, \dots, m$. For each of these values we have $n\pi = r\pi$, and thus $\sin nx = 0$, while $0 < x < \frac{\pi}{2}$ implies that for $\sin x$ we get m distinct positive values. In particular, we can divide (2) by $\sin^n x$, which yields

$$0 = \binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x \pm \dots$$

that is,

$$0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \pm \dots$$

for each of the m distinct values of x . Thus for the polynomial of degree m

$$p(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

we know m distinct roots

$$a_r = \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) \quad \text{for } r = 1, 2, \dots, m$$

The roots are distinct because $\cot^2 x = \cot^2 y$ implies $\sin^2 x = \sin^2 y$ and thus $x = y$ for $x, y \in \left\{ \frac{r\pi}{2m+1} : 1 \leq r \leq m \right\}$.

Hence the polynomial coincides with

$$p(t) = \binom{2m+1}{1} \left(t - \cot^2 \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) \right) \dots \left(t - \cot^2 \left(\frac{m\pi}{2m+1} \right) \right)$$

Comparison of the coefficients of t^{m-1} in $p(t)$ now yields that the sum of the roots is

$$a_1 + \dots + a_r = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

which proves (1).

We also need a second identity, of the same type,

$$\csc^2 \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) + \csc^2 \left(\frac{2\pi}{2m+1} \right) + \dots + \csc^2 \left(\frac{m\pi}{2m+1} \right) = \frac{2m(2m+2)}{6} \quad (3)$$

for the cosecant function $\csc x = \frac{1}{\sin x}$. But

$$\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x + 1$$

so we can derive (3) from (1) by adding m to both sides of the equation. Now the stage is set, and everything falls into place. We use that in the range $0 < y < \frac{\pi}{2}$ we have

$$0 < \sin y < y < \tan y$$

and thus

$$0 < \cot y < \frac{1}{y} < \csc y$$

which implies

$$\cot^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y$$

Now we take this double inequality, apply it to each of the m distinct values of x , and add the results. Using (1) for the left-hand side, and (3) for the right-hand side, we obtain

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \frac{2m(2m+2)}{6}$$

that is,

$$\frac{\pi^2}{6} \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-1}{2m+1} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} \frac{2m}{2m+1} \frac{2m+2}{2m+1}$$

Both the left-hand and the right-hand side converge to $\frac{\pi^2}{6}$ for $m \rightarrow \infty$: end of proof.

So how fast does $\sum \frac{1}{n^2}$ converge to $\pi^2/6$? For this we have to estimate the difference

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

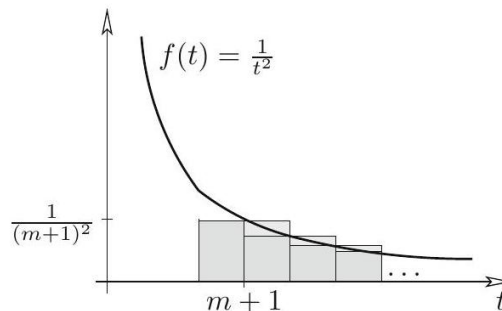
Comparison of coefficients:

If $p(t) = c(t - a_1) \cdots (t - a_m)$, then the coefficient of t^{m-1} is $-c(a_1 + \cdots + a_m)$.

$0 < a < b < c$

implies

$0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$



This is very easy with the technique of "comparing with an integral" that we have reviewed already in the appendix to Chapter 2 (page 12). It yields

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_m^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{m}$$

for an upper bound and

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \int_{m+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{m+1}$$

for a lower bound on the "remaining summands" - or even

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \int_{m+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{m+\frac{1}{2}}$$

if you are willing to do a slightly more careful estimate, using that the function $f(t) = \frac{1}{t^2}$ is convex.

This means that our series does not converge too well; if we sum the first one thousand summands, then we expect an error in the third digit after the decimal point, while for the sum of the first one million summands, $m = 1000000$, we expect to get an error in the sixth decimal digit, and we do. However, then comes a big surprise: to an accuracy of 45 digits,

$$\begin{aligned} \pi^2/6 &= 1.644934066848226436472415166646025189218949901 \\ \sum_{n=1}^{10^6} \frac{1}{n^2} &= 1.644933066848726436305748499979391855885616544 \end{aligned}$$

So the sixth digit after the decimal point is wrong (too small by 1), but the next six digits are right! And then one digit is wrong (too large by 5), then again five are correct. This surprising discovery is quite recent, due to Roy D. North from Colorado Springs, 1988. (In 1982, Martin R. Powell, a school teacher from Amersham, Bucks, England, failed to notice the full effect due to the insufficient computing power available at the time.) It is too strange to be purely coincidental ... A look at the error term, which again to 45 digits reads

$$\sum_{n=10^6+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0.0000009999995000001666666666663333333333357,$$

reveals that clearly there is a pattern. You might try to rewrite this last number as

$$+10^{-6} - \frac{1}{2}10^{-12} + \frac{1}{6}10^{-18} - \frac{1}{30}10^{-30} + \frac{1}{42}10^{-42} + \dots$$

where the coefficients $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42})$ of 10^{-6i} form the beginning of the sequence of Bernoulli numbers that we'll meet again in Chapter 26. We refer our readers to the article by Borwein, Borwein & Dilcher [3] for more such surprising "coincidences" - and for proofs.

And if only to repeat the point that it pays off to look for gems hidden in exercise sections of books, in particular if they are written by brothers, here's our last proof for Euler's Theorem, as sketched in Exercise 11 of page 381 of the book "Pi and the AGM" by the brothers Jonathan and Peter Borwein. It establishes that you can get Euler's Theorem by "squaring" in an ingenious way the Gregory-Leibniz series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \frac{\pi}{4}$$

- Proof. The first trick in this proof is to consider the Gregory-Leibniz series in doubly-infinite form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. As for negative $n = -k < 0$ we get the same terms as for $n = k-1 \geq 0$, since $\frac{(-1)^{-k}}{2(-k)+1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2(k-1)+1}$, we infer that $\sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converges to $\pi/2$ with $N \rightarrow \infty$, and thus the square of this sum converges to $\pi^2/4$. You may write this as

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m,n=-N}^N \frac{(-1)^m}{2m+1} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi^2}{4}.$$

The double sum may be interpreted as the sum of all entries of a square matrix of size $(2N+1) \times (2N+1)$, and we know that for $N \rightarrow \infty$ this sum of all entries tends to $\pi^2/4$. We want to know, however, that the sum of only the diagonal entries, for $m = n$, also tends to $\pi^2/4$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4},$$

because then $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \pi^2/8$ will follow, and this, as we know, is equivalent to Euler's theorem. So let's show that the sum of all off-diagonal terms tends to 0! We write δ_N for this sum, and use a prime to denote that the diagonal terms with $m = n$ are deleted, so

$$\begin{aligned}
\delta_N &= \sum_{m,n=-N}^N \iota \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)(2n+1)} \\
&= \sum_{m,n=-N}^N \iota (-1)^{m+n} \left(\frac{1}{2m-2n} \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m-2n} \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \sum_{m,n=-N}^N \iota (-1)^{m+n} \left(\frac{1}{2m-2n} \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2n-2m} \frac{1}{2m+1} \right) \\
&= \sum_{m,n=-N}^N \iota (-1)^{m+n} \frac{1}{m-n} \frac{1}{2m+1} \\
&= \sum_{m=-N}^N \frac{1}{2m+1} \left(\sum_{n=-N}^N \iota \frac{(-1)^{m-n}}{m-n} \right)
\end{aligned}$$

Prove the Gregory-Leibniz identity, for example by integrating the geometric series $1 - x^2 + x^4 \pm \dots = \frac{1}{1+x^2}$ and then evaluating at 1.

Here we use that $\frac{1}{k\ell} = \frac{1}{k-\ell} \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{k} \right)$, for $k \neq \ell$. This replaces $\frac{1}{k\ell}$ by two summands that are not symmetric in k and ℓ .

For this we have interchanged $m \leftrightarrow n$ in the second part of the double sum.

Here we use that $\frac{1}{k\ell} = \frac{1}{k+\ell} \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{k} \right)$ for positive k and ℓ .

We got the estimate $H_N < \log N + 1$ for the harmonic numbers on page 13.

We only need to show that the terms

$$c_{m,N} := \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^{m-n}}{m-n}$$

are small enough in absolute value. What do we know about them? It is easy to see that $c_{-m,N} = -c_{m,N}$, so in particular $c_{0,N} = 0$. Thus we may assume that $m > 0$, and note that the summands for $n = m+k$ and $n = m-k$ cancel as long as they are in the range between $-N$ and N , that is, for $1 \leq k \leq N-m$. Thus $c_{m,N}$ equals the alternating sum of fractions of decreasing size given by the remaining terms, where the largest one occurs for $n = m - (N-m) - 1 = 2m - N - 1$, that is $m-n = N-m+1$. Hence

$$c_{m,N} = (-1)^{N-m+1} \left(\frac{1}{N-m+1} - \frac{1}{N-m+2} \pm \dots \pm \frac{1}{m+N} \right)$$

which implies that

$$|c_{m,N}| \leq \frac{1}{N-m+1}$$

This finally yields

$$\begin{aligned}
|\delta_N| &\leq \sum_{m=-N}^N \left| \frac{1}{2m+1} \right| |c_{m,N}| \leq \sum_{m=-N}^N \frac{1}{2|m|-1} |c_{m,N}| \\
&\leq 2 \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} |c_{m,N}| \leq 2 \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} \frac{1}{N-m+1} \\
&= 2 \sum_{m=1}^N \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{N-m+1} \right) \\
&= 2 \frac{1}{N+1} (H_N + H_N) < 4 \frac{\log N + 1}{N+1}
\end{aligned}$$

and this goes to 0 as N goes to infinity.

Appendix: The Riemann zeta function

The Riemann zeta function $\zeta(s)$ is defined for real $s > 1$ by

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

Our estimates for H_n (see page 12) imply that the series for $\zeta(1)$ diverges, but for any real $s > 1$ it does converge. The zeta function has a canonical continuation to the entire complex plane (with one simple pole at $s = 1$), which can be constructed using power series expansions. The resulting complex function is of utmost importance for the theory of prime numbers. Let us mention four diverse connections:

(1) The remarkable identity

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

is due to Euler. It encodes the basic fact that every natural number has a unique (!) decomposition into prime factors; using this, Euler's identity is a simple consequence of the geometric series expansion

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

The irrationality of $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ together with Euler's identity implies, again, that there are infinitely many primes ...

(2) The following marvelous argument of Don Zagier computes $\zeta(4)$ from $\zeta(2)$. Consider the function

$$f(m, n) = \frac{2}{m^3 n} + \frac{1}{m^2 n^2} + \frac{2}{mn^3}$$

for integers $m, n \geq 1$. It is easily verified that for all m and n ,

$$f(m, n) - f(m + n, n) - f(m, m + n) = \frac{2}{m^2 n^2}$$

Let us sum this equation over all $m, n \geq 1$. If $i \neq j$, then (i, j) is either of the form $(m + n, n)$ or of the form $(m, m + n)$, for $m, n \geq 1$. Thus, in the sum on the left-hand side all terms $f(i, j)$ with $i \neq j$ cancel, and so

$$\sum_{n \geq 1} f(n, n) = \sum_{n \geq 1} \frac{5}{n^4} = 5\zeta(4)$$

remains. For the right-hand side one obtains

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{2}{m^2 n^2} = 2 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = 2\zeta(2)^2$$

and out comes the equality

$$5\zeta(4) = 2\zeta(2)^2$$

With $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ we thus get $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Another derivation via Bernoulli numbers appears in Chapter 26.

(3) It has been known for a long time that $\zeta(s)$ is a rational multiple of π^s , and hence irrational, if s is an even integer $s \geq 2$; see Chapter 26. In contrast, the irrationality of $\zeta(3)$ was proved by Roger Apéry only in 1979. Despite considerable effort the picture is rather incomplete about $\zeta(s)$ for the other odd integers, $s = 2t + 1 \geq 5$. However, Keith Ball and Tanguy Rivoal proved

that infinitely many of the values $\zeta(2t+1)$ are irrational. And indeed, although it is not known for any single odd value $s \geq 5$ that $\zeta(s)$ is irrational, Wadim Zudilin has proved that at least one of the four values $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$, and $\zeta(11)$ is irrational. We refer to the beautiful survey by Fischler.

(4) The location of the complex zeros of the zeta function is the subject of the "Riemann hypothesis": one of the most famous and important unresolved conjectures in all of mathematics. It claims that all the nontrivial zeros $s \in \mathbb{C}$ of the zeta function satisfy $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$. (The zeta function vanishes at all the negative even integers, which are referred to as the "trivial zeros.") Surprisingly, Jeff Lagarias showed that the Riemann hypothesis is equivalent to the following elementary statement: For all $n \geq 1$,

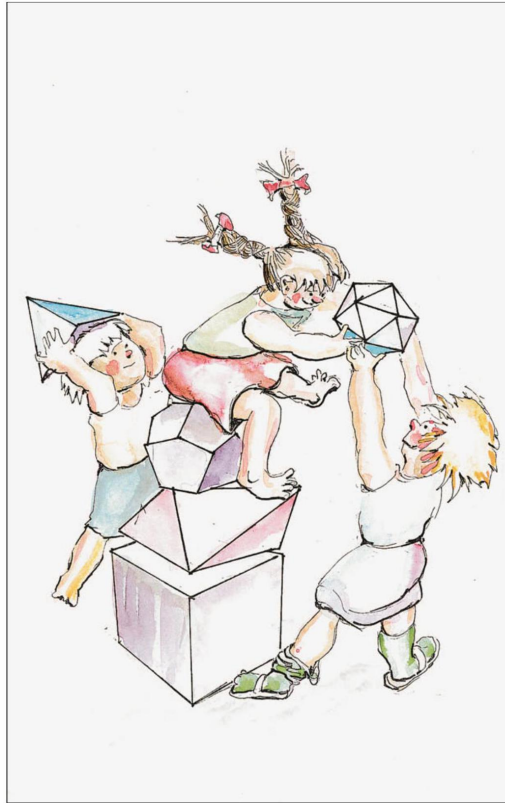
$$\sum_{d|n} d \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n)$$

with equality only for $n = 1$, where H_n is again the n -th harmonic number.

References

- [1] K. Ball & T. RIVOAL: Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs, *Inventiones math.* 146 (2001), 193-207.
- [2] F. Beukers, J. A. C. Kolk & E. Calabi: Sums of generalized harmonic series and volumes, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (4) 11 (1993), 217-224.
- [3] J. M. Borwein & P. B. Borwein: *Pi and the AGM*, Canadian Math. Soc. Series of Monographs and Advanced Texts, Wiley, New York 1987.
- [4] J. M. Borwein, P. B. Borwein & K. Dilcher: Pi, Euler numbers, and asymptotic expansions, *Amer. Math. Monthly* 96 (1989), 681-687.
- [5] S. Fischler: Irrationalité de valeurs de zeta (d'après Apéry, Rivoal, ...), *Bourbaki Seminar*, No. 910, November 2002; *Astérisque* 294 (2004), 27-62.
- [6] J. C. Lagarias: An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis, *Amer. Math. Monthly* 109 (2002), 534-543.
- [7] W. J. LeVeque: *Topics in Number Theory*, Vol. I, Addison-Wesley, Reading MA 1956.
- [8] A. M. Yaglom & I. M. Yaglom: *Challenging mathematical problems with elementary solutions*, Vol. II, Holden-Day, Inc., San Francisco, CA 1967.
- [9] D. Zagier: Values of zeta functions and their applications, *Proc. First European Congress of Mathematics*, Vol. II (Paris 1992), *Progress in Math.* 120, Birkhäuser, Basel 1994, pp. 497-512.
- [10] W. Zudilin: Arithmetic of linear forms involving odd zeta values, *J. Théorie Nombres Bordeaux* 16 (2004), 251-291.

22.2 Geometry

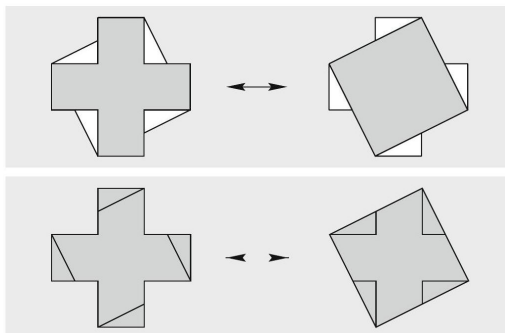


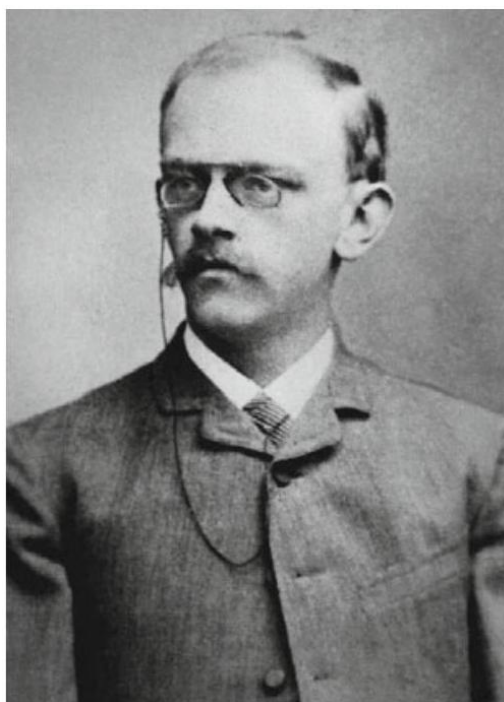
22.2.1 Hilbert's third problem: decomposing polyhedra

In his legendary address to the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900 David Hilbert asked - as the third of his twenty-three problems — to specify

"two tetrahedra of equal bases and equal altitudes which can in no way be split into congruent tetrahedra, and which cannot be combined with congruent tetrahedra to form two polyhedra which themselves could be split up into congruent tetrahedra."

This problem can be traced back to two letters of Carl Friedrich Gauss from 1844 (published in Gauss' collected works in 1900). If tetrahedra of equal volume could be split into congruent pieces, then this would give one an "elementary" proof of Euclid's theorem XII. 5 that pyramids with the same base and height have the same volume. It would thus provide an elementary definition of the volume for polyhedra (that would not depend on continuity arguments). A similar statement is true in plane geometry: the Bolyai-Gerwien Theorem [1, Sect. 2.7] states that planar polygons are both equidecomposable (can be dissected into congruent triangles) and equicomplementable (can be made equidecomposable by adding congruent triangles) if and only if they have the same area.

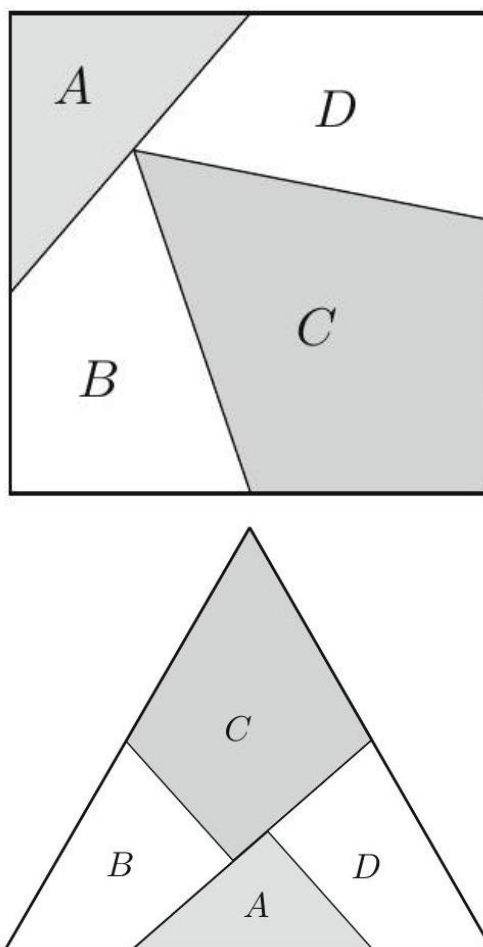




David Hilbert

The cross is equicomplementable with a square of the same area: By adding the same four triangles we can make them equidecomposable (indeed: congruent).

In fact, the cross and the square are even equidecomposable.



This equidecomposition of a square and an equilateral triangle into four pieces is due to

Henry Dudeney (1902).

The short segment in the middle of the equilateral triangle is the intersection of pieces A and C , but it is not an edge of any one of the pieces.

Hilbert - as we can see from his wording of the problem - did expect that there is no analogous theorem for dimension three, and he was right. In fact, the problem was completely solved by Hilbert's student Max Dehn in two papers: The first one, exhibiting non-equidecomposable tetrahedra of equal base and height, appeared already in 1900, the second one, also covering equicomplementability, appeared in 1902. However, Dehn's papers are not easy to understand, and it takes effort to see whether Dehn did not fall into a subtle trap which ensnared others: a very elegant but unfortunately wrong proof was found by Raoul Bricard (in 1896!), by Herbert Meschkowski (1960), and probably by others. However, Dehn's proof was reworked by others, clarified and redone, and after combined efforts of several authors one arrived at the "classical proof", as presented in Boltianskii's book on Hilbert's third problem and also in earlier editions of this one.

In the following, however, we take advantage of a decisive simplification that was found by V. F. Kagan from Odessa already in 1903: His integrality argument, which we here present as the "cone lemma", yields a "pearl lemma" (given here in a recent version, due to Benko), and from this we derive a correct and complete proof for "Bricard's condition" (as claimed in Bricard's 1896 paper). Once we apply this to some examples we easily obtain the solution of Hilbert's third problem.

The appendix to this chapter provides some basics about polyhedra.

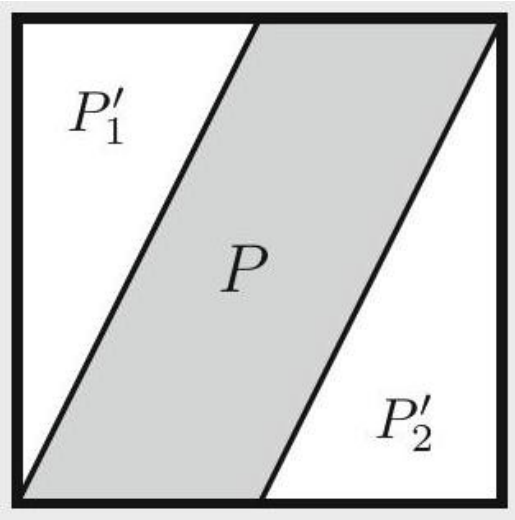
As above we call two polyhedra P and Q equidecomposable if they can be decomposed into finite sets of polyhedra $P_1, \dots, P_n$ and $Q_1, \dots, Q_n$ such that P_i and Q_i are congruent for all i . Two polyhedra are equicomplementable if there are equidecomposable polyhedra $\tilde{P} = P'_1 \cup \dots \cup P'_n$ and $\tilde{Q} = Q'_1 \cup \dots \cup Q'_n$ that also have decompositions involving P and Q of the form $\tilde{P} = P \cup P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_m$ and $\tilde{Q} = Q \cup Q'_1 \cup Q'_2 \cup \dots \cup Q'_m$, where P'_k is congruent to Q'_k for all k . (See the large figure to the right for an illustration.) A theorem of Gerling from 1844 [1, §12] implies that for these definitions it does not matter whether we admit reflections when considering congruences, or not.

For polygons in the plane, equidecomposability and equicomplementability are defined analogously.

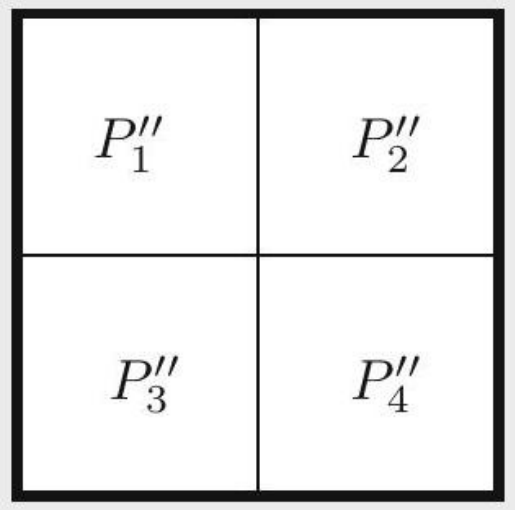
Clearly, equidecomposable objects are equicomplementable (this is the case $m = 0$), but the converse is far from clear. We will use "Bricard's condition" as our tool to certify - as Hilbert proposed - that certain tetrahedra of equal volume are not equicomplementable, and in particular not equidecomposable.

Before we really start to work with three-dimensional polyhedra, let us derive the pearl lemma, which is equally interesting also for planar decompositions. It refers to the segments in a decomposition: In any decomposition the edges of one piece may be subdivided by vertices or edges of other pieces; the pieces of this subdivision we call segments. Thus in the two-dimensional case any endpoint of a segment is given by some vertex. In the three-dimensional case the end of a segment may also be given by a crossing of two edges. However, in any case all the interior points of a segment belong to the same set of edges of pieces.

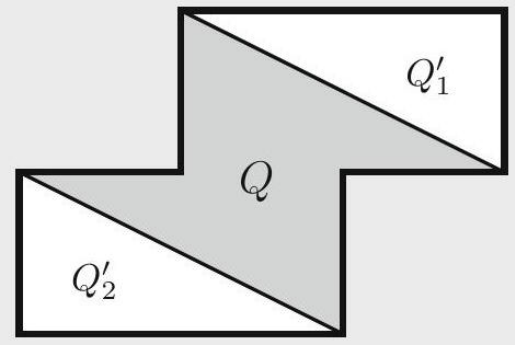
$$\tilde{P} = P \cup P'_1 \cup \dots \cup P'_m$$



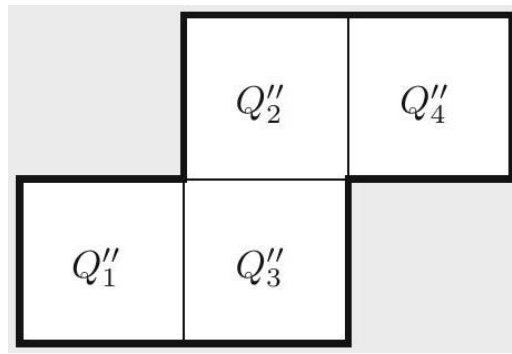
$$\tilde{P} = P''_1 \cup \cdots \cup P''_n$$



$$\tilde{Q} = Q \cup Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_m$$



$$\tilde{Q} = Q''_1 \cup \cdots \cup Q''_n$$



The Pearl Lemma. If P and Q are equidecomposable, then one can place a positive numbers of pearls (that is, assign positive integers) to all the segments of the decompositions $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ and $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$ in such a way that each edge of a piece P_k receives the same number of pearls as the corresponding edge of Q_k .

- Proof. Assign a variable x_i to each segment in the decomposition of P and a variable y_j to each segment in the decomposition of Q . Now we have to find positive integer values for the variables x_i and y_j in such a way that the x_i -variables corresponding to the segments of any edge of some P_k yield the same sum as the y_j -variables assigned to the segments of the corresponding edge of Q_k . This yields conditions that require that "some x_i -variables have the same sum as some y_j -values", namely

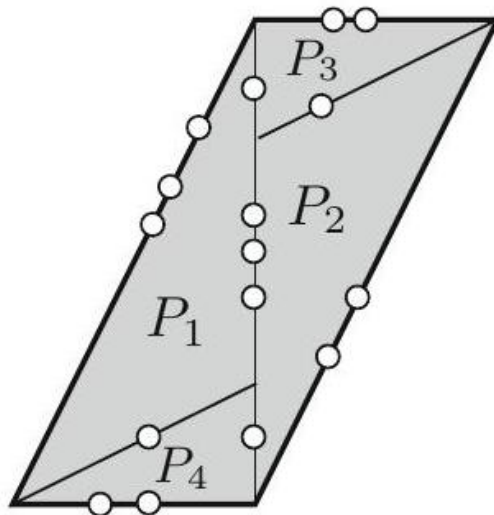
$$\sum_{i:s_i \subseteq e} x_i - \sum_{j:s'_j \subseteq e'} y_j = 0$$

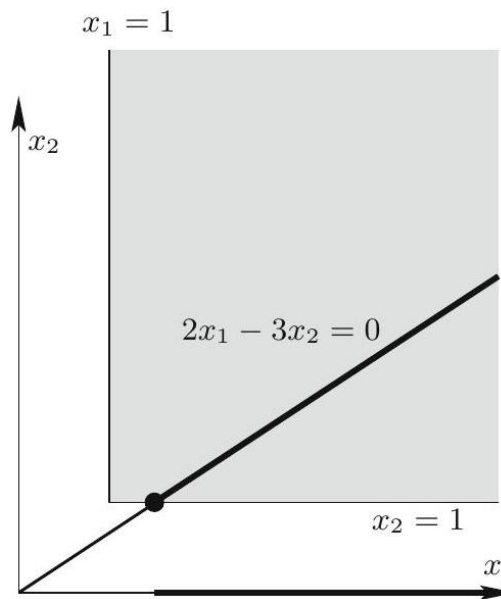
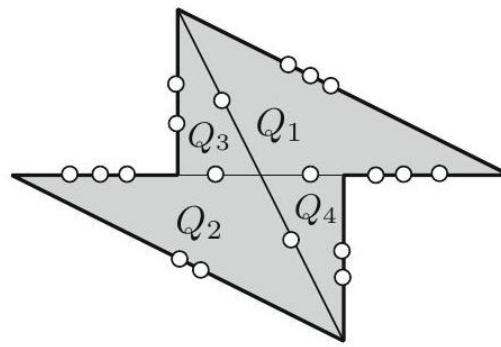
where the edge $e \subseteq P_k$ decomposes into the segments s_i , while the corresponding edge $e' \subseteq Q_k$ decomposes into the segments s'_j . This is a linear equation with integer coefficients.

We note, however, that positive real values satisfying all these requirements exist, namely the (real) lengths of the segments! Thus we are done, in view of the following lemma. $\square$

The polygons P and Q considered in the figure above are, indeed, equidecomposable. The figure to the right illustrates this, and shows a possible placement of pearls.

For a parallelogram P and a nonconvex hexagon Q that are equicomplementary, this figure illustrates the four decompositions we refer to.





Example: Here $\bar{C}$ is given by $2x_1 - 3x_2 = 0, x_i \geq 1$. Eliminating x_2 yields $x_1 \geq \frac{3}{2}$. The lexicographically minimal solution to the system is $(\frac{3}{2}, 1)$.

The Cone Lemma. If a system of homogeneous linear equations with integer coefficients has a positive real solution, then it also has a positive integer solution.

- **Proof.** The name of this lemma stems from the interpretation that the set

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N : Ax = \mathbf{0}, x > \mathbf{0}\}$$

given by an integer matrix $A \in \mathbb{Z}^{M \times N}$ describes a (relatively open) rational cone. We have to show that if this is nonempty, then it also contains integer points: $C \cap \mathbb{N}^N \neq \emptyset$.

If C is nonempty, then so is $\bar{C} := \{x \in \mathbb{R}^N : Ax = \mathbf{0}, x \geq \mathbf{1}\}$, since for any positive vector a suitable multiple will have all coordinates equal to or larger than 1. (Here $\mathbf{1}$ denotes the vector with all coordinates equal to 1.) It suffices to verify that $\bar{C} \subseteq C$ contains a point with rational coordinates, since then multiplication with a common denominator for all coordinates will yield an integer point in $\bar{C} \subseteq C$.

There are many ways to prove this. We follow a well-trodden path that was first explored by Fourier and Motzkin [8, Lecture 1]: By "Fourier-Motzkin elimination" we show that the lexicographically smallest solution to the system

$$Ax = \mathbf{0}, x \geq \mathbf{1}$$

exists, and that it is rational if the matrix A is integral.

Indeed, any linear equation $\mathbf{a}^T x = 0$ can be equivalently enforced by two inequalities $\mathbf{a}^T x \geq$

$0, -\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0$. (Here $\mathbf{a}$ denotes a column vector and $\mathbf{a}^T$ its transpose.) Thus it suffices to prove that any system of the type

$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{1}$$

with integral A and $\mathbf{b}$ has a lexicographically smallest solution, which is rational, provided that the system has any real solution at all.

For this we argue with induction on N . The case $N = 1$ is clear. For $N > 1$ look at all the inequalities that involve x_N . If $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ is fixed, these inequalities give lower bounds on x_N (among them $x_N \geq 1$) and possibly also upper bounds. So we form a new system $A'\mathbf{x}' \geq \mathbf{b}, \mathbf{x}' \geq \mathbf{1}$ in $N - 1$ variables, which contains all the inequalities from the system $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ that do not involve x_N , as well as all the inequalities obtained by requiring that all upper bounds on x_N (if there are any) are larger or equal to all the lower bounds on x_N (which include $x_N \geq 1$). This system in $N - 1$ variables has a solution, and thus by induction it has a lexicographically minimal solution $\mathbf{x}'_*$, which is rational. And then the smallest x_N compatible with this solution $\mathbf{x}'_*$ is easily found, it is determined by a linear equation or inequality with integer coefficients, and thus it is rational as well. $\square$

Now we focus on decompositions of three-dimensional polyhedra. The dihedral angles, that is, the angles between adjacent facets, play a decisive role in the following theorem.

Theorem. ("Bricard's condition")

If three-dimensional polyhedra P and Q with dihedral angles $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ resp. $\beta_1, \dots, \beta_s$ are equidecomposable, then there are positive integers m_i, n_j and an integer k with

$$m_1\alpha_1 + \dots + m_r\alpha_r = n_1\beta_1 + \dots + n_s\beta_s + k\pi.$$

The same holds more generally if P and Q are equicomplementable.

- Proof. Let us first assume that P and Q are equidecomposable, with decompositions $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ and $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$, where P_i is congruent to Q_i . We assign a positive number of pearls to every segment in both decompositions, according to the pearl lemma.

Let Σ_1 be the sum of all the dihedral angles at all the pearls in the pieces of the decomposition of P . If an edge of a piece P_i contains several pearls, then the dihedral angle at this edge will appear several times in the sum Σ_1 . If a pearl is contained in several pieces, then several angles are added for this pearl, but they are all measured in the plane through the pearl that is orthogonal to the corresponding segment. If the segment is contained in an edge of P , the addition yields the (interior) dihedral angle α_j at the edge. The addition yields the angle π in the case that the segment lies in the boundary of P but not on an edge. If the pearl/the segment lies in the interior of P , then the sum of dihedral angles yields 2π or π . (The latter case occurs in case the pearl lies in the interior of a face of a piece P_i .)

Thus we get a representation

$$\Sigma_1 = m_1\alpha_1 + \dots + m_r\alpha_r + k_1\pi$$

for positive integers $m_j (1 \leq j \leq r)$ and nonnegative k_1 . Similarly for the sum Σ_2 of all the angles at the pearls of the decomposition of Q we get

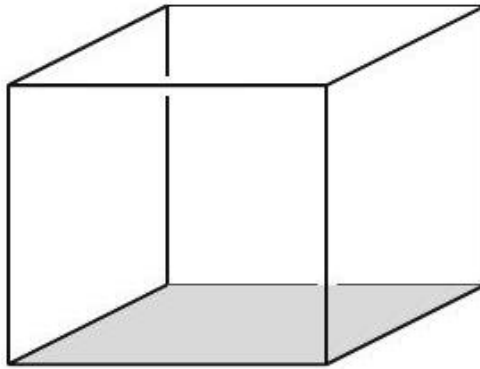
$$\Sigma_2 = n_1\beta_1 + \dots + n_s\beta_s + k_2\pi$$

for positive integers $n_j (1 \leq j \leq s)$ and nonnegative k_2 .

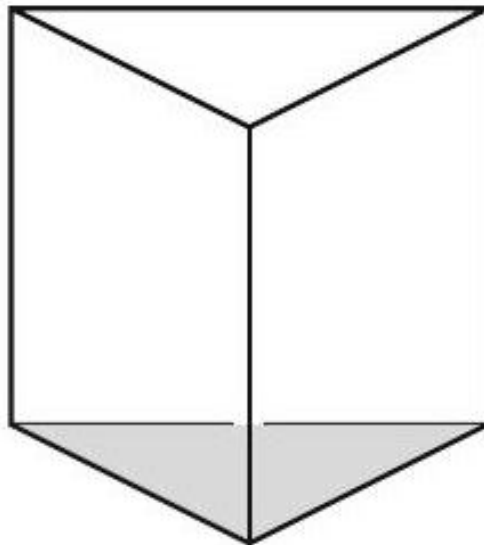
However, we can also obtain the sums Σ_1 and Σ_2 by adding all the contributions in the individual pieces P_i and Q_i . Since P_i and Q_i are congruent, we measure the same dihedral angles at the corresponding edges, and the Pearl Lemma guarantees that we get the same number of pearls from the decompositions of P resp. Q at the corresponding edges. Thus we get $\Sigma_1 = \Sigma_2$, which yields Bricard's condition (with $k = k_2 - k_1 \in \mathbb{Z}$) for the case of equidecomposability.

Now let us assume that P and Q are equicomplementable, that is, that we have decompositions

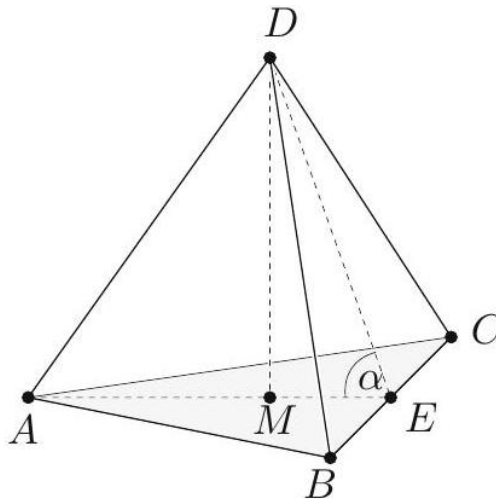
$$\tilde{P} = P \cup P'_1 \cup \dots \cup P'_m \quad \text{and} \quad \tilde{Q} = Q \cup Q'_1 \cup \dots \cup Q'_m,$$



In a cube, all dihedral angles are $\frac{\pi}{2}$.



For a prism over an equilateral triangle, we get the dihedral angles $\frac{\pi}{3}$ and $\frac{\pi}{2}$.



where P'_i and Q'_i are congruent, and such that $\tilde{P}$ and $\tilde{Q}$ are equidecomposable, as

$$\tilde{P} = P''_1 \cup \cdots \cup P''_n \quad \text{and} \quad \tilde{Q} = Q''_1 \cup \cdots \cup Q''_n,$$

where P''_i and Q''_i are congruent (as in the figure on page 69). Again, using the pearl lemma, we place pearls to all the segments in all four decompositions, where we impose the extra condition that each edge of $\tilde{P}$ gets the same total number of pearls in both decompositions, and similarly for $\tilde{Q}$. (The proof of the pearl lemma via the cone lemma allows for such extra restrictions!) We also compute the sums of angles at pearls Σ'_1 and Σ'_2 as well as Σ''_1 and Σ''_2 . The angle sums Σ''_1 and Σ''_2 refer to decompositions of different polyhedra, $\tilde{P}$ and $\tilde{Q}$, into the same set of pieces, hence we get $\Sigma''_1 = \Sigma''_2$ as above.

The angle sums Σ'_1 and Σ''_1 refer to different decompositions of the same polyhedron, $\tilde{P}$. Since we have put the same number of pearls onto the edges in both decompositions, the argument above yields $\Sigma'_1 = \Sigma''_1 + \ell_1\pi$ for an integer $\ell_1 \in \mathbb{Z}$. The same way we also get $\Sigma'_2 = \Sigma''_2 + \ell_2\pi$ for an integer $\ell_2 \in \mathbb{Z}$. Thus we conclude that

$$\Sigma'_2 = \Sigma'_1 + \ell\pi \quad \text{for } \ell = \ell_2 - \ell_1 \in \mathbb{Z}$$

However, Σ'_1 and Σ'_2 refer to decompositions of $\tilde{P}$ resp. $\tilde{Q}$ into the same pieces, except that the first one uses P as a piece, while the second uses Q . Thus subtracting the contributions of P'_i resp. Q'_i from both sides, we obtain the desired conclusion: the contributions of P and Q to the respective angle sums,

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r \quad \text{and} \quad n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s,$$

where m_j counts the pearls on edges with dihedral angle α_j in P and n_j counts the pearls on edges with dihedral angle β_j in Q , differ by an integer multiple of π , namely by $\ell\pi$.

From Bricard's condition we now get a complete solution for Hilbert's third problem: We just have to compute the dihedral angles for some examples.

Example 1. For a regular tetrahedron T_0 with edge lengths ℓ , we calculate the dihedral angle from the sketch. The midpoint M of the base triangle divides the height AE of the base triangle by 1:2, and since $|AE| = |DE|$, we find $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, and thus

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Thus we find that a regular tetrahedron cannot be equidecomposable or equicomplementable with a cube. Indeed, all the dihedral angles in a cube equal $\frac{\pi}{2}$, so Bricard's condition requires that

$$m_1 \arccos \frac{1}{3} = n_1 \frac{\pi}{2} + k\pi$$

for positive integers m_1, n_1 and an integer k . But this cannot hold, since we know from Theorem 3 of Chapter 8 that $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ is irrational.

Example 2. Let T_1 be a tetrahedron spanned by three orthogonal edges AB, AC, AD of length u . This tetrahedron has three dihedral angles that are right angles, and three more dihedral angles of equal size φ , which we calculate from the sketch as

$$\cos \varphi = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}u}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2}u} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

It follows that

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Thus the only dihedral angles occurring in T_1 are $\pi, \frac{\pi}{2}$, and $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. From this Bricard's condition tells us that this tetrahedron as well is not equicomplementable with a cube of the same volume, this time using that

$$\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

is irrational, as we proved in Chapter 8 (take $n = 3$ in Theorem 3).

Example 3. Finally, let T_2 be a tetrahedron with three consecutive edges AB, BC and CD that are mutually orthogonal (an "orthoscheme") and of the same length u .

It is easy to calculate the angles in such a tetrahedron (three of them equal $\frac{\pi}{2}$, two of them equal $\frac{\pi}{4}$, and one of them is $\frac{\pi}{3}$), if we use that the cube of side length u can be decomposed into six tetrahedra of this type (three congruent copies, and three mirror images). Thus all dihedral angles in T_2 are rational multiples of π , and thus with the same proofs as above (in particular, the irrationality results that we have quoted from Chapter 8) Bricard's Condition implies that T_2 is not equidecomposable, and not even equicomplementable, with T_0 or T_1 .

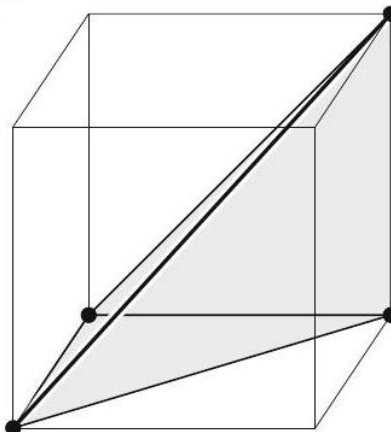
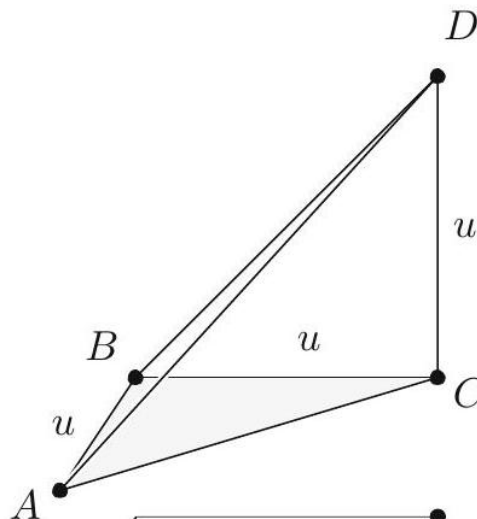
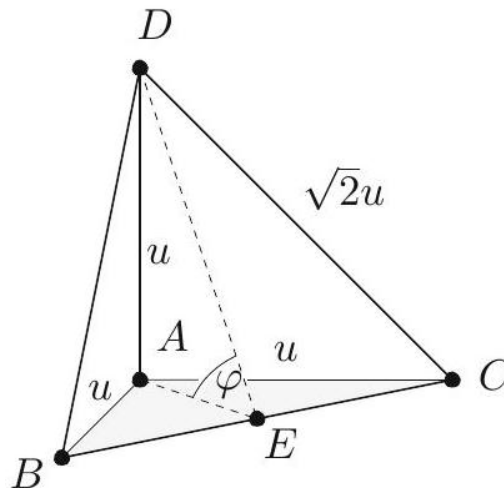
This solves Hilbert's third problem, since T_1 and T_2 have congruent bases and the same height.

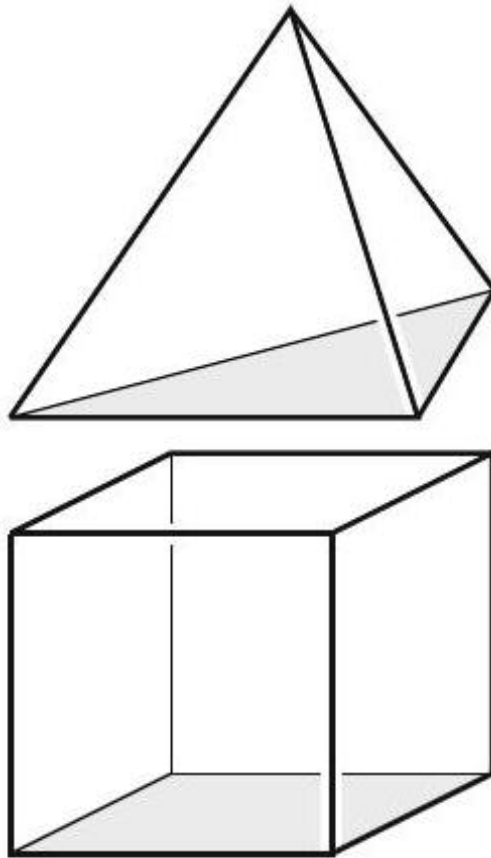
Appendix: Polytopes and polyhedra

A convex polytope in $\mathbb{R}^d$ is the convex hull of a finite set $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, that is, a set of the form

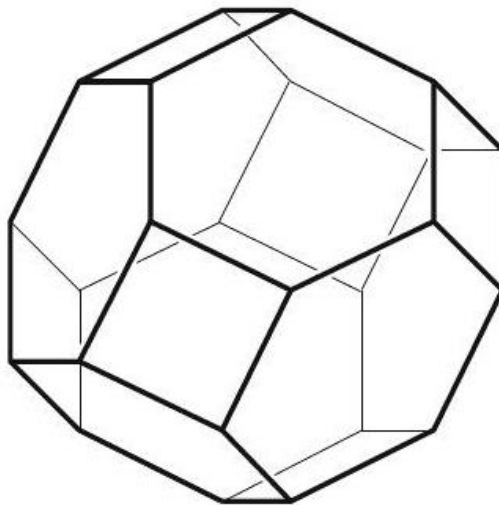
$$P = \text{conv}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Polytopes are certainly familiar objects: Prime examples are given by convex polygons (2-dimensional convex polytopes) and by convex polyhedra (3-dimensional convex polytopes).





Familiar polytopes: tetrahedron and cube



The permutahedron has 24 vertices, 36 edges and 14 facets.

There are several types of polyhedra that generalize to higher dimensions in a natural way. For example, if the set S is affinely independent of cardinality $d + 1$, then $\text{conv}(S)$ is a d -dimensional simplex (or d -simplex). For $d = 2$ this yields a triangle, for $d = 3$ we obtain a tetrahedron. Similarly, squares and cubes are special cases of d -cubes, such as the unit d -cube given by

$$C_d = [0, 1]^d \subseteq \mathbb{R}^d.$$

General polytopes are defined as finite unions of convex polytopes. In this book nonconvex polyhedra will appear in connection with Cauchy's rigidity theorem in Chapter 14, and nonconvex polygons in connection with Pick's theorem in Chapter 13, and again when we discuss the art gallery theorem in Chapter 40.

Convex polytopes can, equivalently, be defined as the bounded solution sets of finite systems of linear inequalities. Thus every convex polytope $P \subseteq \mathbb{R}^d$ has a representation of the form

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

for some matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ and a vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. In other words, P is the solution set of a system of m linear inequalities

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i,$$

where $\mathbf{a}_i^T$ is the i -th row of A . Conversely, every bounded such solution set is a convex polytope, and can thus be represented as the convex hull of a finite set of points. For polygons and polyhedra, we have the familiar concepts of vertices, edges, and 2-faces. For higher-dimensional convex polytopes, we can define their faces as follows: a face of P is a subset $F \subseteq P$ of the form

$$P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\},$$

where $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ is a linear inequality that is valid for all points $\mathbf{x} \in P$.

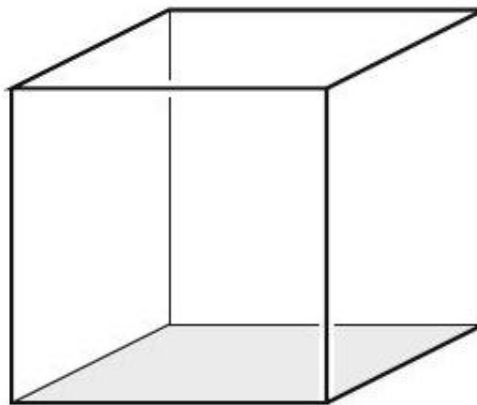
All the faces of a polytope are themselves polytopes. The set V of vertices (0-dimensional faces) of a convex polytope is also the inclusion-minimal set such that $\text{conv}(V) = P$. Assuming that $P \subseteq \mathbb{R}^d$ is a d -dimensional convex polytope, the facets (the $(d-1)$ -dimensional faces) determine a minimal set of hyperplanes and thus of halfspaces that contain P , and whose intersection is P . In particular, this implies the following fact that we will need later: Let F be a facet of P , denote by H_F the hyperplane it determines, and by H_F^+ and H_F^- the two closed half-spaces bounded by H_F . Then one of these two halfspaces contains P (and the other one doesn't).

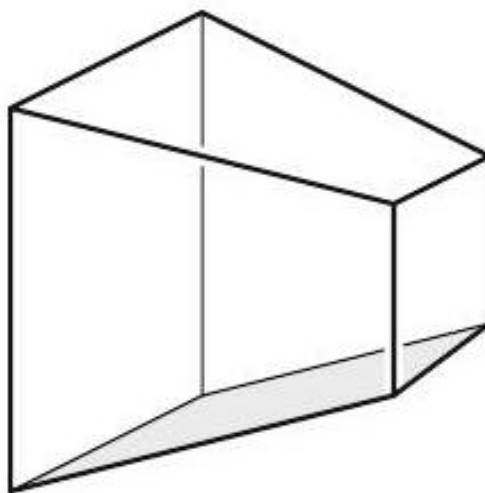
The graph $G(P)$ of the convex polytope P is given by the set V of vertices, and by the edge set E of 1-dimensional faces. If P has dimension 3, then this graph is planar, and gives rise to the famous "Euler polyhedron formula" (see Chapter 13).

Two polytopes $P, P' \subseteq \mathbb{R}^d$ are congruent if there is some length-preserving affine map that takes P to P' . Such a map may reverse the orientation of space, as does the reflection of P in a hyperplane, which takes P to a mirror image of P . They are combinatorially equivalent if there is a bijection from the faces of P to the faces of P' that preserves dimension and inclusions between the faces. This notion of combinatorial equivalence is much weaker than congruence: for example, our figure shows a unit cube and a "skew" cube that are combinatorially equivalent (and thus we would call any one of them "a cube"), but they are certainly not congruent.

A polytope (or a more general subset of $\mathbb{R}^d$) is called centrally symmetric if there is some point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ such that

$$\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \in P \iff \mathbf{x}_0 - \mathbf{x} \in P.$$





Combinatorially equivalent polytopes

In this situation we call $\mathbf{x}_0$ the center of P .

References

- [1] V. G. Boltianskii: Hilbert's Third Problem, V. H. Winston & Sons (Halsted Press, John Wiley & Sons), Washington DC 1978.
- [2] D. Benko: A new approach to Hilbert's third problem, Amer. Math. Monthly, 114 (2007), 665-676.
- [3] M. Dehn: Ueber raumgleiche Polyeder, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse (1900), 345-354.
- [4] M. Dehn: Ueber den Rauminhalt, Mathematische Annalen 55 (1902), 465-478.
- [5] C. F. Gauss: "Congruenz und Symmetrie": Briefwechsel mit Gerling, pp. 240-249 in: Werke, Band VIII, Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; B. G. Teubner, Leipzig 1900.
- [6] D. Hilbert: Mathematical Problems, Lecture delivered at the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, Bulletin Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437-479.
- [7] B. Kagan: Über die Transformation der Polyeder, Mathematische Annalen 57 (1903), 421-424.
- [8] G. M. Ziegler: Lectures on Polytopes, Graduate Texts in Mathematics 152, Springer, New York 1995/1998.

22.2.2 Lines in the plane and decompositions of graphs

Perhaps the best-known problem on configurations of lines was raised by Sylvester in 1893 in a column of mathematical problems.

QUESTIONS FOR SOLUTION.

11851. (Professor Sylvester.)-Prove that it is not possible to arrange any finite number of real points so that a right line through every two of them shall pass through a third, unless they all lie in the same right line.
 Whether Sylvester himself had a proof is in doubt, but a correct proof was given by Tibor Gallai [Grünwald] some 40 years later. Therefore the following theorem is commonly attributed to Sylvester and Gallai. Subsequent to Gallai's proof several others appeared, but the following argument due to L. M. Kelly may be "simply the best."

Theorem 1. In any configuration of n points in the plane, not all on a line, there is a line which contains exactly two of the points.

- Proof. Let $\mathcal{P}$ be the given set of points and consider the set $\mathcal{L}$ of all lines which pass through at least two points of $\mathcal{P}$. Among all pairs (P, ℓ) with P not on ℓ , choose a pair (P_0, ℓ_0) such that P_0 has the smallest distance to ℓ_0 , with Q being the point on ℓ_0 closest to P_0 (that is, on the line through P_0 vertical to ℓ_0).

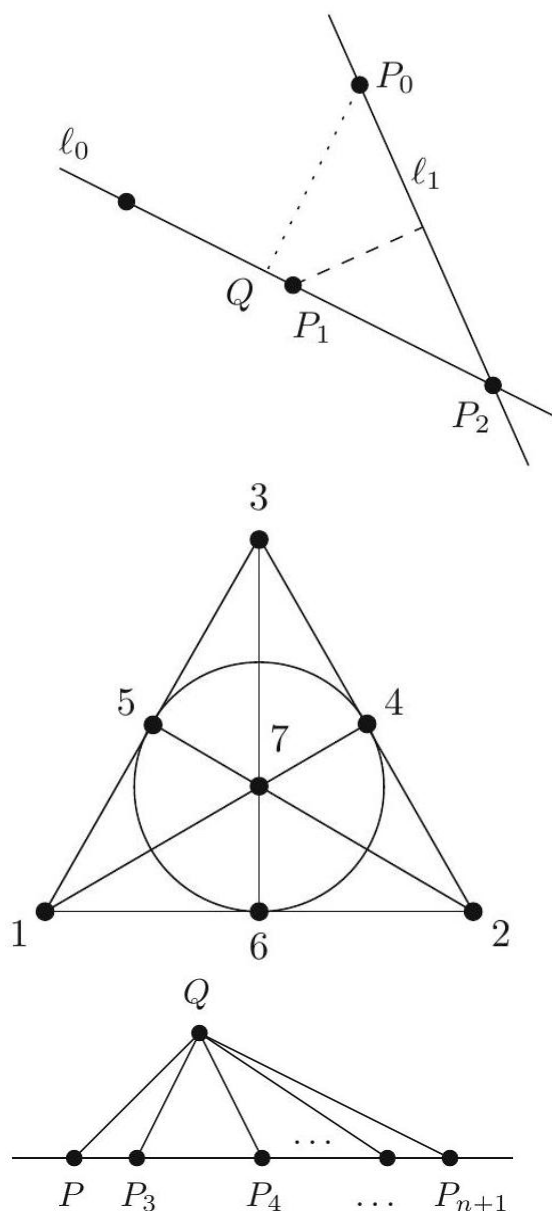
Claim. This line ℓ_0 does it!

If not, then ℓ_0 contains at least three points of $\mathcal{P}$, and thus two of them, say P_1 and P_2 , lie on the same side of Q . Let us assume that P_1 lies between Q and P_2 , where P_1 possibly coincides with Q . The figure on the right shows the configuration. It follows that the distance of P_1 to the line ℓ_1 determined by P_0 and P_2 is smaller than the distance of P_0 to ℓ_0 , and this contradicts our choice for ℓ_0 and P_0 . $\square$

In the proof we have used metric axioms (shortest distance) and order axioms (P_1 lies between Q and P_2) of the real plane. Do we really need these properties beyond the usual incidence axioms of points and lines? Well, some additional condition is required, as the famous Fano plane depicted in the margin demonstrates. Here $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, 7\}$ and $\mathcal{L}$ consists of the 7 three-point lines as indicated in the figure, including the "line" $\{4, 5, 6\}$. Any two points determine a unique line, so the incidence axioms are satisfied, but there is no 2-point line. The Sylvester-Gallai theorem therefore shows that the Fano configuration cannot be embedded into the real plane such that the seven collinear triples lie on real lines: there must always be a "crooked" line.



J. J. Sylvester



However, it was shown by Coxeter that the order axioms will suffice for a proof of the Sylvester-Gallai theorem. Thus one can devise a proof that does not use any metric properties - see also the proof that we will give in Chapter 13, using Euler's formula.

Armed with Theorem 1, we may ask how many such two-point lines every n -point configuration in the plane must contain. After many partial results, the definitive answer was given very recently by Ben Green and Terence Tao: There is a constant n_0 such that every configuration of $n \geq n_0$ points, not all on a line, contains at least $n/2$ two-point lines, and this is best possible - if n is even. In the case when n is odd, they prove that there are even at least $3\lfloor n/4 \rfloor$ such lines, and again this is best possible.

The Sylvester-Gallai theorem directly implies another famous result on points and lines in the plane, due to Paul Erdős and Nicolaas G. de Bruijn. But in this case the result holds more generally for arbitrary point-line systems, as was observed already by Erdős and de Bruijn. We will discuss the more general result in a moment.

Theorem 2. Let $\mathcal{P}$ be a set of $n \geq 3$ points in the plane, not all on a line. Then the set $\mathcal{L}$ of lines passing through at least two points contains at least n lines.

- **Proof.** For $n = 3$ there is nothing to show. Now we proceed by induction on n . Let $|\mathcal{P}| = n + 1$. By the previous theorem there exists a line $\ell_0 \in \mathcal{L}$ containing exactly two points P and Q of $\mathcal{P}$. Consider the set $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q\}$ and the set $\mathcal{L}'$ of lines determined by $\mathcal{P}'$. If the points of $\mathcal{P}'$ do not all lie on a single line, then by induction $|\mathcal{L}'| \geq n$ and hence $|\mathcal{L}| \geq n + 1$ because of the additional line ℓ_0 in $\mathcal{L}$. If, on the other hand, the points in $\mathcal{P}'$ are all on a single line, then we have the "pencil" which results in precisely $n + 1$ lines. $\square$

Now, as promised, here is the general result, which applies to much more general "incidence geometries."

Theorem 3. Let X be a set of $n \geq 3$ elements, and let $A_1, \dots, A_m$ be proper subsets of X , such that every pair of elements of X is contained in precisely one set A_i . Then $m \geq n$ holds.

- **Proof.** The following proof, variously attributed to Motzkin or Conway, is almost one-line and truly inspired. For $x \in X$ let r_x be the number of sets A_i containing x . (Note that $2 \leq r_x < m$ by the assumptions.) Now if $x \notin A_i$, then $r_x \geq |A_i|$ because the $|A_i|$ sets containing x and an element of A_i must be distinct. Suppose $m < n$, then $m|A_i| < nr_x$ and thus $m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$ for $x \notin A_i$, and we find

$$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i: x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)} > \sum_{A_i} \sum_{x: x \notin A_i} \frac{1}{m(n - |A_i|)} = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1,$$

which is absurd. $\square$

There is another very short proof for this theorem that uses linear algebra. Let B be the incidence matrix of $(X; A_1, \dots, A_m)$, that is, the rows in B are indexed by the elements of X , the columns by $A_1, \dots, A_m$, where

$$B_{xA} := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A. \end{cases}$$

Consider the product BB^T . For $x \neq x'$ we have $(BB^T)_{xx'} = 1$, since x and x' are contained in precisely one set A_i , hence

$$BB^T = \begin{pmatrix} r_{x_1} - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{x_2} - 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_{x_n} - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

where r_x is defined as above. Since the first matrix is positive definite (it has only positive eigenvalues) and the second matrix is positive semi-definite (it has the eigenvalues n and 0), we deduce that BB^T is positive definite and thus, in particular, invertible, implying $\text{rank}(BB^T) = n$. It follows that the rank of the $n \times m$ matrix B is at least n , and we conclude that indeed $n \leq m$, since the rank cannot exceed the number of columns.

Let us go a little beyond and turn to graph theory. (We refer to the review of basic graph concepts in the appendix to this chapter.) A moment's thought shows that the following statement is really the same as Theorem 3:

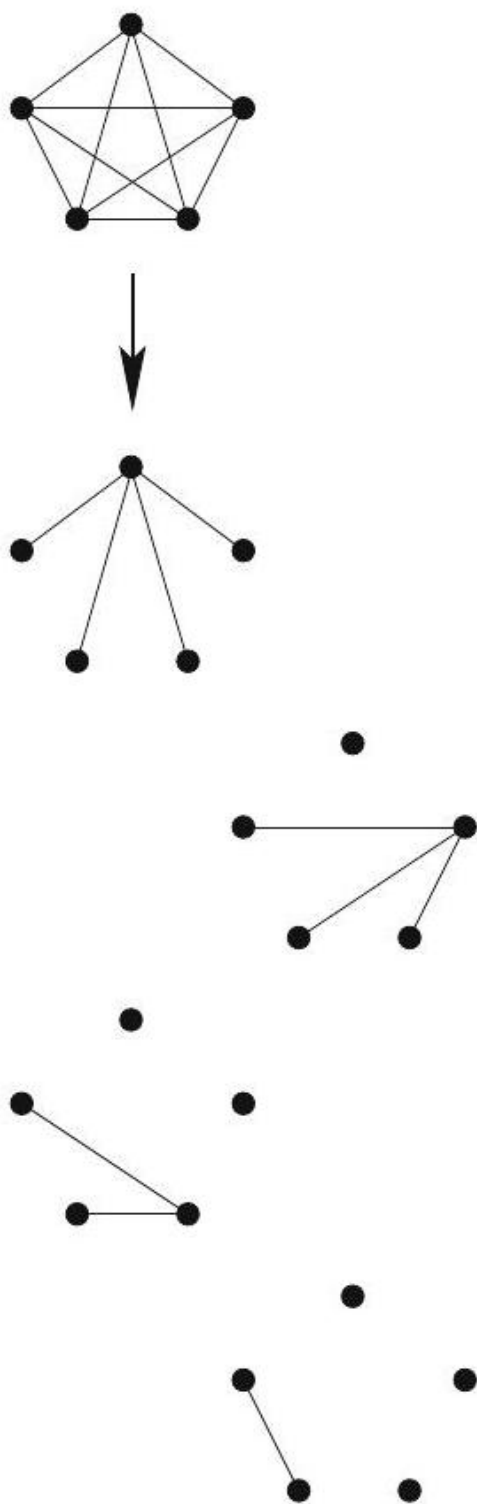
If we decompose a complete graph K_n into m cliques different from K_n , such that every edge is in a unique clique, then $m \geq n$.

Indeed, let X correspond to the vertex set of K_n and the sets A_i to the vertex sets of the cliques, then the statements are identical.

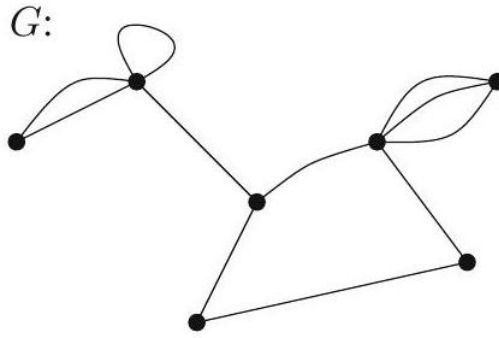
Our next task is to decompose K_n into complete bipartite graphs such that again every edge is in exactly one of these graphs. There is an easy way to do this. Number the vertices $\{1, 2, \dots, n\}$. First take the complete bipartite graph joining 1 to all other vertices. Thus we obtain the graph $K_{1,n-1}$ which is called a star. Next join 2 to 3, ..., n , resulting in a star $K_{1,n-2}$. Going on like this, we decompose K_n into stars $K_{1,n-1}, K_{1,n-2}, \dots, K_{1,1}$. This decomposition uses $n - 1$ complete bipartite graphs. Can we do better, that is, use fewer graphs? No, as the following result of Ron Graham and Henry O. Pollak says:

Theorem 4. If K_n is decomposed into complete bipartite subgraphs $H_1, \dots, H_m$, then $m \geq n - 1$.

The interesting thing is that, in contrast to the Erdős-de Bruijn theorem, no combinatorial proof for this result is known! All of them use linear algebra in one way or another. Of the various more or less equivalent ideas let us look at the proof due to Tverberg, which may be the most transparent.



A decomposition of K_5 into 4 complete bipartite subgraphs



A graph G with 7 vertices and 11 edges. It has one loop, one double edge and one triple edge.

The complete graphs K_n on n vertices and $\binom{n}{2}$ edges

- Proof. Let the vertex set of K_n be $\{1, \dots, n\}$, and let L_j, R_j be the defining vertex sets of the complete bipartite graph $H_j, j = 1, \dots, m$. To every vertex i we associate a variable x_i . Since $H_1, \dots, H_m$ decompose K_n , we find

$$\sum_{i < j} x_i x_j = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{a \in L_k} x_a \cdot \sum_{b \in R_k} x_b \right). \quad (1)$$

Now suppose the theorem is false, $m < n - 1$. Then the system of linear equations

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= 0 \\ \sum_{a \in L_k} x_a &= 0 \quad (k = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

has fewer equations than variables, hence there exists a nontrivial solution $c_1, \dots, c_n$. From (1) we infer

$$\sum_{i < j} c_i c_j = 0.$$

But this implies

$$0 = (c_1 + \dots + c_n)^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 + 2 \sum_{i < j} c_i c_j = \sum_{i=1}^n c_i^2 > 0,$$

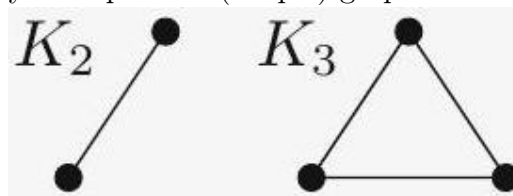
a contradiction, and the proof is complete.

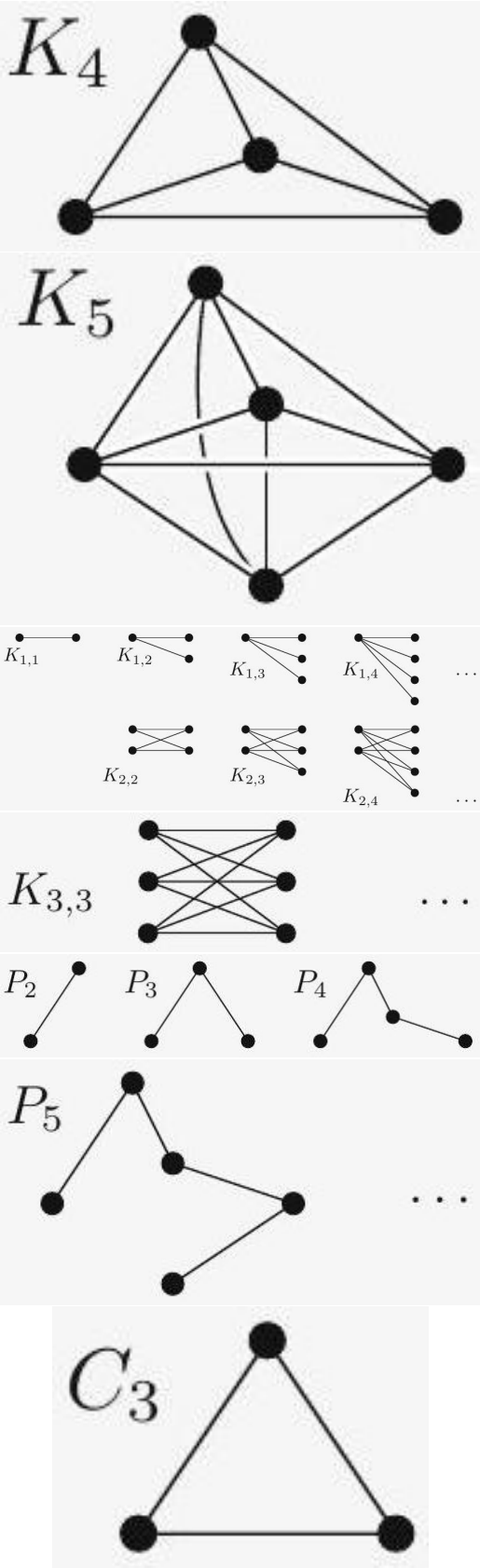
Appendix: Basic graph concepts

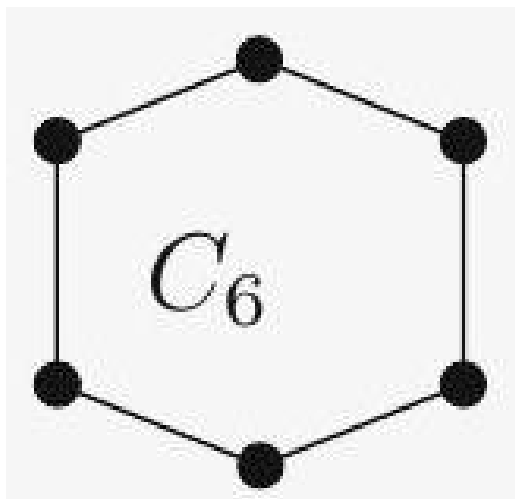
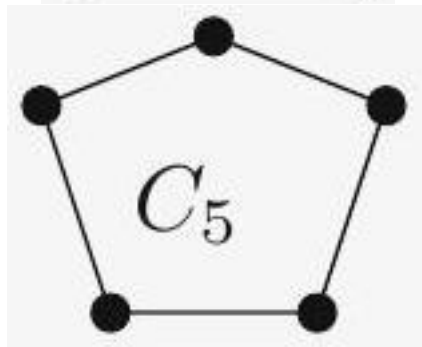
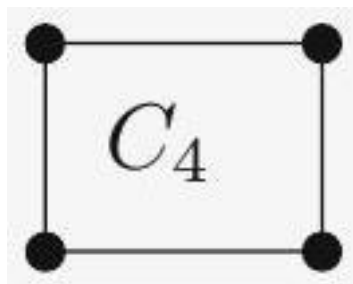
Graphs are among the most basic of all mathematical structures. Correspondingly, they have many different versions, representations, and incarnations. Abstractly, a graph is a pair $G = (V, E)$, where V is the set of vertices, E is the set of edges, and each edge $e \in E$ "connects" two vertices $v, w \in V$. We consider only finite graphs, where V and E are finite.

Usually, we deal with simple graphs: Then we do not admit loops, i. e., edges for which both ends coincide, and no multiple edges that have the same set of endvertices. Vertices of a graph are called adjacent or neighbors if they are the endvertices of an edge. A vertex and an edge are called incident if the edge has the vertex as an endvertex.

Here is a little picture gallery of important (simple) graphs:







Two graphs $G = (V, E)$ and $G' = (V', E')$ are considered isomorphic if there are bijections $V \rightarrow V'$ and $E \rightarrow E'$ that preserve the incidences between edges and their endvertices. (It is a major unsolved problem whether there is an efficient test to decide whether two given graphs are isomorphic.) This notion of isomorphism allows us to talk about the complete graph K_5 on 5 vertices, etc.

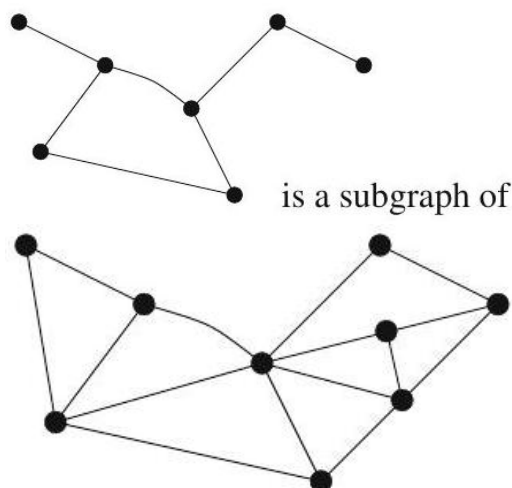
$G' = (V', E')$ is a subgraph of $G = (V, E)$ if $V' \subseteq V, E' \subseteq E$, and every edge $e \in E'$ has the same endvertices in G' as in G . G' is an induced subgraph if, additionally, all edges of G that connect vertices of G' are also edges of G' .

Many notions about graphs are quite intuitive: for example, a graph G is connected if every two distinct vertices are connected by a path in G , or equivalently, if G cannot be split into two nonempty subgraphs whose vertex sets are disjoint. Any graph decomposes into its connected components. We end this survey of basic graph concepts with a few more pieces of terminology: A clique in G is a complete subgraph. An independent set in G is an induced subgraph without edges, that is, a subset of the vertex set such that no two vertices are connected by an edge of G . A graph is a forest if it does not contain any cycles. A tree is a connected forest. Finally, a graph $G = (V, E)$ is bipartite if it is isomorphic to a subgraph of a complete bipartite graph, that is, if its vertex set can be written as a union $V = V_1 \cup V_2$ of two independent sets.

The complete bipartite graphs $K_{m,n}$ with $m + n$ vertices and mn edges

The paths P_n with n vertices

The cycles C_n with n vertices

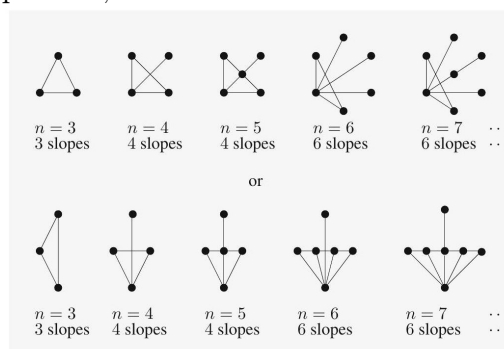


References

- [1] N. G. de Bruijn & P. Erdős: On a combinatorial problem, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. 51 (1948), 1277-1279.
- [2] H. S. M. Coxeter: A problem of collinear points, Amer. Math. Monthly 55 (1948), 26-28 (contains Kelly's proof).
- [3] P. Erdős: Problem 4065 - Three point collinearity, Amer. Math. Monthly 51 (1944), 169-171 (contains Gallai's proof).
- [4] R. L. Graham & H. O. Pollak: On the addressing problem for loop switching, Bell System Tech. J. 50 (1971), 2495-2519.
- [5] B. Green & T. Tao: On sets defining few ordinary lines, Discrete Comput. Geometry 50 (2013), 409-468.
- [6] J. J. Sylvester: Mathematical Question 11851, The Educational Times 46 (1893), 156.
- [7] H. Tverberg: On the decomposition of K_n into complete bipartite graphs, J. Graph Theory 6 (1982), 493-494.

22.2.3 The slope problem

Try for yourself - before you read much further - to construct configurations of points in the plane that determine "relatively few" slopes. For this we assume, of course, that the $n \geq 3$ points do not all lie on one line. Recall from Chapter 11 on "Lines in the plane" the theorem of Erdős and de Bruijn: the n points will determine at least n different lines. But of course many of these lines may be parallel, and thus determine the same slope.

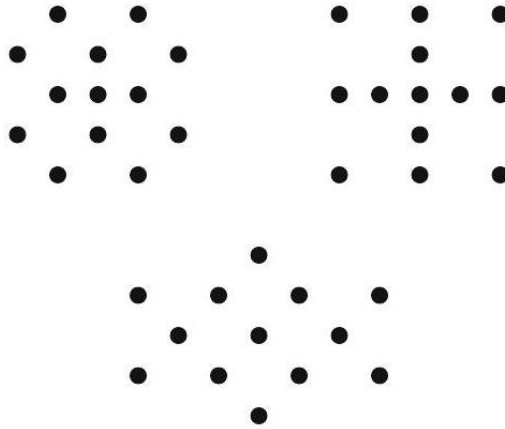


After some attempts at finding configurations with fewer slopes you might conjecture - as Scott did in 1970 - the following theorem.

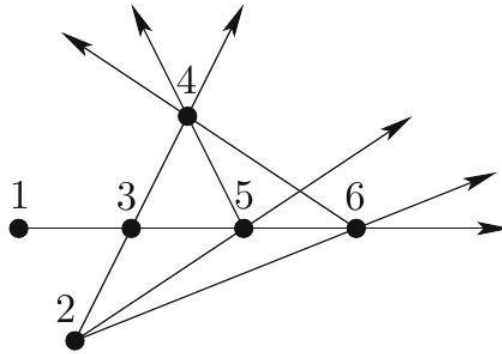
Theorem. If $n \geq 3$ points in the plane do not lie on one single line, then they determine at least $n - 1$ different slopes, where equality is possible only if n is odd and $n \geq 5$.

Our examples above - the drawings represent the first few configurations in two infinite sequences of examples - show that the theorem as stated is best possible: for any odd $n \geq 5$ there is a configuration with n points that determines exactly $n - 1$ different slopes, and for any other $n \geq 3$ we have a configuration with exactly n slopes.

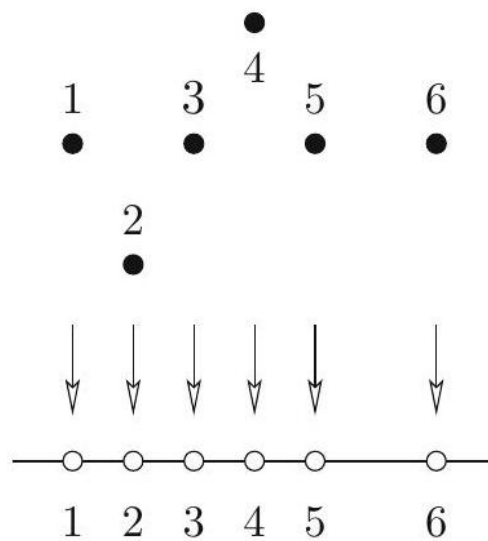
A little experimentation for small n will probably lead you to a sequence such as the two depicted here.



Three pretty sporadic examples from the Jamison-Hill catalogue



This configuration of $n = 6$ points determines $t = 6$ different slopes.



Here a vertical starting direction yields $\pi_0 = 123456$.

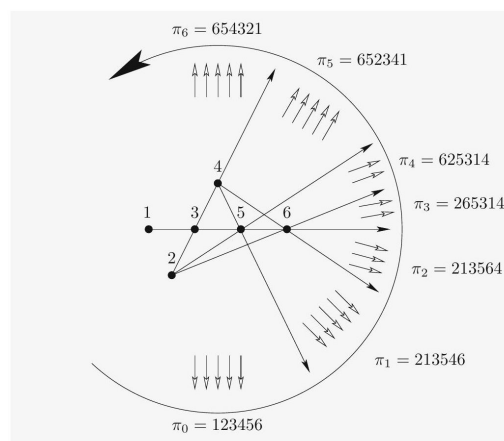
However, the configurations that we have drawn above are by far not the only ones. For example, Jamison and Hill described four infinite families of configurations, each of them consisting of configurations with an odd number n of points that determine only $n - 1$ slopes ("slope-critical configurations"). Furthermore, they listed 102 "sporadic" examples that do not seem to fit into an infinite family, most of them found by extensive computer searches. Conventional wisdom might say that extremal problems tend to be very difficult to solve exactly if the extreme configurations are so diverse and irregular. Indeed, there is a lot that can be said about the structure of slopecritical configurations (see [2]), but a classification seems completely out of reach. However, the theorem above has a simple proof, which has two main ingredients: a reduction to an efficient combinatorial model due to Eli Goodman and Ricky Pollack, and a beautiful argument in this model by which Peter Ungar completed the proof in 1982.

- Proof. (1) First we notice that it suffices to show that every "even" set of $n = 2m$ points in the plane ($m \geq 2$) determines at least n slopes. This is so since the case $n = 3$ is trivial, and for any set of $n = 2m + 1 \geq 5$ points (not all on a line) we can find a subset of $n - 1 = 2m$ points, not all on a line, which already determines $n - 1$ slopes. Thus for the following we consider a configuration of $n = 2m$ points in the plane that determines $t \geq 2$ different slopes.
- (2) The combinatorial model is obtained by constructing a periodic sequence of permutations. For this we start with some direction in the plane that is not one of the configuration's slopes, and we number the points $1, \dots, n$ in the order in which they appear in the 1-dimensional projection in this direction. Thus the permutation $\pi_0 = 123\dots n$ represents the order of the points for our starting direction. Next let the direction perform a counterclockwise motion, and watch how the projection and its permutation change. Changes in the order of the projected points appear exactly when the direction passes over one of the configuration's slopes. But the changes are far from random or arbitrary: By performing a 180° rotation of the direction, we obtain a sequence of permutations

$$\pi_0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \pi_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_{t-1} \rightarrow \pi_t$$

which has the following special properties:

- The sequence starts with $\pi_0 = 123\dots n$ and ends with $\pi_t = n\dots 321$.
- The length t of the sequence is the number of slopes of the point configuration.
- In the course of the sequence, every pair $i < j$ is switched exactly once. This means that on the way from $\pi_0 = 123\dots n$ to $\pi_t = n\dots 321$, only increasing substrings are reversed.
- Every move consists in the reversal of one or more disjoint increasing substrings (corresponding to the one or more lines that have the direction which we pass at this point).



By continuing the circular motion around the configuration, one can view the sequence as a part of a two-way infinite, periodic sequence of permutations

$$\cdots \rightarrow \pi_{-1} \rightarrow \pi_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_t \rightarrow \pi_{t+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_{2t} \rightarrow \cdots$$

where π_{i+t} is the reverse of π_i for all i , and thus $\pi_{i+2t} = \pi_i$ for all $i \in \mathbb{Z}$. We will show that every sequence with the above properties (and $t \geq 2$) must have length $t \geq n$.

(3) The proof's key is to divide each permutation into a "left half" and a "right half" of equal size $m = \frac{n}{2}$, and to count the letters that cross the imaginary barrier between the left half and the right half.

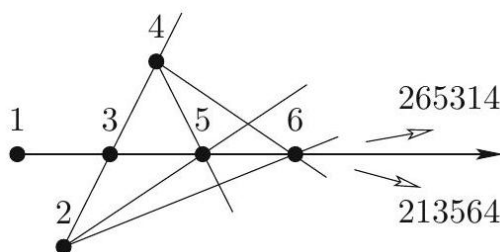
Call $\pi_i \rightarrow \pi_{i+1}$ a crossing move if one of the substrings it reverses does involve letters from both sides of the barrier. The crossing move has order d if it moves $2d$ letters across the barrier, that is, if the crossing string has exactly d letters on one side and at least d letters on the other side. Thus in our example

$$\pi_2 = 213 : 564 \longrightarrow \overline{265} : 314 = \pi_3$$

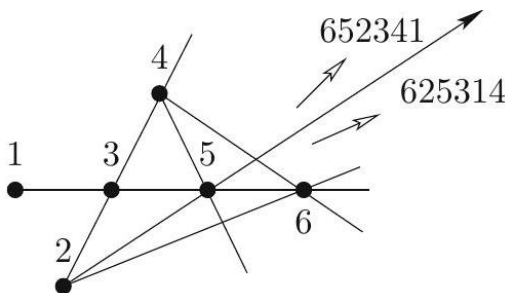
is a crossing move of order $d = 2$ (it moves 1, 3, 5, 6 across the barrier, which we mark by ":"),

$$652 : 341 \longrightarrow \overline{654} : 321$$

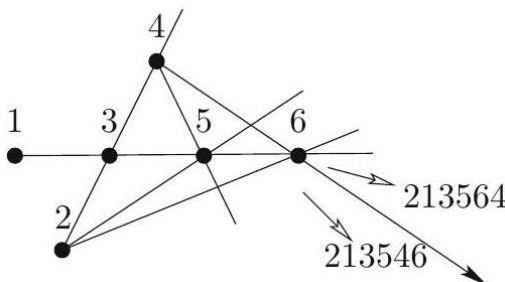
Getting the sequence of permutations for our small example



A crossing move



A touching move



An ordinary move

is crossing of order $d = 1$, while for example

$$625 : 314 \longrightarrow 6\overline{5}2 : 34\overline{1}$$

is not a crossing move.

In the course of the sequence $\pi_0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_t$, each of the letters $1, 2, \dots, n$ has to cross the barrier at least once. This implies that, if the orders of the c crossing moves are $d_1, d_2, \dots, d_c$, then we have

$$\sum_{i=1}^c 2d_i = \#\{\text{letters that cross the barrier}\} \geq n.$$

This also implies that we have at least two crossing moves, since a crossing move with $2d_i = n$ occurs only if all the points are on one line, i. e. for $t = 1$. Geometrically, a crossing move corresponds to the direction of a line of the configuration that has less than m points on each side.

(4) A touching move is a move that reverses some string that is adjacent to the central barrier, but does not cross it. For example,

$$\pi_4 = 625 : 314 \longrightarrow 6\overline{5}2 : 34\overline{1} = \pi_5$$

is a touching move. Geometrically, a touching move corresponds to the slope of a line of the configuration that has exactly m points on one side, and hence at most $m - 2$ points on the other side.

Moves that are neither touching nor crossing will be called ordinary moves. For this

$$\pi_1 = 213 : 546 \longrightarrow 213 : 5\overline{6}4 = \pi_2$$

is an example. So every move is either crossing, or touching, or ordinary, and we can use the letters T, C, O to denote the types of moves. $C(d)$ will denote a crossing move of order d . Thus for our small example we get

$$\pi_0 \xrightarrow{T} \pi_1 \xrightarrow{O} \pi_2 \xrightarrow{C(2)} \pi_3 \xrightarrow{O} \pi_4 \xrightarrow{T} \pi_5 \xrightarrow{C(1)} \pi_6,$$

or even shorter we can record this sequence as $T, O, C(2), O, T, C(1)$.

(5) To complete the proof, we need the following two facts:

Between any two crossing moves, there is at least one touching move.

Between any crossing move of order d and the next touching move, there are at least $d - 1$ ordinary moves.

In fact, after a crossing move of order d the barrier is contained in a symmetric decreasing substring of length $2d$, with d letters on each side of the barrier. For the next crossing move the central barrier must be brought into an increasing substring of length at least 2 . But only touching moves affect whether the barrier is in an increasing substring. This yields the first fact.

For the second fact, note that with each ordinary move (reversing some increasing substrings) the decreasing $2d$ -string can get shortened by only one letter on each side. And, as long as the decreasing string has at least 4 letters, a touching move is impossible. This yields the second fact.

If we construct the sequence of permutations starting with the same initial projection but using a clockwise rotation, then we obtain the reversed sequence of permutations. Thus the sequence that we do have recorded must also satisfy the opposite of our second fact:

Between a touching move and the next crossing move, of order d , there are at least $d - 1$ ordinary moves.

(6) The $T - O - C$ -pattern of the infinite sequence of permutations, as derived in (2), is obtained by repeating over and over again the $T - O - C$ -pattern of length t of the sequence $\pi_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_t$. Thus with the facts of (5) we see that in the infinite sequence of moves, each crossing move of order d is embedded into a $T - O - C$ -pattern of the type

$$T, \underbrace{O, O, \dots, O}_{\geq d-1}, C(d), \underbrace{O, O, \dots, O}_{\geq d-1} \quad (*)$$

of length $1 + (d - 1) + 1 + (d - 1) = 2d$.

In the infinite sequence, we may consider a finite segment of length t that starts with a touching move. This segment consists of substrings of the type $(*)$, plus possibly extra inserted T 's. This implies that its length t satisfies

$$t \geq \sum_{i=1}^c 2d_i \geq n$$

which completes the proof.

References

- [1] J. E. Goodman & R. Pollack: A combinatorial perspective on some problems in geometry, *Congressus Numerantium* 32 (1981), 383-394.
- [2] R. E. Jamison & D. Hill: A catalogue of slope-critical configurations, *Congressus Numerantium* 40 (1983), 101-125.
- [3] P. R. Scott: On the sets of directions determined by n points, *Amer. Math. Monthly* 77 (1970), 502-505.
- [4] P. Ungar: $2N$ noncollinear points determine at least $2N$ directions, *J. Combinatorial Theory, Ser. A* 33 (1982), 343-347.

22.2.4 Three applications of Euler's formula

A graph is planar if it can be drawn in the plane $\mathbb{R}^2$ without crossing edges (or, equivalently, on the 2-dimensional sphere S^2). We talk of a plane graph if such a drawing is already given and fixed. Any such drawing decomposes the plane or sphere into a finite number of connected regions, including the outer (unbounded) region, which are referred to as faces. Euler's formula exhibits a beautiful relation between the number of vertices, edges and faces that is valid for any plane graph. Euler mentioned this result for the first time in a letter to his friend Goldbach in 1750, but he did not have a complete proof at the time. Among the many proofs of Euler's formula, we present a pretty and "self-dual" one that gets by without induction. It can be traced back to von Staudt's book "Geometrie der Lage" from 1847.

Euler's formula. If G is a connected plane graph with n vertices, e edges and f faces, then

$$n - e + f = 2.$$

- Proof. Let $T \subseteq E$ be the edge set of a spanning tree for G , that is, of a minimal subgraph that connects all the vertices of G . This graph does not contain a cycle because of the minimality assumption.

We now need the dual graph G^* of G : To construct it, put a vertex into the interior of each face of G , and connect two such vertices of G^* by edges that correspond to common boundary edges between the corresponding faces. If there are several common boundary edges, then we draw several connecting edges in the dual graph. (Thus G^* may have multiple edges even if the original graph G is simple.)

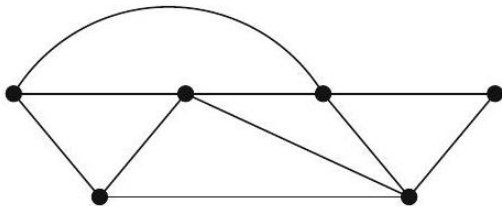
Consider the collection $T^* \subseteq E^*$ of edges in the dual graph that corresponds to edges in $E \setminus T$. The edges in T^* connect all the faces, since T does not have a cycle; but also T^* does not contain a cycle, since otherwise it would separate some vertices of G inside the cycle from vertices outside (and this cannot be, since T is a spanning subgraph, and the edges of T and of T^* do not intersect). Thus T^* is a spanning tree for G^* .

For every tree the number of vertices is one larger than the number of edges. To see this, choose one vertex as the root, and direct all edges "away from the root": this yields a bijection between the non-root vertices and the edges, by matching each edge with the vertex it points at. Applied to the tree T this yields $n = e_T + 1$, while for the tree T^* it yields $f = e_{T^*} + 1$. Adding both equations we get $n + f = (e_T + 1) + (e_{T^*} + 1) = e + 2$.

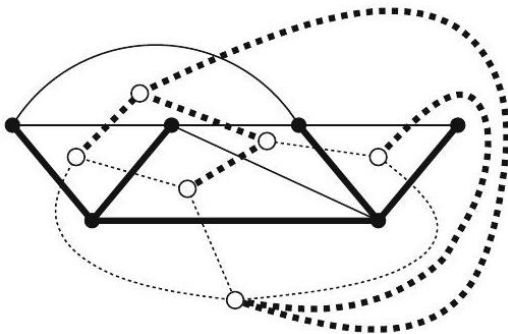
□



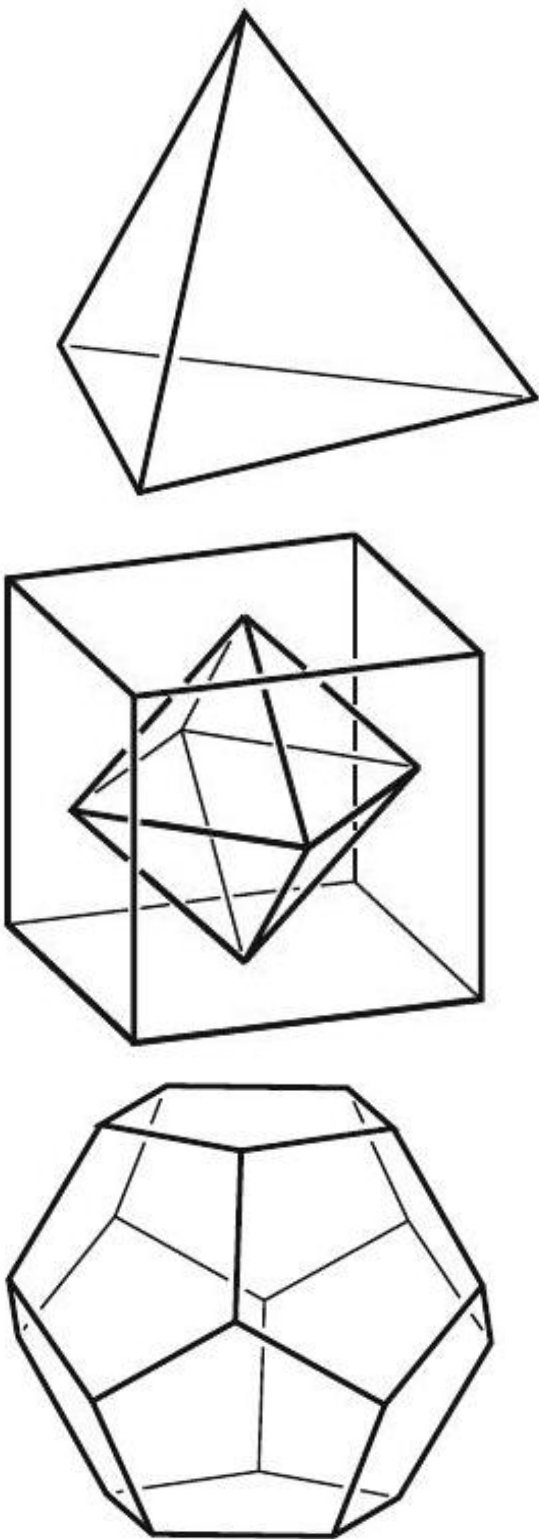
Leonhard Euler

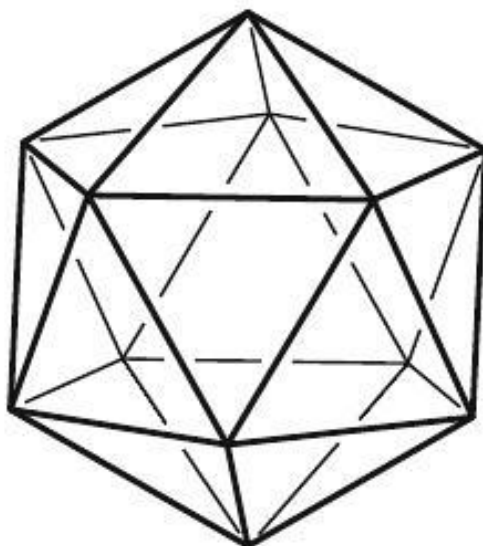


A plane graph $G : n = 6, e = 10, f = 6$

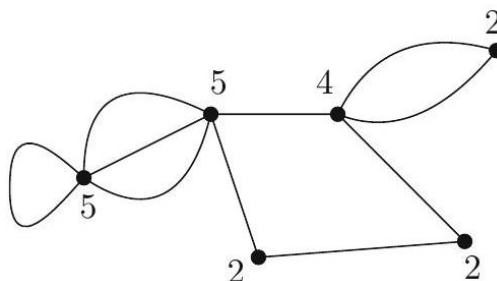


Dual spanning trees in G and in G^*

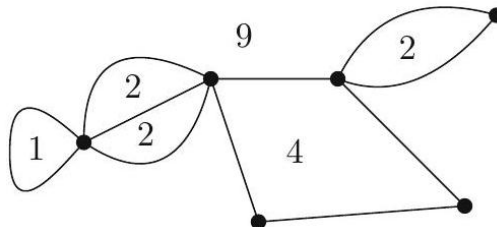




The five platonic solids



Here the degree is written next to each vertex. Counting the vertices of given degree yields $n_2 = 3, n_3 = 0, n_4 = 1, n_5 = 2$.



The number of sides is written into each region. Counting the faces with a given number of sides yields $f_1 = 1, f_2 = 3, f_4 = 1, f_9 = 1$, and $f_i = 0$ otherwise.

Euler's formula thus produces a strong numerical conclusion from a geo-metric-topological situation: the numbers of vertices, edges, and faces of a finite graph G satisfy $n - e + f = 2$ whenever the graph is or can be drawn in the plane or on a sphere.

Many well-known and classical consequences can be derived from Euler's formula. Among them are the classification of the regular convex polyhedra (the platonic solids), the fact that K_5 and $K_{3,3}$ are not planar (see below), and the five-color theorem that every planar map can be colored with at most five colors such that no two adjacent countries have the same color. But for this we have a much better proof, which does not even need Euler's formula - see Chapter 39. This chapter collects three other beautiful proofs that have Euler's formula at their core. The first two - a proof of the Sylvester-Gallai theorem, and a theorem on two-colored point configurations - use Euler's formula in clever combination with other arithmetic relationships between basic graph parameters. Let us first look at these parameters.

The degree of a vertex is the number of edges that end in the vertex, where loops count double. Let n_i denote the number of vertices of degree i in G . Counting the vertices according to their degrees, we obtain

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + \cdots \quad (1)$$

On the other hand, every edge has two ends, so it contributes 2 to the sum of all degrees, and we obtain

$$2e = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \cdots \quad (2)$$

You may interpret this identity as counting in two ways the ends of the edges, that is, the edge-vertex incidences. The average degree $\bar{d}$ of the vertices is therefore

$$\bar{d} = \frac{2e}{n}.$$

Next we count the faces of a plane graph according to their number of sides: a k -face is a face that is bounded by k edges (where an edge that on both sides borders the same region has to be counted twice!). Let f_k be the number of k -faces. Counting all faces we find

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots \quad (3)$$

Counting the edges according to the faces of which they are sides, we get

$$2e = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \cdots \quad (4)$$

As before, we can interpret this as double-counting of edge-face incidences. Note that the average number of sides of faces is given by

$$\bar{f} = \frac{2e}{f}.$$

Let us deduce from this - together with Euler's formula - quickly that the complete graph K_5 and the complete bipartite graph $K_{3,3}$ are not planar. For a hypothetical plane drawing of K_5 we calculate $n = 5, e = \binom{5}{2} = 10$, thus $f = e + 2 - n = 7$ and $\bar{f} = \frac{2e}{f} = \frac{20}{7} < 3$. But if the average number of sides is smaller than 3, then the embedding would have a face with at most two sides, which cannot be.

Similarly for $K_{3,3}$ we get $n = 6, e = 9$, and $f = e + 2 - n = 5$, and thus $\bar{f} = \frac{2e}{f} = \frac{18}{5} < 4$, which cannot be since $K_{3,3}$ is simple and bipartite, so all its cycles have length at least 4.

It is no coincidence, of course, that the equations (3) and (4) for the f_i 's look so similar to the equations (1) and (2) for the n_i 's. They are transformed into each other by the dual graph construction $G \rightarrow G^*$ explained above.

From the double counting identities, we get the following important "local" consequences of Euler's formula.

Proposition. Let G be any simple plane graph with $n > 2$ vertices. Then

- (A) G has at most $3n - 6$ edges.
- (B) G has a vertex of degree at most 5.
- (C) If the edges of G are two-colored, then there is a vertex of G with at most two color-changes in the cyclic order of the edges around the vertex.

- **Proof.** For each of the three statements, we may assume that G is connected.

(A) Every face has at least 3 sides (since G is simple), so (3) and (4) yield

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + \cdots$$

and

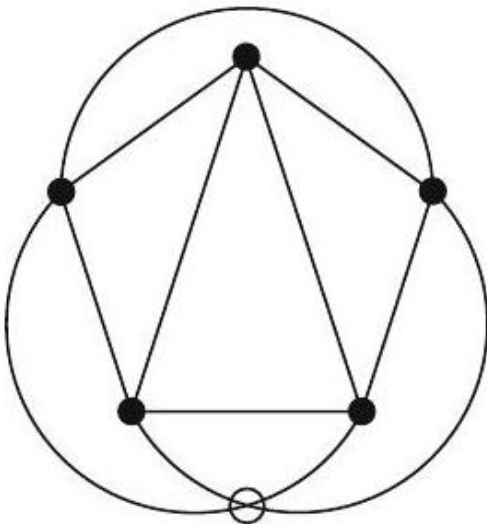
$$2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots$$

and thus $2e - 3f \geq 0$. Euler's formula now gives

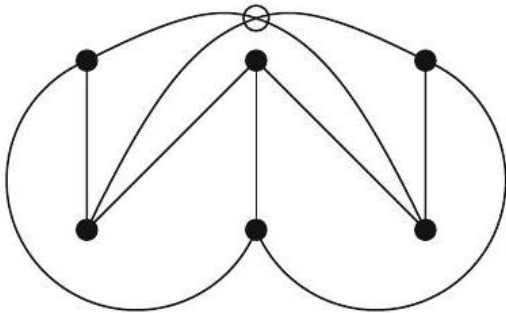
$$3n - 6 = 3e - 3f \geq e.$$

(B) By part (A), the average degree $\bar{d}$ satisfies

$$\bar{d} = \frac{2e}{n} \leq \frac{6n - 12}{n} < 6.$$

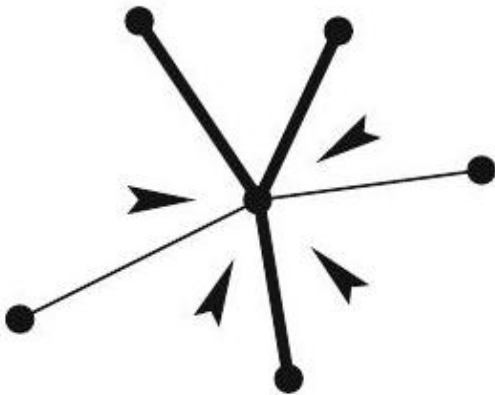


K_5
\$ drawn with one crossing

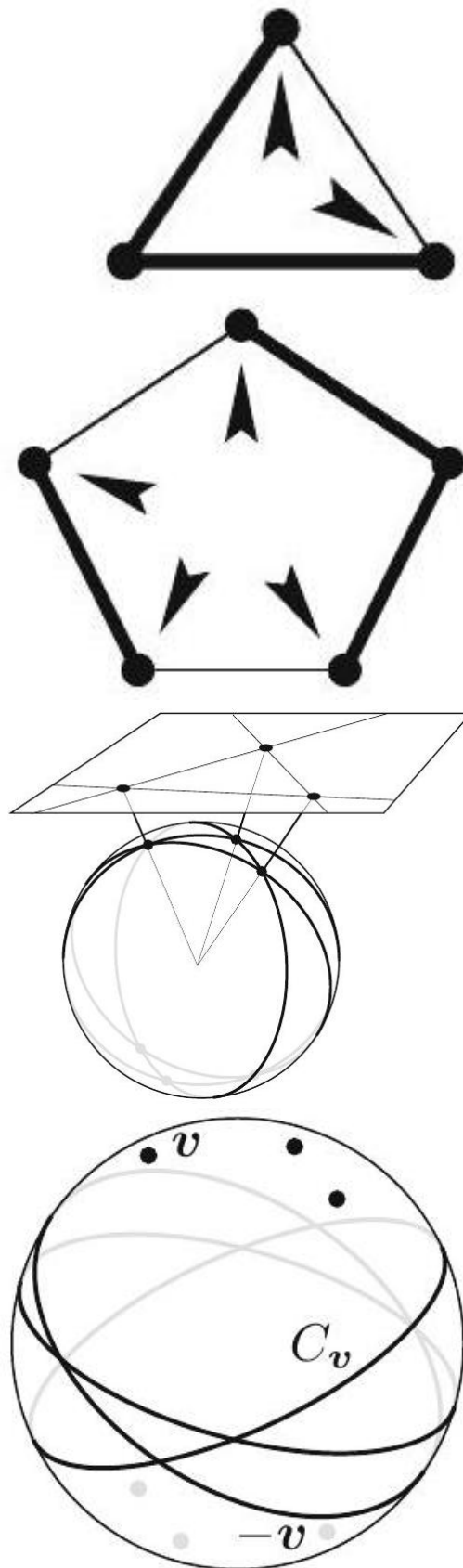


$K_{3,3}$
\$ drawn with one crossing

So there must be a vertex of degree at most 5 .



Arrows point to the corners with color changes.



(C) Let c be the number of corners where color changes occur. Suppose the statement is false, then we have $c \geq 4n$ corners with color changes, since at every vertex there is an even number of changes. Now every face with $2k$ or $2k + 1$ sides has at most $2k$ such corners, so we conclude that

$$\begin{aligned}
4n \leq c &\leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + \cdots \\
&\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + 10f_7 + \cdots \\
&= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + \cdots) \\
&\quad - 4(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \cdots) \\
&= 4e - 4f
\end{aligned}$$

using again (3) and (4). So we have $e \geq n + f$, again contradicting Euler's formula.

1. The Sylvester-Gallai theorem, revisited

It was first noted by Norman Steenrod, it seems, that part (B) of the proposition yields a strikingly simple proof of the Sylvester-Gallai theorem (see Chapter 11).

The Sylvester-Gallai theorem. Given any set of $n \geq 3$ points in the plane, not all on one line, there is always a line that contains exactly two of the points.

- Proof. (Sylvester-Gallai via Euler)

If we embed the plane $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ near the unit sphere S^2 as indicated in our figure, then every point in $\mathbb{R}^2$ corresponds to a pair of antipodal points on S^2 , and the lines in $\mathbb{R}^2$ correspond to great circles on S^2 . Thus the Sylvester-Gallai theorem amounts to the following:

Given any set of $n \geq 3$ pairs of antipodal points on the sphere, not all on one great circle, there is always a great circle that contains exactly two of the antipodal pairs.

Now we dualize, replacing each pair of antipodal points by the corresponding great circle on the sphere. That is, instead of points $\pm \mathbf{v} \in S^2$ we consider the orthogonal circles given by $C_{\mathbf{v}} := \{\mathbf{x} \in S^2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$. (This $C_{\mathbf{v}}$ is the equator if we consider $\mathbf{v}$ as the north pole of the sphere.) Then the Sylvester-Gallai problem asks us to prove:

Given any collection of $n \geq 3$ great circles on S^2 , not all of them passing through one point, there is always a point that is on exactly two of the great circles.

But the arrangement of great circles yields a simple plane graph on S^2 , whose vertices are the intersection points of two of the great circles, which divide the great circles into edges. All the vertex degrees are even, and they are at least 4 - by construction. Thus part (B) of the proposition yields the existence of a vertex of degree 4. That's it!

2. Monochromatic lines

The following proof of a "colorful" relative of the Sylvester-Gallai theorem is due to Don Chakerian.

Theorem. Given any finite configuration of "black" and "white" points in the plane, not all on one line, there is always a "monochromatic" line: a line that contains at least two points of one color and none of the other.

- Proof. As for the Sylvester-Gallai problem, we transfer the problem to the unit sphere and dualize it there. So we must prove:

Given any finite collection of "black" and "white" great circles on the unit sphere, not all passing through one point, there is always an intersection point that lies either only on white great circles, or only on black great circles.

Now the (positive) answer is clear from part (C) of the proposition, since in every vertex where great circles of different colors intersect, we always have at least 4 corners with sign changes.

3. Pick's theorem

Pick's theorem from 1899 is a beautiful and surprising result in itself, but it is also a "classical" consequence of Euler's formula. For the following, call a convex polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ elementary if its vertices are integral (that is, they lie in the lattice $\mathbb{Z}^2$), but if it does not contain any further lattice points.

Lemma. Every elementary triangle $\Delta = \text{conv}\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ has area $A(\Delta) = \frac{1}{2}$.

- Proof. Both the parallelogram P with corners $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0$ and the lattice $\mathbb{Z}^2$ are symmetric with respect to the map

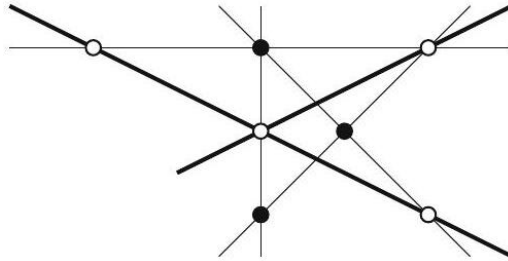
$$\sigma : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{x},$$

which is the reflection with respect to the center of the segment from $\mathbf{p}_1$ to $\mathbf{p}_2$. Thus the parallelogram $P = \Delta \cup \sigma(\Delta)$ is elementary as well, and its integral translates tile the plane. Hence $\{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0\}$ is a basis of the lattice $\mathbb{Z}^2$, it has determinant ± 1 , P is a parallelogram of area 1, and Δ has area $\frac{1}{2}$. (For an explanation of these terms see the box on the next page.) $\square$

Theorem. The area of any (not necessarily convex) polygon $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ with integral vertices is given by

$$A(Q) = n_{\text{int}} + \frac{1}{2}n_{\text{bd}} - 1,$$

where n_{int} and n_{bd} are the numbers of integral points in the interior respectively on the boundary of Q . $\square$

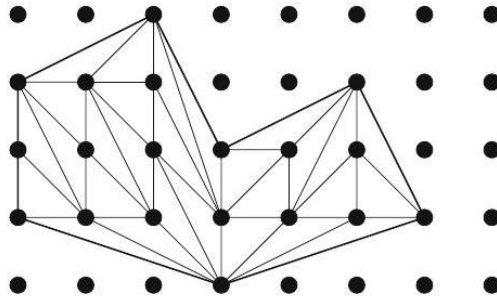


Lattice bases

A basis of $\mathbb{Z}^2$ is a pair of linearly independent vectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ such that

$$\mathbb{Z}^2 = \{\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Let $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ and $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, then the area of the parallelogram spanned by $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$ is given by $A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = |\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)| = \left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|$. If $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ and $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$ is another basis, then there exists an invertible $\mathbb{Z}$ -matrix Q with $\begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} Q$. Since $QQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, and the determinants are integers, it follows that $|\det Q| = 1$, and hence $|\det(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)| = |\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)|$. Therefore all basis parallelograms have the same area 1, since $A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$.



- Proof. Every such polygon can be triangulated using all the n_{int} lattice points in the interior, and all the n_{bd} lattice points on the boundary of Q . (This is not quite obvious, in particular if Q is not required to be convex, but the argument given in Chapter 40 on the art gallery problem proves this.)
Now we interpret the triangulation as a plane graph, which subdivides the plane into one unbounded face plus $f - 1$ triangles of area $\frac{1}{2}$, so

$$A(Q) = \frac{1}{2}(f - 1)$$

Every triangle has three sides, where each of the e_{int} interior edges bounds two triangles, while the e_{bd} boundary edges appear in one single triangle each. So $3(f - 1) = 2e_{\text{int}} + e_{\text{bd}}$ and thus $f = 2(e - f) - e_{\text{bd}} + 3$. Also, there is the same number of boundary edges and vertices, $e_{\text{bd}} = n_{\text{bd}}$. These two facts together with Euler's formula yield

$$\begin{aligned} f &= 2(e - f) - e_{\text{bd}} + 3 \\ &= 2(n - 2) - n_{\text{bd}} + 3 = 2n_{\text{int}} + n_{\text{bd}} - 1, \end{aligned}$$

and thus

$$A(Q) = \frac{1}{2}(f - 1) = n_{\text{int}} + \frac{1}{2}n_{\text{bd}} - 1$$

References

- [1] G. D. Chakerian: Sylvester's problem on collinear points and a relative, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 164-167.
- [2] D. Eppstein: Nineteen proofs of Euler's formula: $V - E + F = 2$, in: The Geometry Junkyard, <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>.
- [3] G. PicK: Geometrisches zur Zahlenlehre, Sitzungsberichte Lotos (Prag), Natur-med. Verein für Böhmen 19 (1899), 311-319.
- [4] K. G. C. von Staudt: Geometrie der Lage, Verlag der Fr. Korn'schen Buchhandlung, Nürnberg 1847.
- [5] N. E. Steenrod: Solution 4065/Editorial Note, Amer. Math. Monthly 51 (1944), 170-171.

22.2.5 Cauchy's rigidity theorem

A famous result that depends on Euler's formula (specifically, on part (C) of the proposition in the previous chapter) is Cauchy's rigidity theorem for 3-dimensional polyhedra.

For the notions of congruence and of combinatorial equivalence that are used in the following we refer to the appendix on polytopes and polyhedra in the chapter on Hilbert's third problem, see page 73.

Theorem. If two 3-dimensional convex polyhedra P and P' are combinatorially equivalent with corresponding facets being congruent, then also the angles between corresponding pairs of adjacent facets are equal (and thus P is congruent to P').

The illustration in the margin shows two 3-dimensional polyhedra that are combinatorially equivalent, such that the corresponding faces are congruent. But they are not congruent, and only one of them is convex. Thus the assumption of convexity is essential for Cauchy's theorem!

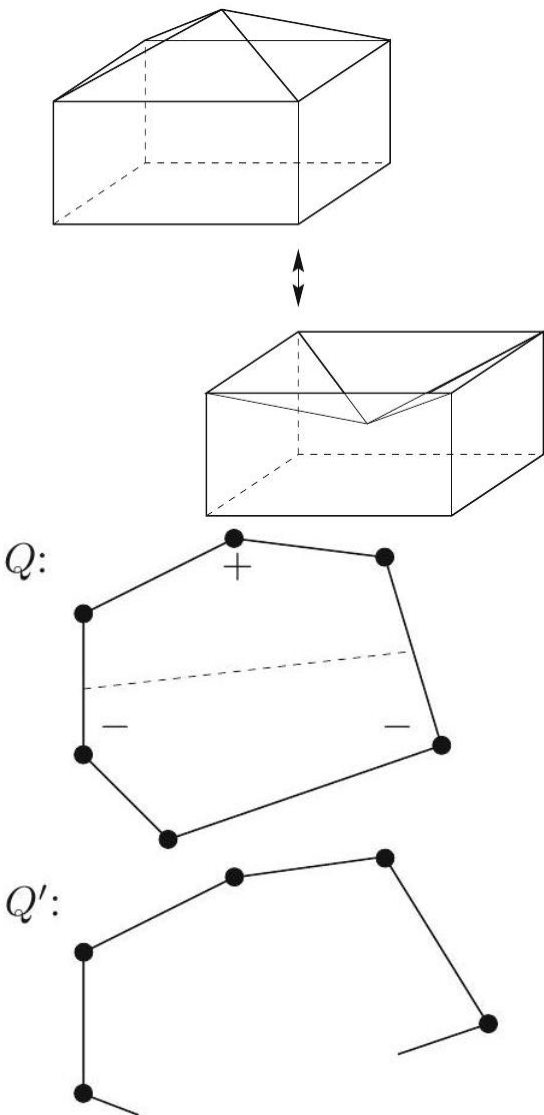
- **Proof.** The following is essentially Cauchy's original proof. Assume that two convex polyhedra P and P' with congruent faces are given. We color the edges of P as follows: an edge is black (or "positive") if the corresponding interior angle between the two adjacent facets is larger in P' than in P ; it is white (or "negative") if the corresponding angle is smaller in P' than in P .

The black and the white edges of P together form a 2-colored plane graph on the surface of P , which by radial projection, assuming that the origin is in the interior of P , we may transfer to the surface of the unit sphere. If P and P' have unequal corresponding facet-angles, then the graph is nonempty. With part (C) of the proposition in the previous chapter we find that there is a vertex p that is adjacent to at least one black or white edge, such that there are at most two changes between black and white edges (in cyclic order).

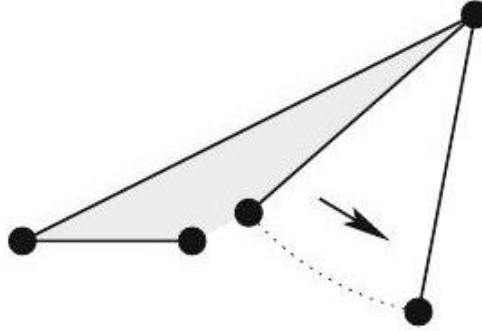
Now we intersect P with a small sphere S_ε (of radius ε) centered at the vertex p , and we intersect P' with a sphere S'_ε of the same radius ε centered at the corresponding vertex p' . In S_ε and S'_ε we find convex spherical polygons Q and Q' such that corresponding arcs have the same lengths, because of the congruence of the facets of P and P' , and since we have chosen the same radius ε .



Augustin Cauchy



Now we mark by $+$ the angles of Q for which the corresponding angle

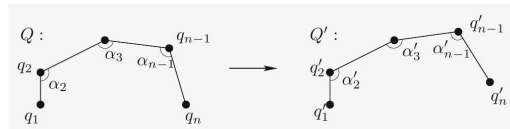


in Q' is larger, and by $-$ the angles whose corresponding angle of Q' is smaller. That is, when moving from Q to Q' the $+$ angles are "opened," the $-$ angles are "closed," while all side lengths and the unmarked angles stay constant.

From our choice of p we know that some $+$ or $-$ sign occurs, and that in cyclic order there are at most two $+/-$ changes. If only one type of signs occurs, then the lemma below directly gives a contradiction, saying that one edge must change its length. If both types of signs occur, then (since there are only two sign changes) there is a "separation line" that connects the midpoints of two edges and separates all the $+$ signs from all the $-$ signs. Again we get a contradiction from the lemma below, since the separation line cannot be both longer and shorter in Q' than in Q . $\square$

Cauchy's arm lemma.

If Q and Q' are convex (planar or spherical) n -gons, labeled as in the figure,



such that $\overline{q_i q_{i+1}} = \overline{q'_i q'_{i+1}}$ holds for the lengths of corresponding edges for $1 \leq i \leq n-1$, and $\alpha_i \leq \alpha'_i$ holds for the sizes of corresponding angles for $2 \leq i \leq n-1$, then the "missing" edge length satisfies

$$\overline{q_1 q_n} \leq \overline{q'_1 q'_n}$$

with equality if and only if $\alpha_i = \alpha'_i$ holds for all i .

It is interesting that Cauchy's original proof of the lemma was false: a continuous motion that opens angles and keeps side-lengths fixed may destroy convexity - see the figure! On the other hand, both the lemma and its proof given here, from a letter by I. J. Schoenberg to S. K. Zaremba, are valid both for planar and for spherical polygons.

- **Proof.** We use induction on n . The case $n = 3$ is easy: If in a triangle we increase the angle γ between two sides of fixed lengths a and b , then the length c of the opposite side also increases. Analytically, this follows from the cosine theorem

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

in the planar case, and from the analogous result

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

in spherical trigonometry. Here the lengths a, b, c are measured on the surface of a sphere of radius 1, and thus have values in the interval $[0, \pi]$.

Now let $n \geq 4$. If for any $i \in \{2, \dots, n-1\}$ we have $\alpha_i = \alpha'_i$, then the corresponding vertex can be cut off by introducing the diagonal from q_{i-1} to q_{i+1} resp. from q'_{i-1} to q'_{i+1} , with $\overline{q_{i-1} q_{i+1}} = \overline{q'_{i-1} q'_{i+1}}$, so we are done by induction. Thus we may assume $\alpha_i < \alpha'_i$ for $2 \leq i \leq n-1$.

Now we produce a new polygon Q^* from Q by replacing α_{n-1} by the largest possible angle

$\alpha_{n-1}^* \leq \alpha'_{n-1}$ that keeps Q^* convex. For this we replace q_n by q_n^* , keeping all the other q_i , edge lengths, and angles from Q .

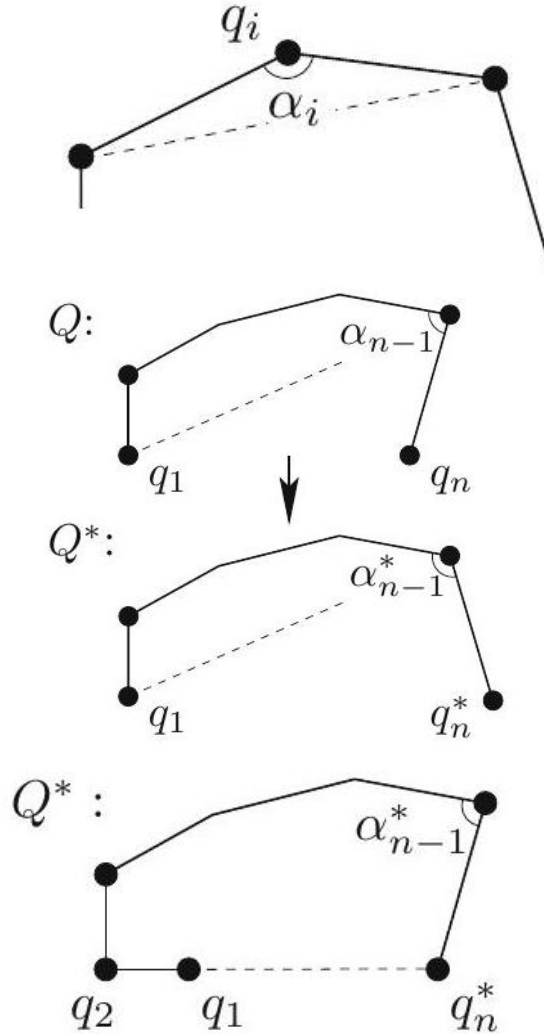
If indeed we can choose $\alpha_{n-1}^* = \alpha'_{n-1}$ keeping Q^* convex, then we get $\overline{q_1 q_n} < \overline{q_1 q_n^*} \leq \overline{q'_1 q'_n}$, using the case $n = 3$ for the first step and induction as above for the second.

Otherwise after a nontrivial move that yields

$$\overline{q_1 q_n^*} > \overline{q_1 q_n} \quad (1)$$

we "get stuck" in a situation where q_2, q_1 and q_n^* are collinear, with

$$\overline{q_2 q_1} + \overline{q_1 q_n^*} = \overline{q_2 q_n^*} \quad (2)$$



Now we compare this Q^* with Q' and find

$$\overline{q_2 q_n^*} \leq \overline{q'_2 q'_n} \quad (3)$$

by induction on n (ignoring the vertex q_1 resp. q'_1). Thus we obtain

$$\overline{q'_1 q'_n} \stackrel{(*)}{\geq} \overline{q'_2 q'_n} - \overline{q'_1 q'_2} \stackrel{(3)}{\geq} \overline{q_2 q_n^*} - \overline{q_1 q_2} \stackrel{(2)}{=} \overline{q_1 q_n^*} \stackrel{(1)}{>} \overline{q_1 q_n}$$

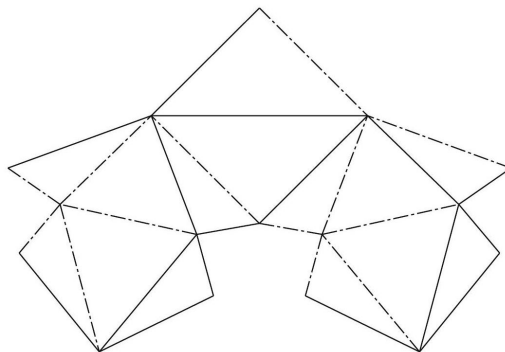
where $(*)$ is just the triangle inequality, and all other relations have already been derived.

We have seen an example which shows that Cauchy's theorem is not true for nonconvex polyhedra. The special feature of this example is, of course, that a noncontinuous "flip" takes one polyhedron to the other, keeping the facets congruent while the dihedral angles "jump." One can ask for more:

Could there be, for some nonconvex polyhedron, a continuous deformation that would keep the facets flat and congruent?

It was conjectured that no triangulated surface, convex or not, admits such a motion. So, it was quite a surprise when in 1977 - more than 160 years after Cauchy's work - Robert Connelly presented counterexamples: closed triangulated spheres embedded in $\mathbb{R}^3$ (without self-intersections) that are flexible, with a continuous motion that keeps all the edge lengths constant, and thus keeps the triangular faces congruent.

A beautiful example of a flexible surface constructed by Klaus Steffen: The dashed lines represent the nonconvex edges in this "cut-out" paper model. Fold the normal lines as "mountains" and the dashed lines as "valleys." The edges in the model have lengths 5, 10, 11, 12 and 17 units.



The rigidity theory of surfaces has even more surprises in store: Idjad Sabitov managed to prove that when any such flexing surface moves, the volume it encloses must be constant. His proof is beautiful also in its use of the algebraic machinery of polynomials and determinants (outside the scope of this book).

References

- [1] A. Cauchy: Sur les polygones et les polyèdres, seconde mémoire, J. cole Polytechnique XVI^e Cahier, Tome IX (1813), 87-98; Euvres Complètes, II^e Série, Vol. 1, Paris 1905, 26-38.
- [2] R. Connelly: A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra, Inst. Haut. Etud. Sci., Publ. Math. 47 (1978), 333-338.
- [3] R. Connelly: The rigidity of polyhedral surfaces, Mathematics Magazine 52 (1979), 275-283.
- [4] I. Kh. Sabitov: The volume as a metric invariant of polyhedra, Discrete Comput. Geometry 20 (1998), 405-425.
- [5] J. Schoenberg & S.K. Zaremba: On Cauchy's lemma concerning convex polygons, Canadian J. Math. 19 (1967), 1062-1071.

22.2.6 The Borromean rings don't exist

The "Borromean rings" - three rings arranged so that no two of them are linked, but the configuration cannot be taken apart without breaking one of the rings - form a classic artistic symbol, which appeared in the coat of arms of the aristocratic Borromeo family since the middle of the 15th century.

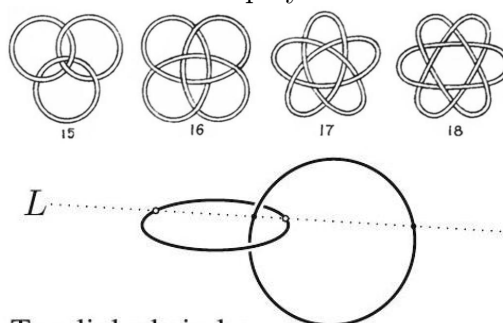
The Borromean rings are also one of the most tantalizing and enigmatic "impossible figures" of mathematics. They can easily be built as a geometric object in such a way that two of the rings are perfectly round circles of the same size; it seems, however, that then the third ring is represented by an ellipse, at best. Thus it is natural to ask:

Can the Borromean rings be built from three perfect circles?

As mathematical objects, the Borromean rings belong to the theory of knots and links, which very attractively connects geometry, topology, and combinatorics. We all have a geometric picture of what knots (closed curves in space) and links (arrangements of several such curves) look like, and we can draw them in the plane. We also have intuitive notions of when two knots or links are "the same" (equivalent), when a knot or link is "trivial," when two circles are linked, etc.: The appendix to this chapter provides a review of the essential terms and definitions, including the fact that two diagrams present the same link or knot if and only if they can be transformed into each other by a finite sequence of "Reidemeister moves."

Knot theory as we know it today started in 1867, when the physicist William Thomson, now known as Lord Kelvin, came up with his "vortex theory," according to which atoms could be

explained as knots in the "ether" background of the universe. Kelvin's theory was immensely popular at the time and led to considerable efforts in the enumeration and classification of knots and links. Kelvin's coauthor and colleague, the Scottish physicist Peter Guthrie Tait, published the first knot tables in 1876. He displayed and discussed the following links:



Two linked circles

In this display, No. 15 shows the Borromean Rings, while No. 18 is an apparently different link that, however, shares the same characteristics: It consists of three closed curves that are pairwise not linked, whereas the whole diagram does not seem to come apart, it represents a nontrivial link. Tait indeed claimed that the links No. 15 and No. 18 were not equivalent, apparently based on the assumption that any alternating diagram of a link (where along any string under- and over-crossings alternate) has a minimal number of crossings among all possible diagrams. This long-standing "Tait conjecture" was proved more than 100 years later, by Thistlethwaite, Kauffman, and Murasugi in 1987. (Tait's examples No. 16 and 17 have only one component, so they are knots. All four examples fall into a larger family that has been described and studied as the "Turk's head links.")

In 1892, the geometer Hermann Brunn introduced a much more general family of objects that we now call Brunnian links: k -component links in which any subcollection of $k - 1$ of the components is trivial. Tait's links No. 15 (the Borromean rings) and No. 18 are examples.

Back to the Borromean rings: Indeed they cannot be built from three perfect circles. The first proof for this appeared in 1987 in a long differential geometry paper by Michael F. Freedman and Richard Skora. Their beautiful geometric idea, "getting movies from spherical domes," is very powerful: It solves the problem not only for the Borromean rings, but shows that any Brunnian link built from perfect circles is trivial. It can also be generalized to links formed by k -spheres in $(2k + 1)$ -dimensional space. Our presentation is based on a short unpublished note "Circle links" by Ian Agol.

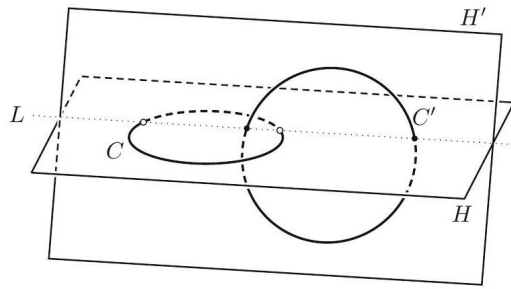
Theorem 1. If a link consists of disjoint perfect circles that are pairwise not linked, then the link is trivial.

- **Proof.** Moving each of the circles just a little bit, we may assume that they lie in planes that are distinct, no two of the planes are parallel, and none of the planes spanned by one of the circles contains the center of a second circle. (This first preparatory step is not necessary, but it simplifies some later parts of the proof quite a bit.)

There are several different ways to define what it means that two disjoint circles in $\mathbb{R}^3$ are linked. Let us here use the following: Two circles are linked if one of them intersects (and not only touches) the disk spanned by the other one exactly once.

Let the circles be $C, C' \subseteq \mathbb{R}^3$, let D, D' be the flat disks they bound, and let H, H' be the planes they span. If C' intersects the disk D in one point, then this point lies both in $D \subseteq H$ as well as on $C' \subseteq D' \subseteq H'$, so in particular it lies in the intersection of the two planes H and H' , which is a line, $L := H \cap H'$. As this line lies in the plane H and contains a point in the interior of the disk D , it intersects C in exactly two points. The circle C' intersects the plane H once in the interior of D , so there has to be a second intersection point, which lies again on the line L , but outside D .

We conclude that there are two pairs of intersection points given by $C \cap L$ and $C' \cap L$, and these two pairs alternate on the line L . In particular, we find in this situation that also C intersects the disk D' in one point.



It turns out that this "alternating property" characterizes linked circles: If two circles C, C' are not linked, then one of them misses (or only touches) the disk spanned by the other one. In that case we find fewer than four points of $C \cup C'$ on the line L , or the four points do not alternate.

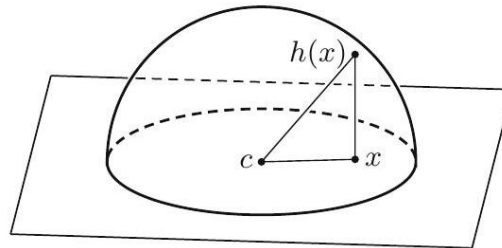
For the proof of the theorem we now take a configuration of n circles in $\mathbb{R}^3$ that are pairwise not linked and erect spherical domes above the disks spanned by the circles. This entails a bold step into the fourth dimension, since we add an extra coordinate. Don't worry about how to visualize this - in the end we will look at these dome functions defined on lines, so all arguments can be visualized and verified in planar diagrams.

The spherical domes are constructed as follows: For any circle $C \subseteq \mathbb{R}^3$ with center c and radius r there is a 2-dimensional hemisphere $S \subseteq \mathbb{R}^4$, which may be obtained as the graph

$$\{(x, h(x)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : x \in D\}$$

of the function

$$h : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \sqrt{r^2 - |x - c|^2}$$

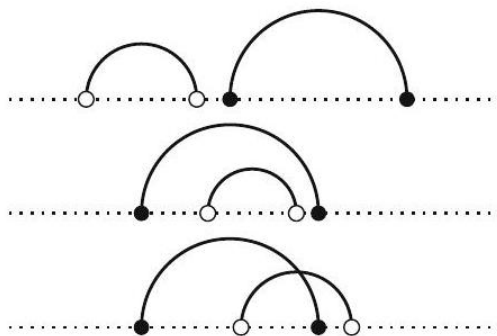


$$\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - c|^2 + |h(x) - 0|^2 = r^2\}$$

on the closed disk D spanned by the circle C . The dome S is orthogonal above D in the following sense: If we project it to $\mathbb{R}^3$ by the orthogonal projection $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, t) \mapsto x$, that "forgets the last coordinate," then the image of the dome will be the disk D .

Claim. If two disjoint circles $C, C' \subseteq \mathbb{R}^3$ are not linked, then their spherical domes $S, S' \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ do not intersect.

Proof of the Claim. We prove that if the domes S, S' above the discs D, D' spanned by two disjoint circles $C, C' \subseteq \mathbb{R}^3$ intersect, then the circles are linked. For this, let (x_0, t_0) be a point in the intersection $S \cap S'$. As (x_0, t_0) lies in S , we get $x_0 \in D$. Similarly, as (x_0, t_0) lies in S' , we get that $x_0 \in D'$. Hence x_0 lies in the line L , and it also lies on $D \cap D'$, where both "lifting functions" h and h' are defined.

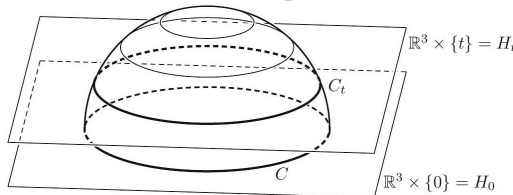


The half-circles above L intersect if and only if their end points alternate on the line L .

The lifting functions h, h' describe spherical domes defined on D resp. D' . Restricted to the line L , the functions h and h' define perfect half-circles, with domain of definition $D \cap L$ resp. $D' \cap L$. (This is the crucial point in the proof: Above an ellipse one cannot build a dome that restricts to half-circle arcs.)

Since the half-circles above $D \cap L$ resp. $D' \cap L$ intersect, their pairs of end points $S \cap L$ and $S' \cap L$ alternate on L , as illustrated in the margin. Hence the circles C and C' are linked. This finishes the proof of the claim.

Back to the configuration of disjoint perfect circles in $\mathbb{R}^3$ that are pairwise not linked. Freedman and Skora's brilliant idea was to use the disjoint domes guaranteed by the claim in order to construct a "movie" that shows us how to separate the circles in the link by a continuous motion. For this, we identify the original space $\mathbb{R}^3$, which contains the link, with the slice $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ of the space $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ that contains the domes; that is, the extra coordinate t is interpreted as time, and we start our movie at $t = 0$ with the original link. If we now continuously increase the fourth (time) coordinate, then what we see in time slices $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ is a movie in which each of the circles shrinks to a point, and then disappears.



Here is a key observation: While a circle shrinks in this movie, the center of the circle and the plane spanned by the circle do not change. Furthermore, the circles stay disjoint since the domes are disjoint by the claim, and thus they remain pairwise non-linked.

We can stop the shrinking for each circle at some time when the circle is so small that it does not any more intersect a plane that is spanned by any one of the other circles. Moreover, also the disk spanned by this little circle does not intersect any of the other circle planes - neither at the point of time where we stop its shrinking, nor at any later time.

Thus the movie will end with all circles shrunk so far that they have disjoint spanning disks: The circles are completely separate, and thus the link is trivial. $\square$

In particular, we have just proved that any Brunnian link built from perfect circles can be taken apart in a motion which maintains perfect circles along the way. It remains an open problem, however, whether each of the circles could keep its size in such a motion picture.

With Theorem 1, we have established that the Borromean rings cannot be built from perfect circles - assuming that we know that the Borromean rings form a nontrivial link. Do we know that? It is by no means easy to prove rigorously for any knot or link that it is nontrivial ... However, the eminent knot theorist Ralph Fox has invented a strikingly simple method to achieve this - reportedly he designed it "in an effort to make the subject accessible to everyone" while teaching knot theory to undergraduates at Haverford College in 1956. Its first published trace can be found in an exercise of a 1963 knot theory textbook by Crowell and Fox. Thirty years later Ollie Nanyes observed that Fox's method also solves the problem for the Borromean rings.

Theorem 2. The Borromean rings are nontrivial, and they are also not equivalent to Tait's link No. 18.

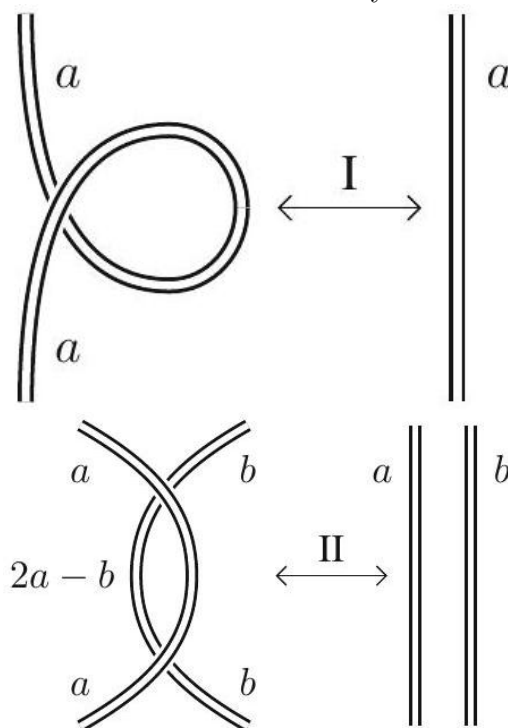
- Proof. For every $n \geq 2$, a Fox n -labeling of a link diagram labels each arc of the diagram by an integer modulo n , such that at each crossing the two integers a and c of the arcs that end at the crossing and the label b of the arc of the overpass satisfy the crossing relation

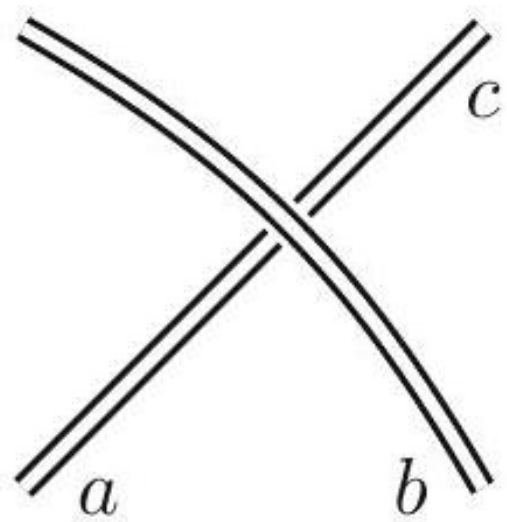
$$a + c \equiv 2b \pmod{n}.$$

Each link diagram has n trivial n -labelings, which use the same label for all the arcs of the diagram, so we are interested in nontrivial labelings, which use at least two different labels. For example, any link that consists of two disjoint "far away" parts in the plane has at least n^2 different Fox n -labelings. Now we observe a crucial fact:

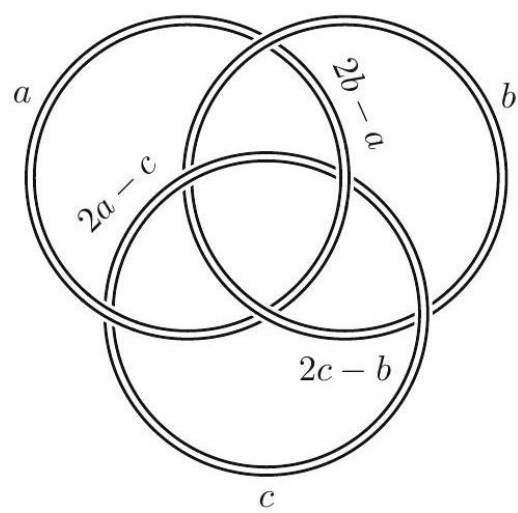
Claim. If two diagrams represent equivalent links, then they have the same number of Fox n -labelings.

As explained in the appendix to this chapter, the diagrams for equivalent links are connected by continuous deformations and a finite sequence of Reidemeister moves of types I, II, and III; so all we have to check is that Reidemeister moves don't change the number of Fox n -labelings. This is apparent from the following sketches, where in each of the separate drawings all the relations among the labels of different arcs are forced by the crossing relations:

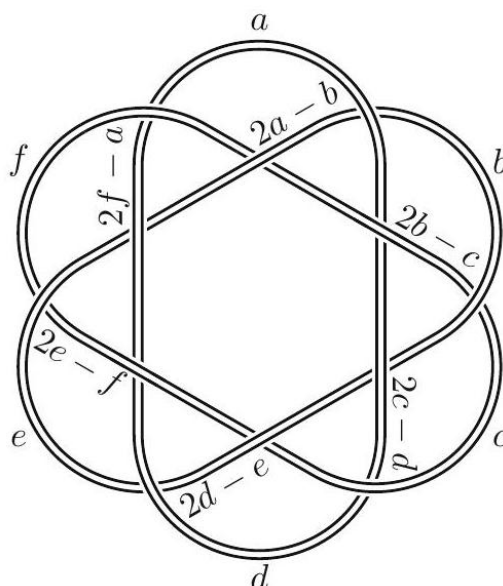




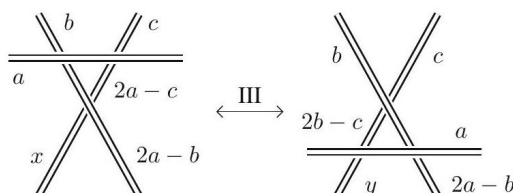
The crossing relation



Labels for the Borromean rings



Labels for Tait's link No. 18



In particular, for arbitrary labels a, b , and c , the Reidemeister moves of type III the crossing relations finally force us to put labels

$$x \equiv 2(2a - b) - (2a - c) \equiv c + 2a - 2b$$

before the move and

$$y \equiv 2a - (2b - c) \equiv c + 2a - 2b$$

after the move. This establishes the Claim!

Now we simply have to count the labelings. The interesting observations will occur for odd $n \geq 3$.

For the Borromean rings we claim that all Fox n -labelings are trivial if $n \geq 3$ is odd: If in the standard diagram for the Borromean rings the outer arcs get the labels a, b , and c (as sketched in the margin), then the outer crossings force the inner arcs to have labels $2b - a, 2c - b$, and $2a - c$, and at the inner crossings of the diagram we need that $2(2b - a) \equiv c + (2a - c), 2(2c - b) \equiv a + (2b - a), 2(2a - c) \equiv b + (2c - b)$, that is $4a \equiv 4b \equiv 4c$, and hence $a \equiv b \equiv c \pmod{n}$, as n is odd. (For every even $n \geq 2$, nontrivial labelings exist.) In particular, the Borromean rings have only the trivial Fox 3-labelings or 5-labelings.

For Tait's link No. 18, a very similar calculation, with the labels a, b, c, d, e , and f assigned to the outer arcs, leads to inner labels $2a - b, 2b - c, 2c - d$, etc., and then finally to the conditions $a - d \equiv 4(b - c), b - e \equiv 4(c - d), c - f \equiv 4(d - e), \dots \pmod{n}$.

For $n = 3$, this yields $a - b + c - d \equiv 0, b - c + d - e \equiv 0$, etc., and we quickly derive that $a \equiv b \equiv \dots \equiv f$, so again there are only the trivial 3-labelings.

However, for $n = 5$ we find that we have to solve the equations $a + b \equiv c + d, b + c \equiv d + e$, etc., and this leads us to the solutions with arbitrary $a \equiv c \equiv e$ and $b \equiv d \equiv f$ (and no others). Thus there are $5^2 = 25$ Fox 5-labelings for this link.

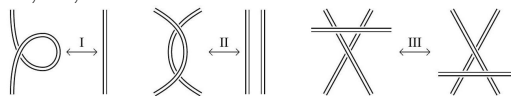
The trivial three component link clearly has n^3 Fox n -labelings, that is, it has 27 Fox 3-labelings and 125 Fox 5-labelings.

Thus the Borromean rings, Tait's link No. 18, and the trivial link with three components have different numbers of Fox 5-labelings (5, 25, and 125, respectively), so they are nonequivalent links. $\square$

Appendix: Basic notions on knots and links

Topologists define a knot as the image of a continuous embedding of a circle in $\mathbb{R}^3$; a differential geometer might add that we are not interested in "wild" knots, but only in "tame" ones that are smooth curves. A link is obtained from a smooth embedding of a disjoint union of disjoint circles, known as the components of the link. Knots and links can also be treated as combinatorial objects, as any projection of a smooth knot or link to the plane along a sufficiently "generic" direction leads to a representation by a diagram, that is, a drawing of the knot or link by smooth curves in the plane with only a finite number of crossings, at which exactly two different parts of the knot or link cross - and where we indicate an over- or under-pass by a "trompe l'œil"-like fashion.

When are two knots, or two links, "the same"? Topologically, two links L and L' are defined to be equivalent if there is an orientation-preserving homeomorphism between $(\mathbb{R}^3, L)$ and $(\mathbb{R}^3, L')$, that is, a continuous and bijective map $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ with a continuous inverse such that $h(L) = L'$. Geometrically, we can describe this by a continuous deformation of space that moves L to L' . Such deformations might be hard to describe and analyze, but in 1926 Kurt Reidemeister proved a very useful combinatorial characterization: Two diagrams drawn in the plane describe equivalent knots or links if and only if one can be obtained from the other by continuous deformations and a finite number of local operations that are now known as the Reidemeister moves of types I, II, and III.



The "if" part of Reidemeister's theorem is quite obvious. For the "only if" direction one studies a smooth deformation of L to L' , where also the directions and curvatures along the curves are required to change continuously. If we then maintain a "general position" projection to a plane, this will give us a continuous deformation of one diagram to the other with only a finite number of Reidemeister-type moves on the way.

A knot is trivial if it is equivalent to a perfect (geometric) circle in $\mathbb{R}^3$, or equivalently, if it admits a spanning disk whose interior is disjoint from the knot. More generally, a link with k components is trivial if it is equivalent to a link formed by k "far apart" circles that have disjoint spanning disks.

References

- [1] H. Brunn: Über Verkettung, Sitzungsberichte der Bayerischen Akad. Wiss. Math.-Phys. Klasse 22 (1892), 77-99.
- [2] M. Epple: Die Entstehung der Knotentheorie, Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden 1999.
- [3] R. H. Fox: A quick trip through knot theory, in: "Topology of 3-manifolds and Related Topics" (M. K. Fort, ed.), Prentice-Hall Inc., 1962, pp. 120-167.
- [4] M. Freedman & R. Skora: Strange actions on groups of spheres, J. Differential Geometry 25 (1987), 75-98.
- [5] O. Nanyes: An elementary proof that the Borromean rings are nonsplittable, Amer. Math. Monthly 100 (1993), 786-789.
- [6] K. Reidemeister: Elementare Begründung der Knotentheorie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1926), 24-32.
- [7] P. G. TAIT: On knots, Transactions Royal Soc. Edinburgh 28 (1876-77), 145-190.

How many d -dimensional simplices can be positioned in $\mathbb{R}^d$ so that they touch in such a way that all their pairwise intersections are $(d-1)$ -dimensional?

This is an old and very natural question. We shall call $f(d)$ the answer to this problem, and record $f(1) = 2$, which is trivial. For $d = 2$ the configuration of four triangles in the margin shows $f(2) \geq 4$. There is no similar configuration with five triangles, because from this the dual graph construction, which for our example with four triangles yields a planar drawing of K_4 , would give a planar embedding of K_5 , which is impossible (see page 91). Thus we have

$$f(2) = 4$$

In three dimensions, $f(3) \geq 8$ is quite easy to see. For that we use the configuration of eight triangles depicted on the right. The four shaded triangles are joined to some point x below the "plane of drawing," which yields four tetrahedra that touch the plane from below. Similarly,

the four white triangles are joined to some point y above the plane of drawing. So we obtain a configuration of eight touching tetrahedra in $\mathbb{R}^3$, that is, $f(3) \geq 8$.

In 1965, Baston wrote a book proving $f(3) \leq 9$, and in 1991 it took Zaks another book to establish

$$f(3) = 8.$$

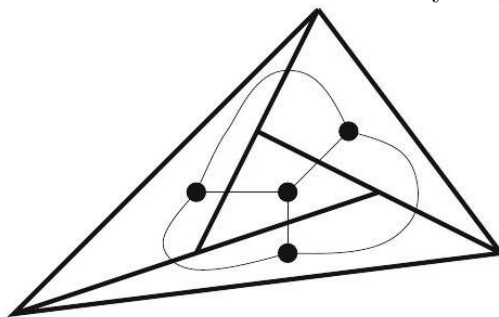
With $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ and $f(3) = 8$, it doesn't take much inspiration to arrive at the following conjecture, first posed by Bagemihl in 1956.

Conjecture. The maximal number of pairwise touching d -simplices in a configuration in $\mathbb{R}^d$ is

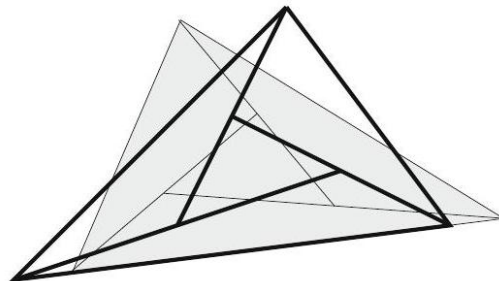
$$f(d) = 2^d$$

The lower bound, $f(d) \geq 2^d$, is easy to verify "if we do it right." This amounts to a heavy use of affine coordinate transformations, and to an induction on the dimension that establishes the following stronger result, due to Joseph Zaks [4].

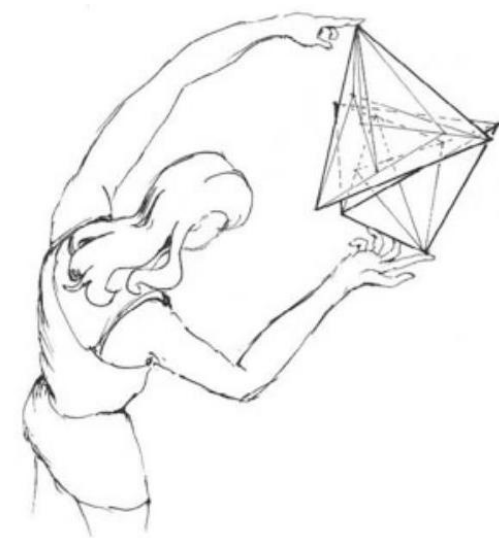
Theorem 1. For every $d \geq 2$, there is a family of 2^d pairwise touching d -simplices in $\mathbb{R}^d$ together with a transversal line that hits the interior of every single one of them.



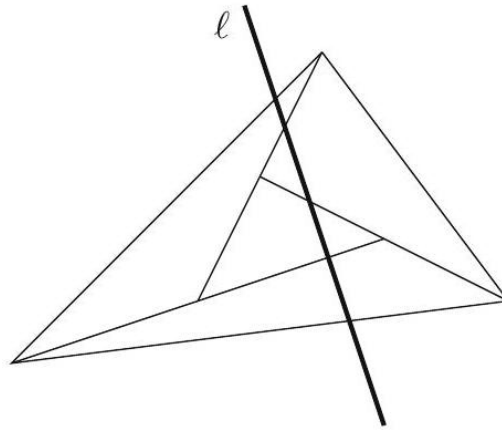
$$f(2) \geq 4$$



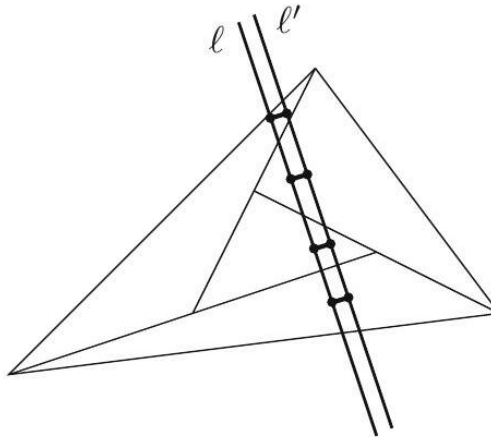
$$f(3) \geq 8$$



⁰"Touching simplices"



- Proof. For $d = 2$ the family of four triangles that we had considered does have such a transversal line. Now consider any d -dimensional configuration of touching simplices that has a transversal line ℓ . Any nearby parallel line ℓ' is a transversal line as well. If we choose ℓ' and ℓ parallel and close enough, then each of the simplices contains an orthogonal (shortest) connecting interval between the two lines. Only a bounded part of the lines ℓ and ℓ' is contained in the simplices of the configuration, and we may add two connecting segments outside the configuration, such that the rectangle spanned by the two outside connecting lines (that is, their convex hull) contains all the other connecting segments. Thus, we have placed a "ladder" such that each of the simplices of the configuration has one of



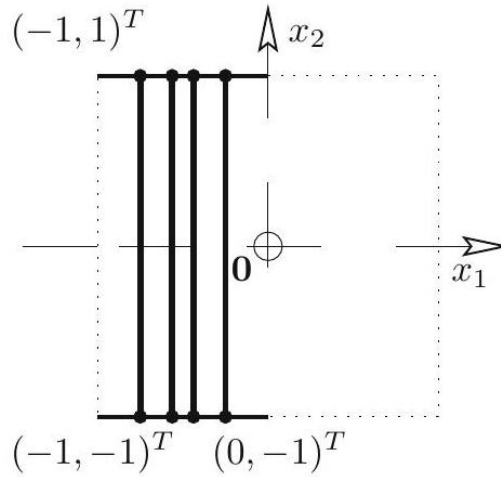
the ladder's steps in its interior, while the four ends of the ladder are outside the configuration.

Now the main step is that we perform an (affine) coordinate transformation that maps $\mathbb{R}^d$ to $\mathbb{R}^d$, and takes the rectangle spanned by the ladder to the rectangle (half-square) as shown in the figure below, given by

$$R^1 = \left\{ (x_1, x_2, 0, \dots, 0)^T : -1 \leq x_1 \leq 0; -1 \leq x_2 \leq 1 \right\}.$$

Thus the configuration of touching simplices Σ^1 in $\mathbb{R}^d$ which we obtain has the x_1 -axis as a transversal line, and it is placed such that each of the simplices contains a segment

$$S^1(\alpha) = \left\{ (\alpha, x_2, 0, \dots, 0)^T : -1 \leq x_2 \leq 1 \right\}$$

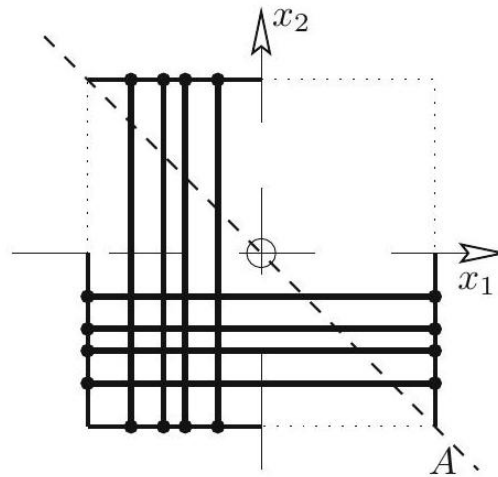


in its interior (for some α with $-1 < \alpha < 0$), while the origin $\mathbf{0}$ is outside all simplices.

Now we produce a second copy Σ^2 of this configuration by reflecting the first one in the hyperplane given by $x_1 = x_2$. This second configuration has the x_2 -axis as a transversal line, and each simplex contains a segment

$$S^2(\beta) = \{(x_1, \beta, 0, \dots, 0)^T : -1 \leq x_1 \leq 1\}$$

in its interior, with $-1 < \beta < 0$. But each segment $S^1(\alpha)$ intersects each segment $S^2(\beta)$, and thus the interior of each simplex of Σ^1 intersects each simplex of Σ^2 in its interior. Thus if we add a new $(d+1)$ -st coordinate x_{d+1} , and take Σ to be



$$\{\text{conv}(P_i \cup \{-e_{d+1}\}) : P_i \in \Sigma^1\} \cup \{\text{conv}(P_j \cup \{e_{d+1}\}) : P_j \in \Sigma^2\},$$

then we get a configuration of touching $(d+1)$ -simplices in $\mathbb{R}^{d+1}$. Furthermore, the antidiagonal

$$A = \{(x, -x, 0, \dots, 0)^T : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

intersects all segments $S^1(\alpha)$ and $S^2(\beta)$. We can "tilt" it a little, and obtain a line

$$L_\varepsilon = \{(x, -x, 0, \dots, 0, \varepsilon x)^T : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1},$$

which for all small enough $\varepsilon > 0$ intersects all the simplices of Σ . This completes our induction step. $\square$

In contrast to this exponential lower bound, tight upper bounds are harder to get. A naive inductive argument (considering all the facet hyperplanes in a touching configuration separately) yields only

$$f(d) \leq \frac{2}{3}(d+1)!$$

and this is quite far from the lower bound of Theorem 1. However, Micha Perles found the following "magical" proof for a much better bound.

Theorem 2. For all $d \geq 1$, we have $f(d) < 2^{d+1}$.

- Proof. Given a configuration of r touching d -simplices $P_1, P_2, \dots, P_r$ in $\mathbb{R}^d$, first enumerate the different hyperplanes $H_1, H_2, \dots, H_s$ spanned by facets of the P_i , and for each of them arbitrarily choose a positive side H_i^+ , and call the other side H_i^- . For example, for the 2-dimensional configuration of $r = 4$ triangles depicted on the right we find $s = 6$ hyperplanes (which are lines for $d = 2$). From these data, we construct the B -matrix, an $r \times s$ matrix with entries in $\{+1, -1, 0\}$, as follows:

$$B_{ij} := \begin{cases} +1 & \text{if } P_i \text{ has a facet in } H_j, \text{ and } P_i \subseteq H_j^+, \\ -1 & \text{if } P_i \text{ has a facet in } H_j, \text{ and } P_i \subseteq H_j^-, \\ 0 & \text{if } P_i \text{ does not have a facet in } H_j. \end{cases}$$

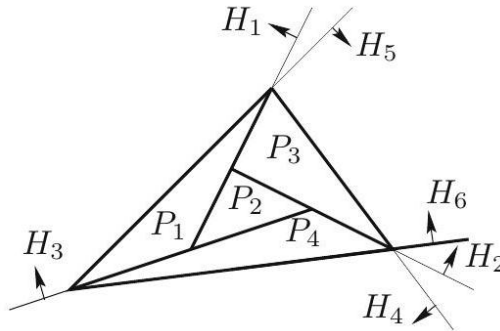
For example, the 2-dimensional configuration in the margin gives rise to the matrix

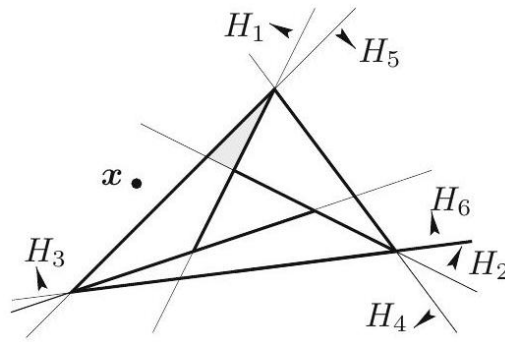
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Three properties of the B -matrix are worth recording. First, since every d -simplex has $d+1$ facets, we find that every row of B has exactly $d+1$ nonzero entries, and thus has exactly $s - (d+1)$ zero entries. Secondly, we are dealing with a configuration of pairwise touching simplices, and thus for every pair of rows we find one column in which one row has a $+1$ entry, while the entry in the other row is -1 . That is, the rows are different even if we disregard their zero entries. Thirdly, the rows of B "represent" the simplices P_i , via

$$P_i = \bigcap_{j: B_{ij}=1} H_j^+ \cap \bigcap_{j: B_{ij}=-1} H_j^- \quad (*)$$

Now we derive from B a new matrix C , in which every row of B is replaced by all the row vectors that one can generate from it by replacing all the zeros by either $+1$ or -1 . Since each row of B has $s - d - 1$ zeros, and B has r rows, the matrix C has $2^{s-d-1}r$ rows.





The first row of the C -matrix represents the shaded triangle, while the second row corresponds to an empty intersection of the halfspaces. The point $\mathbf{x}$ leads to the vector

$$(1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1)$$

that does not appear in the C -matrix.

For our example, this matrix C is a 32×6 matrix that starts

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

where the first eight rows of C are derived from the first row of B , the second eight rows come from the second row of B , etc.

The point now is that all the rows of C are different: If two rows are derived from the same row of B , then they are different since their zeros have been replaced differently; if they are derived from different rows of B , then they differ no matter how the zeros have been replaced. But the rows of C are ± 1 -vectors of length s , and there are only 2^s different such vectors. Thus since the rows of C are distinct, C can have at most 2^s rows, that is,

$$2^{s-d-1}r \leq 2^s.$$

However, not all possible ± 1 -vectors appear in C , which yields a strict inequality $2^{s-d-1}r < 2^s$, and thus $r < 2^{d+1}$. To see this, we note that every row of C represents an intersection of halfspaces - just as for the rows of B before, via the formula $(*)$. This intersection is a subset of the simplex P_i , which was given by the corresponding row of B . Let us take a point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ that does not lie on any of the hyperplanes H_j , and not in any of the simplices P_i . From this $\mathbf{x}$ we derive a ± 1 -vector that records for each j whether $\mathbf{x} \in H_j^+$ or $\mathbf{x} \in H_j^-$. This ± 1 -vector does not occur in C , because its halfspace intersection according to $(*)$ contains $\mathbf{x}$ and thus is not contained in any simplex P_i . $\square$

References

- [1] F. Bagemihl: A conjecture concerning neighboring tetrahedra, Amer. Math. Monthly 63 (1956) 328-329.
- [2] V. J. D. Baston: Some Properties of Polyhedra in Euclidean Space, Pergamon Press, Oxford 1965.

- [3] M. A. Perles: At most 2^{d+1} neighborly simplices in E^d , *Annals of Discrete Math.* 20 (1984), 253-254.
 [4] J. Zaks: Neighborly families of 2^d d -simplices in E^d , *Geometriae Dedicata* 11 (1981), 279-296.
 [5] J. Zaks: No Nine Neighborly Tetrahedra Exist, *Memoirs Amer. Math. Soc.* No. 447, Vol. 91, 1991.

22.2.7 Every large point set has an obtuse angle

Around 1950 Paul Erdős conjectured that every set of more than 2^d points in $\mathbb{R}^d$ determines at least one obtuse angle, that is, an angle that is strictly greater than $\frac{\pi}{2}$. In other words, any set of points in $\mathbb{R}^d$ which only has acute angles (including right angles) has size at most 2^d . This problem was posed as a "prize question" by the Dutch Mathematical Society - but solutions were received only for $d = 2$ and for $d = 3$.

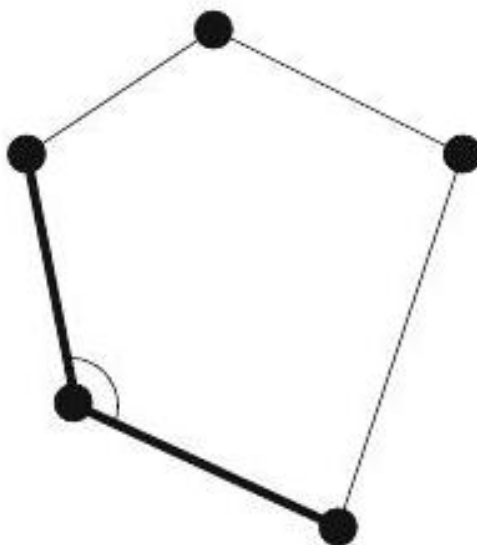
For $d = 2$ the problem is easy: The five points may determine a convex pentagon, which always has an obtuse angle (in fact, at least one angle of at least 108°). Otherwise we have one point contained in the convex hull of three others that form a triangle. But this point "sees" the three edges of the triangle in three angles that sum to 360° , so one of the angles is at least 120° . (The second case also includes situations where we have three points on a line, and thus a 180° angle.)

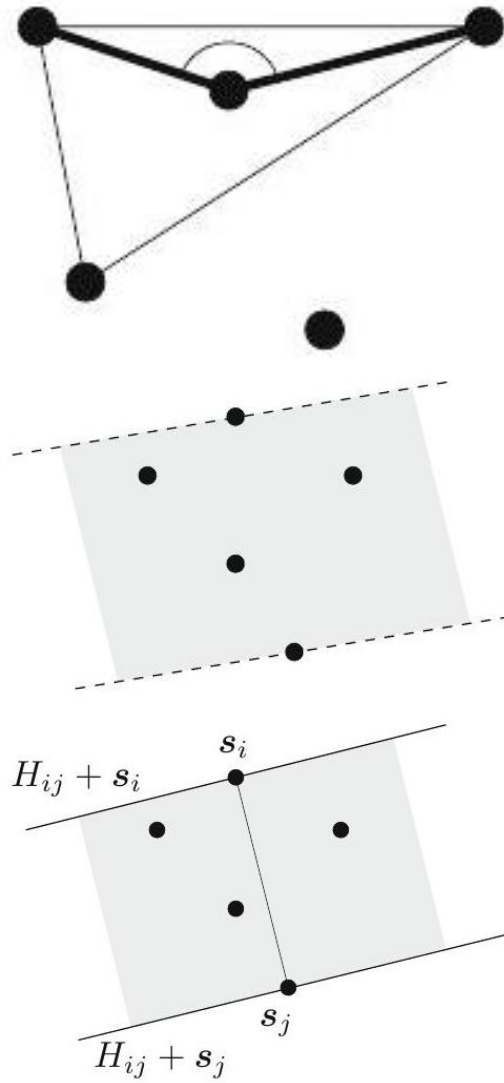
Unrelated to this, Victor Klee asked a few years later - and Erdős spread the question - how large a point set in $\mathbb{R}^d$ could be and still have the following "antipodality property": For any two points in the set there is a strip (bounded by two parallel hyperplanes) that contains the point set, and that has the two chosen points on different sides on the boundary.

Then, in 1962, Ludwig Danzer and Branko Grünbaum solved both problems in one stroke: They sandwiched both maximal sizes into a chain of inequalities, which starts and ends in 2^d . Thus the answer is 2^d both for Erdős' and for Klee's problem.

In the following, we consider (finite) sets $S \subseteq \mathbb{R}^d$ of points, their convex hulls $\text{conv}(S)$, and general convex polytopes $Q \subseteq \mathbb{R}^d$. (See the appendix on polytopes on page 73 for the basic concepts.) We assume that these sets have the full dimension d , that is, they are not contained in a hyperplane. Two convex sets touch if they have at least one boundary point in common, while their interiors do not intersect. For any set $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ and any vector $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$ we denote by $Q + \mathbf{s}$ the image of Q under the translation that moves $\mathbf{0}$ to $\mathbf{s}$. Similarly, $Q - \mathbf{s}$ is the translate obtained by the map that moves $\mathbf{s}$ to the origin.

Don't be intimidated: This chapter is an excursion into d -dimensional geometry, but the arguments in the following do not require any "highdimensional intuition," since they all can be followed, visualized (and thus understood) in three dimensions, or even in the plane. Hence, our figures will illustrate the proof for $d = 2$ (where a "hyperplane" is just a line), and you could create your own pictures for $d = 3$ (where a "hyperplane" is a plane).





Theorem 1. For every d , one has the following chain of inequalities:

$$\begin{aligned}
 2^d &\stackrel{(1)}{\leq} \max \left\{ \#S \mid S \subseteq \mathbb{R}^d, \angle(s_i, s_j, s_k) \leq \frac{\pi}{2} \text{ for every } \{s_i, s_j, s_k\} \subseteq S \right\} \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} \max \left\{ \#S \mid \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d \text{ such that for any two points } \{s_i, s_j\} \subseteq S \\ \text{there is a strip } \mathcal{S}(i, j) \text{ that contains } S, \text{ with } s_i \text{ and } s_j \\ \text{lying in the parallel boundary hyperplanes of } \mathcal{S}(i, j) \end{array} \right\} \\
 &\stackrel{(3)}{=} \max \left\{ \#S \mid \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d \text{ such that the translates } P - s_i, s_i \in S, \text{ of} \\ \text{the convex hull } P := \text{conv}(S) \text{ intersect in a common} \\ \text{point, but they only touch} \end{array} \right\} \\
 &\stackrel{(4)}{\leq} \max \left\{ \#S \mid \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d \text{ such that the translates } Q + s_i \text{ of some } d - \\ \text{dimensional convex polytope } Q \subseteq \mathbb{R}^d \text{ touch pairwise} \end{array} \right\} \\
 &\stackrel{(5)}{=} \max \left\{ \#S \mid \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d \text{ such that the translates } Q^* + s_i \text{ of some} \\ d\text{-dimensional centrally symmetric convex polytope} \\ Q^* \subseteq \mathbb{R}^d \text{ touch pairwise} \end{array} \right\} \\
 &\stackrel{(6)}{\leq} 2^d.
 \end{aligned}$$

- Proof. We have six claims (equalities and inequalities) to verify. Let's get going.

(1) Take $S := \{0, 1\}^d$ to be the vertex set of the standard unit cube in $\mathbb{R}^d$, and choose $s_i, s_j, s_k \in S$. By symmetry we may assume that $s_j = \mathbf{0}$ is the zero vector. Hence the angle can be computed from

$$\cos \sphericalangle(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j, \mathbf{s}_k) = \frac{\langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_k \rangle}{|\mathbf{s}_i| |\mathbf{s}_k|}$$

which is clearly nonnegative. Thus S is a set with $|S| = 2^d$ that has no obtuse angles.

(2) If S contains no obtuse angles, then for any $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in S$ we may define $H_{ij} + \mathbf{s}_i$ and $H_{ij} + \mathbf{s}_j$ to be the parallel hyperplanes through $\mathbf{s}_i$ resp. $\mathbf{s}_j$ that are orthogonal to the edge $[\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j]$. Here $H_{ij} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j \rangle = 0\}$ is the hyperplane through the origin that is orthogonal to the line through $\mathbf{s}_i$ and $\mathbf{s}_j$, and $H_{ij} + \mathbf{s}_j = \{\mathbf{x} + \mathbf{s}_j : \mathbf{x} \in H_{ij}\}$ is the translate of H_{ij} that passes through $\mathbf{s}_j$, etc. Hence the strip between $H_{ij} + \mathbf{s}_i$ and $H_{ij} + \mathbf{s}_j$ consists, besides $\mathbf{s}_i$ and $\mathbf{s}_j$, exactly of all the points $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ such that the angles $\sphericalangle(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j, \mathbf{x})$ and $\sphericalangle(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{x})$ are nonobtuse. Thus the strip contains all of S .

(3) P is contained in the halfspace of $H_{ij} + \mathbf{s}_j$ that contains $\mathbf{s}_i$ if and only if $P - \mathbf{s}_j$ is contained in the halfspace of H_{ij} that contains $\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j$: A property "an object is contained in a halfspace" is not destroyed if we translate both the object and the halfspace by the same amount (namely by $-\mathbf{s}_j$). Similarly, P is contained in the halfspace of $H_{ij} + \mathbf{s}_i$ that contains $\mathbf{s}_j$ if and only if $P - \mathbf{s}_i$ is contained in the halfspace of H_{ij} that contains $\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i$.

Putting both statements together, we find that the polytope P is contained in the strip between $H_{ij} + \mathbf{s}_i$ and $H_{ij} + \mathbf{s}_j$ if and only if $P - \mathbf{s}_i$ and $P - \mathbf{s}_j$ lie in different halfspaces with respect to the hyperplane H_{ij} .

This correspondence is illustrated by the sketch in the margin.

Furthermore, from $\mathbf{s}_i \in P = \text{conv}(S)$ we get that the origin $\mathbf{0}$ is contained in all the translates $P - \mathbf{s}_i$ ($\mathbf{s}_i \in S$). Thus we see that the sets $P - \mathbf{s}_i$ all intersect in $\mathbf{0}$, but they only touch: their interiors are pairwise disjoint, since they lie on opposite sides of the corresponding hyperplanes H_{ij} .

(4) This we get for free: "the translates must touch pairwise" is a weaker condition than "they intersect in a common point, but only touch." Similarly, we can relax the conditions by letting P be an arbitrary convex d -polytope in $\mathbb{R}^d$. Furthermore, we may replace S by $-S$.

(5) Here " $\geq$ " is trivial, but that is not the interesting direction for us. We have to start with a configuration $S \subseteq \mathbb{R}^d$ and an arbitrary d -polytope $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ such that the translates $Q + \mathbf{s}_i$ ($\mathbf{s}_i \in S$) touch pairwise. The claim is that in this situation we can use

$$Q^* := \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q \right\}$$

instead of Q . But this is not hard to see: First, Q^* is d -dimensional, convex, and centrally symmetric. One can check that Q^* is a polytope (its vertices are of the form $\frac{1}{2}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$, for vertices $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j$ of Q), but this is not important for us.

Now we will show that $Q + \mathbf{s}_i$ and $Q + \mathbf{s}_j$ touch if and only if $Q^* + \mathbf{s}_i$ and $Q^* + \mathbf{s}_j$ touch. For this we note, in the footsteps of Minkowski, that

$$\begin{aligned} (Q^* + \mathbf{s}_i) \cap (Q^* + \mathbf{s}_j) &\neq \emptyset \\ \iff \exists \mathbf{q}'_i, \mathbf{q}''_i, \mathbf{q}'_j, \mathbf{q}''_j \in Q : \frac{1}{2}(\mathbf{q}'_i - \mathbf{q}''_i) + \mathbf{s}_i &= \frac{1}{2}(\mathbf{q}'_j - \mathbf{q}''_j) + \mathbf{s}_j \\ \iff \exists \mathbf{q}'_i, \mathbf{q}''_i, \mathbf{q}'_j, \mathbf{q}''_j \in Q : \frac{1}{2}(\mathbf{q}'_i + \mathbf{q}''_i) + \mathbf{s}_i &= \frac{1}{2}(\mathbf{q}'_j + \mathbf{q}''_j) + \mathbf{s}_j \\ \iff \exists \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \in Q : \mathbf{q}_i + \mathbf{s}_i &= \mathbf{q}_j + \mathbf{s}_j \\ \iff (Q + \mathbf{s}_i) \cap (Q + \mathbf{s}_j) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

where in the third (and crucial) equivalence " $\iff$ " we use that every $\mathbf{q} \in Q$ can be written as $\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{q})$ to get " $\Leftarrow$ ", and that Q is convex and thus $\frac{1}{2}(\mathbf{q}'_i + \mathbf{q}''_i), \frac{1}{2}(\mathbf{q}'_j + \mathbf{q}''_j) \in Q$ to see " $\Rightarrow$ ".

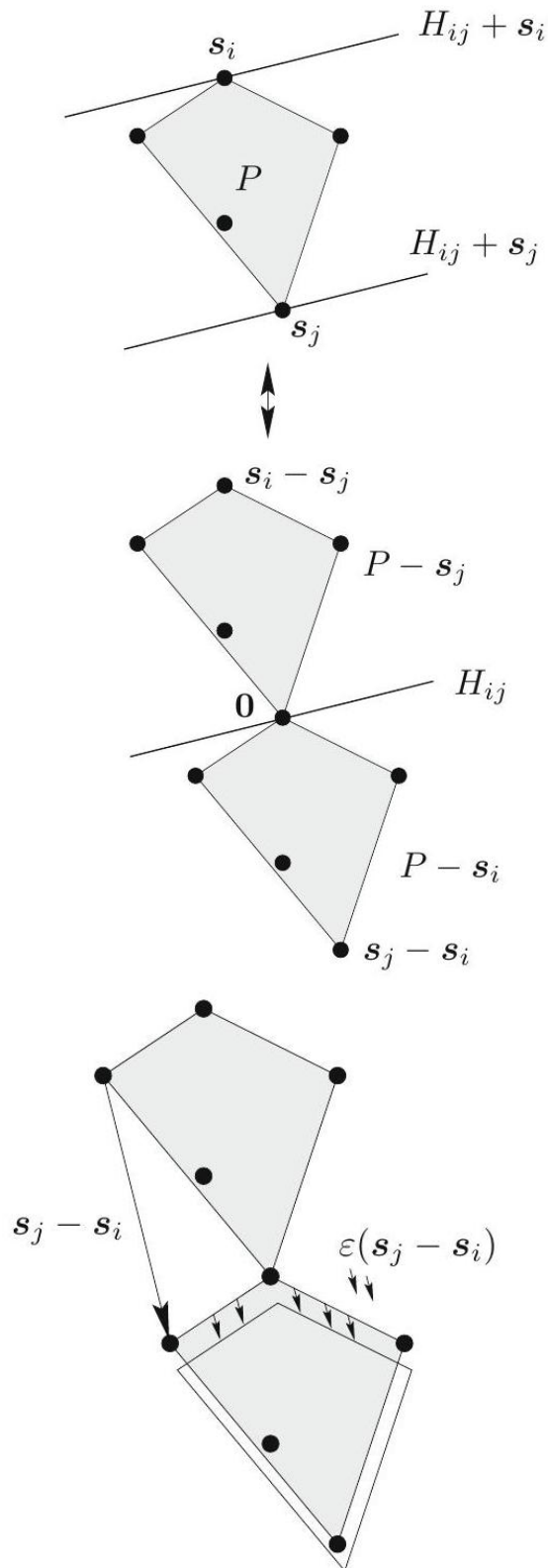
Thus the passage from Q to Q^* (known as Minkowski symmetrization) preserves the property that two translates $Q + \mathbf{s}_i$ and $Q + \mathbf{s}_j$ intersect. That is, we have shown that for any convex set Q , two translates $Q + \mathbf{s}_i$ and $Q + \mathbf{s}_j$ intersect if and only if the translates $Q^* + \mathbf{s}_i$ and $Q^* + \mathbf{s}_j$ intersect.

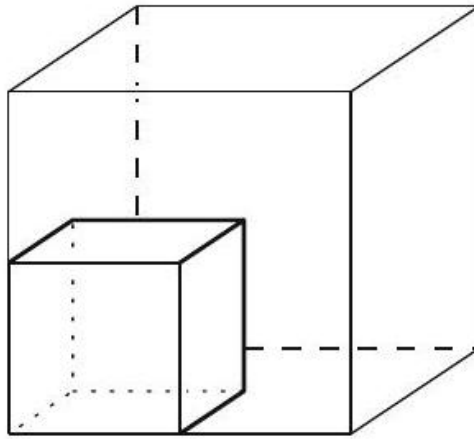
The following characterization shows that Minkowski symmetrization also preserves the property that two translates touch:

$Q + s_i$ and $Q + s_j$ touch if and only if they intersect, while $Q + s_i$ and $Q + s_j + \varepsilon(s_j - s_i)$ do not intersect for any $\varepsilon > 0$.

(6) Assume that $Q^* + s_i$ and $Q^* + s_j$ touch. For every intersection point

$$x \in (Q^* + s_i) \cap (Q^* + s_j)$$





$$\text{Scaling factor } \frac{1}{2}, \quad \text{vol}(\text{P}_{\{j\}}) = \frac{1}{8} \text{vol}(\text{P})$$

we have

$$\mathbf{x} - \mathbf{s}_i \in Q^* \quad \text{and} \quad \mathbf{x} - \mathbf{s}_j \in Q^*$$

thus, since Q^* is centrally symmetric,

$$\mathbf{s}_i - \mathbf{x} = -(\mathbf{x} - \mathbf{s}_i) \in Q^*$$

and hence, since Q^* is convex,

$$\frac{1}{2}(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = \frac{1}{2}((\mathbf{x} - \mathbf{s}_j) + (\mathbf{s}_i - \mathbf{x})) \in Q^*.$$

We conclude that $\frac{1}{2}(\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j)$ is contained in $Q^* + \mathbf{s}_j$ for all i . Consequently, for $P := \text{conv}(S)$ we get

$$P_j := \frac{1}{2}(P + \mathbf{s}_j) = \text{conv} \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j) : \mathbf{s}_i \in S \right\} \subseteq Q^* + \mathbf{s}_j$$

which implies that the sets $P_j = \frac{1}{2}(P + \mathbf{s}_j)$ can only touch.

Finally, the sets P_j are contained in P , because all the points $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j$ and $\frac{1}{2}(\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j)$ are in P , since P is convex. But the P_j are just smaller, scaled, translates of P , contained in P . The scaling factor is $\frac{1}{2}$, which implies that

$$\text{vol}(P_j) = \frac{1}{2^d} \text{vol}(P)$$

since we are dealing with d -dimensional sets. This means that at most 2^d sets P_j fit into P , and hence $|S| \leq 2^d$.

This completes our proof: the chain of inequalities is closed.

...but that's not the end of the story. Danzer and Grünbaum asked the following natural question:

What happens if one requires all angles to be acute rather than just nonobtuse, that is, if right angles are forbidden?

They constructed configurations of $2d - 1$ points in $\mathbb{R}^d$ with only acute angles, conjecturing that this may be best possible. Grünbaum proved that this is indeed true for $d \leq 3$. But twenty-one years later, in 1983, Paul Erdős and Zoltan Füredi showed that the conjecture is false - quite dramatically, if the dimension is high! Their proof is a great example for the power of probabilistic arguments; see Chapter 45 for an introduction to the "probabilistic method." Our version of the proof uses a slight improvement in the choice of the parameters due to our

reader David Bevan.

Theorem 2. For every $d \geq 2$, there is a set $S \subseteq \{0, 1\}^d$ of $2 \left\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^d \right\rfloor$ points in $\mathbb{R}^d$ (vertices of the unit d -cube) that determine only acute angles. In particular, in dimension $d = 34$ there is a set of $72 > 2 \cdot 34 - 1$ points with only acute angles.

- Proof. Set $m := \left\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^d \right\rfloor$, and pick $3m$ vectors

$$\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(3m) \in \{0, 1\}^d$$

by choosing all their coordinates independently and randomly, to be either 0 or 1, with probability $\frac{1}{2}$ for each alternative. (You may toss a perfect coin $3md$ times for this; however, if d is large you may get bored by this soon.)

We have seen above that all angles determined by 0/1-vectors are nonobtuse. Three vectors $\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(j), \mathbf{x}(k)$ determine a right angle with apex $\mathbf{x}(j)$ if and only if the scalar product $\langle \mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j), \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(j) \rangle$ vanishes, that is, if we have

$$x(i)_\ell - x(j)_\ell = 0 \quad \text{or} \quad x(k)_\ell - x(j)_\ell = 0 \quad \text{for each coordinate } \ell.$$

We call (i, j, k) a bad triple if this happens. (If $\mathbf{x}(i) = \mathbf{x}(j)$ or $\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(k)$, then the angle is not defined, but also then the triple (i, j, k) is certainly bad.)

The probability that one specific triple is bad is exactly $\left(\frac{3}{4}\right)^d$: Indeed, it will be good if and only if, for one of the d coordinates ℓ , we get

$$\begin{aligned} &\text{either} \quad x(i)_\ell = x(k)_\ell = 0, \quad x(j)_\ell = 1, \\ &\text{or} \quad x(i)_\ell = x(k)_\ell = 1, \quad x(j)_\ell = 0. \end{aligned}$$

This leaves us with six bad options out of eight equally likely ones, and a triple will be bad if and only if one of the bad options (with probability $\frac{3}{4}$) happens for each of the d coordinates. The number of triples we have to consider is $3 \binom{3m}{3}$, since there are $\binom{3m}{3}$ sets of three vectors, and for each of them there are three choices for the apex. Of course the probabilities that the various triples are bad are not independent: but linearity of expectation (which is what you get by averaging over all possible selections; see the appendix) yields that the expected number of bad triples is exactly $3 \binom{3m}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^d$. This means - and this is the point where the probabilistic method shows its power - that there is some choice of the $3m$ vectors such that there are at most $3 \binom{3m}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^d$ bad triples, where

$$3 \binom{3m}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^d < 3 \frac{(3m)^3}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^d = m^3 \left(\frac{9}{\sqrt{6}}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^d \leq m,$$

by the choice of m .

But if there are not more than m bad triples, then we can remove m of the $3m$ vectors $\mathbf{x}(i)$ in such a way that the remaining $2m$ vectors don't contain a bad triple, that is, they determine acute angles only.

The "probabilistic construction" of a large set of 0/1-points without right angles can be easily implemented. David Bevan has thus constructed a set of 310/1-points in dimension $d = 15$ that determines only acute angles.

Very recently, Balázs Gerencsér and Viktor Harangi, building on ideas of an anonymous Ukrainian enthusiast, managed to construct such "acute-angled sets" of size $2^{d-1} + 1$ for all dimensions d , which however do not anymore consist of 0/1 vectors. As we have seen above, the size $2^{d-1} + 1$ is optimal up to a factor of 2.

Appendix: Three tools from probability

Here we gather three basic tools from discrete probability theory which will come up several times: random variables, linearity of expectation and Markov's inequality.

Let (Ω, p) be a finite probability space, that is, Ω is a finite set and $p = \text{Prob}$ is a map from Ω into the interval $[0, 1]$ with $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. A random variable X on Ω is a

mapping $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. We define a probability space on the image set $X(\Omega)$ by setting $p(X = x) := \sum_{X(\omega)=x} p(\omega)$. A simple example is an unbiased dice (all $p(\omega) = \frac{1}{6}$) with $X =$ "the number on top when the dice is thrown."

The expectation EX of X is the average to be expected, that is,

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)X(\omega).$$

Now suppose X and Y are two random variables on Ω , then the sum $X + Y$ is again a random variable, and we obtain

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{\omega} p(\omega)(X(\omega) + Y(\omega)) \\ &= \sum_{\omega} p(\omega)X(\omega) + \sum_{\omega} p(\omega)Y(\omega) = EX + EY. \end{aligned}$$

Clearly, this can be extended to any finite linear combination of random variables - this is what is called the linearity of expectation. Note that it needs no assumption that the random variables have to be "independent" in any sense!

Our third tool concerns random variables X which take only nonnegative values, shortly denoted $X \geq 0$. Let

$$\text{Prob}(X \geq a) = \sum_{\omega: X(\omega) \geq a} p(\omega)$$

be the probability that X is at least as large as some $a > 0$. Then

$$EX = \sum_{\omega: X(\omega) \geq a} p(\omega)X(\omega) + \sum_{\omega: X(\omega) < a} p(\omega)X(\omega) \geq a \sum_{\omega: X(\omega) \geq a} p(\omega),$$

and we have proved Markov's inequality

$$\text{Prob}(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}.$$

References

- [1] L. Danzer & B. Grünbaum: Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L. Klee, Math. Zeitschrift 79 (1962), 95-99.
- [2] P. Erdős & Z. Füredi: The greatest angle among n points in the d -dimensional Euclidean space, Annals of Discrete Math. 17 (1983), 275-283.
- [3] B. Gerencsér & V. Harangi: Acute sets of exponentially optimal size, Discrete Comput. Geometry (2018), to appear.
- [4] H. Minkowski: Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1904, 311-355.

22.2.8 Borsuk's conjecture

Karol Borsuk's paper "Three theorems on the n -dimensional euclidean sphere" from 1933 is famous because it contained an important result (conjectured by Stanisaw Ulam) that is now known as the Borsuk-Ulam theorem:

Every continuous map $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ maps two antipodal points of the sphere S^d to the same point in $\mathbb{R}^d$.

We will see the full power of this theorem in a graph theory application in Chapter 43. The paper is famous also because of a problem posed at its end, which became known as Borsuk's Conjecture:

Can every set $S \subseteq \mathbb{R}^d$ of bounded diameter $\text{diam}(S) > 0$ be partitioned into at most $d + 1$ sets of smaller diameter?

The bound $d + 1$ is best possible: If S is a regular d -dimensional simplex, or just the set of its $d + 1$ vertices, then no part of a diameter-reducing partition can contain more than one of the simplex vertices. If $f(d)$ denotes the smallest number such that every bounded set $S \subseteq \mathbb{R}^d$ has a diameter-reducing partition into $f(d)$ parts, then the example of a regular simplex establishes

$$f(d) \geq d + 1$$

Borsuk's conjecture was proved for the case when S is a sphere (by Borsuk himself), for smooth bodies S (using the Borsuk-Ulam theorem), for $d \leq 3, \dots$ but the general conjecture remained open. The best available upper bound for $f(d)$ was established by Oded Schramm, who showed that

$$f(d) \leq (1.23)^d$$

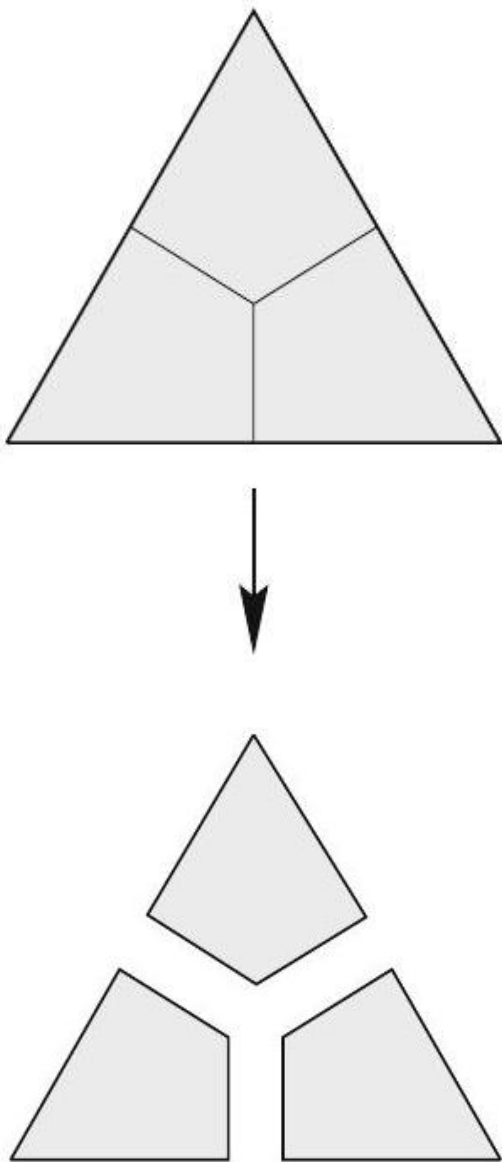
for all large enough d . This bound looks quite weak compared with the conjecture " $f(d) = d + 1$," but it suddenly seemed reasonable when Jeff Kahn and Gil Kalai dramatically disproved Borsuk's conjecture in 1993. Sixty years after Borsuk's paper, Kahn and Kalai proved that

$$f(d) \geq (1.2)^{\sqrt{d}}$$

holds for large enough d , making judicious use of a combinatorial-geometric method of Peter Frankl and Richard Wilson.



Karol Borsuk



Any d -simplex can be split into $d + 1$ pieces, each of smaller diameter.



A. Nilli

A Book version of the Kahn-Kalai proof was provided by A. Nilli: Brief and self-contained, it yields an explicit counterexample to Borsuk's conjecture in dimension $d = 946$. We present here a modification of this proof, due to Andrei M. Raigorodskii and to Bernulf Weibach, which reduces the dimension to $d = 561$, and even to $d = 560$. Using a novel method, involving special graphs, Andriy V. Bondarenko lowered this to $d = 65$. In fact, he showed that $f(d) > d + 1$ holds for every $d \geq 65$. His method, however, does not yield an exponential lower bound in d . The current "record" is $d = 64$, due to Thomas Jenrich.

Theorem. Let $q = p^m$ be a prime power, $n := 4q - 2$, and $d := \binom{n}{2} = (2q - 1)(4q - 3)$. Then there is a set $S \subseteq \{+1, -1\}^d$ of 2^{n-2} points in $\mathbb{R}^d$ such that every partition of S , whose parts have smaller diameter than S , has at least

$$\frac{2^{n-2}}{\sum_{i=0}^{q-2} \binom{n-1}{i}}$$

parts. For $q = 9$ this implies that the Borsuk conjecture is false in dimension $d = 561$. Furthermore, $f(d) > (1.2)^{\sqrt{d}}$ holds for all large enough d .

- **Proof.** The construction of the set S proceeds in four steps.
(1) Let q be a prime power, set $n = 4q - 2$, and let

$$Q := \{\mathbf{x} \in \{+1, -1\}^n : x_1 = 1, \# \{i : x_i = -1\} \text{ is even} \}.$$

This Q is a set of 2^{n-2} vectors in $\mathbb{R}^n$. We will see that $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \equiv 2 \pmod{4}$ holds for all vectors $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$. We will call $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ nearly-orthogonal if $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = 2$. We will prove that any subset $Q' \subseteq Q$ which contains no nearly-orthogonal vectors must be "small": $|Q'| \leq \sum_{i=0}^{q-2} \binom{n-1}{i}$.

Vectors, matrices, and scalar products

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{x}^T &= (1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1) \\ \mathbf{x}\mathbf{x}^T &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In our notation all vectors $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ are column vectors; the transposed vectors $\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T, \dots$ are thus row vectors. The matrix product $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$ is a matrix of rank 1, with $(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)_{ij} = x_i x_j$. If $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ are column vectors, then their scalar product is

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

We will also need scalar products for matrices $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ which can be interpreted as vectors of length n^2 , and thus their scalar product is

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}.$$

- (2) From Q , we construct the set

$$R := \{\mathbf{x}\mathbf{x}^T : \mathbf{x} \in Q\}$$

of 2^{n-2} symmetric $n \times n$ matrices of rank 1. We interpret them as vectors with n^2 components, $R \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$. We will show that there are only acute angles between these vectors: they have positive scalar products, which are at least 4. Furthermore, if $R' \subseteq R$ contains no two vectors with minimal scalar product 4, then $|R'|$ is "small": $|R'| \leq \sum_{i=0}^{q-2} \binom{n-1}{i}$.

(3) From R , we obtain the set of points in $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ whose coordinates are the subdiagonal entries of the corresponding matrices:

$$S := \{(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)_{i>j} : \mathbf{x}\mathbf{x}^T \in R\}.$$

Again, S consists of 2^{n-2} points. The maximal distance between these points is precisely obtained for the nearly-orthogonal vectors $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$. We conclude that a subset $S' \subseteq S$ of smaller diameter than S must be "small": $|S'| \leq \sum_{i=0}^{q-2} \binom{n-1}{i}$.

(4) Estimates: From (3) we see that one needs at least

$$g(q) := \frac{2^{4q-4}}{\sum_{i=0}^{q-2} \binom{4q-3}{i}}$$

parts in every diameter-reducing partition of S . Thus

$$f(d) \geq \max\{g(q), d+1\} \quad \text{for } d = (2q-1)(4q-3)$$

Therefore, whenever we have $g(q) > (2q-1)(4q-3) + 1$, then we have a counterexample to Borsuk's conjecture in dimension $d = (2q-1)(4q-3)$. We will calculate below that $g(9) > 562$, which yields the counterexample in dimension $d = 561$, and that

$$g(q) > \frac{e}{64q^2} \left(\frac{27}{16}\right)^q$$

which yields the asymptotic bound $f(d) > (1.2)^{\sqrt{d}}$ for d large enough.

Details for (1): We start with some harmless divisibility considerations.

Lemma. The function $P(z) := \binom{z-2}{q-2}$ is a polynomial of degree $q-2$. It yields integer values for all integers z . The integer $P(z)$ is divisible by p if and only if z is not congruent to 0 or 1 modulo q .

• Proof. For this we write the binomial coefficient as

$$P(z) = \binom{z-2}{q-2} = \frac{(z-2)(z-3) \cdots (z-q+1)}{(q-2)(q-3) \cdots 2 \cdot 1} \quad (*)$$

and compare the number of p -factors in the denominator and in the numerator. The denominator has the same number of p -factors as $(q-2)!$,

Claim. If $a \equiv b \not\equiv 0 \pmod{q}$, then a and b have the same number of p factors.

• Proof. We have $a = b + sp^m$, where b is not divisible by $p^m = q$. So every power p^k that divides b satisfies $k < m$, and thus it also divides a . The statement is symmetric in a and b .

or as $(q-1)!$, since $q-1$ is not divisible by p . Indeed, by the claim in the margin we get an integer with the same number of p -factors if we take any product of $q-1$ integers, one from each nonzero residue class modulo q .

Now if z is congruent to 0 or 1 (mod q), then the numerator is also of this type: All factors in the product are from different residue classes, and the only classes that do not occur are the zero class (the multiples of q), and the class either of -1 or of $+1$, but neither $+1$ nor -1 is divisible by p . Thus denominator and numerator have the same number of p -factors, and hence the quotient is not divisible by p .

On the other hand, if $z \not\equiv 0, 1 \pmod{q}$, then the numerator of $(*)$ contains one factor that is divisible by $q = p^m$. At the same time, the product has no factors from two adjacent nonzero residue classes: one of them represents numbers that have no p -factors at all, the other one has fewer p -factors than $q = p^m$. Hence there are more p -factors in the numerator than in the denominator, and the quotient is divisible by p .

Now we consider an arbitrary subset $Q' \subseteq Q$ that does not contain any nearly-orthogonal vectors. We want to establish that Q' must be "small."

Claim 1. If $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ are distinct vectors from Q , then $\frac{1}{4}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2)$ is an integer in the range

$$-(q-2) \leq \frac{1}{4}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2) \leq q-1$$

Both $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ have an even number of (-1) -components, so the number of components in which $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ differ is even, too. Thus

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (4q-2) - 2\#\{i : x_i \neq y_i\} \equiv -2 \pmod{4}$$

for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, that is, $\frac{1}{4}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2)$ is an integer.

From $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{+1, -1\}^{4q-2}$ we see that $-(4q-2) \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 4q-2$, that is, $-(q-1) \leq \frac{1}{4}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2) \leq q$. The lower bound never holds with equality, since $x_1 = y_1 = 1$ implies that $\mathbf{x} \neq -\mathbf{y}$. The upper bound holds with equality only if $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Claim 2. For any $\mathbf{y} \in Q'$, the polynomial in n variables $x_1, \dots, x_n$ of degree $q-2$ given by

$$F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := P\left(\frac{1}{4}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2)\right) = \binom{\frac{1}{4}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2) - 2}{q-2}$$

satisfies that $F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ is divisible by p for every $\mathbf{x} \in Q' \setminus \{\mathbf{y}\}$, but not for $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

The representation by a binomial coefficient shows that $F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ is an integervalue polynomial. For $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, we get $F_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = 1$. For $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, the Lemma yields that $F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ is not divisible by p if and only if $\frac{1}{4}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2)$ is congruent to 0 or 1 (mod q). By Claim 1, this happens only if $\frac{1}{4}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + 2)$ is either 0 or 1, that is, if $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \{-2, +2\}$. So $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ must be nearlyorthogonal for this, which contradicts the definition of Q' .

Claim 3. The same is true for the polynomials $\bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ in the $n-1$ variables $x_2, \dots, x_n$ that are obtained as follows: Expand $F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ into monomials and remove the variable x_1 , and reduce all higher powers of other variables, by substituting $x_1 = 1$, and $x_i^2 = 1$ for $i > 1$. The polynomials $\bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ have degree at most $q-2$.

The vectors $\mathbf{x} \in Q \subseteq \{+1, -1\}^n$ all satisfy $x_1 = 1$ and $x_i^2 = 1$. Thus the substitutions do not change the values of the polynomials on the set Q . They also do not increase the degree, so $\bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ has degree at most $q-2$.

Claim 4. There is no linear relation (with rational coefficients) between the polynomials $\bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, that is, the polynomials $\bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y} \in Q'$, are linearly independent over $\mathbb{Q}$. In particular, they are distinct.

Assume that there is a relation of the form $\sum_{\mathbf{y} \in Q'} \alpha_{\mathbf{y}} \bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = 0$ such that not all coefficients $\alpha_{\mathbf{y}}$ are zero. After multiplication with a suitable scalar we may assume that all the coefficients are integers, but not all of them are divisible by p . But then for every $\mathbf{y} \in Q'$ the evaluation at $\mathbf{x} := \mathbf{y}$ yields that $\alpha_{\mathbf{y}} \bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ is divisible by p , and hence so is $\alpha_{\mathbf{y}}$, since $\bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ is not.

Claim 5. $|Q'|$ is bounded by the number of squarefree monomials of degree at most $q-2$ in $n-1$ variables, which is $\sum_{i=0}^{q-2} \binom{n-1}{i}$.

By construction the polynomials $\bar{F}_{\mathbf{y}}$ are squarefree: none of their monomials contains a variable with higher degree than 1. Thus each $\bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ is a linear combination of the squarefree monomials of degree at most $q-2$ in the $n-1$ variables $x_2, \dots, x_n$. Since the polynomials $\bar{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ are linearly independent, their number (which is $|Q'|$) cannot be larger than the number of monomials in question.

Details for (2): The first column of $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$ is $\mathbf{x}$. Thus for distinct $\mathbf{x} \in Q$ we obtain distinct matrices $M(\mathbf{x}) := \mathbf{x}\mathbf{x}^T$. We interpret these matrices as vectors of length n^2 with components $x_i x_j$. A simple computation

$$\begin{aligned} \langle M(\mathbf{x}), M(\mathbf{y}) \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i x_j) (y_i y_j) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \geq 4 \end{aligned}$$

shows that the scalar product of $M(\mathbf{x})$ and $M(\mathbf{y})$ is minimized if and only if $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ are nearly-orthogonal.

Details for (3): Let $U(\mathbf{x}) \in \{+1, -1\}^d$ denote the vector of all subdiagonal entries of $M(\mathbf{x})$. Since $M(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$ is symmetric with diagonal values $+1$, we see that $M(\mathbf{x}) \neq M(\mathbf{y})$ implies $U(\mathbf{x}) \neq U(\mathbf{y})$.

$$M(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & & & U(\mathbf{x}) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ U(\mathbf{x}) & & & 1 \end{pmatrix}$$

Furthermore,

$$4 \leq \langle M(\mathbf{x}), M(\mathbf{y}) \rangle = 2\langle U(\mathbf{x}), U(\mathbf{y}) \rangle + n$$

that is,

$$\langle U(\mathbf{x}), U(\mathbf{y}) \rangle \geq -\frac{n}{2} + 2,$$

with equality if and only if $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are nearly-orthogonal. Since all the vectors $U(\mathbf{x}) \in S$ have the same length

$$\sqrt{\langle U(\mathbf{x}), U(\mathbf{x}) \rangle} = \sqrt{\binom{n}{2}},$$

this means that the maximal distance between points $U(\mathbf{x}), U(\mathbf{y}) \in S$ is achieved exactly when $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are nearly-orthogonal.

Details for (4): For $q = 9$ we have $g(9) \approx 758.31$, which is greater than $d+1 = \binom{34}{2} + 1 = 562$. To obtain a general bound for large d , we use monotonicity and unimodality of the binomial coefficients and the estimates $n! > e \left(\frac{n}{e}\right)^n$ and $n! < en \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (see the appendix to Chapter 2) and derive

$$\sum_{i=0}^{q-2} \binom{4q-3}{i} < q \binom{4q}{q} = q \frac{(4q)!}{q!(3q)!} < q \frac{e^{4q} \left(\frac{4q}{e}\right)^{4q}}{e \left(\frac{q}{e}\right)^q e \left(\frac{3q}{e}\right)^{3q}} = \frac{4q^2}{e} \left(\frac{256}{27}\right)^q.$$

Thus we conclude

$$f(d) \geq g(q) = \frac{2^{4q-4}}{\sum_{i=0}^{q-2} \binom{4q-3}{i}} > \frac{e}{64q^2} \left(\frac{27}{16}\right)^q$$

From this, with

$$d = (2q-1)(4q-3) = 5q^2 + (q-3)(3q-1) \geq 5q^2 \quad \text{for } q \geq 3,$$

$$q = \frac{5}{8} + \sqrt{\frac{d}{8} + \frac{1}{64}} > \sqrt{\frac{d}{8}}, \quad \text{and} \quad \left(\frac{27}{16}\right)^{\sqrt{\frac{1}{8}}} > 1.2032,$$

we get

$$f(d) > \frac{e}{13d} (1.2032)^{\sqrt{d}} > (1.2)^{\sqrt{d}} \quad \text{for all large enough } d$$

A counterexample of dimension 560 is obtained by noting that for $q = 9$ the quotient $g(q) \approx 758$ is much larger than the dimension $d(q) = 561$. Thus one gets a counterexample for $d = 560$ by taking only the "three fourths" of the points in S that satisfy $x_{21} + x_{31} + x_{32} = -1$. Borsuk's conjecture is known to be true for $d \leq 3$, but it has not been verified for any larger dimension. In contrast to this, it is true up to $d = 8$ if we restrict ourselves to subsets $S \subseteq \{1, -1\}^d$, as constructed above (see [9]). In either case it is quite possible that counterexamples can be found in quite small dimensions.

References

- [1] A. V. Bondarenko: On Borsuk's conjecture for two-distance sets, *Discrete Comput. Geometry* 51 (2014), 509-515.
- [2] K. Borsuk: Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Math.* 20 (1933), 177-190.
- [3] P. Frankl & R. Wilson: Intersection theorems with geometric consequences, *Combinatorica* 1 (1981), 357-368.
- [4] T. Jenrich & A. E. Brouwer: A 64-dimensional counterexample to Borsuk's conjecture, *Electronic J. Combinatorics* 21 (2014), #P4.29.
- [5] J. Kahn & G. Kalai: A counterexample to Borsuk's conjecture, *Bulletin Amer. Math. Soc.* 29 (1993), 60-62.
- [6] A. Nilli: On Borsuk's problem, in: "Jerusalem Combinatorics '93" (H. Barcelo and G. Kalai, eds.), *Contemporary Mathematics* 178, Amer. Math. Soc. 1994, 209-210.
- [7] A. M. Raigorodskii: On the dimension in Borsuk's problem, *Russian Math. Surveys* (6) 52 (1997), 1324-1325.
- [8] O. Schramm: Illuminating sets of constant width, *Mathematika* 35 (1988), 180-199.
- [9] B. Weissbach: Sets with large Borsuk number, *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry* 41 (2000), 417-423.
- [10] G. M. Ziegler: Coloring Hamming graphs, optimal binary codes, and the 0/1-Borsuk problem in low dimensions, *Lecture Notes in Computer Science* 2122, Springer-Verlag 2001, 164-175.

22.3 Analysis



22.3.1 Sets, functions, and the continuum hypothesis

Set theory, founded by Georg Cantor in the second half of the 19th century, has profoundly transformed mathematics. Modern day mathematics is unthinkable without the concept of a set, or as David Hilbert put it: "Nobody will drive us from the paradise (of set theory) that Cantor has created for us."

One of Cantor's basic concepts is the notion of the size or cardinality of a set M , denoted by $|M|$. For finite sets, this presents no difficulties: we just count the number of elements and say that M is an n -set or has size n , if M contains precisely n elements. Thus two finite sets M

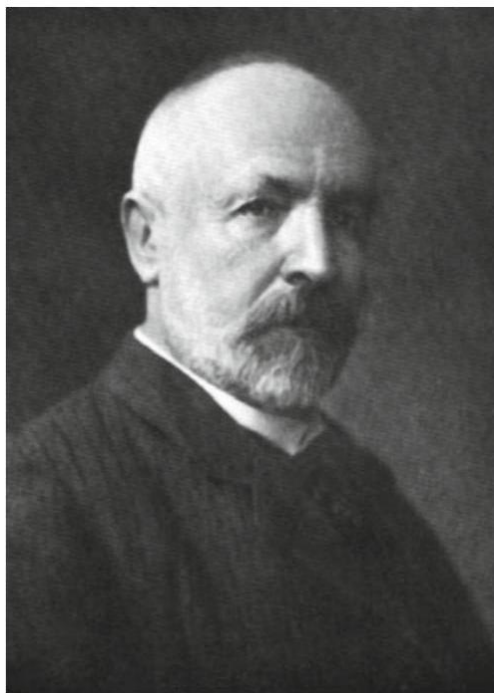
and N have equal size, $|M| = |N|$, if they contain the same number of elements.

To carry this notion of equal size over to infinite sets, we use the following suggestive thought experiment for finite sets. Suppose a number of people board a bus. When will we say that the number of people is the same as the number of available seats? Simple enough, we let all people sit down. If everyone finds a seat, and no seat remains empty, then and only then do the two sets (of the people and of the seats) agree in number. In other words, the two sizes are the same if there is a bijection of one set onto the other.

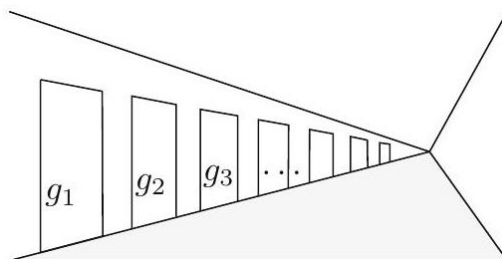
This is then our definition: Two arbitrary sets M and N (finite or infinite) are said to be of equal size or cardinality, if and only if there exists a bijection from M onto N . Clearly, this notion of equal size is an equivalence relation, and we can thus associate a number, called cardinal number, to every class of equal-sized sets. For example, we obtain for finite sets the cardinal numbers $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ where n stands for the class of n -sets, and, in particular, 0 for the empty set $\emptyset$. We further observe the obvious fact that a proper subset of a finite set M invariably has smaller size than M .

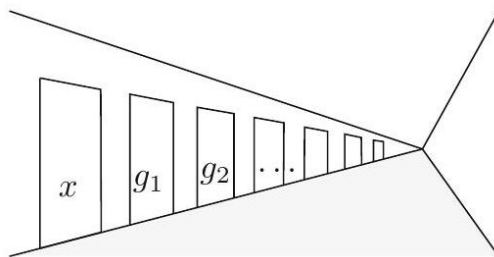
The theory becomes very interesting (and highly non-intuitive) when we turn to infinite sets. Consider the set $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ of natural numbers. We call a set M countable if it can be put in one-to-one correspondence with $\mathbb{N}$. In other words, M is countable if we can list the elements of M as $m_1, m_2, m_3, \dots$. But now a strange phenomenon occurs. Suppose we add to $\mathbb{N}$ a new element x . Then $\mathbb{N} \cup \{x\}$ is still countable, and hence has equal size with $\mathbb{N}$!

This fact is delightfully illustrated by "Hilbert's hotel." Suppose a hotel has countably many rooms, numbered $1, 2, 3, \dots$ with guest g_i occupying room i ; so the hotel is fully booked. Now a new guest x arrives asking for a room, whereupon the hotel manager tells him: Sorry, all rooms are taken. No problem, says the new arrival, just move guest g_1 to room 2, g_2 to room 3, g_3 to room 4, and so on, and I will then take room 1. To the



Georg Cantor





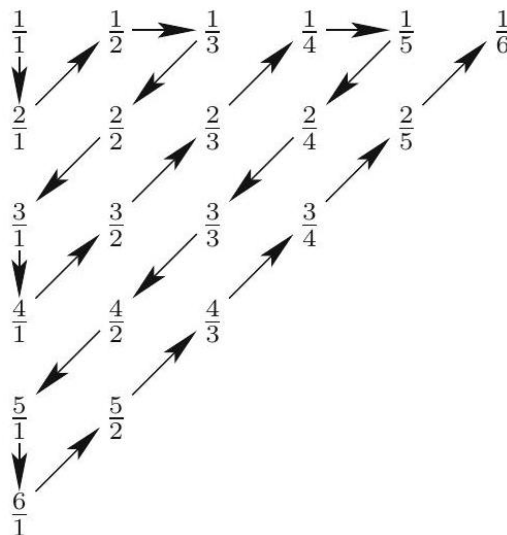
manager's surprise (he is not a mathematician) this works; he can still put up all guests plus the new arrival x !

Now it is clear that he can also put up another guest y , and another one z , and so on. In particular, we note that, in contrast to finite sets, it may well happen that a proper subset of an infinite set M has the same size as M . In fact, as we will see, this is a characterization of infinity: A set is infinite if and only if it has the same size as some proper subset.

Let us leave Hilbert's hotel and look at our familiar number sets. The set $\mathbb{Z}$ of integers is again countable, since we may enumerate $\mathbb{Z}$ in the form $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$. It may come more as a surprise that the rationals can be enumerated in a similar way.

Theorem 1. The set $\mathbb{Q}$ of rational numbers is countable.

- Proof. By listing the set $\mathbb{Q}^+$ of positive rationals as suggested in the figure in the margin, but leaving out numbers already encountered, we see that $\mathbb{Q}^+$ is countable, and hence so is $\mathbb{Q}$ by listing 0 at the beginning and



$-\frac{p}{q}$ right after $\frac{p}{q}$. With this listing

$$\mathbb{Q} = \left\{ 0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, 4, -4, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots \right\}.$$

□

Another way to interpret the figure is the following statement:
The union of countably many countable sets M_n is again countable.
Indeed, set $M_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$ and list

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, \dots\}$$

precisely as before.

Let us contemplate Cantor's enumeration of the positive rationals a bit more. Looking at the figure we obtained the sequence

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \dots$$

and then had to strike out the duplicates such as $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$ or $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

But there is a listing that is even more elegant and systematic, and which contains no duplicates - found only quite recently by Neil Calkin and Herbert Wilf. Their new list starts as follows:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \dots$$

Here the denominator of the n -th rational number equals the numerator of the $(n+1)$ -st number. In other words, the n -th fraction is $b(n)/b(n+1)$, where $(b(n))_{n \geq 0}$ is a sequence that starts with

$$(1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, 5, \dots).$$

This sequence has first been studied by a German mathematician, Moritz Abraham Stern, in a paper from 1858, and is has become known as "Stern's diatomic series."

How do we obtain this sequence, and hence the Calkin-Wilf listing of the positive fractions? Consider the infinite binary tree in the margin. We immediately note its recursive rule:

- $\frac{1}{1}$ is on top of the tree, and
- every node $\frac{i}{j}$ has two sons: the left son is $\frac{i}{i+j}$ and the right son is $\frac{i+j}{j}$.

We can easily check the following four properties:

(1) All fractions in the tree are reduced, that is, if $\frac{r}{s}$ appears in the tree, then r and s are relatively prime.

This holds for the top $\frac{1}{1}$, and then we use induction downward. If r and s are relatively prime, then so are r and $r+s$, as well as s and $r+s$.

(2) Every reduced fraction $\frac{r}{s} > 0$ appears in the tree.

We use induction on the sum $r+s$. The smallest value is $r+s=2$, that is $\frac{r}{s} = \frac{1}{1}$, and this appears at the top. If $r > s$, then $\frac{r-s}{s}$ appears in the tree by induction, and so we get $\frac{r}{s}$ as its right son. Similarly, if $r < s$, then $\frac{r}{s-r}$ appears, which has $\frac{r}{s}$ as its left son.

(3) Every reduced fraction appears exactly once.

The argument is similar. If $\frac{r}{s}$ appears more than once, then $r \neq s$, since any node in the tree except the top is of the form $\frac{i}{i+j} < 1$ or $\frac{i+j}{j} > 1$. But if $r > s$ or $r < s$, then we argue by induction as before.

Every positive rational appears therefore exactly once in our tree, and we may write them down listing the numbers level-by-level from left to right. This yields precisely the initial segment shown above.

(4) The denominator of the n -th fraction in our list equals the numerator of the $(n+1)$ -st.

This is certainly true for $n=0$, or when the n -th fraction is a left son. Suppose the n -th number $\frac{r}{s}$ is a right son. If $\frac{r}{s}$ is at the right boundary, then $s=1$, and the successor lies at the left boundary and has numerator 1. Finally, if $\frac{r}{s}$ is in the interior, and $\frac{r'}{s'}$ is the next fraction in our sequence, then $\frac{r}{s}$ is the right son of $\frac{r-s}{s}$, $\frac{r'}{s'}$ is the left son of $\frac{r'-r'}{s'-r'}$, and by induction the denominator of $\frac{r-s}{s}$ is the numerator of $\frac{r'}{s'-r'}$, so we get $s=r'$.

Well, this is nice, but there is even more to come. There are two natural questions:

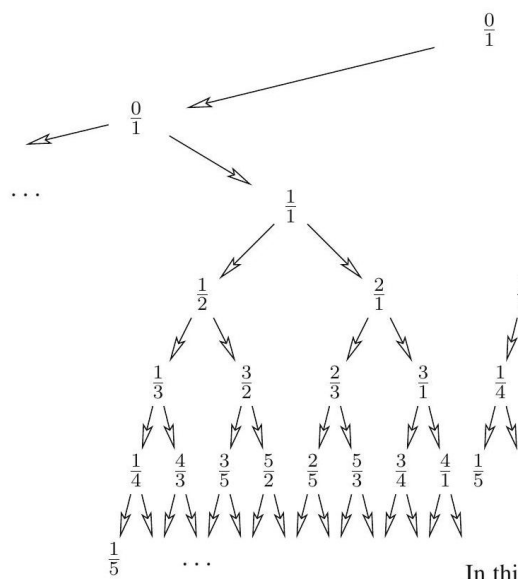
- Does the sequence $(b(n))_{n \geq 0}$ have a "meaning"? That is, does $b(n)$ count anything simple?
- Given $\frac{r}{s}$, is there an easy way to determine the successor in the listing?

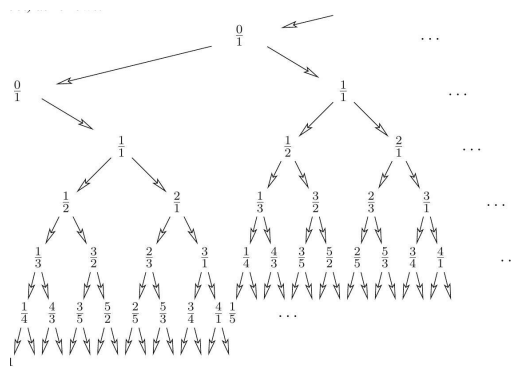
For example, $h(6) = 3$, with the hyperbinary representations

$$6 = 4 + 2$$

$$6 = 4 + 1 + 1$$

$$6 = 2 + 2 + 1 + 1.$$





In this tree all rows are equal, and they all display the Calkin-Wilf listing of the positive rationals (starting with an additional $\frac{0}{1}$).

So how does one get from one rational to the next? To answer this, we first record that for every rational x its right son is $x + 1$, the right grand-son is $x + 2$, so the k -fold right son is $x + k$. Similarly, the left son of x is $\frac{x}{1+x}$, whose left son is $\frac{x}{1+2x}$, and so on: The k -fold left son of x is $\frac{x}{1+kx}$.

Now to find how to get from $\frac{r}{s} = x$ to the "next" rational $f(x)$ in the listing, we have to analyze the situation depicted in the margin. In fact, if we consider any nonnegative rational number x in our infinite binary tree, then it is the k -fold right son of the left son of some rational $y \geq 0$ (for some $k \geq 0$), while $f(x)$ is given as the k -fold left son of the right son of the same y . Thus with the formulas for k -fold left sons and k -fold right sons, we get

$$x = \frac{y}{1+y} + k$$

as claimed in the figure in the margin. Here $k = [x]$ is the integral part of x , while $\frac{y}{1+y} = \{x\}$ is the fractional part. And from this we obtain

$$f(x) = \frac{y+1}{1+k(y+1)} = \frac{1}{\frac{1}{y+1} + k} = \frac{1}{k+1 - \frac{y}{y+1}} = \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}}.$$

Thus we have obtained a beautiful formula for the successor $f(x)$ of x , first found by Moshe Newman:

The function

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}}$$

generates the Calkin-Wilf sequence

$$\frac{1}{1} \mapsto \frac{1}{2} \mapsto \frac{2}{1} \mapsto \frac{1}{3} \mapsto \frac{3}{2} \mapsto \frac{2}{3} \mapsto \frac{3}{1} \mapsto \frac{1}{4} \mapsto \frac{4}{3} \mapsto \dots$$

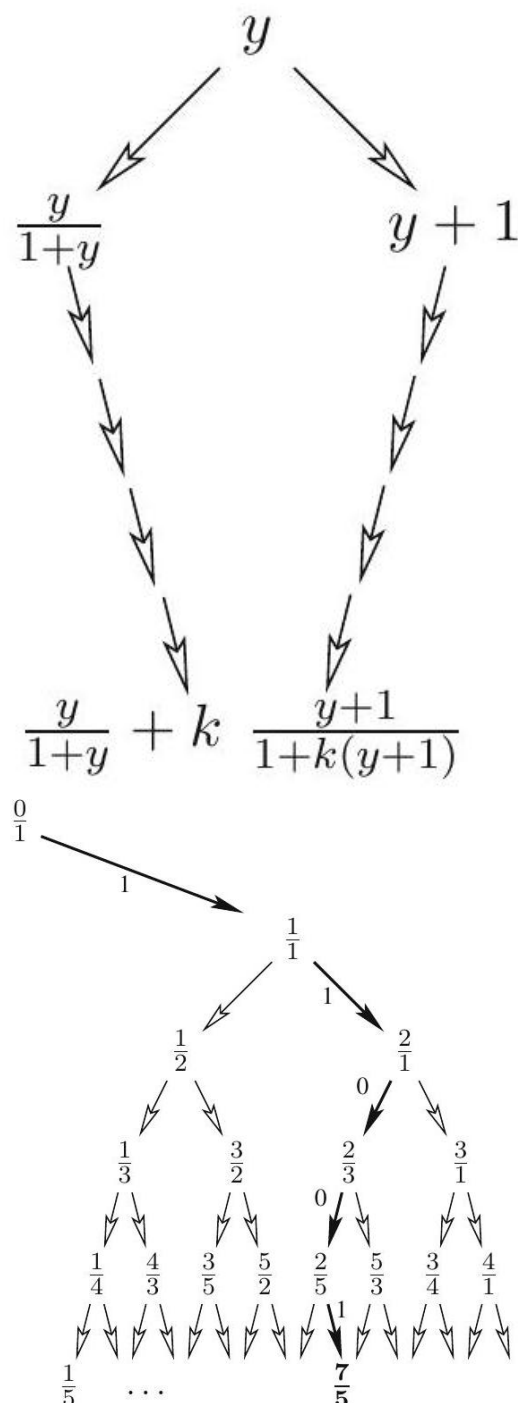
which contains every positive rational number exactly once.

The Calkin-Wilf-Newman way to enumerate the positive rationals has a number of additional remarkable properties. For example, one may ask for a fast way to determine the n -th fraction in the sequence, say for $n = 10^6$. Here it is:

To find the n -th fraction in the Calkin-Wilf sequence, express n as a binary number $n = (b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0)_2$, and then follow the path in the Calkin-Wilf tree that is determined by its digits, starting at $\frac{s}{t} = \frac{0}{1}$.

Here $b_i = 1$ means "take the right son," that is, "add the denominator to the numerator," while $b_i = 0$ means "take the left son," that is, "add the numerator to the denominator."

The figure in the margin shows the resulting path for $n = 25 = (11001)_2$: So the 25th number in the Calkin-Wilf sequence is $\frac{7}{5}$. The reader could easily work out a similar scheme that computes for a given fraction $\frac{s}{t}$ (the binary representation of) its position n in the Calkin-Wilf sequence.



Let us move on to the real numbers $\mathbb{R}$. Are they still countable? No, they are not, and the means by which this is shown - Cantor's diagonalization method - is not only of fundamental importance for all of set theory, but certainly belongs into The Book as a rare stroke of genius.

Theorem 2. The set $\mathbb{R}$ of real numbers is not countable.

- Proof. Any subset N of a countable set $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ is at most countable (that is, finite or countable). In fact, just list the elements of N as they appear in M . Accordingly, if we can find a subset of $\mathbb{R}$ which is not countable, then a fortiori $\mathbb{R}$ cannot be countable. The subset M of $\mathbb{R}$ we want to look at is the interval $(0, 1]$ of all positive real numbers r with $0 < r \leq 1$. Suppose, to the contrary, that M is countable, and let $M = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ be a listing of M . We write r_n as its unique infinite decimal expansion without an infinite sequence of zeros at the end:

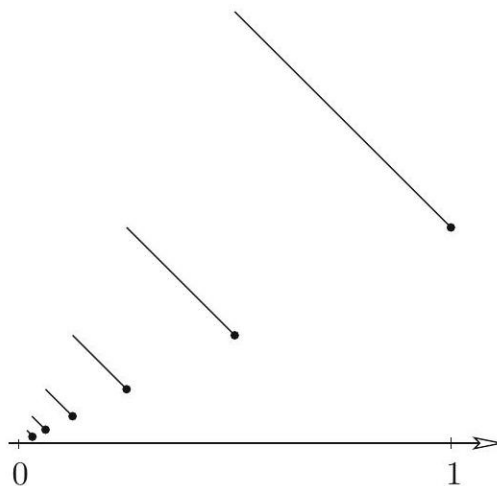
$$r_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots$$

where $a_{ni} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ for all n and i . For example, $0.7 = 0.6999\dots$ Consider now the doubly infinite array

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\
r_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\
&\vdots \\
r_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

For every n , let b_n be the least element of $\{1, 2\}$ that is different from a_{nn} . Then $b = 0.b_1b_2b_3\dots b_n\dots$ is a real number in our set M and hence must have an index, say $b = r_k$. But this cannot be, since b_k is different from a_{kk} . And this is the whole proof! $\square$

Let us stay with the real numbers for a moment. We note that all four



A bijective $f : (0, 1] \rightarrow (0, 1)$

types of intervals $(0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1)$ and $[0, 1]$ have the same size. As an example, we verify that $(0, 1]$ and $(0, 1)$ have equal cardinality. The map $f : (0, 1] \rightarrow (0, 1)$, $x \mapsto y$ defined by

$$y := \begin{cases} \frac{3}{2} - x & \text{for } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ \frac{3}{4} - x & \text{for } \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{8} - x & \text{for } \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4}, \\ \vdots & \end{cases}$$

does the job. Indeed, the map is bijective, since the range of y in the first line is $\frac{1}{2} \leq y < 1$, in the second line $\frac{1}{4} \leq y < \frac{1}{2}$, in the third line $\frac{1}{8} \leq y < \frac{1}{4}$, and so on.

Next we find that any two intervals (of finite length > 0) have equal size by considering the central projection as in the figure. Even more is true: Every interval (of length > 0) has the same size as the whole real line $\mathbb{R}$. To see this, look at the bent open interval $(0, 1)$ and project it onto $\mathbb{R}$ from the center S .

So, in conclusion, any open, half-open, closed (finite or infinite) interval of length > 0 has the same size, and we denote this size by c , where c stands for continuum (a name sometimes used for the interval $[0, 1]$).

That finite and infinite intervals have the same size may come expected on second thought, but here is a fact that is downright counter-intuitive.

Theorem 3. The set $\mathbb{R}^2$ of all ordered pairs of real numbers (that is, the real plane) has the same size as $\mathbb{R}$.

The theorem is due to Cantor 1878, as is the idea to merge the decimal expansions of two reals into one. The variant of Cantor's method that we are going to present is again from The Book. Abraham Fraenkel attributes the trick, which directly yields a bijection, to Julius König.

- **Proof.** It suffices to prove that the set of all pairs (x, y) , $0 < x, y \leq 1$, can be mapped bijectively onto $(0, 1]$. Consider the pair (x, y) and write x, y in their unique non-terminating decimal expansion as in the following example:

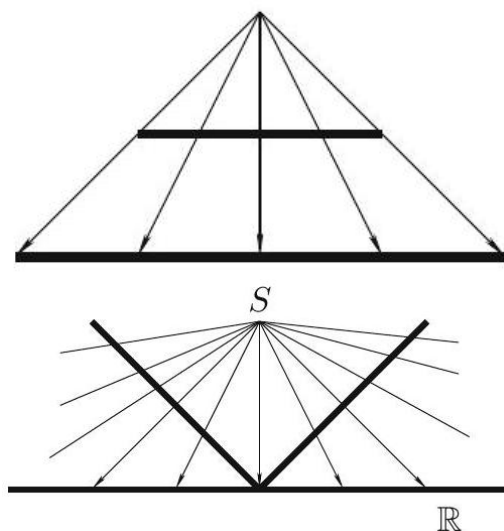
$$\begin{array}{rcccccc} x & = & 0.3 & & 01 & & 2 & & 007 & & 08 & & \dots \\ y & = & 0.009 & & 2 & & 05 & & 1 & & 0008 & & \dots \end{array}$$

Note that we have separated the digits of x and y into groups by always going to the next nonzero digit, inclusive. Now we associate to (x, y) the number $z \in (0, 1]$ by writing down the first x -group, after that the first y -group, then the second x -group, and so on. Thus, in our example, we obtain

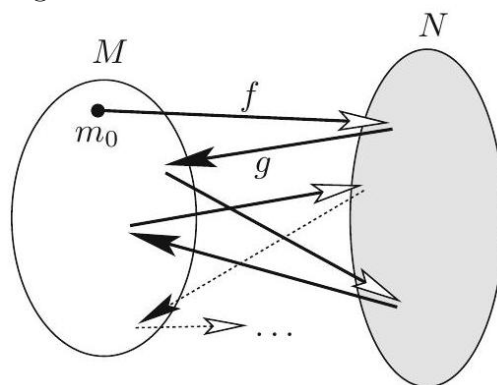
$$z = 0.30090122050071080008\dots$$

Since neither x nor y exhibits only zeros from a certain point on, we find that the expression for z is again a non-terminating decimal expansion. Conversely, from the expansion of z we can immediately read off the preimage (x, y) , and the map is bijective - end of proof.

As $(x, y) \mapsto x + iy$ is a bijection from $\mathbb{R}^2$ onto the complex numbers $\mathbb{C}$, we conclude that $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}| = c$. Why is the result $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ so unexpected? Because it goes against our intuition of dimension. It says that the 2-dimensional plane $\mathbb{R}^2$ (and, in general, by induction, the n -dimensional space $\mathbb{R}^n$) can be mapped bijectively onto the 1-dimensional line $\mathbb{R}$. Thus dimension is not generally preserved by bijective maps. If, however, we require the map and its inverse to be continuous, then the dimension is preserved, as was first shown by Luitzen Brouwer.



"Cantor and Bernstein painting"

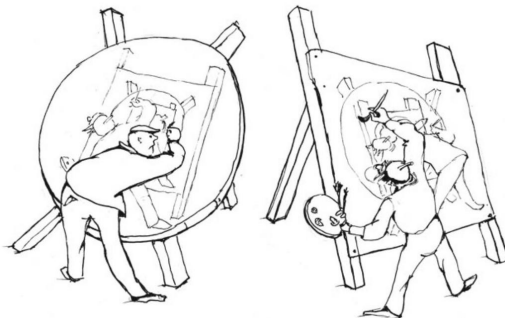


Let us go a little further. So far, we have the notion of equal size. When will we say that M is at most as large as N ? Mappings provide again the key. We say that the cardinal number $\mathfrak{m}$ is less than or equal to $\mathfrak{n}$, if for sets M and N with $|M| = \mathfrak{m}$, $|N| = \mathfrak{n}$, there exists an injection from M into N . Clearly, the relation $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ is independent of the representative sets M and N chosen. For finite sets this corresponds again to our intuitive notion: An m -set is at most as large as an n -set if and only if $m \leq n$.

Now we are faced with a basic problem. We would certainly like to have that the usual laws concerning inequalities also hold for cardinal numbers. But is this true for infinite cardinals? In particular, is it true that $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$ imply $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$?

The affirmative answer to this question is provided by the famous Cantor-Bernstein theorem,

which Cantor announced in 1883. The first complete proof was presented by Felix Bernstein in Cantor's seminar in 1897. Further proofs were given by Richard Dedekind, Ernst Zermelo, and others. Our proof is due to Julius König (1906).



Theorem 4. If each of two sets M and N can be mapped injectively into the other, then there is a bijection from M to N , that is, $|M| = |N|$.

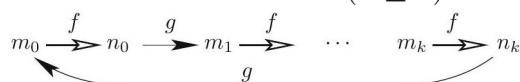
- Proof. We may certainly assume that M and N are disjoint - if not, then we just replace N by a new copy.

Now f and g map back and forth between the elements of M and those of N . One way to bring this potentially confusing situation into perfect clarity and order is to align $M \cup N$ into chains of elements: Take an arbitrary element $m_0 \in M$, say, and from this generate a chain of elements by applying f , then g , then f again, then g , and so on. The chain may close up (this is Case 1) if we reach m_0 again in this process, or it may continue with distinct elements indefinitely. (The first "duplicate" in the chain cannot be an element different from m_0 , by injectivity.)

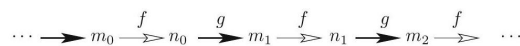
If the chain continues indefinitely, then we try to follow it backwards: From m_0 to $g^{-1}(m_0)$ if m_0 is in the image of g , then to $f^{-1}(g^{-1}(m_0))$ if $g^{-1}(m_0)$ is in the image of f , and so on. Three more cases may arise here: The process of following the chain backwards may go on indefinitely (Case 2), it may stop in an element of M that does not lie in the image of g (Case 3), or it may stop in an element of N that does not lie in the image of f (Case 4).

Thus $M \cup N$ splits perfectly into four types of chains, whose elements we may label in such a way that a bijection is simply given by putting $F : m_i \mapsto n_i$. We verify this in the four cases separately:

Case 1. Finite cycles on $2k + 2$ distinct elements ($k \geq 0$)



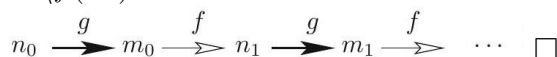
Case 2. Two-way infinite chains of distinct elements



Case 3. The one-way infinite chains of distinct elements that start at the elements $m_0 \in M \setminus g(N)$



Case 4. The one-way infinite chains of distinct elements that start at the elements $n_0 \in N \setminus f(M)$



What about the other relations governing inequalities? As usual, we set $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ if $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, but $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$. We have just seen that for any two cardinals $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{n}$ at most one of the three possibilities

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{n}, \mathfrak{m} = \mathfrak{n}, \mathfrak{m} > \mathfrak{n}$$

holds, and it follows from the theory of cardinal numbers that, in fact, precisely one relation is true. (See the appendix to this chapter, Proposition 2.) Furthermore, the Cantor-Bernstein

Theorem tells us that the relation $<$ is transitive, that is, $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ and $\mathfrak{n} < \mathfrak{p}$ imply $\mathfrak{m} < \mathfrak{p}$. Thus the cardinalities are arranged in linear order starting with the finite cardinals $0, 1, 2, 3, \dots$. Invoking the usual Zermelo-Fraenkel axiom system, we easily find that any infinite set M contains a countable subset. In fact, M contains an element, say m_1 . The set $M \setminus \{m_1\}$ is not empty (since it is infinite) and hence contains an element m_2 . Considering $M \setminus \{m_1, m_2\}$ we infer the existence of m_3 , and so on. So, the size of a countable set is the smallest infinite cardinal, usually denoted by $\aleph_0$ (pronounced "aleph zero").



"The smallest infinite cardinal"

As a corollary to $\aleph_0 \leq \mathfrak{m}$ for any infinite cardinal $\mathfrak{m}$, we can immediately prove "Hilbert's hotel" for any infinite cardinal number $\mathfrak{m}$, that is, we have $|M \cup \{x\}| = |M|$ for any infinite set M . Indeed, M contains a subset $N = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$. Now map x onto m_1 , m_1 onto m_2 , and so on, keeping the elements of $M \setminus N$ fixed. This gives the desired bijection.

With this we have also proved a result announced earlier: Every infinite set has the same size as some proper subset.

As another consequence of the Cantor-Bernstein theorem we may prove that the set $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ of all subsets of $\mathbb{N}$ has cardinality c . As noted above, it suffices to show that $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}| = |(0, 1]|$. An example of an injective map is

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow (0, 1]$$

$$A \longmapsto \sum_{i \in A} 10^{-i}$$

while

$$g : (0, 1] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\},$$

$$0.b_1b_2b_3\ldots \longmapsto \{b_i 10^i : i \in \mathbb{N}\}$$

defines an injection in the other direction.

Up to now we know the cardinal numbers $0, 1, 2, \dots, \aleph_0$, and further that the cardinality c of $\mathbb{R}$ is bigger than $\aleph_0$. The passage from $\mathbb{Q}$ with $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ to $\mathbb{R}$ with $|\mathbb{R}| = c$ immediately suggests the next question:

Is $c = |\mathbb{R}|$ the next infinite cardinal number after $\aleph_0$?

Now, of course, we have the problem whether there is a next larger cardinal number, or in other words, whether $\aleph_1$ has a meaning at all. It does - the proof for this is outlined in the appendix to this chapter.

The statement $c = \aleph_1$ became known as the continuum hypothesis. The question whether the continuum hypothesis is true presented for many decades one of the supreme challenges in all of mathematics. The answer, finally given by Kurt Gödel and Paul Cohen, takes us to the limit of logical thought. They showed that the statement $c = \aleph_1$ is independent of the Zermelo-Fraenkel axiom system, in the same way as the parallel axiom is independent of the other axioms of Euclidian geometry. There are models where $c = \aleph_1$ holds, and there are other models of set theory where $c \neq \aleph_1$ holds.

In the light of this fact it is quite interesting to ask whether there are other conditions (from analysis, say) which are equivalent to the continuum hypothesis. Indeed, it is natural to ask for an analysis example, since historically the first substantial applications of Cantor's set theory occurred in analysis, specifically in complex function theory. In the following we want to present one such instance and its extremely elegant and simple solution by Paul Erdős. In 1962 John E. Wetzel, a young instructor at the University of Illinois, asked the following question:

Let $\{f_\alpha\}$ be a family of pairwise distinct analytic functions on the complex numbers such that for each $z \in \mathbb{C}$ the set of values $\{f_\alpha(z)\}$ is at most countable (that is, it is either finite or countable); let us call this property (P_0) .

Does it then follow that the family itself is at most countable?

Very shortly afterwards Erdős showed that, surprisingly, the answer depends on the continuum hypothesis.

Theorem 5. If $c > \aleph_1$, then every family $\{f_\alpha\}$ satisfying (P_0) is countable. If, on the other hand, $c = \aleph_1$, then there exists some family $\{f_\alpha\}$ with property (P_0) which has size c .

For the proof we need some basic facts on cardinal and ordinal numbers. For readers who are unfamiliar with these concepts, this chapter has an appendix where all the necessary results are collected.

- **Proof.** Assume first $c > \aleph_1$. We shall show that for any family $\{f_\alpha\}$ of size $\aleph_1$ of analytic functions there exists a complex number z_0 such that all $\aleph_1$ values $f_\alpha(z_0)$ are distinct. Consequently, if a family of functions satisfies (P_0) , then it must be countable.

To see this, we make use of our knowledge of ordinal numbers. First, we well-order the family $\{f_\alpha\}$ according to the initial ordinal number ω_1 of $\aleph_1$. This means by Proposition 1 of the appendix that the index set runs through all ordinal numbers α which are smaller than ω_1 . Next we show that the set of pairs $(\alpha, \beta), \alpha < \beta < \omega_1$, has size $\aleph_1$. Since any $\beta < \omega_1$ is a countable ordinal, the set of pairs $(\alpha, \beta), \alpha < \beta$, is countable for every fixed β . Taking the union over all $\aleph_1$ -many β , we find from Proposition 6 of the appendix that the set of all pairs $(\alpha, \beta), \alpha < \beta$, has size $\aleph_1$.

Consider now for any pair $\alpha < \beta$ the set

$$S(\alpha, \beta) = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$$

We claim that each set $S(\alpha, \beta)$ is countable. To verify this, consider the disks C_k of radius $k = 1, 2, 3, \dots$ around the origin in the complex plane. If f_α and f_β agree on infinitely many points in some C_k , then f_α and f_β are identical by a well-known result on analytic functions. Hence f_α and f_β agree only in finitely many points in each C_k , and hence in at most countably many points altogether. Now we set

$$S := \bigcup_{\alpha < \beta} S(\alpha, \beta)$$

Again by Proposition 6, we find that S has size $\aleph_1$, as each set $S(\alpha, \beta)$ is countable. And here is the punch line: Because, as we know, $\mathbb{C}$ has size c , and c is larger than $\aleph_1$ by assumption, there exists a complex number z_0 not in S , and for this z_0 all $\aleph_1$ values $f_\alpha(z_0)$ are distinct.

Next we assume $c = \aleph_1$. Consider the set $D \subseteq \mathbb{C}$ of complex numbers $p + iq$ with rational real and imaginary part. Since for each p the set $\{p + iq : q \in \mathbb{Q}\}$ is countable, we find that D is countable. Furthermore, D is a dense set in $\mathbb{C}$: Every open disk in the complex plane contains some point of D . Let $\{z_\alpha : 0 \leq \alpha < \omega_1\}$ be a well-ordering of $\mathbb{C}$. We shall now construct a family $\{f_\beta : 0 \leq \beta < \omega_1\}$ of $\aleph_1$ -many distinct analytic functions such that

$$f_\beta(z_\alpha) \in D \text{ whenever } \alpha < \beta. \quad (1)$$

Any such family satisfies the condition (P_0) . Indeed, each point $z \in \mathbb{C}$ has some index, say $z = z_\alpha$. Now, for all $\beta > \alpha$, the values $\{f_\beta(z_\alpha)\}$ lie in the countable set D . Since α is a countable ordinal number, the functions f_β with $\beta \leq \alpha$ will contribute at most countably further values $f_\beta(z_\alpha)$, so that the set of all values $\{f_\beta(z_\alpha)\}$ is likewise at most countable. Hence, if we can construct a family $\{f_\beta\}$ satisfying (1), then the second part of the theorem is proved. The construction of $\{f_\beta\}$ is by transfinite induction. For f_0 we may take any analytic function, for example $f_0 = \text{constant}$. Suppose f_β has already been constructed for all $\beta < \gamma$. Since γ is a countable ordinal, we may reorder $\{f_\beta : 0 \leq \beta < \gamma\}$ into a sequence $g_1, g_2, g_3, \dots$. The same reordering of $\{z_\alpha : 0 \leq \alpha < \gamma\}$ yields a sequence $w_1, w_2, w_3, \dots$. We shall now construct a function f_γ satisfying for each n the conditions

$$f_\gamma(w_n) \in D \quad \text{and} \quad f_\gamma(w_n) \neq g_n(w_n). \quad (2)$$

The second condition will ensure that all functions f_γ ($0 \leq \gamma < \omega_1$) are distinct, and the first condition is just (1), implying (P_0) by our previous argument. Notice that the condition $f_\gamma(w_n) \neq g_n(w_n)$ is once more a diagonalization argument. To construct f_γ , we write

$$\begin{aligned} f_\gamma(z) := & \varepsilon_0 + \varepsilon_1(z - w_1) + \varepsilon_2(z - w_1)(z - w_2) \\ & + \varepsilon_3(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3) + \cdots \end{aligned}$$

If γ is a finite ordinal, then f_γ is a polynomial and hence analytic, and we can certainly choose numbers ε_i such that (2) is satisfied. Now suppose γ is a countable ordinal, then

$$f_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(z - w_1) \cdots (z - w_n) \quad (3)$$

Note that the values of ε_m ($m \geq n$) have no influence on the value $f_\gamma(w_n)$, hence we may choose the ε_n step by step. If the sequence (ε_n) converges to 0 sufficiently fast, then (3) defines an analytic function. Finally, since D is a dense set, we may choose this sequence (ε_n) so that f_γ meets the requirements of (2), and the proof is complete.

Appendix: On cardinal and ordinal numbers

Let us first discuss the question whether to each cardinal number there exists a next larger one. As a start we show that to every cardinal number $\mathfrak{m}$ there always is a cardinal number $\mathfrak{n}$ larger than $\mathfrak{m}$. To do this we employ again a version of Cantor's diagonalization method.

Let M be a set, then we claim that the set $\mathcal{P}(M)$ of all subsets of M has larger size than M . By letting $m \in M$ correspond to $\{m\} \in \mathcal{P}(M)$, we see that M can be mapped bijectively onto a subset of $\mathcal{P}(M)$, which implies $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$ by definition. It remains to show that $\mathcal{P}(M)$ can not be mapped bijectively onto a subset of M . Suppose, on the contrary, $\varphi : N \rightarrow \mathcal{P}(M)$ is a bijection of $N \subseteq M$ onto $\mathcal{P}(M)$. Consider the subset $U \subseteq N$ of all elements of N which are not contained in their image under φ , that is, $U = \{m \in N : m \notin \varphi(m)\}$. Since φ is a bijection, there exists $u \in N$ with $\varphi(u) = U$. Now, either $u \in U$ or $u \notin U$, but both alternatives are impossible! Indeed, if $u \in U$, then $u \notin \varphi(u) = U$ by the definition of U , and if $u \notin U = \varphi(u)$, then $u \in U$, contradiction.

Most likely, the reader has seen this argument before. It is the old barber riddle: "A barber is the man who shaves all men who do not shave themselves. Does the barber shave himself?"

To get further in the theory we introduce another great concept of Cantor's, ordered sets and ordinal numbers. A set M is ordered by $<$ if the relation $<$ is transitive, and if for any two distinct elements a and b of M we either have $a < b$ or $b < a$. For example, we can order $\mathbb{N}$ in the usual way according to magnitude, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, but, of course, we can also order $\mathbb{N}$ the other way round, $\mathbb{N} = \{\dots, 4, 3, 2, 1\}$, or $\mathbb{N} = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$ by listing first the odd numbers and then the even numbers.

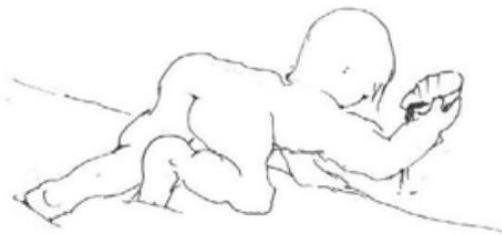
Here is the seminal concept. An ordered set M is called well-ordered if every nonempty subset of M has a first element. Thus the first and third orderings of $\mathbb{N}$ above are well-orderings, but not the second ordering. The fundamental well-ordering theorem, implied by the axioms (including the axiom of choice), now states that every set M admits a well-ordering. From now on, we only consider sets endowed with a well-ordering.

Let us say that two well-ordered sets M and N are similar (or of the same order-type) if

there exists a bijection φ from M on N which respects the ordering, that is, $m <_M n$ implies $\varphi(m) <_N \varphi(n)$. Note that any ordered set which is similar to a well-ordered set is itself well-ordered.

Similarity is obviously an equivalence relation, and we can thus speak of an ordinal number α belonging to a class of similar sets. For finite sets, any two orderings are similar well-orderings, and we use again the ordinal number n for the class of n -sets. Note that, by definition, two similar sets have the same cardinality. Hence it makes sense to speak of the cardinality $|\alpha|$ of an ordinal number α . Note further that any subset of a well-ordered set is also well-ordered under the induced ordering.

As we did for cardinal numbers, we now compare ordinal numbers. Let M be a well-ordered set, $m \in M$, then $M_m = \{x \in M : x < m\}$ is called the (initial) segment of M determined by m ; N is a segment of M if $N = M_m$.



"A legend talks about St. Augustin who, walking along the seashore and contemplating infinity, saw a child trying to empty the ocean with a small shell..."

The well-ordered sets $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ and $\mathbb{N} = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$ are not similar: the first ordering has only one element without an immediate predecessor, while the second one has two.

The ordinal number of $\{1, 2, 3, \dots\}$ is smaller than the ordinal number of $\{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$ for some m . Thus, in particular, M_m is the empty set when m is the first element of M . Now let μ and ν be the ordinal numbers of the well-ordered sets M and N . We say that μ is smaller than ν , $\mu < \nu$, if M is similar to a segment of N . Again, we have the transitive law that $\mu < \nu$, $\nu < \pi$ implies $\mu < \pi$, since under a similarity mapping a segment is mapped onto a segment.

Clearly, for finite sets, $m < n$ corresponds to the usual meaning. Let us denote by ω the ordinal number of $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ordered according to magnitude. By considering the segment $\mathbb{N}_{n+1}$ we find $n < \omega$ for any finite n . Next we see that $\omega \leq \alpha$ holds for any infinite ordinal number α . Indeed, if the infinite well-ordered set M has ordinal number α , then M contains a first element m_1 , the set $M \setminus \{m_1\}$ contains a first element m_2 , $M \setminus \{m_1, m_2\}$ contains a first element m_3 . Continuing in this way, we produce the sequence $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ in M . If $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$, then M is similar to $\mathbb{N}$, and hence $\alpha = \omega$. If, on the other hand, $M \setminus \{m_1, m_2, \dots\}$ is nonempty, then it contains a first element m , and we conclude that $\mathbb{N}$ is similar to the segment M_m , that is, $\omega < \alpha$ by definition.

We now state (without the proofs, which are not difficult) three basic results on ordinal numbers. The first says that any ordinal number μ has a "standard" representative well-ordered set W_μ . Proposition 1. Let μ be an ordinal number and denote by W_μ the set of ordinal numbers smaller than μ . Then the following holds:

- (i) The elements of W_μ are pairwise comparable.
- (ii) If we order W_μ according to magnitude, then W_μ is well-ordered and has ordinal number μ .

Proposition 2. Any two ordinal numbers μ and ν satisfy precisely one of the relations $\mu < \nu$, $\mu = \nu$, or $\mu > \nu$.

Proposition 3. Every set of ordinal numbers (ordered according to magnitude) is well-ordered.

After this excursion to ordinal numbers we come back to cardinal numbers. Let $\mathfrak{m}$ be a cardinal number, and denote by $O_{\mathfrak{m}}$ the set of all ordinal numbers μ with $|\mu| = \mathfrak{m}$. By Proposition 3 there is a smallest ordinal number $\omega_{\mathfrak{m}}$ in $O_{\mathfrak{m}}$, which we call the initial ordinal number of $\mathfrak{m}$. As an example, ω is the initial ordinal number of $\aleph_0$.

With these preparations we can now prove a basic result for this chapter.

Proposition 4. For every cardinal number $\mathfrak{m}$ there is a definite next larger cardinal number.

- Proof. We already know that there is some larger cardinal number $\mathfrak{n}$. Consider now the set $\mathcal{K}$ of all cardinal numbers larger than $\mathfrak{m}$ and at most as large as $\mathfrak{n}$. We associate to

each $\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ its initial ordinal number $\omega_{\mathfrak{p}}$. Among these initial numbers there is a smallest (Proposition 3), and the corresponding cardinal number is then the smallest in $\mathcal{K}$, and thus is the desired next larger cardinal number to $\mathfrak{m}$.

Proposition 5. Let the infinite set M have cardinality $\mathfrak{m}$, and let M be well-ordered according to the initial ordinal number $\omega_{\mathfrak{m}}$. Then M has no last element.

- Proof. Indeed, if M had a last element m , then the segment M_m would have an ordinal number $\mu < \omega_{\mathfrak{m}}$ with $|\mu| = \mathfrak{m}$, contradicting the definition of $\omega_{\mathfrak{m}}$.

What we finally need is a considerable strengthening of the result that the union of countably many countable sets is again countable. In the following result we consider arbitrary families of countable sets.

Proposition 6. Suppose $\{A_{\alpha}\}$ is a family of size $\mathfrak{m}$ of countable sets A_{α} , where $\mathfrak{m}$ is an infinite cardinal. Then the union $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ has size at most $\mathfrak{m}$.

- Proof. We may assume that the sets A_{α} are pairwise disjoint, since this can only increase the size of the union. Let M with $|M| = \mathfrak{m}$ be the index set, and well-order it according to the initial ordinal number $\omega_{\mathfrak{m}}$. We now replace each $\alpha \in M$ by a countable set $B_{\alpha} = \{b_{\alpha 1} = \alpha, b_{\alpha 2}, b_{\alpha 3}, \dots\}$, ordered according to ω , and call the new set $\widetilde{M}$. Then $\widetilde{M}$ is again wellordered by setting $b_{\alpha i} < b_{\beta j}$ for $\alpha < \beta$ and $b_{\alpha i} < b_{\alpha j}$ for $i < j$. Let $\widetilde{\mu}$ be the ordinal number of $\widetilde{M}$. Since M is a subset of $\widetilde{M}$, we have $\mu \leq \widetilde{\mu}$ by an earlier argument. If $\mu = \widetilde{\mu}$, then M is similar to $\widetilde{M}$, and if $\mu < \widetilde{\mu}$, then M is similar to a segment of $\widetilde{M}$. Now, since the ordering $\omega_{\mathfrak{m}}$ of M has no last element (Proposition 5), we see that M is in both cases similar to the union of countable sets B_{β} , and hence of the same cardinality. The rest is easy. Let $\varphi : \bigcup B_{\beta} \rightarrow M$ be a bijection, and suppose that $\varphi(B_{\beta}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$. Replace each α_i by A_{α_i} and consider the union $\bigcup A_{\alpha_i}$. Since $\bigcup A_{\alpha_i}$ is the union of countably many countable sets (and hence countable), we see that B_{β} has the same size as $\bigcup A_{\alpha_i}$. In other words, there is a bijection from B_{β} to $\bigcup A_{\alpha_i}$ for all β , and hence a bijection ψ from $\bigcup B_{\beta}$ to $\bigcup A_{\alpha}$. But now $\psi\varphi^{-1}$ gives the desired bijection from M to $\bigcup A_{\alpha}$, and thus $|\bigcup A_{\alpha}| = \mathfrak{m}$.

References

- [1] L. E. J. Brouwer: Beweis der Invarianz der Dimensionszahl, Math. Annalen 70 (1911), 161-165.
 - [2] N. Calkin & H. Wilf: Recounting the rationals, Amer. Math. Monthly 107 (2000), 360-363.
 - [3] G. Cantor: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Journal für die reine und angewandte Mathematik 84 (1878), 242-258.
 - [4] P. Cohen: Set Theory and the Continuum Hypothesis, W. A. Benjamin, New York 1966.
 - [5] P. Erdős: An interpolation problem associated with the continuum hypothesis, Michigan Math. J. 11 (1964), 9-10.
 - [6] E. Kamke: Theory of Sets, Dover Books 1950.
 - [7] M. A. Stern: Ueber eine zahlentheoretische Funktion, Journal für die reine und angewandte Mathematik 55 (1858), 193-220.
- "Infinitely many more cardinals"



Analysis abounds with inequalities, as witnessed for example by the famous book "Inequalities" by Hardy, Littlewood and Pólya. Let us single out two of the most basic inequalities with two applications each, and let us listen in to George Pólya, who was himself a champion of the Book Proof, about what he considers the most appropriate proofs. Our first inequality is variously attributed to Cauchy, Schwarz and/or to Buniakowski:

Let $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ be an inner product on a real vector space V (with the norm $|\mathbf{a}|^2 := \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$). Then

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

holds for all vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, with equality if and only if $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are linearly dependent.

- **Proof.** The following (folklore) proof is probably the shortest. Consider the quadratic function

$$|xa + b|^2 = x^2|a|^2 + 2x\langle a, b \rangle + |b|^2$$

in the variable x . We may assume $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. If $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, then clearly $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$. If, on the other hand, $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are linearly independent, then $|x\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 > 0$ for all x , and thus the discriminant $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$ is less than 0.

Our second example is the inequality of the harmonic, geometric and arithmetic mean:

Let $a_1, \dots, a_n$ be positive real numbers, then

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

with equality in both cases if and only if all a_i 's are equal.

- **Proof.** The following beautiful nonstandard induction proof is attributed to Cauchy (see [8]). Let $P(n)$ be the statement of the second inequality, written in the form

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^n$$

For $n = 2$, we have $a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \iff (a_1 - a_2)^2 \geq 0$, which is true. Now we proceed in the following two steps:

(A) $P(n) \implies P(n-1)$

(B) $P(n)$ and $P(2) \implies P(2n)$

which will clearly imply the full result.

To prove (A), set $A := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$, then

For (B), we see

The condition for equality is derived just as easily.

The left-hand inequality, between the harmonic and the geometric mean, follows now by considering $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$.

- Another Proof. Of the many other proofs of the arithmetic-geometric mean inequality (the monograph [2] lists more than fifty), let us single out a particularly striking one by Horst Alzer, with some shortenings due to France Dacar. As a matter of fact, this proof yields the stronger inequality

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n$$

for any positive numbers $a_1, \dots, a_n, p_1, \dots, p_n$ with $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Let us denote the expression on the left side by G , and on the right side by A . Fix $c > 0$ and define the function $f(t) := \frac{1}{c} - \frac{1}{t}$ on $\mathbb{R}_{>0}$. Since $f(t) < 0$ for $t < c$ and $f(t) > 0$ for $t > c$, we get the inequality

$$\int_c^x f(t) dt \geq 0$$

for every $x > 0$, with equality if and only if $x = c$.

Now

$$0 \leq \int_c^x f(t) dt = \left[\frac{t}{c} - \log t \right]_c^x = \frac{x}{c} - 1 - \log \frac{x}{c}$$

Note that we have proved the inequality $x \geq 1 + \log x$ for $x > 0$ on the side.

For $n = 2$, we have $a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \iff (a_1 - a_2)^2 \geq 0$, which is true.

Now we proceed in the following two steps:

" (B)

which will clearly imply the full result.

To prove (A), set $A := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$, then

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k \right) A \stackrel{P(n)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + A}{n} \right)^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n} \right)^n = A^n$$

$$\text{and hence } \prod_{k=1}^{n-1} a_k \leq A^{n-1} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1} \right)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n} a_k &= \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k \right) \stackrel{P(n)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n} \right)^n \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n} \right)^n \\ &\stackrel{P(2)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2} \right)^{2n} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n} \right)^{2n}. \end{aligned}$$

$$P(2) \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2} \right)^{2n} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n} \right)^{2n}.$$

a condition for equality is derived just as easily.

lowers now by considering $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$.

Another Proof. Of the many other proofs of the arithmetic-geometric mean inequality (the monograph [2] lists more than fifty), let us single out a particularly striking one by Horst Alzer, with some shortenings due to France Dacar. As a matter of fact, this proof yields the stronger inequality $\square$

and setting $c = G$ and $x = a_i$ we conclude that

$$\frac{a_i}{G} - 1 \geq \log a_i - \log G \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Multiplying this inequality by p_i and summing over all i gives

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{a_i}{G} - \sum_{i=1}^n p_i \geq \sum_{i=1}^n p_i \log a_i - \sum_{i=1}^n p_i \log G.$$

With $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, the left side equals $\frac{A}{G} - 1$, while the right side is

$$\log \left(\prod_{i=1}^n a_i^{p_i} \right) - \log G = \log G - \log G = 0$$

We conclude $\frac{A}{G} - 1 \geq 0$, which is $A \geq G$. In the case of equality, all inequalities in (1) must be equalities, which implies $a_1 = \dots = a_n = G$.

- Still another Proof. There is another nice proof, due to Michael D. Hirschhorn. It uses Bernoulli's inequality, which says

$$(1+t)^{n+1} \geq 1 + (n+1)t \quad \text{for real } t \geq -1$$

Suppose $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} > 0$ and set

$$t = \frac{\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}} - 1.$$

By Bernoulli,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}} \right)^{n+1} &\geq 1 + (n+1) \left(\frac{\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}} - 1 \right) \\ &= 1 + n \frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{a_1 + \dots + a_n} - (n+1) \\ &= \frac{na_{n+1}}{a_1 + \dots + a_n}, \end{aligned}$$

which translates into

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} \geq a_{n+1} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n$$

and the arithmetic-geometric mean inequality follows by induction.

Our first application is a beautiful result of Laguerre (see [8]) concerning the location of roots of polynomials.

Theorem 1. Suppose all roots of the polynomial $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ are real. Then the roots are contained in the interval with the endpoints

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}.$$

- Proof. Let y be one of the roots and $y_1, \dots, y_{n-1}$ the others. Then the polynomial is $(x-y)(x-y_1)\dots(x-y_{n-1})$. Thus by comparing coefficients

$$\begin{aligned}
 -a_{n-1} &= y + y_1 + \cdots + y_{n-1}, \\
 a_{n-2} &= y(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + \sum_{i < j} y_i y_j,
 \end{aligned}$$

and so

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2.$$

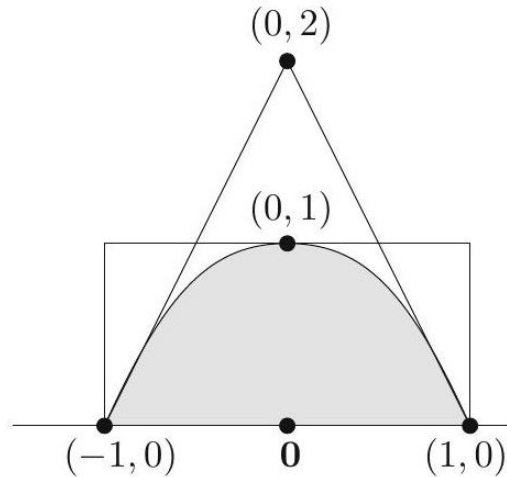
By Cauchy's inequality applied to $(y_1, \dots, y_{n-1})$ and $(1, \dots, 1)$,

$$\begin{aligned}
 (a_{n-1} + y)^2 &= (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})^2 \\
 &\leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \\
 &= (n-1) (a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2),
 \end{aligned}$$

or

$$y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2 \leq 0.$$

Thus y (and hence all y_i) lie between the two roots of the quadratic function, and these roots are our bounds.



For our second application we start from a well-known elementary property of a parabola. Consider the parabola described by $f(x) = 1 - x^2$ between $x = -1$ and $x = 1$. We associate to $f(x)$ the tangential triangle and the tangential rectangle as in the figure.

We find that the shaded area

$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$$

is equal to $\frac{4}{3}$, and the areas T and R of the triangle and rectangle are both equal to 2. Thus $\frac{T}{A} = \frac{3}{2}$ and $\frac{R}{A} = \frac{3}{2}$.

In a beautiful paper, Paul Erdős and Tibor Gallai asked what happens when $f(x)$ is an arbitrary n -th degree real polynomial with $f(x) > 0$ for $-1 < x < 1$, and $f(-1) = f(1) = 0$. The area A is then $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Suppose that $f(x)$ assumes in $(-1, 1)$ its maximum value at b , then $R = 2f(b)$. Computing the tangents at -1 and at 1 , it is readily seen (see the box below) that

$$T = \frac{2f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} \quad (2)$$

respectively $T = 0$ for $f'(1) = f'(-1) = 0$.

The tangential triangle

The area T of the tangential triangle is precisely y_0 , where (x_0, y_0) is the point of intersection of the two tangents. The equations of these tangents are $y = f'(-1)(x+1)$ and $y = f'(1)(x-1)$, hence

$$x_0 = \frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}$$

and thus

$$y_0 = f'(1) \left(\frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} - 1 \right) = 2 \frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}$$

In general, there are no nontrivial bounds for $\frac{T}{A}$ and $\frac{R}{A}$. To see this, take $f(x) = 1 - x^{2n}$. Then $T = 2n$, $A = \frac{4n}{2n+1}$, and thus $\frac{T}{A} > n$. Similarly, $R = 2$ and $\frac{R}{A} = \frac{2n+1}{2n}$, which approaches 1 with n to infinity.

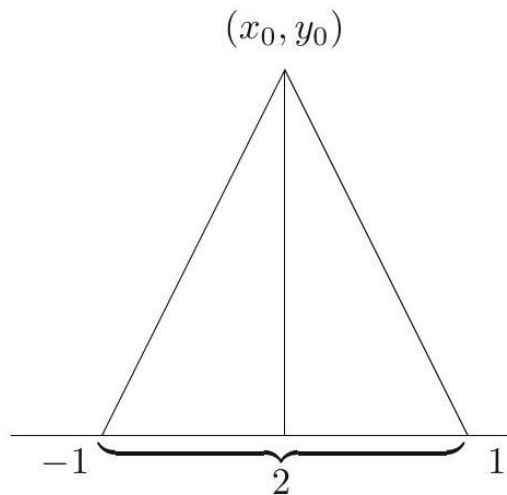
But, as Erdős and Gallai showed, for polynomials which have only real roots such bounds do indeed exist.

Theorem 2. Let $f(x)$ be a real polynomial of degree $n \geq 2$ with only real roots, such that $f(x) > 0$ for $-1 < x < 1$ and $f(-1) = f(1) = 0$. Then

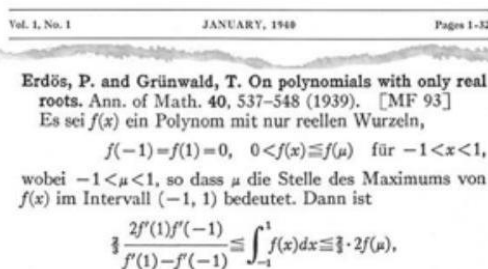
$$\frac{2}{3}T \leq A \leq \frac{2}{3}R$$

and equality holds in both cases only for $n = 2$.

Erdős and Gallai established this result with an intricate induction proof. In the review of their paper, which appeared on the first page of the first issue of the Mathematical Reviews in 1940, George Pólya explained how the first inequality can also be proved by the inequality of the arithmetic and geometric mean - a beautiful example of a conscientious review and a Book Proof at the same time.



Mathematical Reviews



- Proof of $\frac{2}{3}T \leq A$. Since $f(x)$ has only real roots, and none of them in the open interval $(-1, 1)$, it can be written - apart from a constant positive factor which cancels out in the end - in the form

$$f(x) = (1 - x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) \quad (3)$$

with $\alpha_i \geq 1, \beta_j \geq 1$. Hence

$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) dx$$

By making the substitution $x \mapsto -x$, we find that also

$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) dx$$

and hence by the inequality of the arithmetic and the geometric mean (note that all factors are ≥ 0)

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left[(1 - x^2) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) + \right. \\ &\quad \left. (1 - x^2) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) \right] dx \\ &\geq \int_{-1}^1 (1 - x^2) \left(\prod_i (\alpha_i^2 - x^2) \prod_j (\beta_j^2 - x^2) \right)^{1/2} dx \\ &\geq \int_{-1}^1 (1 - x^2) \left(\prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1) \right)^{1/2} dx \\ &= \frac{4}{3} \left(\prod_i (\alpha_i^2 - 1) \prod_j (\beta_j^2 - 1) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Let us compute $f'(1)$ and $f'(-1)$. (We may assume $f'(-1), f'(1) \neq 0$, since otherwise $T = 0$ and the inequality $\frac{2}{3}T \leq A$ becomes trivial.) By (3) we see

$$f'(1) = -2 \prod_i (\alpha_i - 1) \prod_j (\beta_j + 1),$$

and similarly

$$f'(-1) = 2 \prod_i (\alpha_i + 1) \prod_j (\beta_j - 1).$$

Hence we conclude

$$A \geq \frac{2}{3} (-f'(1)f'(-1))^{1/2}$$

Applying now the inequality of the harmonic and the geometric mean to $-f'(1)$ and $f'(-1)$, we arrive by (2) at the conclusion

$$A \geq \frac{2}{3} \frac{2}{\frac{1}{-f'(1)} + \frac{1}{f'(-1)}} = \frac{4}{3} \frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} = \frac{2}{3}T$$

which is what we wanted to show. By analyzing the case of equality in all our inequalities the reader can easily supply the last statement of the theorem.

The reader is invited to search for an equally inspired proof of the second inequality in Theorem 2.

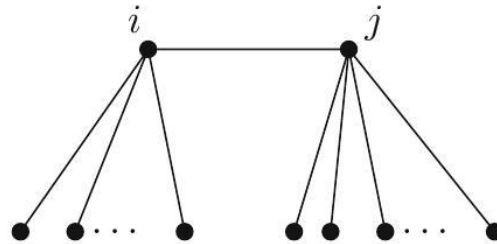
Well, analysis is inequalities after all, but here is an example from graph theory where the use of inequalities comes in quite unexpected. In Chapter 41 we will discuss Turán's theorem. In the simplest case it takes on the following form.

Theorem 3. Suppose G is a graph on n vertices without triangles. Then G has at most $\frac{n^2}{4}$ edges, and equality holds only when n is even and G is the complete bipartite graph $K_{n/2, n/2}$.

- **First proof.** This proof, using Cauchy's inequality, is due to Mantel. Let $V = \{1, \dots, n\}$ be the vertex set and E the edge set of G . By d_i we denote the degree of i , hence $\sum_{i \in V} d_i = 2|E|$ (see page 199 in the chapter on double counting). Suppose ij is an edge. Since G has no triangles, we find $d_i + d_j \leq n$ since no vertex is a neighbor of both i and j . It follows that

$$\sum_{ij \in E} (d_i + d_j) \leq n|E|.$$

Note that d_i appears exactly d_i times in the sum, so we get

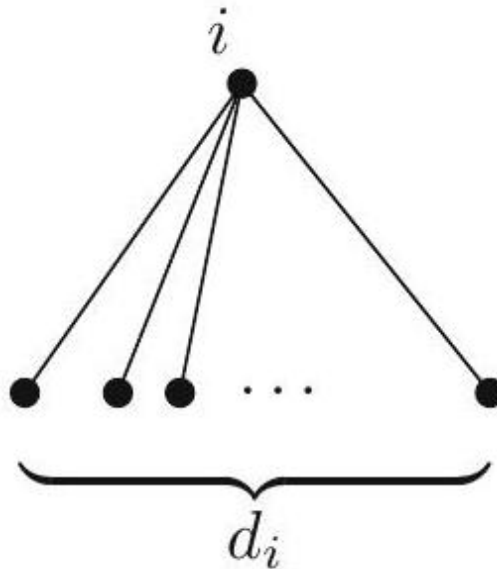


$$n|E| \geq \sum_{ij \in E} (d_i + d_j) = \sum_{i \in V} d_i^2$$

and hence with Cauchy's inequality applied to the vectors $(d_1, \dots, d_n)$ and $(1, \dots, 1)$,

$$n|E| \geq \sum_{i \in V} d_i^2 \geq \frac{(\sum d_i)^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n}$$

and the result follows. In the case of equality we find $d_i = d_j$ for all i, j , and further $d_i = \frac{n}{2}$ (since $d_i + d_j = n$). Since G is triangle-free, $G = K_{n/2, n/2}$ is immediately seen from this.



- Second proof. The following proof of Theorem 3, using the inequality of the arithmetic and the geometric mean, is a folklore Book Proof. Let α be the size of a largest independent set A , and set $\beta = n - \alpha$. Since G is triangle-free, the neighbors of a vertex i form an independent set, and we infer $d_i \leq \alpha$ for all i . The set $B = V \setminus A$ of size β meets every edge of G . Counting the edges of G according to their endvertices in B , we obtain $|E| \leq \sum_{i \in B} d_i$. The inequality of the arithmetic and geometric mean now yields

$$|E| \leq \sum_{i \in B} d_i \leq \alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

and again the case of equality is easily dealt with. $\square$

References

- [1] H. Alzer: A proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality, Amer. Math. Monthly 103 (1996), 585.
- [2] P. S. Bullen, D. S. Mitrinovic & P. M. Vasi: Means and their Inequalities, Reidel, Dordrecht 1988.
- [3] P. Erdős & T. Grünwald: On polynomials with only real roots, Annals Math. 40 (1939), 537-548.
- [4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood & G. Pólya: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge 1952.
- [5] M. D. Hirschhorn, The AM-GM inequality, Math. Intelligencer (4)29 (2007), 7.
- [6] W. Mantel: Problem 28, Wiskundige Opgaven 10 (1906), 60-61.
- [7] G. Pólya: Review of [3], Mathematical Reviews 1 (1940), 1.
- [8] G. Pólya & G. Szegő: Problems and Theorems in Analysis, Vol. I, SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York 1972/78; Reprint 1998.

22.3.3 The fundamental theorem of algebra

Every nonconstant polynomial with complex coefficients has at least one root in the field of complex numbers.

Gauss called this theorem, for which he gave four different proofs, the "fundamental theorem of algebraic equations." It is without doubt one of the milestones in the history of mathematics. As Reinhold Remmert writes in his pertinent survey: "It was the possibility of proving this theorem in the complex domain that, more than anything else, paved the way for a general recognition of complex numbers."

Some of the greatest names have contributed to the subject, from Gauss and Cauchy to Liouville and Laplace. An article of Netto and Le Vavasaur lists nearly a hundred proofs. The proof that we present is one of the most elegant and certainly the shortest. It follows an argument of d'Alembert and Argand and uses only some elementary properties of polynomials and complex numbers. We are indebted to France Dacar and to Tord Sjödin for a polished version of the proof. Essentially the same argument appears also in the papers of Fefferman [3] and Redheffer [5], and doubtlessly in some others.

We need three facts that one learns in a first-year calculus course.

(A) Polynomial functions are continuous.

(B) Any complex number of absolute value 1 has an m -th root for any $m \geq 1$.

(C) Cauchy's minimum principle: A continuous real-valued function f on a compact set S assumes a minimum in S .

Now let $p(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ be a complex polynomial of degree $n \geq 1$. As the first and decisive step we prove what is variously called d'Alembert's lemma or Argand's inequality.

Lemma. If $p(a) \neq 0$, then every disk D around a contains an interior point b with $|p(b)| < |p(a)|$.

- Proof. We first claim that without loss of generality we may assume that $a = 0$ and $p(a) = 1$. Indeed, if this is not the case, then we define another polynomial $q(z) := \frac{p(z+a)}{p(a)}$, which satisfies $q(0) = 1$. Now assume

It has been commented upon that the "Fundamental theorem of algebra" is not really fundamental, that it is not necessarily a theorem since sometimes it serves as a definition, and that in its classical form it is not a result from algebra, but rather from analysis.



Jean Le Rond d'Alembert

that every disk D of radius R around the origin contains a point b with $|q(b)| < 1$. Then the disk D_a of radius R around the point a contains the point $a + b$ such that $|p(a + b)| < |p(a)|$ as claimed.

We may thus assume that $p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n$, and letting $m \geq 1$ be the smallest index with $c_m \neq 0$ we may write $p(z)$ in the form

$$p(z) = 1 + c_m z^m + z^{m+1}(c_{m+1} + \cdots + c_n z^{n-m-1}) = 1 + c_m z^m + r(z).$$

In the first step we find $0 < \rho < 1$ such that

$$|r(z)| < |c_m z^m| < 1 \quad \text{for all } 0 < |z| \leq \rho \quad (1)$$

To get the first inequality we note that for $|z| < 1$

$$|r(z)| \leq |z|^{m+1}(|c_{m+1}| + \cdots + |c_n|) < |c_m| |z|^m = |c_m z^m|$$

provided that

$$0 < |z| < \frac{|c_m|}{|c_{m+1}| + \cdots + |c_n|} =: \rho_1.$$

The second inequality holds if $|z| < |c_m|^{-\frac{1}{m}} =: \rho_2$; hence we conclude that (1) is valid for every ρ with $0 < \rho < \min\{\rho_1, \rho_2, 1\}$.

We come to our second ingredient, m -th roots of unity. Fix a constant ρ as in (1) with $\rho < R$, where R is the radius of the disk D around $a = 0$. Let ζ be an m -th root of $\frac{\bar{c}_m}{|c_m|}$, where $\bar{c}_m$ is the complex conjugate of c_m , and set $b := \rho\zeta$. We claim that b is a desired point in D with $|p(b)| < 1$. First of all, b is in D since $|b| = \rho < R$, and further by $|c_m|^2 = c_m \bar{c}_m$ we have

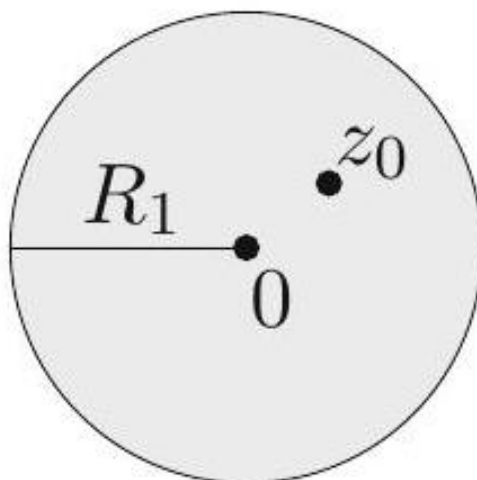
$$c_m b^m = -c_m \rho^m \frac{\bar{c}_m}{|c_m|} = -|c_m| \rho^m$$

Looking at (1) we have $|r(b)| < |c_m b^m| = |c_m| \rho^m < 1$, and hence

$$|p(b)| \leq |1 + c_m b^m| + |r(b)| = 1 - |c_m| \rho^m + |r(b)| < 1,$$

and we are done.

The rest is easy. Clearly, $p(z)z^{-n}$ approaches the leading coefficient c_n



of $p(z)$ as $|z|$ goes to infinity. Hence $|p(z)|$ goes to infinity as well with $|z| \rightarrow \infty$. Consequently, there exists $R_1 > 0$ such that $|p(z)| > |p(0)|$ for all points z on the circle $\{z : |z| = R_1\}$. Furthermore, our third fact (C) tells us that in the compact set $D_1 = \{z : |z| \leq R_1\}$ the continuous realvalued function $|p(z)|$ attains the minimum value at some point z_0 . Because of $|p(z)| > |p(0)|$ for z on the boundary of D_1 , z_0 must lie in the interior. But by d'Alembert's lemma this minimum value $|p(z_0)|$ must be 0 - and this is the whole proof.

References

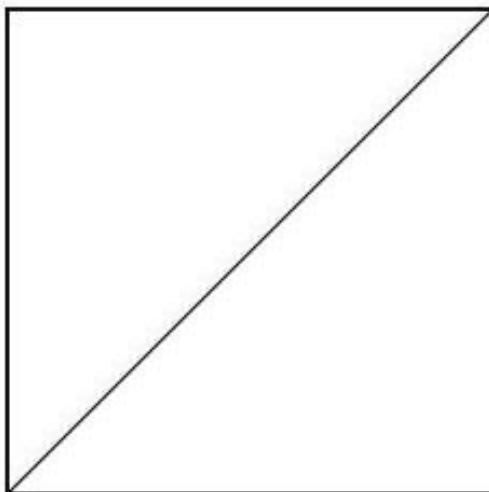
- [1] J. D'Alembert: Recherches sur le calcul intégral, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres (1746), 182-224.
- [2] R. Argand: Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse, Annales de Mathématiques 5 (1814), 197-209.
- [3] C. Fefferman: An easy proof of the fundamental theorem of algebra, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 854-855.
- [4] E. Netto & R. Le Vavas seur: Les fonctions rationnelles, Enc. Sciences Math. Pures Appl. I 2 (1907), 1-232.
- [5] R. M. Redheffer: What! Another note just on the fundamental theorem of algebra? Amer. Math. Monthly 71 (1964), 180-185.
- [6] R. Remmert: The fundamental theorem of algebra, Chapter 4 in: "Numbers" (H. D. Ebbinghaus et al., eds.), Graduate Texts in Mathematics 123, Springer, New York 1991.





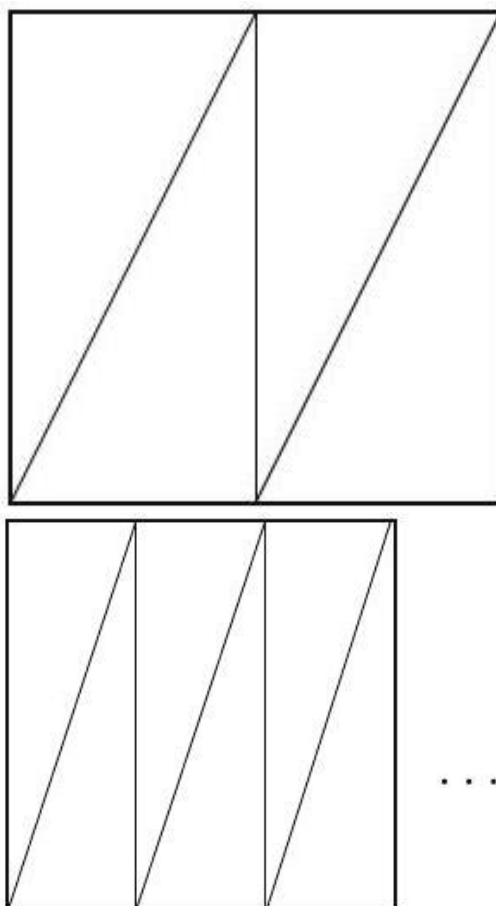
22.3.4 One square and an odd number of triangles

Suppose we want to dissect a square into n triangles of equal area. When n is even, this is easily accomplished. For example, you could divide the horizontal sides into $\frac{n}{2}$ segments of equal length and draw a diagonal in each of the $\frac{n}{2}$ rectangles:



⁰"What's up this time?"

"Well, I'm shlepping 100 proofs for the Fundamental Theorem of Algebra"



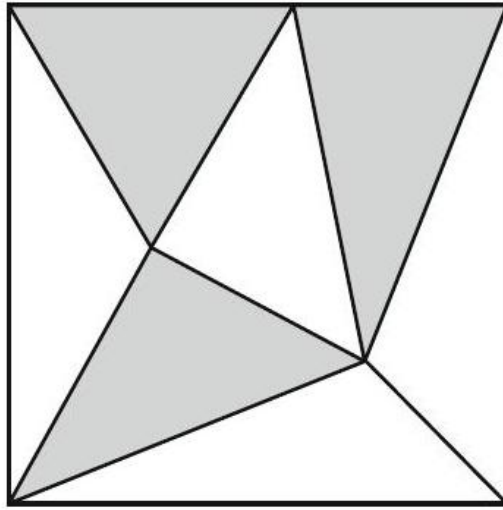
But now assume n is odd. Already for $n = 3$ this causes problems, and after some experimentation you will probably come to think that it might not be possible. So let us pose the general problem:

Is it possible to dissect a square into an odd number n of triangles of equal area?

Now, this looks like a classical question of Euclidean geometry, and one could have guessed that surely the answer must have been known for a long time (if not to the Greeks). But when Fred Richman and John Thomas popularized the problem in the 1960s they found to their surprise that no one knew the answer or a reference where this would be discussed.

Well, the answer is "no" not only for $n = 3$, but for any odd n . But how should one prove a result like this? By scaling we may, of course, restrict ourselves to the unit square with vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. Any argument must therefore somehow make use of the fact that the area of the triangles in a dissection is $\frac{1}{n}$, where n is odd. The following proof due to Paul Monsky, with initial work of John Thomas, is a stroke of genius and totally unexpected: It uses an algebraic tool, valuations, to construct a striking coloring of the plane, and combines this with some elegant and stunningly simple combinatorial reasonings. And what's more: at present no other proof is known!

Before we state the theorem let us prepare the ground by a quick study of valuations. Everybody is familiar with the absolute value function $|x|$ on the rationals $\mathbb{Q}$ (or the reals $\mathbb{R}$). It maps $\mathbb{Q}$ to the nonnegative reals such that for all x and y ,



There are dissections of squares into an odd number of triangles whose areas are nearly equal.

Example: $|\frac{3}{4}|_2 = 4$, $|\frac{6}{7}|_2 = |2|_2 = \frac{1}{2}$, and $|\frac{3}{4} + \frac{6}{7}|_2 = |\frac{45}{28}|_2 = |\frac{1}{4} \cdot \frac{45}{7}|_2 = 4 = \max\{|\frac{3}{4}|_2, |\frac{6}{7}|_2\}$.

(i) $|x| = 0$ if and only if $x = 0$,

(ii) $|xy| = |x||y|$, and

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (the triangle inequality).

The triangle inequality makes $\mathbb{R}$ into a metric space and gives rise to the familiar notions of convergence. It was a great discovery around 1900 that besides the absolute value there are other natural "value functions" on $\mathbb{Q}$ that satisfy the conditions (i) to (iii).

Let p be a prime number. Any rational number $r \neq 0$ can be written uniquely in the form

$$r = p^k \frac{a}{b}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

where a and $b > 0$ are relatively prime to p . Define the p -adic value

$$|r|_p := p^{-k}, \quad |0|_p = 0 \quad (2)$$

Conditions (i) and (ii) are obviously satisfied, and for (iii) we obtain the even stronger inequality

(iii') $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ (the non-Archimedean property).

Indeed, let $r = p^k \frac{a}{b}$ and $s = p^\ell \frac{c}{d}$, where we may assume that $k \geq \ell$, that is, $|r|_p = p^{-k} \leq p^{-\ell} = |s|_p$. Then we get

$$\begin{aligned} |r + s|_p &= \left| p^k \frac{a}{b} + p^\ell \frac{c}{d} \right|_p = \left| p^\ell \left(p^{k-\ell} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \right|_p \\ &= p^{-\ell} \left| \frac{p^{k-\ell} ad + bc}{bd} \right|_p \leq p^{-\ell} = \max\{|r|_p, |s|_p\} \end{aligned}$$

since the denominator bd is relatively prime to p . We also see from this that

(iv) $|x + y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$ whenever $|x|_p \neq |y|_p$,

but we will prove below that this property is quite generally implied by (iii'). Any function $v : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ on a field K that satisfies

(i) $v(x) = 0$ if and only if $x = 0$,

(ii) $v(xy) = v(x)v(y)$, and

(iii') $v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$ (non-Archimedean property)

for all $x, y \in K$ is called a non-Archimedean real valuation of K .

For every such valuation v we have $v(1) = v(1)v(1)$, hence $v(1) = 1$; and $1 = v(1) = v((-1)(-1)) = [v(-1)]^2$, so $v(-1) = 1$. Thus from (ii) we get $v(-x) = v(x)$ for all x and $v(x^{-1}) = v(x)^{-1}$ for $x \neq 0$.

Every field has the trivial valuation that maps every nonzero element onto 1, and if v is a real non-Archimedean valuation, then so is v^t for any positive real number t . So for $\mathbb{Q}$ we have

the p -adic valuations and their powers, and a famous theorem of Ostrowski states that any nontrivial real nonArchimedean valuation of $\mathbb{Q}$ is of this form.

As announced, let us verify that the important property

(iv) $v(x + y) = \max\{v(x), v(y)\}$ if $v(x) \neq v(y)$

holds for any non-Archimedean valuation. Indeed, suppose that we have $v(x) < v(y)$. Then

$$\begin{aligned} v(y) &= v((x + y) - x) \leq \max\{v(x + y), v(x)\} = v(x + y) \\ &\leq \max\{v(x), v(y)\} = v(y) \end{aligned}$$

where (iii') yields the inequalities, the first equality is clear, and the other two follow from $v(x) < v(y)$. Thus $v(x + y) = v(y) = \max\{v(x), v(y)\}$. Monsky's beautiful approach to the square dissection problem used an extension of the 2-adic valuation $|x|_2$ to a valuation v of $\mathbb{R}$, where "extension" means that we require $v(x) = |x|_2$ whenever x is in $\mathbb{Q}$. Such a nonArchimedean real extension exists, but this is not standard algebra fare. In the following, we present Monsky's argument in a version due to Hendrik Lenstra that requires much less; it only needs a valuation v that takes values in an arbitrary "ordered group", not necessarily in $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, <)$, such that $v(\frac{1}{2}) > 1$. The definition and the existence of such a valuation will be provided in the appendix to this chapter.

Here we just note that any valuation with $v(\frac{1}{2}) > 1$ satisfies $v(\frac{1}{n}) = 1$ for odd integers n . Indeed, $v(\frac{1}{2}) > 1$ means that $v(2) < 1$, and thus $v(2k) < 1$ by (iii') and induction on k . From this we get $v(2k + 1) = 1$ from (iv), and thus again $v(\frac{1}{2k+1}) = 1$ from (ii).

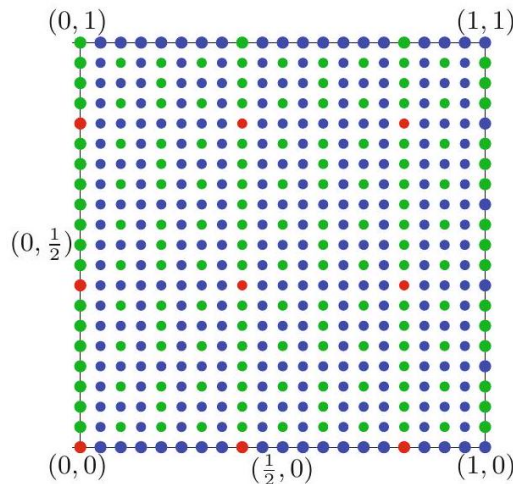
Monsky's Theorem. It is not possible to dissect a square into an odd number of triangles of equal area.

- **Proof.** In the following we construct a specific three-coloring of the plane with amazing properties. One of them is that the area of any triangle whose vertices have three different colors - which in the following is called a rainbow triangle - has a v -value larger than 1, so the area cannot be $\frac{1}{n}$ for odd n . And then we verify that any dissection of the unit square must contain such a rainbow triangle, and the proof will be complete.

The coloring of the points (x, y) of the real plane will be constructed by looking at the entries of the triple $(x, y, 1)$ that have the maximal value under the valuation v . This maximum may occur once or twice or even three times. The color (blue, or green, or red) will record the coordinate of $(x, y, 1)$ in which the maximal v -value occurs first:

$$(x, y) \text{ is colored } \begin{cases} \text{blue} & \text{if } v(x) \geq v(y), v(x) \geq v(1), \\ \text{green} & \text{if } v(x) < v(y), v(y) \geq v(1), \\ \text{red} & \text{if } v(x) < v(1), v(y) < v(1). \end{cases}$$

The property (iv) together with $v(-x) = v(x)$ also implies that $v(a \pm b_1 \pm b_2 \pm \cdots \pm b_\ell) = v(a)$ if $v(a) > v(b_i)$ for all i .



This assigns a unique color to each point in the plane. The figure in the margin shows the color for each point in the unit square whose coordinates are fractions of the form $\frac{k}{20}$. The following statement is the first step to the proof.

Lemma 1. For any blue point $p_b = (x_b, y_b)$, green point $p_g = (x_g, y_g)$, and red point $p_r = (x_r, y_r)$, the v -value of the determinant

$$\det \begin{pmatrix} x_b & y_b & 1 \\ x_g & y_g & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{pmatrix}$$

is at least 1 .

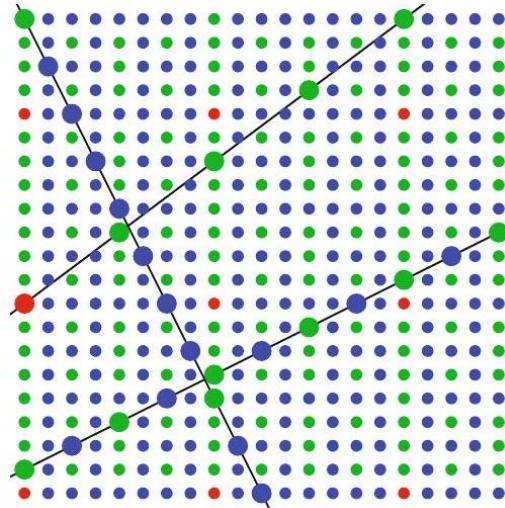
- Proof. The determinant is a sum of six terms. One of them is the product of the entries of the main diagonal, $x_b y_g 1$. By construction of the coloring each of the diagonal entries compared to the other entries in the row has a maximal v -value, so comparing with the last entry in each row (which is 1) we get

$$v(x_b y_g 1) = v(x_b) v(y_g) v(1) \geq v(1) v(1) v(1) = 1$$

Any of the other five summands of the determinant is a product of three matrix entries, one from each row (with a sign that as we know is irrelevant for the v -value). It picks at least one matrix entry below the main diagonal, whose v -value is strictly smaller than that of the diagonal entry in the same row, and at least one matrix entry above the main diagonal, whose v -value is not larger than that of the diagonal entry in the same row. Thus all of the five other summands of the determinant have a v -value that is strictly smaller than the summand corresponding to the main diagonal. Thus by property (iv) of non-Archimedean valuations, we find that the v -value of the determinant is given by the summand corresponding to the main diagonal,

$$v \left(\det \begin{pmatrix} x_b & y_b & 1 \\ x_g & y_g & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{pmatrix} \right) = v(x_b y_g 1) \geq 1$$

Corollary. Any line of the plane receives at most two different colors. The area of a rainbow triangle cannot be 0 , and it cannot be $\frac{1}{n}$ for odd n .



- Proof. The area of the triangle with vertices at a blue point p_b , a green point p_g , and a red point p_r is the absolute value of

$$\frac{1}{2} ((x_b - x_r)(y_g - y_r) - (x_g - x_r)(y_b - y_r)),$$

which up to the sign is half the determinant of Lemma 1 .

The three points cannot lie on a line since the determinant cannot be 0 , as $v(0) = 0$. The area of the triangle cannot be $\frac{1}{n}$, since in this case we would get $\pm \frac{2}{n}$ for the determinant, thus

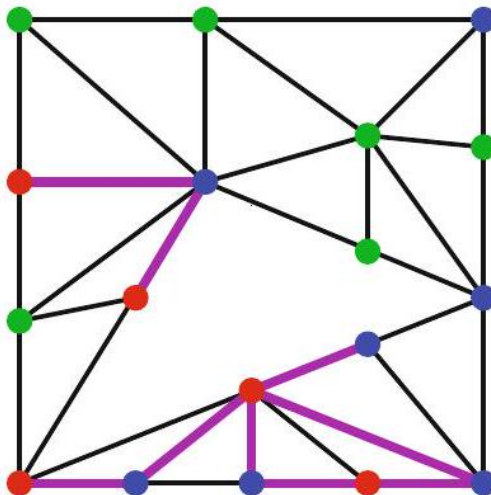
$$v \left(\pm \frac{2}{n} \right) = v \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} v \left(\frac{1}{n} \right) < 1$$

because of $v\left(\frac{1}{2}\right) > 1$ and $v\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, contradicting Lemma 1. $\square$

And why did we construct this coloring? Because we are now going to show that in any dissection of the unit square $S = [0, 1]^2$ into triangles (equal-sized or not!) there must always be a rainbow triangle, which according to the corollary cannot have area $\frac{1}{n}$ for odd n . Thus the following lemma will complete the proof of Monsky's theorem.

Lemma 2. Every dissection of the unit square $S = [0, 1]^2$ into finitely many triangles contains an odd number of rainbow triangles, and thus at least one.

- Proof. The following counting argument is truly inspired. The idea is due to Emanuel Sperner, and will reappear with "Sperner's Lemma" in Chapter 28.



Consider the segments between neighboring vertices in a given dissection. A segment is called a red-blue segment if one endpoint is red and the other is blue. For the example in the figure, the red-blue segments are drawn in purple.

We make two observations, repeatedly using the fact from the corollary that on any line there can be points of at most two colors.

(A) The bottom line of the square contains an odd number of red-blue segments, since $(0, 0)$ is red and $(1, 0)$ is blue, and all vertices in between are red or blue. So on the walk from the red end to the blue end of the bottom line, there must be an odd number of changes between red and blue. The other boundary lines of the square contain no red-blue segments.

(B) If a triangle T has at most two colors at its vertices, then it contains an even number of red-blue segments on its boundary. However, every rainbow triangle has an odd number of red-blue segments on its boundary.

Indeed, there is an odd number of red-blue segments between a red vertex and a blue vertex of a triangle, but an even number (if any) between any vertices with a different color combination. Thus a rainbow triangle has an odd number of red-blue segments in its boundary, while any other triangle has an even number (two or zero) of vertex pairs with the color combination red and blue.

Now let us count the boundary red-blue segments summed over all triangles in the dissection. Since every red-blue segment in the interior of the square is counted twice, and there is an odd number on the boundary of S , this count is odd. Hence we conclude from (B) that there must be an odd number of rainbow triangles.

Appendix: Extending valuations

It is not at all obvious that an extension of a non-Archimedean real valuation from one field to a larger one is always possible. But it can be done, not only from $\mathbb{Q}$ to $\mathbb{R}$, but generally from any field K to a field L that contains K . (This is known as "Chevalley's theorem"; see for example the book by Jacobson [1].)

In the following, we establish much less - but enough for our application to odd dissections. Indeed, in our proof for Monsky's theorem we have not used the addition for values of $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$; we have used only the multiplication and the order on $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Hence for our argument it is sufficient if the nonzero values of v lie in a (multiplicatively written) ordered abelian group $(G, \cdot, <)$. That is, the elements of G are linearly ordered, and $a < b$ in G implies $ac < bc$ for

any $a, b, c \in G$. As we assume that the group is written multiplicatively, the neutral element of G is denoted by 1. For the definition of a valuation, we adjoin a special element 0 with the understanding that $0 \notin G$, $0a = 0$, and $0 < a$ hold for all $a \in G$. Of course, the prime example of an ordered abelian group is $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, <)$ with the usual linear order, and the prime example for $\{0\} \cup G$ is $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$.

Definition. Let K be a field. A non-Archimedean valuation v with values in an ordered abelian group G is a map $v : K \rightarrow \{0\} \cup G$ with

- (i) $v(x) = 0 \iff x = 0$,
 - (ii) $v(xy) = v(x)v(y)$,
 - (iii') $v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$, and
 - (iv) $v(x + y) = \max\{v(x), v(y)\}$ whenever $v(x) \neq v(y)$
- for all $x, y \in K$.

The fourth condition in this description is again implied by the first three. And among the simple consequences we record that if $v(x) < 1$, $x \neq 0$, then $v(x^{-1}) = v(x)^{-1} > 1$.

So here is what we will establish:

Theorem. The field of real numbers $\mathbb{R}$ has a non-Archimedean valuation to an ordered abelian group

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \{0\} \cup G$$

such that $v(\frac{1}{2}) > 1$.

- **Proof.** We first relate any valuation on a field to a subring of the field. (All the subrings that we consider contain 1.) Suppose $v : K \rightarrow \{0\} \cup G$ is a valuation; let

$$R := \{x \in K : v(x) \leq 1\}, \quad U := \{x \in K : v(x) = 1\}.$$

It is immediate that R is a subring of K , called the valuation ring corresponding to v . Furthermore, $v(xx^{-1}) = v(1) = 1$ implies that $v(x) = 1$

if and only if $v(x^{-1}) = 1$. Thus U is the set of units (invertible elements) of R . In particular, U is a subgroup of $K^\times$, where we write $K^\times := K \setminus \{0\}$ for the multiplicative group of K . Finally, with $R^{-1} := \{x^{-1} : x \neq 0\}$ we have $K = R \cup R^{-1}$. Indeed, if $x \notin R$ then $v(x) > 1$ and therefore $v(x^{-1}) < 1$, thus $x^{-1} \in R$. The property $K = R \cup R^{-1}$ already characterizes all possible valuation rings in a given field.

Lemma. A proper subring $R \subseteq K$ is a valuation ring with respect to some valuation v into some ordered group G if and only if $K = R \cup R^{-1}$.

- **Proof.** We have seen one direction. Suppose now $K = R \cup R^{-1}$. How should we construct the group G ? If $v : K \rightarrow \{0\} \cup G$ is a valuation corresponding to R , then $v(x) < v(y)$ holds if and only if $v(xy^{-1}) < 1$, that is, if and only if $xy^{-1} \in R \setminus U$. Also, $v(x) = v(y)$ if and only if $xy^{-1} \in U$, or $xU = yU$ as cosets in the factor group $K^\times/U$. Hence the natural way to proceed goes as follows. Take the quotient group $G := K^\times/U$, and define an order relation on G by setting

$$xU < yU \iff xy^{-1} \in R \setminus U.$$

It is a nice exercise to check that this indeed makes G into an ordered group. The map $v : K \rightarrow \{0\} \cup G$ is then defined in the most natural way:

$$v(0) := 0, \quad \text{and} \quad v(x) := xU \text{ for } x \neq 0.$$

It is easy to verify conditions (i) to (iii') for v , and that R is the valuation ring corresponding to v .

In order to establish the theorem, it thus suffices to find a valuation ring $B \subseteq \mathbb{R}$ such that $\frac{1}{2} \notin B$.

Claim. Any inclusion-maximal subring $B \subseteq \mathbb{R}$ with the property $\frac{1}{2} \notin B$ is a valuation ring.

First we should perhaps note that a maximal subring $B \subseteq \mathbb{R}$ with the property $\frac{1}{2} \notin B$ exists. This is not quite trivial - but it does follow with a routine application of Zorn's lemma, which is reviewed in the box. Indeed, if we have an ascending chain of subrings $B_i \subseteq \mathbb{R}$ that don't contain $\frac{1}{2}$, then this chain has an upper bound, given by the union of all the subrings B_i , which again is a subring and does not contain $\frac{1}{2}$.

Zorn's Lemma

The Lemma of Zorn is of fundamental importance in algebra and other parts of mathematics when one wants to construct maximal structures. It also plays a decisive role in the logical foundations of mathematics.

Lemma. Suppose $P_{\leq}$ is a nonempty partially ordered set with the property that every ascending chain $(a_i)_{\leq}$ has an upper bound b , such that $a_i \leq b$ for all i . Then $P_{\leq}$ contains a maximal element M , meaning that there is no $c \in P$ with $M < c$.

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ is such a subring with $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, but it is not maximal.

To prove the Claim, let us assume that $B \subseteq \mathbb{R}$ is a maximal subring not containing $\frac{1}{2}$. If B is not a valuation ring, then there is some element $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (B \cup B^{-1})$. We denote by $B[\alpha]$ the subring generated by $B \cup \alpha$, that is, the set of all real numbers that can be written as polynomials in α with coefficients in B . Let $2B \subseteq B$ be the subset of all elements of the form $2b$, for $b \in B$. Now $2B$ is a subset of B , so we have $2B[\alpha] \subseteq B[\alpha]$ and $2B[\alpha^{-1}] \subseteq B[\alpha^{-1}]$. If we had $2B[\alpha] \neq B[\alpha]$ or $2B[\alpha^{-1}] \neq B[\alpha^{-1}]$, then due to $1 \in B$ this would imply that $\frac{1}{2} \notin B[\alpha]$ resp. $\frac{1}{2} \notin B[\alpha^{-1}]$, contradicting the maximality of $B \subseteq \mathbb{R}$ as a subring that does not contain $\frac{1}{2}$. Thus we get that $2B[\alpha] = B[\alpha]$ and $2B[\alpha^{-1}] = B[\alpha^{-1}]$. This implies that $1 \in B$ can be written in the form

$$1 = 2u_0 + 2u_1\alpha + \cdots + 2u_m\alpha^m \quad \text{with } u_i \in B, \quad (1)$$

and similarly as

$$1 = 2v_0 + 2v_1\alpha^{-1} + \cdots + 2v_n\alpha^{-n} \quad \text{with } v_i \in B, \quad (2)$$

which after multiplication by α^n and subtraction of $2v_0\alpha^n$ from both sides yields

$$(1 - 2v_0)\alpha^n = 2v_1\alpha^{n-1} + \cdots + 2v_{n-1}\alpha + 2v_n \quad (3)$$

Let us assume that these representations are chosen such that m and n are as small as possible. We may also assume that $m \geq n$, otherwise we exchange α with α^{-1} , and (1) with (2).

Now multiply (1) by $1 - 2v_0$ and add $2v_0$ on both sides of the equation, to get

$$1 = 2(u_0(1 - 2v_0) + v_0) + 2u_1(1 - 2v_0)\alpha + \cdots + 2u_m(1 - 2v_0)\alpha^m.$$

But if in this equation we substitute for the term $(1 - 2v_0)\alpha^m$ the expression given by equation (3) multiplied by α^{m-n} , then this results in an equation that expresses $1 \in B$ as a polynomial in $2B[\alpha]$ of degree at most $m - 1$. This contradiction to the minimality of m establishes the Claim.

References

- [1] N. Jacobson: Lectures in Abstract Algebra, Part III: Theory of Fields and Galois Theory, Graduate Texts in Mathematics 32, Springer, New York 1975.
- [2] P. Monsky: On dividing a square into triangles, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 161-164.
- [3] F. Richman & J. Thomas: Problem 5471, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 329.
- [4] S. K. Stein & S. Szabó : Algebra and Tiling: Homomorphisms in the Service of Geometry, Carus Math. Monographs 25, MAA, Washington DC 1994.
- [5] J. Thomas: A dissection problem, Math. Magazine 41 (1968), 187-190.

22.3.5 A theorem of Pólya on polynomials

Among the many contributions of George Pólya to analysis, the following has always been Erdős' favorite, both for the surprising result and for the beauty of its proof. Suppose that

$$f(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0$$

is a complex polynomial of degree $n \geq 1$ with leading coefficient 1. Associate with $f(z)$ the set

$$\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq 2\}$$

that is, $\mathcal{C}$ is the set of points which are mapped under f into the circle of radius 2 around the origin in the complex plane. So for $n = 1$ the domain $\mathcal{C}$ is just a circular disk of diameter 4.

By an astoundingly simple argument, Pólya revealed the following beautiful property of this set $\mathcal{C}$:

Take any line L in the complex plane and consider the orthogonal projection $\mathcal{C}_L$ of the set $\mathcal{C}$ onto L . Then the total length of any such projection never exceeds 4 .

What do we mean by the total length of the projection $\mathcal{C}_L$ being at most 4 ? We will see that $\mathcal{C}_L$ is a finite union of disjoint intervals $I_1, \dots, I_t$, and the condition means that $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq 4$, where $\ell(I_j)$ is the usual length of an interval.

By rotating the plane we see that it suffices to consider the case when L is the real axis of the complex plane. With these comments in mind, let us state Pólya's result.

Theorem 1. Let $f(z)$ be a complex polynomial of degree at least 1 and leading coefficient 1. Set $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq 2\}$ and let $\mathcal{R}$ be the orthogonal projection of $\mathcal{C}$ onto the real axis. Then there are intervals $I_1, \dots, I_t$ on the real line which together cover $\mathcal{R}$ and satisfy

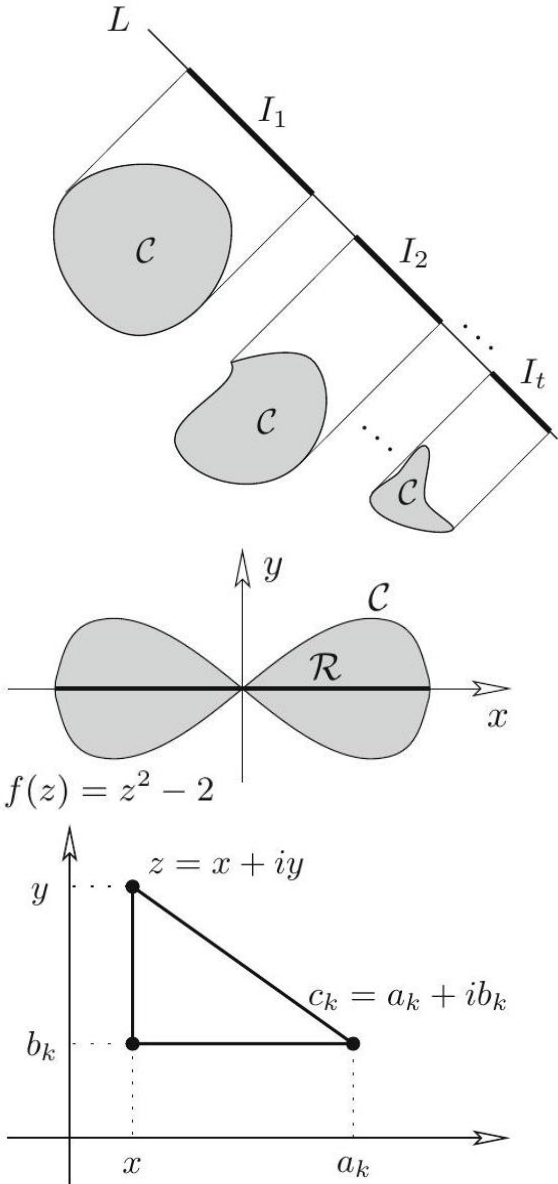
$$\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq 4$$

Clearly the bound of 4 in the theorem is attained for $n = 1$. To get more of a feeling for the problem let us look at the polynomial $f(z) = z^2 - 2$, which also attains the bound of 4 . If $z = x + iy$ is a complex number, then x is its orthogonal projection onto the real line. Hence

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : x + iy \in \mathcal{C} \text{ for some } y\}.$$



George Pólya





Pavnuty Chebyshev on a Soviet stamp from 1946

The reader can easily prove that for $f(z) = z^2 - 2$ we have $x + iy \in \mathcal{C}$ if and only if

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2).$$

It follows that $x^4 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq 4x^2$, and thus $x^2 \leq 4$, that is, $|x| \leq 2$. On the other hand, any $z = x \in \mathbb{R}$ with $|x| \leq 2$ satisfies $|z^2 - 2| \leq 2$, and we find that $\mathcal{R}$ is precisely the interval $[-2, 2]$ of length 4.

As a first step towards the proof write $f(z) = (z - c_1) \cdots (z - c_n)$ with $c_k = a_k + ib_k$, and consider the real polynomial $p(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Let $z = x + iy \in \mathcal{C}$, then by the theorem of Pythagoras

$$|x - a_k|^2 + |y - b_k|^2 = |z - c_k|^2$$

and hence $|x - a_k| \leq |z - c_k|$ for all k , that is,

$$|p(x)| = |x - a_1| \cdots |x - a_n| \leq |z - c_1| \cdots |z - c_n| = |f(z)| \leq 2.$$

Thus we find that $\mathcal{R}$ is contained in the set $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\}$, and if we can show that this latter set is covered by intervals of total length at most 4, then we are done. Accordingly, our main Theorem 1 will be a consequence of the following result.

Theorem 2. Let $p(x)$ be a real polynomial of degree $n \geq 1$ with leading coefficient 1, and all roots real. Then the set $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\}$ can be covered by intervals of total length at most 4.

As Pólya shows in his paper [2], Theorem 2 is, in turn, a consequence of the following famous result due to Chebyshev. To make this chapter self-contained, we have included a proof in the appendix (following the beautiful exposition by Pólya and Szegő).

Chebyshev's Theorem.

Let $p(x)$ be a real polynomial of degree $n \geq 1$ with leading coefficient 1. Then

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Let us first note the following immediate consequence.

Corollary. Let $p(x)$ be a real polynomial of degree $n \geq 1$ with leading coefficient 1, and suppose that $|p(x)| \leq 2$ for all x in the interval $[a, b]$. Then $b - a \leq 4$.

- Proof. Consider the substitution $y = \frac{2}{b-a}(x-a) - 1$. This maps the x -interval $[a, b]$ onto the y -interval $[-1, 1]$. The corresponding polynomial

$$q(y) = p\left(\frac{b-a}{2}(y+1) + a\right)$$

has leading coefficient $\left(\frac{b-a}{2}\right)^n$ and satisfies

$$\max_{-1 \leq y \leq 1} |q(y)| = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|.$$

By Chebyshev's theorem we deduce

$$2 \geq \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^n$$

and thus $b - a \leq 4$, as desired.

This corollary brings us already very close to the statement of Theorem 2. If the set $\mathcal{P} = \{x : |p(x)| \leq 2\}$ is an interval, then the length of $\mathcal{P}$ is at most 4. The set $\mathcal{P}$ may, however, not be an interval, as in the example depicted here, where $\mathcal{P}$ consists of two intervals.

What can we say about $\mathcal{P}$? Since $p(x)$ is a continuous function, we know at any rate that $\mathcal{P}$ is the union of disjoint closed intervals $I_1, I_2, \dots$, and that $p(x)$ assumes the value 2 or -2 at each endpoint of an interval I_j . This implies that there are only finitely many intervals $I_1, \dots, I_t$, since $p(x)$ can assume any value only finitely often.

Pólyas wonderful idea was to construct another polynomial $\tilde{p}(x)$ of degree n , again with leading coefficient 1, such that $\tilde{\mathcal{P}} = \{x : |\tilde{p}(x)| \leq 2\}$ is an interval of length at least $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t)$. The corollary then proves $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq \ell(\tilde{\mathcal{P}}) \leq 4$, and we are done.

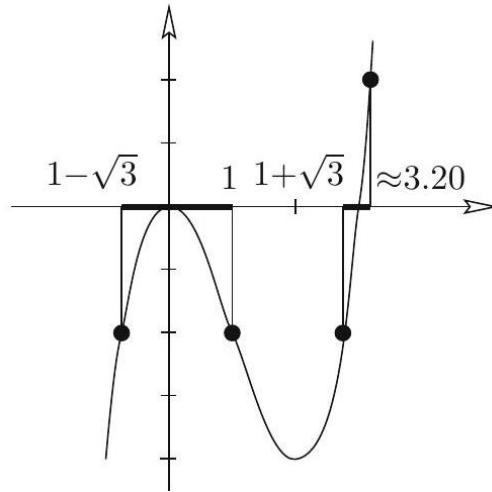
- Proof of Theorem 2. Consider $p(x) = (x-a_1) \cdots (x-a_n)$ with $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\} = I_1 \cup \dots \cup I_t$, where we arrange the intervals I_j such that I_1 is the leftmost and I_t the rightmost interval. First we claim that any interval I_j contains a root of $p(x)$. We know that $p(x)$ assumes the values 2 or -2 at the endpoints of I_j . If one value is 2 and the other -2, then there is certainly a root in I_j . So assume $p(x) = 2$ at both endpoints (the case -2 being analogous). Suppose $b \in I_j$ is a point where $p(x)$ assumes its minimum in I_j . Then $p'(b) = 0$ and $p''(b) \geq 0$. If $p''(b) = 0$, then b is a multiple root of $p'(x)$, and hence a root of $p(x)$ by Fact 1 from the box on the next page. If, on the other hand, $p''(b) > 0$, then we deduce $p(b) < 0$ from Fact 2 from the same box. Hence either $p(b) = 0$, and we have our root, or $p(b) < 0$, and we obtain a root in the interval from b to either endpoint of I_j .

Here is the final idea of the proof. Let $I_1, \dots, I_t$ be the intervals as before, and suppose the rightmost interval I_t contains m roots of $p(x)$, counted with their multiplicities. If $m = n$, then I_t is the only interval (by what we just proved), and we are finished. So assume $m < n$, and let d be the distance between I_{t-1} and I_t as in the figure. Let $b_1, \dots, b_m$ be the roots of $p(x)$ which lie in I_t and $c_1, \dots, c_{n-m}$ the remaining roots. We now write $p(x) = q(x)r(x)$ where $q(x) = (x-b_1) \cdots (x-b_m)$ and $r(x) = (x-c_1) \cdots (x-c_{n-m})$, and set $p_1(x) = q(x+d)r(x)$. The polynomial $p_1(x)$ is again of degree n with leading coefficient 1. For $x \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1}$ we have $|x+d-b_i| < |x-b_i|$ for all i , and hence $|q(x+d)| < |q(x)|$. It follows that

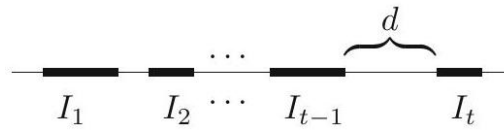
$$|p_1(x)| \leq |p(x)| \leq 2 \quad \text{for } x \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1}$$

If, on the other hand, $x \in I_t$, then we find $|r(x-d)| \leq |r(x)|$ and thus

$$|p_1(x-d)| = |q(x)| |r(x-d)| \leq |p(x)| \leq 2,$$



For the polynomial $p(x) = x^2(x - 3)$ we get $\mathcal{P} = [1 - \sqrt{3}, 1] \cup [1 + \sqrt{3}, \approx 3.2]$



which means that $I_t - d \subseteq \mathcal{P}_1 = \{x : |p_1(x)| \leq 2\}$.

In summary, we see that $\mathcal{P}_1$ contains $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup (I_t - d)$ and hence has total length at least as large as $\mathcal{P}$. Notice now that with the passage from $p(x)$ to $p_1(x)$ the intervals I_{t-1} and $I_t - d$ merge into a single interval. We conclude that the intervals $J_1, \dots, J_s$ of $p_1(x)$ making up $\mathcal{P}_1$ have total length at least $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t)$, and that the rightmost interval J_s contains more than m roots of $p_1(x)$. Repeating this procedure at most $t - 1$ times, we finally arrive at a polynomial $\tilde{p}(x)$ with $\tilde{\mathcal{P}} = \{x : |\tilde{p}(x)| \leq 2\}$ being an interval of length $\ell(\tilde{\mathcal{P}}) \geq \ell(I_1) + \dots + \ell(I_t)$, and the proof is complete.

Two facts about polynomials with real roots

Let $p(x)$ be a nonconstant polynomial with only real roots.

Fact 1. If b is a multiple root of $p'(x)$, then b is also a root of $p(x)$.

- Proof. Let $b_1 < \dots < b_r$ be the roots of $p(x)$ with multiplicities $s_1, \dots, s_r$, $\sum_{j=1}^r s_j = n$. From $p(x) = (x - b_j)^{s_j} h(x)$ we infer that b_j is a root of $p'(x)$ if $s_j \geq 2$, and the multiplicity of b_j in $p'(x)$ is $s_j - 1$. Furthermore, there is a root of $p'(x)$ between b_1 and b_2 , another root between b_2 and b_3 , ..., and one between b_{r-1} and b_r , and all these roots must be single roots, since $\sum_{j=1}^r (s_j - 1) + (r - 1)$ counts already up to the degree $n - 1$ of $p'(x)$. Consequently, the multiple roots of $p'(x)$ can only occur among the roots of $p(x)$.

Fact 2. We have $p'(x)^2 \geq p(x)p''(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

- Proof. If $x = a_i$ is a root of $p(x)$, then there is nothing to show. Assume then x is not a root. The product rule of differentiation yields

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{p(x)}{x - a_k}, \quad \text{that is,} \quad \frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - a_k}.$$

Differentiating this again we have

$$\frac{p''(x)p(x) - p'(x)^2}{p(x)^2} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - a_k)^2} < 0.$$

Appendix: Chebyshev's theorem

Theorem. Let $p(x)$ be a real polynomial of degree $n \geq 1$ with leading coefficient 1. Then

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Before we start, let us look at some examples where we have equality. The margin depicts the graphs of polynomials of degrees 1, 2 and 3, where we have equality in each case. Indeed, we will see that for every degree there is precisely one polynomial with equality in Chebyshev's theorem.

- Proof. Consider a real polynomial $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ with leading coefficient 1. Since we are interested in the range $-1 \leq x \leq 1$, we set $x = \cos \vartheta$ and denote by $g(\vartheta) := p(\cos \vartheta)$ the resulting polynomial in $\cos \vartheta$,

$$g(\vartheta) = (\cos \vartheta)^n + a_{n-1}(\cos \vartheta)^{n-1} + \cdots + a_0. \quad (1)$$

The proof proceeds now in the following two steps which are both classical results and interesting in their own right.

(A) We express $g(\vartheta)$ as a so-called cosine polynomial, that is, a polynomial of the form

$$g(\vartheta) = b_n \cos n\vartheta + b_{n-1} \cos(n-1)\vartheta + \cdots + b_1 \cos \vartheta + b_0 \quad (2)$$

with $b_k \in \mathbb{R}$, and show that its leading coefficient is $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

(B) Given any cosine polynomial $h(\vartheta)$ of order n (meaning that λ_n is the highest nonvanishing coefficient)

$$h(\vartheta) = \lambda_n \cos n\vartheta + \lambda_{n-1} \cos(n-1)\vartheta + \cdots + \lambda_0, \quad (3)$$

we show $|\lambda_n| \leq \max |h(\vartheta)|$, which when applied to $g(\vartheta)$ will then prove the theorem.

Proof of (A). To pass from (1) to the representation (2), we have to express all powers $(\cos \vartheta)^k$ as cosine polynomials. For example, the addition theorem for the cosine gives

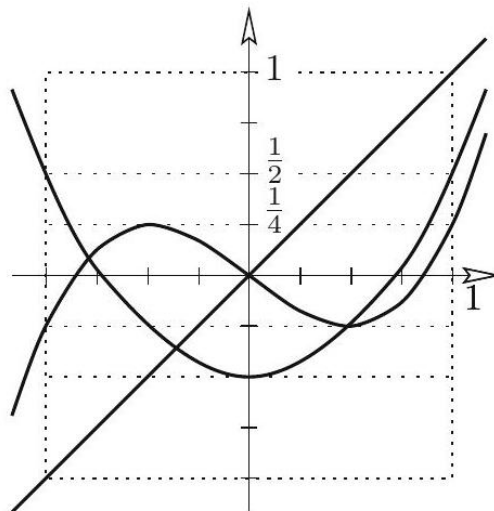
$$\cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = 2 \cos^2 \vartheta - 1$$

so that $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2} \cos 2\vartheta + \frac{1}{2}$. To do this for an arbitrary power $(\cos \vartheta)^k$ we go into the complex numbers, via the relation $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. The e^{ix} are the complex numbers of absolute value 1 (see the box on complex unit roots on page 37). In particular, this yields

$$e^{in\vartheta} = \cos n\vartheta + i \sin n\vartheta \quad (4)$$

On the other hand,

$$e^{in\vartheta} = (e^{i\vartheta})^n = (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n. \quad (5)$$



The polynomials $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ and $p_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$ achieve equality in Chebyshev's theorem.

$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$ holds for $n > 0$: Every subset of $\{1, 2, \dots, n-1\}$ yields an even sized subset of $\{1, 2, \dots, n\}$ if we add the element n "if needed."

Equating the real parts in (4) and (5) we obtain by $i^{4\ell+2} = -1$, $i^{4\ell} = 1$ and $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$\begin{aligned} \cos n\vartheta &= \sum_{\ell \geq 0} \binom{n}{4\ell} (\cos \vartheta)^{n-4\ell} (1 - \cos^2 \vartheta)^{2\ell} \\ &\quad - \sum_{\ell \geq 0} \binom{n}{4\ell+2} (\cos \vartheta)^{n-4\ell-2} (1 - \cos^2 \vartheta)^{2\ell+1} \end{aligned} \quad (6)$$

We conclude that $\cos n\vartheta$ is a polynomial in $\cos \vartheta$,

$$\cos n\vartheta = c_n (\cos \vartheta)^n + c_{n-1} (\cos \vartheta)^{n-1} + \dots + c_0. \quad (7)$$

From (6) we obtain for the highest coefficient

$$c_n = \sum_{\ell \geq 0} \binom{n}{4\ell} + \sum_{\ell \geq 0} \binom{n}{4\ell+2} = 2^{n-1}.$$

Now we turn our argument around. Assuming by induction that for $k < n$, $(\cos \vartheta)^k$ can be expressed as a cosine polynomial of order k , we infer from (7) that $(\cos \vartheta)^n$ can be written as a cosine polynomial of order n with leading coefficient $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Proof of (B). Let $h(\vartheta)$ be a cosine polynomial of order n as in (3), and assume without loss of generality $\lambda_n > 0$. Now we set $m(\vartheta) := \lambda_n \cos n\vartheta$ and find

$$m\left(\frac{k}{n}\pi\right) = (-1)^k \lambda_n \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, n$$

Suppose, for a proof by contradiction, that $\max |h(\vartheta)| < \lambda_n$. Then

$$m\left(\frac{k}{n}\pi\right) - h\left(\frac{k}{n}\pi\right) = (-1)^k \lambda_n - h\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$

is positive for even k and negative for odd k in the range $0 \leq k \leq n$. We conclude that $m(\vartheta) - h(\vartheta)$ has at least n roots in the interval $[0, \pi]$. But this cannot be since $m(\vartheta) - h(\vartheta)$ is a cosine polynomial of order $n-1$, and thus has at most $n-1$ roots.

The proof of (B) and thus of Chebyshev's theorem is complete.

The energetic reader is now invited to complete the analysis, showing that $g_n(\vartheta) := \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\vartheta$ is the only cosine polynomial of order n with leading coefficient 1 that achieves the equality $\max |g(\vartheta)| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

The polynomials $T_n(x) = \cos n\vartheta$, $x = \cos \vartheta$, are called the Chebyshev polynomials (of the first kind); thus $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ is the unique monic polynomial of degree n where equality holds in Chebyshev's theorem.

References

- [1] P. L. Chebyshev: Euvres, Vol. I, Acad. Imperiale des Sciences, St. Petersburg 1899, pp. 387-469.
- [2] G. Pólya: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängenden Gebieten, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1928), 228-232; Collected Papers Vol. I, MIT Press 1974, 347-351.
- [3] G. Pólya & G. Szegő: Problems and Theorems in Analysis, Vol. II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1976; Reprint 1998.

22.3.6 Van der Waerden's permanent conjecture

Suppose $M = (m_{ij})$ is a real $n \times n$ matrix. If in the usual representation of the determinant we omit the signs of the permutations, we get the permanent $\text{per } M$,

$$\text{per } M := \sum_{\sigma} m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \cdots m_{n\sigma(n)},$$

where σ runs through all permutations of $\{1, 2, \dots, n\}$.

In contrast to the determinant, which can be quickly calculated (e.g. by Gaussian elimination), computation of the permanent is provably difficult. Therefore a lot of research about permanents concerned bounds and approximation; the book by Minc [7] gives an excellent overview of the subject.

We consider in this chapter the most famous theorem about permanents and its fabulous recent proof. A real matrix $M = (m_{ij})$ is called doubly stochastic if its entries are nonnegative, with each row sum and column sum equal to 1. In 1926 Bartel L. van der Waerden asked whether

$$\text{per } M \geq \frac{n!}{n^n}$$

holds for every doubly stochastic $n \times n$ matrix, the minimum being attained only by the matrix $M = (m_{ij})$, where $m_{ij} = \frac{1}{n}$ for all i and j .

This "Van der Waerden conjecture" remained unsolved for over fifty years, until it was confirmed (more or less independently and more or less simultaneously) by G. P. Egorychev and D. I. Falikman in 1981. The paper [5] by Jacobus van Lint gives a very readable account of the history of the conjecture and the proofs.

The arguments of Egorychev and Falikman were rather involved, so it was a great surprise when in 2007 Leonid Gurvits presented a short, elegant, and completely different proof. In fact, he proved a stronger statement that included other previous results in this area as well.

Theorem. Let $M = (m_{ij})$ be a doubly stochastic $n \times n$ matrix. Then

$$\text{per } M \geq \frac{n!}{n^n}$$

and equality holds if and only if $m_{ij} = \frac{1}{n}$ for all i and j .



Bartel Leendert van der Waerden

However, in 1969 Van der Waerden told his compatriot Van Lint that he had never heard of such a conjecture nor of his name being attached to it...

$$\text{per} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \frac{n!}{n^n}.$$

For example, for $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ we get $p_M(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} &= (ax_1 + bx_2)(cx_1 + dx_2) \\ &= acx_1^2 + (ad + bc)x_1x_2 + bdx_2^2 \end{aligned}$$

For our presentation of the proof we follow closely the beautiful exposition of Gurvits' work by Monique Laurent and Alexander Schrijver in [4].

As first step let us translate matrices into polynomials. To every $n \times n$ matrix $M = (m_{ij})$ we associate the polynomial $p_M(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$,

$$p_M(x) = p_M(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right).$$

Since every term picks a variable from each row, $p_M(x)$ is homogeneous of degree n , meaning that every monomial $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ has total degree $k_1 + \cdots + k_n = n$. Note that $p_M(x)$ may be the zero-polynomial with all coefficients equal to 0, which happens for example if M has a zero row. It is convenient to include this case and still regard $p_M(x) \equiv 0$ as homogeneous of degree n , when the set of variables is clear.

Next we define for $p(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ its derivative in x_n :

$$p'(x_1, \dots, x_{n-1}) := \left. \frac{\partial p(x)}{\partial x_n} \right|_{x_n=0}.$$

Observe that if p is homogeneous of degree n in n variables, then p' is homogeneous of degree $n - 1$ in $n - 1$ variables. Indeed, since exactly the monomials of $p(x)$ that are linear in x_n survive in p' , the degree decreases by 1. In general, we define for $i = 0, 1, \dots, n$

$$q_i(x_1, \dots, x_i) := \frac{\partial^{(n-i)} p(x)}{\partial x_n \cdots \partial x_{i+1}} \Big|_{x_n=x_{n-1}=\cdots=x_{i+1}=0}.$$

In this way we get a chain $(q_n, q_{n-1}, \dots, q_0)$, where $q_n = p$ and $q_{i-1} = q'_i$ for $1 \leq i \leq n$, and finally q_0 is the coefficient of $x_1 x_2 \cdots x_n$ in p . Furthermore, if p is homogeneous of degree n , then q_i is homogeneous of degree i . Let us look at the chain generated by $p_M(x)$,

$$p_M(x) = q_n, \dots, q_i, \dots, q_0.$$

The following two facts will be important:

- A. $\text{per } M$ is the coefficient of $x_1 x_2 \cdots x_n$ in q_n , thus $q_0 = \text{per } M$.
This holds by the definition of the permanent.
- B. For $i = 1, \dots, n$ we have

$$\deg_i q_i \leq \min \{i, \lambda_M(i)\} \quad (1)$$

where $\deg_j q_i$ denotes the degree of x_j in $q_i(x_1, \dots, x_i)$ and $\lambda_M(i)$ records the number of nonzero entries in the i th column of M .

Indeed, we have $\deg_i q_i \leq i$, because q_i is homogeneous of degree i , while $\deg_i q_i \leq \deg_i q_n \leq \lambda_M(i)$ is clear from the definition of $p_M(x)$.

Here comes the main idea of the proof: We associate a parameter to every polynomial p and bound it from below when passing from p to p' .

Before going on, let us fix some notation. We will let $\mathbb{R}_+$ denote the nonnegative reals, and $p(x) \in \mathbb{R}_+[x_1, \dots, x_n]$ means that all coefficients of $p(x)$ are nonnegative. For a complex number $z \in \mathbb{C}$, let $\text{Re}(z)$ and $\text{Im}(z)$ be the real and the imaginary part, respectively. Let $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 0\}$ and $\mathbb{C}_{++} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$ denote closed and open right complex half-planes. The notation extends to $\mathbb{R}_+^n$ and $\mathbb{C}_+^n$, etc. Thus, for example, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_{++}^n$ holds if $\text{Re}(z_i) > 0$ for all i .

For every polynomial $p(x) \in \mathbb{R}_+[x_1, \dots, x_n]$ define the capacity $\text{cap}(p)$ by

$$\text{cap}(p) := \inf \left\{ p(x) : x \in \mathbb{R}_+^n, \prod_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

In particular, $\text{cap}(p) \geq 0$ as p has only nonnegative coefficients, and if p is the constant polynomial $p(x) \equiv c$, then $\text{cap}(p) = c$.

We also need the function $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, defined by $g(0) := 1$ and

$$g(k) := \left(\frac{k-1}{k} \right)^{k-1} \quad \text{for } k \geq 1.$$

Using $1+x \leq e^x$ twice, which holds strictly except for $x = 0$, we get

$$\frac{g(k+1)}{g(k)} = \frac{k}{k+1} \left(\frac{k^2}{k^2-1} \right)^{k-1} < e^{-\frac{1}{k+1}} e^{\frac{1}{k^2-1}(k-1)} = 1$$

for $k \geq 1$. Thus g is non-increasing, $g(0) = g(1) > g(2) > \cdots$.

Call a polynomial $p(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ H -stable if it has no roots in $\mathbb{C}_{++}^n$.

The following result is the key step. We postpone its proof for the moment and show first how it immediately implies the Theorem.

Gurvits' Proposition.

If $p(x) \in \mathbb{R}_+[x_1, \dots, x_n]$ is H -stable and homogeneous of degree n , then either $p' \equiv 0$, or p' is H -stable and homogeneous of degree $n - 1$. In either case

$$\text{cap}(p') \geq \text{cap}(p) \cdot g(\deg_n p)$$

Proof of the Theorem. Let $M = (m_{ij})$ be a doubly stochastic $n \times n$ matrix. We already know that $p_M(x)$ is homogeneous of degree n .

Claim 1. $p_M(x)$ is H -stable.

Suppose x is a root of $p_M(x)$. From $p_M(x) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right) = 0$ it follows that $\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j = 0$ for some i , thus $\sum_{j=1}^n m_{ij} \text{Re}(x_j) = 0$. But this precludes $x \in \mathbb{C}_{++}^n$, since $m_{i\ell} > 0$ for some ℓ .

Claim 2. $\text{cap}(p_M) = 1$.

Take any $x \in \mathbb{R}_+^n$ with $\prod_{j=1}^n x_j = 1$. By the inequality of the arithmetic and the geometric mean (see Chapter 20) we have

Writing $g(k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1}$, we see that $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = \frac{1}{e}$.

Recall for this that $m_{ij} \geq 0$

and $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 1$.

The AM-GM inequality: For $a_1, \dots, a_n, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+$ with $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ we get

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i a_i &\geq a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n}. \\ p_M(x) &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right) \geq \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n x_j^{m_{ij}} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n x_j^{m_{ij}} \\ &= \prod_{j=1}^n x_j^{\sum_{i=1}^n m_{ij}} = \prod_{j=1}^n x_j = 1 \end{aligned}$$

and thus $\text{cap}(p_M) \geq 1$.

On the other hand,

$$p_M(1, 1, \dots, 1) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \right) = \prod_{i=1}^n 1 = 1,$$

which proves Claim 2.

Since $p_M(x)$ is H -stable, we may apply Gurvits' Proposition repeatedly to conclude that all the polynomials q_i are H -stable, and obtain for each i that

$$\text{cap}(q_{i-1}) \geq \text{cap}(q_i) g(\deg_i q_i) \geq \text{cap}(q_i) g(\min\{i, \lambda_M(i)\}) \quad (2)$$

where the second inequality follows from (1) and the fact that g is nonincreasing.

Iterating (2) we get, starting with $\text{cap}(p_M) = 1$, that

$$\begin{aligned} \text{per } M = q_0 &\geq \prod_{i=1}^n g(\min\{i, \lambda_M(i)\}) \geq \prod_{i=1}^n g(i) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{i} \right)^{i-1} = \prod_{i=1}^n i \frac{(i-1)^{i-1}}{i^i} = \frac{n!}{n^n} \end{aligned} \quad (3)$$

which is our desired inequality.

It remains to prove the uniqueness part. Suppose that $\text{per } M = \frac{n!}{n^n}$, where we may assume that $n \geq 2$. From the fact that we have equality in (3), we conclude that $i \leq \lambda_M(i)$ for all i , and hence $n = \lambda_M(n)$. By symmetry, we conclude that all entries of M are nonzero. Thus it

suffices to prove, again by symmetry, that all entries in the last column are equal to $\frac{1}{n}$. Since we have equality in Gurvits's Proposition applied to p_M and p'_M , and since $\text{cap}(p_M) = 1$, we find

$$\inf_y p'_M(y) = \text{cap}(p'_M) = g(n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1},$$

where y ranges over all $y \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ with $\prod_{j=1}^{n-1} y_j = 1$. Take any such y . In the following chain of inequalities the indices i and k range from 1 to n , while j goes from 1 to $n-1$. From

$$p_M(x) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right)$$

we infer that

$$p'_M(y) = \frac{\partial p_M(x)}{\partial x_n} \Big|_{x=(y,0)} = \sum_k m_{kn} \prod_{i \neq k} \left(\sum_j m_{ij} y_j \right)$$

and thus obtain the following chain:

$$\begin{aligned} p'_M(y) &= \sum_k m_{kn} \prod_{i \neq k} \left(\sum_j m_{ij} y_j \right) \\ &\stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \prod_k \prod_{i \neq k} \left(\sum_j m_{ij} y_j \right)^{m_{kn}} \\ &= \prod_i \prod_{k \neq i} \left(\sum_j m_{ij} y_j \right)^{m_{kn}} \\ &= \prod_i \left(\sum_j m_{ij} y_j \right)^{1-m_{in}} \\ &= \prod_i \left[(1-m_{in}) \sum_j \frac{m_{ij}}{1-m_{in}} y_j \right]^{1-m_{in}} \\ &\stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \prod_i \left[(1-m_{in})^{1-m_{in}} \prod_j y_j^{m_{ij}} \right]^{1-m_{in}} \prod_j \prod_i \prod_{i \neq j} m_{ij} \\ &= \prod_i (1-m_{in})^{1-m_{in}} \\ &= \prod_i (1-m_{in})^{1-m_{in}} \underbrace{y_j}_{=1} \\ &= \prod_i (1-m_{in})^{1-m_{in}} \\ &\geq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

For the last inequality in this chain we exploit the log-convexity of the function x^x for $x > 0$. For this recall that a real function f is convex if $\frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)) \geq f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$; a function $f(x)$ is log-convex if $\log f(x)$ is convex. Then $\frac{1}{n} \sum_i \log f(x_i) \geq \log f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$, or $f(x_1) \cdots f(x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$. For the function x^x we have

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n} \geq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^{\sum_i x_i}$$

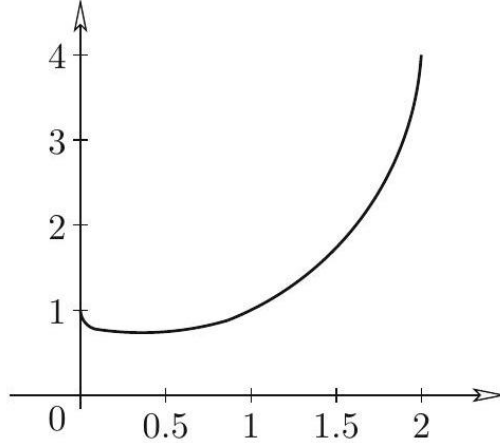
with equality if and only if $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. In our case $x_i = 1 - m_{in}$ with $x_1 + \cdots + x_n = n - 1$, thus $\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^{\sum_i x_i} \geq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1}$.

And here is the punch line: Since this chain of inequalities holds for every such y , and since $\inf p'_M(y) = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1}$, the last inequality (which is independent of y) must be an equality, and from this we conclude that $1 - m_{1n} = \cdots = 1 - m_{nn}$, that is, $m_{1n} = \cdots = m_{nn} = \frac{1}{n}$.

Here we make use of the Leibniz rule for differentiating products:

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = \sum_k f'_k \prod_{i \neq k} f_i.$$

Note that $m_{in} \neq 1$, since $n \geq 2$ and the i -th row has no zeros.



The function $f(x) = x^x$ is log-convex

Since $\operatorname{Re}(x) > 0$, we have $1 + \operatorname{Re}(b_i) \leq 0$.

Suppose $y \in \mathbb{C}_{++}^{n-1}$ and set $\bar{y} = \frac{1}{\lambda} y$, where $\lambda = \left[\prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{Re}(y_j) \right]^{\frac{1}{n-1}}$. Then $\prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{Re}(\bar{y}_j) = 1$, and $p'(y) = \lambda^{n-1} p'(\bar{y})$. Hence y is a root of p' if and only if $\bar{y}$ is.

In our work towards a proof of Gurvits's proposition, assume now that the polynomial $p(x) \in \mathbb{R}_+[x_1, \dots, x_n]$ is H-stable and homogeneous of degree n . We already know that $p'(x_1, \dots, x_{n-1})$ is homogeneous of degree $n-1$.

Lemma 1. For each $x \in \mathbb{C}_+^n$,

$$|p(x)| \geq |p(\operatorname{Re}(x))|.$$

We may assume that $x \in \mathbb{C}_{++}^n$ by continuity. Since $p(x)$ is H-stable, we have $p(\operatorname{Re}(x)) \neq 0$. Fix x and consider the set $\{p(x + s \operatorname{Re}(x)) : s \in \mathbb{C}\}$ as a function of s . As $p(x)$ is homogeneous of degree n , we may write

$$p(x + s \operatorname{Re}(x)) = p(\operatorname{Re}(x)) \prod_{i=1}^n (s - b_i),$$

for some complex numbers $b_1, \dots, b_n$. Since $p(x + b_i \operatorname{Re}(x)) = 0$ for each i , we infer that $x + b_i \operatorname{Re}(x) \notin \mathbb{C}_{++}$, which implies that

$$\operatorname{Re}(x + b_i \operatorname{Re}(x)) = \operatorname{Re}(x) (1 + \operatorname{Re}(b_i)) \leq 0,$$

hence $\operatorname{Re}(b_i) \leq -1$, and thus $|b_i| \geq 1$.

It follows that

$$|p(x)| = |p(x + 0 \cdot \operatorname{Re}(x))| = |p(\operatorname{Re}(x))| \prod_{i=1}^n |b_i| \geq |p(\operatorname{Re}(x))|,$$

as claimed.

Lemma 2. Let $y \in \mathbb{C}_{++}^{n-1}$ and $\prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{Re}(y_j) = 1$. Then

$$\text{cap}(p) \leq \frac{p(\text{Re}(y), t)}{t} \quad \text{for every } t > 0$$

For the proof set $\lambda := t^{-\frac{1}{n}}$ and $\bar{x} := \lambda(\text{Re}(y), t) \in \mathbb{R}_{++}^n$. Then

$$\prod_{i=1}^n \bar{x}_i = \lambda^n \left(\underbrace{\prod_{j=1}^{n-1} \text{Re}(y_j)}_{=1} \right) t = 1$$

and thus, using that $p(x)$ is homogeneous of degree n ,

$$\text{cap}(p) \leq p(\bar{x}) = \lambda^n p(\text{Re}(y), t) = \frac{p(\text{Re}(y), t)}{t}.$$

- Proof Gurvits' Proposition. It now suffices to show (by scaling, see the margin) that for $y \in \mathbb{C}_{++}^{n-1}$ with $\prod_{j=1}^{n-1} \text{Re}(y_j) = 1$ the following two conditions hold:

(I) If $p'(y) = 0$, then $p' \equiv 0$.

(II) If $y \in \mathbb{R}_{++}^{n-1}$, then $p'(y) \geq \text{cap}(p) \cdot g(\deg_n p)$.

Case 1. $p(y, 0) = 0$.

We have $p(\text{Re}(y), 0) = 0$ by Lemma 1. Furthermore,

$$p'(y) = \lim_{t \searrow 0} \frac{p(y, t) - p(y, 0)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{p(y, t)}{t}$$

Remember that

$$p'(x) = \frac{\partial p(x)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0}.$$

and similarly

$$p'(\text{Re}(y)) = \lim_{t \searrow 0} \frac{p(\text{Re}(y), t)}{t}$$

Since $p(\text{Re}(y), t) \leq |p(y, t)|$, again by Lemma 1, we infer from Lemma 2 that

$$\text{cap}(p) \leq \lim_{t \searrow 0} \frac{p(\text{Re}(y), t)}{t} = p'(\text{Re}(y)) \leq \lim_{t \searrow 0} \frac{|p(y, t)|}{t} = |p'(y)|.$$

If $p'(y) = 0$, then $p'(\text{Re}(y)) = 0$, and thus $p' \equiv 0$ since all coefficients of p' are nonnegative. This proves (I) in this case, and (II) is trivially true since $g(k) \leq 1$ for all k .

Case 2. $p(y, t)$ has degree at most 1 as a polynomial in t .

Since $p(\text{Re}(y), t) \leq |p(y, t)|$ for all $t > 0$ by Lemma 1, we conclude that $p(\text{Re}(y), t)$ also has degree at most 1 in t . Thus

$$p'(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(y, t)}{t}, \quad p'(\text{Re}(y)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(\text{Re}(y), t)}{t},$$

and Lemma 2 tells us that

$$\text{cap}(p) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(\text{Re}(y), t)}{t} = p'(\text{Re}(y)) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|p(y, t)|}{t} = |p'(y)|$$

and we infer (I) and (II) as before.

Case 3. $p(y, 0) \neq 0$, and $p(y, t)$ has degree at least 2 in t .

This implies that $k := \deg_n p \geq 2$, and we can write

$$p(y, t) = p(y, 0) \prod_{i=1}^k (1 + a_i t) \tag{4}$$

for some complex numbers $a_1, \dots, a_k$. Hence

$$p'(y) = p(y, 0) \sum_{i=1}^k a_i$$

where not all a_i are equal to 0, since $p(y, t)$ has degree at least 2 in t . The following result is the heart of the proof.

Claim. If $a_i \neq 0$, then the inverse a_i^{-1} is a nonnegative linear combination of the complex numbers $y_1, \dots, y_{n-1}$.

To see this we need the famous Lemma of Farkas from linear optimization. (See for example Schrijver [8, Sect. 7.3].)

Farkas Lemma. Let $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ be a real matrix and $b \in \mathbb{R}^r$ a vector. Then exactly one of the following alternatives holds:

- (i) $Ax = b, x \in \mathbb{R}^s, x \geq 0$ is solvable,
- (ii) $A^T z > 0, z \in \mathbb{R}^r, b^T z < 0$ is solvable.

For our problem take $r = 2, s = n - 1$, and such an $a_i \neq 0$, and set

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(y_1) & \cdots & \operatorname{Re}(y_{n-1}) \\ \operatorname{Im}(y_1) & \cdots & \operatorname{Im}(y_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a_i^{-1}) \\ \operatorname{Im}(a_i^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Alternative (i) is exactly what we want:

$$a_1^{-1} = x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}_+^{n-1}. \quad (5)$$

Assume the opposite: Let $z = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ be a solution and set $\lambda = c - id \in \mathbb{C}$. Then

$$\begin{aligned} (A^T z)_j &= \operatorname{Re}(y_j) \operatorname{Re}(\lambda) - \operatorname{Im}(y_j) \operatorname{Im}(\lambda) = \operatorname{Re}(y_j \lambda) > 0, \\ b^T z &= \operatorname{Re}(a_i^{-1} \lambda) < 0. \end{aligned}$$

This means that $(\lambda y, -\lambda a_i^{-1})$ lies in $\mathbb{C}_{++}^n$. However, by (4)

$$p(\lambda y, -\lambda a_i^{-1}) = \lambda^n p(y, -a_i^{-1}) = 0,$$

contradicting the H-stability of $p(x)$. This proves the claim.

Since $y \in \mathbb{C}_{++}^{n-1}$, we have $\operatorname{Re}(a_i^{-1}) > 0$ in (5) and thus $\operatorname{Re}(a_i) > 0$ for all nonzero a_i . Looking at (4), we conclude that $p'(y) \neq 0$, which proves (I). To see (II), pick $y \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ with $\prod_{j=1}^{n-1} y_j = 1$. In this case all nonzero a_i are positive reals by (5), thus $\sum_{i=1}^k a_i > 0$, and $\frac{p'(y)}{p(y, 0)} = \sum_{i=1}^k a_i > 0$. Set $t = \frac{k}{k-1} \frac{p(y, 0)}{p'(y)} > 0$. Using once more the AM-GM inequality we infer

$$\begin{aligned} \frac{p(y, t)}{p(y, 0)} &= \prod_{i=1}^k (1 + a_i t) \leq \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 + a_i t) \right]^k \\ &= \left[\frac{1}{k} \left(k + \frac{p'(y)}{p(y, 0)} t \right) \right]^k = \left[1 + \frac{1}{k-1} \right]^k = \left(\frac{k}{k-1} \right)^k. \end{aligned}$$

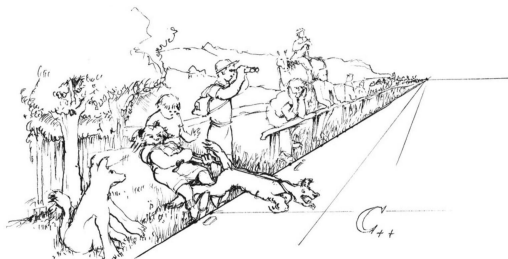
Lemma 2 applied to $t = \frac{k}{k-1} \frac{p(y, 0)}{p'(y)}$ therefore gives

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}(p) &\leq \frac{p(y, t)}{t} = p'(y) \frac{k-1}{k} \frac{p(y, t)}{p(y, 0)} \\ &\leq p'(y) \frac{k-1}{k} \left(\frac{k}{k-1} \right)^k = \frac{p'(y)}{g(k)} \end{aligned}$$

or $p'(y) \geq \operatorname{cap}(p) \cdot g(k)$, and the proof is complete.

References

- [1] G. P. Egorychev: Proof of the van der Waerden conjecture for permanents (in Russian), *Sibirsk. Mat. Zh.* (6)22 (1981), 65-71; English translation: *Siberian Math. J.* 22 (1981), 854-859.
- [2] D. I. Falikman: Proof of the van der Waerden conjecture regarding the permanent of a doubly stochastic matrix (in Russian), *Mat. Zametki* 29 (1981) 931-938; English translation: *Math. Notes* 29 (1981), 475-479.
- [3] L. Gurvits: Van der Waerden/Schrijver-Valiant like conjectures and stable (aka hyperbolic) homogeneous polynomials: One theorem for all, *Electronic J. Combinatorics* 15 (2008), R66.
- [4] M. Laurent & A. Schrijver: On Leonid Gurvits's proof for permanents, *Amer. Math. Monthly* 117 (2010), 903-911.
- [5] J. H. van Lint: The van der Waerden conjecture: Two proofs in one year, *Math. Intelligencer* (2)4 (1982), 72-77.
- [6] J. H. van Lint & R. M. Wilson: *A Course in Combinatorics*, Second edition, Cambridge University Press, 2001.
- [7] H. Minc: *Permanents*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 6, Addison-Wesley, Reading MA 1978; reissued by Cambridge University Press 1984.
- [8] A. Schrijver: *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, Chichester 1986.



22.3.7 On a lemma of Littlewood and Offord

In their work on the distribution of roots of algebraic equations, Littlewood and Offord proved in 1943 the following result:

Let $a_1, a_2, \dots, a_n$ be complex numbers with $|a_i| \geq 1$ for all i , and consider the 2^n linear combinations $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ with $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$. Then the number of sums $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ which lie in the interior of any circle of radius 1 is not greater than

$$c \frac{2^n}{\sqrt{n}} \log n \quad \text{for some constant } c > 0.$$

A few years later Paul Erdős improved this bound by removing the $\log n$ term, but what is more interesting, he showed that this is, in fact, a simple consequence of the theorem of Sperner (see page 213).

To get a feeling for his argument, let us look at the case when all a_i are real. We may assume that all a_i are positive (by changing a_i to $-a_i$ and ε_i to $-\varepsilon_i$ whenever $a_i < 0$). Now suppose that a set of combinations $\sum \varepsilon_i a_i$ lies in the interior of an interval of length 2. Let $N = \{1, 2, \dots, n\}$ be the index set. For every $\sum \varepsilon_i a_i$ we set $I := \{i \in N : \varepsilon_i = 1\}$. Now if $I \subsetneq I'$ for two such sets, then we conclude that

$$\sum \varepsilon'_i a_i - \sum \varepsilon_i a_i = 2 \sum_{i \in I' \setminus I} a_i \geq 2,$$

which is a contradiction. Hence the sets I form an antichain, and we conclude from the theorem of Sperner that there are at most $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ such combinations. By Stirling's formula (see page 13) we have

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq c \frac{2^n}{\sqrt{n}} \quad \text{for some } c > 0.$$

For n even and all $a_i = 1$ we obtain $\binom{n}{n/2}$ combinations $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ that sum to 0. Looking at the interval $(-1, 1)$ we thus find that the binomial number gives the exact bound. In the same paper Erdős conjectured that $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ was the right bound for complex numbers as well (he could only prove $c2^n n^{-1/2}$ for some c) and indeed that the same bound is valid for vectors $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ with $|\mathbf{a}_i| \geq 1$ in a real Hilbert space, when the circle of radius 1 is replaced by an open ball of radius 1.



John E. Littlewood

Sperner's theorem. Any antichain of subsets of an n -set has size at most $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Erdős was right, but it took twenty years until Gyula Katona and Daniel Kleitman independently came up with a proof for the complex numbers (or, what is the same, for the plane $\mathbb{R}^2$). Their proofs used explicitly the 2-dimensionality of the plane, and it was not at all clear how they could be extended to cover finite dimensional real vector spaces.

But then in 1970 Kleitman proved the full conjecture on Hilbert spaces with an argument of stunning simplicity. In fact, he proved even more. His argument is a prime example of what you can do when you find the right induction hypothesis.

A word of comfort for all readers who are not familiar with the notion of a Hilbert space: We do not really need general Hilbert spaces. Since we only deal with finitely many vectors $\mathbf{a}_i$, it is enough to consider the real space $\mathbb{R}^d$ with the usual scalar product. Here is Kleitman's result.

Theorem. Let $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ be vectors in $\mathbb{R}^d$, each of length at least 1, and let $R_1, \dots, R_k$ be k open regions of $\mathbb{R}^d$, where $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 2$ for any $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ that lie in the same region R_i .

Then the number of linear combinations $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{a}_i$, $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$, that can lie in the union $\bigcup_i R_i$ of the regions is at most the sum of the k largest binomial coefficients $\binom{n}{j}$.

In particular, we get the bound $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ for $k = 1$.

Before turning to the proof note that the bound is exact for

$$\mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = \mathbf{a} = (1, 0, \dots, 0)^T.$$

Indeed, for even n we obtain $\binom{n}{n/2}$ sums equal to 0, $\binom{n}{n/2-1}$ sums equal to $(-2)\mathbf{a}$, $\binom{n}{n/2+1}$ sums equal to $2\mathbf{a}$, and so on. Choosing balls of radius 1 around

$$-2 \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil \mathbf{a}, \quad \dots \quad (-2)\mathbf{a}, \quad \mathbf{0}, \quad 2\mathbf{a}, \quad \dots \quad 2 \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \mathbf{a},$$

we obtain

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor} + \dots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}} + \binom{n}{\frac{n}{2}} + \binom{n}{\frac{n+2}{2}} + \dots + \binom{n}{\lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor}$$

sums lying in these k balls, and this is our promised expression, since the largest binomial coefficients are centered around the middle (see page 14). A similar reasoning works when n is odd.

- **Proof.** We may assume, without loss of generality, that the regions R_i are disjoint, and will do so from now on. The key to the proof is the recursion of the binomial coefficients, which tells us how the largest binomial coefficients of n and $n-1$ are related. Set $r = \lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor$, $s = \lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor$, then $\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \dots, \binom{n}{s}$ are the k largest binomial coefficients for n . The recursion $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ implies

$$\begin{aligned} \sum_{i=r}^s \binom{n}{i} &= \sum_{i=r}^s \binom{n-1}{i} + \sum_{i=r}^s \binom{n-1}{i-1} \\ &= \sum_{i=r}^s \binom{n-1}{i} + \sum_{i=r-1}^{s-1} \binom{n-1}{i} \\ &= \sum_{i=r-1}^s \binom{n-1}{i} + \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n-1}{i}, \end{aligned} \tag{1}$$

and an easy calculation shows that the first sum adds the $k+1$ largest binomial coefficients $\binom{n-1}{i}$, and the second sum the largest $k-1$.

Kleitman's proof proceeds by induction on n , the case $n=1$ being trivial. In the light of (1) we need only show for the induction step that the linear combinations of $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ that lie in k disjoint regions can be mapped bijectively onto combinations of $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ that lie in $k+1$ or $k-1$ regions.

Claim. At least one of the translated regions $R_j - \mathbf{a}_n$ is disjoint from all the translated regions $R_1 + \mathbf{a}_n, \dots, R_k + \mathbf{a}_n$.

To prove this, consider the hyperplane $H = \{\mathbf{x} : \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{x} \rangle = c\}$ orthogonal to $\mathbf{a}_n$, which contains all translates $R_i + \mathbf{a}_n$ on the side that is given by $\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{x} \rangle \geq c$, and which touches the closure of some region, say $R_j + \mathbf{a}_n$. Such a hyperplane exists since the regions are bounded. Now $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 2$ holds for any $\mathbf{x} \in R_j$ and $\mathbf{y}$ in the closure of R_j , since R_j is open. We want to show that $R_j - \mathbf{a}_n$ lies on the other side of H . Suppose, on the contrary, that $\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{x} - \mathbf{a}_n \rangle \geq c$ for some $\mathbf{x} \in R_j$, that is, $\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{x} \rangle \geq |\mathbf{a}_n|^2 + c$.

Let $\mathbf{y} + \mathbf{a}_n$ be a point where H touches $R_j + \mathbf{a}_n$, then $\mathbf{y}$ is in the closure of R_j , and $\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{y} + \mathbf{a}_n \rangle = c$, that is, $\langle \mathbf{a}_n, -\mathbf{y} \rangle = |\mathbf{a}_n|^2 - c$. Hence

$$\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 2|\mathbf{a}_n|^2$$

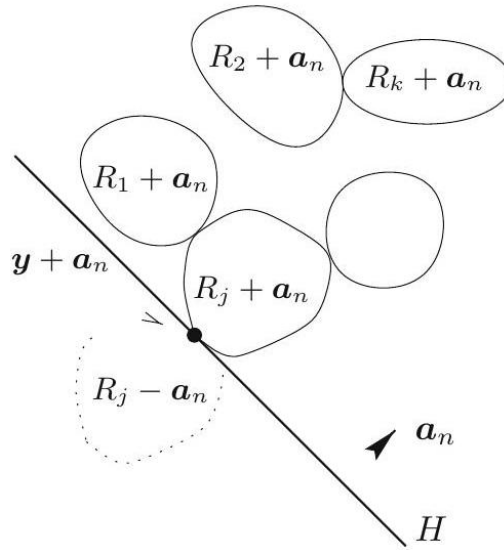
and we infer from the Cauchy-Schwarz inequality

$$2|\mathbf{a}_n|^2 \leq \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \leq |\mathbf{a}_n| |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

and thus (with $|\mathbf{a}_n| \geq 1$) we get $2 \leq 2|\mathbf{a}_n| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, a contradiction.

The rest is easy. We classify the combinations $\sum \varepsilon_i \mathbf{a}_i$ which come to lie in $R_1 \cup \dots \cup R_k$ as follows. Into Class 1 we put all $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{a}_i$ with $\varepsilon_n = -1$ and all $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{a}_i$ with $\varepsilon_n = 1$ lying in R_j , and into Class 2 we throw in the remaining combinations $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathbf{a}_i$ with $\varepsilon_n = 1$, not in R_j . It follows that the combinations $\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \mathbf{a}_i$ corresponding to Class 1 lie in the $k+1$ disjoint

regions $R_1 + \mathbf{a}_n, \dots, R_k + \mathbf{a}_n$ and $R_j - \mathbf{a}_n$, and the combinations $\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \mathbf{a}_i$ corresponding to Class 2 lie in the $k-1$ disjoint regions $R_1 - \mathbf{a}_n, \dots, R_k - \mathbf{a}_n$ without $R_j - \mathbf{a}_n$. By induction, Class 1 contains at most $\sum_{i=r-1}^s \binom{n-1}{i}$ combinations, while Class 2 contains at most $\sum_{i=r}^{s-1} \binom{n-1}{i}$ combinations - and by (1) this is the whole proof, straight from The Book. $\square$



References

- [1] P. Erdős: On a lemma of Littlewood and Offord, Bulletin Amer. Math. Soc. 51 (1945), 898-902.
- [2] G. Katona: On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem, Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966), 59-63.
- [3] D. Kleitman: On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums, Math. Zeitschrift 90 (1965), 251-259.
- [4] D. Kleitman: On a lemma of Littlewood and Offord on the distributions of linear combinations of vectors, Advances Math. 5 (1970), 155-157.
- [5] J. E. Littlewood & A. C. Offord: On the number of real roots of a random algebraic equation III, Mat. USSR Sb. 12 (1943), 277-285.

22.3.8 Cotangent and the Herglotz trick

What is the most interesting formula involving elementary functions? In his beautiful article [2], whose exposition we closely follow, Jürgen Elstrodt nominates as a first candidate the partial fraction expansion of the cotangent function:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$$

This elegant formula was proved by Euler in §178 of his *Introductio in Analysin Infinitorum* from 1748 and it certainly counts among his finest achievements. We can also write it even more elegantly as

$$\pi \cot \pi x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n} \quad (1)$$

but one has to note that the evaluation of the sum $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x+n}$ is a bit dangerous, since the sum is only conditionally convergent, so its value depends on the "right" order of summation. We shall derive (1) by an argument of stunning simplicity which is attributed to Gustav Herglotz - the "Herglotz trick." To get started, set

$$f(x) := \pi \cot \pi x, \quad g(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n},$$

and let us try to derive enough common properties of these functions to see in the end that they must coincide . . .

(A) The functions f and g are defined for all non-integral values and are continuous there.

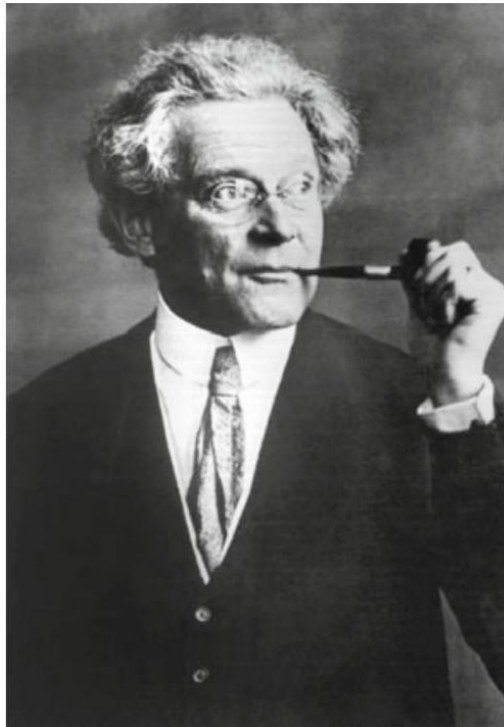
For the cotangent function $f(x) = \pi \cot \pi x = \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$, this is clear (see the figure). For $g(x)$, we first use the identity $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = -\frac{2x}{n^2-x^2}$ to rewrite Euler's formula as

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}. \quad (2)$$

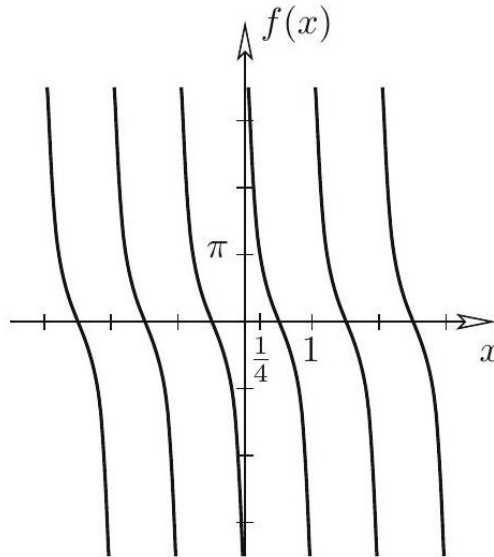
Thus for (A) we have to prove that for every $x \notin \mathbb{Z}$ the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$$

converges uniformly in a neighborhood of x .



Gustav Herglotz



The function $f(x) = \pi \cot \pi x$

Addition theorems:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\implies \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}.$$

For this, we don't get any problem with the first term, for $n = 1$, or with the terms with $2n - 1 \leq x^2$, since there is only a finite number of them. On the other hand, for $n \geq 2$ and $2n - 1 > x^2$, that is $n^2 - x^2 > (n - 1)^2 > 0$, the summands are bounded by

$$0 < \frac{1}{n^2 - x^2} < \frac{1}{(n - 1)^2}$$

and this bound is not only true for x itself, but also for values in a neighborhood of x . Finally the fact that $\sum \frac{1}{(n-1)^2}$ converges (to $\frac{\pi^2}{6}$, see page 55) provides the uniform convergence needed for the proof of (A).

(B) Both f and g are periodic of period 1, that is, $f(x + 1) = f(x)$ and $g(x + 1) = g(x)$ hold for all $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Since the cotangent has period π , we find that f has period 1 (see again the figure above). For g we argue as follows. Let

$$g_N(x) := \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x + n},$$

then

$$\begin{aligned} g_N(x + 1) &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x + 1 + n} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x + n} \\ &= g_{N-1}(x) + \frac{1}{x + N} + \frac{1}{x + N + 1} \end{aligned}$$

Hence $g(x + 1) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x + 1) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_{N-1}(x) = g(x)$.

(C) Both f and g are odd functions, that is, we have $f(-x) = -f(x)$ and $g(-x) = -g(x)$ for all $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

The function f obviously has this property, and for g we just have to observe that $g_N(-x) = -g_N(x)$.

The final two facts constitute the Herglotz trick: First we show that f and g satisfy the same functional equation, and secondly that $h := f - g$ can be continuously extended to all of

$\mathbb{R}$.

(D) The two functions f and g satisfy the same functional equation: $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$ and $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$.

For $f(x)$ this results from the addition theorems for the sine and cosine functions:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi \left[\frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\sin \frac{\pi x}{2}} - \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} \right] \\ &= 2\pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{2}\right)} = 2f(x) \end{aligned}$$

The functional equation for g follows from

$$g_N\left(\frac{x}{2}\right) + g_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g_{2N}(x) + \frac{2}{x + 2N + 1}.$$

which in turn follows from

$$\frac{1}{\frac{x}{2} + n} + \frac{1}{\frac{x+1}{2} + n} = 2 \left(\frac{1}{x + 2n} + \frac{1}{x + 2n + 1} \right)$$

Now let us look at

$$h(x) = f(x) - g(x) = \pi \cot \pi x - \left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \right) \quad (3)$$

We know by now that h is a continuous function on $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ that satisfies the properties (B), (C), (D). What happens at the integral values? From the sine and cosine series expansions, or by applying de l'Hospital's rule twice, we find

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = 0$$

and hence also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\pi \cot \pi x - \frac{1}{x} \right) = 0$$

But since the last sum $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ in (3) converges to 0 with $x \rightarrow 0$, we have in fact $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, and thus by periodicity

$$\lim_{x \rightarrow n} h(x) = 0 \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}$$

In summary, we have shown the following:

(E) By setting $h(x) := 0$ for $x \in \mathbb{Z}$, h becomes a continuous function on all of $\mathbb{R}$ that shares the properties given in (B), (C) and (D).

We are ready for the coup de grâce. Since h is a periodic continuous function, it possesses a maximum m . Let x_0 be a point in $[0, 1]$ with $h(x_0) = m$. It follows from (D) that

$$h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2m$$

and hence that $h\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$. Iteration gives $h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$ for all n , and hence $h(0) = m$ by continuity. But $h(0) = 0$, and so $m = 0$, that is, $h(x) \leq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. As $h(x)$ is an odd function, $h(x) < 0$ is impossible, hence $h(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$, and Euler's theorem is proved.

A great many corollaries can be derived from (1), the most famous of which concerns the values of Riemann's zeta function at even positive integers (see the appendix to Chapter 9),

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots\end{aligned}$$

So to finish our story let us see how Euler - a few years later, in 1755 treated the series (4). We start with formula (2). Multiplying (2) by x and setting $y = \pi x$ we find for $|y| < \pi$:

$$\begin{aligned}y \cot y &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{y}{\pi n}\right)^2}\end{aligned}$$

The last factor is the sum of a geometric series, hence

$$\begin{aligned}y \cot y &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k} \\ &= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) y^{2k}\end{aligned}$$

and we have proved the remarkable result:

For all $k \in \mathbb{N}$, the coefficient of y^{2k} in the power series expansion of $y \cot y$ equals

$$[y^{2k}] y \cot y = -\frac{2}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k). \quad (5)$$

There is another, perhaps much more "canonical," way to obtain a series expansion of $y \cot y$. We know from analysis that $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, and thus

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i},$$

which yields

$$y \cot y = iy \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{e^{iy} - e^{-iy}} = iy \frac{e^{2iy} + 1}{e^{2iy} - 1}.$$

We now substitute $z = 2iy$, and get

$$y \cot y = \frac{z e^z + 1}{2 e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1} \quad (6)$$

Thus all we need is a power series expansion of the function $\frac{z}{e^z - 1}$; note that this function is defined and continuous on all of $\mathbb{R}$ (for $z = 0$ use the power series of the exponential function, or alternatively de l'Hospital's rule, which yields the value 1). We write

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}. \quad (7)$$

The coefficients B_n are known as the Bernoulli numbers. The left-hand side of (6) is an even function (that is, $f(z) = f(-z)$), and thus we see that $B_n = 0$ for odd $n \geq 3$, while $B_1 = -\frac{1}{2}$ corresponds to the term of $\frac{z}{2}$ in (6).

From

$$\left(\sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} \right) (e^z - 1) = \left(\sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \right) = z$$

we obtain by comparing coefficients for z^n :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 1 \\ 0 & \text{for } n \neq 1 \end{cases} \quad (8)$$

We may compute the Bernoulli numbers recursively from (8). The value $n = 1$ gives $B_0 = 1, n = 2$ yields $\frac{B_0}{2} + B_1 = 0$, that is $B_1 = -\frac{1}{2}$, and so on. Now we are almost done: The combination of (6) and (7) yields

$$y \cot y = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{(2iy)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} y^{2k}$$

and out comes, with (5), Euler's formula for $\zeta(2k)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (9)$$

Looking at our table of the Bernoulli numbers, we thus obtain once again the sum $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ from Chapter 9, and further

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^6}{945}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} &= \frac{\pi^8}{9450} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} &= \frac{\pi^{10}}{93555}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}} &= \frac{691\pi^{12}}{638512875}, & \dots \end{aligned}$$

The Bernoulli number $B_{10} = \frac{5}{66}$ that gets us $\zeta(10)$ looks innocuous enough, but the next value $B_{12} = -\frac{691}{2730}$, needed for $\zeta(12)$, contains the large prime factor 691 in the numerator. Euler had first computed some values $\zeta(2k)$ without noticing the connection to the Bernoulli numbers. Only the appearance of the strange prime 691 put him on the right track. Incidentally, since $\zeta(2k)$ converges to 1 for $k \rightarrow \infty$, equation (9) tells us that the numbers $|B_{2k}|$ grow very fast - something that is not clear from the first few values. In contrast to all this, one knows very little about the values of the Riemann

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$

The first few Bernoulli numbers zeta function at the odd integers $k \geq 3$; see page 64 .

IN DEFINIEND. SUMMIS SERIER INFINIT. 131 lem. Quo autem valor harum summarum clarius perspiciatur , plures hujusmodi Serierum summas commodiori modo expreflas hic adjiciam.

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&cc. &= \frac{2^0 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3^2} \pi^2 \\
1 + \frac{1}{2^*} + \frac{1}{3^*} + \frac{1}{4^*} + \frac{1}{5^*} + \&c. &= \frac{2^*}{1.2 \cdot 3 \cdot 45^*} \cdot \frac{1}{3} \pi^* \\
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^6} + \&c. &= \frac{2^4}{1.2 \cdot 3 \dots 7^6} \cdot \frac{1}{3} \pi^6 \\
1 + \frac{1}{2'} + \frac{1}{3'} + \frac{1}{4'} + \frac{1}{5'} + 2c_c &= \frac{2'}{1.2 \cdot 3 \dots a'} \cdot \frac{3}{5} \pi' \\
1 + \frac{1}{2^{60}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + 8cc &= \frac{2^2}{1.2 \cdot 3 \dots 1^{10}} \cdot \frac{5}{3} x^{10} \\
1 + \frac{1}{2''} + \frac{1}{3''} + \frac{1}{4''} + \frac{1}{5''} + \&c. &= \frac{2''}{1.2.3 \dots 13''} \cdot \frac{691}{105} \pi'' \\
1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + 8c. &= \frac{2^{12}}{1.2.3 \dots 15^1} \cdot \frac{35}{1} \pi^{14} \\
1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \&c. &= \frac{2^{14}}{1.2.3 \dots 17} \cdot \frac{3617}{15} \pi^{16} \\
1 + \frac{1}{2''} + \frac{1}{3''} + \frac{1}{4''} + \frac{1}{5''} + \&c. &= \frac{2''}{1.2.3 \dots 19^{\circ}} \cdot \frac{43867}{21} \pi'' \\
1 + \frac{1}{2^{25}} + \frac{1}{3^{25}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \&c. &= \frac{2^{10}}{1.2 \cdot 3 \dots 21^0} \cdot \frac{1222277}{55} \pi^{20} \\
1 + \frac{1}{2^{21}} + \frac{1}{3^{21}} + \frac{1}{4^{21}} + \frac{1}{5^{21}} + \&c. &= \frac{2^{20}}{1.2 \cdot 3 \dots 23} \cdot \frac{854513}{3} \pi^{23} \\
1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{24}} + \&cc. &= \frac{2^{24}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 25^{\circ}} \cdot \\
\frac{1181820455}{273} \pi^{24} \\
1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{25}} + \&c. &= \frac{2^{24}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 27} \\
\frac{76977927}{1} \pi^{16}.
\end{aligned}$$

Hucusque istos Potestatum ipsius π Exponentes artificio alibi exponendo continuare licuit, quod ideo hic adjunxi, quod R_2

Serici

Page 131 of Euler's 1748 "Introductio in Analysin Infinitorum"

References

- [1] S. Bochner: Book review of "Gesammelte Schriften" by Gustav Herglotz, Bulletin Amer. Math. Soc. 1 (1979), 1020-1022.
- [2] J. Elstrodt: Partialbruchzerlegung des Kotangens, Herglotz-Trick und die Weierstrasche stetige, nirgends differenzierbare Funktion, Math. Semesterberichte 45 (1998), 207-220.
- [3] L. Euler: Introductio in Analysin Infinitorum, Tomus Primus, Lausanne 1748; Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 8. In English: Introduction to Analysis of the Infinite, Book I (translated by J. D. Blanton), Springer-Verlag, New York 1988.
- [4] L. Euler: Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, Petersburg 1755; Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 10.

22.3.9 Buffon's needle problem

A French nobleman, Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon, posed the following problem in 1777:

Suppose that you drop a short needle on ruled paper - what is then the probability that the needle comes to lie in a position where it crosses one of the lines?

The probability depends on the distance d between the lines of the ruled paper, and it depends on the length ℓ of the needle that we drop - or rather it depends only on the ratio $\frac{\ell}{d}$. A short needle for our purpose is one of length $\ell \leq d$. In other words, a short needle is one that cannot cross two lines at the same time (and will come to touch two lines only with probability zero). The answer to Buffon's problem may come as a surprise: It involves the number π .

Theorem ("Buffon's needle problem")

If a short needle, of length ℓ , is dropped on paper that is ruled with equally spaced lines of distance $d \geq \ell$, then the probability that the needle comes to lie in a position where it crosses one of the lines is exactly

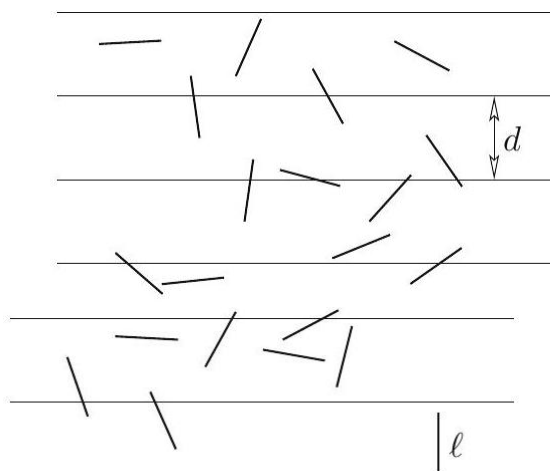
$$p = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

The result means that from an experiment one can get approximate values for π : If you drop a needle N times, and get a positive answer (an intersection) in P cases, then $\frac{P}{N}$ should be approximately $\frac{2\ell}{\pi d}$, that is, π should be approximated by $\frac{2\ell N}{dP}$. The most extensive (and exhaustive) test was perhaps done by Lazzarini in 1901, who allegedly even built a machine in order to drop a stick 3408 times (with $\frac{\ell}{d} = \frac{5}{6}$). He found that it came to cross a line 1808 times, which yields the approximation $\pi \approx 2 \cdot \frac{5}{6} \frac{3408}{1808} = 3.1415929\dots$, which is correct to six digits of π , and much too good to be true! (The values that Lazzarini chose lead directly to the well-known approximation $\pi \approx \frac{355}{113}$; see page 51. This explains the more than suspicious choices of 3408 and $\frac{5}{6}$, where $\frac{5}{6}3408$ is a multiple of 355. See [5] for a discussion of Lazzarini's hoax.)

The needle problem can be solved by evaluating an integral. We will do that below, and by this method we will also solve the problem for a long needle. But the Book Proof, presented by E. Barbier in 1860, needs no integrals. It just drops a different needle . . .



Le Comte de Buffon



If you drop any needle, short or long, then the expected number of crossings will be

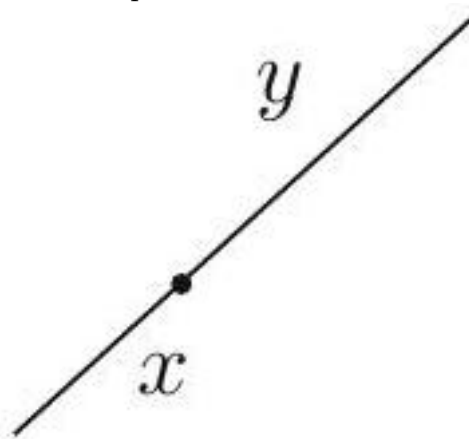
$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots,$$

where p_1 is the probability that the needle will come to lie with exactly one crossing, p_2 is the probability that we get exactly two crossings, p_3 is the probability for three crossings, etc. The probability that we get at least one crossing, which Buffon's problem asks for, is thus

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$$

(Events where the needle comes to lie exactly on a line, or with an endpoint on one of the lines, have probability zero - so they can be ignored throughout our discussion.)

On the other hand, if the needle is short then the probability of more than one crossing is zero, $p_2 = p_3 = \cdots = 0$, and thus we get $E = p$: The probability that we are looking for is just the expected number of crossings. This reformulation is extremely useful, because now we can use linearity of expectation (cf. page 116). Indeed, let us write $E(\ell)$ for the expected number of crossings that will be produced by dropping a straight needle of length ℓ . If this length is $\ell = x + y$, and we consider the "front part" of



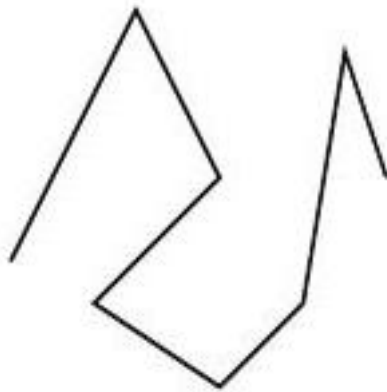
length x and the "back part" of length y of the needle separately, then we get

$$E(x + y) = E(x) + E(y),$$

since the crossings produced are always just those produced by the front part, plus those of the back part.

By induction on n this "functional equation" implies that $E(nx) = nE(x)$ for all $n \in \mathbb{N}$, and then that $mE\left(\frac{n}{m}x\right) = E\left(m\frac{n}{m}x\right) = E(nx) = nE(x)$, so that $E(rx) = rE(x)$ holds for all rational $r \in \mathbb{Q}$. Furthermore, $E(x)$ is clearly monotone in $x \geq 0$, from which we get that $E(x) = cx$ for all $x \geq 0$, where $c = E(1)$ is some constant.

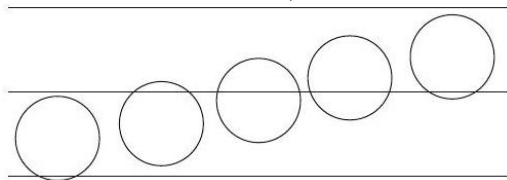
But what is the constant?



For that we use needles of different shape. Indeed, let's drop a "polygonal" needle of total length ℓ , which consists of straight pieces. Then the number of crossings it produces is (with probability 1) the sum of the numbers of crossings produced by its straight pieces. Hence, the expected number of crossings is again

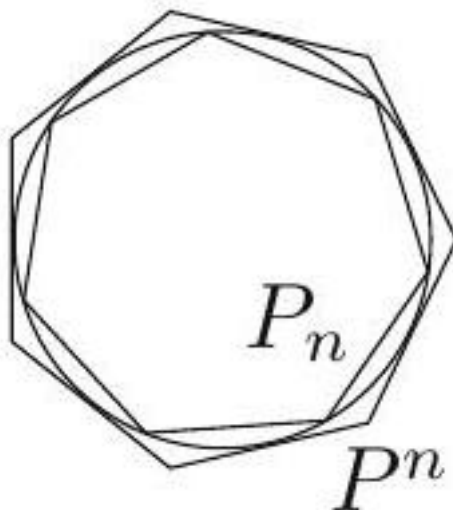
$$E = c\ell,$$

by linearity of expectation. (For that it is not even important whether the straight pieces are joined together in a rigid or in a flexible way!)



The key to Barbier's solution of Buffon's needle problem is to consider a needle that is a perfect circle C of diameter d , which has length $x = d\pi$. Such a needle, if dropped onto ruled paper, produces exactly two intersections, always!

The circle can be approximated by polygons. Just imagine that together with the circular needle C we are dropping an inscribed polygon P_n , as well as a circumscribed polygon P^n . Every line that intersects P_n will also intersect C , and if a line intersects C then it also hits P^n . Thus the expected numbers of intersections satisfy



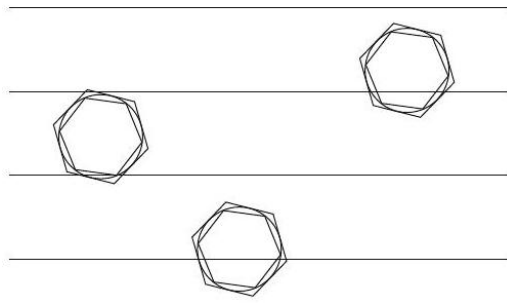
$$E(P_n) \leq E(C) \leq E(P^n).$$

Now both P_n and P^n are polygons, so the number of crossings that we may expect is " c times length" for both of them, while for C it is 2, whence

$$c\ell(P_n) \leq 2 \leq c\ell(P^n). \quad (1)$$

Both P_n and P^n approximate C for $n \rightarrow \infty$. In particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(P_n) = d\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(P^n),$$



and thus for $n \rightarrow \infty$ we infer from (1) that

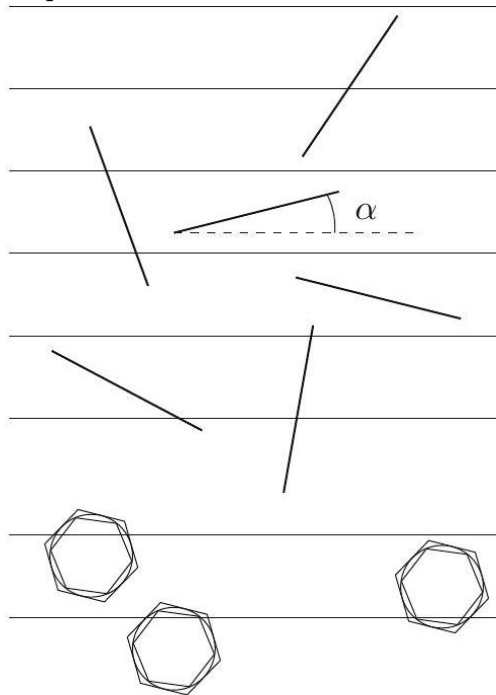
$$cd\pi \leq 2 \leq cd\pi,$$

which gives $c = \frac{2}{\pi} \frac{1}{d}$. $\square$

But we could also have done it by calculus! The trick to obtain an "easy" integral is to first consider the slope of the needle; let's say it drops to lie with an angle of α away from horizontal, where α will be in the range $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. (We will ignore the case where the needle comes to lie with negative slope, since that case is symmetric to the case of positive slope, and produces the same probability.) A needle that lies with angle α has height $\ell \sin \alpha$, and the probability that such a needle crosses one of the horizontal lines of distance d is $\frac{\ell \sin \alpha}{d}$. Thus we get the probability by averaging over the possible angles α , as

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\ell \sin \alpha}{d} d\alpha = \frac{2\ell}{\pi d} [-\cos \alpha]_0^{\pi/2} = \frac{2\ell}{\pi d}$$

For a long needle, we get the same probability $\frac{\ell \sin \alpha}{d}$ as long as $\ell \sin \alpha \leq d$, that is, in the range $0 \leq \alpha \leq \arcsin \frac{d}{\ell}$. However, for larger angles α the needle must cross a line, so the probability is 1. Hence we compute



$$\begin{aligned}
p &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\arcsin(d/\ell)} \frac{\ell \sin \alpha}{d} d\alpha + \int_{\arcsin(d/\ell)}^{\pi/2} 1 d\alpha \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\ell}{d} [-\cos \alpha]_0^{\arcsin(d/\ell)} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{d}{\ell} \right) \right) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\ell}{d} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{\ell^2}} \right) - \arcsin \frac{d}{\ell} \right)
\end{aligned}$$

for $\ell \geq d$.

So the answer isn't that pretty for a longer needle, but it provides us with a nice exercise: Show ("just for safety") that the formula yields $\frac{2}{\pi}$ for $\ell = d$, that it is strictly increasing in ℓ , and that it tends to 1 for $\ell \rightarrow \infty$.

References

- [1] E. Barbier: Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert, J. Mathématiques Pures et Appliquées (2) 5 (1860), 273-286.
- [2] L. Berggren, J. Borwein & P. Borwein, eds.: Pi: A Source Book, Springer-Verlag, New York 1997.
- [3] G. L. Leclerc, Comte de Buffon: Essai d'arithmétique morale, Appendix to "Histoire naturelle générale et particulière," Vol. 4, 1777.
- [4] D. A. Klain & G.-C. Rota: Introduction to Geometric Probability, "Lezioni Lincee," Cambridge University Press 1997.
- [5] T. H. O'Beirne: Puzzles and Paradoxes, Oxford University Press, London 1965.

"Got a problem?"



22.4 Combinatorics



22.4.1 Pigeon-hole and double counting

Some mathematical principles, such as the two in the title of this chapter, are so obvious that you might think they would only produce equally obvious results. To convince you that "It ain't necessarily so" we illustrate them with examples that were suggested by Paul Erdős to be included in *The Book*. We will encounter instances of them also in later chapters.

22.4.2 Pigeon-hole principle

If n objects are placed in r boxes, where $r < n$, then at least one of the boxes contains more than one object.

Well, this is indeed obvious, there is nothing to prove. In the language of mappings our principle reads as follows: Let N and R be two finite sets with

$$|N| = n > r = |R|,$$

and let $f : N \rightarrow R$ be a mapping. Then there exists some $a \in R$ with $|f^{-1}(a)| \geq 2$. We may even state a stronger inequality: There exists some $a \in R$ with

$$|f^{-1}(a)| \geq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \quad (1)$$

In fact, otherwise we would have $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}$ for all a , and hence $n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r \frac{n}{r} = n$, which cannot be.

1. Numbers

Claim. Consider the numbers $1, 2, 3, \dots, 2n$, and take any $n + 1$ of them. Then there are two among these $n + 1$ numbers which are relatively prime.

This is again obvious. There must be two numbers which are only 1 apart, and hence relatively prime.

But let us now turn the condition around.

Claim. Suppose again $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ with $|A| = n + 1$. Then there are always two numbers in A such that one divides the other.



"The pigeon-holes from a bird's perspective"

Both results are no longer true if one replaces $n + 1$ by n : For this consider the sets $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$, respectively $\{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$.

The reader may have fun in proving that for mn numbers the statement remains no longer true in general.

This is not so clear. As Erdős told us, he put this question to young Lajos Pósa during dinner, and when the meal was over, Lajos had the answer. It has remained one of Erdős' favorite "initiation" questions to mathematics. The (affirmative) solution is provided by the pigeon-hole principle. Write every number $a \in A$ in the form $a = 2^k m$, where m is an odd number between 1 and $2n - 1$. Since there are $n + 1$ numbers in A , but only n different odd parts, there must be two numbers in A with the same odd part. Hence one is a multiple of the other.

2. Sequences

Here is another one of Erdős' favorites, contained in a paper of Erdős and Szekeres on Ramsey problems.

Claim. In any sequence $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ of $mn + 1$ distinct real numbers, there exists an increasing subsequence

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{m+1}} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1})$$

of length $m + 1$, or a decreasing subsequence

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}} \quad (j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1})$$

of length $n + 1$, or both.

This time the application of the pigeon-hole principle is not immediate. Associate to each a_i the number t_i which is the length of a longest increasing subsequence starting at a_i . If $t_i \geq m + 1$ for some i , then we have an increasing subsequence of length $m + 1$. Suppose then that $t_i \leq m$ for all i . The function $f : a_i \mapsto t_i$ mapping $\{a_1, \dots, a_{mn+1}\}$ to $\{1, \dots, m\}$ tells us by (1) that there is some $s \in \{1, \dots, m\}$ such that $f(a_i) = s$ for $\frac{mn}{m} + 1 = n + 1$ numbers a_i . Let $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}$ ($j_1 < \dots < j_{n+1}$) be these numbers. Now look at two consecutive numbers $a_{j_i}, a_{j_{i+1}}$. If $a_{j_i} < a_{j_{i+1}}$, then we would obtain an increasing subsequence of length s starting at $a_{j_{i+1}}$, and consequently an increasing subsequence of length $s + 1$ starting at a_{j_i} , which cannot be since $f(a_{j_i}) = s$. We thus obtain a decreasing subsequence $a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}$ of length $n + 1$.

This simple-sounding result on monotone subsequences has a highly nonobvious consequence on the dimension of graphs. We don't need here the notion of dimension for general graphs, but only for complete graphs K_n . It can be phrased in the following way. Let $N = \{1, \dots, n\}$, $n \geq 3$, and consider m permutations $\pi_1, \dots, \pi_m$ of N . We say that the permutations π_i represent K_n if to every three distinct numbers i, j, k there exists a permutation π in which k comes after both i and j . The dimension of K_n is then the smallest m for which a representation $\pi_1, \dots, \pi_m$ exists.

As an example we have $\dim(K_3) = 3$ since any one of the three numbers must come last, as in $\pi_1 = (1, 2, 3)$, $\pi_2 = (2, 3, 1)$, $\pi_3 = (3, 1, 2)$. What about K_4 ? Note first $\dim(K_n) \leq \dim(K_{n+1})$: just delete $n+1$ in a representation of K_{n+1} . So, $\dim(K_4) \geq 3$, and, in fact, $\dim(K_4) = 3$, by taking

$$\pi_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \pi_2 = (2, 4, 3, 1), \quad \pi_3 = (1, 4, 3, 2).$$

It is not quite so easy to prove $\dim(K_5) = 4$, but then, surprisingly, the dimension stays at 4 up to $n = 12$, while $\dim(K_{13}) = 5$. So $\dim(K_n)$ seems to be a pretty wild function. Well, it is not! With n going to infinity, $\dim(K_n)$ is, in fact, a very well-behaved function - and the key for finding a lower bound is the pigeon-hole principle. We claim

$$\dim(K_n) \geq \log_2 \log_2 n \quad (2)$$

Since, as we have seen, $\dim(K_n)$ is a monotone function in n , it suffices to verify (2) for $n = 2^{2^p} + 1$, that is, we have to show that

$$\dim(K_n) \geq p + 1 \quad \text{for} \quad n = 2^{2^p} + 1.$$

Suppose, on the contrary, $\dim(K_n) \leq p$, and let $\pi_1, \dots, \pi_p$ be representing permutations of $N = \{1, 2, \dots, 2^{2^p} + 1\}$. Now we use our result on monotone subsequences p times. In π_1 there exists a monotone subsequence A_1 of length $2^{2^{p-1}} + 1$ (it does not matter whether increasing or decreasing). Look at this set A_1 in π_2 . Using our result again, we find a monotone subsequence A_2 of A_1 in π_2 of length $2^{2^{p-2}} + 1$, and A_2 is, of course, also monotone in π_1 . Continuing, we eventually find a subsequence A_p of size $2^{2^0} + 1 = 3$ which is monotone in all permutations π_i . Let $A_p = (a, b, c)$, then either $a < b < c$ or $a > b > c$ in all π_i . But this cannot be, since there must be a permutation where b comes after a and c .

The right asymptotic growth was provided by Joel Spencer (upper bound) and by Füredi, Hajnal, Rödl and Trotter (lower bound):

$$\dim(K_n) = \log_2 \log_2 n + \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \log_2 \log_2 \log_2 n.$$

But this is not the whole story: In 1999, Morris and Hoten found a method which, in principle, establishes the precise value of $\dim(K_n)$. Using their result and a computer one can obtain the values given in the margin. This is truly astounding! Just consider how many permutations of size 1422564 there are. How does one decide whether 7 or 8 of them are required to represent $K_{1422564}$?

3. Sums

Paul Erdős attributes the following nice application of the pigeon-hole principle to Andrew Vázsonyi and Marta Sved:

Claim. Suppose we are given n integers $a_1, \dots, a_n$, which need not be distinct. Then there is always a set of consecutive numbers $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_\ell$ whose sum $\sum_{i=k+1}^\ell a_i$ is a multiple of n .

$\pi_1 : 1233597891011124$

$\pi_2 : 2343876512111091$

$\pi_3 : 341111291065872$

$\pi_4 : 412109121178863$

These four permutations represent K_{12}

$$\dim(K_n) \leq 4 \iff n \leq 12$$

$$\dim(K_n) \leq 5 \iff n \leq 81$$

$$\dim(K_n) \leq 6 \iff n \leq 2646$$

$$\dim(K_n) \leq 7 \iff n \leq 1422564$$

For the proof we set $N = \{0, 1, \dots, n\}$ and $R = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Consider the map $f : N \rightarrow R$, where $f(m)$ is the remainder of $a_1 + \dots + a_m$ upon division by n . Since $|N| = n+1 > n = |R|$, it follows that there are two sums $a_1 + \dots + a_k, a_1 + \dots + a_\ell$ ($k < \ell$) with the same remainder, where the first sum may be the empty sum denoted by 0. It follows that

$$\sum_{i=k+1}^{\ell} a_i = \sum_{i=1}^{\ell} a_i - \sum_{i=1}^k a_i$$

has remainder 0 - end of proof. $\square$

Let us turn to the second principle: counting in two ways. By this we mean the following.

Double counting

Suppose that we are given two finite sets R and C and a subset $S \subseteq R \times C$. Whenever $(p, q) \in S$, then we say p and q are incident. If r_p denotes the number of elements that are incident to $p \in R$, and c_q denotes the number of elements that are incident to $q \in C$, then

$$\sum_{p \in R} r_p = |S| = \sum_{q \in C} c_q. \quad (3)$$

Again, there is nothing to prove. The first sum classifies the pairs in S according to the first entry, while the second sum classifies the same pairs according to the second entry. There is a useful way to picture the set S . Consider the matrix $A = (a_{pq})$, the incidence matrix of S , where the rows and columns of A are indexed by the elements of R and C , respectively, with

$$a_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{if } (p, q) \in S \\ 0 & \text{if } (p, q) \notin S. \end{cases}$$

With this set-up, r_p is the sum of the p -th row of A and c_q is the sum of the q -th column. Hence the first sum in (3) adds the entries of A (that is, counts the elements in S) by rows, and the second sum by columns.

The following example should make this correspondence clear. Let $R = C = \{1, 2, \dots, 8\}$, and set $S = \{(i, j) : i \text{ divides } j\}$. We then obtain the matrix in the margin, which only displays the 1's.

4. Numbers again

Look at the table on the left. The number of 1's in column j is precisely the number of divisors of j ; let us denote this number by $t(j)$. Let us ask how large this number $t(j)$ is on the average when j ranges from 1 to n . Thus, we ask for the quantity

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t(j)$$

How large is $\bar{t}(n)$ for arbitrary n ? At first glance, this seems hopeless. For prime numbers p we have $t(p) = 2$, while for 2^k we obtain a large number $t(2^k) = k+1$. So, $t(n)$ is a wildly jumping function, and we surmise that the same is true for $\bar{t}(n)$. Wrong guess, the opposite is true! Counting in two ways provides an unexpected and simple answer.

Consider the matrix A (as above) for the integers 1 up to n . Counting by columns we get $\sum_{j=1}^n t(j)$. How many 1's are in row i ? Easy enough, the 1's correspond to the multiples of i : $1i, 2i, \dots$, and the last multiple not exceeding n is $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor i$. Hence we obtain

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i},$$

where the error in each summand, when passing from $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ to $\frac{n}{i}$, is less than 1. Now the last sum is the n -th harmonic number H_n , so we obtain $H_n - 1 < \bar{t}(n) \leq H_n$, and together with the estimates of H_n on page 13 this gives

$$\log n - 1 < H_n - 1 - \frac{1}{n} < \bar{t}(n) \leq H_n < \log n + 1$$

Thus we have proved the remarkable result that, while $t(n)$ is totally erratic, the average $\bar{t}(n)$ behaves beautifully: It differs from $\log n$ by less than 1.

5. Graphs

Let G be a finite simple graph with vertex set V and edge set E . We have defined in Chapter 13 the degree $d(v)$ of a vertex v as the number of edges which have v as an end-vertex. In the example of the figure, the vertices 1, 2, ..., 7 have degrees 3, 2, 4, 3, 3, 2, 3, respectively. Almost every book in graph theory starts with the following result (that we have already encountered in Chapters 13 and 20):

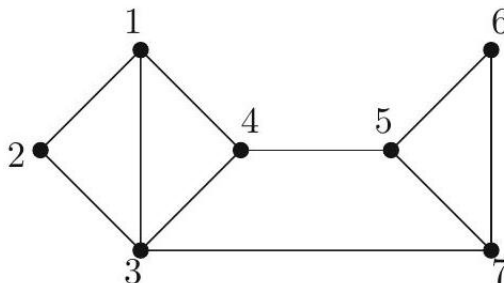
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \quad (4)$$

For the proof consider $S \subseteq V \times E$, where S is the set of pairs (v, e) such that $v \in V$ is an end-vertex of $e \in E$. Counting S in two ways gives on the one hand $\sum_{v \in V} d(v)$, since every vertex contributes $d(v)$ to the count, and on the other hand $2|E|$, since every edge has two ends.

As simple as the result (4) appears, it has many important consequences, some of which will be discussed as we go along. We want to single out in

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{t}(n)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{5}{2}$

The first few values of $\bar{t}(n)$

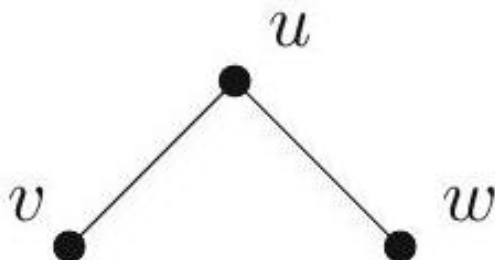


this section the following beautiful application to an extremal problem on graphs. Here is the problem:

Suppose $G = (V, E)$ has n vertices and contains no cycle of length 4 (denoted by C_4), that is, no subgraph K_4 . How many edges can G have at most?

As an example, the graph in the margin on 5 vertices contains no 4-cycle and has 6 edges. The reader may easily show that on 5 vertices the maximal number of edges is 6, and that this graph is indeed the only graph on 5 vertices with 6 edges that has no 4-cycle.

Let us tackle the general problem. Let G be a graph on n vertices without a 4-cycle. As above we denote by $d(u)$ the degree of u . Now we count the following set S in two ways: S is the set of pairs $(u, \{v, w\})$ where u is adjacent to v and to w , with $v \neq w$. In other words, we count all occurrences of



Summing over u , we find $|S| = \sum_{u \in V} \binom{d(u)}{2}$. On the other hand, every pair $\{v, w\}$ has at most one common neighbor (by the C_4 -condition). Hence $|S| \leq \binom{n}{2}$, and we conclude

$$\sum_{u \in V} \binom{d(u)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

or

$$\sum_{u \in V} d(u)^2 \leq n(n-1) + \sum_{u \in V} d(u). \quad (5)$$

Next (and this is quite typical for this sort of extremal problems) we apply the Cauchy-Schwarz inequality to the vectors $(d(u_1), \dots, d(u_n))$ and $(1, 1, \dots, 1)$, obtaining

$$\left(\sum_{u \in V} d(u) \right)^2 \leq n \sum_{u \in V} d(u)^2$$

and hence by (5)

$$\left(\sum_{u \in V} d(u) \right)^2 \leq n^2(n-1) + n \sum_{u \in V} d(u).$$

Invoking (4) we find

$$4|E|^2 \leq n^2(n-1) + 2n|E|$$

or

$$|E|^2 - \frac{n}{2}|E| - \frac{n^2(n-1)}{4} \leq 0.$$

Solving the corresponding quadratic equation we thus obtain the following result of Istvan Reiman.

Theorem. If the graph G on n vertices contains no 4-cycles, then

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}) \right\rfloor \quad (6)$$

For $n = 5$ this gives $|E| \leq 6$, and the graph above shows that equality can hold. Counting in two ways has thus produced in an easy way an upper bound on the number of edges. But how good is the bound (6) in general? The following beautiful example [2] [3] [6] shows that it is almost sharp. As is often the case in such problems, finite geometry leads the way.

In presenting the example we assume that the reader is familiar with the finite field $\mathbb{Z}_p$ of integers modulo a prime p (see page 20). Consider the 3-dimensional vector space X over $\mathbb{Z}_p$. We construct from X the following graph G_p . The vertices of G_p are the one-dimensional subspaces $[\mathbf{v}] := \text{span}_{\mathbb{Z}_p}\{\mathbf{v}\}$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in X$, and we connect two such subspaces $[\mathbf{v}] \neq [\mathbf{w}]$ by an edge if

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0.$$

Note that it does not matter which vector $\neq \mathbf{0}$ we take from the subspace. In the language of geometry, the vertices are the points of the projective plane over $\mathbb{Z}_p$, and $[\mathbf{w}]$ is adjacent to $[\mathbf{v}]$ if $\mathbf{w}$ lies on the polar line of $\mathbf{v}$.

As an example, the graph G_2 has no 4-cycle and contains 9 edges, which almost reaches the bound 10 given by (6). We want to show that this is true for any prime p .

Let us first prove that G_p satisfies the C_4 -condition. If $[\mathbf{u}]$ is a common neighbor of $[\mathbf{v}]$ and $[\mathbf{w}]$, then $\mathbf{u}$ is a solution of the linear equations

$$\begin{aligned} v_1 x + v_2 y + v_3 z &= 0 \\ w_1 x + w_2 y + w_3 z &= 0 \end{aligned}$$

Since $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$ are linearly independent, we infer that the solution space has dimension 1, and hence that the common neighbor $[\mathbf{u}]$ is unique.

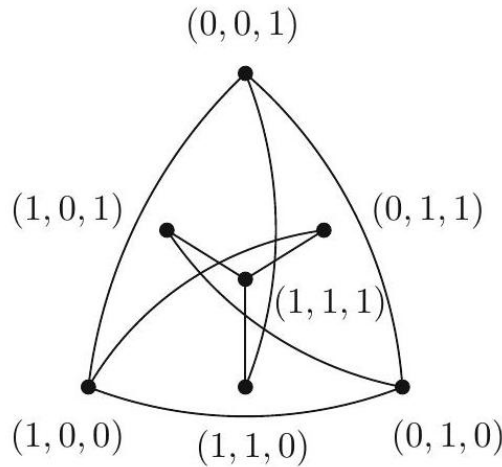
Next, we ask how many vertices G_p has. It's double counting again. The space X contains $p^3 - 1$ vectors $\neq \mathbf{0}$. Since every one-dimensional subspace contains $p - 1$ vectors $\neq \mathbf{0}$, we infer that X has $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1$ one-dimensional subspaces, that is, G_p has $n = p^2 + p + 1$ vertices.

Similarly, any two-dimensional subspace contains $p^2 - 1$ vectors $\neq \mathbf{0}$, and hence $\frac{p^2-1}{p-1} = p + 1$ one-dimensional subspaces.

It remains to determine the number of edges in G_p , or, what is the same by (4), the degrees. By the construction of G_p , the vertices adjacent to $[\mathbf{u}]$ are the solutions of the equation

$$u_1x + u_2y + u_3z = 0 \quad (7)$$

The solution space of (7) is a two-dimensional subspace, and hence there are $p + 1$ vertices adjacent to $[\mathbf{u}]$. But beware, it may happen that $\mathbf{u}$ itself is a solution of (7). In this case there are only p vertices adjacent to $[\mathbf{u}]$.



The graph G_2 : its vertices are all seven nonzero triples (x, y, z) .

In summary, we obtain the following result: If $\mathbf{u}$ lies on the conic given by $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, then $d([\mathbf{u}]) = p$, and, if not, then $d([\mathbf{u}]) = p + 1$. So it remains to find the number of one-dimensional subspaces on the conic

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Let us anticipate the result which we shall prove in a moment.

Claim. There are precisely p^2 solutions (x, y, z) of the equation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, and hence (excepting the zero solution) precisely $\frac{p^2-1}{p-1} = p + 1$ vertices in G_p of degree p .

With this, we complete our analysis of G_p . There are $p + 1$ vertices of degree p , hence $(p^2 + p + 1) - (p + 1) = p^2$ vertices of degree $p + 1$. Using (4), we obtain

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{(p+1)p}{2} + \frac{p^2(p+1)}{2} = \frac{(p+1)^2p}{2} \\ &= \frac{(p+1)p}{4}(1 + (2p+1)) = \frac{p^2+p}{4}(1 + \sqrt{4p^2+4p+1}) \end{aligned}$$

Setting $n = p^2 + p + 1$, the last equation reads

$$|E| = \frac{n-1}{4}(1 + \sqrt{4n-3}),$$

and we see that this almost agrees with (6).

Now to the proof of the claim. The following argument is a beautiful application of linear algebra involving symmetric matrices and their eigenvalues. We will encounter the same method in Chapter 44, which is no coincidence: both proofs are from the same paper by Erdős, Rényi and Sós.

We represent the one-dimensional subspaces of X as before by vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{p^2+p+1}$, any two

of which are linearly independent. Similarly, we may represent the two-dimensional subspaces by the same set of vectors, where the subspace corresponding to $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ is the set of solutions of the equation $u_1x + u_2y + u_3z = 0$ as in (7). (Of course, this is just the duality principle of linear algebra.) Hence, by (7), a one-dimensional subspace, represented by $\mathbf{v}_i$, is contained in the two-dimensional subspace,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

The matrix for G_2 represented by $\mathbf{v}_j$, if and only if $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$.

Consider now the matrix $A = (a_{ij})$ of size $(p^2 + p + 1) \times (p^2 + p + 1)$, defined as follows: The rows and columns of A correspond to $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p^2+p+1}$ (we use the same numbering for rows and columns) with

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A is thus a real symmetric matrix, and we have $a_{ii} = 1$ if $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$, that is, precisely when $\mathbf{v}_i$ lies on the conic $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Thus, all that remains to show is that

$$\text{trace } A = p + 1$$

From linear algebra we know that the trace equals the sum of the eigenvalues. And here comes the trick: While A looks complicated, the matrix A^2 is easy to analyze. We note two facts:

- Any row of A contains precisely $p + 1$ 1's. This implies that $p + 1$ is an eigenvalue of A , since $A\mathbf{1} = (p + 1)\mathbf{1}$, where $\mathbf{1}$ is the vector consisting of 1's.
- For any two distinct rows $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ there is exactly one column with a 1 in both rows (the column corresponding to the unique subspace spanned by $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$).

Using these facts we find

$$A^2 = \begin{pmatrix} p+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & p+1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & p+1 \end{pmatrix} = pI + J$$

where I is the identity matrix and J is the all-ones-matrix. Now, J has the eigenvalue $p^2 + p + 1$ (of multiplicity 1) and 0 (of multiplicity $p^2 + p$). Hence A^2 has the eigenvalues $p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2$ of multiplicity 1 and p of multiplicity $p^2 + p$. Since A is real and symmetric, hence diagonalizable, we find that A has the eigenvalue $p + 1$ or $-(p + 1)$ and $p^2 + p$ eigenvalues $\pm\sqrt{p}$. From Fact 1 above, the first eigenvalue must be $p + 1$. Suppose that $\sqrt{p}$ has multiplicity r , and $-\sqrt{p}$ multiplicity s , then

$$\text{trace } A = (p + 1) + r\sqrt{p} - s\sqrt{p}$$

But now we are home: Since the trace is an integer, we must have $r = s$, so $\text{trace } A = p + 1$.

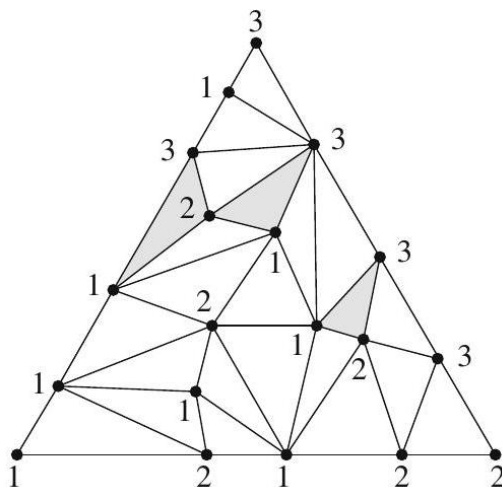
6. Sperner's Lemma

In 1912, Luitzen Brouwer published his famous fixed point theorem:

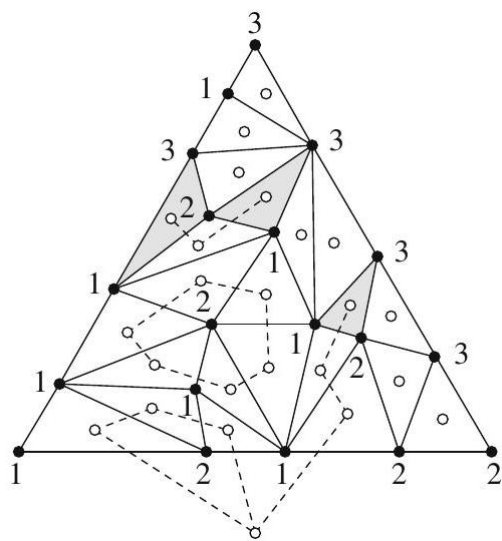
Every continuous function $f : B^n \rightarrow B^n$ of an n -dimensional ball to itself has a fixed point (a point $\mathbf{x} \in B^n$ with $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$).

For dimension 1, that is for an interval, this follows easily from the intermediate value theorem, but for higher dimensions Brouwer's proof needed some sophisticated machinery. It

was therefore quite a surprise when in 1928 young Emanuel Sperner (he was 23 at the time) produced a simple combinatorial result from which both Brouwer's fixed point theorem and the invariance of the dimension under continuous bijective maps could be deduced. And what's more, Sperner's ingenious lemma is matched by an equally beautiful proof - it is just double counting.



The tricolored triangles are shaded.



We discuss Sperner's lemma, and Brouwer's theorem as a consequence, for the first interesting case, that of dimension $n = 2$. The energetic reader should find it not too difficult to extend the proofs to higher dimensions (by induction on the dimension).

Sperner's Lemma.

Suppose that some "big" triangle with vertices V_1, V_2, V_3 is triangulated (that is, decomposed into a finite number of "small" triangles that fit together edge-by-edge). Assume that the vertices in the triangulation get "colors" from the set $\{1, 2, 3\}$ such that V_i receives the color i (for each i), and only the colors i and j are used for vertices along the edge from V_i to V_j (for $i \neq j$), while the interior vertices are colored arbitrarily with 1, 2 or 3. Then in the triangulation there must be a small "tricolored" triangle, which has all three different vertex colors.

- **Proof.** We will prove a stronger statement: The number of tricolored triangles is not only nonzero, it is always odd.

Consider the dual graph to the triangulation, but don't take all its edges - only those which cross an edge that has endvertices with the (different) colors 1 and 2. Thus we get a "partial dual graph" which has degree 1 at all vertices that correspond to tricolored triangles, degree 2 for all triangles in which the two colors 1 and 2 appear, and degree 0 for triangles that do not have both colors 1 and 2. Thus only the tricolored triangles correspond to vertices of odd degree (of degree 1).

However, the vertex of the dual graph which corresponds to the outside of the triangulation has odd degree: in fact, along the big edge from V_1 to V_2 , there is an odd number of changes between 1 and 2. Thus an odd number of edges of the partial dual graph crosses this big edge, while the other big edges cannot have both 1 and 2 occurring as colors.

Now since the number of odd-degree vertices in any finite graph is even (by equation (4)), we find that the number of small triangles with three different colors (corresponding to odd inside vertices of our dual graph) is odd.

With this lemma, it is easy to derive Brouwer's theorem.

- Proof of Brouwer's fixed point theorem (for $n = 2$). Let Δ be the triangle in $\mathbb{R}^3$ with vertices $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, and $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. It suffices to prove that every continuous map $f : \Delta \rightarrow \Delta$ has a fixed point, since Δ is homeomorphic to the two-dimensional ball B_2 .

We use $\delta(\mathcal{T})$ to denote the maximal length of an edge in a triangulation $\mathcal{T}$. One can easily construct an infinite sequence of triangulations $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots$ of Δ such that the sequence of maximal diameters $\delta(\mathcal{T}_k)$ converges to 0. Such a sequence can be obtained by explicit construction, or inductively, for example by taking $\mathcal{T}_{k+1}$ to be the barycentric subdivision of $\mathcal{T}_k$.

For each of these triangulations, we define a 3-coloring of their vertices $\mathbf{v}$ by setting $\lambda(\mathbf{v}) := \min\{i : f(\mathbf{v})_i < v_i\}$, that is, $\lambda(\mathbf{v})$ is the smallest index i such that the i -th coordinate of $f(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$ is negative. If this smallest index i does not exist, then we have found a fixed point and are done: To see this,

note that every $\mathbf{v} \in \Delta$ lies in the plane $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, hence $\sum_i v_i = 1$.

So if $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{v}$, then at least one of the coordinates of $f(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$ must be negative (and at least one must be positive).

Let us check that this coloring satisfies the assumptions of Sperner's lemma. First, the vertex $\mathbf{e}_i$ must receive color i , since the only possible negative component of $f(\mathbf{e}_i) - \mathbf{e}_i$ is the i -th component. Moreover, if $\mathbf{v}$ lies on the edge opposite to $\mathbf{e}_i$, then $v_i = 0$, so the i -th component of $f(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$ cannot be negative, and hence $\mathbf{v}$ does not get the color i .

Sperner's lemma now tells us that in each triangulation $\mathcal{T}_k$ there is a tricolored triangle $\{\mathbf{v}^{k:1}, \mathbf{v}^{k:2}, \mathbf{v}^{k:3}\}$ with $\lambda(\mathbf{v}^{k:i}) = i$. The sequence of points $(\mathbf{v}^{k:1})_{k \geq 1}$ need not converge, but since the simplex Δ is compact some subsequence has a limit point. After replacing the sequence of triangulations $\mathcal{T}_k$ by the corresponding subsequence (which for simplicity we also denote by $\mathcal{T}_k$) we can assume that $(\mathbf{v}^{k:1})_k$ converges to a point $\mathbf{v} \in \Delta$. Now the distance of $\mathbf{v}^{k:2}$ and $\mathbf{v}^{k:3}$ from $\mathbf{v}^{k:1}$ is at most the mesh length $\delta(\mathcal{T}_k)$, which converges to 0. Thus the sequences $(\mathbf{v}^{k:2})$ and $(\mathbf{v}^{k:3})$ converge to the same point $\mathbf{v}$.

But where is $f(\mathbf{v})$? We know that the first coordinate $f(\mathbf{v}^{k:1})_1$ is smaller than that of $\mathbf{v}^{k:1}$ for all k . Now since f is continuous, we derive that the first coordinate of $f(\mathbf{v})$ is smaller or equal to that of $\mathbf{v}$. The same reasoning works for the second and third coordinates. Thus none of the coordinates of $f(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$ is positive - and we have already seen that this contradicts the assumption $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{v}$.

References

- [1] L. E. J. Brouwer: Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1912), 97-115.
- [2] W. G. Brown: On graphs that do not contain a Thomsen graph, Canadian Math. Bull. 9 (1966), 281-285.
- [3] P. Erdős, A. Rényi & V. Sós: On a problem of graph theory, Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966), 215-235.
- [4] P. Erdős & G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, Compositio Math. (1935), 463-470.
- [5] S. Hosten & W. D. Morris: The order dimension of the complete graph, Discrete Math. 201

(1999), 133-139.

[6] I. Reiman: Über ein Problem von K. Zarankiewicz, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 9 (1958), 269-273.

[7] J. Spencer: Minimal scrambling sets of simple orders, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 22 (1971), 349-353.

[8] E. Sperner: Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), 265-272.

[9] W. T. Trotter: Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory, John Hopkins University Press, Baltimore and London 1992.

22.4.3 Tiling rectangles

Some mathematical theorems exhibit a special feature: The statement of the theorem is elementary and easy, but to prove it can turn out to be a tantalizing task - unless you open some magic door and everything becomes clear and simple.

One such example is the following result due to Nicolaas de Bruijn:

Theorem. Whenever a rectangle is tiled by rectangles all of which have at least one side of integer length, then the tiled rectangle has at least one side of integer length.

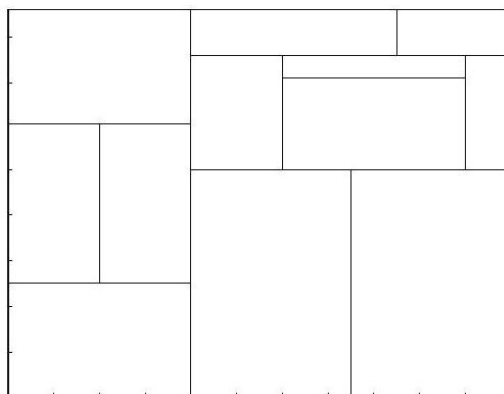
By a tiling we mean a covering of the big rectangle R with rectangles $T_1, \dots, T_m$ that have pairwise disjoint interior, as in the picture to the right. Actually, de Bruijn proved the following result about packing copies of an $a \times b$ rectangle into a $c \times d$ rectangle: If a, b, c, d are integers, then each of a and b must divide one of c or d . This is implied by two applications of the more general theorem above to the given figure, scaled down first by a factor of $\frac{1}{a}$, and then scaled down by a factor of $\frac{1}{b}$. Each small rectangle has then one side equal to 1, and so $\frac{c}{a}$ or $\frac{d}{a}$ must be an integer.

Almost everybody's first attempt is to try induction on the number of small rectangles. Induction can be made to work, but it has to be performed very carefully, and it is not the most elegant option one can come up with. Indeed, in a delightful paper Stan Wagon surveys no less than fourteen different proofs out of which we have selected three; none of them needs induction. The first proof, essentially due to de Bruijn himself, makes use of a very clever calculus trick. The second proof by Richard Rochberg and Sherman Stein is a discrete version of the first proof, which makes it simpler still. But the champion may be the third proof suggested by Mike Paterson. It is just counting in two ways and almost one-line.

In the following we assume that the big rectangle R is placed parallel to the x, y -axes with $(0, 0)$ as the lower left-hand corner. The small rectangles T_i have then sides parallel to the axes as well.

- First Proof. Let T be any rectangle in the plane, where T extends from a to b along the x -axis and from c to d along the y -axis. Here is de Bruijn's trick. Consider the double integral over T ,

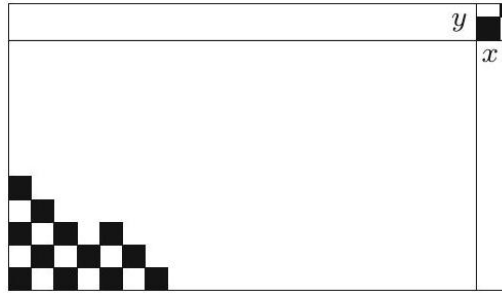
$$\int_c^d \int_a^b e^{2\pi i(x+y)} dx dy. \quad (1)$$



The big rectangle has side lengths 11 and 8.5.

$$\iint_R f(x, y) = \sum_i \iint_{T_i} f(x, y)$$

Additivity of the integral



The amount of black in the corner rectangle is $\min(x, \frac{1}{2}) \cdot \min(y, \frac{1}{2}) + \max(x - \frac{1}{2}, 0) \cdot \max(y - \frac{1}{2}, 0)$, and this is always greater than $\frac{1}{2}xy$.

Since

$$\int_c^d \int_a^b e^{2\pi i(x+y)} dx dy = \int_a^b e^{2\pi i x} dx \cdot \int_c^d e^{2\pi i y} dy$$

it follows that the integral (1) is 0 if and only if at least one of $\int_a^b e^{2\pi i x} dx$ or $\int_c^d e^{2\pi i y} dy$ is equal to 0.

We are going to show that

$$\int_a^b e^{2\pi i x} dx = 0 \iff b - a \text{ is an integer.} \quad (2)$$

But then we will be done! Indeed, by the assumption on the tiling, each $\iint_{T_i}$ is equal to 0, and so by additivity of the integral, $\iint_R = 0$ as well, whence R has an integer side.

It remains to verify (2). From

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{2\pi i x} dx &= \frac{1}{2\pi i} e^{2\pi i x} \Big|_a^b = \frac{1}{2\pi i} (e^{2\pi i b} - e^{2\pi i a}) \\ &= \frac{e^{2\pi i a}}{2\pi i} (e^{2\pi i(b-a)} - 1) \end{aligned}$$

we conclude that

$$\int_a^b e^{2\pi i x} dx = 0 \iff e^{2\pi i(b-a)} = 1.$$

From $e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ we see that the last equation is, in turn, equivalent to

$$\cos 2\pi(b-a) = 1 \text{ and } \sin 2\pi(b-a) = 0.$$

Since $\cos x = 1$ holds if and only if x is an integer multiple of 2π , we must have $b - a \in \mathbb{Z}$, and this also implies $\sin 2\pi(b-a) = 0$.

- Second Proof. Color the plane in a checkerboard fashion with black/ white squares of size $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, starting with a black square at $(0, 0)$.

By the assumption on the tiling every small rectangle T_i must receive an equal amount of black and white, and therefore the big rectangle R too contains the same amount of black and white.

But this implies that R must have an integer side, since otherwise it can be split into four pieces, three of which have equal amounts of black and white, while the piece in the upper right-hand corner does not. Indeed, if $x = a - [a]$, $y = b - [b]$, so that $0 < x, y < 1$, then the amount of black is always greater than that of white.

This is illustrated in the figure in the margin.

- Third proof. Let C be the set of corners in the tiling for which both coordinates are integral (so, for example, $(0, 0) \in C$), and let T be the set of tiles. Form a bipartite graph G on the vertex set $C \cup T$ by joining each corner $c \in C$ to all the tiles of which it is a corner. The hypothesis implies that each tile is joined to 0, 2, or 4 corners in C , since if one corner is in C , then so is also the other end of any integer side. Now look at C . Any $c \in C$ which is not a corner of R is joined to an even number of tiles, but the vertex $(0, 0)$ is joined to only one tile. As the number of odd-degree vertices in any finite graph is even (as we have just observed on page 204), there must be another $c \in C$ of odd degree, and c can only be one of the other vertices of R - end of proof. $\square$

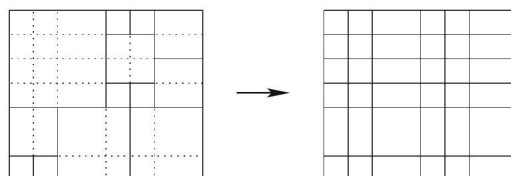
All three proofs can quite easily be adapted to also yield an n -dimensional version of de Bruijn's result: Whenever an n -dimensional box R is tiled by boxes all of which have at least one integer side, then R has an integer side. However, we want to keep our discussion in the plane (for this chapter), and look at a "companion result" to de Bruijn's, due to Max Dehn (many years earlier), which sounds quite similar, but asks for different ideas.

Theorem. A rectangle can be tiled with squares if and only if the ratio of its side lengths is a rational number.

One half of the theorem is immediate. Suppose the rectangle R has side lengths α and β with $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, that is, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$ with $p, q \in \mathbb{N}$. Setting $s := \frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q}$, we can easily tile R with copies of the $s \times s$ square as shown in the margin.

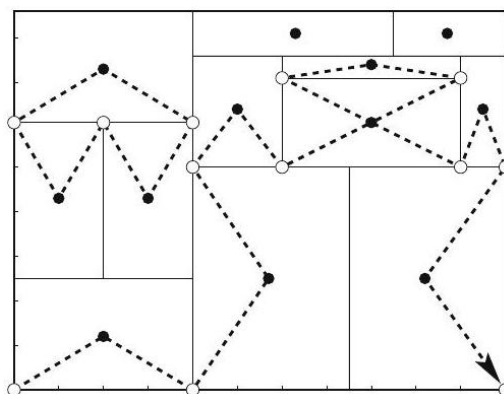
For the proof of the converse Max Dehn used an elegant argument that he had already successfully employed in his solution of Hilbert's third problem (see Chapter 10). In fact, the two papers appeared in successive years in the *Mathematische Annalen*.

- Proof. Suppose R is tiled by squares of possibly different sizes. By scaling we may assume that R is an $a \times 1$ rectangle. Let us assume $a \notin \mathbb{Q}$ and derive a contradiction from this. The first step is to extend the sides of the squares to the full width resp. height of R as in the figure.

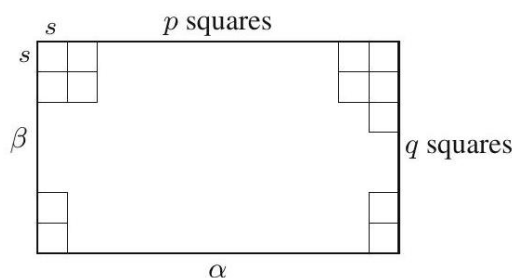


R is now decomposed into a number of small rectangles; let $a_1, a_2, \dots, a_M$ be their side lengths (in any order), and consider the set

$$A := \{1, a, a_1, \dots, a_M\} \subseteq \mathbb{R}.$$



Here the bipartite graph G is drawn with vertices in C white, vertices in T black, and dashed edges.



Next comes a linear algebra part. We define $V(A)$ as the vector space of all linear combinations of the numbers in A with rational coefficients. Note that $V(A)$ contains all side lengths of the squares in the original tiling, since any such side length is the sum of some a_i 's. As the number a is not rational, we may extend $\{1, a\}$ to a basis B of $V(A)$,

$$B = \{b_1 = 1, b_2 = a, b_3, \dots, b_m\}$$

Define the function $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f(1) := 1, \quad f(a) := -1, \quad \text{and} \quad f(b_i) := 0 \text{ for } i \geq 3$$

Linear extension:

$$f(q_1 b_1 + \dots + q_m b_m) := q_1 f(b_1) + \dots + q_m f(b_m)$$

and extend it linearly to $V(A)$.

The following definition of "area" of rectangles finishes the proof in three quick steps: For $c, d \in V(A)$ the area of the $c \times d$ rectangle is defined as

$$\text{area}(\square_c^d) = f(c)f(d).$$

$$(1) \text{ area} \left(\square \left| \begin{smallmatrix} c_1 & c_2 \end{smallmatrix} \right| d \right) = \text{area}(\square_{c_1} d) + \text{area}(\square_{c_2}^d).$$

This follows immediately from the linearity of f . The analogous result holds, of course, for vertical strips.

(2) $\text{area}(R) = \sum_{\text{squares}} \text{area}(\square)$, where the sum runs through the squares in the tiling.

Just note that by (1) $\text{area}(R)$ equals the sum of the areas of all small rectangles in the extended tiling. Since any such rectangle is in exactly one square of the original tiling, we see (again by (1)) that this sum is also equal to the right-hand side of (2).

(3) We have

$$\text{area}(R) = f(a)f(1) = -1,$$

whereas for a square of side length t , $\text{area}(\underbrace{\square}_t) = f(t)^2 \geq 0$, and so

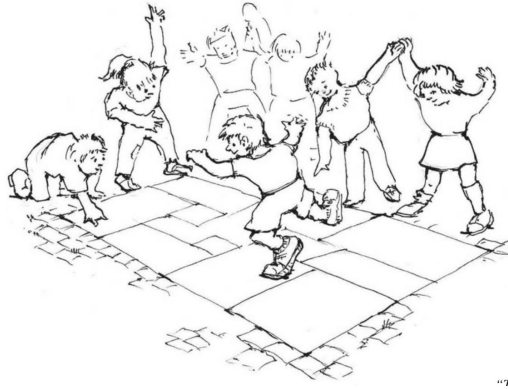
$$\sum_{\text{squares}} \text{area}(\square) \geq 0,$$

and this is our desired contradiction.

For those who want to go for further excursions into the world of tilings the beautiful survey paper [1] by Federico Ardila and Richard Stanley is highly recommended.

References

- [1] F. Ardila & R. P. Stanley: Tilings, Math. Intelligencer (4)32 (2010), 3243.
- [2] N. G. de Bruijn: Filling boxes with bricks, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 37-40.
- [3] M. Dehn: Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, Mathematische Annalen 57 (1903), 314-332.
- [4] S. Wagon: Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle, Amer. Math. Monthly 94 (1987), 601-617.



"The new hopscotch:
Don't hit the integers!"

22.4.4 Three famous theorems on finite sets

In this chapter we are concerned with a basic theme of combinatorics: properties and sizes of special families $\mathcal{F}$ of subsets of a finite set $N = \{1, 2, \dots, n\}$. We start with two results which are classics in the field: the theorems of Sperner and of Erdős-Ko-Rado. These two results have in common that they were reproved many times and that each of them initiated a new field of combinatorial set theory. For both theorems, induction seems to be the natural method, but the arguments we are going to discuss are quite different and truly inspired.

In 1928 Emanuel Sperner asked and answered the following question: Suppose we are given the set $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Call a family $\mathcal{F}$ of subsets of N an antichain if no set of $\mathcal{F}$ contains another set of the family $\mathcal{F}$. What is the size of a largest antichain? Clearly, the family $\mathcal{F}_k$ of all k -sets satisfies the antichain property with $|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{k}$. Looking at the maximum of the binomial coefficients (see page 14) we conclude that there is an antichain of size $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \max_k \binom{n}{k}$. Sperner's theorem now asserts that there are no larger ones.

Theorem 1. The size of a largest antichain of an n -set is $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

- Proof. Of the many proofs the following one, due to David Lubell, is probably the shortest and most elegant. Let $\mathcal{F}$ be an arbitrary antichain. Then we have to show $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. The key to the proof is that we consider chains of subsets $\emptyset = C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots \subseteq C_n = N$, where $|C_i| = i$ for $i = 0, \dots, n$. How many chains are there? Clearly, we obtain a chain by adding one by one the elements of N , so there are just as many chains as there are permutations of N , namely $n!$. Next, for a set $A \in \mathcal{F}$ we ask how many of these chains contain A . Again this is easy. To get from $\emptyset$ to A we have to add the elements of A one by one, and then to pass from A to N we have to add the remaining elements. Thus if A contains k elements, then by considering all these pairs of chains linked together we see that there are precisely $k!(n-k)!$ such chains. Note that no chain can pass through two different sets A and B of $\mathcal{F}$, since $\mathcal{F}$ is an antichain. To complete the proof, let m_k be the number of k -sets in $\mathcal{F}$. Thus $|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^n m_k$. Then it follows from our discussion that the number of chains passing through some member of $\mathcal{F}$ is

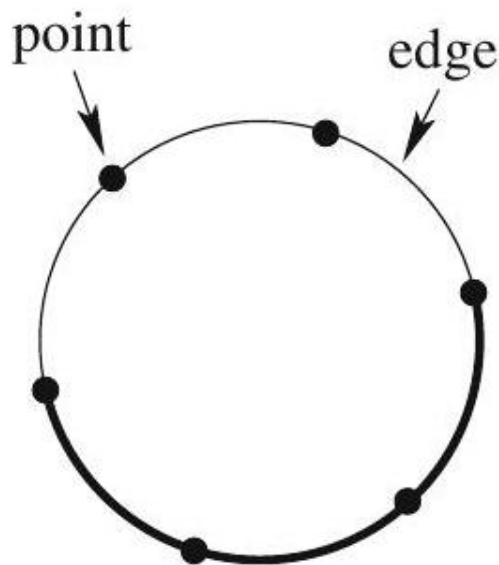
$$\sum_{k=0}^n m_k k!(n-k)!,$$

and this expression cannot exceed the number $n!$ of all chains. Hence



Emanuel Sperner

Check that the family of all $\frac{n}{2}$ -sets for even n respectively the two families of all $\frac{n-1}{2}$ -sets and of all $\frac{n+1}{2}$ -sets, when n is odd, are indeed the only antichains that achieve the maximum size!



A circle C for $n = 6$. The bold edges depict an arc of length 3 .

we conclude

$$\sum_{k=0}^n m_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1, \quad \text{or} \quad \sum_{k=0}^n \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Replacing the denominators by the largest binomial coefficient, we therefore obtain

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \sum_{k=0}^n m_k \leq 1, \quad \text{that is,} \quad |\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^n m_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

and the proof is complete.

Our second result is of an entirely different nature. Again we consider the set $N = \{1, \dots, n\}$. Call a family $\mathcal{F}$ of subsets an intersecting family if any two sets in $\mathcal{F}$ have at least one element in common. It is almost immediate that the size of a largest intersecting family is 2^{n-1} . If $A \in \mathcal{F}$, then the complement $A^c = N \setminus A$ has empty intersection with A and accordingly cannot be in $\mathcal{F}$. Hence we conclude that an intersecting family contains at most half the number 2^n of all subsets, that is, $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. On the other hand, if we consider the family of all sets containing a fixed element, say the family $\mathcal{F}_1$ of all sets containing 1, then clearly $|\mathcal{F}_1| = 2^{n-1}$, and the problem is settled.

But now let us ask the following question: How large can an intersecting family $\mathcal{F}$ be if all sets in $\mathcal{F}$ have the same size, say k ? Let us call such families intersecting k -families. To avoid trivialities, we assume $n \geq 2k$ since otherwise any two k -sets intersect, and there is nothing to prove. Taking up the above idea, we certainly obtain such a family $\mathcal{F}_1$ by considering all k -sets containing a fixed element, say 1. Clearly, we obtain all sets in $\mathcal{F}_1$ by adding to 1 all $(k-1)$ -subsets of $\{2, 3, \dots, n\}$, hence $|\mathcal{F}_1| = \binom{n-1}{k-1}$. Can we do better? No - and this is the theorem of Erdős-Ko-Rado.

Theorem 2. The largest size of an intersecting k -family in an n -set is $\binom{n-1}{k-1}$ when $n \geq 2k$.

Paul Erdős, Chao Ko and Richard Rado found this result in 1938, but it was not published until 23 years later. Since then multitudes of proofs and variants have been given, but the following argument due to Gyula Katona is particularly elegant.

- **Proof.** The key to the proof is the following simple lemma, which at first sight seems to be totally unrelated to our problem. Consider a circle C divided by n points into n edges. Let an arc of length k consist of $k+1$ consecutive points and the k edges between them.

Lemma. Let $n \geq 2k$, and suppose we are given t distinct arcs $A_1, \dots, A_t$ of length k , such that any two arcs have an edge in common. Then $t \leq k$.

To prove the lemma, note first that any point of C is the endpoint of at most one arc. Indeed, if A_i, A_j had a common endpoint v , then they would have to start in different direction (since they are distinct). But then they cannot have an edge in common as $n \geq 2k$. Let us fix A_1 . Since any $A_i (i \geq 2)$ has an edge in common with A_1 , one of the endpoints of A_i is an inner point of A_1 . Since these endpoints must be distinct as we have just seen, and since A_1 contains $k-1$ inner points, we conclude that there can be at most $k-1$ further arcs, and thus at most k arcs altogether.

Now we proceed with the proof of the Erdős-Ko-Rado theorem. Let $\mathcal{F}$ be an intersecting k -family. Consider a circle C with n points and n edges as above. We take any cyclic permutation $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ and write the numbers a_i clockwise next to the edges of C . Let us count the number of sets $A \in \mathcal{F}$ which appear as k consecutive numbers on C . Since $\mathcal{F}$ is an intersecting family we see by our lemma that we get at most k such sets. Since this holds for any cyclic permutation, and since there are $(n-1)!$ cyclic permutations, we produce in this way at most

$$k(n-1)!$$

sets of $\mathcal{F}$ which appear as consecutive elements of some cyclic permutation. How often do we count a fixed set $A \in \mathcal{F}$? Easy enough: A appears in π if the k elements of A appear consecutively in some order. Hence we have $k!$ possibilities to write A consecutively, and $(n-k)!$ ways to order the remaining elements. So we conclude that a fixed set A appears in precisely $k!(n-k)!$ cyclic permutations, and hence that

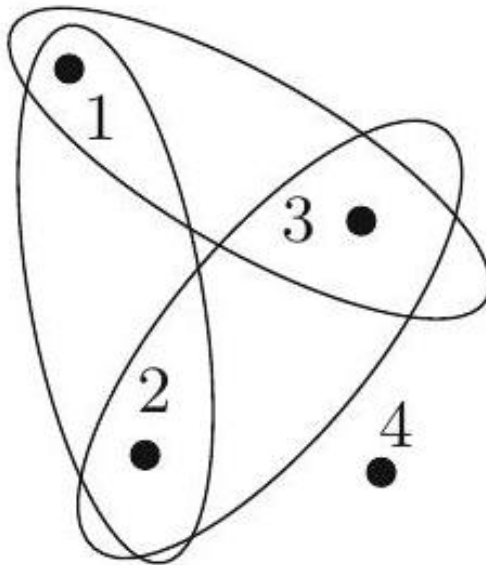
$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}$$

Again we may ask whether the families containing a fixed element are the only intersecting k -families of maximal size. This is certainly not true for $n = 2k$. For example, for $n = 4$ and $k = 2$ the family $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ also has size $\binom{3}{1} = 3$. More generally, for $n = 2k$ we get the largest intersecting k -families, of size $\frac{1}{2} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, by arbitrarily including one out of every

pair of sets formed by a k -set A and its complement $N \setminus A$. But for $n > 2k$ the special families containing a fixed element are indeed the only ones. The reader is invited to try his hand at the proof.

Finally, we turn to the third result which is arguably the most important basic theorem in finite set theory, the "marriage theorem" of Philip Hall proved in 1935. It opened the door to what is today called matching theory, with a wide variety of applications, some of which we shall see as we go along.

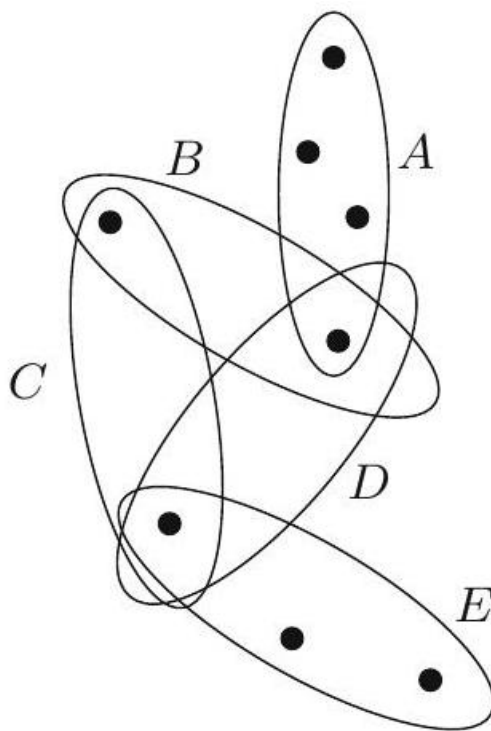
Consider a finite set X and a collection $A_1, \dots, A_n$ of subsets of X (which need not be distinct). Let us call a sequence $x_1, \dots, x_n$ a system of distinct representatives of $\{A_1, \dots, A_n\}$ if the x_i are distinct elements of X , and if $x_i \in A_i$ for all i . Of course, such a system, abbreviated SDR, need not exist, for example when one of the sets A_i is empty. The content of the theorem of Hall is the precise condition under which an SDR exists.



An intersecting family for $n = 4, k = 2$



"A mass wedding"



$\{B, C, D\}$
is a critical family

Before giving the result let us state the human interpretation which gave it the folklore name marriage theorem: Consider a set $\{1, \dots, n\}$ of girls and a set X of boys. Whenever $x \in A_i$, then girl i and boy x are inclined to get married, thus A_i is just the set of possible matches of girl i . An SDR represents then a mass-wedding where every girl marries a boy she likes. Back to sets, here is the statement of the result.

Theorem 3. Let $A_1, \dots, A_n$ be a collection of subsets of a finite set X . Then there exists a system of distinct representatives if and only if the union of any m sets A_i contains at least m elements, for $1 \leq m \leq n$.

The condition is clearly necessary: If m sets A_i contain between them fewer than m elements, then these m sets can certainly not be represented by distinct elements. The surprising fact (resulting in the universal applicability) is that this obvious condition is also sufficient. Hall's original proof was rather complicated, and subsequently many different proofs were given, of which the following one (due to Easterfield and rediscovered by Halmos and Vaughan) may be the most natural.

- **Proof.** We use induction on n . For $n = 1$ there is nothing to prove. Let $n > 1$, and suppose $\{A_1, \dots, A_n\}$ satisfies the condition of the theorem which we abbreviate by (H). Call a collection of ℓ sets A_i with $1 \leq \ell < n$ a critical family if its union has cardinality ℓ . Now we distinguish two cases.

Case 1: There is no critical family.

Choose any element $x \in A_n$. Delete x from X and consider the collection $A'_1, \dots, A'_{n-1}$ with $A'_i = A_i \setminus \{x\}$. Since there is no critical family, we find that the union of any m sets A'_i contains at least m elements. Hence by induction on n there exists an SDR $x_1, \dots, x_{n-1}$ of $\{A'_1, \dots, A'_{n-1}\}$, and together with $x_n = x$, this gives an SDR for the original collection.

Case 2: There exists a critical family.

After renumbering the sets we may assume that $\{A_1, \dots, A_\ell\}$ is a critical family. Then $\bigcup_{i=1}^\ell A_i = \tilde{X}$ with $|\tilde{X}| = \ell$. Since $\ell < n$, we infer the existence of an SDR for $A_1, \dots, A_\ell$ by induction, that is, there is a numbering $x_1, \dots, x_\ell$ of $\tilde{X}$ such that $x_i \in A_i$ for all $i \leq \ell$.

Consider now the remaining collection $A_{\ell+1}, \dots, A_n$, and take any m of these sets. Since the union of $A_1, \dots, A_\ell$ and these m sets contains at least $\ell + m$ elements by condition (H), we infer

that the m sets contain at least m elements outside $\widetilde{X}$. In other words, condition (H) is satisfied for the family

$$A_{\ell+1} \setminus \widetilde{X}, \dots, A_n \setminus \widetilde{X}$$

Induction now gives an SDR for $A_{\ell+1}, \dots, A_n$ that avoids $\widetilde{X}$. Combining it with $x_1, \dots, x_\ell$ we obtain an SDR for all sets A_i . This completes the proof. $\square$

As we mentioned, Hall's theorem was the beginning of the now vast field of matching theory [6]. Of the many variants and ramifications let us state one particularly appealing result which the reader is invited to prove for himself:

Suppose the sets $A_1, \dots, A_n$ all have size $k \geq 1$ and suppose further that no element is contained in more than k sets. Then there exist k SDR's such that for any i the k representatives of A_i are distinct and thus together form the set A_i .

A beautiful result which should open new horizons on marriage possibilities.

References

- [1] T. E. Easterfield: A combinatorial algorithm, J. London Math. Soc. 21 (1946), 219-226.
- [2] P. Erdős, C. Ko & R. Rado: Intersection theorems for systems of finite sets, Quart. J. Math. (Oxford), Ser. (2) 12 (1961), 313-320.
- [3] P. Hall: On representatives of subsets, J. London Math. Soc. 10 (1935), 26-30.
- [4] P. R. Halmos & H. E. Vaughan: The marriage problem, Amer. J. Math. 72 (1950), 214-215.
- [5] G. Katona: A simple proof of the Erdős-Ko-Rado theorem, J. Combinatorial Theory, Ser. B 13 (1972), 183-184.
- [6] L. Lovász & M. D. Plummer: Matching Theory, Akadémiai Kiadó, Budapest 1986.
- [7] D. Lubell: A short proof of Sperner's theorem, J. Combinatorial Theory 1 (1966), 299.
- [8] E. Sperner: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, Math. Zeitschrift 27 (1928), 544-548.

22.4.5 Shuffling cards

How often does one have to shuffle a deck of cards until it is random?

The analysis of random processes is a familiar duty in life ("How long does it take to get to the airport during rush-hour?") as well as in mathematics. Of course, getting meaningful answers to such problems heavily depends on formulating meaningful questions. For the card shuffling problem, this means that we have

- to specify the size of the deck ($n = 52$ cards, say),
- to say how we shuffle (we'll analyze top-in-at-random shuffles first, and then the more realistic and effective riffle shuffles), and finally
- to explain what we mean by "is random" or "is close to random."

So our goal in this chapter is an analysis of the riffle shuffle, due to Edgar N. Gilbert and Claude Shannon (1955, unpublished) and Jim Reeds (1981, unpublished), following the statistician David Aldous and the former magician turned mathematician Persi Diaconis according to [1]. We will not reach the final precise result that 7 riffle shuffles are sufficient to get a deck of $n = 52$ cards very close to random, while 6 riffle shuffles do not suffice - but we will obtain an upper bound of 12, and we will see some extremely beautiful ideas on the way: the concepts of stopping rules and of "strong uniform time," the lemma that strong uniform time bounds the variation distance, Reeds' inversion lemma, and thus the interpretation of shuffling as "reversed sorting." In the end, everything will be reduced to two very classical combinatorial problems, namely the coupon collector and the birthday paradox. So let's start with these!

The birthday paradox

Take n random people - the participants of a class or seminar, say. What is the probability that they all have different birthdays? With the usual simplifying assumptions (365 days a year, no seasonal effects, no twins present) the probability is

$$p(n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right),$$



Persi Diaconis' business card as a magician. In a later interview he said: "If you say that you are a professor at Stanford people treat you respectfully. If you say that you invent magic tricks, they don't want to introduce you to their daughter."

$$\begin{aligned} \sum_{s \geq 1} x^{s-1} (1-x)s &= \\ &= \sum_{s \geq 1} x^{s-1} s - \sum_{s \geq 1} x^s s \\ &= \sum_{s \geq 0} x^s (s+1) - \sum_{s \geq 0} x^s s \\ &= \sum_{s \geq 0} x^s = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

where at the end we sum a geometric series (see page 48). which is smaller than $\frac{1}{2}$ for $n = 23$ (this is the "birthday paradox"!), less than 9 percent for $n = 42$, and exactly 0 for $n > 365$ (the "pigeon-hole principle," see Chapter 28). The formula

is easy to see - if we take the persons in some fixed order: If the first i persons have distinct birthdays, then the probability that the $(i+1)$ -st person doesn't spoil the series is $1 - \frac{i}{365}$, since there are $365 - i$ birthdays left.

Similarly, if n balls are placed independently and randomly into K boxes, then the probability that no box gets more than one ball is

$$p(n, K) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{K}\right)$$

The coupon collector

Children buy photos of pop stars (or soccer stars) for their albums, but they buy them in little nontransparent envelopes, so they don't know which photo they will get. If there are n different photos, what is the expected number of pictures a kid has to buy until he or she gets every motif at least once?

Equivalently, if you randomly take balls from a bowl that contains n distinguishable balls, and if you put your ball back each time, and then again mix well, how often do you have to draw on average until you have drawn each ball at least once?

If you already have drawn k distinct balls, then the probability not to get a new one in the next drawing is $\frac{k}{n}$. So the probability to need exactly s drawings for the next new ball is $\left(\frac{k}{n}\right)^{s-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$. And thus the expected number of drawings for the next new ball is

$$\sum_{s \geq 1} \left(\frac{k}{n}\right)^{s-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) s = \frac{1}{1 - \frac{k}{n}}$$

as we get from the series in the margin. So the expected number of drawings until we have drawn each of the n different balls at least once is

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{k}{n}} = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{2} + \frac{n}{1} = nH_n \approx n \log n$$

with the bounds on the size of harmonic numbers that we had obtained on page 13. So the answer to the coupon collector's problem is that we have to expect that roughly $n \log n$ drawings are necessary.

The estimate that we need in the following is for the probability that you need significantly more than $n \log n$ trials. If V_n denotes the number of drawings needed (this is the random variable whose expected value is $E[V_n] \approx n \log n$), then for $n \geq 1$ and $c \geq 0$, the probability that we need more than $m := \lceil n \log n + cn \rceil$ drawings is

$$\text{Prob}[V_n > m] \leq e^{-c}$$

Indeed, if A_i denotes the event that the ball i is not drawn in the first m drawings, then

$$\begin{aligned} \text{Prob}[V_n > m] &= \text{Prob} \left[\bigcup_i A_i \right] \leq \sum_i \text{Prob}[A_i] \\ &= n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m < ne^{-m/n} \leq e^{-c}. \end{aligned}$$

Now let's grab a deck of n cards. We number them 1 up to n in the order in which they come - so the card numbered "1" is at the top of the deck, while " n " is at the bottom. Let us denote from now on by $\mathfrak{S}_n$ the set of all permutations of $1, \dots, n$. Shuffling the deck amounts to the application of certain random permutations to the order of the cards. Ideally, this might mean that we apply an arbitrary permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ to our starting order $(1, 2, \dots, n)$, each of them with the same probability $\frac{1}{n!}$. Thus, after doing this just once, we would have our deck of cards in order $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$, and this would be a perfect random order. But that's not what happens in real life. Rather, when shuffling only "certain" permutations occur, perhaps not all of them with the same probability, and this is repeated a "certain" number of times. After that, we expect or hope the deck to be at least "close to random."

Top-in-at-random shuffles

These are performed as follows: you take the top card from the deck, and insert it into the deck at one of the n distinct possible places, each of them with probability $\frac{1}{n}$. Thus one of the permutations

$$\begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ \tau_i = (2, 3, \dots, i, 1, i+1, \dots, n) \end{array}$$

is applied, $1 \leq i \leq n$. After one such shuffle the deck doesn't look random, and indeed we expect to need lots of such shuffles until we reach that goal.

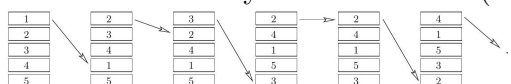
A little calculus shows that $(1 - \frac{1}{n})^n$ is an increasing function in n , which converges to $1/e$. So $(1 - \frac{1}{n})^n < \frac{1}{e}$ holds for all $n \geq 1$.



at-random"

"Top-in-at-random"

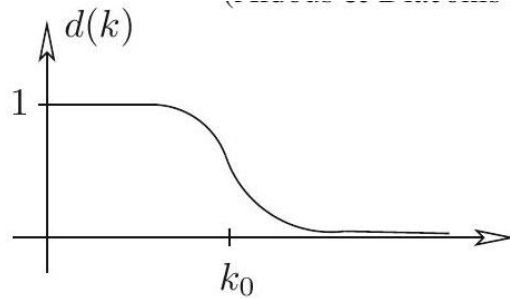
A typical run of top-in-at-random shuffles may look as follows (for $n = 5$):



How should we measure "being close to random"? Probabilists have cooked up the "vari-

ation distance" as a rather unforgiving measure of randomness: We look at the probability distribution on the $n!$ different orderings of our deck, or equivalently, on the $n!$ different permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ that yield the orderings.

For card players, the question is not "exactly how close to uniform is the deck after a million riffle shuffles?", but "is 7 shuffles enough?" (Aldous & Diaconis [1])



Two examples are our starting distribution E , which is given by

$$\begin{aligned} E(\text{id}) &= 1, \\ E(\pi) &= 0 \quad \text{otherwise,} \end{aligned}$$

and the uniform distribution U given by

$$U(\pi) = \frac{1}{n!} \quad \text{for all } \pi \in \mathfrak{S}_n.$$

The variation distance between two probability distributions Q_1 and Q_2 is now defined as

$$\|Q_1 - Q_2\| := \frac{1}{2} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} |Q_1(\pi) - Q_2(\pi)|.$$

By setting $S := \{\pi \in \mathfrak{S}_n : Q_1(\pi) > Q_2(\pi)\}$ and using $\sum_{\pi} Q_1(\pi) = \sum_{\pi} Q_2(\pi) = 1$ we can rewrite this as

$$\|Q_1 - Q_2\| = \max_{S \subseteq \mathfrak{S}_n} |Q_1(S) - Q_2(S)|,$$

with $Q_i(S) := \sum_{\pi \in S} Q_i(\pi)$. Clearly we have $0 \leq \|Q_1 - Q_2\| \leq 1$. In the following, "being close to random" will be interpreted as "having small variation distance from the uniform distribution." Here the distance between the starting distribution and the uniform distribution is very close to 1 :

$$\|E - U\| = 1 - \frac{1}{n!}$$

After one top-in-at-random shuffle, this will not be much better:

$$\|\text{Top} - U\| = 1 - \frac{1}{(n-1)!}.$$

The probability distribution on $\mathfrak{S}_n$ that we obtain by applying the top-in-at-random shuffle k times will be denoted by Top^*k . So how does $\|\text{Top}^*k - U\|$ behave if k gets larger, that is, if we repeat the shuffling? And similarly for other types of shuffling? General theory (in particular, Markov chains on finite groups; see e.g. Behrend [3]) implies that for large k the variation distance $d(k) := \|\text{Top}^*k - U\|$ goes to zero exponentially fast, but it does not yield the "cut-off" phenomenon that one observes in practice: After a certain number k_0 of shuffles "suddenly" $d(k)$ goes to zero rather fast. Our margin displays a schematic sketch of the situation.

Strong uniform stopping rules

The amazing idea of strong uniform stopping rules by Aldous and Diaconis captures the essential features. Imagine that the casino manager closely watches the shuffling process, analyzes the specific permutations that are applied to the deck in each step, and after a number of steps that depends on the permutations that he has seen calls "STOP!". So he has a stopping rule that ends the shuffling process. It depends only on the (random) shuffles that have already been applied. The stopping rule is strong uniform if the following condition holds for all $k \geq 0$:

If the process is stopped after exactly k steps, then the resulting permutations of the deck have uniform distribution (exactly!).

Let T be the number of steps that are performed until the stopping rule tells the manager to cry "STOP!"; so this is a random variable. Similarly, the ordering of the deck after k shuffles is given by a random variable X_k (with values in $\mathfrak{S}_n$). With this, the stopping rule is strong uniform if for all feasible values of k ,

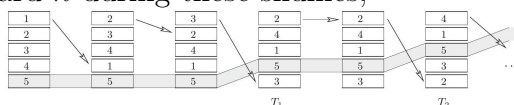
$$\text{Prob}[X_k = \pi \mid T = k] = \frac{1}{n!} \quad \text{for all } \pi \in \mathfrak{S}_n.$$

Three aspects make this interesting, useful, and remarkable:

1. Strong uniform stopping rules exist: For many examples they are quite simple.
2. Moreover, these can be analyzed: Trying to determine $\text{Prob}[T > k]$ leads often to simple combinatorial problems.
3. This yields effective upper bounds on the variation distances such as $d(k) = \|\text{Top}^{*k} - \text{U}\|$.

For example, for the top-in-at-random shuffles a strong uniform stopping rule is "STOP after the original bottom card (labelled n) is first inserted back into the deck."

Indeed, if we trace the card n during these shuffles,



we see that during the whole process the ordering of the cards below this card is completely uniform. So, after the card n rises to the top and then is inserted at random, the deck is uniformly distributed; we just don't know when precisely this happens (but the manager does). Now let T_i be the random variable which counts the number of shuffles that are performed until for the first time i cards lie below card n . So we have to determine the distribution of

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_{n-1} - T_{n-2}) + (T - T_{n-1}).$$

But each summand in this corresponds to a coupon collector's problem: $T_i - T_{i-1}$ is the time until the top card is inserted at one of the i possible places below the card n . So it is also the time that the coupon collector takes from the $(n-i)$ -th coupon to the $(n-i+1)$ -st coupon. Let V_i be the number of pictures bought until he has i different pictures. Then

$$V_n = V_1 + (V_2 - V_1) + \cdots + (V_{n-1} - V_{n-2}) + (V_n - V_{n-1}),$$

and we have seen that $\text{Prob}[T_i - T_{i-1} = j] = \text{Prob}[V_{n-i+1} - V_{n-i} = j]$ for all i and j . Hence the coupon collector and the top-in-at-random shuffler perform equivalent sequences of independent random processes, just in the opposite order (for the coupon collector, it's hard at the end). Thus we know that the strong uniform stopping rule for the top-in-at-random shuffles takes more than $k = \lceil n \log n + cn \rceil$ steps with low probability:

$$\text{Prob}[T > k] \leq e^{-c}$$

And this in turn means that after $k = \lceil n \log n + cn \rceil$ top-in-at-random shuffles, our deck is "close to random," with

$$d(k) = \|\text{Top}^{*k} - \text{U}\| \leq e^{-c}$$

due to the following simple but crucial lemma.

Lemma. Let $Q : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{R}$ be any probability distribution that defines a shuffling process Q^{*k} with a strong uniform stopping rule whose stopping time is T . Then for all $k \geq 0$,

$$\|Q^{*k} - U\| \leq \text{Prob}[T > k]$$

- **Proof.** If X is a random variable with values in $\mathfrak{S}_n$, with probability distribution Q , then we write $Q(S)$ for the probability that X takes a value in $S \subseteq \mathfrak{S}_n$. Thus $Q(S) = \text{Prob}[X \in S]$, and in the case of the uniform distribution $Q = U$ we get

$$U(S) = \text{Prob}[X \in S] = \frac{|S|}{n!}$$

For every subset $S \subseteq \mathfrak{S}_n$, we get the probability that after k steps our deck is ordered according to a permutation in S as

$$\begin{aligned} Q^{*k}(S) &= \text{Prob}[X_k \in S] \\ &= \sum_{j \leq k} \text{Prob}[X_k \in S \wedge T = j] + \text{Prob}[X_k \in S \wedge T > k] \\ &= \sum_{j \leq k} U(S) \text{Prob}[T = j] + \text{Prob}[X_k \in S \mid T > k] \cdot \text{Prob}[T > k] \\ &= U(S)(1 - \text{Prob}[T > k]) + \text{Prob}[X_k \in S \mid T > k] \cdot \text{Prob}[T > k] \\ &= U(S) + (\text{Prob}[X_k \in S \mid T > k] - U(S)) \cdot \text{Prob}[T > k]. \end{aligned}$$

This yields

$$|Q^{*k}(S) - U(S)| \leq \text{Prob}[T > k]$$

since

$$\text{Prob}[X_k \in S \mid T > k] - U(S)$$

is a difference of two probabilities, so it has absolute value at most 1.

This is the point where we have completed our analysis of the top-in-at-random shuffle: We have proved the following upper bound for the number of shuffles needed to get "close to random."

Theorem 1. Let $c \geq 0$ and $k := \lceil n \log n + cn \rceil$. Then after performing k top-in-at-random shuffles on a deck of n cards, the variation distance from the uniform distribution satisfies

$$d(k) := \|\text{Top}^{*k} - U\| \leq e^{-c}.$$

One can also verify that the variation distance $d(k)$ stays large if we do significantly fewer than $n \log n$ top-in-at-random shuffles. The reason is that a smaller number of shuffles will not suffice to destroy the relative ordering on the lowest few cards in the deck.

Of course, top-in-at-random shuffles are extremely inefficient - with the bounds of our theorem, we need more than $n \log n \approx 205$ top-in-at random shuffles until a deck of $n = 52$ cards is mixed up well. Thus we now switch our attention to a much more interesting and realistic model of shuffling.

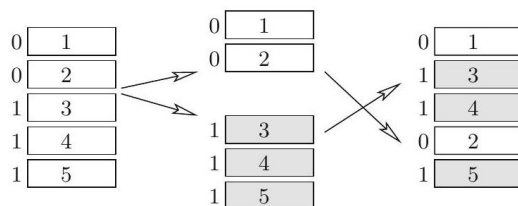
Riffle shuffles

This is what dealers do at the casino: They take the deck, split it into two parts, and these are then interleaved, for example by dropping cards from the bottoms of the two half-decks in some irregular pattern.

Again a riffle shuffle performs a certain permutation on the cards in the deck, which we initially assume to be labelled from 1 to n , where 1 is the top card. The riffle shuffles correspond exactly to the permutations $\pi \in \mathfrak{S}_n$ such that the sequence

$$(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$$

consists of two interlaced increasing sequences (only for the identity permutation it is one increasing sequence), and that there are exactly $2^n - n$ distinct riffle shuffles on a deck of n cards.



In fact, if the pack is split such that the top t cards are taken into the right hand ($0 \leq t \leq n$) and the other $n - t$ cards into the left hand, then there are $\binom{n}{t}$ ways to interleave the two hands, all of which generate distinct permutations - except that for each t there is one possibility to obtain the identity permutation.

Now it's not clear which probability distribution one should put on the riffle shuffles - there is no unique answer since amateurs and professional dealers would shuffle differently. However, the following model, developed first by Edgar N. Gilbert and Claude Shannon in 1955 (at the legendary



"A riffle shuffle"

The inverse riffle shuffles correspond to the permutations $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ that are increasing except for at most one "descent." (Only the identity permutation has no descent.)

Bell Labs "Mathematics of Communication" department at the time), has several virtues:

- it is elegant, simple, and seems natural,
- it models quite well the way an amateur would perform riffle shuffles,
- and we have a chance to analyze it.

Here are three descriptions - all of them describe the same probability distribution Rif on $\mathfrak{S}_n$:

1. $\text{Rif} : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$\text{Rif}(\pi) := \begin{cases} \frac{n+1}{2^n} & \text{if } \pi = \text{id} \\ \frac{1}{2^n} & \text{if } \pi \text{ consists of two increasing sequences,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2. Cut off t cards from the deck with probability $\frac{1}{2^n} \binom{n}{t}$, take them into your right hand, and take the rest of the deck into your left hand. Now when you have r cards in the right hand and ℓ in the left, "drop" the bottom card from your right hand with probability $\frac{r}{r+\ell}$, and from your left hand with probability $\frac{\ell}{r+\ell}$. Repeat!
3. An inverse shuffle would take a subset of the cards in the deck, remove them from the deck, and place them on top of the remaining cards of the deck - while maintaining the relative order in both parts of the deck. Such a move is determined by the subset of the cards: Take all subsets with equal probability. Equivalently, assign a label "0" or "1" to each card, randomly and independently with probabilities $\frac{1}{2}$, and move the cards labelled "0" to the top.

It is easy so see that these descriptions yield the same probability distributions. For (1) (3) just observe that we get the identity permutation whenever all the 0-cards are on top of all the cards that are assigned a 1. This defines the model. So how can we analyze it? How many riffle shuffles are needed to get close to random? We won't get the precise best-possible answer, but quite a good one, by combining three components:

- (1) We analyze inverse riffle shuffles instead,
- (2) we describe a strong uniform stopping rule for these,
- (3) and show that the key to its analysis is given by the birthday paradox!

Theorem 2. After performing k riffle shuffles on a deck of n cards, the variation distance from a uniform distribution satisfies

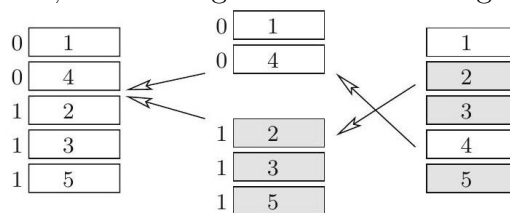
$$\|\text{Rif}^{*k} - U\| \leq 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{2^k}\right)$$

- Proof. (1) We may indeed analyze inverse riffle shuffles and try to see how fast they get us from the starting distribution to (close to) uniform. These inverse shuffles correspond to the probability distribution that is given by $\overline{\text{Rif}}(\pi) := \text{Rif}(\pi^{-1})$. Now the fact that every permutation has its unique inverse, and the fact that $U(\pi) = U(\pi^{-1})$, yield

$$\|\text{Rif}^{*k} - U\| = \|\overline{\text{Rif}}^{*k} - U\|.$$

(This is Reeds' inversion lemma!)

- (2) In every inverse riffle shuffle, each card gets associated a digit 0 or 1 :



If we remember these digits - say we just write them onto the cards then after k inverse riffle shuffles, each card has gotten an ordered string of k digits. Our stopping rule is: "STOP as soon as all cards have distinct strings."

When this happens, the cards in the deck are sorted according to the binary numbers $b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1$, where b_i is the bit that the card has picked up in the i -th inverse riffle shuffle. Since these bits are perfectly random and independent, this stopping rule is strong uniform! In the following example, for $n = 5$ cards, we need $T = 3$ inverse shuffles until we stop:

000	4			4	0	1		1
		<		2			←	
001			01			4		2
010			01			2		
			10					
101						3		4
						15		
111				11 3	1			5

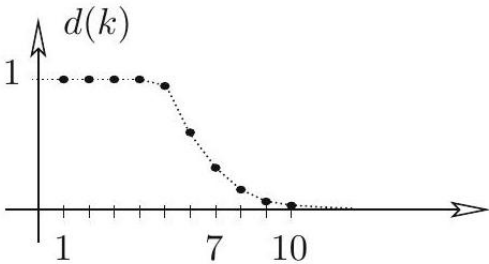
(3) The time T taken by this stopping rule is distributed according to the birthday paradox, for $K = 2^k$: We put two cards into the same box if they have the same label $b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1 \in \{0, 1\}^k$. So there are $K = 2^k$ boxes, and the probability that some box gets more than one card is

$$\text{Prob}[T > k] = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{2^k}\right),$$

and as we have seen this bounds the variation distance $\|\text{Rif}^{*k} - \text{U}\| = \|\overline{\text{Rif}}^{*k} - \text{U}\|$. $\square$

k	$d(k)$
1	1.000
2	1.000
3	1.000
4	1.000
5	0.952
6	0.614
7	0.334
8	0.167
9	0.085
10	0.043

The variation distance after k riffle shuffles, according to [2]



So how often do we have to shuffle? For large n we will need roughly $k = 2 \log_2(n)$ shuffles. Indeed, setting $k := 2 \log_2(cn)$ for some $c \geq 1$ we find (with a bit of calculus) that $P[T > k] \approx 1 - e^{-\frac{1}{2c^2}} \approx \frac{1}{2c^2}$. Explicitly, for $n = 52$ cards the upper bound of Theorem 2 reads $d(10) \leq 0.73, d(12) \leq 0.28, d(14) \leq 0.08$ - so $k = 12$ should be "random enough" for all practical purposes. But we don't do 12 shuffles "in practice" - and they are not really necessary, as a more detailed analysis shows (with the results given in the margin). The analysis of riffle shuffles is part of a lively ongoing discussion about the right measure of what is "random enough." Diaconis [4] is a guide to recent developments. Indeed, does it matter? Yes, it does: Even after three good riffle shuffles a sorted deck of 52 cards looks quite random . . . but it isn't. Martin Gardner [5, Chapter 7] describes a number of striking card tricks that are based on the hidden order in such a deck!

References

- [1] D. Aldous & P. Diaconis: Shuffling cards and stopping times, *Amer. Math. Monthly* 93 (1986), 333-348.
- [2] D. Bayer & P. Diaconis: Trailing the dovetail shuffle to its lair, *Annals Applied Probability* 2 (1992), 294-313.
- [3] E. Behrends: Introduction to Markov Chains, Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden 2000.
- [4] P. Diaconis: Mathematical developments from the analysis of riffle shuffling, in: "Groups, Combinatorics and Geometry. Durham 2001" (A. A. Ivanov, M. W. Liebeck and J. Saxl, eds.), World Scientific, Singapore 2003, pp. 73-97.
- [5] M. Gardner: *Mathematical Magic Show*, Knopf, New York/Allen & Unwin, London 1977.
- [6] E. N. Gilbert: *Theory of Shuffling*, Technical Memorandum, Bell Laboratories, Murray Hill NJ, 1955.



22.4.6 Lattice paths and determinants

The essence of mathematics is proving theorems - and so, that is what mathematicians do: They prove theorems. But to tell the truth, what they really want to prove, once in their lifetime, is a Lemma, like the one by Fatou in analysis, the Lemma of Gauss in number theory, or the BurnsideFrobenius Lemma in combinatorics.

Now what makes a mathematical statement a true Lemma? First, it should be applicable to a wide variety of instances, even seemingly unrelated problems. Secondly, the statement should, once you have seen it, be completely obvious. The reaction of the reader might well be one of faint envy: Why haven't I noticed this before? And thirdly, on an esthetic level, the Lemma - including its proof - should be beautiful!

In this chapter we look at one such marvelous piece of mathematical reasoning, a counting lemma that first appeared in a paper by Bernt Lindström in 1972. Largely overlooked at the time, the result became an instant classic in 1985, when Ira Gessel and Gerard Viennot rediscovered it and demonstrated in a wonderful paper how the lemma could be successfully applied to a diversity of difficult combinatorial enumeration problems.

The starting point is the usual permutation representation of the determinant of a matrix. Let $M = (m_{ij})$ be a real $n \times n$ matrix. Then

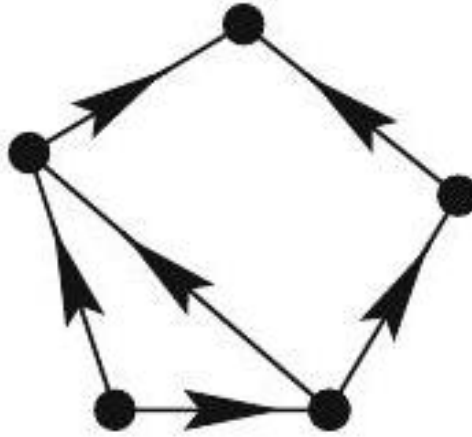
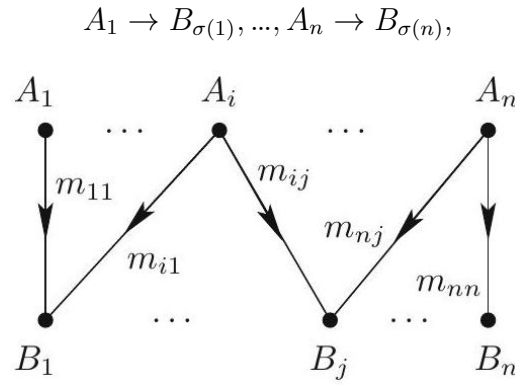
$$\det M = \sum_{\sigma} \text{sign } \sigma m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \cdots m_{n\sigma(n)}, \quad (1)$$

where σ runs through all permutations of $\{1, 2, \dots, n\}$, and the sign of σ is 1 or -1, depending on whether σ is the product of an even or an odd number of transpositions.

Now we pass to graphs, more precisely to weighted directed bipartite graphs. Let the vertices $A_1, \dots, A_n$ stand for the rows of M , and $B_1, \dots, B_n$ for the columns. For each pair of i and j draw an arrow from A_i to B_j and give it the weight m_{ij} , as in the figure.

In terms of this graph, the formula (1) has the following interpretation:

- The left-hand side is the determinant of the path matrix M , whose (i, j) -entry is the weight of the (unique) directed path from A_i to B_j .
- The right-hand side is the weighted (signed) sum over all vertex-disjoint path systems from $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ to $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$. Such a system $\mathcal{P}_\sigma$ is given by paths



An acyclic directed graph

and the weight of the path system $\mathcal{P}_\sigma$ is the product of the weights of the individual paths:

$$w(\mathcal{P}_\sigma) = w(A_1 \rightarrow B_{\sigma(1)}) \cdots w(A_n \rightarrow B_{\sigma(n)}).$$

In this interpretation formula (1) reads

$$\det M = \sum_{\sigma} \text{sign } \sigma w(\mathcal{P}_\sigma).$$

And what is the result of Gessel and Viennot? It is the natural generalization of (1) from bipartite to arbitrary graphs. It is precisely this step which makes the Lemma so widely applicable - and what's more, the proof is stupendously simple and elegant.

Let us first collect the necessary concepts. We are given a finite acyclic directed graph $G = (V, E)$, where acyclic means that there are no directed cycles in G . In particular, there are only finitely many directed paths between any two vertices A and B , where we include all trivial paths $A \rightarrow A$ of length 0. Every edge e carries a weight $w(e)$. If P is a directed path from A to B , written shortly $P : A \rightarrow B$, then we define the weight of P as

$$w(P) := \prod_{e \in P} w(e),$$

which is defined to be $w(P) = 1$ if P is a path of length 0.

Now let $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ and $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ be two sets of n vertices, where $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ need not be disjoint. To $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ we associate the path matrix $M = (m_{ij})$ with

$$m_{ij} := \sum_{P: A_i \rightarrow B_j} w(P).$$

A path system $\mathcal{P}$ from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{B}$ consists of a permutation σ together with n paths $P_i : A_i \rightarrow B_{\sigma(i)}$, for $i = 1, \dots, n$; we write $\text{sign } \mathcal{P} = \text{sign } \sigma$. The weight of $\mathcal{P}$ is the product of the path weights

$$w(\mathcal{P}) = \prod_{i=1}^n w(P_i) \quad (2)$$

which is the product of the weights of all the edges of the path system.

Finally, we say that the path system $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n)$ is vertex-disjoint if the paths of $\mathcal{P}$ are pairwise vertex-disjoint.

Lemma. Let $G = (V, E)$ be a finite weighted acyclic directed graph, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ and $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ two n -sets of vertices, and M the path matrix from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{B}$. Then

$$\det M = \sum_{\substack{\mathcal{P} \text{ vertex-disjoint} \\ \text{path system}}} \text{sign } \mathcal{P} w(\mathcal{P}). \quad (3)$$

- Proof. A typical summand of $\det(M)$ is $\text{sign } \sigma m_{1\sigma(1)} \cdots m_{n\sigma(n)}$, which can be written as

$$\text{sign } \sigma \left(\sum_{P_1: A_1 \rightarrow B_{\sigma(1)}} w(P_1) \right) \cdots \left(\sum_{P_n: A_n \rightarrow B_{\sigma(n)}} w(P_n) \right).$$

Summing over σ we immediately find from (2) that

$$\det M = \sum_{\mathcal{P}} \text{sign } \mathcal{P} w(\mathcal{P}),$$

where $\mathcal{P}$ runs through all path systems from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{B}$ (vertex-disjoint or not). Hence to arrive at (3), all we have to show is

$$\sum_{\mathcal{P} \in N} \text{sign } \mathcal{P} w(\mathcal{P}) = 0 \quad (4)$$

where N is the set of all path systems that are not vertex-disjoint. And this is accomplished by an argument of singular beauty. Namely, we exhibit an involution $\pi : N \rightarrow N$ (without fixed points) such that for $\mathcal{P}$ and $\pi\mathcal{P}$

$$w(\pi\mathcal{P}) = w(\mathcal{P}) \quad \text{and} \quad \text{sign } \pi\mathcal{P} = -\text{sign } \mathcal{P}$$

Clearly, this will imply (4) and thus the formula (3) of the Lemma.

The involution π is defined in the most natural way. Let $\mathcal{P} \in N$ with paths $P_i : A_i \rightarrow B_{\sigma(i)}$. By definition, some pair of paths will intersect:

- Let i_0 be the minimal index such that P_{i_0} shares some vertex with another path.
- Let X be the first such common vertex on the path P_{i_0} .
- Let j_0 be the minimal index ($j_0 > i_0$) such that P_{j_0} has the vertex X in common with P_{i_0} .

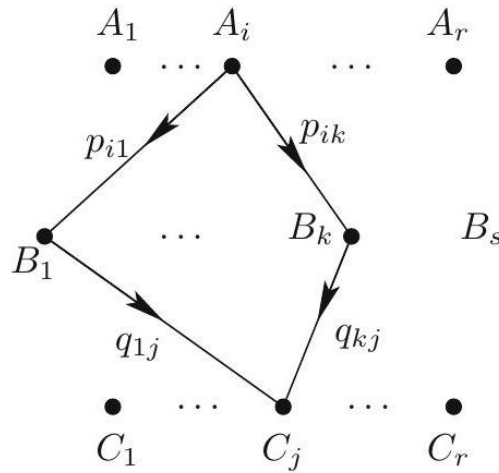
Now we construct the new system $\pi\mathcal{P} = (P'_1, \dots, P'_n)$ as follows:

- Set $P'_k = P_k$ for all $k \neq i_0, j_0$.
- The new path P'_{i_0} goes from A_{i_0} to X along P_{i_0} , and then continues to $B_{\sigma(j_0)}$ along P_{j_0} . Similarly, P'_{j_0} goes from A_{j_0} to X along P_{j_0} and continues to $B_{\sigma(i_0)}$ along P_{i_0} .

Clearly $\pi(\pi\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, since the index i_0 , the vertex X , and the index j_0 are the same as before. In other words, applying π twice we switch back to the old paths P_i . Next, since $\pi\mathcal{P}$ and $\mathcal{P}$ use precisely the same edges, we certainly have $w(\pi\mathcal{P}) = w(\mathcal{P})$. And finally, since the new permutation σ' is obtained by multiplying σ with the transposition (i_0, j_0) , we find that $\text{sign } \pi\mathcal{P} = -\text{sign } \mathcal{P}$, and that's it.

The Gessel-Viennot Lemma can be used to derive all basic properties of determinants, just by looking at appropriate graphs. Let us consider one particularly striking example, the formula of Binet-Cauchy, which gives a very useful generalization of the product rule for determinants.

Theorem. If P is an $r \times s$ matrix and Q an $s \times r$ matrix, $r \leq s$, then



$$\det(PQ) = \sum_{\mathcal{Z}} (\det P_{\mathcal{Z}}) (\det Q_{\mathcal{Z}})$$

where $P_{\mathcal{Z}}$ is the $r \times r$ submatrix of P with column-set $\mathcal{Z}$, and $Q_{\mathcal{Z}}$ the $r \times r$ submatrix of Q with the corresponding rows $\mathcal{Z}$.

- **Proof.** Let the bipartite graph on $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ correspond to P as before, and similarly the bipartite graph on $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ to Q . Consider now the concatenated graph as indicated in the figure on the left, and observe that the (i, j) entry m_{ij} of the path matrix M from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{C}$ is precisely $m_{ij} = \sum_k p_{ik} q_{kj}$, thus $M = PQ$. Since the vertex-disjoint path systems from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{C}$ in the concatenated graph correspond to pairs of systems from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{Z}$ resp. from $\mathcal{Z}$ to $\mathcal{C}$, the result follows immediately from the Lemma, by noting that $\text{sign } (\sigma\tau) = (\text{sign } \sigma)(\text{sign } \tau)$.

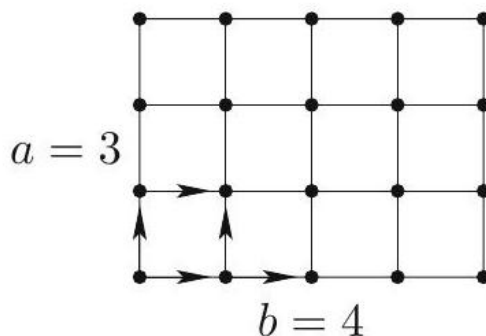
The Lemma of Gessel-Viennot is also the source of a great number of results that relate determinants to enumerative properties. The recipe is always the same: Interpret the matrix M as a path matrix, and try to compute the right-hand side of (3). As an illustration we will consider the original problem studied by Gessel and Viennot, which led them to their Lemma:

Suppose that $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ and $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ are two sets of natural numbers. We wish to compute the determinant of the matrix $M = (m_{ij})$, where m_{ij} is the binomial coefficient $\binom{a_i}{b_j}$.

In other words, Gessel and Viennot were looking at the determinants of arbitrary square matrices of Pascal's triangle, such as the matrix

$$\det \begin{pmatrix} \binom{3}{1} & \binom{3}{3} & \binom{3}{4} \\ \binom{4}{1} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{6}{1} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} \\ \binom{1}{1} & \binom{3}{3} & \binom{4}{4} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 6 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

given by the bold entries of Pascal's triangle, as displayed in the margin. As a preliminary step to the solution of the problem we recall a well-known result which connects binomial coefficients to lattice paths. Consider an $a \times b$ -lattice as in the margin. Then the number of paths from the lower left-hand corner to the upper right-hand corner, where the only steps that



are allowed for the paths are up (North) and to the right (East), is $\binom{a+b}{a}$.

The proof of this is easy: each path consists of an arbitrary sequence of b "east" and a "north" steps, and thus it can be encoded by a sequence of the form NENEEEN, consisting of $a+b$ letters, a N's and b E's. The number of such strings is the number of ways to choose a positions of letters N from a total of $a+b$ positions, which is $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$.

Now look at the figure to the right, where A_i is placed at the point $(0, -a_i)$ and B_j at $(b_j, -b_j)$.

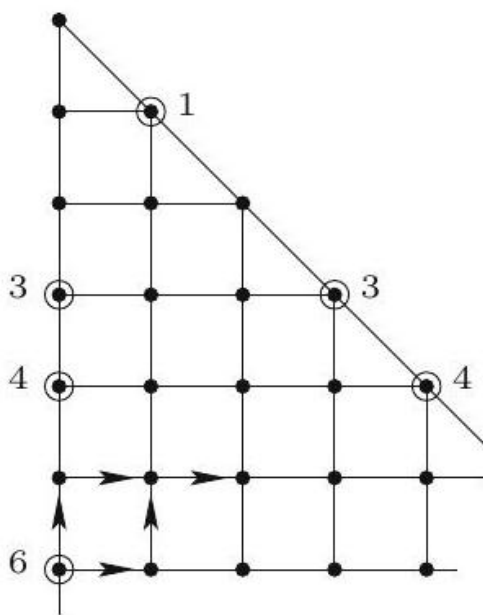
The number of paths from A_i to B_j in this grid that use only steps to the north and east is, by what we just proved, $\binom{b_j + (a_i - b_j)}{b_j} = \binom{a_i}{b_j}$. In other words, the matrix of binomials M is precisely the path matrix from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{B}$ in the directed lattice graph for which all edges have weight 1, and all edges are directed to go north or east. Hence to compute $\det M$ we may apply the Gessel-Viennot Lemma. A moment's thought shows that every vertex-disjoint path system $\mathcal{P}$ from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{B}$ must consist of paths $P_i : A_i \rightarrow B_i$ for all i . Thus the only possible permutation is the identity, which has sign = 1, and we obtain the beautiful result

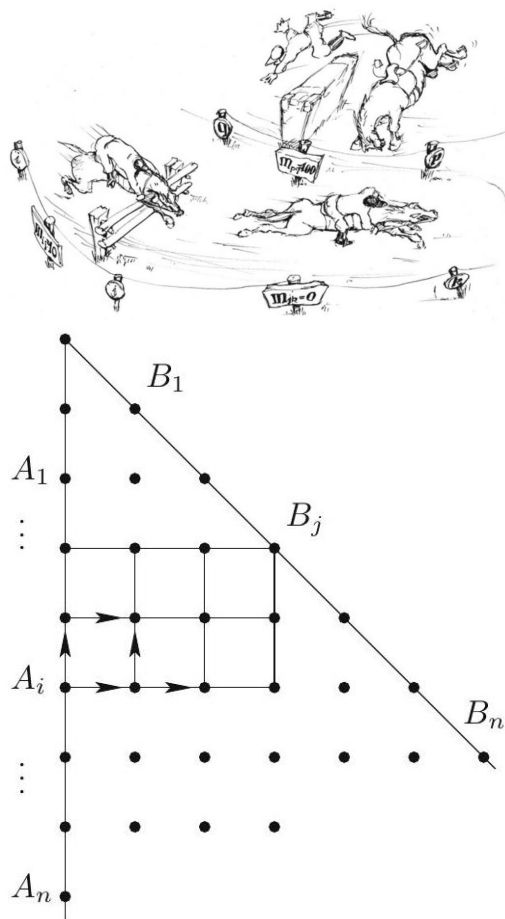
$$\det \left(\binom{a_i}{b_j} \right) = \# \text{ vertex-disjoint path systems from } \mathcal{A} \text{ to } \mathcal{B}.$$

In particular, this implies the far from obvious fact that $\det M$ is always nonnegative, since the right-hand side of the equality counts something. More precisely, one gets from the Gessel-Viennot Lemma that $\det M = 0$ if and only if $a_i < b_i$ for some i .

In our previous small example,

$$\det \begin{pmatrix} \binom{3}{1} & \binom{3}{4} & \binom{3}{4} \\ \binom{4}{1} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{6}{1} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} \end{pmatrix} = \# \text{ vertex-disjoint path systems in}$$



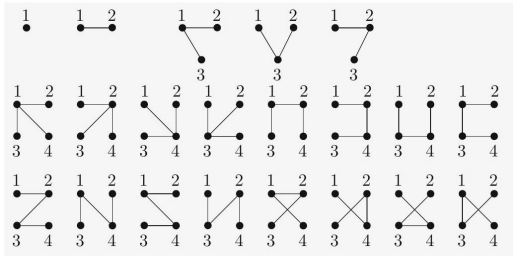


References

[1] I. M. Gessel & G. Viennot: Binomial determinants, paths, and hook length formulae, Advances in Math. 58 (1985), 300-321.
[2] B. Lindström: On the vector representation of induced matroids, Bulletin London Math. Soc. 5 (1973), 85-90.

22.4.7 Cayley’s formula for the number of trees

One of the most beautiful formulas in enumerative combinatorics concerns the number of labeled trees. Consider the set $N = \{1, 2, \dots, n\}$. How many different trees can we form on this vertex set? Let us denote this number by T_n . Enumeration "by hand" yields $T_1 = 1, T_2 = 1, T_3 = 3, T_4 = 16$, with the trees shown in the following table:

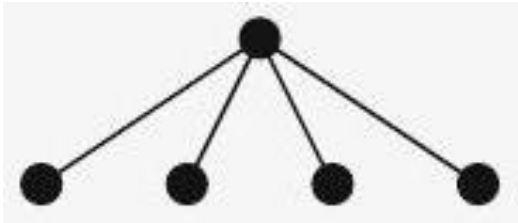


⁰"Lattice paths"

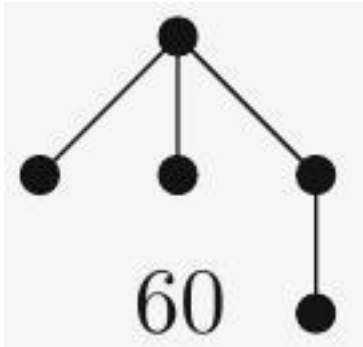


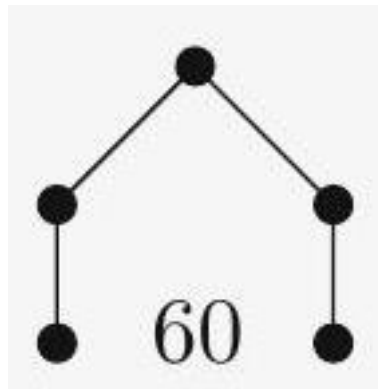
Arthur Cayley

Note that we consider labeled trees, that is, although there is only one tree of order 3 in the sense of graph isomorphism, there are 3 different labeled trees obtained by marking the inner vertex 1,2 or 3 . For $n = 5$ there are three nonisomorphic trees:



5

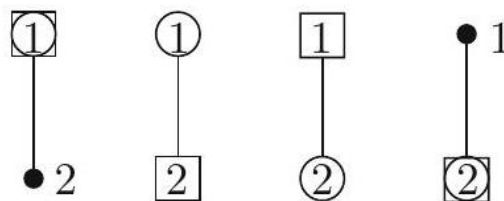




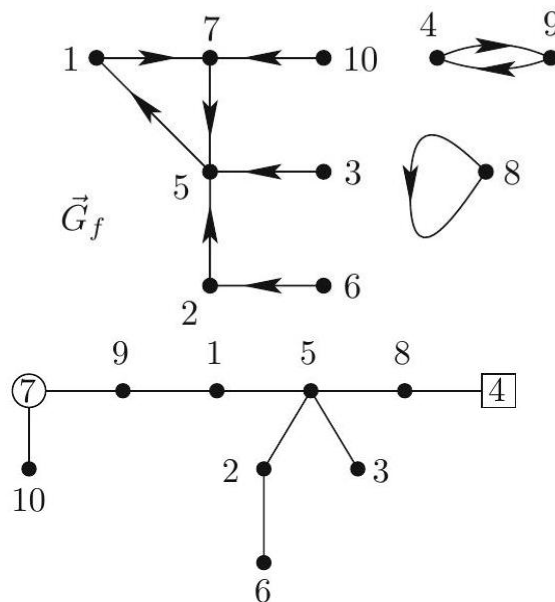
For the first tree there are clearly 5 different labelings, and for the second and third there are $\frac{5!}{2} = 60$ labelings, so we obtain $T_5 = 125$. This should be enough to conjecture $T_n = n^{n-2}$, and that is precisely Cayley's result.

Theorem. There are n^{n-2} different labeled trees on n vertices.

This beautiful formula yields to equally beautiful proofs, drawing on a variety of combinatorial and algebraic techniques. We will outline three of them before presenting the proof which is to date the most beautiful of them all.



The four trees of $\mathcal{T}_{\{2\}}$



- First proof (Bijection). The classical and most direct method is to find a bijection from the set of all trees on n vertices onto another set whose cardinality is known to be n^{n-2} . Naturally, the set of all ordered sequences $(a_1, \dots, a_{n-2})$ with $1 \leq a_i \leq n$ comes into mind. Thus we want to uniquely encode every tree T by a sequence $(a_1, \dots, a_{n-2})$. Such a code was found by Prüfer and is contained in most books on graph theory. Here we want to discuss another bijection proof, due to Joyal, which is less known but of equal elegance and simplicity. For this, we consider not just trees t on $N = \{1, \dots, n\}$ but trees together with two distinguished vertices, the left end and the right end, which may coincide. Let $\mathcal{T}_n = \{(t; \bigcirc, \square)\}$ be this new set; then, clearly, $|\mathcal{T}_n| = n^2 T_n$.

Our goal is thus to prove $|\mathcal{T}_n| = n^n$. Now there is a set whose size is known to be n^n , namely the set N^N of all mappings from N into N . Thus our formula is proved if we can find a bijection from N^N onto $\mathcal{T}_n$.

Let $f: N \rightarrow N$ be any map. We represent f as a directed graph $\vec{G}_f$ by drawing arrows from i to $f(i)$.

For example, the map

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 5 & 9 & 1 & 2 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

is represented by the directed graph in the margin.

Look at a component of $\vec{G}_f$. Since there is precisely one edge emanating from each vertex, the component contains equally many vertices and edges, and hence precisely one directed cycle. Let $M \subseteq N$ be the union of the vertex sets of these cycles. A moment's thought shows that M is the unique maximal subset of N such that the restriction of f onto M acts as a bijection on M .

Write $f|_M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & z \\ f(a) & f(b) & \dots & f(z) \end{pmatrix}$ such that the numbers $a, b, \dots, z$ in the first row appear in natural order. This gives us an ordering $f(a), f(b), \dots, f(z)$ of M according to the second row. Now $f(a)$ is our left end and $f(z)$ is our right end.

The tree t corresponding to the map f is now constructed as follows: Draw $f(a), \dots, f(z)$ in this order as a path from $f(a)$ to $f(z)$, and fill in the remaining vertices as in $\vec{G}_f$ (deleting the arrows).

In our example above we obtain $M = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$

$$f|_M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

and thus the tree t depicted in the margin.

It is immediate how to reverse this correspondence: Given a tree t , we look at the unique path P from the left end to the right end. This gives us the set M and the mapping $f|_M$. The remaining correspondences $i \rightarrow f(i)$ are then filled in according to the unique paths from i to P . $\square$

- Second proof (Linear Algebra). We can think of T_n as the number of spanning trees in the complete graph K_n . Now let us look at an arbitrary connected simple graph G on $V = \{1, 2, \dots, n\}$, denoting by $t(G)$ the number of spanning trees; thus $T_n = t(K_n)$. The following celebrated result is Kirchhoff's matrix-tree theorem (see [1]). Consider the incidence matrix $B = (b_{ie})$ of G , whose rows are labeled by V , the columns by E , where we write $b_{ie} = 1$ or 0 depending on whether $i \in e$ or $i \notin e$. Note that $|E| \geq n - 1$ since G is connected. In every column we replace one of the two 1 's by -1 in an arbitrary manner (this amounts to an orientation of G), and call the new matrix C . $M = CC^T$ is then a symmetric $n \times n$ matrix with the degrees $d_1, \dots, d_n$ in the main diagonal.
Proposition. We have $t(G) = \det M_{ii}$ for all $i = 1, \dots, n$, where M_{ii} results from M by deleting the i -th row and the i -th column.
- Proof. The key to the proof is the Binet-Cauchy theorem proved in the previous chapter: When P is an $r \times s$ matrix and Q an $s \times r$ matrix, $r \leq s$, then $\det(PQ)$ equals the sum of the products of determinants of corresponding $r \times r$ submatrices, where "corresponding" means that we take the same indices for the r columns of P and the r rows of Q . For M_{ii} this means that

$$\det M_{ii} = \sum_N \det N \cdot \det N^T = \sum_N (\det N)^2,$$

where N runs through all $(n-1) \times (n-1)$ submatrices of $C \setminus \{\text{row } i\}$. The $n-1$ columns of N correspond to a subgraph of G with $n-1$ edges on n vertices, and it remains to show that

$$\det N = \begin{cases} \pm 1 & \text{if these edges span a tree} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Suppose the $n - 1$ edges do not span a tree. Then there exists a component which does not contain i . Since the corresponding rows of this component add to 0, we infer that they are linearly dependent, and hence $\det N = 0$.

Assume now that the columns of N span a tree. Then there is a vertex $j_1 \neq i$ of degree 1; let e_1 be the incident edge. Deleting j_1, e_1 we obtain a tree with $n - 2$ edges. Again there is a vertex $j_2 \neq i$ of degree 1 with incident edge e_2 . Continue in this way until $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$ and $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ with $j_i \in e_i$ are determined. Now permute the rows and columns to bring j_k into the k -th row and e_k into the k -th column. Since by construction $j_k \notin e_\ell$ for $k < \ell$, we see that the new matrix N' is lower triangular with all elements on the main diagonal equal to ± 1 . Thus $\det N = \pm \det N' = \pm 1$, and we are done.

For the special case $G = K_n$ we clearly obtain

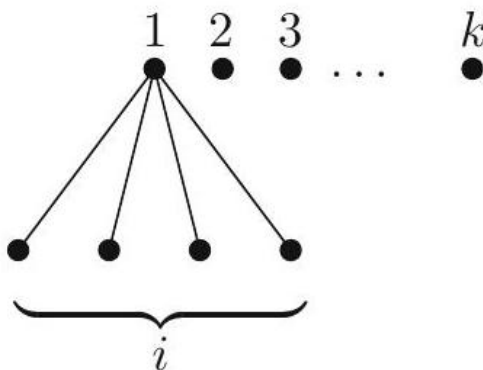
$$M_{ii} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

and an easy computation shows $\det M_{ii} = n^{n-2}$. $\square$



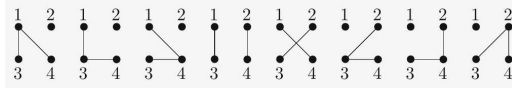
"A nonstandard method of counting trees: Put a cat into each tree, walk your dog, and count how often he barks."

For example, $T_{4,2} = 8$ for $A = \{1, 2\}$



- Third proof (Recursion). Another classical method in enumerative combinatorics is to establish a recurrence relation and to solve it by induction. The following idea is essentially due to Riordan and Rényi. To find the proper recursion, we consider a more general

problem (which already appears in Cayley's paper). Let A be an arbitrary k -set of the vertices. By $T_{n,k}$ we denote the number of (labeled) forests on $\{1, \dots, n\}$ consisting of k trees where the vertices of A appear in different trees. Clearly, the set A does not matter, only the size k . Note that $T_{n,1} = T_n$.



Consider such a forest F with $A = \{1, 2, \dots, k\}$, and suppose 1 is adjacent to i vertices, as indicated in the margin. Deleting 1, the i neighbors together with $2, \dots, k$ yield one vertex each in the components of a forest that consists of $k - 1 + i$ trees. As we can (re)construct F by first fixing i , then choosing the i neighbors of 1 and then the forest $F \setminus 1$, this yields

$$T_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-1, k-1+i} \quad (1)$$

for all $n \geq k \geq 1$, where we set $T_{0,0} = 1, T_{n,0} = 0$ for $n > 0$. Note that $T_{0,0} = 1$ is necessary to ensure $T_{n,n} = 1$.

Proposition. We have and thus, in particular,

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kn^{n-k-1} \\ T_{n,1} &= T_n = n^{n-2} \end{aligned} \quad (2)$$

- Proof. By (1), and using induction, we find

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (k-1+i)(n-1)^{n-1-k-i} \quad (i \rightarrow n-k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1-i)(n-1)^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1)^i - \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} i(n-1)^{i-1} \\ &= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-1-k}{i-1} (n-1)^{i-1} \\ &= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=0}^{n-1-k} \binom{n-1-k}{i} (n-1)^i \\ &= n^{n-k} - (n-k)n^{n-1-k} = kn^{n-1-k} \end{aligned}$$

- Fourth proof (Double Counting). The following marvelous proof due to Arnon Avron and Nachum Dershowitz, which builds on an idea of Jim Pitman, gives Cayley's formula and its generalization (2) without induction or bijection - it is just clever counting in two ways.

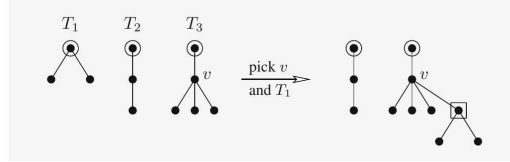
We consider labeled forests with vertex set $\{1, \dots, n\}$. A rooted forest is a forest together with a choice of a root in each component tree. Let $\mathcal{F}_{n,k}$ be the set of all rooted forests that consist of k rooted trees. Thus $\mathcal{F}_{n,1}$ is the set of all rooted trees. Let us set $F_{n,k} := |\mathcal{F}_{n,k}|$, and note that $F_{n,k} = \binom{n}{k} T_{n,k}$, with $T_{n,k}$ as in the third proof, since we may choose the k roots in $\binom{n}{k}$ possible ways.

Here is the crucial idea: We count in two ways the number of rooted forests on n vertices that consist of k trees and have one distinguished non-root vertex. This will yield the equality

$$(n - k)F_{n,k} = knF_{n,k+1}. \quad (3)$$

The left side is clear: In every forest $F \in \mathcal{F}_{n,k}$, we may choose any one of the $n - k$ non-root vertices as the distinguished vertex.

For the expression on the right side, consider a forest $F' \in \mathcal{F}_{n,k+1}$. Choose one of the n vertices in F' , say v , and attach to it any one of the k trees that do not contain v . The root of the chosen tree becomes the distinguished vertex. (This is illustrated in the figure.)



As there are n choices for v and k choices for the tree that does not contain v , we get $knF_{n,k+1}$ choices altogether. All rooted forests in $\mathcal{F}_{n,k}$ with a distinguished non-root vertex arise uniquely in this process.

Iterating (3) $n - 1$ times, we obtain

$$\begin{aligned} F_{n,1} &= \frac{1}{n-1} n F_{n,2} = \frac{1}{n-1} \frac{2}{n-2} n^2 F_{n,3} = \cdots \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdots (k-1)}{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)} n^{k-1} F_{n,k} = \cdots \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(n-1)(n-2) \cdots 1} n^{n-1} F_{n,n} = n^{n-1} F_{n,n}. \end{aligned}$$

Since there is only one forest in $\mathcal{F}_{n,n}$ (each root being its own tree), we have $F_{n,n} = 1$ and conclude that $F_{n,1} = n^{n-1}$. $\square$

We get even more out of this proof, namely that

$$F_{n,k} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} = \binom{n}{k} kn^{n-k-1}$$

With $F_{n,k} = \binom{n}{k} T_{n,k}$ we have reproved the formula $T_{n,k} = kn^{n-k-1}$ without recourse to induction.

Let us end with a historical note. Cayley's paper from 1889 was anticipated by Carl W. Borchardt (1860), and this fact was acknowledged by Cayley himself. An equivalent result appeared even earlier in a paper of James J. Sylvester (1857), see [3, Chapter 3]. The novelty in Cayley's paper was the use of graph theory terms, and the theorem has been associated with his name ever since.

References

- [1] M. Aigner: Combinatorial Theory, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1979; Reprint 1997.
- [2] A. Avron & N. Dershowitz: Cayley's formula: A page from The Book, Amer. Math. Monthly 123 (2016), 699-700.
- [3] N. L. Biggs, E. K. Lloyd & R. J. Wilson: Graph Theory 1736-1936, Clarendon Press, Oxford 1976.
- [4] A. Cayley: A theorem on trees, Quart. J. Pure Appl. Math. 23 (1889), 376-378; Collected Mathematical Papers Vol. 13, Cambridge University Press 1897, 26-28.
- [5] A. Joyal: Une théorie combinatoire des séries formelles, Advances in Math. 42 (1981), 1-82.
- [6] J. Pitman: Coalescent random forests, J. Combinatorial Theory, Ser. A 85 (1999), 165-193.
- [7] H. Prüfer: Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, Archiv der Math. u. Physik (3) 27 (1918), 142-144.
- [8] A. Rényi: Some remarks on the theory of trees. MTA Mat. Kut. Inst. Kozl. (Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci.) 4 (1959), 73-85; Selected Papers Vol. 2, Akadémiai Kiadó, Budapest 1976, 363-374.
- [9] J. Riordan: Forests of labeled trees, J. Combinatorial Theory 5 (1968), 90-103.

22.4.8 Identities versus bijections

Consider the infinite product $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$ and expand it in the usual way into a series $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ by grouping together those products that yield the same power x^n . By inspection we find for the first terms

$$\prod_{k \geq 1} (1+x^k) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + \cdots \quad (1)$$

So we have e.g. $a_6 = 4, a_7 = 5$, and we (rightfully) suspect that a_n goes to infinity with $n \rightarrow \infty$.

Looking at the equally simple product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots$ something unexpected happens. Expanding this product we obtain

$$\prod_{k \geq 1} (1-x^k) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \cdots \quad (2)$$

It seems that all coefficients are equal to 1, -1 or 0. But is this true? And if so, what is the pattern?

Infinite sums and products and their convergence have played a central role in analysis since the invention of the calculus, and contributions to the subject have been made by some of the greatest names in the field, from Leonhard Euler to Srinivasa Ramanujan.

In explaining identities such as (1) and (2), however, we disregard convergence questions - we simply manipulate the coefficients. In the language of the trade we deal with "formal" power series and products. In this framework we are going to show how combinatorial arguments lead to elegant proofs of seemingly difficult identities.

Our basic notion is that of a partition of a natural number. We call any sum

$$\lambda : n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_t \quad \text{with} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_t \geq 1$$

a partition of n . $P(n)$ shall be the set of all partitions of n , with $p(n) := |P(n)|$, where we set $p(0) = 1$.

What have partitions got to do with our problem? Well, consider the following product of infinitely many series:

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)\cdots \quad (3)$$

where the k -th factor is $(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots)$. What is the coefficient of x^n when we expand this product into a series $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$? A moment's

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ 5 &= 4 + 1 \\ 5 &= 3 + 2 \\ 5 &= 3 + 1 + 1 \\ 5 &= 2 + 2 + 1 \\ 5 &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ 5 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

The partitions counted by $p(5) = 7$

$$\begin{aligned} 7 &= 7 \\ 7 &= 5 + 1 + 1 \\ 7 &= 3 + 3 + 1 \\ 7 &= 3 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 7 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 7 &= 7 \\ 7 &= 6 + 1 \\ 7 &= 5 + 2 \\ 7 &= 4 + 3 \\ 7 &= 4 + 2 + 1. \end{aligned}$$

The partitions of 7 into odd resp. distinct parts: $p_o(7) = p_d(7) = 5$.

$$7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$7 =$$

$$7 = 7$$

$$7 = 6 + 1$$

$$7 = 5 + 2$$

$$7 = 4 + 3$$

$$7 = 4 + 2 + 1.$$

$$\text{arts: } p_o(7) = p_d(7) = 5.$$

$$6 = 5 + 1$$

$$6 = 3 + 3$$

$$6 = 3 + 1 + 1 + 1$$

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Partitions of 6 into odd parts: $p_o(6) = 4$

thought should convince you that this is just the number of ways to write n as a sum

So the coefficient is nothing else but the number $p(n)$ of partitions of n . Since the geometric series $1 + x^k + x^{2k} + \cdots$ equals $\frac{1}{1-x^k}$, we have proved our first identity:

$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n \geq 0} p(n)x^n \quad (4)$$

What's more, we see from our analysis that the factor $\frac{1}{1-x^k}$ accounts for the contribution of k to a partition of n . Thus, if we leave out $\frac{1}{1-x^k}$ from the product on the left side of (4), then k does not appear in any partition on the right side. As an example we immediately obtain where $p_o(n)$ is the number of partitions of n all of whose summands are odd, and the analogous statement holds when all summands are even.

By now it should be clear what the n -th coefficient in the infinite product $\prod_{k \geq 1} (1+x^k)$ will be. Since we take from any factor in (3) either 1 or x^k , this means that we consider only those partitions where any summand k appears at most once. In other words, our original product (1) is expanded into

thought should convince you that this is just the number of ways to write n as a sum

$$\begin{aligned} n &= n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 3 + \cdots \\ &= \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n_1} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{n_2} + \underbrace{3 + \cdots + 3}_{n_3} + \cdots \end{aligned}$$

the right side. As an example we immediately obtain

$$\prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x^{2i-1}} = \sum_{n \geq 0} p_o(n)x^n \quad (5)$$

(5)
into

$$\prod_{k \geq 1} (1+x^k) = \sum_{n \geq 0} p_d(n)x^n \quad (6)$$

where $p_d(n)$ is the number of partitions of n into distinct summands.

Now the method of formal series displays its full power. Since $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ we may write

$$\prod_{k \geq 1} (1+x^k) = \prod_{k \geq 1} \frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^{2k-1}}$$

since all factors $1-x^{2i}$ with even exponent cancel out. So, the infinite products in (5) and (6) are the same, and hence also the series, and we obtain the beautiful result

$$p_o(n) = p_d(n) \quad \text{for all } n \geq 0 \quad (7)$$

Such a striking equality demands a simple proof by bijection - at least that is the point of view of any combinatorialist.

Problem. Let $P_o(n)$ and $P_d(n)$ be the partitions of n into odd and into distinct summands, respectively: Find a bijection from $P_o(n)$ onto $P_d(n)$!

Several bijections are known, but the following one due to J. W. L. Glaisher (1907) is perhaps the neatest. Let λ be a partition of n into odd parts. We collect equal summands and have

$$\begin{aligned} n &= \underbrace{\lambda_1 + \cdots + \lambda_1}_{n_1} + \underbrace{\lambda_2 + \cdots + \lambda_2}_{n_2} + \cdots + \underbrace{\lambda_t + \cdots + \lambda_t}_{n_t} \\ &= n_1 \cdot \lambda_1 + n_2 \cdot \lambda_2 + \cdots + n_t \cdot \lambda_t. \end{aligned}$$

Now we write $n_1 = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_r}$ in its binary representation and similarly for the other n_i . The new partition λ' of n is then

$$\lambda' : n = 2^{m_1} \lambda_1 + 2^{m_2} \lambda_1 + \cdots + 2^{m_r} \lambda_1 + 2^{k_1} \lambda_2 + \cdots$$

We have to check that λ' is in $P_d(n)$, and that $\phi : \lambda \mapsto \lambda'$ is indeed a bijection. Both claims are easy to verify: If $2^a \lambda_i = 2^b \lambda_j$ then $2^a = 2^b$ since λ_i and λ_j are odd, and so $\lambda_i = \lambda_j$. Hence λ' is in $P_d(n)$. Conversely, when $n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_s$ is a partition into distinct summands, then we reverse the bijection by collecting all μ_i with the same highest power of 2, and write down the odd parts with the proper multiplicity. The margin displays an example.

Manipulating formal products has thus led to the equality $p_o(n) = p_d(n)$ for partitions which we then verified via a bijection. Now we turn this around, give a bijection proof for partitions and deduce an identity. This time our goal is to identify the pattern in the expansion (2). Look at

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \cdots$$

The exponents (apart from 0) seem to come in pairs, and taking the exponents of the first power in each pair gives the sequence

$$1 \quad 5 \quad 12 \quad 22 \quad 35 \quad 51 \quad 70 \quad \dots$$

well-known to Euler. These are the pentagonal numbers $f(j)$, whose name is suggested by the figure in the margin.

We easily compute $f(j) = \frac{3j^2-j}{2}$ and $\bar{f}(j) = \frac{3j^2+j}{2}$ for the other number of each pair. In summary, we conjecture, as Euler has done, that the

For example,

$\lambda : 25 = 5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$ is mapped by ϕ to

$$\begin{aligned} \lambda' : 25 &= (2+1)5 + (2)3 + (4)1 \\ &= 10 + 5 + 6 + 4 \\ &= 10 + 6 + 5 + 4 \end{aligned}$$

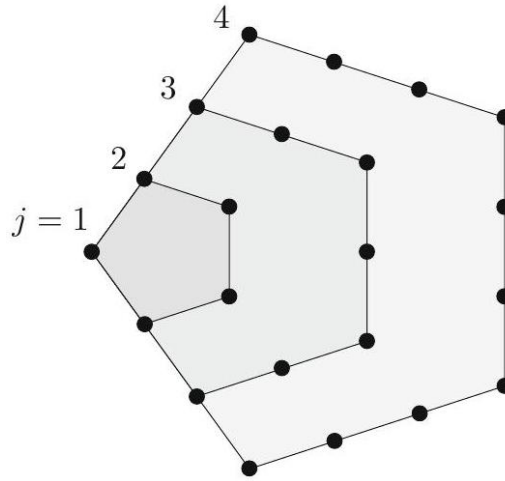
We write

$$\begin{aligned} \lambda' : 30 &= 12 + 6 + 5 + 4 + 3 \\ \text{as } 30 &= 4(3+1) + 2(3) + 1(5+3) \\ &= (1)5 + (4+2+1)3 + (4)1 \end{aligned}$$

and obtain as $\phi^{-1}(\lambda')$ the partition

$$\lambda : 30 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$$

into odd summands. following formula should hold.



Pentagonal numbers

Theorem.

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) = 1 + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \left(x^{\frac{3j^2-j}{2}} + x^{\frac{3j^2+j}{2}} \right) \quad (8)$$

Euler proved this remarkable theorem by calculations with formal series, but we give a bijection proof from The Book. First of all, we notice by (4) that the product $\prod_{k \geq 1} (1 - x^k)$ is precisely the inverse of our partition series $\sum_{n \geq 0} p(n)x^n$. Hence setting $\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) =: \sum_{n \geq 0} c(n)x^n$, we find

$$\left(\sum_{n \geq 0} c(n)x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} p(n)x^n \right) = 1.$$

Comparing coefficients this means that $c(n)$ is the unique sequence with $c(0) = 1$ and

$$\sum_{k=0}^n c(k)p(n-k) = 0 \quad \text{for all } n \geq 1 \quad (9)$$

Writing the right-hand of (8) as $\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j x^{\frac{3j^2+j}{2}}$, we have to show that

$$c(k) = \begin{cases} 1 & \text{for } k = \frac{3j^2+j}{2}, \text{ when } j \in \mathbb{Z} \text{ is even,} \\ -1 & \text{for } k = \frac{3j^2+j}{2}, \text{ when } j \in \mathbb{Z} \text{ is odd,} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

gives this unique sequence. Setting $b(j) = \frac{3j^2+j}{2}$ for $j \in \mathbb{Z}$ and substituting these values into (9), our conjecture takes on the simple form

$$\sum_{j \text{ even}} p(n - b(j)) = \sum_{j \text{ odd}} p(n - b(j)) \quad \text{for all } n$$

where of course we only consider j with $b(j) \leq n$. So the stage is set: We have to find a bijection

$$\phi : \bigcup_{j \text{ even}} P(n - b(j)) \longrightarrow \bigcup_{j \text{ odd}} P(n - b(j))$$

Again several bijections have been suggested, but the following construction by David Bressoud and Doron Zeilberger is astonishingly simple. We just give the definition of ϕ (which is,

in fact, an involution), and invite the reader to verify the easy details.

For $\lambda : \lambda_1 + \cdots + \lambda_t \in P(n - b(j))$ set

As an example consider $n = 15, j = 2$, so $b(2) = 7$. The partition $3 + 2 + 2 + 1$ in $P(15 - b(2)) = P(8)$ is mapped to $9 + 2 + 1 + 1$, which is in $P(15 - b(1)) = P(13)$.

$$\phi(\lambda) := \begin{cases} (t + 3j - 1) + (\lambda_1 - 1) + \cdots + (\lambda_t - 1) & \text{if } t + 3j \geq \lambda_1, \\ (\lambda_2 + 1) + \cdots + (\lambda_t + 1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\lambda_1 - t - 3j - 1} & \text{if } t + 3j < \lambda_1, \end{cases}$$

where we leave out possible 0's. One finds that in the first case $\phi(\lambda)$ is in $P(n - b(j - 1))$, and in the second case in $P(n - b(j + 1))$.

This was beautiful, and we can get even more out of it. We already know that

$$\prod_{k \geq 1} (1 + x^k) = \sum_{n \geq 0} p_d(n) x^n$$

As experienced formal series manipulators we notice that the introduction of the new variable y yields

$$\prod_{k \geq 1} (1 + yx^k) = \sum_{n, m \geq 0} p_{d,m}(n) x^n y^m$$

where $p_{d,m}(n)$ counts the partitions of n into precisely m distinct summands. With $y = -1$ this yields

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) = \sum_{n \geq 0} (E_d(n) - O_d(n)) x^n \quad (10)$$

where $E_d(n)$ is the number of partitions of n into an even number of distinct parts, and $O_d(n)$ is the number of partitions into an odd number. And here is the punchline. Comparing (10) to Euler's expansion in (8) we infer the beautiful result

$$E_d(n) - O_d(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = \frac{3j^2 \pm j}{2} \text{ when } j \geq 0 \text{ is even,} \\ -1 & \text{for } n = \frac{3j^2 \pm j}{2} \text{ when } j \geq 1 \text{ is odd,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This is, of course, just the beginning of a longer and still ongoing story. The theory of infinite products is replete with unexpected identities, and with their bijective counterparts. The most famous examples are the so-called Rogers-Ramanujan identities, named after Leonard Rogers and Srinivasa Ramanujan, in which the number 5 plays a mysterious role:

$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{(1 - x^{5k-4})(1 - x^{5k-1})} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n^2}}{(1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^n)},$$

$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{(1 - x^{5k-3})(1 - x^{5k-2})} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n^2+n}}{(1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^n)}.$$

The reader is invited to translate them into the following partition identities first noted by Percy MacMahon:

- Let $f(n)$ be the number of partitions of n all of whose summands are of the form $5k + 1$ or $5k + 4$, and $g(n)$ the number of partitions whose summands differ by at least 2. Then $f(n) = g(n)$.
- Let $r(n)$ be the number of partitions of n all of whose summands are of the form $5k + 2$ or $5k + 3$, and $s(n)$ the number of partitions whose parts differ by at least 2 and which do not contain 1. Then $r(n) = s(n)$.

All known formal series proofs of the Rogers-Ramanujan identities are quite involved, and for a long time bijection proofs of $f(n) = g(n)$ and of $r(n) = s(n)$ seemed elusive. Such proofs were eventually given 1981 by Adriano Garsia and Stephen Milne. Their bijections are, however, very complicated - Book proofs are not yet in sight.

An example for $n = 10$:

$$10 = 9 + 1$$

$$10 = 8 + 2$$

$$10 = 7 + 3$$

$$10 = 6 + 4$$

$$10 = 4 + 3 + 2 + 1$$

and

$$10 = 10$$

$$10 = 7 + 2 + 1$$

$$10 = 6 + 3 + 1$$

$$10 = 5 + 4 + 1$$

$$10 = 5 + 3 + 2,$$

$$\text{so } E_d(10) = O_d(10) = 5.$$



Srinivasa Ramanujan

References

- [1] G. E. Andrews: The Theory of Partitions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading MA 1976.
- [2] D. Bressoud & D. Zeilberger: Bijectioning Euler's partitions-recurrence, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 54-55.
- [3] A. Garsia & S. Milne: A Rogers-Ramanujan bijection, J. Combinatorial Theory, Ser. A 31 (1981), 289-339.
- [4] S. Ramanujan: Proof of certain identities in combinatory analysis, Proc. Cambridge Phil. Soc. 19 (1919), 214-216.
- [5] L. J. Rogers: Second memoir on the expansion of certain infinite products, Proc. London Math. Soc. 25 (1894), 318-343.

"How small can a set in the plane be in which you can turn a needle of length 1 completely around?"

This beautiful question was posed by the Japanese mathematician Sichi Takeya in 1917. It gained immediate prominence and, together with its higher-dimensional analogs, helped initiate a whole new field, today called geometric measure theory. To be precise, by "turning around" Takeya had a continuous motion in mind that returns the needle to the original position with its ends reversed, like a Samurai whirling his pole. Any such motion takes place in a compact subset of the plane.

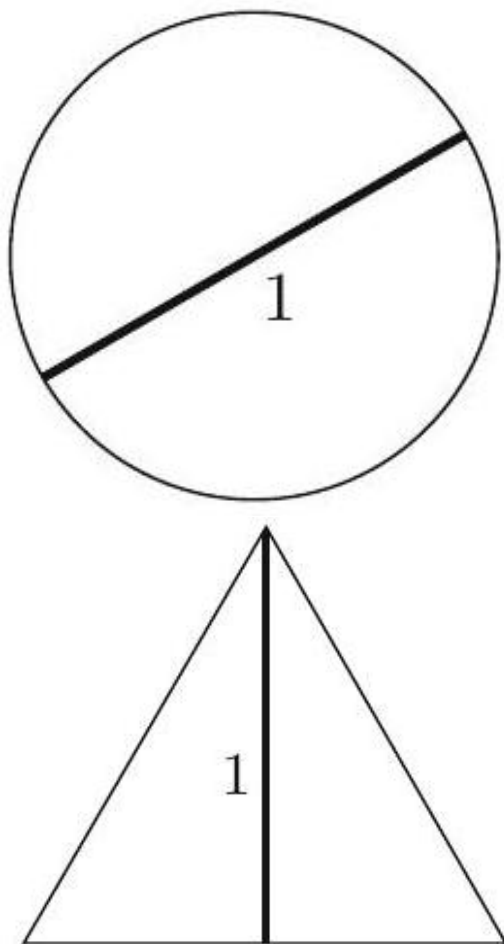
Obviously, a disk of diameter 1 is such a Takeya needle set (of area $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$), as is the equilateral triangle of height 1 that has area $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$. For convex regions Julius Pal showed that this is the minimum, but in general we can do better: The three-pointed deltoid in the margin is also a Takeya needle set, as seen by moving the inner point around the small circle.

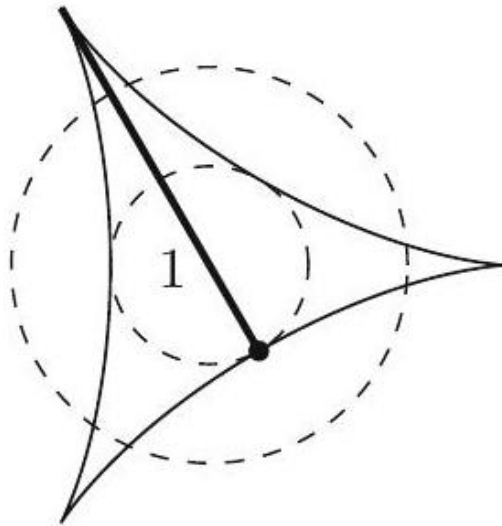
The area of the deltoid is $\frac{\pi}{8} \approx 0.393$, and Kakeya seems to have thought that this is the minimum for connected sets.

So it was a big surprise when a few years after the question was posed Abram Samoilovitch Besicovitch produced needle sets of arbitrarily small area. His examples were rather complicated with many holes and large diameter, but in a remarkable paper Frederick Cunningham Jr. showed that one can even find simply connected needle sets of arbitrarily small area inside the circle of diameter 2.

As a matter of fact, Besicovitch was initially interested in a closely related problem, which he then applied to solve the needle problem. Call a compact set $K \subseteq \mathbb{R}^n$ a Kakeya set (or, more aptly, a Besicovitch set) if it contains a unit line segment in every direction. Besicovitch proved the spectacular result that for every dimension there are Kakeya sets of measure 0. But how can this be? Our intuition tells us that these sets need to be somehow spread out, since they contain segments in every direction! (In contrast, one can show that all Kakeya needle sets, which not only contain a needle in every direction, but in which the needle can turn, have positive measure.)

Now these were the years when the notion of (topological) dimension came into being at the hands of Lebesgue, Menger, Hausdorff and others, which precisely captured this "spreading out" by various covering conditions; here we use the Hausdorff dimension $\text{hd}(K)$. We don't need the details of the





Just take $p_E(x) := \prod_{a \in E} (x - a)$. In particular, a nonzero polynomial can vanish on all of F .

definition: Let us just note that the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ has Hausdorff dimension n , and that hd is a monotone function, so every $K \subseteq \mathbb{R}^n$ satisfies $\text{hd}(K) \leq n$.

The Kakeya conjecture. Every Kakeya set in $\mathbb{R}^n$ has Hausdorff dimension n .

The conjecture is true for $n = 1$ and 2 , but it is open for all $n \geq 3$, and it appears to get more difficult as the dimension increases. Today it is considered to be one of the major open problems in geometric measure theory.

In an inspiring paper from 1999 Thomas Wolff gave the problem a completely new twist by suggesting to look at finite fields F . Consider the vector space F^n . Let us call $K \subseteq F^n$ a (finite) Kakeya set if K contains a line in every direction, meaning that to every nonzero vector $v \in F^n$ there exists some $w \in F^n$ such that the line $L = \{w + tv : t \in F\}$ is in K . Wolff posed the following finite version of the Euclidean Kakeya problem:

The finite Kakeya problem. Is there a constant $c = c(n)$, only depending on n but not on $|F|$, such that every Kakeya set $K \subseteq F^n$ satisfies

$$|K| \geq c|F|^n?$$

Clearly, this is true for $n = 1$, the only Kakeya set being all of F , and it is not hard to prove for $n = 2$, but for higher dimensions progress was again slow, until Zeev Dvir provided in his 2008 dissertation a beautiful and stunningly simple proof: All we need are two results about polynomials in n variables!

Let us fix some notation. $F[x_1, \dots, x_n]$ denotes the ring of polynomials $p(x_1, \dots, x_n)$ over the finite field F . A monomial $x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$ is sometimes written shortly as x^s , where $\sum_{i=1}^n s_i$ is the degree of x^s . The degree $\deg p$ of $p(x) = \sum a_s x^s$ is the maximum degree of the monomials x^s with nonzero coefficient a_s . The zero polynomial has all $a_s = 0$ and is said to have degree -1 . The polynomial $p(x)$ vanishes on $E \subseteq F^n$ if $p(a) = 0$ holds for all $a \in E$.

The two ingredients of the proof generalize the following well-known facts about polynomials in one variable:

- (1) Every polynomial of degree $d \geq 0$ in one variable has at most d roots.
- (2) For every set $E \subseteq F$ of size $|E| \leq d$ there is a nonzero polynomial $p(x)$ of degree at most d that vanishes on E .

In the following $q = |F|$ shall denote the size of F .

Lemma 1. Every nonzero polynomial $p(x) \in F[x_1, \dots, x_n]$ of degree d has at most dq^{n-1} roots in F^n .

- Proof. We use induction on n , with fact (1) above as the starting case $n = 1$. Let us split $p(x)$ into summands according to the powers of x_n ,

$$p(x) = g_0 + g_1 x_n + g_2 x_n^2 + \cdots + g_\ell x_n^\ell$$

where $g_i \in F[x_1, \dots, x_{n-1}]$ for $0 \leq i \leq \ell \leq d$, and g_ℓ is nonzero. We write every $v \in F^n$ in the form $v = (a, b)$ with $a \in F^{n-1}$, $b \in F$, and estimate the number of roots $p(a, b) = 0$.

Case 1. Roots (a, b) with $g_\ell(a) = 0$.

Since $g_\ell \neq 0$ and $\deg g_\ell \leq d - \ell$, by induction the polynomial g_ℓ has at most $(d - \ell)q^{n-2}$ roots in F^{n-1} , and for each a there are at most q different choices for b , which gives at most $(d - \ell)q^{n-1}$ such roots for $p(x)$ in F^n .

Case 2. Roots (a, b) with $g_\ell(a) \neq 0$.

Here $p(a, x_n) \in F[x_n]$ is not the zero polynomial in the single variable x_n , it has degree ℓ , and hence for each a by (1) there are at most ℓ elements b with $p(a, b) = 0$. Since the number of a 's is at most q^{n-1} we get at most ℓq^{n-1} roots for $p(x)$ in this way.

Summing the two cases gives at most

$$(d - \ell)q^{n-1} + \ell q^{n-1} = dq^{n-1}$$

roots for $p(x)$, as asserted.

Lemma 2. For every set $E \subseteq F^n$ of size $|E| < \binom{n+d}{d}$ there is a nonzero polynomial $p(x) \in F[x_1, \dots, x_n]$ of degree at most d that vanishes on E .

- Proof. Consider the vector space V_d of all polynomials in $F[x_1, \dots, x_n]$ of degree at most d . A basis for V_d is provided by the monomials $x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$ with $\sum s_i \leq d$:

$$1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1^3, \dots, x_n^d$$

The following pleasing argument shows that the number of monomials $x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$ of degree at most d equals the binomial coefficient $\binom{n+d}{d}$. What we want to count is the number of n -tuples $(s_1, \dots, s_n)$ of nonnegative integers with $s_1 + \cdots + s_n \leq d$. To do this, we map every n -tuple $(s_1, \dots, s_n)$ to the increasing sequence

$$s_1 + 1 < s_1 + s_2 + 2 < \cdots < s_1 + \cdots + s_n + n$$

which determines an n -subset of $\{1, 2, \dots, d + n\}$. The map is bijective, so the number of monomials is $\binom{d+n}{n} = \binom{n+d}{d}$.

Next look at the vector space F^E of all functions $f : E \rightarrow F$; it has dimension $|E|$, which by assumption is less than $\binom{n+d}{d} = \dim V_d$. The evaluation map $p(x) \mapsto (p(a))_{a \in E}$ from V_d to F^E is a linear map of vector spaces. We conclude that it has a nonzero kernel, containing as desired a nonzero polynomial that vanishes on E .

For $n = 2$ and $d = 3$ we get a basis of size $\binom{2+3}{3} = 10$: $\{1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3\}$

Now we have all things needed to give Dvir's elegant solution of the finite Kakeya problem.

Theorem. Let $K \subseteq F^n$ be a Kakeya set. Then

$$|K| \geq \binom{|F| + n - 1}{n} \geq \frac{|F|^n}{n!}$$

- Proof. The second inequality is clear from the definition of binomial coefficients. For the first, set again $q = |F|$ and suppose for a contradiction that

$$|K| < \binom{q + n - 1}{n} = \binom{n + q - 1}{q - 1}.$$

By Lemma 2 there exists a nonzero polynomial $p(x) \in F[x_1, \dots, x_n]$ of degree $d \leq q - 1$ that vanishes on K . Let us write

$$p(x) = p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_d(x), \quad (1)$$

where $p_i(x)$ is the sum of the monomials of degree i ; in particular, $p_d(x)$ is nonzero. Since $p(x)$ vanishes on the nonempty set K , we have $d > 0$. Take any $v \in F^n \setminus \{0\}$. By the Kakeya property for this v there exists a $w \in F^n$ such that

$$p(w + tv) = 0 \quad \text{for all } t \in F.$$

Here comes the trick: Consider $p(w + tv)$ as a polynomial in the single variable t . It has degree at most $d \leq q - 1$ but vanishes on all q points of F , whence $p(w + tv)$ is the zero polynomial in t . Looking at (1) above we see that the coefficient of t^d in $p(w + tv)$ is precisely $p_d(v)$, which must therefore be 0. But $v \in F^n \setminus \{0\}$ was arbitrary and $p_d(0) = 0$ since $d > 0$, and we conclude that $p_d(x)$ vanishes on all of F^n . Since

$$dq^{n-1} \leq (q-1)q^{n-1} < q^n$$

Lemma 1, however, tells us that $p_d(x)$ must then be the zero polynomial contradiction and end of the proof.

As often happens in mathematics, once a breakthrough is achieved improvements follow quickly. So it was in this case. The lower bound $\frac{1}{n!}$ for the constant $c(n)$ has been improved to $\frac{1}{2^n}$, and this is within a factor of 2 from the best possible bound. That is, there exist Kakeya sets of size roughly $\frac{1}{2^{n-1}}|F|^n$.

For recent developments the blog by Terence Tao at [terrytao.wordpress.com/ tag/kakeya-conjecture/](http://terrytao.wordpress.com/tag/kakeya-conjecture/) is an up-to-date source.

References

- [1] A. S. Besicovitch: On Kakeya's problem and a similar one, Math. Zeitschrift 27 (1928), 312-320.
- [2] F. Cunningham, Jr.: The Kakeya problem for simply connected and for starshaped sets, Amer. Math. Monthly 78 (1971), 114-129.
- [3] Z. Dvir: On the size of Kakeya sets in finite fields, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), 1093-1097.
- [4] J. Pal: Über ein elementares Variationsproblem, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser 2 (1920), 1-35.
- [5] T. TAO: From rotating needles to stability of waves: emerging connections between combinatorics, analysis, and PDE, Notices Amer. Math. Soc. 48 (2001), 294-303.
- [6] T. Wolff: Recent work connected with the Kakeya problem, in: "Prospects in Mathematics (Princeton, NJ 1996)" (H. Rossi, ed.), Amer. Math. Soc., Providence RI 1999, pp. 129-162.
- [7] T. Wolff: On some variants of the Kakeya problem, Pacific J. Math. 190 (1999), 111-154.



"Whirling a pole the Kakeya way"

Completing Latin squares

Some of the oldest combinatorial objects, whose study apparently goes back to ancient times, are the Latin squares. To obtain a Latin square, one has to fill the n^2 cells of an $n \times n$

square array with the numbers $1, 2, \dots, n$ so that every number appears exactly once in every row and in every column. In other words, the rows and columns each represent permutations of the set $\{1, \dots, n\}$. Let us call n the order of the Latin square.

Here is the problem we want to discuss. Suppose someone started filling the cells with the numbers $\{1, 2, \dots, n\}$. At some point he stops and asks us to fill in the remaining cells so that we get a Latin square. When is this possible? In order to have a chance at all we must, of course, assume that at the start of our task any element appears at most once in every row and in every column. Let us give this situation a name. We speak of a partial Latin square of order n if some cells of an $n \times n$ array are filled with numbers from the set $\{1, \dots, n\}$ such that every number appears at most once in every row and column. So the problem is:

When can a partial Latin square be completed to a Latin square of the same order?

Let us look at a few examples. Suppose the first $n - 1$ rows are filled and the last row is empty. Then we can easily fill in the last row. Just note that every element appears $n - 1$ times in the partial Latin square and hence is missing from exactly one column. Hence by writing each element below the column where it is missing we have completed the square correctly.

Going to the other end, suppose only the first row is filled. Then it is again easy to complete the square by cyclically rotating the elements one step in each of the following rows.

So, while in our first example the completion is forced, we have lots of possibilities in the second example. In general, the fewer cells are prefilled, the more freedom we should have in completing the square.

However, the margin displays an example of a partial square with only n cells filled which clearly cannot be completed, since there is no way to fill the upper right-hand corner without violating the row or column condition.

If fewer than n cells are filled in an $n \times n$ array, can one then always complete it to obtain a Latin square?

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	1	2
3	4	2	1

A Latin square of order 4

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

A cyclic Latin square

1	2	...	$n-1$	
				n

A partial Latin square that cannot be completed

1	3	2
2	1	3
3	2	1

R:111222333

$C : 123123123$

E: 132213321

If we permute the lines of the above example cyclically, $R \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow R$, then we obtain the following line array and Latin square:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

R: 132213321

C: 111222333

E: 123123123

This question was raised by Trevor Evans in 1960, and the assertion that a completion is always possible quickly became known as the Evans conjecture. Of course, one would try induction, and this is what finally led to success. But Bohdan Smetaniuk's proof from 1981, which answered the question, is a beautiful example of just how subtle an induction proof may be needed in order to do such a job. And, what's more, the proof is constructive, it allows us to complete the Latin square explicitly from any initial partial configuration.

Before proceeding to the proof let us take a closer look at Latin squares in general. We can alternatively view a Latin square as a $3 \times n^2$ array, called the line array of the Latin square. The figure to the left shows a Latin square of order 3 and its associated line array, where R, C and E stand for rows, columns and elements.

The condition on the Latin square is equivalent to saying that in any two lines of the line array all n^2 ordered pairs appear (and therefore each pair appears exactly once). Clearly, we may permute the symbols in each line arbitrarily (corresponding to permutations of rows, columns or elements) and still obtain a Latin square. But the condition on the $3 \times n^2$ array tells us more: There is no special role for the elements. We may also permute the lines of the array (as a whole) and still preserve the conditions on the line array and hence obtain a Latin square. Latin squares that are connected by any such permutation are called conjugates. Here is the observation which will make the proof transparent: A partial Latin square obviously corresponds to a partial line array (every pair appears at most once in any two lines), and any conjugate of

a partial Latin square is again a partial Latin square. In particular, a partial Latin square can be completed if and only if any conjugate can be completed (just complete the conjugate and then reverse the permutation of the three lines).

We will need two results, due to Herbert J. Ryser and to Charles C. Lindner, that were known prior to Smetaniuk's theorem. If a partial Latin square is of the form that the first r rows are completely filled and the remaining cells are empty, then we speak of an $r \times n$ Latin rectangle.

Lemma 1. Any $r \times n$ Latin rectangle, $r < n$, can be extended to an $(r+1) \times n$ Latin rectangle and hence can be completed to a Latin square.

- Proof. We apply Hall's theorem (see Chapter 30). Let A_j be the set of numbers that do not appear in column j . An admissible $(r+1)$ -st row corresponds then precisely to a system of distinct representatives for the collection $A_1, \dots, A_n$. To prove the lemma we therefore have to verify Hall's condition (H). Every set A_j has size $n-r$, and every element is in precisely $n-r$ sets A_j (since it appears r times in the rectangle). Any m of the sets A_j contain together $m(n-r)$ elements and therefore at least m different ones, which is just condition (H).

Lemma 2. Let P be a partial Latin square of order n with at most $n-1$ cells filled and at most $\frac{n}{2}$ distinct elements, then P can be completed to a Latin square of order n .

- Proof. We first transform the problem into a more convenient form. By the conjugacy principle discussed above, we may replace the condition "at most $\frac{n}{2}$ distinct elements" by the condition that the entries appear in at most $\frac{n}{2}$ rows, and we may further assume that these rows are the top rows. So let the rows with filled cells be the rows $1, 2, \dots, r$, with f_i filled cells in row i , where $r \leq \frac{n}{2}$ and $\sum_{i=1}^r f_i \leq n-1$. By permuting the rows, we may assume that $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_r$. Now we complete the rows $1, \dots, r$ step by step until we reach an $r \times n$ rectangle which can then be extended to a Latin square by Lemma 1. Suppose we have already filled rows $1, 2, \dots, \ell-1$. In row ℓ there are f_ℓ filled cells which we may assume to be at the end. The current situation is depicted in the figure, where the shaded part indicates the filled cells.

The completion of row ℓ is performed by another application of Hall's theorem, but this time it is quite subtle. Let X be the set of elements that do not appear in row ℓ , thus $|X| = n - f_\ell$, and for $j = 1, \dots, n - f_\ell$ let A_j denote the set of those elements in X which do not appear in column j (neither above nor below row ℓ). Hence in order to complete row ℓ we must verify condition (H) for the collection $A_1, \dots, A_{n-f_\ell}$.

First we claim

$$n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + \dots + f_r \quad (1)$$

The case $\ell = 1$ is clear. Otherwise $\sum_{i=1}^r f_i < n$, $f_1 \geq \dots \geq f_r$ and $1 < \ell \leq r$ together imply

$$n > \sum_{i=1}^r f_i \geq (\ell-1)f_{\ell-1} + f_\ell + \dots + f_r$$

Now either $f_{\ell-1} \geq 2$ (in which case (1) holds) or $f_{\ell-1} = 1$. In the latter case, (1) reduces to $n > 2(\ell-1) + r - \ell + 1 = r + \ell - 1$, which is true because of $\ell \leq r \leq \frac{n}{2}$.

Let us now take m sets A_j , $1 \leq m \leq n - f_\ell$, and let B be their union. We must show $|B| \geq m$. Consider the number c of cells in the m columns corresponding to the A_j 's which contain elements of X . There are at most $(\ell-1)m$ such cells above row ℓ and at most $f_{\ell+1} + \dots + f_r$ below row ℓ , and thus

$$c \leq (\ell-1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r.$$

On the other hand, each element $x \in X \setminus B$ appears in each of the m columns, hence $c \geq m(|X| - |B|)$, and therefore (with $|X| = n - f_\ell$)

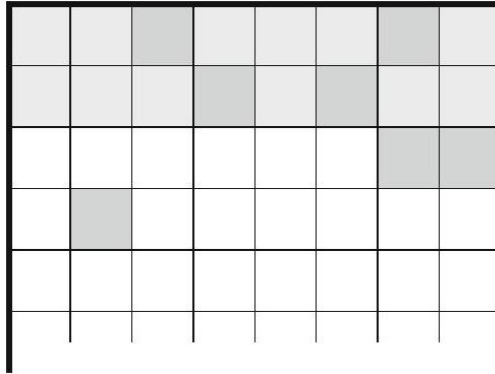
$$|B| \geq |X| - \frac{1}{m}c \geq n - f_\ell - (\ell-1) - \frac{1}{m}(f_{\ell+1} + \dots + f_r)$$

It follows that $|B| \geq m$ if

$$n - f_\ell - (\ell - 1) - \frac{1}{m} (f_{\ell+1} + \cdots + f_r) > m - 1$$

that is, if

$$m(n - f_\ell - \ell + 2 - m) > f_{\ell+1} + \cdots + f_r \quad (2)$$



A situation for $n = 8$, with $\ell = 3$, $f_1 = f_2 = f_3 = 2$, $f_4 = 1$. The dark squares represent the pre-filled cells, the lighter ones show the cells that have been filled in the completion process.

s_1	2			7			
s_2		5		4			
s_3			5				
s_4	4						



•							
2	7						
		•					
			•				
	4	5		•			
			5		•		
4							•

2	3	4	1	6	5	
5	6	1	4	2	3	
1	2	3	6	5	4	
6	4	5	2	3	1	
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

Inequality (2) is true for $m = 1$ and for $m = n - f_\ell - \ell + 1$ by (1), and hence for all values m between 1 and $n - f_\ell - \ell + 1$, since the left-hand side is a quadratic function in m with leading coefficient -1 . The remaining case is $m > n - f_\ell - \ell + 1$. Since any element x of X is contained in at most $\ell - 1 + f_{\ell+1} + \cdots + f_r$ rows, it can also appear in at most that many columns. Invoking (1) once more, we find that x is in one of the sets A_j , so in this case $B = X$, $|B| = n - f_\ell \geq m$, and the proof is complete.

Let us finally prove Smetaniuk's theorem.

Theorem. Any partial Latin square of order n with at most $n - 1$ filled cells can be completed to a Latin square of the same order.

- **Proof.** We use induction on n , the cases $n \leq 2$ being trivial. Thus we now study a partial Latin square of order $n \geq 3$ with at most $n - 1$ filled cells. With the notation used above these cells lie in $r \leq n - 1$ different rows numbered $s_1, \dots, s_r$, which contain $f_1, \dots, f_r > 0$ filled cells, with $\sum_{i=1}^r f_i \leq n - 1$. By Lemma 2 we may assume that there are more than $\frac{n}{2}$ different elements; thus there is an element that appears only once: after renumbering and permutation of rows (if necessary) we may assume that the element n occurs only once, and this is in row s_1 .

In the next step we want to permute the rows and columns of the partial Latin square such that after the permutations all the filled cells lie below the diagonal - except for the cell filled with n , which will end up on the diagonal. (The diagonal consists of the cells (k, k) with $1 \leq k \leq n$.) We achieve this as follows: First we permute row s_1 into the position f_1 . By permutation of columns we move all the filled cells to the left, so that n occurs as the last element in its row, on the diagonal. Next we move row s_2 into position $1 + f_1 + f_2$, and again the filled cells as far to the left as possible. In general, for $1 < i \leq r$ we move the row s_i into position $1 + f_1 + f_2 + \cdots + f_i$ and the filled cells as far left as possible. This clearly gives the desired set-up. The drawing to the left shows an example, with $n = 7$: the rows $s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 5$ and $s_4 = 7$ with $f_1 = f_2 = 2$ and $f_3 = f_4 = 1$ are moved into the rows numbered 2, 5, 6 and 7, and the columns are permuted "to the left" so that in the end all entries except for the single 7 come to lie below the diagonal, which is marked by $\bullet$ s.

In order to be able to apply induction we now remove the entry n from the diagonal and ignore the first row and the last column (which do not contain any filled cells): thus we are looking at a partial Latin square of order $n - 1$ with at most $n - 2$ filled cells, which by induction can be completed to a Latin square of order $n - 1$. The margin shows one (of many) completions of the partial Latin square that arises in our example. In the figure, the original entries are printed bold. They are already final, as are all the elements in shaded cells; some of the other entries will be changed in the following, in order to complete the Latin square of order n .

In the next step we want to move the diagonal elements of the square to the last column and put entries n onto the diagonal in their place. However, in general we cannot do this, since the diagonal elements need not

be distinct. Thus we proceed more carefully and perform successively, for $k = 2, 3, \dots, n - 1$ (in this order), the following operation:

Put the value n into the cell (k, n) . This yields a correct partial Latin square. Now exchange the value x_k in the diagonal cell (k, k) with the value n in the cell (k, n) in the

last column.

If the value x_k did not already occur in the last column, then our job for the current k is completed. After this, the current elements in the k -th column will not be changed any more.

In our example this works without problems for $k = 2, 3$ and 4 , and the corresponding diagonal elements 3, 1 and 6 move to the last column. The following three figures show the corresponding operations.

2	3	4	1	6	5	7
5	6	1	4	2	3	
1	2	3	6	5	4	
6	4	5	2	3	1	
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	6	5	3
5	6	1	4	2	3	7
1	2	3	6	5	4	
6	4	5	2	3	1	
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

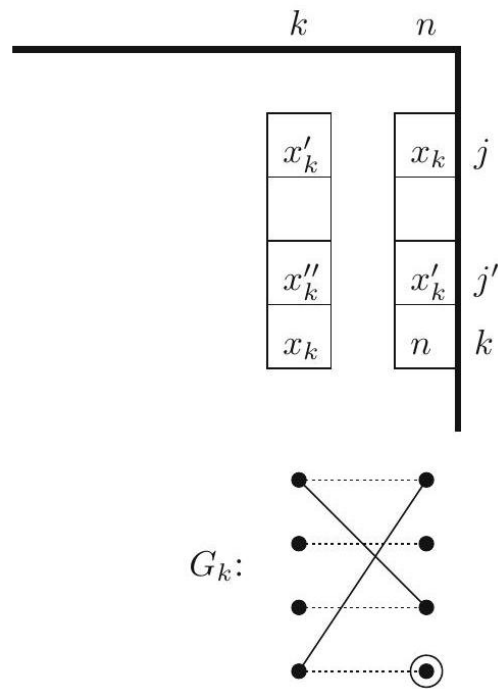
Now we have to treat the case in which there is already an element x_k in the last column.

In this case we proceed as follows:

If there is already an element x_k in a cell (j, n) with $2 \leq j < k$, then we exchange in row j the element x_k in the n -th column with the element x'_k in the k -th column. If the element x'_k also occurs in a cell (j', n) , then we also exchange the elements in the j' -th row that occur in the n -th and in the k -th columns, and so on.

If we proceed like this there will never be two equal entries in a row. Our exchange process ensures that there also will never be two equal elements in a column. So we only have to verify that the exchange process between the k -th and the n -th column does not lead to an infinite loop. This can be seen from the following bipartite graph G_k : Its vertices correspond to the cells (i, k) and (j, n) with $2 \leq i, j \leq k$ whose elements might be exchanged. There is an edge between (i, k) and (j, n) if these two cells lie in the same row (that is, for $i = j$), or if the cells before the exchange process contain the same element (which implies $i \neq j$). In our sketch the edges for $i = j$ are dotted, the others are not. All vertices in G_k have degree 1 or 2. The cell (k, n) corresponds to a vertex of degree 1; this vertex is the beginning of a path which leads to column k on a horizontal edge, then possibly on a sloped edge back to column n , then horizontally back to column k and so on. It ends in column k at a value that does not occur in column n . Thus the exchange operations will end at some point with a step where we move a new element into the last column. Then the work on column k is completed,

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	6	5	4	7
6	4	5	2	3	1	
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	



and the elements in the cells (i, k) for $i \geq 2$ are fixed for good.

In our example the "exchange case" happens for $k = 5$: the element $x_5 = 3$ does already occur in the last column, so that entry has to be moved back to column $k = 5$. But the exchange element $x'_5 = 6$ is not new either, it is exchanged by $x''_5 = 5$, and this one is new.

2	7	4	1	6	5	3
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	5	4	6
6	4	5	2	3	1	7
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	4	5	2	7	1	3
3	1	6	5	4	2	
4	5	2	3	1	6	

Finally, the exchange for $k = 6 = n - 1$ poses no problem, and after that the completion of the Latin square is unique:

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	4	5	2	7	1	3
3	1	6	5	4	2	7
4	5	2	3	1	6	

2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	4	5	2	7	1	3
3	1	6	5	4	7	2
4	5	2	3	1	6	

7	3	1	6	4	2	4
2	7	4	1	3	5	6
5	6	7	4	2	3	1
1	2	3	7	6	4	5
6	4	5	2	7	1	3
3	1	6	5	4	7	2
4	5	2	3	1	6	7

... and the same occurs in general: We put an element n into the cell (n, n) , and after that the first row can be completed by the missing elements of the respective columns (see Lemma 1), and this completes the proof. In order to get explicitly a completion of the original partial Latin square of order n , we only have to reverse the element, row and column permutations of the first two steps of the proof.

References

- [1] T. Evans: Embedding incomplete Latin squares, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 958-961.
- [2] C. C. Lindner: On completing Latin rectangles, Canadian Math. Bulletin 13 (1970), 65-68.
- [3] H. J. RYSER: A combinatorial theorem with an application to Latin rectangles, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 550-552.
- [4] B. Smetaniuk: A new construction on Latin squares I: A proof of the Evans conjecture, Ars Combinatoria 11 (1981), 155-172.

22.5 Graph Theory



22.5.1 Permanents and the power of entropy

In Chapter 24 we discussed Van der Waerden's conjecture, which established a lower bound for the permanent of a doubly stochastic matrix. There is also a wonderful theorem that gives an upper bound for integral matrices with prescribed row sums. Consider an $n \times n$ matrix $M = (m_{ij})$ with 0/1-entries. To M we associate a simple bipartite

graph $G_M = (U \cup V, E)$, whose vertices are given by $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ and $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, and where

$$u_i v_j \in E \quad :\Longleftrightarrow \quad m_{ij} = 1.$$

Conversely, every bipartite graph G on $n + n$ nodes gives rise to a square 0/1-matrix M of size $n \times n$ with $G = G_M$. Now look at the permanent

$$\text{per } M := \sum_{\sigma} m_{1\sigma(1)} \cdots m_{n\sigma(n)}$$

Every term $m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \cdots m_{n\sigma(n)}$ equals 0 or 1, and it is equal to 1 if and only if the set of edges $\{u_1 v_{\sigma(1)}, \dots, u_n v_{\sigma(n)}\}$ is a perfect matching of G_M , that is, a set of edges that covers each vertex exactly once. Hence the number $m(G_M)$ of perfect matchings in G_M is just the permanent, that is, $\text{per } M = m(G_M)$.

The correspondence $G \longleftrightarrow M_G$ stimulated a lot of the early research on permanents. One of the first difficult problems was a conjecture posed by Henryk Minc in 1967: Suppose the 0/1-matrix M has row sums $d_1, \dots, d_n$ (or equivalently the vertices $u_1, \dots, u_n$ have degrees $d_1, \dots, d_n$), then

$$\text{per } M \leq \prod_{i=1}^n (d_i!)^{1/d_i}$$

Observe that we can have equality, as seen from the example in the margin.

Minc's conjecture was proved by Lev M. Brégman in 1973. A few years later Alexander Schrijver gave a short and sweet proof, with a randomized version appearing in the book of Alon and Spencer. But in our view the proof straight from the BOOK is due to Jaikumar Radhakrishnan. It is not much different, but it uses just the right tool - entropy from information theory. Before we come to this, let us state Brégman's theorem again.

The all 1's matrix J_n corresponds to the complete bipartite graph $K_{n,n}$, with $\text{per}(J_n) = m(K_{n,n}) = n!$.

If k divides n , the block diagonal matrix

$$M = \begin{pmatrix} J_k & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

with $\frac{n}{k}$ blocks has $d_1 = \cdots = d_n = k$ and $\text{per } M = (k!)^{n/k}$.

A Mathematical Theory of Communication

By C. E. SHANNON

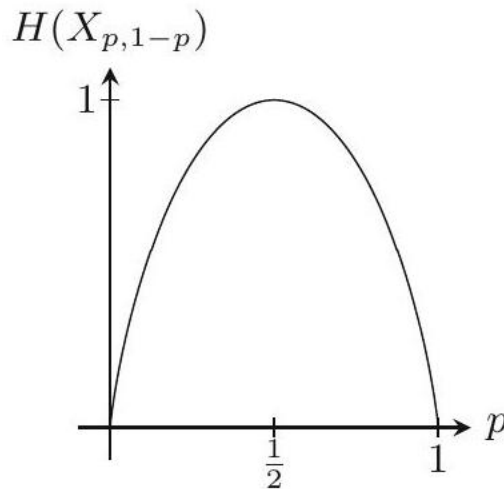
Introduction

The development of various methods of modulation such as PCM and PPM which exchange bandwidth for signal-to-noise ratio has intensified the interest in a general theory of communication. A basis for such a theory is contained in the important papers of Nyquist¹ and Hartley² on this subject. In the present paper we will extend the theory to include a number of new factors, in particular the effect of noise in the channel, and the savings possible due to the statistical structure of the original message and due to the nature of the final destination of the information.

The fundamental problem of communication is that of reproducing at one point either exactly or approximately a message selected at another point. Frequently the messages have meaning; that is they refer to or are correlated according to some system with certain physical or conceptual entities. These semantic aspects of communication are irrelevant to the engineering problem. The significant aspect is that the actual message is selected from a set of possible messages. The system must be designed to operate for each will actually be chosen since this is unknown at the time of design.

If the number of messages in the set is finite then this number or any monotonic function of this number can be regarded as a measure of the information produced when one message is chosen from the set, all choices being equally likely. As was pointed out by Hartley the most natural

It is said that Shannon, following the advice of John von Neumann, used the name "entropy" because nobody knew exactly what this meant anyway ...



Theorem 1. Let $M = (m_{ij})$ be an $n \times n$ matrix with entries in $\{0, 1\}$, and let $d_1, \dots, d_n$ be the row sums of M , that is, $d_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}$. Then

$$\text{per } M \leq \prod_{i=1}^n (d_i!)^{1/d_i}$$

It does not happen often that a single paper gives birth to a whole field. Claude Shannon's A Mathematical Theory of Communication from 1948 was such a singular achievement: It laid the foundations of information theory and coding, and thereby initiated one of the great mathematical success stories of the twentieth century.

Suppose X is a random variable taking values in $\{a_1, \dots, a_n\}$ with probabilities $\text{Prob}(X = a_i) = p_i$. It helps to think of X as an experiment with possible outcomes a_i , like throwing a die with outcomes 1, 2, ..., 6. How much information do we receive (on the average) from performing the experiment? Shannon's ingenious idea was the "equation" information after = uncertainty before.

For example, when a coin is rigged and heads comes up most of the time, then there is little information to be gained from throwing it, certainly less than when the coin is fair, in which case the uncertainty (and information) is largest.

By postulating certain natural conditions that an uncertainty measure for X should satisfy, Shannon arrived at his famous definition of entropy, which he denoted by $H(X)$:

$$H(X) = H(X_{p_1, \dots, p_n}) := - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

For example, if X is a throw of a biased coin with $\text{Prob}(X = \text{heads}) = p$, then the Shannon formula yields the function $H(X_{p,1-p}) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ graphed in the margin. In the following we always use the binary logarithm $\log_2 p$ with the convention $p \log_2 p = 0$ for $p = 0$. The support of the random variable X is $\text{supp } X := \{a : \text{Prob}(X = a) > 0\}$.

Later in his paper Shannon gave an alternative interpretation of $H(X)$ as the expected length of an optimal question strategy for the outcome of X . The appendix to this chapter contains a sketch of this approach.

Suppose X and Y are two random variables with value ranges $\{a_1, \dots, a_m\}$ and $\{b_1, \dots, b_n\}$. A key ingredient for Radhakrishnan's proof is the concept of conditional entropy of Y under knowledge of X . To shorten the writing, let us set $p(a_i) := \text{Prob}(X = a_i)$, $p(b_j) := \text{Prob}(Y = b_j)$, and similarly $p(a_i, b_j) := \text{Prob}(X = a_i \wedge Y = b_j)$ for the joint distribution of the pair (X, Y) , which may be viewed as a single random variable, and $p(b_j | a_i) := \text{Prob}(Y = b_j | X = a_i)$ for the conditional probabilities. Let

$$H(Y | a_i) := - \sum_{j=1}^n p(b_j | a_i) \log_2 p(b_j | a_i)$$

be the entropy (uncertainty) of Y if we know that the outcome of X is a_i . Now we take the expected value of this quantity over all possible outcomes of X and thus arrive at

$$H(Y | X) := \sum_{i=1}^m p(a_i) H(Y | a_i)$$

as the conditional entropy of Y under knowledge of X .

All we need for the proof of Brégman's theorem are three facts about entropy, whose (easy) proofs are given in the appendix; the rest is clever and beautiful probabilistic reasoning. Here are the facts:

(A) $H(X) \leq \log_2(|\text{supp } X|)$, with equality if and only if X is uniformly distributed on the support of X , that is, $\text{Prob}(X = a) = \frac{1}{n}$ for $a \in \text{supp } X$, where $n = |\text{supp } X|$.

(B) $H(X, Y) = H(X) + H(Y | X)$, and more generally $H(X_1, \dots, X_n) = H(X_1) + H(X_2 | X_1) + \dots + H(X_n | X_1, \dots, X_{n-1})$.

(C) If $\text{supp } X$ is partitioned into the d sets $E_1, \dots, E_d$, where $E_j := \{a \in \text{supp } X : |\text{supp}(Y | a)| = j\}$, then

$$H(Y | X) \leq \sum_{j=1}^d \text{Prob}(X \in E_j) \log_2 j$$

- Proof of Theorem 1. Let $G = (U \cup V, E)$ be the bipartite graph associated with M , where d_i is the degree of the vertex u_i , and denote by $\mathfrak{S}$ the set of perfect matchings of G . As per $M = m(G) = |\mathfrak{S}|$, we will prove the upper bound of the theorem for the number of perfect matchings of G . We may assume $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ because otherwise there is nothing to show. We view each $\sigma \in \mathfrak{S}$ as the corresponding permutation $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ of the indices. Hence the vertex $u_i \in U$ is matched to $v_{\sigma(i)} \in V$ under σ . The first idea is to pick $\sigma \in \mathfrak{S}$ uniformly at random and to consider the vector of random variables $X = (X_1, \dots, X_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

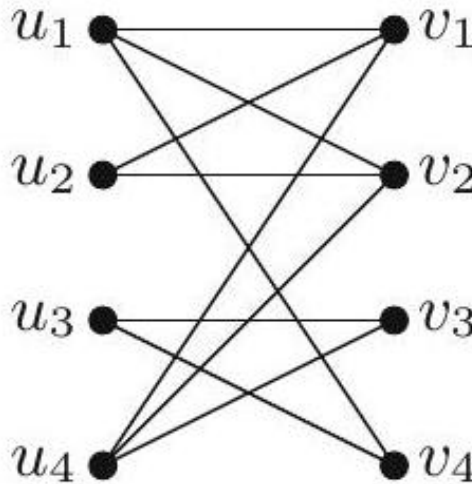
By (A),

$$H(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) = \log_2(|\mathfrak{S}|);$$

hence it suffices to show that

$$H(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) \leq \log_2 \left(\prod_{i=1}^n (d_i!)^{1/d_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} \log_2 (d_i!) \quad (1)$$

In particular, $H(Y | X) = 0$ if and only if the outcome of Y is determined once the result of X is known.



$$\mathfrak{S} = \{1243, 2143, 4132, 4231\}$$

Next we use (B) to get

$$H(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) = \sum_{i=1}^n H(\sigma(i) \mid \sigma(1), \dots, \sigma(i-1)). \quad (2)$$

Let's find out what the conditional entropy $H(\sigma(i) \mid \sigma(1), \dots, \sigma(i-1))$ means. It measures the uncertainty about the matching mate of u_i after the mates of $u_1, \dots, u_{i-1}$ have been revealed. In particular, the support of the random variable $\sigma(i)$ under knowledge of $(\sigma(1), \dots, \sigma(i-1))$ is contained in the set of indices of the neighbors of u_i that have not already been matched to one of $u_1, \dots, u_{i-1}$.

For example, let us check the formula in (B) for the graph in the margin, which has $|\mathfrak{S}| = 4$. Since all permutations in $\mathfrak{S}$ are equally likely, we have $H(\sigma(1), \dots, \sigma(4)) = \log_2 4 = 2$. Now, $H(\sigma(1)) = -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Let us compute the conditional entropy $H(\sigma(2) \mid \sigma(1))$: For $\sigma(1) = 1$ we get $H(\sigma(2) \mid 1) = 0$ since $\sigma(2) = 2$ is then determined; similarly $H(\sigma(2) \mid 2) = 0$, but for $\sigma(1) = 4$ we have $H(\sigma(2) \mid 4) = 1$, since there are two equally likely outcomes $\sigma(2) = 1, \sigma(2) = 2$. For the expected value we thus compute $H(\sigma(2) \mid \sigma(1)) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. The next conditional entropies $H(\sigma(3) \mid \sigma(1), \sigma(2))$ and $H(\sigma(4) \mid \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ are both 0, since the values are determined. So summing up we again get $H(\sigma(1)) + H(\sigma(2) \mid \sigma(1)) + H(\sigma(3) \mid \sigma(1), \sigma(2)) + H(\sigma(4) \mid \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 0 = 2$, in accordance with (B).

Radhakrishnan's wonderful idea was to examine the vertices $u_1, \dots, u_n$ in a random order τ , where all τ are equally likely with probability $\frac{1}{n!}$, and then to take the average over the entropies. In other words, we reveal the matching mates in the order $\sigma(\tau(1)), \sigma(\tau(2)), \dots, \sigma(\tau(n))$. Let us look at a fixed τ . If $k_i = \tau^{-1}(i)$, that is, if in the ordering τ the vertex u_i appears in k_i th place, then equation (2) becomes

$$H(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) = \sum_{i=1}^n H(\sigma(i) \mid \sigma(\tau(1)), \dots, \sigma(\tau(k_i - 1)))$$

As this holds for all τ , taking the average we get

$$H(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau} \left(\sum_{i=1}^n H(\sigma(i) \mid \sigma(\tau(1)), \dots, \sigma(\tau(k_i - 1))) \right).$$

Let us fix τ and look at a summand

$$H(\sigma(i) \mid \sigma(\tau(1)), \dots, \sigma(\tau(k_i - 1))). \quad (3)$$

To upper bound (3) we use fact (C) from above, applied to the random variables $X = (\sigma(\tau(1)), \dots, \sigma(\tau(k_i - 1)))$ and $Y = \sigma(i)$. For each σ let $N_i(\sigma, \tau)$ be the set of indices of the neighbors of u_i that are not among $\{\sigma(\tau(1)), \dots, \sigma(\tau(k_i - 1))\}$. Since u_i has d_i neighbors and σ is a perfect matching we have $1 \leq |N_i(\sigma, \tau)| \leq d_i$ for all σ . Now partition $\text{supp } X$ into the sets $E_{i,j}^{(\tau)}$, where $(\sigma(\tau(1)), \dots, \sigma(\tau(k_i - 1)))$ lies in $E_{i,j}^{(\tau)}$ if and only if $|N_i(\sigma, \tau)| = j$, for $1 \leq j \leq d_i$. Considering $|N_i(\sigma, \tau)|$ as a random variable on $\mathfrak{S}$, we thus have

$$\text{Prob}(X \in E_{i,j}^{(\tau)}) = \text{Prob}(|N_i(\sigma, \tau)| = j),$$

and fact (C) tells us that for fixed τ

$$H(\sigma(i) \mid \sigma(\tau(1)), \dots, \sigma(\tau(k_i - 1))) \leq \sum_{j=1}^{d_i} \text{Prob}(|N_i(\sigma, \tau)| = j) \log_2 j.$$

Hence we get altogether

$$H(\sigma(1), \dots, \sigma(n)) \leq \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} \log_2 j \sum_{\tau} \text{Prob}(|N_i(\sigma, \tau)| = j). \quad (4)$$

This seems to get more complicated as we go along - but wait! Looking at (1) it suffices to show that the innermost sum in (4) equals $n! \frac{1}{d_i}$ for all j , because then the right-hand side simplifies to $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} \log_2(d_i!)$.

And this assertion about the inner sum is easy! Fix σ , and let $\ell_1, \dots, \ell_{d_i}$ be the indices of the neighbors of u_i , $D_{\sigma} = \{\sigma^{-1}(\ell_1), \dots, \sigma^{-1}(\ell_{d_i})\}$ is the set of indices of the U -vertices that are

matched onto the neighbors of u_i , including of course i itself, and they appear according to the ordering of D_σ under τ . If i comes first in D_σ , then no neighbors had been taken so far, whence $|N_i(\sigma, \tau)| = d_i$. If i is second, then one neighbor is gone, thus $|N_i(\sigma, \tau)| = d_i - 1$, and so on. Now the power of averaging comes into play. With τ running through all $n!$ permutations, all possible orderings of the list D_σ occur with equal frequency, which means that i appears in all d_i places of D_σ with the same frequency $\frac{n!}{d_i}$. But this, in turn, implies that $|N_i(\sigma, \tau)| = j$ occurs with frequency $\frac{n!}{d_i}$ for all j , and this holds for all σ , whence

$$\sum_{\tau} \text{Prob}(|N_i(\sigma, \tau)| = j) = \frac{n!}{d_i}$$

for all j , and we are done.

We cannot end this chapter without deriving a stunning asymptotic formula for the number $L(n)$ of Latin squares of order n . (See Chapter 36 for the definition of Latin squares.) The small examples

$$L(1) = 1, L(2) = 2, L(3) = 12, L(4) = 576, L(5) = 161280$$

suggest that $L(n)$ grows exceedingly fast. So, all we can hope for are good bounds - and these are miraculously supplied by Brégman's Theorem and by the permanent theorem discussed in Chapter 24.

Take an empty $n \times n$ square and fill it row by row with the numbers $1, \dots, n$, so that the resulting configuration is a Latin square. There are $n!$ ways to

$n = 1 :$ $n = 2 :$

1

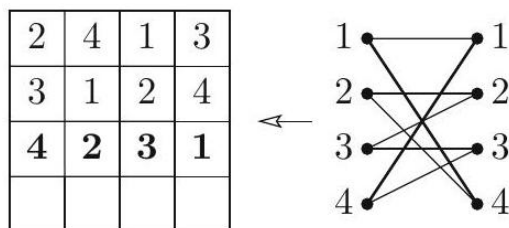
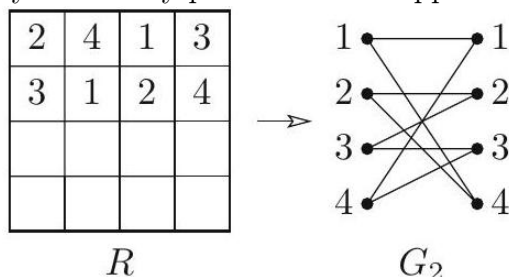
1	2
2	1

2	1
1	2

$n = 3 :$

1	2	3
2	3	1
3	1	2

There are $3!2! = 12$ fillings of the first row and the first column; the rest is then determined. fill the first row, since we may take every permutation. Suppose the first



G_{-1}

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per $M_2 = 2$.

Note that $\text{per } \lambda M = \lambda^n \text{ per } M$ for an $n \times n$ matrix M .

The case $k = n$ corresponds to the $n!$ fillings of the first row.

$n - k$ rows are properly filled to give an $(n - k) \times n$ Latin rectangle R . In how many ways can we fill the next row? Consider the following bipartite graph $G_k = (U \cup V, E)$, where U is the set of elements and V the set of column positions, with

$$ij \in E : \Longleftrightarrow i \text{ does not appear in the } j \text{ th column of } R.$$

So, exactly the numbers that are joined to j can be used in column j of the $(n - k + 1)$ st row. In other words, a proper filling of the next row corresponds to a perfect matching of G_k . Now, every element $i \in U$ appears $n - k$ times in R , hence it is available in k columns for the next row. Thus i has degree k in G_k and similarly $d(j) = k$ for $j \in V$. (We used this argument already in the proof of Lemma 1 in Chapter 36.)

Let M_k be the 0/1-matrix corresponding to G_k , thus

$$\text{per } M_k = \text{the number of proper fillings of row } n - k + 1.$$

Every row and column in M_k sums to k ; let us denote the set of 0/1 matrices with this property by $\mathcal{M}(n, k)$. The permanent $\text{per } M_k$ depends, of course, on the setup of R , but if we have general lower and upper bounds for matrices in $\mathcal{M}(n, k)$, then by taking the product over all k , we obtain lower/upper bounds for $L(n)$.

By Brégman's Theorem with $d_1 = d_2 = \dots = d_n = k$ we get right away

$$\text{per } M \leq k!^{\frac{n}{k}} \quad \text{for all } M \in \mathcal{M}(n, k)$$

Now to the lower bound: If M is in $\mathcal{M}(n, k)$, then $\frac{1}{k}M$ is doubly stochastic, which implies by the permanent theorem in Chapter 24 that

$$\text{per } M = k^n \text{per} \left(\frac{1}{k} M \right) \geq k^n \frac{n!}{n^n}.$$

In summary, we have proved the following remarkable bounds.

Theorem 2. The number $L(n)$ of Latin squares of order n is bounded by

$$\frac{n!^{2n}}{n^{n^2}} \leq L(n) \leq \prod_{k=1}^n k!^{n/k}$$

Using the approximations for $n!$ from page 13

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n < n! < en \left(\frac{n}{e} \right)^n \quad (5)$$

we can easily derive from this the following astonishingly simple asymptotic formula.

Corollary. In the limit, the number $L(n)$ of Latin squares of order n satisfies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n)^{1/n^2}}{n} = \frac{1}{e^2}$$

- Proof. For the lower bound we get
so

$$L(n) \geq \frac{n!^{2n}}{n^{n^2}} > \frac{\left(\frac{n}{e} \right)^{2n^2}}{n^{n^2}} = \left(\frac{n}{e^2} \right)^{n^2}$$

$$\frac{L(n)^{1/n^2}}{n} > \frac{1}{e^2} \quad \text{and thus} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(n)^{1/n^2}}{n} \geq \frac{1}{e^2}.$$

The upper bound needs a little more work. We will show that for any $\varepsilon > 0$

$$\frac{L(n)^{1/n^2}}{n} < \frac{1}{e^2}(1 + \varepsilon)$$

holds when n is large enough. For convenience we set $\mathcal{L}(n) = L(n)^{1/n^2}$. Using (5) for k in place of n , we have

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}(n) &\leq \frac{1}{n} \log \prod_{k=1}^n (k!)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \log k! \\ &< \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \log \left(ek \left(\frac{k}{e} \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (1 + \log k + k \log k - k) \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\log k}{k} + \sum_{k=1}^n \log k - n \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Now, look at page 13. The first sum is the harmonic number H_n , where $H_n < \log n + 1$. The third sum was also treated there, with

$$\sum_{k=1}^n \log k \leq (n+1) \log(n+1) - n \leq (n+2) \log n - n$$

where the second inequality is derived in the margin, for $n \geq 6$. For the second sum in (6) the same integration method that we had used for the third one yields, using that $\frac{\log x}{x}$ is positive for $x > 1$ and monotonically decreasing for $x > e$, that

$$\sum_{k=4}^n \frac{\log k}{k} < \int_1^n \frac{\log x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^n = \frac{1}{2} (\log n)^2$$

Thus the second sum in (6) is smaller than $2 + \frac{1}{2}(\log n)^2$. Putting everything together, we get

$$\log \mathcal{L}(n) < \frac{3 \log n}{n} + \frac{3}{n} + \frac{(\log n)^2}{2n} + \log n - 2$$

The first three terms go to 0 as n gets large, and we conclude that for every $\delta > 0$

$$\log \mathcal{L}(n) \leq \delta + \log n - 2$$

will hold if n is large enough. Thus we get $L(n)^{1/n^2} \leq \frac{n}{e^2} e^\delta$ for all large enough n , and this is what we wanted to prove. $\square$

The inequality $(n+1)^{n+1} \leq n^{n+2}$ holds for $n \geq 6$: It may be rewritten as

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq n$$

where $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ and $1 + \frac{1}{n} \leq 2$; thus the left side is less than $2e < 6 \leq n$.

The actual minimum $\bar{L}(X)$ can e. g. be computed by Huffman's algorithm, a classic in computer science.

Remember $0 \cdot \log_2 0 = 0$.

Appendix: More about entropy

What was Shannon's alternative approach to entropy?

As before, let X be a random variable with value set $\{a_1, \dots, a_n\}$ and $p_i = \text{Prob}(X = a_i)$. We employ a certain strategy $\mathcal{S}$ of yes/no questions until we know the value of X for sure. If our strategy leads us to ask ℓ_i questions in the case of the outcome $X = a_i$, then $\bar{L}(\mathcal{S}) := \sum_{i=1}^n p_i \ell_i$ is the expected number of questions. Of course, a good strategy will want to ask few questions for very likely outcomes a_i (when p_i is large), so as to minimize the average number.

As an example, suppose that the probabilities for throwing a loaded die are $p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = p_3 = \frac{1}{8}, p_4 = \frac{1}{6}$, and $p_5 = p_6 = \frac{1}{8}$. A strategy might be the following. First question: "Is the outcome ≤ 3 ?" If yes, which happens with probability $\frac{7}{12}$, ask the second question: "Is it 1?" If yes again, we are done, otherwise we need one more question to decide whether the throw shows 2 or 3. Proceeding in analogous fashion if the first answer was no, we get $\ell_1 = 2, \ell_2 = \ell_3 = 3, \ell_4 = 2, \ell_5 = \ell_6 = 3$, thus

$$\bar{L}(\mathcal{S}) = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{2}$$

Shannon now proved that the entropy $H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$ is a lower bound for the expected number of questions $\bar{L}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^n p_i \ell_i$ for every conceivable strategy $\mathcal{S}$. Let us check this! First we have that $\sum_{i=1}^n 2^{-\ell_i} = 1$ (why?), and the inequality $\log_2 x \leq x - 1$ for $x > 0$ together with $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ yields

$$\sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{2^{-\ell_i}}{p_i} \leq \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{2^{-\ell_i}}{p_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^n 2^{-\ell_i} - \sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

But this means that $-\sum_{i=1}^n p_i \ell_i \leq \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$, or $\bar{L}(\mathcal{S}) \geq H(X)$. Conversely, it is easy to find a strategy $\mathcal{S}_0$ with $\bar{L}(\mathcal{S}_0) < H(X) + 1$, hence

$$H(X) \leq \bar{L}(X) = \min_{\mathcal{S}} \bar{L}(\mathcal{S}) < H(X) + 1$$

Looking at n -fold repetitions X^n of the experiment X , Shannon went on to show that the expected number of questions per experiment $\frac{1}{n} \bar{L}(X^n)$ used by optimal strategies for X^n converges to $H(X)$ for $n \rightarrow \infty$. (Shannon called this the "Fundamental theorem for a noiseless channel.")

Now to the three facts that we used in the proof of Theorem 1.

(A) $H(X) \leq \log_2(|\text{supp } X|)$.

- Proof. Assume without loss of generality that $p_i > 0$ for all i . Consider the general form of the AM-GM inequality $a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n$ on page 144. Set $a_i = \frac{1}{p_i}$ and take the logarithm to obtain

$$\sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \leq \log_2 \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{p_i} \right) = \log_2 n$$

Equality holds if and only if $p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$, that is, if we have uniform distribution.

(B) $H(X, Y) = H(X) + H(Y | X)$.

- Proof. We use the same notation as before and compute

$$\begin{aligned}
H(X, Y) &= - \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log_2 p(a_i, b_j) \\
&= - \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log_2 (p(a_i) p(b_j | a_i)) \\
&= - \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log_2 p(a_i) - \sum_{i,j} p(a_i) p(b_j | a_i) \log_2 p(b_j | a_i) \\
&= - \sum_{i=1}^m p(a_i) \log_2 p(a_i) + H(Y | X) = H(X) + H(Y | X)
\end{aligned}$$

The general formula follows by induction.

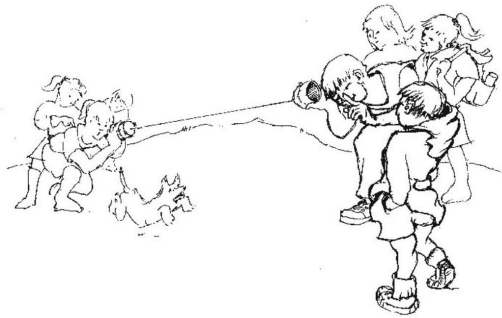
$$(C) H(Y | X) \leq \sum_{j=1}^d \text{Prob}(X \in E_j) \log_2 j.$$

- Proof. We have $H(Y | X) = \sum_{i=1}^m p(a_i) H(Y | a_i)$. Partitioning the set $\{a_1, \dots, a_m\}$ into the subsets E_j given by the assumption and using (A) we get

$$\begin{aligned}
H(Y | X) &= \sum_{j=1}^d \sum_{a \in E_j} p(a) H(Y | a) \\
&\leq \sum_{j=1}^d \sum_{a \in E_j} p(a) \log_2 j = \sum_{j=1}^d \text{Prob}(X \in E_j) \log_2 j.
\end{aligned}$$

References

- [1] N. Alon & J. Spencer: The Probabilistic Method, Third edition, WileyInterscience 2008.
- [2] L. BrGMAN: Some properties of nonnegative matrices and their permanents, Soviet Math. Doklady 14 (1973), 945-949.
- [3] A. Khinchin: Mathematical Foundations of Information Theory, Dover Publications 1957.
- [4] B. D. McKay & I. M. Wanless: On the number of Latin squares, Annals of Combinatorics 9 (2005), 335-344.
- [5] J. RADHAKRISHNAN: An entropy proof of Bregman's theorem, J. Combinatorial Theory, Ser. A 77 (1997), 161-164.
- [6] A. Schrijver: A short proof of Minc's conjecture, J. Combinatorial Theory, Ser. A 25 (1978), 80-83.
- [7] H. Minc: Permanents, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 6, Addison-Wesley, Reading MA 1978; reissued by Cambridge University Press 1984.
- [8] C. Shannon: A Mathematical Theory of Communication, Bell System Technical Journal 27 (1948), 379-423, 623-656.



"Do you get any news?"

⁰"Sure! $-\sum_i p_i \log_2 p_i$ of them!"

22.5.2 The Dinitz problem

The four-color problem was a main driving force for the development of graph theory as we know it today, and coloring is still a topic that many graph theorists like best. Here is a simple-sounding coloring problem, raised by Jeff Dinitz in 1978, which defied all attacks until its astonishingly simple solution by Fred Galvin fifteen years later.

Consider n^2 cells arranged in an $n \times n$ square, and let (i, j) denote the cell in row i and column j . Suppose that for every cell (i, j) we are given a set $C(i, j)$ of n colors.

Is it then always possible to color the whole array by picking for each cell (i, j) a color from its set $C(i, j)$ such that the colors in each row and each column are distinct?

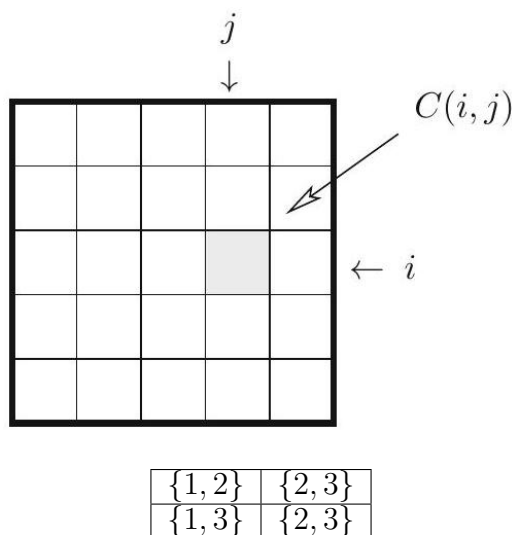
As a start consider the case when all color sets $C(i, j)$ are the same, say $\{1, 2, \dots, n\}$. Then the Dinitz problem reduces to the following task: Fill the $n \times n$ square with the numbers $1, 2, \dots, n$ in such a way that the numbers in any row and column are distinct. In other words, any such coloring corresponds to a Latin square, as discussed in the previous chapter. So, in this case, the answer to our question is "yes."

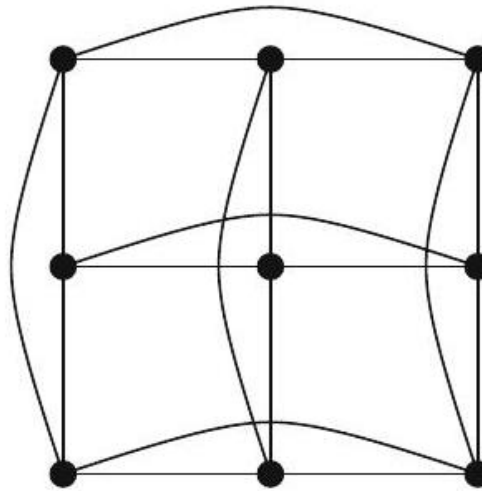
Since this is so easy, why should it be so much harder in the general case when the set $C := \bigcup_{i,j} C(i, j)$ contains even more than n colors? The difficulty derives from the fact that not every color of C is available at each cell. For example, whereas in the Latin square case we can clearly choose an arbitrary permutation of the colors for the first row, this is not so anymore in the general problem. Already the case $n = 2$ illustrates this difficulty.

Suppose we are given the color sets that are indicated in the figure. If we choose the colors 1 and 2 for the first row, then we are in trouble since we would then have to pick color 3 for both cells in the second row.

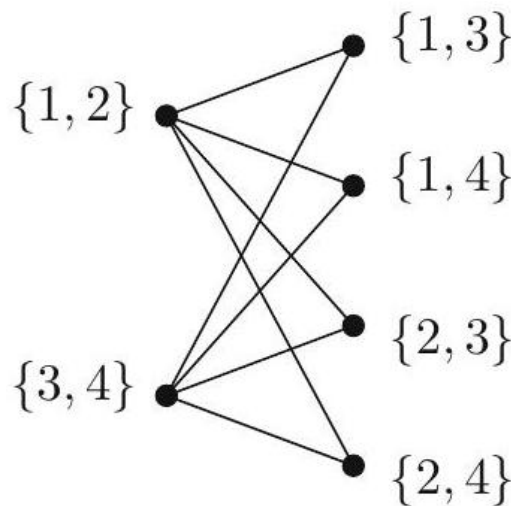
Before we tackle the Dinitz problem, let us rephrase the situation in the language of graph theory. As usual we only consider graphs $G = (V, E)$ without loops and multiple edges. Let $\chi(G)$ denote the chromatic number of the graph, that is, the smallest number of colors that one can assign to the vertices such that adjacent vertices receive different colors.

In other words, a coloring calls for a partition of V into classes (colored with the same color) such that there are no edges within a class. Calling a set $A \subseteq V$ independent if there are no edges within A , we infer that the chromatic number is the smallest number of independent sets which partition the vertex set V .





The graph S_3



In 1976 Vizing, and three years later Erdős, Rubin, and Taylor, studied the following coloring variant which leads us straight to the Dinitz problem. Suppose in the graph $G = (V, E)$ we are given a set $C(v)$ of colors for each vertex v . A list coloring is a coloring $c : V \rightarrow \bigcup_{v \in V} C(v)$ where $c(v) \in C(v)$ for each $v \in V$. The definition of the list chromatic number $\chi_\ell(G)$ should now be clear: It is the smallest number k such for any list of color sets $C(v)$ with $|C(v)| = k$ for all $v \in V$ there always exists a list coloring. Of course, we have $\chi_\ell(G) \leq |V|$ (we never run out of colors). Since ordinary coloring is just the special case of list coloring when all sets $C(v)$ are equal, we obtain for any graph G

$$\chi(G) \leq \chi_\ell(G).$$

To get back to the Dinitz problem, consider the graph S_n which has as vertex set the n^2 cells of our $n \times n$ array with two cells adjacent if and only if they are in the same row or column. Since any n cells in a row are pairwise adjacent we need at least n colors. Furthermore, any coloring with n colors corresponds to a Latin square, with the cells occupied by the same number forming a color class. Since Latin squares, as we have seen, exist, we infer $\chi(S_n) = n$, and the Dinitz problem can now be succinctly stated as

$$\chi_\ell(S_n) = n?$$

One might think that perhaps $\chi(G) = \chi_\ell(G)$ holds for any graph G , but this is a long shot from the truth. Consider the graph $G = K_{2,4}$. The chromatic number is 2 since we may use one color for the two left vertices and the second color for the vertices on the right. But now

suppose that we are given the color sets indicated in the figure.

To color the left vertices we have the four possibilities $1|3, 1|4, 2|3$ and $2|4$, but any one of these pairs appears as a color set on the right-hand side, so a list coloring is not possible. Hence $\chi_\ell(G) \geq 3$, and the reader may find it fun to prove $\chi_\ell(G) = 3$ (there is no need to try out all possibilities!). Generalizing this example, it is not hard to find graphs G where $\chi(G) = 2$, but $\chi_\ell(G)$ is arbitrarily large! So the list coloring problem is not as easy as it looks at first glance. Back to the Dinitz problem. A significant step towards the solution was made by Jeanette Janssen in 1992 when she proved $\chi_\ell(S_n) \leq n + 1$, and the coup de grâce was delivered by Fred Galvin by ingeniously combining two results, both of which had long been known. We are going to discuss these two results and show then how they imply $\chi_\ell(S_n) = n$.

First we fix some notation. Suppose v is a vertex of the graph G , then we denote as before by $d(v)$ the degree of v . In our square graph S_n every vertex has degree $2n - 2$, accounting for the $n - 1$ other vertices in the same row and in the same column. For a subset $A \subseteq V$ we denote by G_A the subgraph which has A as vertex set and which contains all edges of G between vertices of A . We call G_A the subgraph induced by A , and say that H is an induced subgraph of G if $H = G_A$ for some A .

To state our first result we need directed graphs $\vec{G} = (V, E)$, that is, graphs where every edge e has an orientation. The notation $e = (u, v)$ means that there is an arc e , also denoted by $u \rightarrow v$, whose initial vertex is u and whose terminal vertex is v . It then makes sense to speak of the outdegree $d^+(v)$ resp. the indegree $d^-(v)$, where $d^+(v)$ counts the number of edges with v as initial vertex, and similarly for $d^-(v)$; furthermore, $d^+(v) + d^-(v) = d(v)$. When we write G , we mean the graph $\vec{G}$ without the orientations.

The following concept originated in the analysis of games and will play a crucial role in our discussion.

Definition 1. Let $\vec{G} = (V, E)$ be a directed graph. A kernel $K \subseteq V$ is a subset of the vertices such that

- (i) K is independent in G , and
- (ii) for every $u \notin K$ there exists a vertex $v \in K$ with an edge $u \rightarrow v$.

Let us look at the example in the figure. The set $\{b, c, f\}$ constitutes a kernel, but the subgraph induced by $\{a, c, e\}$ does not have a kernel since the three edges cycle through the vertices.

With all these preparations we are ready to state the first result.

Lemma 1. Let $\vec{G} = (V, E)$ be a directed graph, and suppose that for each vertex $v \in V$ we have a color set $C(v)$ that is larger than the outdegree, $|C(v)| \geq d^+(v) + 1$. If every induced subgraph of $\vec{G}$ possesses a kernel, then there exists a list coloring of G with a color from $C(v)$ for each v .

- **Proof.** We proceed by induction on $|V|$. For $|V| = 1$ there is nothing to prove. Choose a color $c \in C = \bigcup_{v \in V} C(v)$ and set

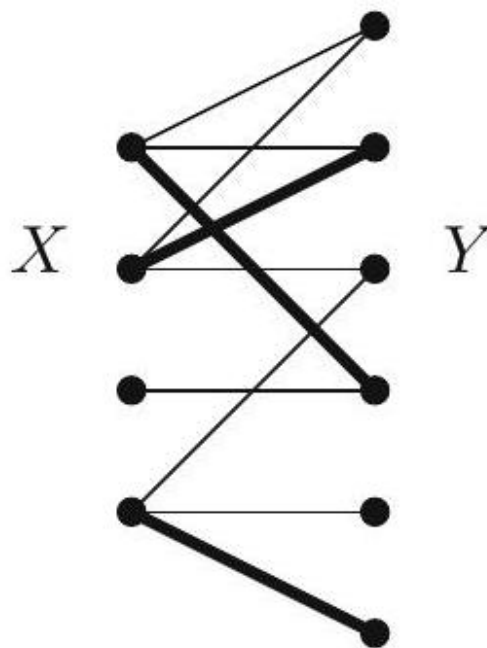
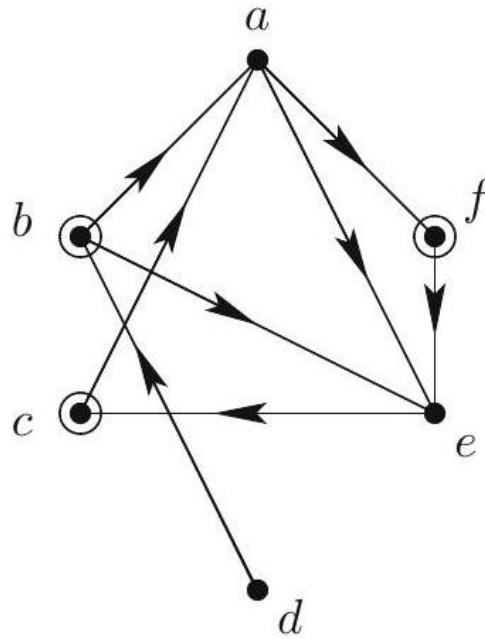
$$A(c) := \{v \in V : c \in C(v)\}.$$

By hypothesis, the induced subgraph $G_{A(c)}$ possesses a kernel $K(c)$. Now we color all $v \in K(c)$ with the color c (this is possible since $K(c)$ is independent), and delete $K(c)$ from G and c from C . Let G' be the induced subgraph of G on $V \setminus K(c)$ with $C'(v) = C(v) \setminus c$ as the new list of color sets. Notice that for each $v \in A(c) \setminus K(c)$, the outdegree $d^+(v)$ is decreased by at least 1 (due to condition (ii) of a kernel). So $d^+(v) + 1 \leq |C'(v)|$ still holds in $\vec{G}'$. The same condition also holds for the vertices outside $A(c)$, since in this case the color sets $C(v)$ remain unchanged. The new graph G' contains fewer vertices than G , and we are done by induction.

The method of attack for the Dinitz problem is now obvious: We have to find an orientation of the graph S_n with outdegrees $d^+(v) \leq n - 1$ for all v and which ensures the existence of a kernel for all induced subgraphs. This is accomplished by our second result.

Again we need a few preparations. Recall (from Chapter 11) that a bipartite graph $G = (X \cup Y, E)$ is a graph with the following property: The vertex set V is split into two parts X and Y such that every edge has one endvertex in X and the other in Y . In other words, the bipartite graphs are precisely those which can be colored with two colors (one for X and one

for Y).



A bipartite graph with a matching

The bold edges constitute a stable matching. In each priority list, the choice leading to a stable matching is printed bold.

Now we come to an important concept, "stable matchings," with a down-to-earth interpretation. A matching M in a bipartite graph $G = (X \cup Y, E)$ is a set of edges such that no two edges in M have a common endvertex. In the displayed graph the edges drawn in bold lines constitute a matching.

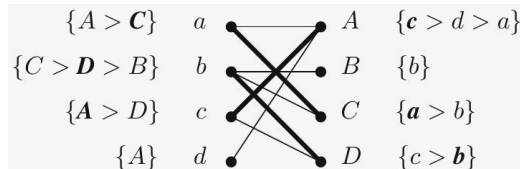
Consider X to be a set of men and Y a set of women and interpret $uv \in E$ to mean that u and v might marry. A matching is then a mass-wedding with no person committing bigamy. For our purposes we need a more refined (and more realistic?) version of a matching, suggested by David Gale and Lloyd S. Shapley. Clearly, in real life every person has preferences, and this is what we add to the set-up. In $G = (X \cup Y, E)$ we assume that for every $v \in X \cup Y$ there is a ranking of the set $N(v)$ of vertices adjacent to v , $N(v) = \{z_1 > z_2 > \cdots > z_{d(v)}\}$. Thus z_1 is

the top choice for v , followed by z_2 , and so on.

Definition 2. A matching M of $G = (X \cup Y, E)$ is called stable if the following condition holds: Whenever $uv \in E \setminus M$, $u \in X$, $v \in Y$, then either $uy \in M$ with $y > v$ in $N(u)$ or $xv \in M$ with $x > u$ in $N(v)$, or both.

In our real life interpretation a set of marriages is stable if it never happens that u and v are not married but u prefers v to his partner (if he has one at all) and v prefers u to her mate (if she has one at all), which would clearly be an unstable situation.

Before proving our second result let us take a look at the following example:



Notice that in this example there is a unique largest matching M with four edges, $M = \{aC, bB, cD, dA\}$, but M is not stable (consider cA).

Lemma 2. A stable matching always exists.

- **Proof.** Consider the following algorithm. In the first stage all men $u \in X$ propose to their top choice. If a girl receives more than one proposal she picks the one she likes best and keeps him on a string, and if she receives just one proposal she keeps that one on a string. The remaining men are rejected and form the reservoir R . In the second stage all men in R propose to their next choice. The women compare the proposals (together with the one on the string, if there is one), pick their favorite and put him on the string. The rest is rejected and forms the new set R . Now the men in R propose to their next choice, and so on. A man who has proposed to his last choice and is again rejected drops out from further consideration (as well as from the reservoir). Clearly, after some time the reservoir R is empty, and at this point the algorithm stops.

Claim. When the algorithm stops, then the men on the strings together with the corresponding girls form a stable matching.

Notice first that the men on the string of a particular girl move there in increasing preference (of the girl) since at each stage the girl compares the new proposals with the present mate and then picks the new favorite. Hence if $uv \in E$ but $uv \notin M$, then either u never proposed to v in which case he found a better mate before he even got around to v , implying $uy \in M$ with $y > v$ in $N(u)$, or u proposed to v but was rejected, implying $xv \in M$ with $x > u$ in $N(v)$. But this is exactly the condition of a stable matching.

Putting Lemmas 1 and 2 together, we now get Galvin's solution of the Dinitz problem.

Theorem. We have $\chi_\ell(S_n) = n$ for all n .

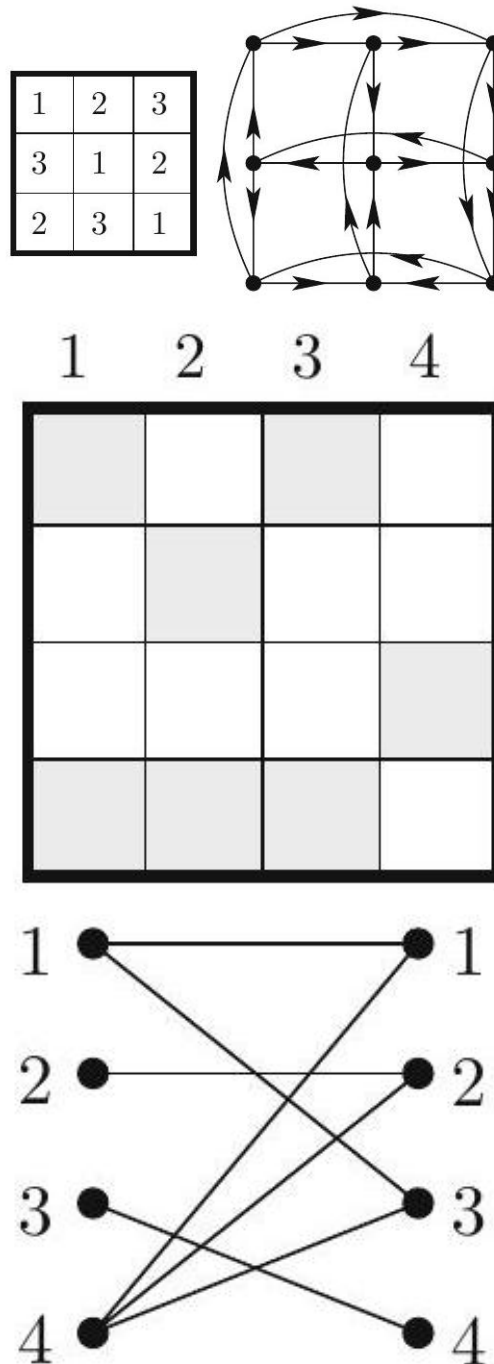
- **Proof.** As before we denote the vertices of S_n by (i, j) , $1 \leq i, j \leq n$. Thus (i, j) and (r, s) are adjacent if and only if $i = r$ or $j = s$. Take any Latin square L with letters from $\{1, 2, \dots, n\}$ and denote by $L(i, j)$ the entry in cell (i, j) . Next make S_n into a directed graph $\vec{S}_n$ by orienting the horizontal edges $(i, j) \rightarrow (i, j')$ if $L(i, j) < L(i, j')$ and the vertical edges $(i, j) \rightarrow (i', j)$ if $L(i, j) > L(i', j)$. Thus, horizontally we orient from the smaller to the larger element, and vertically the other way around. (In the margin we have an example for $n = 3$.)

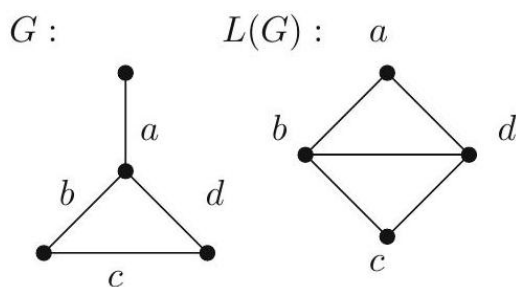
Notice that we obtain $d^+(i, j) = n - 1$ for all (i, j) . In fact, if $L(i, j) = k$, then $n - k$ cells in row i contain an entry larger than k , and $k - 1$ cells in column j have an entry smaller than k .

By Lemma 1 it remains to show that every induced subgraph of $\vec{S}_n$ possesses a kernel. Consider a subset $A \subseteq V$, and let X be the set of rows of L , and Y the set of its columns. Associate to A the bipartite graph $G = (X \cup Y, A)$, where every $(i, j) \in A$ is represented by the edge ij with $i \in X$, $j \in Y$. In the example in the margin the cells of A are shaded. The orientation on S_n naturally induces a ranking on the neighborhoods in $G = (X \cup Y, A)$ by setting $j' > j$ in $N(i)$ if $(i, j) \rightarrow (i, j')$ in $\vec{S}_n$ respectively $i' > i$ in $N(j)$ if $(i, j) \rightarrow (i', j)$. By Lemma 2, $G = (X \cup Y, A)$ possesses a stable matching M . This M , viewed as a subset of A , is our desired kernel! To see why, note first that M is independent in A since as edges in $G = (X \cup Y, A)$ they do not share an endvertex i or j . Secondly, if $(i, j) \in A \setminus M$, then by the definition of a stable matching there either exists $(i, j') \in M$

with $j' > j$ or $(i', j) \in M$ with $i' > i$, which for $\vec{S}_n$ means $(i, j) \rightarrow (i, j') \in M$ or $(i, j) \rightarrow (i', j) \in M$, and the proof is complete.

To end the story let us go a little beyond. The reader may have noticed that the graph S_n arises from a bipartite graph by a simple construction. Take the complete bipartite graph, denoted by $K_{n,n}$, with $|X| = |Y| = n$, and all edges between X and Y . If we consider the edges of $K_{n,n}$ as vertices





Construction of a line graph

of a new graph, joining two such vertices if and only if as edges in $K_{n,n}$ they have a common endvertex, then we clearly obtain the square graph S_n . Let us say that S_n is the line graph of $K_{n,n}$. Now this same construction can be performed on any graph G with the resulting graph called the line graph $L(G)$ of G .

In general, call H a line graph if $H = L(G)$ for some graph G . Of course, not every graph is a line graph, an example being the graph $K_{2,4}$ that we considered earlier, and for this graph we have seen $\chi(K_{2,4}) < \chi_\ell(K_{2,4})$. But what if H is a line graph? By adapting the proof of our theorem it can easily be shown that $\chi(H) = \chi_\ell(H)$ holds whenever H is the line graph of a bipartite graph, and the method may well go some way in verifying the supreme conjecture in this field:

Does $\chi(H) = \chi_\ell(H)$ hold for every line graph H ?

Very little is known about this conjecture, and things look hard - but after all, so did the Dinitz problem twenty years ago.

References

- [1] P. Erdős, A. L. Rubin & H. Taylor: Choosability in graphs, Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium 26 (1979), 125-157.
- [2] D. Gale & L. S. Shapley: College admissions and the stability of marriage, Amer. Math. Monthly 69 (1962), 9-15.
- [3] F. Galvin: The list chromatic index of a bipartite multigraph, J. Combinatorial Theory, Ser. B 63 (1995), 153-158.
- [4] J. C. M. Janssen: The Dinitz problem solved for rectangles, Bulletin Amer. Math. Soc. 29 (1993), 243-249.
- [5] V. G. Vizing: Coloring the vertices of a graph in prescribed colours (in Russian), Metody Diskret. Analiz. 101 (1976), 3-10.

22.5.3 Five-coloring plane graphs

Plane graphs and their colorings have been the subject of intensive research since the beginnings of graph theory because of their connection to the fourcolor problem. As stated originally the four-color problem asked whether it is always possible to color the regions of a plane map with four colors such that regions which share a common boundary (and not just a point) receive different colors. The figure on the right shows that coloring the regions of a map is really the same task as coloring the vertices of a plane graph. As in Chapter 13 (page 89) place a vertex in the interior of each region (including the outer region) and connect two such vertices belonging to neighboring regions by an edge through the common boundary.

The resulting graph G , the dual graph of the map M , is then a plane graph, and coloring the vertices of G in the usual sense is the same as coloring the regions of M . So we may as well concentrate on vertex-coloring plane graphs and will do so from now on. Note that we may assume that G has no loops or multiple edges, since these are irrelevant for coloring.

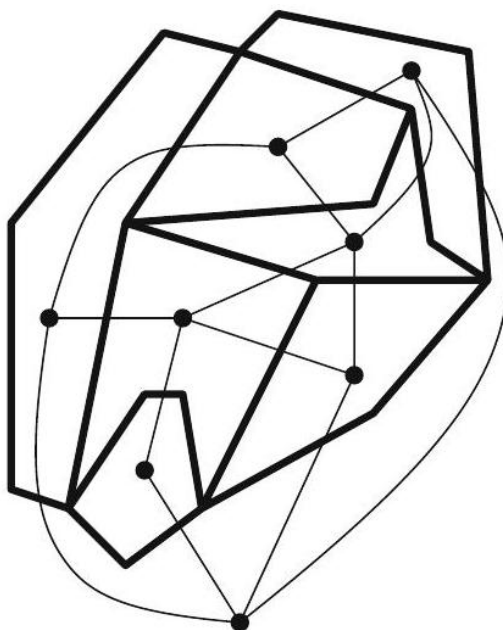
In the long and arduous history of attacks to prove the four-color theorem many attempts came close, but what finally succeeded in the Appel-Haken proof of 1976 and also in the more recent proof of Robertson, Sanders, Seymour and Thomas 1997 was a combination of very old

ideas (dating back to the 19th century) and the very new calculating powers of modernday computers. Twenty-five years after the original proof, the situation is still basically the same, there is even a computer-generated computercheckable proof due to Gonthier, but no proof from The Book is in sight.

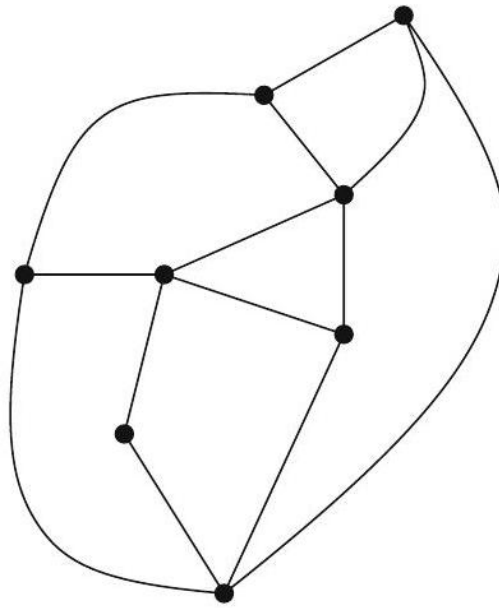
So let us be more modest and ask whether there is a neat proof that every plane graph can be 5-colored. A proof of this five-color theorem had already been given by Heawood at the turn of the century. The basic tool for his proof (and indeed also for the four-color theorem) was Euler's formula (see Chapter 13). Clearly, when coloring a graph G we may assume that G is connected since we may color the connected pieces separately. A plane graph divides the plane into a set R of regions (including the exterior region). Euler's formula states that for plane connected graphs $G = (V, E)$ we always have

$$|V| - |E| + |R| = 2.$$

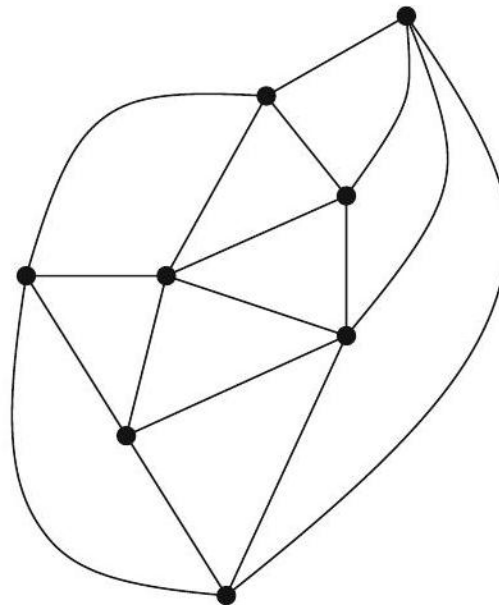
As a warm-up, let us see how Euler's formula may be applied to prove that every plane graph G is 6-colorable. We proceed by induction on the number n of vertices. For small values of n (in particular, for $n \leq 6$) this is obvious.



The dual graph of a map



This plane graph has 8 vertices, 13 edges and 7 regions.



A near-triangulated plane graph

From part (A) of the proposition on page 91 we know that G has a vertex v of degree at most 5. Delete v and all edges incident with v . The resulting graph $G' = G \setminus v$ is a plane graph on $n - 1$ vertices. By induction, it can be 6-colored. Since v has at most 5 neighbors in G , at most 5 colors are used for these neighbors in the coloring of G' . So we can extend any 6-coloring of G' to a 6-coloring of G by assigning a color to v which is not used for any of its neighbors in the coloring of G' . Thus G is indeed 6-colorable.

Now let us look at the list chromatic number of plane graphs, which we have discussed in the chapter on the Dinitz problem. Clearly, our 6-coloring method works for lists of colors as well (again we never run out of colors), so $\chi_\ell(G) \leq 6$ holds for any plane graph G . Erdős, Rubin and Taylor conjectured in 1979 that every plane graph has list chromatic number at most 5, and further that there are plane graphs G with $\chi_\ell(G) > 4$. They were right on both counts. Margit Voigt was the first to construct an example of a plane graph G with $\chi_\ell(G) = 5$ (her

example had 238 vertices) and around the same time Carsten Thomassen gave a truly stunning proof of the 5-list coloring conjecture. His proof is a telling example of what you can do when you find the right induction hypothesis. It does not use Euler's formula at all!

Theorem. All planar graphs G can be 5-list colored:

$$\chi_\ell(G) \leq 5.$$

- Proof. First note that adding edges can only increase the chromatic number. In other words, when H is a subgraph of G , then $\chi_\ell(H) \leq \chi_\ell(G)$ certainly holds. Hence we may assume that G is connected and that all the bounded faces of an embedding have triangles as boundaries. Let us call such a graph near-triangulated. The validity of the theorem for neartriangulated graphs will establish the statement for all plane graphs.

The trick of the proof is to show the following stronger statement (which allows us to use induction):

Let $G = (V, E)$ be a near-triangulated graph, and let B be the cycle bounding the outer region. We make the following assumptions on the color sets $C(v), v \in V$:

- (1) Two adjacent vertices x, y of B are already colored with (different) colors α and β .
- (2) $|C(v)| \geq 3$ for all other vertices v of B .
- (3) $|C(v)| \geq 5$ for all vertices v in the interior.

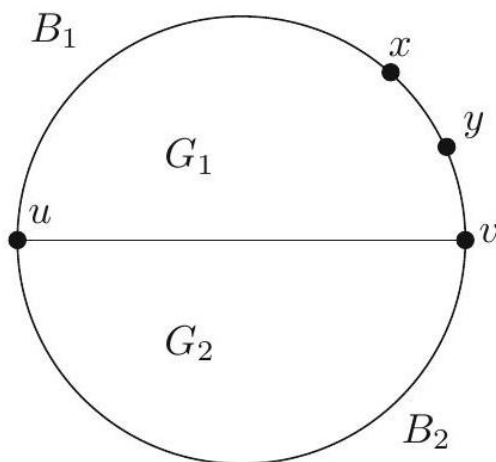
Then the coloring of x, y can be extended to a proper coloring of G by choosing colors from the lists. In particular, $\chi_\ell(G) \leq 5$.

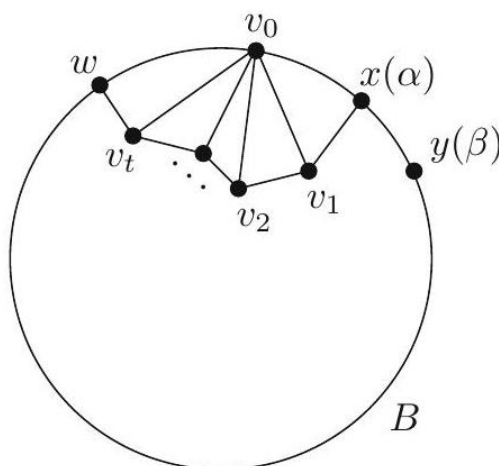
For $|V| = 3$ this is obvious, since for the only uncolored vertex v we have $|C(v)| \geq 3$, so there is a color available. Now we proceed by induction.

Case 1: Suppose B has a chord, that is, an edge not in B that joins two vertices $u, v \in B$. The subgraph G_1 which is bounded by $B_1 \cup \{uv\}$ and contains x, y, u and v is near-triangulated and therefore has a 5-list coloring by induction. Suppose in this coloring the vertices u and v receive the colors γ and δ . Now we look at the bottom part G_2 bounded by B_2 and uv . Regarding u, v as pre-colored, we see that the induction hypotheses are also satisfied for G_2 . Hence G_2 can be 5-list colored with the available colors, and thus the same is true for G .

Case 2: Suppose B has no chord. Let v_0 be the vertex on the other side of the α -colored vertex x on B , and let $x, v_1, \dots, v_t, w$ be the neighbors of v_0 . Since G is near-triangulated we have the situation shown in the figure.

Construct the near-triangulated graph $G' = G \setminus v_0$ by deleting from G the vertex v_0 and all edges emanating from v_0 . This G' has as outer boundary $B' = (B \setminus v_0) \cup \{v_1, \dots, v_t\}$. Since $|C(v_0)| \geq 3$ by assumption (2) there exist two colors γ, δ in $C(v_0)$ different from α . Now we replace every color set $C(v_i)$ by $C(v_i) \setminus \{\gamma, \delta\}$, keeping the original color sets for all other vertices in G' . Then G' clearly satisfies all assumptions and is thus 5-list colorable by induction. Choosing γ or δ for v_0 , different from the color of w , we can extend the list coloring of G' to all of G .





So, the 5-list color theorem is proved, but the story is not quite over. A stronger conjecture claimed that the list-chromatic number of a plane graph G is at most 1 more than the ordinary chromatic number:

Is $\chi_\ell(G) \leq \chi(G) + 1$ for every plane graph G ?

Since $\chi(G) \leq 4$ by the four-color theorem, we have three cases:

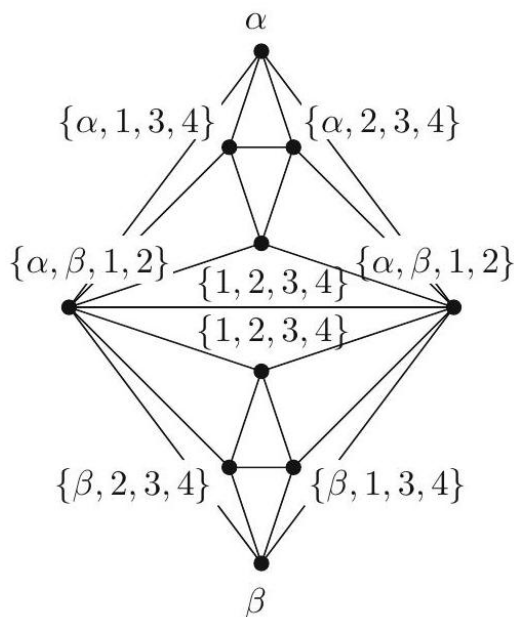
Case I: $\chi(G) = 2 \implies \chi_\ell(G) \leq 3$

Case II: $\chi(G) = 3 \implies \chi_\ell(G) \leq 4$

Case III: $\chi(G) = 4 \implies \chi_\ell(G) \leq 5$.

Thomassen's result settles Case III, and Case I was proved by an ingenious (and much more sophisticated) argument by Alon and Tarsi. Furthermore, there are plane graphs G with $\chi(G) = 2$ and $\chi_\ell(G) = 3$, for example the graph $K_{2,4}$ that we considered in the chapter on the Dinitz problem.

But what about Case II? Here the conjecture fails: This was first shown by Margit Voigt for a graph that was earlier constructed by Shai Gutner. His graph on 130 vertices can be obtained as follows. First we look at the "double octahedron" (see the figure), which is clearly 3-colorable. Let $\alpha \in \{5, 6, 7, 8\}$ and $\beta \in \{9, 10, 11, 12\}$, and consider the lists that are given in the figure. You are invited to check that with these lists a coloring is not possible. Now take 16 copies of this graph, and identify all top vertices and all bottom vertices. This yields a graph on $16 \cdot 8 + 2 = 130$ vertices which



is still plane and 3-colorable. We assign $\{5, 6, 7, 8\}$ to the top vertex and $\{9, 10, 11, 12\}$ to the bottom vertex, with the inner lists corresponding to the 16 pairs (α, β) , $\alpha \in \{5, 6, 7, 8\}$, $\beta \in \{9, 10, 11, 12\}$. For every choice of α and β we thus obtain a subgraph as in the figure, and so a list coloring of the big graph is not possible.

By modifying another one of Gutner's examples, Voigt and Wirth came up with an even

smaller plane graph with 75 vertices and $\chi = 3, \chi_\ell = 5$, which in addition uses only the minimal number of 5 colors in the combined lists. The current record is 63 vertices - achieved in 1996 by a young Iranian Math Olympiad participant, Maryam Mirzakhani, who in 2014 became the first woman ever to receive a Fields Medal.

To close let us remark that Victor Campos and Frédéric Havet have recently extended Thomassen's theorem by showing that every graph that can be drawn in the plane with at most two crossings is still 5-list colorable.

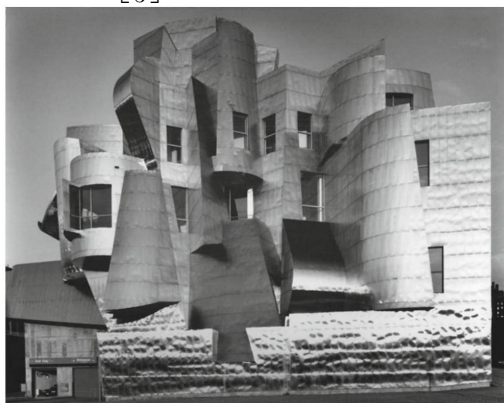
References

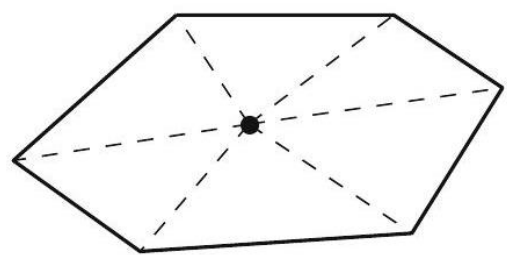
- [1] N. Alon & M. Tarsi: Colorings and orientations of graphs, *Combinatorica* 12 (1992), 125-134.
- [2] V. Campos & F. Havet: 5-choosability of graphs with 2 crossings, Preprint, May 2011, 18 pages, <http://arxiv.org/abs/1105.2723>.
- [3] P. Erdős, A. L. Rubin & H. Taylor: Choosability in graphs, *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium* 26 (1979), 125-157.
- [4] G. Gonthier: Formal proof - the Four-Color Theorem, *Notices of the AMS* (11) 55 (2008), 1382-1393.
- [5] S. Gutner: The complexity of planar graph choosability, *Discrete Math.* 159 (1996), 119-130.
- [6] M. Mirzakhani: A small non-4-choosable planar graph, *Bulletin Inst. Combinatorics Applications*, 17 (1996), 15-18.
- [7] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour & R. Thomas: The fourcolour theorem, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* 70 (1997), 2-44.
- [8] C. Thomassen: Every planar graph is 5-choosable, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* 62 (1994), 180-181.
- [9] M. Voigt: List colorings of planar graphs, *Discrete Math.* 120 (1993), 215-219.
- [10] M. Voigt & B. Wirth: On 3-colorable non-4-choosable planar graphs, *J. Graph Theory* 24 (1997), 233-235.

22.5.4 How to guard a museum

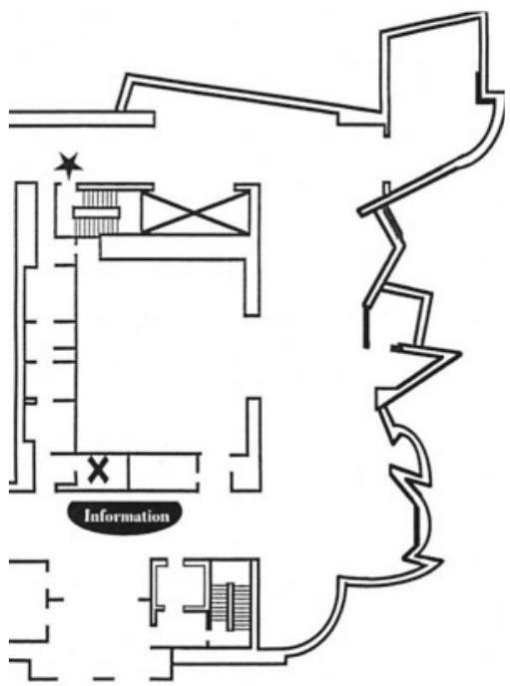
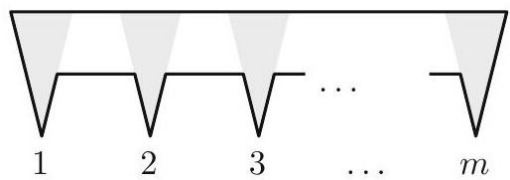
Here is an appealing problem which was raised by Victor Klee in 1973. Suppose the manager of a museum wants to make sure that at all times every point of the museum is watched by a guard. The guards are stationed at fixed posts, but they are able to turn around. How many guards are needed?

We picture the walls of the museum as a polygon consisting of n sides. Of course, if the polygon is convex, then one guard is enough. In fact, the guard may be stationed at any point of the museum. But, in general, the walls of the museum may have the shape of any closed polygon. Consider a comb-shaped museum with $n = 3m$ walls, as depicted on the right. It is easy to see that this requires at least $m = \frac{n}{3}$ guards. In fact, there are n walls. Now notice that the point 1 can only be observed by a guard stationed in the shaded triangle containing 1, and similarly for the other points 2, 3, ..., m . Since all these triangles are disjoint we conclude that at least m guards are needed. But m guards are also enough, since they can be placed at the top lines of the triangles. By cutting off one or two walls at the end, we conclude that for any n there is an n -walled museum which requires $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guards.

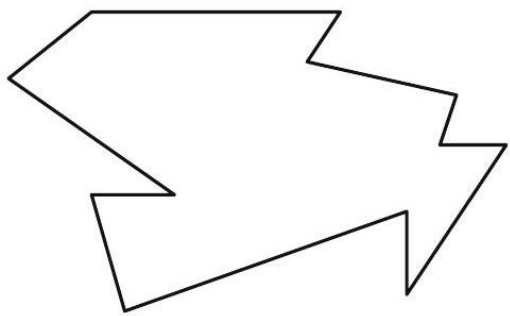




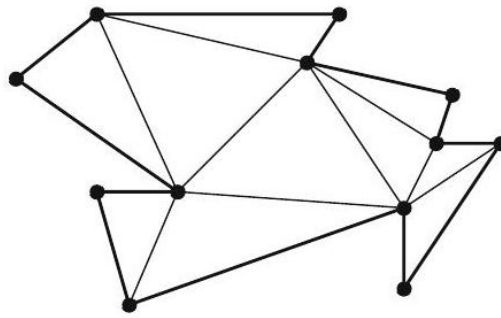
A convex exhibition hall



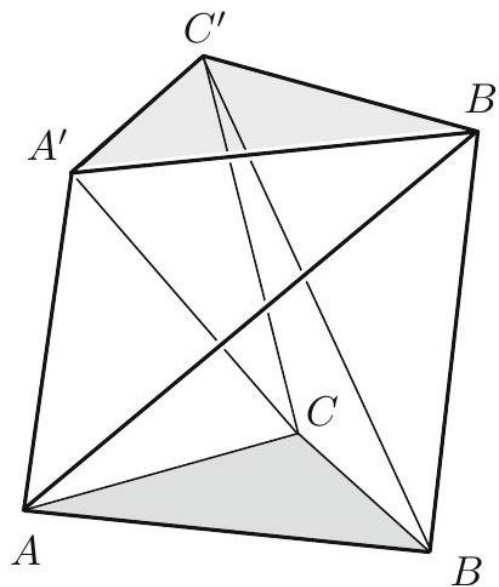
A real life art gallery...



A museum with $n = 12$ walls



A triangulation of the museum



Schönhardt's polyhedron: The interior dihedral angles at the edges AB' , BC' and CA' are greater than 180° .

The following result states that this is the worst case.

Theorem. For any museum with n walls, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guards suffice.

This "art gallery theorem" was first proved by Vašek Chvátal by a clever argument, but here is a proof due to Steve Fisk that is truly beautiful.

- Proof. First of all, let us draw $n - 3$ noncrossing diagonals between corners of the walls until the interior is triangulated. For example, we can draw 9 diagonals in the museum depicted in the margin to produce a triangulation. It does not matter which triangulation we choose, any one will do. Now think of the new figure as a plane graph with the corners as vertices and the walls and diagonals as edges.

Claim. This graph is 3-colorable.

For $n = 3$ there is nothing to prove. Now for $n > 3$ pick any two vertices u and v which are connected by a diagonal. This diagonal will split the graph into two smaller triangulated graphs both containing the edge uv . By induction we may color each part with 3 colors where we may choose color 1 for u and color 2 for v in each coloring. Pasting the colorings together yields a 3-coloring of the whole graph.

The rest is easy. Since there are n vertices, at least one of the color classes, say the vertices colored 1, contains at most $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vertices, and this is where we place the guards. Since every triangle contains a vertex of color 1 we infer that every triangle is guarded, and hence so is the whole museum. $\square$

The astute reader may have noticed a subtle point in our reasoning. Does a triangulation always exist? Probably everybody's first reaction is: Obviously, yes! Well, it does exist, but this is not completely obvious, and, in fact, the natural generalization to three dimensions

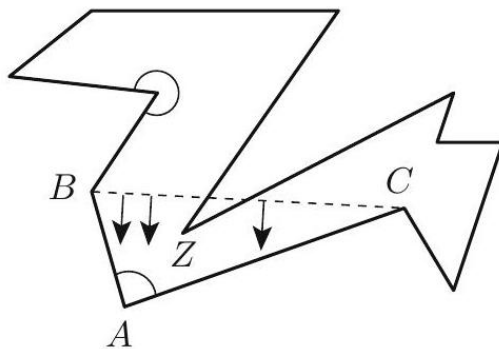
(partitioning into tetrahedra) is false! This may be seen from Schönhardt's polyhedron, depicted on the left. It is obtained from a triangular prism by rotating the top triangle, so that each of the quadrilateral faces breaks into two triangles with a nonconvex edge. Try to triangulate this polyhedron! You will notice that any tetrahedron that contains the bottom triangle must contain one of the three top vertices: but the resulting tetrahedron will not be contained in Schönhardt's polyhedron. So there is no triangulation without an additional vertex.

To prove that a triangulation exists in the case of a planar nonconvex polygon, we proceed by induction on the number n of vertices. For $n = 3$ the polygon is a triangle, and there is nothing to prove. Let $n \geq 4$. To use induction, all we have to produce is one diagonal which will split the polygon P into two smaller parts, such that a triangulation of the polygon can be pasted together from triangulations of the parts.

Call a vertex A convex if the interior angle at the vertex is less than 180° . Since the sum of the interior angles of P is $(n - 2)180^\circ$, there must be a

convex vertex A . In fact, there must be at least three of them: In essence this is an application of the pigeonhole principle! Or you may consider the convex hull of the polygon, and note that all its vertices are convex also for the original polygon.

Now look at the two neighboring vertices B and C of A . If the segment BC lies entirely in P , then this is our diagonal. If not, the triangle ABC contains other vertices. Slide BC towards A until it hits the last vertex Z in ABC . Now AZ is within P , and we have a diagonal.



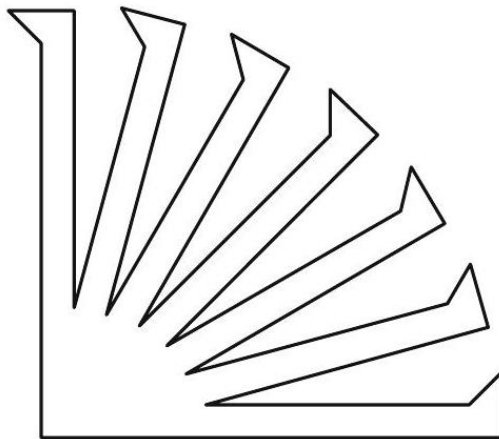
There are many variants to the art gallery theorem. For example, we may only want to guard the walls (which is, after all, where the paintings hang), or the guards are all stationed at vertices. A particularly nice (unsolved) variant goes as follows:

Suppose each guard may patrol one wall of the museum, so he walks along his wall and sees anything that can be seen from any point along this wall.

How many "wall guards" do we then need to keep control?

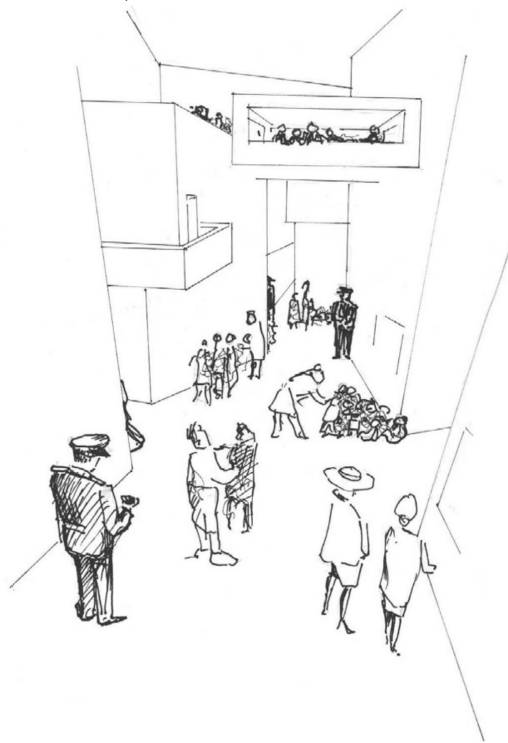
Godfried Toussaint constructed the example of a museum displayed here which shows that $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guards may be necessary.

This polygon has 28 sides (and, in general, $4m$ sides), and the reader is invited to check that m wall-guards are needed. It is conjectured that, except for some small values of n , this number is also sufficient, but a proof, let alone a Book Proof, is still missing.



References

- [1] V. Chvátal: A combinatorial theorem in plane geometry, J. Combinatorial Theory, Ser. B 18 (1975), 39-41.
 - [2] S. FISK: A short proof of Chvátal's watchman theorem, J. Combinatorial Theory, Ser. B 24 (1978), 374.
 - [3] J. O'Rourke: Art Gallery Theorems and Algorithms, Oxford University Press 1987.
 - [4] E. Schönhardt: Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder, Math. Annalen 98 (1928), 309-312.
- "Museum guards"
(A 3-dimensional art-gallery problem)



22.5.5 Turán's graph theorem

One of the fundamental results in graph theory is the theorem of Turán from 1941, which initiated extremal graph theory. Turán's theorem was rediscovered many times with various different proofs. We will discuss five of them and let the reader decide which one belongs in The Book.

Let us fix some notation. We consider simple graphs G on the vertex set $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ and edge set E . If v_i and v_j are neighbors, then we write $v_i v_j \in E$. A p -clique in G is a complete subgraph of G on p vertices, denoted by K_p . Paul Turán posed the following question:

Suppose G is a simple graph that does not contain a p -clique. What is the largest number of edges that G can have?

We readily obtain examples of such graphs by dividing V into $p-1$ pairwise disjoint subsets $V = V_1 \cup \dots \cup V_{p-1}$, $|V_i| = n_i$, $n = n_1 + \dots + n_{p-1}$, joining two vertices if and only if they lie in distinct sets V_i, V_j . We denote the resulting graph by $K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$; it has $\sum_{i < j} n_i n_j$ edges. We obtain a maximal number of edges among such graphs with given n if we divide the numbers n_i as evenly as possible, that is, if $|n_i - n_j| \leq 1$ for all i, j . Indeed, suppose $n_1 \geq n_2 + 2$. By shifting one vertex from V_1 to V_2 , we obtain $K_{n_1-1, n_2+1, \dots, n_{p-1}}$ which contains $(n_1 - 1)(n_2 + 1) - n_1 n_2 = n_1 - n_2 - 1 \geq 1$ more edges than $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$. Let us call the graphs $K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$ with $|n_i - n_j| \leq 1$ the Turán graphs. In particular, if $p-1$ divides n , then we may choose $n_i = \frac{n}{p-1}$ for all i , obtaining

$$\binom{p-1}{2} \left(\frac{n}{p-1} \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p-1} \right) \frac{n^2}{2}$$

edges. Turán's theorem now states that this number is an upper bound for the edge-number of any graph on n vertices without a p -clique.

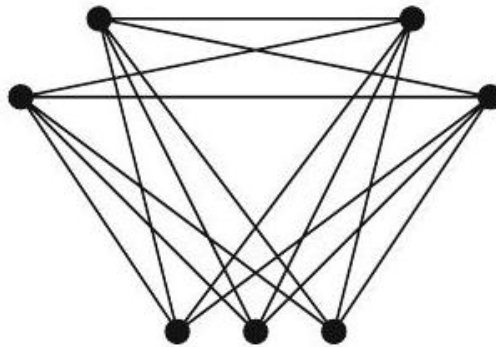
Theorem. If a graph $G = (V, E)$ on n vertices has no p -clique, $p \geq 2$, then

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}. \quad (1)$$

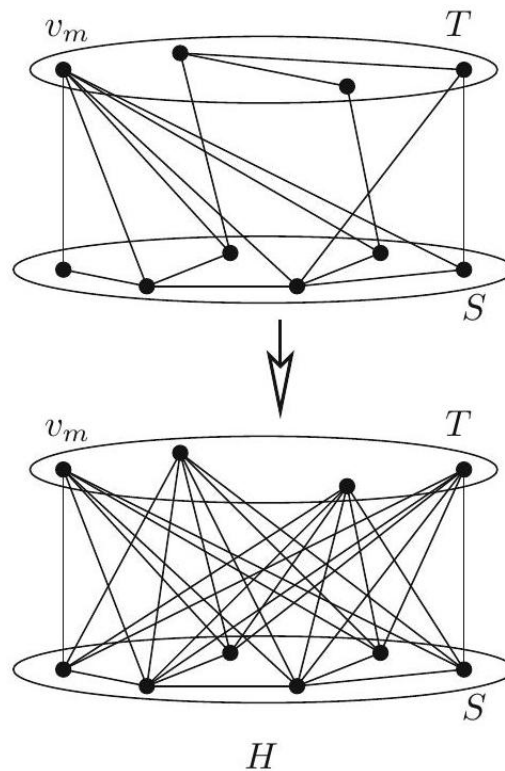
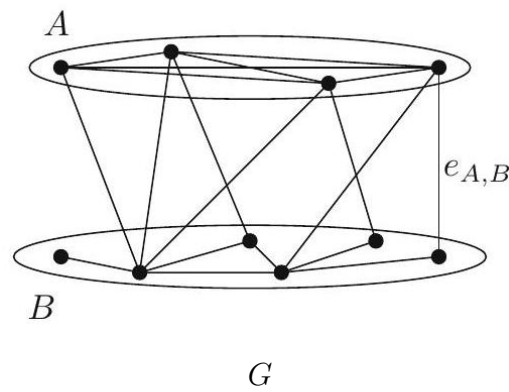
For $p = 2$ this is trivial. In the first interesting case $p = 3$ the theorem states that a triangle-free graph on n vertices contains at most $\frac{n^2}{4}$ edges. Proofs of this special case were known prior to Turán's result. Two elegant proofs using inequalities are contained in Chapter 20.



Paul Turán



The graph $K_{2,2,3}$



Let us turn to the general case. The first two proofs use induction and are due to Turán and to Erdős, respectively.

- First proof. We use induction on n . One easily computes that (1) is true for $n < p$. Let G be a graph on $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ without p -cliques with a maximal number of edges, where $n \geq p$. G certainly contains $(p-1)$ -cliques, since otherwise we could add edges. Let A be a $(p-1)$ -clique, and set $B := V \setminus A$. A contains $\binom{p-1}{2}$ edges, and we now estimate the edge-number e_B in B and the edge-number $e_{A,B}$ between A and B . By induction, we have $e_B \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) (n-p+1)^2$. Since G has no p -clique, every $v_j \in B$ is adjacent to at most $p-2$ vertices in A , and we obtain $e_{A,B} \leq (p-2)(n-p+1)$. Altogether, this yields

$$|E| \leq \binom{p-1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) (n-p+1)^2 + (p-2)(n-p+1),$$

which is precisely $\left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$. $\square$

- Second proof. This proof makes use of the structure of the Turán graphs. Let $v_m \in V$ be a vertex of maximal degree $d_m = \max_{1 \leq j \leq n} d_j$. Denote by S the set of neighbors of

$v_m, |S| = d_m$, and set $T := V \setminus S$. As G contains no p -clique, and v_m is adjacent to all vertices of S , we note that S contains no $(p-1)$ -clique.

We now construct the following graph H on V (see the figure). H corresponds to G on S and contains all edges between S and T , but no edges within T . In other words, T is an independent set in H , and we conclude that H has again no p -cliques. Let d'_j be the degree of v_j in H . If $v_j \in S$, then we certainly have $d'_j \geq d_j$ by the construction of H , and for $v_j \in T$, we see $d'_j = |S| = d_m \geq d_j$ by the choice of v_m . We infer $|E(H)| \geq |E|$, and find that among all graphs with a maximal number of edges, there must be one of the form of H . By induction, the graph induced by S has at most as many edges as a suitable graph $K_{n_1, \dots, n_{p-2}}$ on S . So $|E| \leq |E(H)| \leq E(K_{n_1, \dots, n_{p-1}})$ with $n_{p-1} = |T|$, which implies (1). $\square$

The next two proofs are of a totally different nature, using a maximizing argument and ideas from probability theory. They are due to Motzkin and Straus and to Alon and Spencer, respectively.

- Third proof. Consider a probability distribution $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ on the vertices, that is, an assignment of values $w_i \geq 0$ to the vertices with $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Our goal is to maximize the function

$$f(\mathbf{w}) = \sum_{v_i v_j \in E} w_i w_j.$$

Suppose $\mathbf{w}$ is any distribution, and let v_i and v_j be a pair of nonadjacent vertices with positive weights w_i, w_j . Let s_i be the sum of the weights of all vertices adjacent to v_i , and define s_j similarly for v_j , where we may assume that $s_i \geq s_j$. Now we move the weight from v_j to v_i , that is, the new weight of v_i is $w_i + w_j$, while the weight of v_j drops to 0. For the new new distribution $\mathbf{w}'$ we find

$$f(\mathbf{w}') = f(\mathbf{w}) + w_j s_i - w_j s_j \geq f(\mathbf{w})$$

We repeat this (reducing the number of vertices with a positive weight by one in each step) until there are no nonadjacent vertices of positive weight anymore. Thus we conclude that there is an optimal distribution whose nonzero weights are concentrated on a clique, say on a k -clique. Now if, say, $w_1 > w_2 > 0$, then choose ε with $0 < \varepsilon < w_1 - w_2$ and change w_1 to $w_1 - \varepsilon$ and w_2 to $w_2 + \varepsilon$. The new distribution $\mathbf{w}'$ satisfies $f(\mathbf{w}') = f(\mathbf{w}) + \varepsilon(w_1 - w_2) - \varepsilon^2 > f(\mathbf{w})$, and we infer that the maximal value of $f(\mathbf{w})$ is attained for $w_i = \frac{1}{k}$ on a k -clique and $w_i = 0$ otherwise. Since a k -clique contains $\frac{k(k-1)}{2}$ edges, we obtain

$$f(\mathbf{w}) = \frac{k(k-1)}{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Since this expression is increasing in k , the best we can do is to set $k = p-1$ (since G has no p -cliques). So we conclude

$$f(\mathbf{w}) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

for any distribution $\mathbf{w}$. In particular, this inequality holds for the uniform distribution given by $w_i = \frac{1}{n}$ for all i . Thus we find

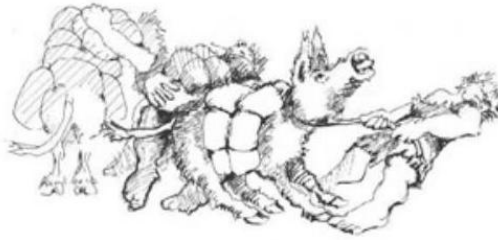
$$\frac{|E|}{n^2} = f\left(w_i = \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

which is precisely (1).

- Fourth proof. This time we use some concepts from probability theory. Let G be an arbitrary graph on the vertex set $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Denote the degree of v_i by d_i , and write $\omega(G)$ for the number of vertices in a largest clique, called the clique number of G .

Claim. We have $\omega(G) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i}$.

We choose a random permutation $\pi = v_1 v_2 \dots v_n$ of the vertex set V , where each permutation is supposed to appear with the same probability $\frac{1}{n!}$, and then consider the following set C_π . We put v_i into C_π if and only if v_i is adjacent to all $v_j (j < i)$ preceding v_i . By definition, C_π is a clique in G . Let $X = |C_\pi|$ be the corresponding random variable. We have $X = \sum_{i=1}^n X_i$, where X_i is the indicator random variable of the vertex v_i , that is, $X_i = 1$ or $X_i = 0$ depending on whether $v_i \in C_\pi$ or $v_i \notin C_\pi$. Note that v_i belongs to C_π with respect to the permutation $v_1 v_2 \dots v_n$ if and only if v_i appears before all $n - 1 - d_i$ vertices which are not adjacent to v_i , or in other words, if v_i is the first among v_i and its $n - 1 - d_i$ non-neighbors. The probability that this happens is $\frac{1}{n-d_i}$, hence $EX_i = \frac{1}{n-d_i}$.



"Moving weights"

Thus by linearity of expectation (see page 116) we obtain

$$E(|C_\pi|) = EX = \sum_{i=1}^n EX_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i}.$$

Consequently, there must be a clique of at least that size, and this was our claim. To deduce Turán's theorem from the claim we use the Cauchy-Schwarz inequality from Chapter 20,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Set $a_i = \sqrt{n-d_i}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{n-d_i}}$, then $a_i b_i = 1$, and so

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n (n-d_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i} \right) \leq \omega(G) \sum_{i=1}^n (n-d_i) \quad (2)$$

At this point we apply the hypothesis $\omega(G) \leq p-1$ of Turán's theorem. Using also $\sum_{i=1}^n d_i = 2|E|$ from the chapter on double counting, inequality (2) leads to

$$n^2 \leq (p-1)(n^2 - 2|E|),$$

and this is equivalent to Turán's inequality.

Now we are ready for the last proof, which may be the most beautiful of them all. Its origin is not clear; we got it from Stephan Brandt, who heard it in Oberwolfach. It may be "folklore" graph theory. It yields in one stroke that the Turán graph is in fact the unique example with a maximal number of edges. It may be noted that both proofs 1 and 2 also imply this stronger result.

- Fifth proof. Let G be a graph on n vertices without a p -clique and with a maximal number of edges.

Claim. G does not contain three vertices u, v, w such that $vw \in E$, but $uv \notin E$, $uw \notin E$.

Suppose otherwise, and consider the following cases.

Case 1: $d(u) < d(v)$ or $d(u) < d(w)$.

We may suppose that $d(u) < d(v)$. Then we duplicate v , that is, we create a new vertex v' which has exactly the same neighbors as v (but vv' is not an edge), delete u , and keep the rest unchanged.

The new graph G' has again no p -clique, and for the number of edges we find

$$|E(G')| = |E(G)| + d(v) - d(u) > |E(G)|,$$

a contradiction.

Case 2: $d(u) \geq d(v)$ and $d(u) \geq d(w)$.

Duplicate u twice and delete v and w (as illustrated in the margin). Again, the new graph G' has no p -clique, and we compute (the -1 results from the edge vw):

$$|E(G')| = |E(G)| + 2d(u) - (d(v) + d(w) - 1) > |E(G)|.$$

So we have a contradiction once more.

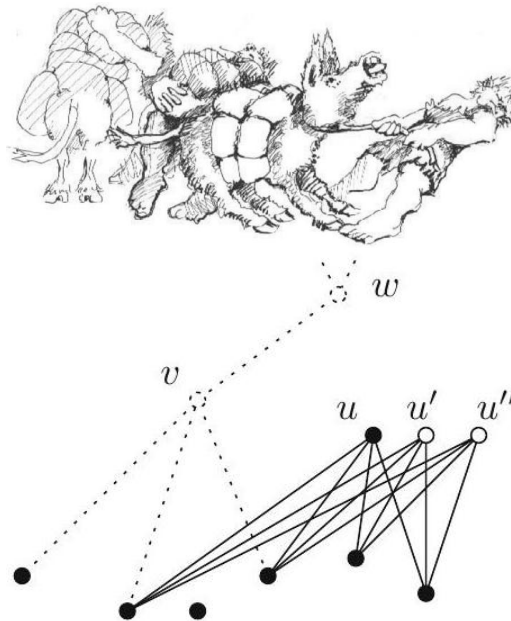
A moment's thought shows that the claim we have proved is equivalent to the statement that

$$u \sim v : \Longleftrightarrow uv \notin E(G)$$

defines an equivalence relation. Thus G is a complete multipartite graph, $G = K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$, and we are finished. $\square$

References

- [1] M. Aigner: Turán's graph theorem, Amer. Math. Monthly 102 (1995), 808-816.
- [2] N. Alon & J. Spencer: The Probabilistic Method, Third edition, WileyInterscience 2008.
- [3] P. Erdős: On the graph theorem of Turán (in Hungarian), Math. Fiz. Lapok 21 (1970), 249-251.
- [4] T. S. Motzkin & E. G. Straus: Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán, Canad. J. Math. 17 (1965), 533-540.
- [5] P. Turán: On an extremal problem in graph theory, Math. Fiz. Lapok 48 (1941), 436-452.



22.5.6 Communicating without errors

In 1956, Claude Shannon, the founder of information theory, posed the following very interesting question:

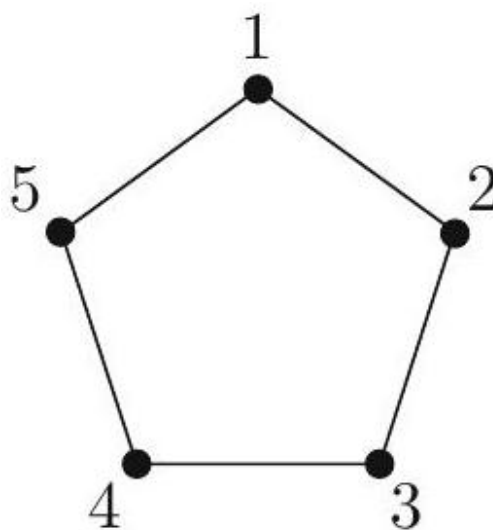
Suppose we want to transmit messages across a channel (where some symbols may be distorted) to a receiver. What is the maximum rate of transmission such that the receiver may recover the original message without errors?

⁰"Larger weights to move"

Let us see what Shannon meant by "channel" and "rate of transmission." We are given a set V of symbols, and a message is just a string of symbols from V . We model the channel as a graph $G = (V, E)$, where V is the set of symbols, and E the set of edges between unreliable pairs of symbols, that is, symbols which may be confused during transmission. For example, communicating over a phone in everyday language, we connect the symbols B and P by an edge since the receiver may not be able to distinguish them. Let us call G the confusion graph. The 5-cycle C_5 will play a prominent role in our discussion. In this example, 1 and 2 may be confused, but not 1 and 3, etc. Ideally we would like to use all 5 symbols for transmission, but since we want to communicate error-free we can - if we only send single symbols - use only one letter from each pair that might be confused. Thus for the 5-cycle we can use only two different letters (any two that are not connected by an edge). In the language of information theory, this means that for the 5-cycle we achieve an information rate of $\log_2 2 = 1$ (instead of the maximal $\log_2 5 \approx 2.32$).



Claude Shannon

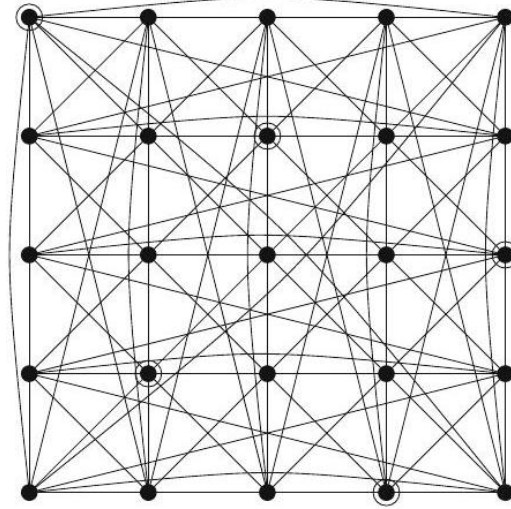


It is clear that in this model, for an arbitrary graph $G = (V, E)$, the best we can do is to transmit symbols from a largest independent set. Thus the information rate, when sending single symbols, is $\log_2 \alpha(G)$, where $\alpha(G)$ is the independence number of G .

Let us see whether we can increase the information rate by using larger strings in place of single symbols. Suppose we want to transmit strings of length 2. The strings u_1u_2 and v_1v_2 can only be confused if one of the following three cases holds:

- $u_1 = v_1$ and u_2 can be confused with v_2 ,
- $u_2 = v_2$ and u_1 can be confused with v_1 , or
- $u_1 \neq v_1$ can be confused and $u_2 \neq v_2$ can be confused.

In graph-theoretic terms this amounts to considering the product $G_1 \times G_2$ of two graphs $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$. $G_1 \times G_2$ has the vertex



The graph $C_5 \times C_5$

set $V_1 \times V_2 = \{(u_1, u_2) : u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$, with $(u_1, u_2) \neq (v_1, v_2)$ connected by an edge if and only if $u_i = v_i$ or $u_i v_i \in E_i$ for $i = 1, 2$. The confusion graph for strings of length 2 is thus $G^2 = G \times G$, the product of the confusion graph G for single symbols with itself. The information rate of strings of length 2 per symbol is then given by

$$\frac{\log_2 \alpha(G^2)}{2} = \log_2 \sqrt{\alpha(G^2)}.$$

Now, of course, we may use strings of any length n . The n -th confusion graph $G^n = G \times G \times \cdots \times G$ has vertex set $V^n = \{(u_1, \dots, u_n) : u_i \in V\}$ with $(u_1, \dots, u_n) \neq (v_1, \dots, v_n)$ being connected by an edge if $u_i = v_i$ or $u_i v_i \in E$ for all i . The rate of information per symbol determined by strings of length n is

$$\frac{\log_2 \alpha(G^n)}{n} = \log_2 \sqrt[n]{\alpha(G^n)}.$$

What can we say about $\alpha(G^n)$? Here is a first observation. Let $U \subseteq V$ be a largest independent set in G , $|U| = \alpha$. The α^n vertices in G^n of the form $(u_1, \dots, u_n)$, $u_i \in U$ for all i , clearly form an independent set in G^n . Hence

$$\alpha(G^n) \geq \alpha(G)^n$$

and therefore

$$\sqrt[n]{\alpha(G^n)} \geq \alpha(G),$$

meaning that we never decrease the information rate by using longer strings instead of single symbols. This, by the way, is a basic idea of coding theory: By encoding symbols into longer strings we can make error-free communication more efficient.

Disregarding the logarithm we thus arrive at Shannon's fundamental definition: The zero-error capacity of a graph G is given by

$$\Theta(G) := \sup_{n \geq 1} \sqrt[n]{\alpha(G^n)},$$

and Shannon's problem was to compute $\Theta(G)$, and in particular $\Theta(C_5)$.

Let us look at C_5 . So far we know $\alpha(C_5) = 2 \leq \Theta(C_5)$. Looking at the 5-cycle as depicted earlier, or at the product $C_5 \times C_5$ as drawn on the left, we see that the set $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 2), (5, 4)\}$ is independent in C_5^2 . Thus we have $\alpha(C_5^2) \geq 5$. Since an independent set can contain only two vertices from any two consecutive rows we see that $\alpha(C_5^2) = 5$. Hence, by using strings of length 2 we have increased the lower bound for the capacity to $\Theta(C_5) \geq \sqrt{5}$.

So far we have no upper bounds for the capacity. To obtain such bounds we again follow Shannon's original ideas. First we need the dual definition of an independent set. We recall that a subset $C \subseteq V$ is a clique if any two vertices of C are joined by an edge. Thus the vertices form trivial

cliques of size 1, the edges are the cliques of size 2, the triangles are cliques of size 3, and so on. Let $\mathcal{C}$ be the set of cliques in G . Consider an arbitrary probability distribution $\mathbf{x} = (x_v : v \in V)$ on the set of vertices, that is, $x_v \geq 0$ and $\sum_{v \in V} x_v = 1$. To every distribution $\mathbf{x}$ we associate the "maximal value of a clique"

$$\lambda(\mathbf{x}) = \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v \in C} x_v,$$

and finally we set

$$\lambda(G) = \min_{\mathbf{x}} \lambda(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v \in C} x_v$$

To be precise we should use $\inf$ instead of $\min$, but the minimum exists because $\lambda(\mathbf{x})$ is continuous on the compact set of all distributions.

Consider now an independent set $U \subseteq V$ of maximal size $\alpha(G) = \alpha$. Associated to U we define the distribution $\mathbf{x}_U = (x_v : v \in V)$ by setting $x_v = \frac{1}{\alpha}$ if $v \in U$ and $x_v = 0$ otherwise. Since any clique contains at most one vertex from U , we infer $\lambda(\mathbf{x}_U) = \frac{1}{\alpha}$, and thus by the definition of $\lambda(G)$

$$\lambda(G) \leq \frac{1}{\alpha(G)} \quad \text{or} \quad \alpha(G) \leq \lambda(G)^{-1}$$

What Shannon observed is that $\lambda(G)^{-1}$ is, in fact, an upper bound for all $\sqrt[n]{\alpha(G^n)}$, and hence also for $\Theta(G)$. In order to prove this it suffices to show that for graphs G, H

$$\lambda(G \times H) = \lambda(G)\lambda(H) \tag{1}$$

holds, since this will imply $\lambda(G^n) = \lambda(G)^n$ and hence

$$\begin{aligned} \alpha(G^n) &\leq \lambda(G^n)^{-1} = \lambda(G)^{-n} \\ \sqrt[n]{\alpha(G^n)} &\leq \lambda(G)^{-1} \end{aligned}$$

To prove (1) we make use of the duality theorem of linear programming (see [1]) and get

$$\lambda(G) = \min_{\mathbf{x}} \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v \in C} x_v = \max_{\mathbf{y}} \min_{v \in V} \sum_{C \ni v} y_C, \tag{2}$$

where the right-hand side runs through all probability distributions $\mathbf{y} = (y_C : C \in \mathcal{C})$ on $\mathcal{C}$.

Consider $G \times H$, and let $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}'$ be distributions which achieve the minima, $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda(G)$, $\lambda(\mathbf{x}') = \lambda(H)$. In the vertex set of $G \times H$ we assign the value $z_{(u,v)} = x_u x'_v$ to the vertex (u, v) . Since $\sum_{(u,v)} z_{(u,v)} = \sum_u x_u \sum_v x'_v = 1$, we obtain a distribution. Next we observe that the maximal cliques in $G \times H$ are of the form $C \times D = \{(u, v) : u \in C, v \in D\}$ where C and D are cliques in G and H , respectively. Hence we obtain

$$\begin{aligned}\lambda(G \times H) &\leq \lambda(\mathbf{z}) = \max_{C \times D} \sum_{(u,v) \in C \times D} z_{(u,v)} \\ &= \max_{C \times D} \sum_{u \in C} x_u \sum_{v \in D} x'_v = \lambda(G)\lambda(H)\end{aligned}$$

by the definition of $\lambda(G \times H)$. In the same way the converse inequality $\lambda(G \times H) \geq \lambda(G)\lambda(H)$ is shown by using the dual expression for $\lambda(G)$ in (2). In summary we can state:

$$\Theta(G) \leq \lambda(G)^{-1}$$

for any graph G .

Let us apply our findings to the 5-cycle and, more generally, to the m -cycle C_m . By using the uniform distribution $(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ on the vertices, we obtain $\lambda(C_m) \leq \frac{2}{m}$, since any clique contains at most two vertices. Similarly, choosing $\frac{1}{m}$ for the edges and 0 for the vertices, we have $\lambda(C_m) \geq \frac{2}{m}$ by the dual expression in (2). We conclude that $\lambda(C_m) = \frac{2}{m}$ and therefore

$$\Theta(C_m) \leq \frac{m}{2}$$

for all m . Now, if m is even, then clearly $\alpha(C_m) = \frac{m}{2}$ and thus also $\Theta(C_m) = \frac{m}{2}$. For odd m , however, we have $\alpha(C_m) = \frac{m-1}{2}$. For $m = 3$, C_3 is a clique, and so is every product C_3^n , implying $\alpha(C_3) = \Theta(C_3) = 1$. So, the first interesting case is the 5-cycle, where we know up to now

$$\sqrt{5} \leq \Theta(C_5) \leq \frac{5}{2} \quad (3)$$

Using his linear programming approach (and some other ideas) Shannon was able to compute the capacity of many graphs and, in particular, of all graphs with five or fewer vertices - with the single exception of C_5 , where he could not go beyond the bounds in (3). This is where things stood for more than 20 years until László Lovász showed by an astonishingly simple argument that indeed $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$. A seemingly very difficult combinatorial problem was provided with an unexpected and elegant solution.

Lovász' main new idea was to represent the vertices v of the graph by real vectors of length 1 such that any two vectors which belong to nonadjacent vertices in G are orthogonal. Let us call such a set of vectors an orthonormal representation of G . Clearly, such a representation always exists: just take the unit vectors $(1, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (0, 0, \dots, 1)^T$ of dimension $m = |V|$.

For the graph C_5 we may obtain an orthonormal representation in $\mathbb{R}^3$ by considering an "umbrella" with five ribs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ of unit length. Now open the umbrella (with tip at the origin) to the point where the angles between alternate ribs are 90° .

Lovász then went on to show that the height h of the umbrella, that is, the distance between $\mathbf{0}$ and S , provides the bound

$$\Theta(C_5) \leq \frac{1}{h^2} \quad (4)$$

A simple calculation yields $h^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$; see the box on the next page. From this $\Theta(C_5) \leq \sqrt{5}$ follows, and therefore $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$.

Let us see how Lovász proceeded to prove the inequality (4). (His results were, in fact, much more general.) Consider the usual inner product

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_s y_s$$

of two vectors $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s)$ in $\mathbb{R}^s$. Then $|\mathbf{x}|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + \dots + x_s^2$ is the square of the length $|\mathbf{x}|$ of $\mathbf{x}$, and the angle γ between $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ is given by

$$\cos \gamma = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}.$$

Thus $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ if and only if $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are orthogonal.

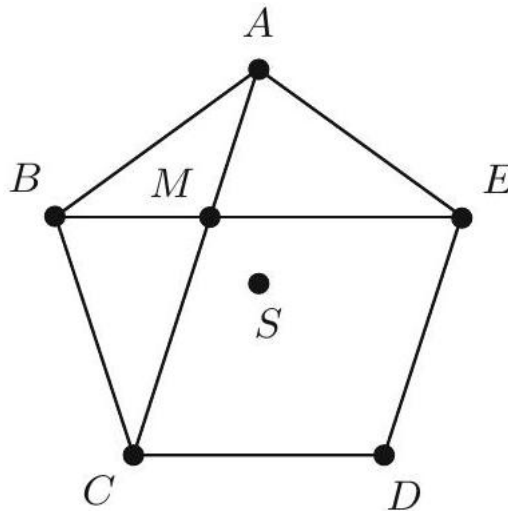
Pentagons and the golden section

Tradition has it that a rectangle was considered aesthetically pleasing if, after cutting off a square of length a , the remaining rectangle had the same shape as the original one. The side lengths a, b of such a rectangle must satisfy $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$. Setting $\tau := \frac{b}{a}$ for the ratio, we obtain $\tau = \frac{1}{\tau-1}$ or $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. Solving the quadratic equation yields the golden section $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$.

Consider now a regular pentagon of side length a , and let d be the length of its diagonals. It was already known to Euclid (Book XIII,8) that $\frac{d}{a} = \tau$, and that the intersection point of two diagonals divides the diagonals in the golden section.

Here is Euclid's Book Proof. Since the total angle sum of the pentagon is 3π , the angle at any vertex equals $\frac{3\pi}{5}$. It follows that $\angle ABE = \frac{\pi}{5}$, since ABE is an isosceles triangle. This, in turn, implies $\angle AMB = \frac{3\pi}{5}$, and we conclude that the triangles ABC and AMB are similar. The quadrilateral $CMED$ is a rhombus since opposing sides are parallel (look at the angles), and so $|MC| = a$ and thus $|AM| = d - a$. By the similarity of ABC and AMB we conclude

$$\frac{d}{a} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AM|} = \frac{a}{d-a} = \frac{|MC|}{|MA|} = \tau.$$



There is more to come. For the distance s of a vertex to the center of the pentagon S , the reader is invited to prove the relation $s^2 = \frac{d^2}{\tau+2}$ (note that BS cuts the diagonal AC at a right angle and halves it). To finish our excursion into geometry, consider now the umbrella with the regular pentagon on top. Since alternate ribs (of length 1) form a right angle, the theorem of Pythagoras gives us $d = \sqrt{2}$, and hence $s^2 = \frac{2}{\tau+2} = \frac{4}{\sqrt{5}+5}$. So, with Pythagoras again, we find for the height $h = |OS|$ our promised result

$$h^2 = 1 - s^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Now we head for an upper bound for the Shannon capacity of any graph G that has an especially "nice" orthonormal representation. For this let $T = \{\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(m)}\}$ be an orthonormal representation of G in $\mathbb{R}^s$, where $\mathbf{v}^{(i)}$ corresponds to the vertex v_i . We assume in addition that all the vectors $\mathbf{v}^{(i)}$ have the same angle ($\neq 90^\circ$) with the vector $\mathbf{u} := \frac{1}{m}(\mathbf{v}^{(1)} + \dots + \mathbf{v}^{(m)})$, or equivalently that the inner product

$$\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u} \rangle = \sigma_T$$

has the same value $\sigma_T \neq 0$ for all i . Let us call this value σ_T the constant of the representation T . For the Lovász umbrella that represents C_5 the condition $\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u} \rangle = \sigma_T$ certainly

holds, for $\mathbf{u} = \overrightarrow{OS}$.

Now we proceed in the following three steps.

(A) Consider a probability distribution $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ on V and set

$$\mu(\mathbf{x}) := \left| x_1 \mathbf{v}^{(1)} + \dots + x_m \mathbf{v}^{(m)} \right|^2$$

and

$$\mu_T(G) := \inf_{\mathbf{x}} \mu(\mathbf{x})$$

Let U be a largest independent set in G with $|U| = \alpha$, and define $\mathbf{x}_U = (x_1, \dots, x_m)$ with $x_i = \frac{1}{\alpha}$ if $v_i \in U$ and $x_i = 0$ otherwise. Since all vectors $\mathbf{v}^{(i)}$ have unit length and $\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ for any two nonadjacent vertices, we infer

$$\mu_T(G) \leq \mu(\mathbf{x}_U) = \left| \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{v}^{(i)} \right|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 = \alpha \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

Thus we have $\mu_T(G) \leq \alpha^{-1}$, and therefore

$$\alpha(G) \leq \frac{1}{\mu_T(G)}$$

(B) Next we compute $\mu_T(G)$. We need the Cauchy-Schwarz inequality

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

for vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$. Applied to $\mathbf{a} = x_1 \mathbf{v}^{(1)} + \dots + x_m \mathbf{v}^{(m)}$ and $\mathbf{b} = \mathbf{u}$, the inequality yields

$$\langle x_1 \mathbf{v}^{(1)} + \dots + x_m \mathbf{v}^{(m)}, \mathbf{u} \rangle^2 \leq \mu(\mathbf{x}) |\mathbf{u}|^2. \quad (5)$$

By our assumption that $\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u} \rangle = \sigma_T$ for all i , we have

$$\langle x_1 \mathbf{v}^{(1)} + \dots + x_m \mathbf{v}^{(m)}, \mathbf{u} \rangle = (x_1 + \dots + x_m) \sigma_T = \sigma_T$$

for any distribution $\mathbf{x}$. Thus, in particular, this has to hold for the uniform distribution $(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$, which implies $|\mathbf{u}|^2 = \sigma_T$. Hence (5) reduces to

$$\sigma_T^2 \leq \mu(\mathbf{x}) \sigma_T \quad \text{or} \quad \mu_T(G) \geq \sigma_T$$

On the other hand, for $\mathbf{x} = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ we obtain

$$\mu_T(G) \leq \mu(\mathbf{x}) = \left| \frac{1}{m} (\mathbf{v}^{(1)} + \dots + \mathbf{v}^{(m)}) \right|^2 = |\mathbf{u}|^2 = \sigma_T,$$

and so we have proved

$$\mu_T(G) = \sigma_T \quad (6)$$

In summary, we have established the inequality

$$\alpha(G) \leq \frac{1}{\sigma_T} \quad (7)$$

for any orthonormal representation T with constant σ_T .

(C) To extend this inequality to $\Theta(G)$, we proceed as before. Consider again the product $G \times H$ of two graphs. Let G and H have orthonormal representations R and S in $\mathbb{R}^r$ and $\mathbb{R}^s$, respectively, with constants σ_R and σ_S . Let $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r)$ be a vector in R and $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_s)$ be a vector in S . To the vertex in $G \times H$ corresponding to the pair $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ we associate the vector

$$\mathbf{vw}^T := (v_1 w_1, \dots, v_1 w_s, v_2 w_1, \dots, v_2 w_s, \dots, v_r w_1, \dots, v_r w_s) \in \mathbb{R}^{rs}$$

It is immediately checked that $R \times S := \{\mathbf{v}\mathbf{w}^T : \mathbf{v} \in R, \mathbf{w} \in S\}$ is an orthonormal representation of $G \times H$ with constant $\sigma_R\sigma_S$. Hence by (6) we obtain

$$\mu_{R \times S}(G \times H) = \mu_R(G)\mu_S(H).$$

For $G^n = G \times \cdots \times G$ and the representation T with constant σ_T this means

$$\mu_{T^n}(G^n) = \mu_T(G)^n = \sigma_T^n$$

and by (7) we obtain

$$\alpha(G^n) \leq \sigma_T^{-n}, \quad \sqrt[n]{\alpha(G^n)} \leq \sigma_T^{-1}$$

Taking all things together we have thus completed Lovász' argument:

Theorem. Whenever $T = \{\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(m)}\}$ is an orthonormal representation of G with constant σ_T , then

$$\Theta(G) \leq \frac{1}{\sigma_T} \quad (8)$$

Looking at the Lovász umbrella, we have $\mathbf{u} = (0, 0, h = \frac{1}{\sqrt[4]{5}})^T$ and hence $\sigma = \langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u} \rangle = h^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, which yields $\Theta(C_5) \leq \sqrt{5}$. Thus Shannon's problem is solved.



"Umbrellas with five ribs"

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

The adjacency matrix for the 5-cycle C_5

Let us carry our discussion a little further. We see from (8) that the larger σ_T is for a representation of G , the better a bound for $\Theta(G)$ we will get. Here is a method that gives us an orthonormal representation for any graph G . To $G = (V, E)$ we associate the adjacency matrix $A = (a_{ij})$, which is defined as follows: Let $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, then we set

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A is a real symmetric $m \times m$ matrix with 0's in the main diagonal.

Now we need two facts from linear algebra. First, as a symmetric matrix, A has m real eigenvalues $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$ (some of which may be equal), and the sum of the eigenvalues equals the sum of the diagonal entries of A , that is, 0. Hence the smallest eigenvalue must be negative (except in the trivial case when G has no edges). Let $p = |\lambda_m| = -\lambda_m$ be the absolute value of the smallest eigenvalue, and consider the matrix

$$M := I + \frac{1}{p}A,$$

where I denotes the $m \times m$ identity matrix. This M has the eigenvalues $1 + \frac{\lambda_1}{p} \geq 1 + \frac{\lambda_2}{p} \geq \dots \geq 1 + \frac{\lambda_m}{p} = 0$. Now we quote the second result (the principal axis theorem of linear algebra): If $M = (m_{ij})$ is a real symmetric matrix with all eigenvalues ≥ 0 , then there are vectors $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(m)} \in \mathbb{R}^s$ for $s = \text{rank}(M)$, such that

$$m_{ij} = \langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

In particular, for $M = I + \frac{1}{p}A$ we obtain

$$\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)} \rangle = m_{ii} = 1 \quad \text{for all } i$$

and

$$\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = \frac{1}{p}a_{ij} \quad \text{for } i \neq j$$

Since $a_{ij} = 0$ whenever $v_i v_j \notin E$, we see that the vectors $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(m)}$ form indeed an orthonormal representation of G .

Let us, finally, apply this construction to the m -cycles C_m for odd $m \geq 5$. Here one easily computes $p = |\lambda_{\min}| = 2 \cos \frac{\pi}{m}$ (see the box). Every row of the adjacency matrix contains two 1's, implying that every row of the matrix M sums to $1 + \frac{2}{p}$. For the representation $\{\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(m)}\}$ this means

$$\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(1)} + \dots + \mathbf{v}^{(m)} \rangle = 1 + \frac{2}{p} = 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{m}}$$

and hence

$$\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{m} \left(1 + \left(\cos \frac{\pi}{m} \right)^{-1} \right) = \sigma$$

for all i . We can therefore apply our main result (8) and conclude

$$\Theta(C_m) \leq \frac{m}{1 + \left(\cos \frac{\pi}{m} \right)^{-1}} \quad (\text{for } m \geq 5 \text{ odd}) \quad (9)$$

Notice that because of $\cos \frac{\pi}{m} < 1$ the bound (9) is better than the bound $\Theta(C_m) \leq \frac{m}{2}$ we found before. Note further $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\tau}{2}$, where $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ is the golden section. Hence for $m = 5$ we again obtain

$$\Theta(C_5) \leq \frac{5}{1 + \frac{4}{\sqrt{5}+1}} = \frac{5(\sqrt{5}+1)}{5 + \sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

The orthonormal representation given by this construction is, of course, precisely the "Lovász umbrella."

And what about C_7, C_9 , and the other odd cycles? By considering $\alpha(C_m^2)$, $\alpha(C_m^3)$ and other small powers the lower bound $\frac{m-1}{2} \leq \Theta(C_m)$ can certainly be increased, but for no odd $m \geq 7$ do the best known lower bounds agree with the upper bound given in (8). So, twenty years after Lovász' marvelous proof of $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$, these problems remain open and are considered very difficult - but after all we had this situation before.

The eigenvalues of C_m

Look at the adjacency matrix A of the cycle C_m . To find the eigenvalues (and eigenvectors) we use the m -th roots of unity. These are given by $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{m-1}$ for $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ - see the box on page 37. Let $\lambda = \zeta^k$ be any of these roots, then we claim that $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{m-1})^T$ is an eigenvector of A to the eigenvalue $\lambda + \lambda^{-1}$. In fact, by the set-up of A we find

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \lambda^{m-1} \\ \lambda^2 + 1 \\ \lambda^3 + \lambda \\ \vdots \\ 1 + \lambda^{m-2} \end{pmatrix} = (\lambda + \lambda^{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Since the vectors $(1, \lambda, \dots, \lambda^{m-1})$ are independent (they form a so-called Vandermonde matrix) we conclude that for odd m

$$\begin{aligned} \zeta^k + \zeta^{-k} &= [\cos(2k\pi/m) + i \sin(2k\pi/m)] \\ &\quad + [\cos(2k\pi/m) - i \sin(2k\pi/m)] \\ &= 2 \cos(2k\pi/m) \quad \left(0 \leq k \leq \frac{m-1}{2}\right) \end{aligned}$$

are all the eigenvalues of A . Now the cosine is a decreasing function, and so

$$2 \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{m}$$

is the smallest eigenvalue of A .

For example, for $m = 7$ all we know is $\sqrt[6]{350} \leq \Theta(C_7) \leq \frac{7}{1+(\cos \frac{\pi}{7})^{-1}}$,

which is $3.2271 \leq \Theta(C_7) \leq 3.3177$.

References

- [1] V. Chvátal: Linear Programming, Freeman, New York 1983.
- [2] W. Haemers: Eigenvalue methods, in: "Packing and Covering in Combinatorics" (A. Schrijver, ed.), Math. Centre Tracts 106 (1979), 15-38.
- [3] L. Lovász: On the Shannon capacity of a graph, IEEE Trans. Information Theory 25 (1979), 1-7.
- [4] C. E. Shannon: The zero-error capacity of a noisy channel, IRE Trans. Information Theory 3 (1956), 3-15.

22.5.7 The chromatic number of Kneser graphs

In 1955 the number theorist Martin Kneser posed a seemingly innocuous problem that became one of the great challenges in graph theory until a brilliant and totally unexpected solution, using the "Borsuk-Ulam theorem" from topology, was found by László Lovász twenty-three years later.

It happens often in mathematics that once a proof for a long-standing problem is found, a shorter one quickly follows, and so it was in this case. Within weeks Imre Bárány showed how to combine the Borsuk-Ulam theorem with another known result to elegantly settle Kneser's conjecture. Then in 2002 Joshua Greene, an undergraduate student, simplified Bárány's argument even further, and it is his version of the proof that we present here.

But let us start at the beginning. Consider the following graph $K(n, k)$, now called Kneser graph, for integers $n \geq k \geq 1$. The vertex-set $V(n, k)$ is the family of k -subsets of $\{1, \dots, n\}$, thus $|V(n, k)| = \binom{n}{k}$. Two such k -sets A and B are adjacent if they are disjoint, $A \cap B = \emptyset$.

If $n < 2k$, then any two k -sets intersect, resulting in the uninteresting case where $K(n, k)$ has no edges. So we assume from now on that $n \geq 2k$.

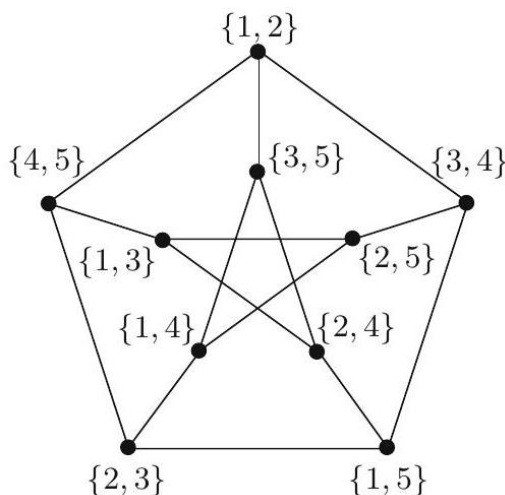
Kneser graphs provide an interesting link between graph theory and finite sets. Consider,

e.g., the independence number $\alpha(K(n, k))$, that is, we ask how large a family of pairwise intersecting k -sets can be. The answer is given by the Erdős-Ko-Rado theorem of Chapter 30: $\alpha(K(n, k)) = \binom{n-1}{k-1}$.

We can similarly study other interesting parameters of this graph family, and Kneser picked out the most challenging one: the chromatic number $\chi(K(n, k))$. We recall from previous chapters that a (vertex) coloring of a graph G is a mapping $c: V \rightarrow \{1, \dots, m\}$ such that adjacent vertices are colored differently. The chromatic number $\chi(G)$ is then the minimum number of colors that is sufficient for a coloring of V . In other words, we want to present the vertex set V as a disjoint union of as few color classes as possible, $V = V_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_{\chi(G)}$, such that each set V_i is edgeless.

For the graphs $K(n, k)$ this asks for a partition $V(n, k) = V_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_{\chi}$, where every V_i is an intersecting family of k -sets. Since we assume that $n \geq 2k$, we write from now on $n = 2k + d, k \geq 1, d \geq 0$.

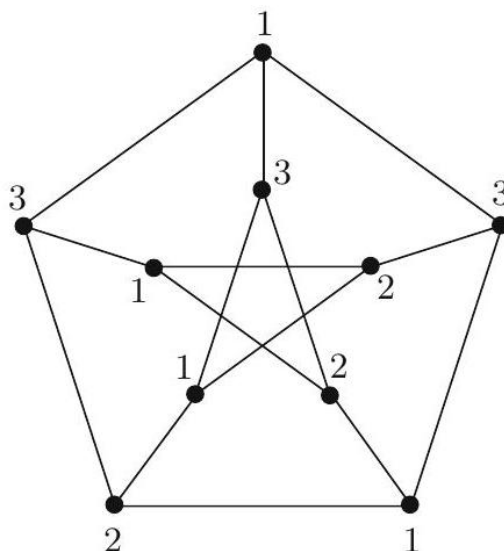
Here is a simple coloring of $K(n, k)$ that uses $d + 2$ colors: For $i = 1, 2, \dots, d + 1$, let V_i consist of all k -sets that have i as smallest element. The remaining k -sets are contained in the set $\{d + 2, d + 3, \dots, 2k + d\}$, which has only $2k - 1$ elements. Hence they all intersect, and we can use color $d + 2$ for all of them.



The Kneser graph $K(5, 2)$ is the famous Petersen graph.

This implies that

$$\chi(K(n, k)) \geq \frac{|V|}{\alpha} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{n}{k}.$$



The 3-coloring of the Petersen graph.

For $d = 0$, $K(2k, k)$ consists of disjoint edges, one for every pair of complementary k -sets. Hence $\chi(K(2k, k)) = 2$, in accordance with the conjecture.

So we have $\chi(K(2k + d, k)) \leq d + 2$, and Kneser's challenge was to show that this is the right number.

So we have $\chi(K(2k + d, k)) \leq d + 2$, and Kneser's challenge was to show that this is the right number.

Kneser's conjecture.

We have

$$\chi(K(2k + d, k)) = d + 2$$

Probably anybody's first crack at the proof would be to try induction on k and d . Indeed, the starting cases $k = 1$ and $d = 0, 1$ are easy, but the induction step from k to $k + 1$ (or d to $d + 1$) does not seem to work. So let us instead reformulate the conjecture as an existence problem:

If the family of k -sets of $\{1, 2, \dots, 2k + d\}$ is partitioned into $d + 1$ classes, $V(n, k) = V_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_{d+1}$, then for some i , V_i contains a pair A, B of disjoint k -sets.

Lovász' brilliant insight was that at the (topological) heart of the problem lies a famous theorem about the d -dimensional unit sphere S^d in $\mathbb{R}^{d+1}$, $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |x| = 1\}$.

The Borsuk-Ulam theorem

For every continuous map $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ from d -sphere to d -space, there are antipodal points $x^*, -x^*$ that are mapped to the same point $f(x^*) = f(-x^*)$.

This result is one of the cornerstones of topology; it first appeared in Borsuk's famous 1933 paper. We sketch a proof in the appendix; for the full proof we refer to Section 2.2 in Matoušek's wonderful book "Using the Borsuk-Ulam theorem", whose very title demonstrates the power and range of the result. Indeed, there are many equivalent formulations, which underline the central position of the theorem. We will employ a version that can be traced back to a book by Lyusternik-Shnirel'man from 1930, which even predates Borsuk.

Theorem. If the d -sphere S^d is covered by $d + 1$ sets,

$$S^d = U_1 \cup \dots \cup U_d \cup U_{d+1}$$

such that each of the first d sets $U_1, \dots, U_d$ is either open or closed, then one of the $d + 1$ sets contains a pair of antipodal points $x^*, -x^*$.

The case when all $d + 1$ sets are closed is due to Lyusternik and Shnirel'man. The case when all $d + 1$ sets are open is equally common, and also called the Lyusternik-Shnirel'man theorem.

Greene's insight was that the theorem is also true if each of the $d + 1$ sets is either open or closed. As you will see, we don't even need that: No such assumption is needed for U_{d+1} . For the proof of Kneser's conjecture, we only need the case when $U_1, \dots, U_d$ are open.

- Proof of the Lyusternik-Shnirel'man theorem using Borsuk-Ulam.

Let a covering $S^d = U_1 \cup \dots \cup U_d \cup U_{d+1}$ be given as specified, and assume that there are no antipodal points in any of the sets U_i . We define a map $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ by

$$f(x) := (\delta(x, U_1), \delta(x, U_2), \dots, \delta(x, U_d)).$$

Here $\delta(x, U_i)$ denotes the distance of x from U_i . Since this is a continuous function in x , the map f is continuous. Thus the Borsuk-Ulam theorem tells us that there are antipodal points $x^*, -x^*$ with $f(x^*) = f(-x^*)$. Since U_{d+1} does not contain antipodes, we get that at least one of x^* and $-x^*$ must be contained in one of the sets U_i , say in U_k ($k \leq d$). After exchanging x^* with $-x^*$ if necessary, we may assume that $x^* \in U_k$. In particular this yields $\delta(x^*, U_k) = 0$, and from $f(x^*) = f(-x^*)$ we get that $\delta(-x^*, U_k) = 0$ as well.

If U_k is closed, then $\delta(-x^*, U_k) = 0$ implies that $-x^* \in U_k$, and we arrive at the contradiction that U_k contains a pair of antipodal points.

If U_k is open, then $\delta(-x^*, U_k) = 0$ implies that $-x^*$ lies in $\overline{U_k}$, the closure of U_k . The set $\overline{U_k}$, in turn, is contained in $S^d \setminus (-U_k)$, since this is a closed subset of S^d that contains U_k . But this means that $-x^*$ lies in $S^d \setminus (-U_k)$, so it cannot lie in $-U_k$, and x^* cannot lie in U_k , a contradiction. $\square$

As the second ingredient for his proof, Imre Bárány used another existence result about the sphere S^d .

Gale's Theorem. There is an arrangement of $2k + d$ points on S^d such that every open hemisphere contains at least k of these points.

David Gale discovered his theorem in 1956 in the context of polytopes with many faces. He presented a complicated induction proof, but today, with hindsight, we can quite easily exhibit such a set and verify its properties.

Armed with these results it is just a short step to settle Kneser's problem, but as Greene showed we can do even better: We don't even need Gale's result. It suffices to take any arrangement of $2k + d$ points on S^{d+1} in general position, meaning that no $d + 2$ of the points lie on a hyperplane through the center of the sphere. Clearly, for $d \geq 0$ this can be done.

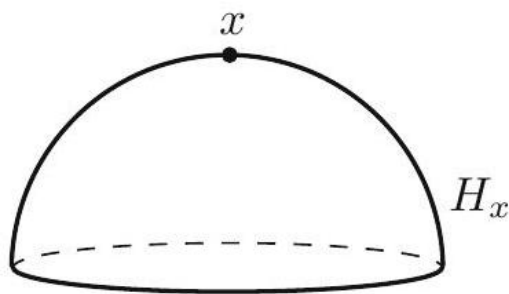
- Proof of the Kneser conjecture. For our ground set let us take $2k + d$ points in general position on the sphere S^{d+1} . Suppose the set $V(n, k)$ of all k -subsets of this set is partitioned into $d + 1$ classes, $V(n, k) = V_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_{d+1}$. We have to find a pair of disjoint k -sets A and B that belong to the same class V_i .

For $i = 1, \dots, d + 1$ we set

$$O_i = \{x \in S^{d+1} : \text{the open hemisphere } H_x \text{ with pole } x \text{ contains a } k\text{-set from } V_i\}.$$

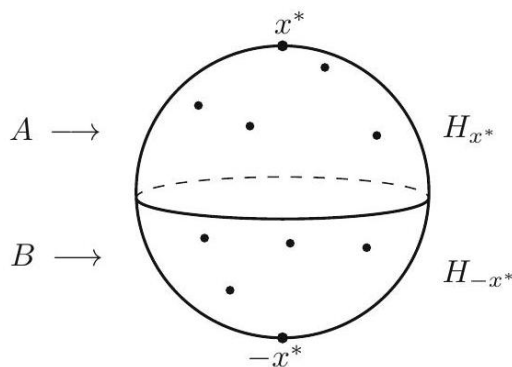
Clearly, each O_i is an open set. Together, the open sets O_i and the closed set $C = S^{d+1} \setminus (O_1 \cup \dots \cup O_{d+1})$ cover S^{d+1} . Invoking Lyusternik-Shnirel'man we know that one of these sets contains antipodal points x^* .

The closure of U_k is the smallest closed set that contains U_k (that is, the intersection of all closed sets containing U_k).



An open hemisphere in S^2

and $-x^*$. This set cannot be C ! Indeed, if $x^*, -x^*$ are in C , then by the definition of the O_i 's, the hemispheres H_{x^*} and H_{-x^*} would contain fewer than k points. This means that at least $d+2$ points would be on the equator $\bar{H}_{x^*} \cap \bar{H}_{-x^*}$ with respect to the north pole x^* , that is, on a hyperplane through the origin. But this cannot be since the points are in general position. Hence some O_i contains a pair $x^*, -x^*$, so there exist k -sets A and B both in class V_i , with $A \subseteq H_{x^*}$ and $B \subseteq H_{-x^*}$.



But since we are talking about open hemispheres, H_{x^*} and H_{-x^*} are disjoint, hence A and B are disjoint, and this is the whole proof. $\square$

The reader may wonder whether sophisticated results such as the theorem of Borsuk-Ulam are really necessary to prove a statement about finite sets. Indeed, a beautiful combinatorial argument has later been found by Ji Matoušek - but on closer inspection it has a distinct, albeit discrete, topological flavor.

Appendix: A proof sketch for the Borsuk-Ulam theorem

For any generic map (also known as general position map) from a compact d -dimensional space to a d -dimensional space, any point in the image has only a finite number of pre-images. For a generic map from a $(d+1)$ dimensional space to a d -dimensional space, we expect every point in the image to have a 1-dimensional pre-image, that is, a collection of curves. Both in the case of smooth maps, and in the setting of piecewise-linear maps, one quite easily proves one can deform any map to a nearby generic map.

For the Borsuk-Ulam theorem, the idea is to show that every generic map $S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ identifies an odd (in particular, finite and nonzero) number of antipodal pairs. If f did not identify any antipodal pair, then it would be arbitrarily close to a generic map $\tilde{f}$ without any such identification.

Now consider the projection $\pi : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ that just deletes the last coordinate; this map identifies the "north pole" e_{d+1} of the d -sphere with the "south pole" $-e_{d+1}$. For any given map $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ we construct a continuous deformation from π to f , that is, we interpolate between these two maps (linearly, for example), to obtain a continuous map

$$F : S^d \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

with $F(x, 0) = \pi(x)$ and $F(x, 1) = f(x)$ for all $x \in S^d$. (Such a map is known as a homotopy.)

Now we perturb F carefully into a generic map $\tilde{F} : S^d \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$, which again we may assume to be smooth, or piecewise-linear on a fine triangulation of $S^d \times [0, 1]$. If this perturbation is "small enough" and performed carefully, then the perturbed version of the projection $\tilde{\pi}(x) := \tilde{F}(x, 0)$ should still identify the two antipodal points $\pm e_{d+1}$ and no others. If $\tilde{F}$ is sufficiently generic, then the points in $S^d \times [0, 1]$ given by

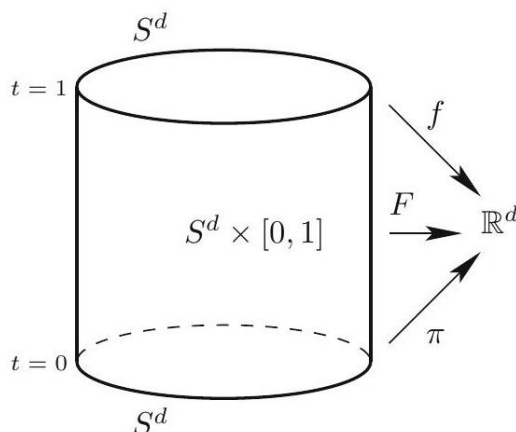
$$M := \{(x, t) \in S^d \times [0, 1] : \tilde{F}(-x, t) = \tilde{F}(x, t)\}$$

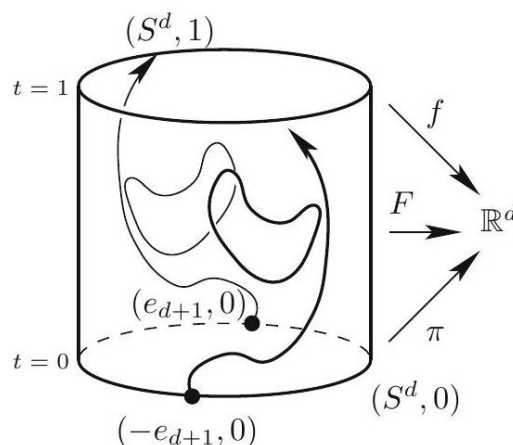
according to the implicit function theorem (smooth or piecewise-linear version) form a collection of paths and of closed curves. Clearly this collection is symmetric, that is, $(-x, t) \in M$ if and only if $(x, t) \in M$.

The paths in M can have endpoints only at the boundary of $S^d \times [0, 1]$, that is, at $t = 0$ and at $t = 1$. The only ends at $t = 0$, however, are at $(\pm e_{d+1}, 0)$, and the two paths that start at these two points are symmetric copies of each other, so they are disjoint, and they can end only at $t = 1$. This proves that there are solutions for $\tilde{F}(-x, t) = \tilde{F}(x, t)$ at $t = 1$, and hence for $f(-x) = f(x)$. $\square$

References

- [1] I. BÁRÁNY: A short proof of Kneser's conjecture, J. Combinatorial Theory, Ser. B 25 (1978), 325-326.
- [2] K. Borsuk: Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre, Fundamenta Math. 20 (1933), 177-190.
- [3] D. Gale: Neighboring vertices on a convex polyhedron, in: "Linear Inequalities and Related Systems" (H. W. Kuhn, A. W. Tucker, eds.), Princeton University Press, Princeton 1956, 255-263.
- [4] J. E. Greene: A new short proof of Kneser's conjecture, American Math. Monthly 109 (2002), 918-920.
- [5] M. Kneser: Aufgabe 360, Jahresbericht der Deutschen MathematikerVereinigung 58 (1955), 27.
- [6] L. LovÁSZ: Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy, J. Combinatorial Theory, Ser. B 25 (1978), 319-324.
- [7] L. Lyusternik & S. Shnirel'man: Topological Methods in Variational Problems (in Russian), Issledowatelski Institute Matematiki i Mehaniki pri O. M. G. U., Moscow, 1930.
- [8] J. Matoušek: Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Universitext, Springer-Verlag, Berlin 2003.
- [9] J. Matoušek: A combinatorial proof of Kneser's conjecture, Combinatorica 24 (2004), 163-170.





22.5.8 Of friends and politicians

It is not known who first raised the following problem or who gave it its human touch. Here it is:

Suppose in a group of people we have the situation that any pair of persons have precisely one common friend. Then there is always a person (the "politician") who is everybody's friend.

In the mathematical jargon this is called the friendship theorem.

Before tackling the proof let us rephrase the problem in graph-theoretic terms. We interpret the people as the set of vertices V and join two vertices by an edge if the corresponding people are friends. We tacitly assume that friendship is always two-ways, that is, if u is a friend of v , then v is also a friend of u , and further that nobody is his or her own friend. Thus the theorem takes on the following form:

Theorem. Suppose that G is a finite graph in which any two vertices have precisely one common neighbor. Then there is a vertex which is adjacent to all other vertices.

Note that there are finite graphs with this property; see the figure, where u is the politician. However, these "windmill graphs" also turn out to be the only graphs with the desired property. Indeed, it is not hard to verify that in the presence of a politician only the windmill graphs are possible.

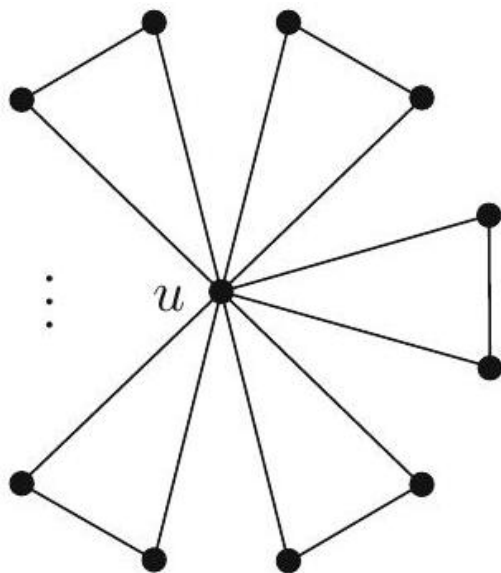
Surprisingly, the friendship theorem does not hold for infinite graphs! Indeed, for an inductive construction of a counterexample one may start for example with a 5-cycle, and repeatedly add common neighbors for all pairs of vertices in the graph that don't have one, yet. This leads to a (countably) infinite friendship graph without a politician.

Several proofs of the friendship theorem exist, but the first proof, given by Paul Erdős, Alfred Rényi and Vera Sós, is still the most accomplished.

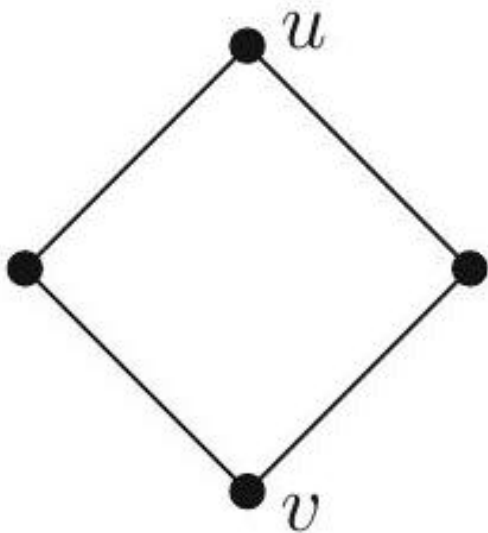
- **Proof.** Suppose the assertion is false, and G is a counterexample, that is, no vertex of G is adjacent to all other vertices. To derive a contradiction we proceed in two steps. The first part is combinatorics, and the second part is linear algebra.
 - (1) We claim that G is a regular graph, that is, $d(u) = d(v)$ for any $u, v \in V$. Note first that the condition of the theorem implies that there are no cycles of length 4 in G . Let us call this the C_4 -condition.

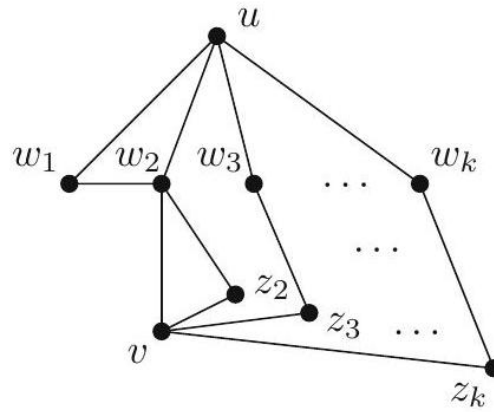


"A politician's smile"



A windmill graph





We first prove that any two nonadjacent vertices u and v have equal degree $d(u) = d(v)$. Suppose $d(u) = k$, where $w_1, \dots, w_k$ are the neighbors of u . Exactly one of the w_i , say w_2 , is adjacent to v , and w_2 adjacent to exactly one of the other w_i 's, say w_1 , so that we have the situation of the figure to the left. The vertex v has with w_1 the common neighbor w_2 , and with $w_i (i \geq 2)$ a common neighbor $z_i (i \geq 2)$. By the C_4 -condition, all these z_i must be distinct. We conclude $d(v) \geq k = d(u)$, and thus $d(u) = d(v) = k$ by symmetry.

To finish the proof of (1), observe that any vertex different from w_2 is not adjacent to either u or v , and hence has degree k , by what we already proved. But since w_2 also has a non-neighbor, it has degree k as well, and thus G is k -regular.

Summing over the degrees of the k neighbors of u we get k^2 . Since every vertex (except u) has exactly one common neighbor with u , we have counted every vertex once, except for u , which was counted k times. So the total number of vertices of G is

$$n = k^2 - k + 1. \quad (1)$$

(2) The rest of the proof is a beautiful application of some standard results of linear algebra. Note first that k must be greater than 2, since for $k \leq 2$ only $G = K_1$ and $G = K_3$ are possible by (1), both of which are trivial windmill graphs. Consider the adjacency matrix $A = (a_{ij})$, as defined on page 298. By part (1), any row has exactly k 1's, and by the condition of the theorem, for any two rows there is exactly one column where they both have a 1. Note further that the main diagonal consists of 0's. Hence we have

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix} = (k-1)I + J$$

where I is the identity matrix, and J the matrix of all 1's. It is immediately checked that J has the eigenvalues n (of multiplicity 1) and 0 (of multiplicity $n-1$). It follows that A^2 has the eigenvalues $k-1+n = k^2$ (of multiplicity 1) and $k-1$ (of multiplicity $n-1$). Since A is symmetric and hence diagonalizable, we conclude that A has the eigenvalues k (of multiplicity 1) and $\pm\sqrt{k-1}$. Suppose r of the eigenvalues are equal to $\sqrt{k-1}$ and s of them are equal to $-\sqrt{k-1}$, with $r+s = n-1$. Now we are almost home. Since the sum of the eigenvalues of A equals the trace (which is 0), we find

$$k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = 0$$

and, in particular, $r \neq s$, and

$$\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r}$$

Now if the square root $\sqrt{m}$ of a natural number m is rational, then it is an integer! An elegant proof for this was presented by Dedekind in 1858: Let n_0 be the smallest natural number with $n_0\sqrt{m} \in \mathbb{N}$. If $\sqrt{m} \notin \mathbb{N}$, then there exists $\ell \in \mathbb{N}$ with $0 < \sqrt{m} - \ell < 1$. Setting $n_1 := n_0(\sqrt{m} - \ell)$, we find $n_1 \in \mathbb{N}$ and $n_1\sqrt{m} = n_0(\sqrt{m} - \ell)\sqrt{m} = n_0m - \ell(n_0\sqrt{m}) \in \mathbb{N}$. With $n_1 < n_0$ this yields a contradiction to the choice of n_0 .

Returning to our equation, let us set $h = \sqrt{k-1} \in \mathbb{N}$, then

$$h(s - r) = k = h^2 + 1$$

Since h divides $h^2 + 1$ and h^2 , we find that h must be equal to 1, and thus $k = 2$, which we have already excluded. So we have arrived at a contradiction, and the proof is complete.

However, the story is not quite over. Let us rephrase our theorem in the following way: Suppose G is a graph with the property that between any two vertices there is exactly one path of length 2. Clearly, this is an equivalent formulation of the friendship condition. Our theorem then says that the only such graphs are the windmill graphs. But what if we consider paths of length more than 2? A conjecture of Anton Kotzig asserts that the analogous situation is impossible.

Kotzig's Conjecture. Let $\ell > 2$. Then there are no finite graphs with the property that between any two vertices there is precisely one path of length ℓ .

Kotzig himself verified his conjecture for $\ell \leq 8$. In [3] his conjecture is proved up to $\ell = 20$, and Alexandr Kostochka has told us that it is now verified for all $\ell \leq 33$. A general proof, however, seems to be out of reach ...

References

- [1] P. Erdős, A. Rényi & V. Sós: On a problem of graph theory, *Studia Sci. Math.* 1 (1966), 215-235.
- [2] A. Kotzig: Regularly k -path connected graphs, *Congressus Numerantium* 40 (1983), 137-141.
- [3] A. Kostochka: The nonexistence of certain generalized friendship graphs, in: "Combinatorics" (Eger, 1987), *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* 52, NorthHolland, Amsterdam 1988, 341-356.

22.5.9 Probability makes counting (sometimes) easy

Just as we started this book with the first papers of Paul Erdős in number theory, we close it by discussing what will possibly be considered his most lasting legacy - the introduction, together with Alfred Rényi, of the probabilistic method. Stated in the simplest way it says:

If, in a given set of objects, the probability that an object does not have a certain property is less than 1, then there must exist an object with this property.

Thus we have an existence result. It may be (and often is) very difficult to find this object, but we know that it exists. We present here three examples (of increasing sophistication) of this probabilistic method due to Erdős, and end with a particularly elegant, quite recent application.

As a warm-up, consider a family $\mathcal{F}$ of subsets A_i , all of size $d \geq 2$, of a finite ground-set X . We say that $\mathcal{F}$ is 2-colorable if there exists a coloring of X with two colors such that in every set A_i both colors appear. It is immediate that not every family can be colored in this way. As an example, take all subsets of size d of a $(2d - 1)$ -set X . Then no matter how we 2-color X , there must be d elements which are colored alike. On the other hand, it is equally clear that every subfamily of a 2-colorable family of d -sets is itself 2-colorable. Hence we are interested in the smallest number $m = m(d)$ for which a family with m sets exists which is not 2-colorable. Phrased differently, $m(d)$ is the largest number which guarantees that every family with less than $m(d)$ sets is 2-colorable.

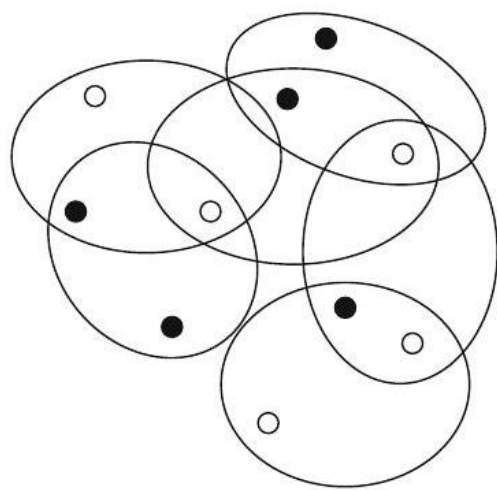
Theorem 1. Every family of at most $2^{d-1}d$ -sets is 2-colorable, that is, $m(d) > 2^{d-1}d$.

- **Proof.** Suppose $\mathcal{F}$ is a family of d -sets with at most $2^{d-1}d$ sets. Color X randomly with two colors, all colorings being equally likely. For each set $A \in \mathcal{F}$ let E_A be the event that all elements of A are colored alike. Since there are precisely two such colorings, we have

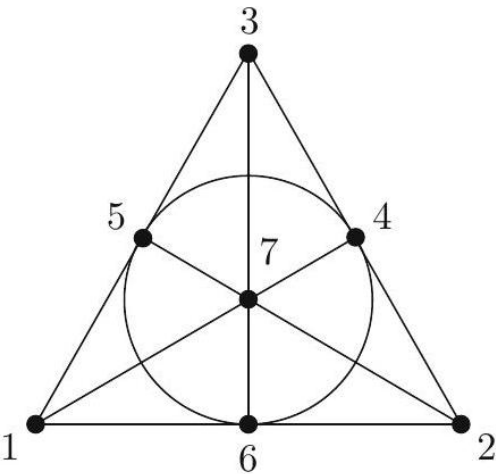
$$\text{Prob}(E_A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1},$$

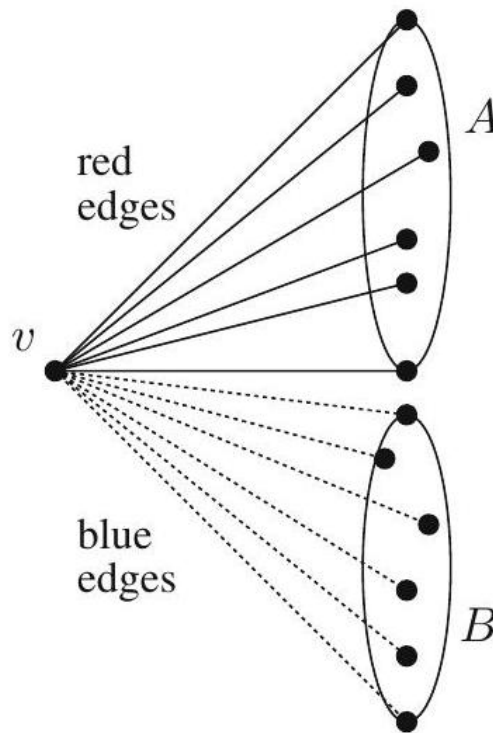
and hence with $m = |\mathcal{F}| \leq 2^{d-1}d$ (note that the events E_A are not disjoint)

$$\text{Prob}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} E_A\right) < \sum_{A\in\mathcal{F}} \text{Prob}(E_A) = m\left(\frac{1}{2}\right)^{d-1} \leq 1.$$



A 2-colored family of 3-sets





We conclude that there exists some 2-coloring of X without a unicolored d -set from $\mathcal{F}$, and this is just our condition of 2-colorability. $\square$

An upper bound for $m(d)$, roughly equal to $d^2 2^d$, was also established by Erdős, again using the probabilistic method, this time taking random sets and a fixed coloring. Using a very clever argument, Jaikumar Radhakrishnan and Aravind Srinivasan have established the best lower bound to date, which is approximately equal to $\sqrt{\frac{d}{\log d}} 2^d$. As for exact values, only the first two $m(2) = 3, m(3) = 7$ are known. Of course, $m(2) = 3$ is realized by the graph K_3 , while the Fano configuration yields $m(3) \leq 7$. Here $\mathcal{F}$ consists of the seven 3-sets of the figure (including the circle set $\{4, 5, 6\}$). The reader may find it fun to show that $\mathcal{F}$ cannot be 2-colored. To prove that all families of six 3-sets are 2-colorable, and hence $m(3) = 7$, requires a little more care.

Our next example is the classic in the field - Ramsey numbers. Consider the complete graph K_N on N vertices. We say that K_N has property (m, n) if, no matter how we color the edges of K_N red and blue, there is always a complete subgraph on m vertices with all edges colored red or a complete subgraph on n vertices with all edges colored blue. It is clear that if K_N has property (m, n) , then so does every K_s with $s \geq N$. So, as in the first example, we ask for the smallest number N (if it exists) with this property - and this is the Ramsey number $R(m, n)$.

As a start, we certainly have $R(m, 2) = m$ because either all of the edges of K_m are red or there is a blue edge, resulting in a blue K_2 . By symmetry, we have $R(2, n) = n$. Now, suppose $R(m-1, n)$ and $R(m, n-1)$ exist. We then prove that $R(m, n)$ exists and that

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1). \quad (1)$$

Suppose $N = R(m-1, n) + R(m, n-1)$, and consider an arbitrary redblue coloring of K_N . For a vertex v , let A be the set of vertices joined to v by a red edge, and B the vertices joined by a blue edge.

Since $|A| + |B| = N - 1$, we find that either $|A| \geq R(m-1, n)$ or $|B| \geq R(m, n-1)$. Suppose $|A| \geq R(m-1, n)$, the other case being analogous. Then by the definition of $R(m-1, n)$, there either exists in A a subset A_R of size $m-1$ all of whose edges are colored red which together with v yields a red K_m , or there is a subset A_B of size n with all edges colored blue. We infer that K_N satisfies the (m, n) -property and Claim (1) follows.

Combining (1) with the starting values $R(m, 2) = m$ and $R(2, n) = n$, we obtain from the familiar recursion for binomial coefficients

$$R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}, \quad (2)$$

and, in particular,

$$R(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} = \binom{2k-3}{k-1} + \binom{2k-3}{k-2} \leq 2^{2k-3}.$$

Now what we are really interested in is a lower bound for $R(k, k)$. This amounts to proving for an as-large-as-possible $N < R(k, k)$ that there exists a coloring of the edges such that no red or blue K_k results. And this is where the probabilistic method comes into play.

Theorem 2. For all $k \geq 2$, the following lower bound holds for the Ramsey numbers:

$$R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$$

- Proof. We have $R(2, 2) = 2$. From (2) we know $R(3, 3) \leq 6$, and the pentagon colored as in the figure shows $R(3, 3) = 6$.

Now let us assume $k \geq 4$. Suppose $N < 2^{\frac{k}{2}}$, and consider all red-blue colorings, where we color each edge independently red or blue with probability $\frac{1}{2}$. Thus all colorings are equally likely with probability $2^{-\binom{N}{2}}$. Let A be a set of vertices of size k . The probability of the event A_R that the edges in A are all colored red is then $2^{-\binom{k}{2}}$. Hence it follows that the probability p_R for some k -set to be colored all red is bounded by

$$p_R = \text{Prob} \left(\bigcup_{|A|=k} A_R \right) \leq \sum_{|A|=k} \text{Prob}(A_R) = \binom{N}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

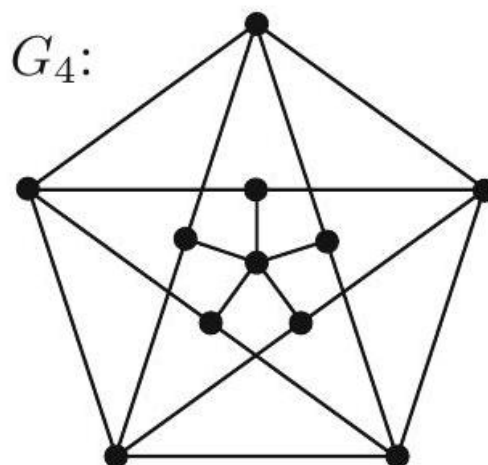
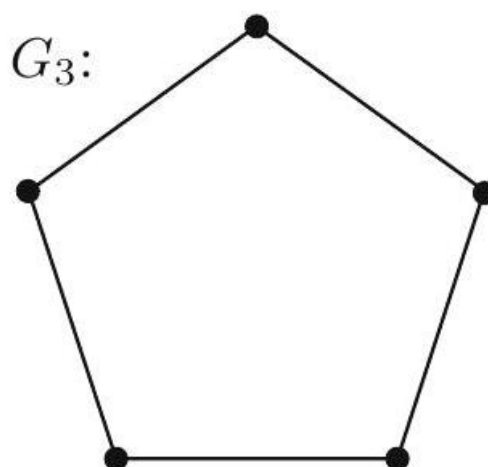
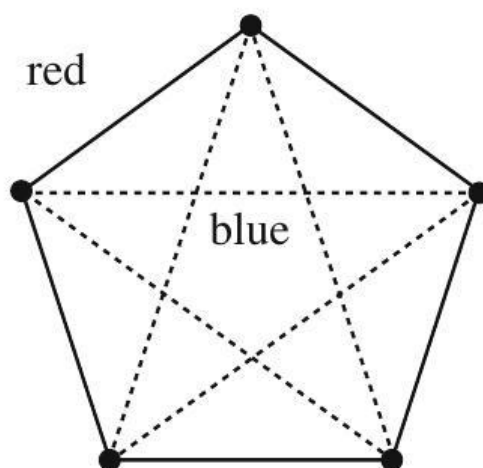
Now with $N < 2^{\frac{k}{2}}$ and $k \geq 4$, using $\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{2^{k-1}}$ for $k \geq 2$ (see page 14), we have

$$\binom{N}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq \frac{N^k}{2^{k-1}} 2^{-\binom{k}{2}} < 2^{\frac{k^2}{2} - \binom{k}{2} - k + 1} = 2^{-\frac{k}{2} + 1} \leq \frac{1}{2}$$

Hence $p_R < \frac{1}{2}$, and by symmetry $p_B < \frac{1}{2}$ for the probability of some k vertices with all edges between them colored blue. We conclude that $p_R + p_B < 1$ for $N < 2^{\frac{k}{2}}$, so there must be a coloring with no red or blue K_k , which means that K_N does not have property (k, k) .

Of course, there is quite a gap between the lower and the upper bound for $R(k, k)$. Still, as simple as this Book Proof is, no lower bound with a better exponent has been found for general k in the more than sixty years since Erdős' result. In fact, no one has been able to prove a lower bound of the form $R(k, k) > 2^{(\frac{1}{2} + \varepsilon)k}$ nor an upper bound of the form $R(k, k) < 2^{(2 - \varepsilon)k}$ for a fixed $\varepsilon > 0$. The most spectacular advance in recent years is due to David Conlon, who proved an upper bound of the form $\frac{4^k}{k^{\omega(k)}}$, where $\omega(k)$ tends to infinity (albeit very slowly) with k .

Our third result is another beautiful illustration of the probabilistic method. Consider a graph G on n vertices and its chromatic number $\chi(G)$. If $\chi(G)$ is high, that is, if we need many colors, then we might suspect that G contains a large complete subgraph. However, this is far from the truth. Already in the forties Blanche Descartes constructed graphs with arbitrarily high chromatic number and no triangles, that is, with every cycle having length at least 4, and so did several others (see the box on the next page).



Constructing the Mycielski graph

However, in these examples there were many cycles of length 4. Can we do even better? Can we stipulate that there are no cycles of small length and still have arbitrarily high chromatic number? Yes we can! To make matters precise, let us call the length of a shortest cycle in G the girth $\gamma(G)$ of G ; then we have the following theorem, first proved by Paul Erdős.

Triangle-free graphs with high chromatic number

Here is a sequence of triangle-free graphs $G_3, G_4, \dots$ with

$$\chi(G_n) = n.$$

Start with $G_3 = C_5$, the 5-cycle; thus $\chi(G_3) = 3$. Suppose we have already constructed G_n on the vertex set V . Then new graph G_{n+1} has the vertex set $V \cup V' \cup \{z\}$, where the vertices $v' \in V'$ correspond bijectively to $v \in V$, and z is a single other vertex. The edges of G_{n+1} fall into 3 classes: First, we take all edges of G_n ; secondly every vertex v' is joined to precisely the neighbors of v in G_n ; thirdly z is joined to all $v' \in V'$. Hence from $G_3 = C_5$ we obtain as G_4 the so-called Mycielski graph.

Clearly, G_{n+1} is again triangle-free. To prove $\chi(G_{n+1}) = n + 1$ we use induction on n . Take any n -coloring of G_n and consider a color class C . There must exist a vertex $v \in C$ which is adjacent to at least one vertex of every other color class; otherwise we could distribute the vertices of C onto the $n - 1$ other color classes, resulting in $\chi(G_n) \leq n - 1$. But now it is clear that v' (the vertex in V' corresponding to v) must receive the same color as v in this n -coloring. So, all n colors appear in V' , and we need a new color for z .

Theorem 3. For every $k \geq 2$, there exists a graph G with chromatic number $\chi(G) > k$ and girth $\gamma(G) > k$.

The strategy is similar to that of the previous proofs: We consider a certain probability space on graphs and go on to show that the probability for $\chi(G) \leq k$ is smaller than $\frac{1}{2}$, and similarly the probability for $\gamma(G) \leq k$ is smaller than $\frac{1}{2}$. Consequently, there must exist a graph with the desired properties.

- **Proof.** Let $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ be the vertex set, and p a fixed number between 0 and 1, to be carefully chosen later. Our probability space $\mathcal{G}(n, p)$ consists of all graphs on V where the individual edges appear with probability p , independently of each other. In other words, we are talking about a Bernoulli experiment where we throw in each edge with probability p . As an example, the probability $\text{Prob}(K_n)$ for the complete graph is $\text{Prob}(K_n) = p^{\binom{n}{2}}$. In general, we have $\text{Prob}(H) = p^m(1 - p)^{\binom{n}{2} - m}$ if the graph H on V has precisely m edges.

Let us first look at the chromatic number $\chi(G)$. By $\alpha = \alpha(G)$ we denote the independence number, that is, the size of a largest independent set in G . Since in a coloring with $\chi = \chi(G)$ colors all color classes are independent (and hence of size $\leq \alpha$), we infer $\chi\alpha \geq n$. Therefore if α is small as compared to n , then χ must be large, which is what we want.

Suppose $2 \leq r \leq n$. The probability that a fixed r -set in V is independent is $(1 - p)^{\binom{r}{2}}$, and we conclude by the same argument as in Theorem 2

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\alpha \geq r) &\leq \binom{n}{r} (1 - p)^{\binom{r}{2}} \\ &\leq n^r (1 - p)^{\binom{r}{2}} = \left(n(1 - p)^{\frac{r-1}{2}} \right)^r \leq \left(n e^{-p(r-1)/2} \right)^r, \end{aligned}$$

since $1 - p \leq e^{-p}$ for all p .

Given any fixed $k > 0$ we now choose $p := n^{-\frac{k}{k+1}}$, and proceed to show that for n large enough,

$$\text{Prob}\left(\alpha \geq \frac{n}{2k}\right) < \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Indeed, since $n^{\frac{1}{k+1}}$ grows faster than $\log n$, we have $n^{\frac{1}{k+1}} \geq 6k \log n$ for large enough n , and thus $p \geq 6k \frac{\log n}{n}$. For $r := \lceil \frac{n}{2k} \rceil$ this gives $pr \geq 3 \log n$, and thus

$$n e^{-p(r-1)/2} = n e^{-\frac{pr}{2}} e^{\frac{p}{2}} \leq n e^{-\frac{3}{2} \log n} e^{\frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

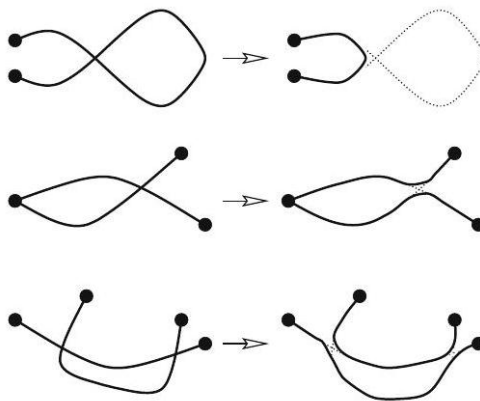
which converges to 0 as n goes to infinity. Hence (3) holds for all $n \geq n_1$. Now we look at the second parameter, $\gamma(G)$. For the given k we want to show that there are not too many cycles of length $\leq k$. Let i be between 3 and k , and $A \subseteq V$ a fixed i -set. The number of possible

i -cycles on A is clearly the number of cyclic permutations of A divided by 2 (since we may traverse the cycle in either direction), and thus equal to $\frac{(i-1)!}{2}$. The total number of possible i -cycles is therefore $\binom{n}{i} \frac{(i-1)!}{2}$, and every such cycle C appears with probability p^i . Let X be the random variable which counts the number of cycles of length $\leq k$. In order to estimate X we use two simple but beautiful tools. The first is linearity of expectation, and the second is Markov's inequality for nonnegative random variables, which says

$$\text{Prob}(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

where EX is the expected value of X . See the appendix to Chapter 17 for both tools. Let X_C be the indicator random variable of the cycle C of, say, length i . That is, we set $X_C = 1$ or 0 depending on whether C appears in the graph or not; hence $EX_C = p^i$. Since X counts the number of all cycles of length $\leq k$ we have $X = \sum X_C$, and hence by linearity

$$EX = \sum_{i=3}^k \binom{n}{i} \frac{(i-1)!}{2} p^i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^k n^i p^i \leq \frac{1}{2} (k-2) n^k p^k,$$



where the last inequality holds because of $np = n^{\frac{1}{k+1}} \geq 1$. Applying now Markov's inequality with $a = \frac{n}{2}$, we obtain

$$\text{Prob}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{EX}{n/2} \leq (k-2) \frac{(np)^k}{n} = (k-2) n^{-\frac{1}{k+1}}.$$

Since the right-hand side goes to 0 with n going to infinity, we infer that $p(X \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{2}$ for $n \geq n_2$.

Now we are almost home. Our analysis tells us that for $n \geq \max(n_1, n_2)$ there exists a graph H on n vertices with $\alpha(H) < \frac{n}{2k}$ and fewer than $\frac{n}{2}$ cycles of length $\leq k$. Delete one vertex from each of these cycles, and let G be the resulting graph. Then $\gamma(G) > k$ holds at any rate. Since G contains more than $\frac{n}{2}$ vertices and satisfies $\alpha(G) \leq \alpha(H) < \frac{n}{2k}$, we find

$$\chi(G) \geq \frac{n/2}{\alpha(G)} \geq \frac{n}{2\alpha(H)} > \frac{n}{n/k} = k,$$

and the proof is finished. $\square$

Explicit constructions of graphs with high girth and chromatic number (of huge size) are known. (In contrast, one does not know how to construct red/blue colorings with no large monochromatic cliques, whose existence is given by Theorem 2.) What remains striking about the Erdős proof is that it proves the existence of relatively small graphs with high chromatic number and girth.

To end our excursion into the probabilistic world let us discuss an important result in geometric graph theory (which again goes back to Paul Erdős) with a stunning Book Proof. Consider a simple graph $G = G(V, E)$ with n vertices and m edges. We want to embed G into the plane just as we did for planar graphs. Now, we know from Chapter 13 - as a consequence of Euler's formula - that a simple planar graph G with $n \geq 3$ vertices has at most $3n - 6$ edges. Hence if m is greater than $3n - 6$, there must be crossings of edges. The crossing number $\text{cr}(G)$ is then naturally defined: It is the smallest number of crossings among all drawings of G , where

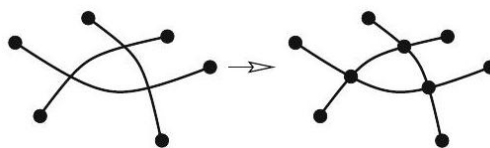
crossings of more than two edges in one point are not allowed. Thus $\text{cr}(G) = 0$ if and only if G is planar.

In such a minimal drawing the following three situations are ruled out:

- No edge can cross itself.
- Edges with a common endvertex cannot cross.
- No two edges cross twice.

This is because in either of these cases, we can construct a different drawing of the same graph with fewer crossings, using the operations that are indicated in our figure. So, from now on we assume that any drawing observes these rules.

Suppose that G is drawn in the plane with $\text{cr}(G)$ crossings. We can immediately derive a lower bound on the number of crossings. Consider the following graph H : The vertices of H are those of G together with all crossing points, and the edges are all pieces of the original edges as we go along from crossing point to crossing point.



The new graph H is now plane and simple (this follows from our three assumptions!). The number of vertices in H is $n + \text{cr}(G)$ and the number of edges is $m + 2\text{cr}(G)$, since every new vertex has degree 4. Invoking the bound on the number of edges for plane graphs we thus find

$$m + 2\text{cr}(G) \leq 3(n + \text{cr}(G)) - 6$$

that is,

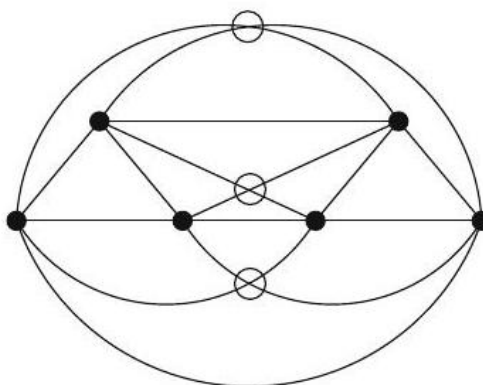
$$\text{cr}(G) \geq m - 3n + 6 \quad (4)$$

As an example, for the complete graph K_6 we compute

$$\text{cr}(K_6) \geq 15 - 18 + 6 = 3$$

and, in fact, there is an drawing with just 3 crossings.

The bound (4) is good enough when m is linear in n , but when m is larger compared to n , then the picture changes, and this is our theorem.



Theorem 4. Let G be a simple graph with n vertices and m edges, where $m \geq 4n$. Then

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}$$

The history of this result, called the crossing lemma, is quite interesting. It was conjectured by Erdős and Guy in 1973 (with $\frac{1}{64}$ replaced by some constant c). The first proofs were given by Leighton in 1982 (with $\frac{1}{100}$ instead of $\frac{1}{64}$) and independently by Ajtai, Chvátal, Newborn and Szemerédi. The crossing lemma was hardly known (in fact, many people thought of it as a conjecture long after the original proofs), until László Székely demonstrated its usefulness in

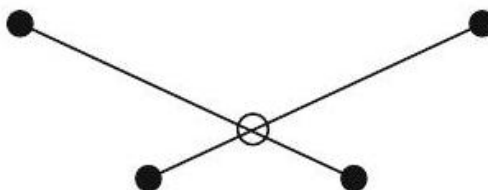
a beautiful paper, applying it to a variety of hitherto hard geometric extremal problems. The proof which we now present arose from e-mail conversations between Bernard Chazelle, Micha Sharir and Emo Welzl, and it belongs without doubt in The Book.

- Proof. Consider a minimal drawing of G , and let p be a number between 0 and 1 (to be chosen later). Now we generate a subgraph of G , by selecting the vertices of G to lie in the subgraph with probability p , independently from each other. The induced subgraph that we obtain that way will be called G_p .

Let n_p, m_p, X_p be the random variables counting the number of vertices, of edges, and of crossings in G_p . Since $\text{cr}(G) - m + 3n \geq 0$ holds by (4) for any graph, we certainly have

$$E(X_p - m_p + 3n_p) \geq 0$$

Now we proceed to compute the individual expectations $E(n_p)$, $E(m_p)$ and



$E(X_p)$. Clearly, $E(n_p) = pn$ and $E(m_p) = p^2m$, since an edge appears in G_p if and only if both its endvertices do. And finally, $E(X_p) = p^4 \text{cr}(G)$, since a crossing is present in G_p if and only if all four (distinct!) vertices involved are there.

By linearity of expectation we thus find

$$0 \leq E(X_p) - E(m_p) + 3E(n_p) = p^4 \text{cr}(G) - p^2m + 3pn,$$

which is

$$\text{cr}(G) \geq \frac{p^2m - 3pn}{p^4} = \frac{pm - 3n}{p^3}. \quad (5)$$

Here comes the punch line: Set $p := \frac{4n}{m}$ (which is at most 1 by our assumption), then $pm = 4n$, and (5) becomes

$$\text{cr}(G) \geq \frac{n}{p^3} = \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2},$$

and this is it. $\square$

Paul Erdős would have loved to see this proof.

References

- [1] M. Ajtai, V. Chvátal, M. Newborn & E. Szemerédi: Crossing-free subgraphs, *Annals of Discrete Math.* 12 (1982), 9-12.
- [2] N. Alon & J. Spencer: *The Probabilistic Method*, Third edition, WileyInterscience 2008.
- [3] D. Conlon: A new upper bound for diagonal Ramsey numbers, *Annals Math.* 170 (2009), 941-960.
- [4] P. Erdős: Some remarks on the theory of graphs, *Bulletin Amer. Math. Soc.* 53 (1947), 292-294.
- [5] P. Erdős: Graph theory and probability, *Canadian J. Math.* 11 (1959), 34-38.
- [6] P. Erdős: On a combinatorial problem I, *Nordisk Math. Tidskrift* 11 (1963), 5-10.
- [7] P. Erdős & R. K. Guy: Crossing number problems, *Amer. Math. Monthly* 80 (1973), 52-58.
- [8] P. Erdős & A. Rényi: On the evolution of random graphs, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* 5 (1960), 17-61.
- [9] T. Leighton: *Complexity Issues in VLSI*, MIT Press, Cambridge MA 1983.
- [10] J. Radhakrishnan & A. SRINIVASAN: Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring, *Random Struct. Algorithms* 16 (2000), 4-32.

[11] L. A. SzKely: Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry, *Combinatorics, Probability, and Computing* 6 (1997), 353-358.

Обсудим введения в другие разделы математики, использующие некоторые конструкции анализа.

(вряд ли буду это двигать, пока не будет особой потребности)

23 Catalog of selected rows, integrals

(для полноты - см. известный всем Грандштейн Рыжик, тут укажу какую-то его часть, которая более полезная, чем другие его части)

GR-3.751 Trigonometric and algebraic functions

1. Найти $\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)dx}{\sqrt{x+\beta}}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)dx}{\sqrt{x+\beta}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} [\cos(a\beta) - \sin(a\beta) + 2C(\sqrt{a\beta}) \sin(a\beta) - 2S(\sqrt{a\beta}) \cos(a\beta)]$$

$$[a > 0, |\arg \beta| < \pi]$$

2. Найти $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)dx}{\sqrt{x+\beta}}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)dx}{\sqrt{x+\beta}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} [\cos a\beta + \sin(a\beta) - 2C(\sqrt{a\beta}) \cos(a\beta) - 2S(\sqrt{a\beta}) \sin(a\beta)]$$

$$[a > 0, |\arg \beta| < \pi].$$

GR-3.761 Trigonometric and power functions

$$(\Delta \equiv \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, k' \equiv \sqrt{1 - k^2})$$

1.

$$\int_0^1 x\mu - 1 \sin(ax)dx = \frac{-1}{2\mu} [{}_1F_1(\mu; \mu + 1; ba) - {}_1F_1(\mu; \mu + 1; -ia)]$$

$$[a > 0, \operatorname{Re} \mu > -1].$$

2.

$$\int_u^{\infty} x^{\mu-1} \sin x dx = \frac{i}{2} [e^{-\frac{\pi}{2}i\mu} \Gamma(\mu, iu) - e^{\frac{\pi}{2}i\mu} \Gamma(\mu, -iu)]$$

$$[\operatorname{Re} \mu > -1]$$

3.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x^{2n}} dx = \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!} \left[\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(2n-k-1)!}{a^{2n-k}} \sin \left(a + (k-1)\frac{\pi}{2} \right) + + (-1)^n \operatorname{ci}(a) \right]$$

$$[a > 0].$$

4.

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \sin(ax) dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}} \sin \frac{\mu\pi}{2} = \frac{\pi \sec \frac{\mu\pi}{2}}{2a^{\mu} \Gamma(1-\mu)}$$

$$[a > 0; 0 < |\operatorname{Re} \mu| < 1].$$

GR-2.581 Trigonometric and power functions

$$(\Delta \equiv \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, k' \equiv \sqrt{1 - k^2})$$

$$1. \int \sin^m x \cos^n x \Delta^r dx =$$

(?? даже хз, как подобраться вообще к этому??? укажу мб решение потом.)

Ответ:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x \Delta^r dx &= \frac{1}{(m+n+r)k^2} \left\{ \sin^{m-3} x \cos^{n+1} x \Delta^{r+2} + [m+n-2(m+r-1)k^2] \times \right. \\ &\quad \times \int \sin^{m-2} x \cos^n x \Delta^r dx - (m-3) \int \sin^{m-4} x \cos^n x \Delta^r dx \Big\} = \\ &= \frac{1}{(m+n+r)k^2} \left\{ \sin^{m+1} x \cos^{n-8} x \Delta^{r+2} + [(n+r-1)k^2 - (m+n-2)k'^2] \times \right. \\ &\quad \times \int \sin^m x \cos^{n-2} x \Delta^r dx + (n-3)k'^2 \int \sin^m x \cos^{n-4} x \Delta^r dx \Big\} \\ &\quad [m+n+r \neq 0] \end{aligned}$$

При $r = -3$

$$2. \int \frac{\sin^m x \cos^n x}{\Delta^2} dx = \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{k^2 \Delta} - \frac{m-1}{k^2} \int \frac{\sin^{m-2} x \cos^n x}{\Delta} dx + \frac{n-1}{k^2} \int \frac{\sin^m x \cos^{n-2} x}{\Delta} dx.$$

При $r = -5$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{\sin^m x \cos^n x}{\Delta^5} dx &= \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{3k^2 \Delta^3} - \\ &\quad - \frac{m-1}{3k^2} \int \frac{\sin^{m-2} x \cos^n x}{\Delta^2} dx + \frac{n-1}{3k^2} \int \frac{\sin^m x \cos^{n-2} x}{\Delta^3} dx. \end{aligned}$$

23.0.1 Minimum catalogue of special amounts (!!?)**GR-0.245 Sums of quantities inverse to factorials**

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = 2,71828\dots$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} = 0,36787\dots$
3. $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!} = \frac{1}{e} = 0,36787\dots$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1.$
5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right) = 1,54308\dots$
6. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) = 1,17520\dots$

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2k)!} = \cos 1 = \cos 57^\circ 17' 45'' = 0,54030\dots$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2k-1)!} = \sin 1 = \sin 57^\circ 17' 45'' = 0,84147\dots$

GR-0.245 Sums of quantities inverse to factorials

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} = I_0(2) = 2,27958530\dots$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} = I_1(2) = 1,590636855\dots$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+n)!} = I_n(2).$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^3} = J_0(2) = 0,22389078\dots$

24 Introduction to other areas of mathematics

24.1 Introduction to Differential Geometry

24.1.1 Potentials of first-degree differential forms

application of potentials

тут явные примеры напишу
так ничего и не понял

Theory

В физике существует понятие потенциала силового поля, которое в математических терминах означает поиск функции $u \in C^\infty(M)$ такой, что $df = \alpha$ для некоторой заданной «симы» $\alpha \in \Omega^1(M)$.

При наличии потенциала «работа силы» вдоль гладкой кривой $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ (то есть интеграл формы по кривой в наших терминах) выражается как

$$\int_{\gamma} \alpha = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0))$$

конечно же, это просто одномерная формула Стокса.

Далее мы будем рассматривать интегралы $\int_{\gamma} \alpha$ для кусочно-гладких кривых, определив интеграл как сумму интегралов по кускам.

Более того, на самом деле для корректной работы с такими интегралами достаточно считать кривую (кусочно) один раз непрерывно дифференцируемой, так как выражение (в котором мы переносим форму на координатную карту t)

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\gamma'(t)) dt$$

корректно определено и в этом случае.

Более того, интегрируемую форму α здесь вполне достаточно считать всего лишь непрерывно зависящей от точки, а не бесконечно гладкой.

Theorem is valid.

1.

Необходимы и достаточным условием наличия потенциала у непрерывной $\alpha \in \Omega^1(M)$, для связного многообразия M , является независимость интеграла $\int_{\gamma} \alpha$ от выбора кусочно-гладкой кривой γ , соединяющей две фиксированные точки.

Эквивалентно, необходимым и достаточным условием наличия потенциала является равенство нулю интегралов $\int_{\gamma} \alpha$ по всем замкнутым кусочно-гладким кривым.

Доказательство

Необходимость обоих условий очевидна, так как при наличии потенциала интеграл по кривой должен зависеть только от значений потенциала на концах.

Первое условие следует из второго.

Действительно, рассмотрим две кривые γ_1 и γ_2 , у которых совпадают начало и конец.

Определим замкнутую кривую $\gamma_1 \diamond (-\gamma_2)$ (у γ_2 взята противоположная ориентация), тогда

$$\int_{\gamma_1 \diamond (-\gamma_2)} \alpha = 0$$

означает, что

$$\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = 0$$

Покажем достаточность первого условия.

В связном многообразии M можно фиксировать одну точку p , выбрать какое-то значение $u(p)$ и положить по определению

$$u(q) = u(p) + \int_p^q \alpha$$

используя то, что интеграл в правой части не зависит от выбора кривой из p в q .

Тогда в локальных координатах, в которых

$$\alpha = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$$

для нахождения производной $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ нам надо изучить приращение u при замене точки $q = (q_1, \dots, q_i, \dots, q_n)$ на $q' = (q_1, \dots, q'_i, \dots, q_n)$.

Будем считать, что путь из p в q' идёт сначала из p в q , а потом из q в q' по отрезку.

Но тогда находя интеграл по отрезку вдоль i -й координатной оси мы получим

$$u(q') - u(q) = \int_q^{q'} \alpha = \int_0^1 a_i(q + (q' - q)t) (q'_i - q_i) dt$$

откуда ясно, что $\frac{\partial u}{\partial x_i}(q) = a_i(q)$.

Иначе говоря, $du = \alpha$. Условия существования потенциала в предыдущей теореме не являются практически проверяемыми.

Конечно, практически проверяемым необходимым условием существования потенциала у $\alpha \in \Omega^1(M)$ является $d\alpha = 0$, так как это просто $d(du) = 0$.

Можно привести пример, когда оно не является достаточным.

Например, в открытой

области $\bar{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ положим

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Легко проверить, что $d\alpha = 0$, но интеграл α по стандартной единичной окружности равен 2π , что противоречит наличию потенциала.

Этот пример неприятен с точки зрения нахождения потенциала дифференциальной формы, но из него есть позитивные следствия, которые приведены в виде задач.

Задача 7.2 (Порядок точки относительно кривой).

Для замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, не проходящей через начало координат, обозначим порядок начала координат относительно кривой γ

$$w(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

докажите, что это число не меняется при непрерывных деформациях кривой, при которых она не проходит через начало координат.

докажите, что это число корректно определено и для непрерывных замкнутых кривых, которые не проходят через начало координат.

||

Выражение под интегралом локально является полным дифференциалом (используйте арктангенс), что позволяет доказать инвариантность при непрерывных деформациях и определить число для непрерывных кривых.

||

Problem

.3.

докажите, что порядок точки относительно кривой является целым.

||

Если кривая не приближается к началу координат ближе чем на ε , то её равномерное приближение ломаной с точностью $\varepsilon/2$ не меняет порядка точки относительно кривой.

для ломаной же можно с помощью мокальной первообразной интерпретировать вклад каждого её отрезка в порядок точки и смысл суммы этих вкладов.

||

Problem

.4.

докажите, что порядок начала координат относительно не проходящей через него нечётной (как отображение $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ со свойством $\gamma(-u) = -\gamma(u)$) кривой является нечётным целым числом.

||

Посмотрите на определяющий порядок интеграл по половине нечётной кривой.

||

Problem

.5.

Пусть гладкая кривая на плоскости замкнута и имеет всюду ненулевую скорость.

докажите, что интеграл кривизны (взятой со знаком)

$$\int_{\gamma} k(s) ds$$

по натуральному параметру является целым числом, умноженным на 2π .

||

Посмотрите на скорость этой кривой и порядок нуля относительно скорости.

||

Jordan's lemma for piecewise-smooth curves

.6.

кусочно-гладкая кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две связные части, внутреннюю и внешнюю.

||

Зафиксируем кривую и будем менять точку p , для которой мы смотрим её порядок относительно кривой.

Проверьте, что порядок не меняется, если точка p движется, не пересекая кривую и меняется на ± 1 , когда точка p пересекает кривую в её гладкой точке.

На основе этого поймите, как определить внутреннюю и внешнюю части плоскости относительно кривой.

||

Лемма Жордана для непрерывных кривых

докажите, что замкнутая непрерывная кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две связные части, внутреннюю и внешнюю.

||

В этой задаче надо очень аккуратно приближать непрерывную кривую ломаными.

||

Вернёмся к вопросу нахождения потенциала дифференциальной формы первой степени.

Формула Стокса вместе с теоремой 7.1 показывают, что достаточным условием для нахождения потенциала $\alpha \in \Omega^1(M)$, у которой $d\alpha = 0$, является возможность на

всякую замкнутую гладкую кривую γ натянуть кусочно-гладкую двумерную поверхность $S \subset M$ (на самом деле у неё даже допускаются самопересечения, если мы интерпретируем интегралы в формуле Стокса как интегралы обратных образов) так, чтобы γ оказалась её краем, то есть $\gamma = \partial S$.

В этом случае мы получаем

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_S d\alpha = 0$$

и наличие потенциала по теореме 7.1.

Условие натягивания поверхности на контур как на край обычно называется поверхностная односвязность многообразия.

Можно убедиться, что поверхностная односвязность следует из обычной односвязности, которая означает возможность стянуть всякую замкнутую кривую непрерывно в точку (то есть устроить непрерывную гомотопию между параметризацией кривой и постоянным отображением).

Понятие гомотопии поясняется в следующем разделе.

24.1.2 Primordial differential forms and cohomology of de Rham.

Приведённые выше примеры наводят на мысль, что вопрос о нахождении β , такой что $d\beta = \alpha$, для некоторой $\alpha \in \Omega^k(M)$, при выполнении условия $d\alpha = 0$, имеет топологический характер.

Например, для дифференциальных форм на таком «топологически простом» пространстве, как $\mathbb{R}^n$, мы ожидаем, что задача нахождения «первообразной» дифференциальной формы любой положительной степени всегда имеет решение, если ко-

нечно $d\alpha = 0$.

Для лучшего понимания этих вопросов читателю будет полезно изучить стандартные учебники по топологии типа [11], а в этом разделе мы продемонстрируем некоторые базовые инструменты и понятия.

Введём некоторую терминологию:

Определение

Дифференциальная форма $\alpha \in \Omega^k(M)$ называется замкнутой, если $d\alpha = 0$.
Она называется точной, если для некоторой $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ оказывается $d\beta = \alpha$.

Problem

.9.

Докажите, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму
??? - точная форма.

||
||

Используйте правило Лейбница для внешнего произведения.

Problem

.10.

Пусть M - многообразие, а $N \subset M$ - некоторое его подмногообразие.

Верно ли, что ограничение замкнутой $\alpha \in \Omega^*(M)$ на N является замкнутой формой?

Верно ли, что ограничение точной формы $\alpha \in \Omega^*(M)$ на N является точной формой?

||

Используйте тот факт, что ограничение формы на подмногообразие коммутирует с внешним дифференцированием.

||

Далее мы построим некоторую теорию, позволяющую устанавливать точность замкнутой формы в некоторых случаях.

Начнём с важного отношения эквивалентности для гладких отображений:

Определение

Определение 7.11.

два отображения $h_0, h_1 : M \rightarrow N$ гладко гомотопны, если существует гладкое отображение цилиндра

$$h : M \times [0, 1] \rightarrow N,$$

$$\text{такое что } h_0(x) = h(x, 0) \text{ и } h_1(x) = h(x, 1).$$

Цилиндр, декартово произведение многообразия M на отрезок, является топологическим пространством, которое локально устроено как произведение открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ на отрезок.

Можно проверить, что если M было многообразием без края, то $M \times [0, 1]$ будет многообразием с краем $M \times \{0, 1\}$.

Неформально говорят, что в определении гомотопии отображение h_0 гладко деформируется в отображение h_1 с помощью семейства отображений $h_t = h(\cdot, t)$, гладко зависящего от t .

Гомотопия между отображениями - это наиболее грубое отношение эквивалентности между ними.

Обычно рассматриваются непрерывные гомотопии, но мы работаем с гладкими многообразиями и будем использовать гладкие гомотопии.

На самом деле с помощью техники сглаживания можно показать, что если два гладких отображения непрерывно гомотопны, то они и гладко гомотопны.

При этом (и во многих других построениях) полезно считать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ в гомотопии выполнялось $h(x, t) = h(x, 0)$ при $t < \varepsilon$ и $h(x, t) = h(x, 1)$ при $t > 1 - \varepsilon$.

Действительно, для этого надо определить новую гомотопию через старую как $h'(x, t) = h(x, \varphi(t))$, где бесконечно гладкая функция $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ равна 0 при $t \leq \varepsilon$ и равна 1 при $t \geq 1 - \varepsilon$.

Problem

.12.

Докажите, что гладкая гомотопность является отношением эквивалентности между гладкими отображениями многообразий.

||

Проверьте транзитивность, определив ымя данных гомотопий $h_1(x, t)$ и $h_2(x, t)$ при условии $h_1(x, 1) \equiv h_2(x, 0)$ новую гомотопию $h_3(x, t)$, равную $h_1(x, 2t)$ при $t \leq 1/2$ и $h_2(2t - 1)$ при $t \geq 1/2$.

Обоснуйте её гладкость.

||

Problem

.13.

Докажите, что гомотопность замкнутой кривой $\gamma : S^1 \rightarrow M$ отображению S^1 в одну точку фактически означает возможность непрерывно продолжить отображение γ на единичный круг, получив непрерывное отображение $h : B^2 \rightarrow M$.

||

Подумайте, как из циминдра $S^1 \times [0, 1]$ сделать круг.

||

Следующее утверждение показывает, как отличаются обратные образы дифференциальной формы при двух гомотопных друг другу отображениях.

Цепная гомотопия для гладких отображений и дифференциальных форм**Теорема**

7.14 (Цепная гомотопия для гладких отображений и дифференциальных форм).

Если два отображения $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ гладко гомотопны, то для любой дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^k(N)$ выполняется

$$f_1^* \alpha - f_0^* \alpha = H(d\alpha) + d(H(\alpha))$$

для некоторой линейной операции $H : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$.

Доказательство

Рассмотрим форму $h^* \alpha$ на цилиндре $M \times [0, 1]$, на самом деле операция H будет по сути происходить на цилиндре и заключаться в некотором интегрировании $h^* \alpha$ по переменной t .

Для форм, меняющихся на dt , положим

$$I(dt \wedge \beta(x, t)) = \int_0^1 \beta(x, t) dt$$

а на формах, не меняющихся на dt , положим $I(\beta(x, t)) = 0$.

Получается операция $I : \Omega^k(M \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$, так как результат интегрирования уже не будет зависеть от t и не будет делиться на dt .

Посмотрим, как действует $Id + dI$ на формы, делящиеся на dt

$$dI(dt \wedge \beta(x, t)) = d \int_0^1 \beta(x, t) dt = d_x \int_0^1 \beta(x, t) dt = \int_0^1 d_x \beta(x, t) dt$$

где через d_x обозначен модифицированный дифференциал, который дифференцирует только по координатам M , но не дифференцирует по переменной t .

Мы воспользовались здесь дифференцированием под знаком интеграла.

Далее,

$$I(d(dt \wedge \beta(x, t))) = - \int_0^1 d_x \beta(x, t) dt = - \int_0^1 d_x \beta(x, t) dt$$

То есть $Id + dI$ даёт нуль на формах, делящихся на dt .

Посмотрим теперь, как $Id + dI$ действует на форму $\beta(x, t)$, не делящуюся на dt :

$$dI(\beta) = 0$$

$$I(d\beta) = I\left(dt \wedge \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial t}\right) + I(d_x \beta(x, t)) = \int_0^1 \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial t} dt = \beta(x, 1) - \beta(x, 0).$$

В итоге только для формы β , не делящейся на dt , мы имеем ненулевое значение

$$I(d\beta(x, t)) + d(I(\beta(x, t))) = \beta(x, 1) - \beta(x, 0)$$

равенство понимается в том смысле, что в левой части стоят формы, не зависящие от t и не делящиеся на dt , которые можно считать дифференциальными формами на M .

Иначе можно сказать, что $Id + dI$ от любой формы $\alpha \in \Omega^k(M \times [0, 1])$ даёт форму на M , являющуюся разностью $i_1^* \alpha - i_0^* \alpha$, где $i_0, i_1 : M \rightarrow M \times [0, 1]$ - это вложения нижнего и верхнего края цилиндра в цилиндр.

Утверждение теоремы теперь следует через рассмотрение f_1 и f_0 как композиций

$$f_0 = h \circ i_0, \quad f_1 = h \circ i_1,$$

и $H = I \circ h^*$.

Определение

Определение 7.15.

Если две формы α_1, α_2 отличаются на $d\beta$ (точную форму), то говорят, что α_1 и α_2 гомологины.

Напомним, что при определении интеграла формы с компактным носителем (и в формуле Стокса) мы обнаружили, что для гомологичных форм интегралы совпадают (но правда тогда гомологичность тоже была с компактным носителем).

Замкнутые формы с точностью до гомологичности дают полезные векторные пространства:

Определение

Определение 7.16.

Когомологии де Рама гладкого многообразия M - это факторпространства

$$H_{DR}^k(M) = (\ker d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)) / d\Omega^{k-1}(M)$$

В степени 0 в этом определении мы считаем $d\Omega^{-1}(M)$ нулевым пространством и на самом деле рассматриваем функции $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, такие что $df = 0$ - то есть локально постоянные функции.

Отсюда следует, что $H_{DR}^0(M)$ - это векторное пространство той размерности, сколько компонент связности у многообразия M , при конечном количестве компонент, а при бесконечном количестве компонент - Авоиственное к векторному пространству размерности, равной числу компонент.

По сути когомологии де Рама измеряют, насколько задача нахождения первообразной замкнутой формы может оказаться нерешаемой.

Если $H_{DR}^k(M) = 0$, то для всех замкнутых форм степени k на M найдутся первообразные, то есть все они будут точными.

Для гладкого отображения $f : M \rightarrow N$ и некоторой формы $\alpha \in \Omega^k(N)$ при условии $d\alpha = 0$ оказывается верным $df^* \alpha = 0$.

При условии $\alpha = d\beta$ для некоторой $\beta \in \Omega^{k-1}(N)$ оказывается верно $f^* \alpha = df^* \beta$.

Следовательно, всякое гладкое отображение f порождает отображение $f^* : H_{DR}^k(N) \rightarrow H_{DR}^k(M)$.

Из теоремы о цепной гомотопии выводится важное свойство этого отображения: Следствие 7.17.

Если два отображения $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ гладко гомотопны и для некоторой $\alpha \in \Omega^k(N)$ оказалось, что $d\alpha = 0$, то найдётся $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$, такая что $f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = d\beta$.

Следовательно $f_1^*\alpha$ и $f_0^*\alpha$ гомологичны, иначе говоря, отображения $f_0^*, f_1^* : H_{DR}^k(N) \rightarrow H_{DR}^k(M)$ совпадают.

Доказательство

Достаточно взять цепную гомотопию H и положить $\beta = H(\alpha)$. Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама позволяет их посчитать в некоторых ситуациях, которые не сложны, но полезны на практике.

Лемма Пуанкаре

$$H_{DR}^k(\mathbb{R}^n) = 0 \text{ при } k \neq 0 \text{ и } H_{DR}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}.$$

Доказательство

Легко построить гомотопию между тождественным отображением $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и отображением f всего $\mathbb{R}^n$ в начало координат.

При этом id^* даёт тождественное отображение когомологий де Рама на себя, а f^* отображает функции в константы (их значение в нуле), обнуляя дифференциальные формы положительных степеней.

Так как оба отображения в когомологиях действуют одинаково, то когомологии положительной степени должны быть равны нулю, а нулевой степени - совпадать с одномерным пространством констант.

лемма де Рама с тем же доказательством верна для всякой выпуклой области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ то есть по сути она означает, что задача поиска первообразной для замкнутой формы всегда имеет решение локально.

Глобальная ситуация может отличаться, как например в рассмотренном выше примере с формами первой степени на плоскости с выброшенным началом координат.

Название «когомологии» возникло из того, что когомологии (например, де Рама) являются двойственными к гомологиям $H_*(M; \mathbb{R})$.

В первом (и не вполне корректном) приближении k -мерные гомологии M можно рассматривать как вложенные компактные ориентированные k -мерные подмногообразия M без края.

Отношение гомологичности двух таких подмногообразий Z_0, Z_1 (опять таки в первом приближении) можно рассматривать как возможность найти $(k+1)$ -мерное вложенное ориентированное компактное подмногообразие с краем W , для которого ∂W является объединением Z_0 и Z_1 , причём ∂W даёт на Z_1 правильную ориентацию, а на Z_0 - обратную.

При этом двойственность между гомологиями и когомологиями даёт интегрирование формы по подмногообразию с учётом формулы Стокса.

Настоящее определение гомологий отличается от приведённого выше наброска следующими моментами: а) рассматриваются не только подмногообразия, но и их формальные комбинации с действительными (или целыми) коэффициентами; б) вместо вложений подмногообразий рассматриваются произвольные отображения многообразий в данное; в) у многообразий приходится разрешить некоторую негладкость (иначе мы определим не гомологии, а бордизмы - это как раз существенный момент, который мы не будем далее обсуждать и отсылаем читателя к любому учебнику по алгебраической/гомотопической топологии).

Важный факт заключается в том, что гомологии (и когомологии) компактного многообразия (возможно с краем) оказываются конечномерными векторными пространствами (или конечно порождёнными группами), и таким образом представляют некоторую информацию о его топологии в конечном и обычно явно вычислимом виде.

Вычислениями мы здесь заниматься не будем и отсылаем читателя к стандартному учебнику [11].

Problem

.19.

Придумайте форму $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, у которой $d\alpha = 0$ и для которой не существует $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, такой что $d\beta = \alpha$.

||

Постарайтесь придумать замкнутую α так, чтобы её интеграл по единичной сфере был ненулевым.

Тогда отсутствие «первообразной» будет следовать из формулы Стокса.

||

Problem

.20.

Докажите, что при условии $d\alpha = 0$ для $\alpha \in \Omega^1(M)$ интеграл по кривой $\int_{\gamma} \alpha$ можно определить для непрерывных кривых без требования дифференцируемости.

||

Утверждение по сути локально, поэтому можно работать в $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и считать, что $\alpha = du$.

Тогда интеграл можно определить как разность потенциалов в конце и в начале.

||

Problem

.21.

* докажите, что для произвольной $\alpha \in \Omega^1(M)$ можно корректно определить интеграл по не обязательно дифференцируемой кривой γ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию Гёльдера

$$|\gamma(t') - \gamma(t'')| \leq C |t' - t''|^\alpha$$

с показателем $\alpha > 1/2$.

||

Приближайте кривую всё более мелко вписанными в неё ломаными и докажите, что интегралы по ломаным составляют фундаментальную последовательность.

||

Problem

.22.

* Для не обязательно компактного многообразия без края M рассмотрим дифференциальные формы с компактным носителем $\Omega_c^*(M)$ и определим когомологии де Рама с компактным носителем

$$H_c^k(M) = (\ker d : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M)) / d\Omega_c^{k-1}(M)$$

Докажите, что если $n = \dim M$, M ориентируемо и связно, то $H_c^n(M)$ одномерно.

Что будет, если M связно, но не ориентируемо? Ного M .]

Problem

.23.

** Докажите, что $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq n$ и $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. гомотопия с сохранением компактности носителя возможна для собственных отображений и гомотопий, то есть отображений с компактными прообразами компактов.

Отсюда следует, что морфизм, гомотопный тождественному с помощью гладкой собственной гомотопии.

Один из вариантов дальнейшего рассуждения: вывести гомологичность α с компактным носителем её усреднению по всевозможным вращениям $\mathbb{R}^n$ вокруг начала координат и изучить формы степени k , инвариантные относительно вращений.

||

24.1.3 Critical and regular values, sarah's theorem

мотивация и обзор применений

Theory

Рассматривая гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, мы можем поинтересоваться, для каких значений $y \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = y$ определяет вложенное многообразие.

Теоремы об обратном отображении или о неявной функции гарантируют, что это выполняется в том случае, если во всех точках этого множества дифференциал df не равен нулю.

В более общей формулировке, для m функций, то есть для отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, множество решений системы уравнений $\{f(x) = y\}$ гарантированно будет вложенным $(n-m)$ -мерным многообразием, если в каждой его точке дифференциалы $df_1, \dots, df_m$ будут линейно независимы, или эквивалентно, производная отображения Df будет иметь ранг m .

В качестве примера мы уже накладывали такие ограничения в ситуации поиска условного экстремума.

Мы собираемся установить замечательное свойство - в приведённых примерах при почти всех y выполняется ровно то, что нам нужно, и множество $\{f(x) = y\}$ является вложенным многообразием.

Перейдём к рассуждениям в терминах отображений между многообразиями, так как это не вносит никаких усложнений, но позволяет рассмотреть много разных случаев единообразно.

А именно, будем рассматривать гладкое отображение $f : N \rightarrow M$ между гладкими многообразиями и сделаем определение.

Определение

Определение 7.24.

Точка $x \in N$ называется критической точкой гладкого отображения $f : N \rightarrow M$, если Df_x не является сюръективным.

Если для точки $y \in M$ найдётся критическая $x \in N$, такая что $y = f(x)$, то y называется критическим значением отображения f .

Не критическое значение называется регулярным значением.

Если размерность N равна нулю, а размерность M положительна, то всякая точка N по этому определению оказывается критической.

Если же обе размерности нулевые, то всякая точка отображения будет считаться регулярной.

Также ясно, что при $\dim N < \dim M$ все точки N критические и всё множество $f(N) \subset M$ состоит из критических значений, регулярны только значения из $M \setminus f(N)$.

Для функции $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ критическая точка - это точка, в которой её дифференциал обращается в нуль, именно такие точки мы считаем подозрительными на экстремум.

Problem

.25.

Опишите критические и регулярные значения функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Также нам понадобится определение множества лебеговой меры нуль в произвольном многообразии.

Конечно, формула замены переменных в кратном интеграле показывает, что лебегова мера в общем не инвариантна относительно замены переменных.

Однако свойство множества иметь меру нуль не зависит от криволинейных замен координат (по той же формуле), а значит его можно определить и на произвольном

многообразии, потребовав, чтобы во всякой карте видимая в карте часть этого множества оказывалась множеством меры нуль.

В нульмерном многообразии будем считать множеством лебеговой меры нуль пустое множество.

теорема Сарда: формулировка и доказательство

Теорема 16. (Теорема Сарда).

Для бесконечно гладкого отображения $f : N \rightarrow M$ между многообразиями множество критических значений Σ имеет меру нуль в M , то есть почти все точки m являются регулярными значениями f .

Доказательство

Пусть $\dim N = n$, $\dim M = m$, мы будем применять индукцию по обоим размерностям (иначе говоря, по их сумме), читатель может проверить базу индукции в случае $n = 0$ самостоятельно исходя из приведённых выше комментариев про нульмерный случай.

Мы в основном будем действовать локально.

А именно, для всякой точки $x \in N$ мы хотели бы доказать, что у неё есть окрестность $U \ni x$ такая, что образ множества критических точек из этой окрестности имеет меру нуль в M .

Тогда такие окрестности

покрывают всё многообразие N , из этого покрытия можно выбрать счётное подпокрытие (проверьте это с использованием счётной базы топологии M) и утверждение для всего многообразия следует из счётной аддитивности меры Лебега.

На самом деле малое в процессе доказательства мы будем применять рассуждение со счётностью базы не только к N , но и к его подмножествам.

Множество критических точек $C \subset N$ снабдим системой убывающих замкнутых подмножеств $C \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$, где множество C_k состоит из тех точек $x \in N$, в которых у компонент отображения f обнуляются все частные производные порядка до k включительно (проверьте, что это определение не зависит от системы координат).

Шаг 0: Если $x \notin C$, то у неё есть окрестность $U \ni x$, состоящая полностью из регулярных точек, тогда требуемое утверждение очевидно.

Шаг 1: Если $x \in C \setminus C_1$.

Работая локально мы можем предположить, что одна из производных координатного представления f всё же не обратилась в нуль в точке x , которая нас интересует.

Пусть без ограничения общности компонента отображения f_1 имеет ненулевой дифференциал.

Тогда в некоторой окрестности $U \ni x$ можно сделать замену переменных в N так, чтобы f_1 стала просто одной из координат, тогда отображение будет удовлетворять равенству $y_1 = x_1$.

В таком случае окрестность x отображается с сохранением первой координаты и в каждом слое $x_1 = c$ у нас возникает отдельное

гладкое отображение f_c в слой $y_1 = c$.

Посмотрев на матрицу производных мы можем заключить, что критические точки f содержатся в объединении критических точек f_c во всех слоях.

Применяя предположение индукции мы видим, что критические значения отображения f_c в каждом слое дают множество меры нуль, используя теорему Фубини мы заключаем, что критические значения $f(C \cap U)$ тоже имеют меру нуль.

После первого шага с учётом рассуждения со счётной базой многообразия $N \setminus C_1$ мы уже доказали, что $f(C \setminus C_1)$ имеет меру нуль.

Шаг 2 (на самом деле несколько шагов): Если $x \in C_k \setminus C_{k+1}$.

Пусть в точке x обнулились все k -е производные компонент отображения f , но какая-то $(k+1)$ -я производная не обнулилась.

Тогда без ограничения общности пусть w - какая-то из k -х производных компонент f и её дифференциал не нулевой.

Сделав в некоторой окрестности $U \ni x$ замену координат, можно считать $w = x_1$.

Множество C_k в пересечении с U полностью лежит в гиперплоскости $x_1 = 0$, ведь w там должна обращаться в нуль.

Пусть f_0 - ограничение f на гиперплоскость $\{x_1 = 0\}$.

Тогда тривиально, что $C_k \cap U$ содержится в множестве критических точек f_0 , а образ $f(C_k \cap U)$ - в множестве критических значений f_0 .

По предположению индукции мера критических значений f_0 нулевая, значит мера $f(C_k \cap U)$ - тоже нулевая.

По результатам шага 1 или шага 2 с меньшим значением k , а также с учётом рассуждения со счётной базой многообразия $N \setminus C_k$, мы на самом деле имеем, что образ $f(C \setminus C_k)$ имеет меру нуль и выводим, что образ $f(C \setminus C_{k+1})$ тоже имеет меру нуль.

Теперь после нескольких описанных выше шагов мы уже доказали, что при всяком натуральном k образ множества $C \setminus C_k = (C \setminus C_1) \cup \dots \cup (C_{k-1} \setminus C_k)$ имеет меру нуль.

докажем теперь, что при $k > n/m - 1$ мера множества $f(C_k)$ равна нулю.

Как и ранее, нам достаточно доказать для всякой точки $x \in C_k$ найдётся окрестность $U \ni x$ с нулевой мерой $f(C_k \cap U)$.

В качестве U в какой-то координатной карте возьмём окрестность x с компактным замыканием, на которой $(k+1)$ -е производные f ограничены.

Порежем U на не более $A\varepsilon^{-n}$ кубиков диаметра не более ε (A - некоторая зависящая только от U константа).

Те из них, что пересекаются с C_k , будут иметь образы диаметра не более $B\varepsilon^{k+1}$ (из разложения по формуле Тейлора координат отображения, B - некоторая другая константа, зависящая от U и f).

Следовательно, суммарная

мера образа объединения тех кубиков, которые покрывают C_k , будет не более

$$A\varepsilon^{-n} B^m \varepsilon^{m(k+1)} = AB^m \varepsilon^{m(k+1)-n}$$

Так как $m(k+1) - n > 0$, то при уменьшении ε мы оцениваем меру $f(C_k \cap U)$ сверху сколь угодно малым числом.

Следовательно, $f(C_k \cap U)$ имеет меру нуль, и в целом $f(C_k)$ имеет меру нуль.

В итоге доказано, что мера множества критических значений f равна нулю.

обзор применений теоремы Сарда

Квантования магнитного потока в вихрях Абрикосова.

(??? см КТП)

Связь кванта потока в вихре Абрикосова со степенью отображения многообразий

Володя ее нашел.

Theory

Problem

.27.

В теореме Сарда сначала следовало бы проверить, что множество критических значений измеримо.

докажите, что оно является объединением счётного числа замкнутых множеств.

||

Представьте N в виде объединения счётной последовательности компактных многообразий (с краем), и покажите, что для каждого из них множество критических точек замкнуто, а значит и множество соответствующих критических значений в M - тоже.

||

Из теоремы Сарда следуют важные факты.

Например, при $\dim N < \dim M$ образ $f(N)$ по определению состоит только из критических значений и имеет меру нуль в M .

В случае $\dim N \geq \dim M$ для почти всех точек $y \in M$ множество $f^{-1}(y)$, слой отображения, является замкнутым подмногообразием в N размерности $n - m$ (возможно пустым).

Последнее утверждение следует из того, что локальные координаты около y в композиции с f дают частичные системы координат в любой точке $x \in f^{-1}(y)$ и следовательно слой локально выглядит как $\mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$.

Важный вопрос: как меняется слой при изменении точки y в связном M ? В следующем разделе мы изучаем случай $n = m$, когда слой отображения над регулярным значением является нульмерным многообразием, то есть дискретным набором точек.

А пока предлагаем задачи, которые можно решить без теоремы Сарда, но с её помощью они решаются намного проще.

Problem

.28.

докажите, что множество матриц с единичным детерминантом $SL(n, \mathbb{R})$ является гладким подмногообразием в пространстве матриц $n \times n$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{n^2}$.

||

Рассмотрите положительное регулярное значение функции детерминанта матрицы, масштабируйте множество соответствующих ему матриц.

||

Problem

.29.

докажите, что множество ортогональных матриц $O(n)$ является гладким подмногообразием в пространстве матриц $n \times n$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{n^2}$.

||

Рассмотрите отображение $X \mapsto X^T X$ пространства всех матриц в пространство симметричных положительно полуопределённых матриц и его положительно определённое регулярное значение.

Покажите, что слой над каким-то регулярным значением диффеоморфен слою над единичной матрицей.

||

7.4.

Степень отображения и её применения.

В этом разделе мы определим гомотопический инвариант отображений между многообразиями равных размерностей (с некоторыми дополнительными ограничениями).

Как станет ясно чуть позже, это понятие даёт геометрический взгляд на величины, которые можно (в некоторых случаях) иначе определить с помощью когомологий де Рама.

Определение

Определение 7.30.

Если $f : N \rightarrow M$ - гладкое отображение ориентированных многообразий одной и той же размерности, многообразие N компактно, и y - регулярное значение f , степенью отображения в точке y называется число точек в прообразе $f^{-1}(y)$, для которых якобиан Jf_x положителен минус число точек в прообразе $f^{-1}(y)$, у которых якобиан отрицателен.

В случае отсутствия ориентации хотя бы одного многообразия степень определена по модулю 2 как чётность количества точек в прообразе $f^{-1}(y)$. Обратите внимание, что знак якобиана корректно определён только для отображения между ориентированными многообразиями.

При смене ориентации одного из них на противоположную степень тоже меняет знак.

При забывании ориентации многооб-

разий степень заменяется на свой остаток по модулю два, зачем так делается - станет ясно позднее.

Из условия того, что y - регулярное значение, следует, что множество $f^{-1}(y)$ состоит из изолированных точек (то есть дискретное множество).

В случае компактного конечно.

Также множество $f^{-1}(y)$ окажется конечным в случае собственного отображения f , то есть отображения, для которого прообраз любого компакта является Компактом.

Далее мы рассматриваем случай компактного N , но утверждения остаются верными для некомпактных N , собственных отображений и собственных гомотопий между отображениями.

Лемма 7

.31.

Если $f : N \rightarrow M$ - гладкое отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности, многообразие N компактно, и y - регулярное значение независимости количества точек $f^{-1}(y')$ от y' при $y' \in U$.

Доказательство

Пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_N\}$, это конечное множество, так как оно дискретно и компактно, в том числе оно может быть пустым.

По теореме об обратном отображении у каждого x_i есть окрестность V_i , такая что f в сужении на неё является диффеоморфизмом на $U_i \ni y$.

Возьмём в качестве U пересечение всех U_i и обозначим. Предположим, что прообраз $f^{-1}(U)$ содержит что-то кроме объединения множеств W_i .

Если это так, попытаемся уменьшить U и соответственно W_i так, чтобы прообраз $f^{-1}(U)$ оказался равен точно $\bigcup_i W_i$.

Если так не получается, то мы получим последовательность точек $(y_k) \subset M$ и $(\xi_k) \subset N$, так что $f(\xi_k) = y_k, y_k \rightarrow y$, но $\xi_k \notin \bigcup_i W_i$.

Переходя к подпоследовательности мы можем считать, что $\xi_k \rightarrow \xi \in N$ из компактности.

Но тогда получается, что $\xi \notin \bigcup_i W_i$, и значит ξ не равно ни одному из $x_1, \dots, x_N$, однако же по непрерывности $f(\xi) = y$ - противоречие.

Итак, на самом деле для достаточно малой окрестности U её прообраз равен несвязному объединению открытых множеств $\bigcup_i W_i$, для каждого W_i отображение f устанавливает его диффеоморфизм на U .

Следовательно, структура прообраза точки $y' \in U$ не зависит от y' , все такие y' регулярны, знаки якобианов в прообразе y' не меняются по непрерывности, если мы выбрали U связной, и степень отображения во всех $y' \in U$ тоже одна и та же.

Problem

.32.

докажите, что без предположения о компактности N или собственности отображения f предыдущая лемма неверна.

||

Постройте контрпример из одномерных многообразий и отображений между ними.

||

Теорема

.33.

Пусть многообразие N компактно без края, M - не обязательно компактно без края, $h : N \times [0, 1] \rightarrow M$ - гладкая гомотопия, а точка $y \in M$ такова, что она является регулярным значением для h_0 и h_1 .

Тогда степени отображений h_0 и h_1 в точке y равны.

Если оба многообразия ориентированы, то степень считается со знаком, иначе она считается как её абсолютная величина.

Доказательство

По лемме точку y можно шевелить в рамках какой-то её окрестности, оставляя её регулярной для h_0 и h_1 и не меняя структуру прообразов $h_0^{-1}(y)$ и $h_1^{-1}(y)$, в частности не меняя степени.

Тогда сдвинем точку y в точку, являющуюся регулярным значением для h как отображения $N \times [0, 1] \rightarrow M$.

Более того, следуя замечанию после определения 7.11, нам будет удобно считать гомотопию гладко определённой при всех t , но не зависящей от t в диапазоне $t \leq 0$ и в диапазоне $t \geq 1$.

Тогда мы сможем считать

y также регулярным значением для расширенной гомотопии $h : N \times \mathbb{R} \rightarrow M$.

Прообраз $h^{-1}(y)$ в $N \times \mathbb{R}$ будет одномерным многообразием, а его пересечение с $N \times [0, 1]$ тогда будет одномерным компактным многообразием с краем (край возникнет на пересечении с $t = 0$ и $t = 1$), к тому же несущим соответствующую ориентацию, если у нас были ориентации на N и на M .

В локальных координатах $x_1, \dots, x_n, t$, где $x_1, \dots, x_n$ подняты с N , одномерное многообразие $h^{-1}(y)$ будет перпендикулярно $N \times \{0\}$ и $N \times \{1\}$ в тех его точках, где t равно 0 или 1, так как гомотопия не зависит от t при $t \leq 0$ или $t \geq 1$.

Одномерное компактное многообразие является набором отрезков и окружностей (см. задачу 6.111), то есть кривых в $N \times [0, 1]$.

Окружности не пересекают край $N \times [0, 1]$ и не вносят вклада в определение степени.

Концы отрезков (концов всего чётное число) в точности дают все точки в $h_0^{-1}(y)$ и $h_1^{-1}(y)$.

Это уже доказывает равенство степени по модулю два.

При наличии ориентации можно взять параметр $s \in [0, 1]$ на отрезке $S \subseteq f^{-1}(y)$ за одну координату и продолжить её гладко на окрестность S (читатель может аккуратно обосновать продолжение через разбиение единицы).

Аругие n координат $y_1, \dots, y_n$ вокруг S поднимем с координатной окрестности y в M с помощью отображения h .

Так как отрезок S связан, то либо в любой его точке система координат $s, y_1, \dots, y_n$ является положительной относительно ориентации $N \times [0, 1]$, либо в любой его точке она является отрицательной.

Рассмотрим первый случай без ограничения общности.

По нашему выбору, на конце отрезка, для которого $t = 0$ или $t = 1$, знак якобиана замены $t, x_1, \dots, x_n$ на $s, y_1, \dots, y_n$ положителен, если $x_1, \dots, x_n$ - положительная система координат на N в окрестности этой точки.

Так как производные координат на M по t в этой точке равны нулю (так как у нас гомотопия продолжалась гладко в области $t < 0$ и $t > 1$ и не зависела там от t), то знак якобиана замены $x_1, \dots, x_n$ на $y_1, \dots, y_n$ будет равен знаку $\frac{\partial s}{\partial t}$.

То есть вклад в определение степени h_0 или h_1 в этой точке равен знаку $\frac{\partial s}{\partial t}$.

Следовательно, S либо соединяет точку $h_0^{-1}(y)$ с точкой $h_1^{-1}(y)$ с одинаковым знаком якобиана отображений h_0 и h_1 на концах, либо соединяет пару точек в $h_0^{-1}(y)$ с разными знаками Jh_0 , либо соединяет пару точек в $h_1^{-1}(y)$ с разными знаками якобиана Jh_1 .

Таким образом подсчёт в ориентированном случае тоже даёт равенство степеней. Для доказательства независимости степени от выбора точки $y \in M$ нам понадобится одно дополнительное понятие.

Определение изотопии

Семейство диффеоморфизмов $h_t : N \rightarrow M$ назовём изотопией, если оно гладко зависит и от параметра t , то есть даёт гладкое отображение

$$h : N \times [0, 1] \rightarrow M$$

Как и в определении 7.11, мы опять будем делать техническое предположение, что h_t гладко продолжается на все значения t по формуле $h_t = h_0$ при $t < 0$ и $h_t = h_1$ при $t > 1$.

Иначе можно сказать, что изотопия - это гладкая гомотопия (Определение 7.11) между диффеоморфизмами в классе диффеоморфизмов.

Лемма об изотопии

Если многообразие M связное, без края и $x, y \in M$, то существует изотопия $h_t : M \rightarrow M$ такая, что h_0 является тождественным отображением и $h_1(x) = y$.

Доказательство

достаточно работать в окрестности и показать возможность «сдвинуть» изотопию x в любую близкую точку так, чтобы носитель изотопии (множество точек где $h_t(x) \neq x$) остался в этой окрестности.

Действительно, если изотопия h' сдвигает x в x' , а изотопия h'' сдвигает x' в x'' , то изотопия

$$h_t = h_t'' \circ h_t'$$

равна тождественному отображению при $t = 0$ и сдвигает x в x'' при $t = 1$.

Кроме того, если изотопия h_t сдвигает x в x' , то изотопия

$$h_t' = (h_t)^{-1}$$

равна тождественному отображению при $t = 0$ и сдвигает x' в x при $t = 1$.

Тогда при возможности сдвинуть изотопией любую точку $x' \in N$ в любую точку x'' в некоторой окрестности $U_{x'} \ni x'$, множество точек, в которые можно сдвинуть изотопией данную $x \in M$, открыто.

Множество точек, в которую x нельзя сдвинуть изотопией, тоже открыто.

Из связности M будет следовать, что $x \in M$ можно сдвинуть в любую другую точку M .

В одномерном случае требуемую локальную изотопию можно построить «на картинке» или с помощью явной формулы типа

$$g_t(x) = x + t\varphi(x),$$

где φ имеет маленький носитель около нуля, положительное значение в нуле и производную $|\varphi'(x)| < 1$; пусть $g_1(0) = a \neq 0$.

Для размерности n в окрестности нуля положим

$$h_t(x_1, \dots, x_n) = (g_{t\psi(x_2, \dots, x_n)}(x_1), x_2, \dots, x_n)$$

где $\psi(x_2, \dots, x_n)$ равна единице в нуле и равна нулю за пределами малой окрестности нуля.

Можно проверить, что построенная изотопия сдвигает начало координат в точку $(a, 0, \dots, 0)$, диффеоморфно двигая при этом её окрестность.

Так можно сдвигать начало координат изотопией на немного в любом направлении и окрестность нуля будет таким образом достижима композицией не более n таких изотопий.

Теорема

36.

Степень отображения $f : N \rightarrow M$ для связного многообразия без края M и компактного многообразия без края N мне зависит от выбора регулярного значения в M .

Если оба многообразия ориентированы, то степень считается со знаком, иначе она считается как иѐтность.

Доказательство

Возьмѐм две регулярные точки $y', y'' \in M$ для отображения f .

Рассмотрим, например, изотопию h_t из леммы 7.35 с $h_0(y') = y'$ и $h_1(y'') = y'$.

Построим гомотопию $g_t(x) = h_t \circ f$ и применим теорему 7.33 к g_t и точке y' .

Заметим, что при $t = 0$ мы получаем степень $g_0 = f$ в точке y' , а при $t = 1$ мы получаем степень $h_1 \circ f$ в точке y' , равную степени f в точке $(h_1)^{-1}(y') = y''$.

Последнее верно, так как диффеоморфизм h_t при всех t имеет положительные якобианы во всех точках (при наличии ориентации M), поэтому умножение слева на него не меняет знак степени, а количество точек в прообразе тем более не меняется.

Следовательно, степени f в y' и y'' равны.

Другой способ определить степень отображения (в случае наличия ориентаций) даёт следующая задача:

Problem

.37.

Пусть $f : N \rightarrow M$ - гладкое собственное отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности n , причём M связно.

докажите, что для всякой $\omega \in \Omega_c^n(M)$ выполняется

$$\int_N f^* \omega = \deg f \cdot \int_M \omega$$

||

Посмотрите на ω с носителем в окрестности регулярного значения.

Произвольную ω разбейте в сумму форм с маленькими носителями и с помощью леммы 6.91 сдвиньте их с критических значений на регулярные.

||

Problem

.38.

Пусть $f : N \rightarrow M$ - гладкое отображение компактных ориентированных многообразий с краем одной и той же размерности, причём $f(\partial N) = \partial M$ и M связно.

Докажите, что в этом случае степень корректно определена и $\deg f = \deg f|_{\partial N}$.

||

Можно рассуждать геометрически (заодно доказав вариант утверждения для чётностей при отсутствии ориентации), а можно использовать предыдущую задачу и формулу Стокса, модифицировав рассуждения Для многообразий с краем.

||

Из корректности определения степени отображения и свойства гомотопической инвариантности степени следует, например, что тождественное отображение компактного многообразия без края $\text{id} : N \rightarrow N$ никогда не гомотопно его постоянному отображению в одну точку, так как первое имеет нечётную степень, а второе - нулевую.

Причём оно также не гомотопно непрерывной гомотопией, так как непрерывную гомотопию можно было бы сгладить.

Problem

.39.

* Проверьте возможность приблизить непрерывное отображение между многообразиями $f : N \rightarrow M$ гладкими.

Говорить о равномерном приближении поможет гладкое вложение $M \rightarrow \mathbb{R}^D$, а N для простоты считайте компактным.

||

Сначала сгладьте f как отображение $N \rightarrow \mathbb{R}^D$, сведя вопрос к локальному с помощью разбиения единицы и используя свёртку.

Далее верните это гладкое отображение на M , например, с помощью результата задачи 7.118 (которая для евклидовой метрики в $\mathbb{R}^D$ сравнительно элементарна).

||

Problem

.40.* докажите, что всякое вложенное в $\mathbb{R}^3$ компактное двумерное многообразие без края S ориентируемо.

||

Попробуйте построить ориентацию с помощью непрерывного выбора нормали к данной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$.

Заметьте, что если это не получится, то дополнение $\mathbb{R}^3 \setminus S$ связно.

Для всякой точки $p \notin S$ рассмотрите отображение $g_p : S \rightarrow S^2$, заданное как $g_p(x) = (x - p)/|x - p|$.

Докажите, что его степень (как остаток по модулю два) не меняется при небольших изменениях p .

Рассмотрев близкие к S точки докажите, что степень g_p принимает оба значения остатков по модулю два и получите противоречие.

||

В частности, с помощью понятия степени отображения мы можем доказать следующую теорему:

Теорема

7.41 (Теорема Брауэра о неподвижной точке).

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ - некоторый замкнутый шар.

Всякое непрерывное отображение шара в себя $f : B \rightarrow B$ имеет неподвижную точку, то есть точку, в которой $f(x) = x$.

Доказательство

Без ограничения общности будем считать шар единичным с центром в начале координат.

Сначала сделаем технические процедуры, которые сведут вопрос к вопросу о гладких отображениях.

Предположим противное, тогда $|f(x) - x| \geq 2\varepsilon > 0$ для любого $x \in B$ из компактности.

Заменив $f(x)$ на $(1 - \varepsilon)f(x)$ мы всё ещё будем иметь $|f(x) - x| \geq \varepsilon$ и образ f будет содержаться в шаре радиуса $1 - \varepsilon$.

Теперь приблизим наше отображение гладким с точностью $\varepsilon/2$ (например, по теореме Стоуна-Вейерштрасса), образ шара B всё ещё будет строго внутри шара и у нас всё ещё останется оценка $|f(x) - x| \geq \varepsilon/2$. Теперь рассмотрим отображение сферы $S = \partial B$ в себя, заданное по формуле

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}.$$

Это гладкое отображение гомотопно тождественному через гомотопию (так как образ f не пересекает сферу)

$$h_t(x) = \frac{x - tf(x)}{|x - tf(x)|}.$$

Также оно гомотопно постоянному отображению через гомотопию (так как $f(x) \neq x$ для любого x)

$$\tilde{h}_t(x) = \frac{tx - f(tx)}{|tx - f(tx)|}$$

По теоремам 7.33 и 7.36 отображение g имеет одновременно степень 0 и 1, что невозможно.

Приведённое доказательство теоремы Брауэра демонстрирует возможности понятия степени отображения, но есть способы доказать её чуть более элементарными способами.

Например, доказательство теоремы Брауэра можно вывести из следующего утверждения:

Теорема

7.42 (Отсутствие ретракции шара на его границу).

Пусть сфера S^n рассматривается как край шара B^n .

Не существует непрерывного отображения $f : B^n \rightarrow S^n$, такого

$$\text{ито } f|_{S^n} = \text{id}_{S^n}$$

Доказательство через теорему Сарда.

Аналогично предыдущему доказательству, можно сделать f гладким.

Для его регулярного значения $y \in S^n$ мы знаем, что $f^{-1}(y)$ должно быть компактным одномерным многообразием с краем, но его краем может быть только точка y .

Доказательство завершается наблюдением, что у компактного одномерного многообразия с краем край не может состоять из одной точки.

Полезно заметить, что в этом доказательстве шар B^n можно заменить любым многообразием с краем.

Доказательство через формулу Стокса.

Рассмотрим форму $\lambda = x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Её дифференциал $d\lambda$ является стандартной формой объёма в $\mathbb{R}^n$ и даёт ненулевой объём рассматриваемого шара $v_n > 0$.

Тогда можно написать с учётом условия и формулы Стокса

$$v_n = \int_{B^n} d\lambda = \int_{S^n} \lambda = \int_{S^n} f^* \lambda = \int_{B^n} d(f^* \lambda) = \int_{B^n} f^* d\lambda$$

однако в выражении $f^* d\lambda$ форма $d\lambda$ рассматривается как элемент нулевого пространства $\Omega^n(S^{n-1})$ и, следовательно, равна нулю.

Таким образом получаем противоречие, оказывается $v_n = 0$.

Problem

.43.

Выведите теорему Брауэра из теоремы 7.42.

||

Сделайте так, чтобы отображение $f : B^n \rightarrow B^n$ шло строго внутрь шара и постройте ретракцию, рассматривая прямые $[x, f(x)]$, которые все невырождены при условии отсутствия неподвижных точек.

||

Некоторое развитие темы степени отображения и теоремы Брауэра предлагается в виде следующих задач.

Problem

.44.

докажите, что всякое выпуклое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно шару некоторой размерности и для непрерывных отображений $f : K \rightarrow K$ тоже верна теорема Брауэра.

||

Перейдите из $\mathbb{R}^n$ в аффинную оболочку K (наименьшее аффинное подпространство, содержащее K).

Заметьте, что в этой аффинной оболочке K имеет непустую внутренность, поместите во внутренность начало координат, докажите, что для лучей из начала координат расстояние от начала координат до пересечения луча с ∂K будет непрерывно зависеть от луча.

После этого выпишите гомеоморфизм явно.

||

Problem

.45.

докажите, что для непрерывного отображения сферы в себя $f : S^n \rightarrow S^n$ либо найдётся x , такая что $f(x) = -x$, либо f сюръективно.

||

Попробуйте сделать гомотопию между f и тождественным отображением кратчайшим поворотом от $f(x)$ к x .

Используйте тот факт, что степень корректно определена для всего лишь непрерывных отображений.

||

Problem

.46.

Докажите, что если степень непрерывного отображения $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ не равна $(-1)^{n-1}$, то f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

||

Рассмотрите отображение, действующее по формуле $g(x) = -f(x)$, и примените предыдущую задачу.

||

Problem

.47.

Докажите, что если на сфере $\mathbb{S}^n$ есть всюду ненулевое касательное векторное поле, то n должно быть нечётным.

||

Один способ: построить из ненулевого векторного поля отображение сферы в себя без неподвижных точек, гомотопное тождественному.

другой способ: построить из ненулевого векторного поля гомотопию между тождественным отображением сферы и отображением $x \mapsto -x$.

||

Problem

.48.

Приведите пример всюду ненулевого касательного векторного поля на сфере нечётной размерности.

||

Рассмотрите сферу в $\mathbb{R}^{2n}$ как сферу в $\mathbb{C}^n$.

||

Problem

.49.

Классифицируйте непрерывные отображения окружности в себя $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ с точностью до гомотопии.

||

Рассмотрите стандартную параметризацию $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ и найдите непрерывное $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такое что $\tau \circ g = f \circ \tau$, изучите свойства таких g . ||

24.1.4 Internal multiplication and Li derivative (!?!!!!!?)

В этом разделе мы вернёмся от глобальных вопросов к локальным и рассмотрим операции, связывающие векторные поля и дифференциальные формы на одном и том же многообразии.

определение внутреннего умножения

Определим операцию внутреннего умножения векторного поля на форму как

$$i_X \alpha (X_2, \dots, X_k) = \alpha (X, X_2, \dots, X_k)$$

По сути мы подставляем новый вектор в форму(!!!!) как???

Эта операция поточечная, то есть значение результата в точке зависит только от вектора в точке и дифференциальной формы в точке.

Иначе можно сказать, что при умножении X или α на функцию f выражение $i_X \alpha$ просто умножается на функцию f .

Также внутреннее умножение по определению линейно по вектору и по форме.

Взаимодействие внутреннего умножения с внешним описывается правилом Лейбница:

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_X\beta$$

которое означает, что внутреннее умножение на векторное поле является дифференцированием алгебры дифференциальных форм.

Поясним, почему правило Лейбница верно.

Из определения внутреннего умножения и внешнего умножения форм следует, что должна выполняться какая-то такая формула с точностью до знаков и множителей.

Проверить знаки и множители по линейности достаточно на базисных элементах.

Для этого заметим, что

$$i_{\frac{\partial}{\partial x_j}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = (-1)^{\ell-1} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

если $j = i_\ell$ и равно нулю, если j не встречается среди i_ℓ .

После этого проверка правила Лейбница становится понятной, неформально говоря, внутреннему умножению на $\frac{\partial}{\partial x_j}$ (дифференцированию) «надо добраться» до своего dx_j , причём при «перепрыгивании» через неподходящие dx_i знак выражения меняется.

При внутреннем умножении на $\frac{\partial}{\partial x_j}$ произведения базисных форм будут возможны три варианта: dx_j найдётся в первом сомножителе; dx_j найдётся во втором сомножителе; или вообще нигде не найдётся.

Во всех трёх случаях правило Лейбница верно.

Problem

.51.

Найдите, что делает с дифференциальными формами операция $i_X e_\alpha + e_\alpha i_X$, где i_X - внутреннее умножение на вектор X , а e_α - внешнее умножение на линейную форму α .

В итоге для всякого векторного поля X на многообразии M у нас получается операция $i_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$, которую мы по определению считаем нулевой на $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

Определим еще более важную в дифференциальной геометрии операцию дифференцирования, которая не является поточечной (так как содержит производные в координатном представлении):

определение производной Ли

Определим производную Ли вдоль векторного поля X на дифференциальных формах как «суперкоммутатор»

$$L_X = i_X d + di_X$$

Эта операция линейна относительно сложения и умножения на константы, но при умножении X или формы на функцию эта функция не выносится за скобки, а в выражении возникает её дифференциал.

Problem

.53.

Пусть f - гладкая функция, а X - векторное поле.

Выразите действие L_{fX} на дифференциальную форму через действие L_X на ту же форму.

Правило Лейбница для производной Ли следует из правила Лейбница для внешнего дифференцирования и правила Лейбница для внутреннего дифференцирования.

В итоге получается выражение без знаков (проверьте это самостоятельно):

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta$$

Проверим, что такое производная Лф функции (формы нулевой степени) по определению

$$L_X f = i_X df + d(i_X f) = i_X df = df(X) = X(f)$$

то есть на функциях у нас получается уже известная нам естественная операция дифференцирования функции по векторному полю.

Полезно также посмотреть, что получается на линейных формах, равных дифференциалам функции

$$L_X df = i_X d(df) + d(i_X df) = d(X(f))$$

это можно описать как коммутирование операции L_X с внешним дифференциалом d для функций.

С учётом формулы Лейбница для L_X , действие L_X на функциях и их дифференциалах полностью определяет его действие на формах произвольной степени.

Problem

.54.

докажите, что производная Ли вдоль векторного поля L_X коммутирует с внешним дифференцированием d для форм любой степени.

||

Проще всего это вывести непосредственно из определения.

||

На самом деле производная Ли имеет достаточно простой смысл с точки зрения дифференциальных уравнений, см.

обсуждение в следующих разделах и теорему 7.71.

Но мы её определяем иначе, чтобы формально не опираться на дифференциальные уравнения до их более внимательного изучения.

Определение производной Ли одного векторного поля вдоль другого векторного поля на одном и том же многообразии M можно сделать через дифференциальные уравнения (по формуле из теоремы 7.71), но мы определим его иначе.

Мы воспользуемся двойственностью между касательным и кокасательным пространством в точке и определим векторное поле $L_X Y$ (производная $\mathcal{L}_X Y$ по X) через его каноническое произведение (в смысле двойственных линейных пространств в каждой точке) на некоторую линейную форму $\alpha \in \Omega^1(M)$.

По сути мы потребуем выполнения формулы Лейбница для производной Ли вдоль X значения $\alpha(Y) = i_Y \alpha$:

$$X(\alpha(Y)) = L_X(\alpha)(Y) + \alpha(L_X Y)$$

Распишем эту формулу подробнее через определение $L_X(\alpha)$:

(7.1)

$$\alpha(L_X Y) = i_X d(i_Y \alpha) - i_Y d(i_X \alpha) - i_Y i_X d\alpha$$

и покажем, что это можно считать определением $L_X Y$.

Можно (и полезно в качестве упражнения) проверить, что правая часть умножается на функцию f , если α умножается на f .

Следовательно, зная выражение в правой части для базисных форм, $dx_i(L_X Y)$, мы для произвольной формы $\alpha = \sum_i a_i dx_i$ мы выпишем его в виде

$$\alpha(L_X Y) = \sum_i a_i dx_i(L_X Y)$$

Это означает, что (7.1) на самом деле корректно определяет векторное поле $L_X Y$ в каждой точке p как линейный функционал на $T_p^* M$, а координаты $L_X Y$ в данной системе координат равны

$$(L_X Y)_i = dx_i(L_X Y) = i_X d(i_Y dx_i) - i_Y d(i_X dx_i)$$

Problem

.55.

Доведите предыдущую формулу до полностью координатного выражения $L_X Y$ через компоненты $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

||
В итоге должно получиться

$$\left[\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j} Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

||

Если мы применим векторное поле $L_X Y$ как дифференцирование функции f , то мы получим выражение

$$(L_X Y) f = df(L_X Y) = i_X d(i_Y df) - i_Y d(i_X df) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Поэтому с точки зрения дифференциальных операторов на функциях производная Ли $L_X Y$ - это коммутатор векторных полей $[X, Y]$ (то есть коммутатор соответствующих им дифференциальных операторов) с очевидным свойством $[X, Y] = -[Y, X]$.

Это наблюдение очень полезно, например из него следует другое характеристическое свойство коммутатора, тождество Якоби:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

которое проще всего проверить по его действию на функции.

Раскрытие коммутаторов даст нам 12 выражений, в которых 6 перестановок векторных полей действуют на функцию и каждая из них встречается два раза с разными знаками.

Problem

.56.

Пусть векторное поле X в $\mathbb{R}^n$ задано так, что в точке p находится вектор Ap , где $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - линейный оператор, аналогично пусть есть векторное поле Y , заданное как $p \mapsto Bp$.

Посчитайте коммутатор X и Y .

||
Можно воспользоваться координатной формулой.
||

Problem

.57.

докажите формулу для векторных полей X, Y и дифференциальной формы α

$$i_{[X,Y]}\alpha = di_X i_Y \alpha + i_X di_Y \alpha - i_Y di_X \alpha - i_Y i_X d\alpha$$

||
Начните с формулы дейбница $L_X(i_Y \alpha) = i_{L_X Y} \alpha + i_Y L_X \alpha$, которую наверное проще всего объяснить с помощью теоремы 7.71.
||

Problem

.58.

Проверьте, что для неоднородных линейных дифференциальных операторов первого порядка, которые в координатах имеют вид

$$f \mapsto X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + X_0 f$$

тоже определен коммутатор и выполняется тождество Якоби.

||
Проверьте, что после коммутирования производных второго порядка не будет.
||
Следующая задача показывает один из способов обобщения формулы Гаусса-Остроградского на случай произвольного многообразия.

Problem

.59 (Теорема о дивергенции).

Пусть на многообразии M фиксирована нигде не нулевая форма $\nu \in \Omega^n(M)$ при $n = \dim M$.

Интегрирование этой формы задаёт некоторое понятие объёма (меры) на многообразии.

Тогда дивергенцию векторного поля X относительно этого объёма можно определить как

$$L_X \nu = (\operatorname{div}_\nu X) \nu$$

Как написать интеграл по многообразию с краем

$$\int_M (\operatorname{div}_\nu X) \nu$$

через интеграл по краю ∂M ? ||

Вспомните формулу для производной Ли дифференциальной формы и примените формулу Стокса.

||

следующие задачи дают вводные сведения про гамильтоновы векторные поля на симплектических многообразиях, которые являются одним из основных объектов изучения классической механики.

Симплектическое многообразие - это многообразие M с формой $\omega \in \Omega^2(M)$, которая замкнута ($d\omega = 0$) и невырождена как билинейная форма, то есть если для некоторого вектора $X \in T_p M$ оказывается $\omega(X, Y) = 0$ для всех $Y \in T_p M$, то обязательно должно быть $X = 0$.

Problem

.60.

Докажите, что для всякой гладкой функции $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ (гамильтониана) на симплектическом многообразии найдётся единственное гамильтоново векторное поле X_H со свойством

$$i_{X_H} \omega = -dH$$

||

Обратите внимание, что невырожденная билинейная форма устанавливает изоморфизм между векторным пространством и его двойственным.

||

Problem

.61.

Докажите, что в условия предыдущей задачи

$$X_H(H) = 0, \quad L_{X_H} \omega = 0$$

||

Проверьте всё это по определению.

||

Problem

.62.

докажите, что на симплектическом многообразии операция скобки Ли векторных полей может быть поднята (в смысле сопоставления функции её гамильтонова векторного поля) до операции скобки Пуассона функций со свойствами

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad [X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}$$

||
Посмотрите на выражение $\omega(X_f, X_g) = X_f g = -X_g f$ и проверьте равенства

$$d(X_f g) = L_{X_f} dg = -L_{X_f} i_{X_g} \omega = -i_{L_{X_f} X_g} \omega - i_{X_g} L_{X_f} \omega = -i_{[X_f, X_g]} \omega$$

возможно, эти равенства проще понять из геометрического смысла производной Ли в смысле теоремы 7.71.

||

24.1.5 divergence

(про нее тут подробно)

24.1.6 Integration of vector fields and differential equations

мотивация и обзор применений

Theory

В этом разделе мы начнём рассматривать «интегрированием» векторных полей, на самом деле это предмет изучения науки о дифференциальных уравнениях.

Дифференциальное уравнение на многообразии - это, при наличии векторного поля X на многообразии $\bar{M}$ и точки $p \in M$, нахождение такой интегральной кривой $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, для которой

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$$

и $\gamma(t_0) = p$ при данном $t_0 \in (a, b)$.

Здесь производную (скорость) кривой $\gamma'(t)$ можно определить как прямой образ вектора $\frac{\partial}{\partial t}$ в точке $\gamma(t)$, или как дифференцирование функций на M в точке $\gamma(t)$ по формуле

$$f \mapsto \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$

На самом деле нетрудно выписать всё это в координатах и убедиться, что локально это и есть нахождение решения автономного дифференциального уравнения.

Если же векторному полю X разрешить зависеть от времени t , то это будет нахождение решения неавтономного дифференциального уравнения.

Для полноты изложения мы приведём стандартные теоремы, описывающие локальную структуру решения дифференциального уравнения.

Будем работать в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и запишем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x(t), t)$$

где $f : U \times (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$) - некоторое отображение (вектор-функция) на открытом множестве, в терминах дифференциальной геометрии это на самом деле зависящее от времени векторное поле.

Переменную t будем называть «время», а производную кривой $x : (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \rightarrow U$ по времени будем называть «скорость» и обозначать $\dot{x}$.

Будем решать для дифференциального уравнения задачу Коши с начальным условием

$$x(t_0) = a \in U$$

в некоторый момент времени, который в конкретных рассуждениях без ограничения общности можно считать нулевым, и будем пытаться найти решение хотя бы для времени $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ при каком-то маленьком $\varepsilon > 0$.

Наличие решений гарантирует:

Теорема

7.63 (существование и единственность решений дифференциальных уравнений).

Если f непрерывно по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица по x в окрестности a , то решение с данным начальным условием существует и единственно в некотором диапазоне $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Доказательство

Без ограничения общности будем считать $t_0 = 0$ и перепишем уравнение в интегральном виде

$$x(t) = a + \int_0^t f(x(s), s) ds$$

для непрерывных $x(t)$ очевидно, что оно эквивалентно исходному дифференциальному уравнению, действующего на кривую $y : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ (ε будет подобрано позднее),

$$I[y](t) = a + \int_0^t f(y(s), s) ds$$

Из условия Липшица

$$|f(x', t) - f(x'', t)| \leq L |x' - x''|$$

мы можем получить свойство «сжатия» интегрального оператора.

Если положить для

$$\begin{aligned} & \text{отображений } y', y'' : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \\ & \|y' - y''\|_C = \sup_{|t| < \varepsilon} |y'(t) - y''(t)| \end{aligned}$$

То

$$\|I[y'] - I[y'']\|_C \leq \int_0^t |f(y'(s), s) - f(y''(s), s)| ds \leq L\varepsilon \|y' - y''\|_C$$

Мы выберем ε настолько малым, чтобы $L\varepsilon < 1/2$ в δ -окрестности a , которая лежит в области определения U , и на которой действует константа Липшица L .

Это гарантирует сжатие для y', y'' со значениями в этой δ -окрестности,

$$\|I[y'] - I[y'']\|_C \leq 1/2 \|y' - y''\|_C.$$

Для сохранения образа оператора I в той же окрестности также введём «ограничение скорости», чтобы в рассматриваемой области при $|t| < \varepsilon$ выполнялось $|f(x, t)| \leq M$ и уменьшим ε , чтобы выполнялось $M\varepsilon < \delta/2$.

Будем решать методом последовательных приближений, как в доказательстве теоремы об обратной функции 6.24, начнём с

$$x_1(t) \equiv a$$

и будем брать

$$x_k = I[x_{k-1}].$$

Из ограничения скорости следует

$$\|x_2 - x_1\|_C \leq \delta/2,$$

тогда далее по свойству сжатия мы будем иметь по индукции

$$\|x_{k+1} - x_k\|_C \leq 1/2 \|x_k - x_{k-1}\|_C \leq \delta 2^{-k}$$

Это означает, что все значения $x_k(t)$ будут оставаться в δ -окрестности a , свойство сжатия будет оставаться применимым и будет иметь место равномерная по $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ сходимости $x_k(t) \rightarrow x(t)$.

Равномерный предел непрерывных отображений будет непрерывным, и переходя к равномерному пределу в рекуррентной формуле, мы получим

$$x = I[x].$$

Это означает, что мы нашли решение.

Единственность решения также следует из свойства сжатия.

Если у нас есть два решения

$$x' = I[x'], \quad x'' = I[x''],$$

то по ограничению скорости они не выходят за δ -окрестность a (рассмотрение первого момента выхода даёт противоречие с ограничением скорости).

Тогда по свойству сжатия

$$\|x' - x''\|_C = \|I[x'] - I[x'']\|_C \leq 1/2 \|x' - x''\|_C$$

что влечёт $\|x' - x''\|_C = 0$ и гарантирует равенство двух решений.

Теорема

7.64 (существование и единственность решений линейного уравнения).

Решение линейного уравнения

$$\dot{x} = A(t)x(t) + b(t)$$

с непрерывно зависящими от времени линейным оператором $A(t)$ и вектором $b(t)$, при любом начальном условии $x(t_0) = a$ существует и единственно на любом промежутке времени, на котором A и b непрерывны.

Здесь непрерывная зависимость оператора понимается в том смысле, что коэффициенты его матричного представления непрерывно зависят от t .

В случаях операторов в бесконечномерных банаховых пространствах непрерывность будет пониматься в смысле нормы оператора, но сейчас это не важно.

Доказательство

существование и единственность для ε -окрестности некоторого момента времени t_0 можно доказать по основной теореме.

Приведём похожее на предыдущее рассуждение, работающее для немаленьких промежутков времени.

Рассмотрим без ограничения общности отрезок $[0, T]$, на котором из компактности отрезка $\|A(t)\| \leq L$ и $|b(t)| \leq M$, и будем искать решение с начальным условием $x(0) = a$. Возьмём те же приближения

$$x_1(t) \equiv a, \quad x_{k+1}(t) = a + \int_0^t (A(s)x_k(s) + b(s)) ds.$$

Тогда индукцией по k доказывается оценка

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq L^{k-1}(L|a| + M) \frac{t^k}{k!}$$

и следующая из неё

$$|x_k(t)| \leq |a|e^{Lt} + \frac{M}{L} (e^{Lt} - 1).$$

Из этих оценок следует, что на $[0, T]$ последовательность приближений равномерно и быстрее геометрической прогрессии сходится к решению уравнения.

Для доказательства единственности можно заметить, что из условия

$$|x'(t) - x''(t)| \leq \int_0^t L |x'(s) - x''(s)| ds$$

по индукции выводятся оценки

$$|x'(t) - x''(t)| \leq \|x' - x''\|_C \frac{L^n t^n}{n!}$$

которые при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном t стремятся к нулю. Изучим теперь зависимость решения от параметров и начальных условий, а именно сформулируем задачу

$$\dot{x} = f(x(t), t, p), \quad x(0) = a \in U,$$

где p пробегает некоторое метрическое пространство параметров P и правая часть $f(x, t, p)$ непрерывна и по p тоже.

Теорема

7.65 (Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий).

Если $f(x, t, p)$ непрерывна по всем аргументам, y удовлетворяет условию Липшица по x в окрестности a_0 равномерно по $t \in (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ и $p \in P$, равномерно ограничена при всех значениях параметра $p \in P$, то решение существует и единственно в некотором диапазоне $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, при значениях a в некоторой окрестности $U(a_0)$ и любом $p \in P$.

Оно непрерывно зависит от $a \in U(a_0)$ и $p \in P$.

Доказательство

Опираясь на рассуждения в доказательстве теоремы существования и единственности, мы применим ту же процедуру с

$$x_1(t, a, p) \equiv a$$

и

$$x_{k+1}(t, a, p) = a + \int_0^t f(x_k(s, a, p), s, p) ds$$

условия теоремы позволяют нам выбрать константы M и L в некоторой окрестности $U_{2\delta}(a_0)$ при всех $p \in P$ и иметь равномерное по параметру ограничение скорости и равномерное по параметру свойство сжатия.

Оценки на отклонение итераций от a (не более чем на δ) позволят нам работать с любым начальным условием $a \in U_\delta(a_0)$, исключить выход итераций из $U_{2\delta}(a_0)$ и иметь равномерную зависимость от a .

Тогда все $x_k(t, a, p)$ будут непрерывно зависеть от a и p и сходиться как минимум со скоростью геометрической прогрессии при $k \rightarrow \infty$, а значит в равномерном пределе эта непрерывная зависимость сохранится.

Мы доказали непрерывную зависимость решения дифференциального уравнения от начальных условий и параметров; но на практике часто требуется непрерывно дифференцируемая несколько раз зависимость, при соответствующих ограничениях на правую часть дифференциального уравнения f , и мы собираемся её установить.

В качестве области определения f будем рассматривать некоторый шар U , чтобы вместе с любыми двумя точками он содержал отрезок, соединяющий их (свойство выпуклости), это будет нужно для свободного применения леммы 6.22 о выражении приращения непрерывно дифференцируемого отображения.

Теорема

7.66 (Дифференцируемая зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий).

Если правая часть дифференциального уравнения $f(x, t, p)$ непрерывна по времени в диапазоне $(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ и непрерывно дифференцируемо зависит от $x \in U$ и параметра p в некотором открытом множестве $P \subseteq \mathbb{R}^m$, то решение дифференциального уравнения непрерывно дифференцируемым образом зависит от параметров и от начальных условий в некотором диапазоне $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Доказательство

В этом случае каждый параметр p можно считать дополнительной координатой решения, дифференциальное уравнение для которой имеет вид $\dot{p} = 0$.

Непрерывная дифференцируемость правой части по x и p тогда гарантирует локальную липшицевость по этим переменным (например, в силу леммы 6.22) и рассмотрение зависимости от параметров сводится к рассмотрению зависимости от начального условия.

Так что мы опять рассматриваем уравнение

$$x(t) = a + \int_0^t f(x(s), s) ds$$

и изучаем зависимость решения от a .

После сдвига координат мы можем считать, что мы начинаем с $a = 0$ и сравниваем соответствующее решение $x_0(t)$ с решением $x_h(t)$ для $a = hv$, где v будет фиксированным вектором, а h - переменным параметром.

Тогда по теореме 7.65 $x_h(t)$ непрерывно зависит от h и

$$x_h(t) = hv + \int_0^t f(x_h(s), s) ds, \quad x_0(t) = \int_0^t f(x_0(s), s) ds.$$

введя обозначение $y_h(t) = \frac{x_h(t) - x_0(t)}{h}$, по лемме 6.22 для приращения f от $x' = x_0(t)$ до $x'' = x_h(t)$ получим

$$\begin{aligned} y_h(t) &= \frac{x_h(t) - x_0(t)}{h} = v + \int_0^t \frac{f(x_h(s), s) - f(x_0(s), s)}{h} ds = \\ &= v + \int_0^t G(x_0(s), x_h(s), s) \left(\frac{x_h(s) - x_0(s)}{h} \right) ds = v + \int_0^t G(x_0(s), x_h(s), s) (y_h(s)) ds \end{aligned}$$

с некоторыми $G(x', x'', t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, непрерывно зависящими от x', x'', t .

Заметим, что зависимость от любого параметра (t в данном случае) в лемме 6.22 будет непрерывной в силу явной формулы в её доказательстве.

Полученное интегральное соотношение можно понимать как линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{y}_h = H(t, h)y_h$$

с начальным условием $y_h(0) = v$ и линейным оператором

$$H(t, h) = G(x_0(t), x_h(t), t),$$

$H(t, h)$ тогда непрерывно зависит от времени и от h .

При этом лемма 6.22 показывает, что $H(t, h)$ непрерывен и определён и при $h = 0$, а также

$$H(t, 0) = D_x f(x_0(t), t)$$

где $D_x f$ обозначает производную отображения f по первому аргументу.

По теоремам 7.63 и 7.65 решения уравнения (7.2) непрерывно зависят от параметра h вплоть до $h = 0$, и предельное значение

$$y_0(t) = \lim_{h \rightarrow 0} y_h(t) = \left. \frac{\partial x_h(t)}{\partial h} \right|_{h=0}$$

удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{y}_0 = D_x f(x_0(t), t) y_0$$

Таким образом производная решения по начальному условию существует, а так как она сама является решением явного линейного дифференциального уравнения, правая часть которого непрерывно зависит от $x_0(t)$, в свою очередь непрерывно зависящего от начальных условий, то от начальных условий производная тоже зависит непрерывно по теореме 7.65.

Так как рассуждения в предыдущей лемме заканчиваются явным уравнением для производной по начальному условию, то при наличии более чем однократной дифференцируемости правой части уравнения мы получаем соответствующую дифференцируемость решений, что можно сформулировать как

Следствие 7.67.

Если правая часть дифференциального уравнения непрерывна по времени и раз непрерывно дифференцируемо зависит от параметров и начальных условий.

7.7.

24.1.7 Integration of vector fields on a manifold, geometric meaning of the Lie derivative

мотивация и обзор применений

Theory

На этом стандартный материал про дифференциальные уравнения заканчивается и мы продолжаем рассуждать в терминах гладких многообразий и гладких векторных полей.

Теорема

7.68 (Выпрямление векторного поля).

Если векторное поле X в точке $p \in M$ не равно нулю, то в некоторой криволинейной системе координат $x_1, \dots, x_n$ в окрестности точки p оно может быть приведено к виду $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Доказательство

Рассмотрим гладкую функцию y в некоторой окрестности p , для которой $X(y) \neq 0$ в p и $y(p) = 0$, условие $X(y) \neq 0$ будет сохраняться в некоторой окрестности p в этих координатах.

Рассмотрим решения дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = X_{x(t)}$$

с начальным условием $x(0) = (0, x_2, \dots, x_n)$, обозначим также гиперплоскость $Z = \{y = 0\}$.

В итоге решение этого уравнения гладко зависит от начальных условий $x_2, \dots, x_n$ и нататы в достаточно малой окрестности p , так как отображение, порожденное решениями дифференциального уравнения,

$$(t, x_2, \dots, x_n) \mapsto x(t, (0, x_2, \dots, x_n))$$

имеет невырожденный дифференциал в нуле; его частные производные по $x_2, \dots, x_n$ дают базис к $T_p Z$, а частная производная по $x_1 = t$ равна $X(p) \notin T_p Z$ (так как $X(y) \neq 0$).

В построенной системе координат $(x_1, \dots, x_n)$, очевидно, решения уравнения

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) \leftrightarrow \dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 0, \dots, \dot{x}_n = 0$$

с произвольными начальными условиями (когда уже не обязательно $x_1 \equiv t$) имеют вид

$$x_1 = t + \text{const}, x_2 = \text{const}, \dots, x_n = \text{const},$$

а само векторное поле равно $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Возвращаясь к глобальному интегрированию векторных полей на многообразиях, можно изучить продолжение интегральной кривой векторного поля в полезном для нас частном случае.

Теорема

69.

Для (возможно зависящего от времени) векторного поля X с компактным носителем на многообразии без края M интегральные кривые продолжаются по времени неограниченно в обе стороны.

Под компактным носителем имеется в виду, что X равно нулю за пределами некоторого компакта $K \subseteq M$ во все моменты времени.

Доказательство

Достаточно рассмотреть продолжение при положительном t .

Рассмотрим задачу Коши для данного векторного поля с начальным условием $\gamma(0) = p$.

У неё могут существовать два решения $\gamma_1 : [0, t_1) \rightarrow M$ и $\gamma_2 : [0, t_2) \rightarrow M$, определённые на разных полуинтервалах.

Решения γ_1 и γ_2 будут устроены так, что γ_2 будет продолжением γ_1 при $t_1 < t_2$.

Действительно, если это не так, то достаточно рассмотреть $t^* \in [0, t_1)$ как точную нижнюю грань моментов времени, где решения различаются.

Из открытости множества моментов времени, на котором решения различаются, мы делаем вывод, что в t^* они ещё не различались.

Тогда можно использовать теорему существования и единственности, чтобы показать, что γ_1 и γ_2 на самом деле не должны различаться ещё некоторое время после t^* , приведя таким образом к противоречию с выбором t^* .

Теперь рассмотрим объединение всех промежутков $[0, t)$, на которые продолжается интегральная кривая $\gamma : [0, t) \rightarrow M$ с заданным начальным условием $\gamma(0) = p$, это будет некоторый промежуток $[0, T)$.

По сказанному в начале Доказательства, на $[0, T)$ корректно определено продолжение интегральной кривой γ с начальным условием. Пусть значение T конечно, рассмотрим один из частичных пределов p' кривой $\gamma(t)$ при $t \rightarrow T - 0$; частичный предел существует, так как либо решение является постоянным и доказывать нечего, либо решение полностью находится в компактном носителе K векторного поля.

Будем работать в координатной карте вокруг p' .

Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра показывает, что найдутся окрестности $U(p') \subset V(p')$ и числа $0 < \delta < \varepsilon$, такие что при попадании интегральной кривой в $U(p')$ в момент времени в пределах $(T - \delta, T + \delta)$, в момент времени, отличающийся от момента попадания на ε , интегральная кривая будет продолжаться в $V(p')$.

Но так как p' - предельная точка и кривая попадает в $U(p')$ в моменты времени сколь угодно близкие к T , то она будет продолжаться и за момент времени T , что противоречит выбору T .

Конечно, векторные поля с компактным носителем редко встречаются в реальной жизни, но нам пока хватит и такого случая.

Более реалистическую ситуацию бесконечного продолжения решений дифференциального уравнения можно найти в зада-

$$\frac{d}{dt} \varphi_{t,t_0}(x) = X_{\varphi_{t,t_0}(x), t}, \varphi_{t_0,t_0} = \text{id}_M$$

Если векторное поле зависит от времени гладко, то и φ_{t,t_0} будет зависеть от времени $\gamma(t)$ векторного поля X с начальным условием $\gamma(t_0) = x$ и определением $\varphi_{t,t_0}(x) = \gamma(t)$.

Теорема

70.

Для возможно зависящего от времени векторного поля X на многообразии без края M и соответствующим диффеоморфизмам φ_{t,t_0} выполняется

$$\varphi_{t_2,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_2,t_0}$$

Доказательство

Посмотрим на действия левой и правой части на точку $x_0 \in M$.

Точка $x_1 = \varphi_{t_1,t_0}(x_0)$ — это положение решения дифференциального уравнения в момент времени t_1 при условии, что в момент времени t_0 оно находилось в точке x_0 .

Точка $x_2 = \varphi_{t_2,t_1}(x_1)$ тогда соответствует положению того же решения дифференциального уравнения в момент времени t_2 .

Но тогда $x_2 = \varphi_{t_2,t_0}(x_0)$ по определению и формула верна в x_0 . В частности, выполняется

$$\varphi_{t_0,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_0,t_0} = \text{id}_M, \quad \varphi_{t_1,t_0} \circ \varphi_{t_0,t_1} = \varphi_{t_1,t_1} = \text{id}_M$$

и это показывает, что φ_{t_1,t_0} имеет гладкое обратное отображение и действительно является диффеоморфизмом.

В случае не зависящего от времени векторного поля, если $\gamma(t)$ является решением уравнения, то $\gamma(t+s)$ тоже является решением как функция от t .

Следовательно,

$$\varphi_{t_1,t_0} = \varphi_{t_1+s,t_0+s}$$

при любом s , то есть диффеоморфизм зависит только от разности $t_1 - t_0$.

Тогда удобно положить

$$\varphi_t = \varphi_{t,0}$$

и утверждение Теоремы 7.70 тогда переписывается как

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

В таком случае (не зависящее от времени векторное поле) говорят, что векторное поле порождает однопараметрическую группу диффеоморфизмов.

С понятием однопараметрической группы диффеоморфизмов связана геометрическая интерпретация производной Ли векторного поля, которую достаточно удобно считать определением производной Ли.

Теорема

71.

Производная Ли может быть определена с помощью соответствующей полю X однопараметрической группы $\{\varphi_t\}$ диффеоморфизмов для дифференциальной формы α или другого векторного поля Y как поточечный предел

$$L_X \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \alpha - \alpha}{t} = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha \right|_{t=0}, \quad L_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* Y - Y}{t} = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* Y \right|_{t=0}$$

где обратный образ векторного поля при диффеоморфизме определяется как обратное отображение к прямому образу.

Конечно, в формулировке теоремы возникает вопрос определённости φ_t .

Если нас интересует выражение в окрестности точки $p \in M$, то мы можем домножить X на гладкую функцию ψ с компактным носителем (из леммы 6.17), которая в этой окрестности равна 1, превратив X в поле с компактным носителем и не изменив его значения в окрестности p .

Тогда порождённая полем однопараметрическая группа диффеоморфизмов будет корректно определена и выражения можно понимать именно в таком смысле.

Так как в выражениях используется переход к пределу $t \rightarrow 0$, то они на самом деле не будут зависеть от конкретного выбора ψ .

Доказательство теоремы 7.71.

Эти формулы можно проверить в координатах напрямую, но мы опишем несколько более интеллектуальную процедуру.

Если поле X в некоторой точке ненулевое, то его можно выпрямить до $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ в окрестности точки и проверить равенства в явном виде, заметив, что формы α достаточно рассматривать только нулевой и первой степени, так как обе части равенства удовлетворяют правилу Аейбница без знаков относительно внешнего умножения.

Для форм нулевой степени (функций) утверждение очевидно, для первой степени получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \alpha - \alpha}{t} = \frac{d}{dt} \sum_i a_i(x + te_1) dx_i = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_1} dx_i$$

тогда как

$$i_{e_1} d\alpha + d(i_{e_1} \alpha) = i_{e_1} \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i + da_1 = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_1} dx_i - \sum_j \frac{\partial a_1}{\partial x_j} dx_j + \sum_j \frac{\partial a_1}{\partial x_j} dx_j = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_1} dx_i$$

Аналогично можно проверить явно выражение Для $L_{\frac{\partial}{\partial x_1}} Y$, или сослаться на формулу Аейбница для $L_X(\alpha(Y))$.

Посмотрим теперь на точки, где X равно нулю.

В правой части формулы выражение $\varphi_t^* \alpha$ или $\varphi_t^* Y$ гладко зависит и от точки многообразия и от параметра t , поэтому и предел в правой части просто является производной $\varphi_t^* \alpha$ или $\varphi_t^* Y$ по параметру t при $t = 0$, и следовательно гладко зависит от точки многообразия и от t .

Поэтому на точки, в любой окрестности которых поле не является тождественно нулевым, равенства продолжаются по непрерывности.

для прочих точек, в некоторой окрестности которых поле тождественно равно нулю, обе части равенств очевидно нулевые.

Геометрический смысл производной Ли позволяет также прояснить геометрический смысл дивергенции векторного поля относительно формы объёма.

При наличии на многообразии M размерности n нигде не нулевой формы $\nu \in \Omega^n(M)$ будем измерять объёмы компактных множеств (это техническое ограничение, чтобы объёмы были конечными) как

$$\text{vol}_\nu K = \int_K \nu$$

Напомним также, что дивергенция определяется как $L_X \nu = (\text{div}_\nu X) \nu$.

Теорема

7.72 (Геометрический смысл дивергенции).

Пусть на ориентированном многообразии M мера определена как интеграл от некоторой всюду ненулевой формы $\nu \in \Omega^n(M)$.

Тогда для дивергенции векторного поля X относительно объёма ν и всякого компактного $K \subseteq M$ имеет место формула

$$\int_K (\text{div}_\nu X) \nu = \frac{d}{dt} \text{vol}_\nu \varphi_t(K) \Big|_{t=0}$$

где φ_t - соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Заметим, что из теоремы о непрерывной зависимости от параметра следует, что $\varphi_t(K)$ действительно определено при достаточно малых t .

Доказательство

Напишем по определению дивергенции и с переменной порядка интегрирования и дифференцирования

$$\int_K (\operatorname{div}_\nu X) \nu = \int_K L_X \nu = \int_K \frac{d}{dt} \varphi_t^* \nu \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_K \varphi_t^* \nu \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(K)} \nu \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \operatorname{vol}_\nu \varphi_t(K) \Big|_{t=0}$$

Далее мы приводим разнообразные классические факты об интегрировании векторных полей в виде задач, подробности по этим вопросам можно найти в стандартных учебниках дифференциальной геометрии.

Problem

.73.

докажите, что скобка Ли векторных полей X, Y с соответствующими группами диффеоморфизмов φ_t, ψ_t является производной при $t = 0$ семейства диффеоморфизмов $\psi_{-\sqrt{t}} \varphi_{-\sqrt{t}} \psi_{\sqrt{t}} \varphi_{\sqrt{t}}$.

||
||

Можно выпрямить одно из векторных полей и проверить тождество в координатах.

Problem

.74.

Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в точке p многообразия M .

Докажите, что если какая-то скобка $[X_i, X_j]$ в точке p не является линейной комбинацией $X_1, \dots, X_k$ в какой-то точке, то не может быть k -мерных подмногообразий $N \subset M, N \ni p$, у которых $TN = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ в окрестности p .

||

Проверьте, что если два векторных поля касаются N в некоторой окрестности p , то их коммутатор тоже касается N .||

Problem

.75.

* Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через $X_1, \dots, X_k$ с коэффициентами-функциями.

Пусть поле X_i из нашего списка порождает однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ^t .

Докажите, что

$$\varphi_*^t \langle X_1, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$$

в окрестности p для достаточно малых t .

||

Используйте утверждение $\frac{d}{dt} \varphi_*^t Y = -[X_i, \varphi_*^t Y]$.

||

Задача 7.76 (Теорема фобениуса).

Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через $X_1, \dots, X_k$ с коэффициентами-функциями.

докажите, что в некоторой окрестности p найдётся подмногообразие $N \subset M$ размерности k , проходящее через p и у которого $TN \subseteq \langle X_1, \dots, X_k \rangle$.

||

Рассмотрите однопараметрические семейства диффеоморфизмов φ_i^t для соответствующих векторных полей X_i , докажите, что все они сохраняют линейную оболочку $X_1, \dots, X_k$.

Докажите гладкость в p параметрически заданного подмногообразия

$$N = \left\{ \varphi_k^{t_k} \circ \varphi_{k-1}^{t_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1}(p) : (t_1, \dots, t_k) \text{ из окрестности } (0, \dots, 0) \right\}$$

Проверьте принадлежность его касательного пространства линейной оболочке $X_1, \dots, X_k$.
 $\parallel$

24.1.8 Riemannian manifolds and Riemannian volume

мотивация и обзор применений

Theory

В предыдущих разделах мы убедились, что на произвольном гладком многообразии, не фиксируя локальные системы координат, можно делать много замечательных вещей, работать с векторными полями и дифференциальными формами, интегрировать их (в разных смыслах этого слова) и накладывать на многообразие дополнительную структуру, и пожалуй наиболее естественная структура, которую имеет смысл рассматривать - это (полу)риманова структура, то есть симметричная билинейная форма на касательных векторах.

Определение 7

.77.

Римановой структурой на гладком многообразии M называется задание положительно определённой квадратичной формы g_p на касательном пространстве $T_p M$ в каждой точке M , гладко зависящее от точки p .

Полуриманова структура это задание невырожденной, но необязательно положительно определённой квадратичной формы. ным произведением.

В координатной карте это скалярное произведение выглядит как

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j$$

где функции g_{ij} гладкие и в любой точке составляют симметричную невырожденную (и положительно определённую в римановом случае) матрицу, которая в линейной алгебре называлась матрица Грама.

Иначе это можно выразить формулами

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

На самом деле на всяком гладком многообразии существует риманова структура. ное картам $\{U_i\}$, в каждой карте построить риманову структуру g_i (в координатах это метрический тензор) и Положить

$$g = \sum_i \rho_i g_i$$

Эта сумма будет локально конечна и в любой точке будет давать положительно определённую квадратичную форму, так как сумма неотрицательно определённых квадратичных форм, хотя бы одна из которых положительно определена, будет положительно определена.

Problem

.78.

Докажите, что для всяких двух римановых структур g и g' на одном и том же многообразии M и $t \in [0, 1]$ билинейная форма $(1-t)g + tg'$ тоже будет римановой структурой.

|| Проверьте положительную определённость.

|| Эта задача показывает, что римановы структуры образуют непустое выпуклое множество.

Естественный способ получить риманову структуру на вложенном многообразии $M \subset \mathbb{R}^N$ - это просто ограничить стандартную квадратичную форму на $\mathbb{R}^N$ на каждое касательное пространство $T_p M$.

Говоря более абстрактно, мы ограничиваем стандартную (она называется евклидовой) риманову структуру

$$\sum_{i=1}^N dx_i \otimes dx_i$$

с евклидова пространства на его подмногообразие M .

В таком случае, если локальные координаты на M - это $u_1, \dots, u_n$, то риманова структура задаётся в координатах как

$$g_{ij} = \frac{\partial r}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial u_j}$$

где точка означает скалярное произведение.

Формула риманова объёма

Для (полу)римановой структуры g формула

$$\text{vol}_g = \sqrt{|\det g|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

где $\det g$ подразумевает детерминант матрицы (g_{ij}) , корректно определяет одну и ту же плотность меры в любой системе координат.

Это согласованный с ней способ измерять объёмы.

Понятие плотности меры означает величину, которая преобразуется почти как дифференциальная форма высшего ранга, но умножаясь при замене координат на модуль якобиана обратной замены, а не на сам якобиан; такая величина имеет интеграл, не зависящий от системы координат с любой ориентацией.

Риманов объём действительно даёт плотность меры, ибо как известно из линейной алгебры, при замене переменных с некоторой матрицей производных корень из детерминанта квадратичной формы будем умножаться на модуль якобиана обратной замены.

В случае ориентированного многообразия мы считаем vol_g формой высшей степени, положительной относительно выбранной ориентации.

Рассмотрим частный случай риманова объёма - площадь двумерной поверхности в евклидовом пространстве, то есть интеграл от vol_g по этой поверхности.

Заметим, что если поверхность задана параметрически и положительно ориентированные параметры на поверхности $-(u, v)$, то для индушированной с $\mathbb{R}^n$ римановой структуры

$$\text{vol}_g = \sqrt{|r'_u|^2 |r'_v|^2 - (r'_u \cdot r'_v)^2} du \wedge dv$$

В трёхмерном случае эту формулу можно продолжить как

$$\text{vol}_g = \sqrt{|r'_u|^2 |r'_v|^2 - (r'_u \cdot r'_v)^2} du \wedge dv = |[r'_u \times r'_v]| du \wedge dv$$

Это та формула, которая обычно используется в учебниках по математическому анализу для определения площади поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве.

Problem

.80.

докажите, что для гиперповерхности $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$, являющейся графиком гладкой функции $f: U \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in U\}$$

риманов объём в индуцированной с $\mathbb{R}^{n+1}$ римановой структуре находится по формуле

$$\text{vol } H = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2} dx_1 \dots dx_n$$

||

Установите сначала формулу для детерминанта квадратичной формы $g_0 + \alpha \otimes \alpha$, где g_0 - положительно определённая квадратичная форма, а α - линейная форма.

||

Для двух римановых многообразий M и N их произведение $M \times N$ можно тоже считать римановым многообразием по формуле

$$g_{M \times N}(X, Y) = g_M(p_*X, p_*Y) + g_N(q_*X, q_*Y),$$

где $p: M \times N \rightarrow M$ и $q: M \times N \rightarrow N$ - естественные проекции.

В матричном виде на произведении координатных карт $g_{M \times N}$ будет просто прямой суммой матриц g_M и g_N , то есть блочной матрицей из двух соответствующих квадратных блоков на диагонали.

Так как детерминант прямой суммы матриц равен произведению детерминантов исходных матриц, то для риманова объёма произведения (например, борелевских) подмножеств $X \subseteq M, Y \subseteq N$ выполняется формула:

$$\text{vol}_{M \times N}(X \times Y) = \text{vol}_M X \cdot \text{vol}_N Y$$

это по сути утверждение о детерминанте прямой суммы квадратичных форм (с учётом теоремы Фубини).

Свойство произведения в некотором смысле обосновывает естественность выбора риманова объёма, ещё одно обоснование естественности (при переходе к подмногообразию) будет дано в разделе 7.18.

Problem

.81.

Проверьте, что евклидова структура на $\mathbb{R}^n$ является произведением n римановых структур на прямой $\mathbb{R}^1$.

Problem

.82.

Посчитайте площадь поверхности (риманов объём) единичной сферы в $\mathbb{R}^3$.

||

Параметризуйте её каким-либо образом.

||

Problem

.83.

Посчитайте площадь поверхности тора в $\mathbb{R}^4$, заданного уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3^2 + x_4^2 = 1$$

||

Можно посчитать в лоб, а можно проверить, является ли этот тор произведением римановых многообразий.

||

Problem

.84.

У выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ взяли нормали к граням $\{n_i\}$ и площади этих граней $\{A_i\}$.

Докажите, что

$$\sum_i A_i n_i = 0$$

||

Поинтегрируйте по поверхности многогранника формы типа $dx \wedge dy$ и свяжите это выражение с площадями граней.

||

Problem

.85.

* Рассмотрим отображение единичной сферы $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ в $(n-1)$ -мерный симплекс $\Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ по формуле

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$$

Докажите, что риманов объём на сфере при этом переходит, с точностью до умножения на константу, в риманов объём на симплексе.

||

Риманов объём на сфере определён инвариантно относительно вращений и эта инвариантность характеризует его однозначно с точностью до константы.

Значит существует константа c_n , такая, что для всякого измеримого $X \subseteq S^{2n-1}$ его мера относительно риманова объёма равна гауссовой мере с плотностью $e^{-\pi|z|^2}$ конуса над множеством X , $\{tx : t \geq 0, x \in X\}$.

Далее уже нетрудно понять, во что переходит гауссова мера при рассматриваемом в задаче отображении.

||

Problem

.86.

* докажите, что для двумерной компактной поверхности с краем $S \subset \mathbb{R}^4$ и индуцированной с $\mathbb{R}^4$ евклидовой структуры выполняется

$$\text{vol}_g S \geq \int_S dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

Когда выполняется равенство?

||

Это на самом деле локальный вопрос, который в каждой точке сводится к рассмотрению двумерных линейных подпространств $\mathbb{R}^4$.

Его улобно решать, введя комплексную структуру на $\mathbb{R}^4$, то есть считая пары (x_1, x_2) и (x_3, x_4) двумя комплексными координатами в $\mathbb{C}^2$.]

24.1.9 Sprocket Hodge, gradient, rotor, divergence.

Заметим, что наличие (полу)римановой структуры позволяет преобразовать вектор в дифференциальную форму первой степени по формуле

$$X^b(Y) = g(X, Y)$$

Возможна и обратная операция, делающая из формы первой степени вектор в соответствии с формой

$$g(\alpha^\#, Y) = \alpha(Y)$$

В теоретической физике эти операции называются «опускание индекса» и «поднятие индекса», что связано со специфическими обозначениями координат векторов и линейных форм.

Например, для вектора с координатами X^i (написанными сверху) получается форма с координатами написанными снизу

$$X_i^b = \sum_j g_{ij} X^j$$

как принято в теоретической физике (там даже не пишут знак суммы).

Если речь идёт о стандартной евклидовой структуре в $\mathbb{R}^3$ и работе в ортонормированной системе координат, то эти операции оставляют те же самые координаты векторов и форм, поэтому в этом случае их можно не заметить.

Также наличие (полу)римановой структуры порождает билинейные симметрические формы на всех связанных с касательным пространством в точке пространствах, например на пространстве полилинейных кососимметричных форм в точке.

Для знакомых с понятием тензорного произведения и изоморфизмом $V^* \otimes U \cong \mathcal{L}(V, U)$ (ΔΛ Я

конечномерного V) можно сказать, что форма (полу)римановой структуры g может рассматриваться как отображение

$$T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

а также как элемент $T_p^* M \otimes T_p^* M$, или как отображение $T_p M \rightarrow T_p^* M$ (опускание индексов) с обратным $T_p^* M \rightarrow T_p M$ (поднятие индексов).

Композиция g и двух поднятий индексов на её аргументах даёт билинейное отображение

$$\tilde{g} : T_p^* M \otimes T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}$$

то есть симметричную билинейную форму на кокасательном пространстве.

Problem

.87.

Объясните, как связаны матрицы g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ (последнюю в теоретической физике пишут как g^{ij}), представляющие (полу)риманову структуру на исходном касательном пространстве и соответствующую билинейную форму на Авоиственном к нему кокасательном пространстве.

Problem

.88.

Докажите неравенство

$$\alpha(X)^2 \leq g(X, X) \cdot \tilde{g}(\alpha, \alpha)$$

||

При правильном выборе системы координат должно получиться неравенство Коши-Буняковского.

||

Тензорно перемножая $\tilde{g}$ на себя (и сортируя тензорные множители), можно расширить её до отображения

$$\tilde{g} : \underbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}_k \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

Вкладывая пространство $\Omega_p^k(M)$ (дифференциальных форм степени k в точке p) в тензорное произведение

$$\Omega_p^k(M) \subseteq \underbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}_k$$

мы таким образом можем рассмотреть $\tilde{g}$ как билинейную форму на $\Omega_p^k(M)$.

Так как в разных учебниках кососимметричные формы по разному вкладываются в полилинейные формы (с точностью до умножения на зависящую от k константу), то нам надо внести определённую нормировать произведение

$$\tilde{g}_p(\alpha, \beta).$$

Мы будем нормировать так, что если линейные формы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Omega^1(M)$ образует (почти) ортонормированный базис в точке p , то есть

$$\tilde{g}_p(\alpha_i, \alpha_j) = \pm \delta_{ij},$$

то формы $\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}$ будут образовывать (почти) ортонормированный базис относительно $\tilde{g}_p$.

Ортогональность будет иметь место в любом случае, а нормирование на единицу мы постулируем.

Будем теперь рассматривать многообразие M^n размерности n .

Заметим, что внешнее умножение между $\Omega^k(M)$ и $\Omega^{n-k}(M)$ в точке p является невырожденным спариванием, то есть для всякой ненулевой $\alpha \in \Omega^k(M)$ можно найти $\beta \in \Omega^{n-k}(M)$ так, что $\alpha \wedge \beta$ не будет равна нулю в точке p .

Problem

.89.

Проверьте невырожденность внешнего умножения в координатах в качестве упражнения.

Спаривание $\beta : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$ между векторными пространствами задаёт отображения $V \mapsto W^*$

$$X \mapsto (Y \mapsto \beta(X, Y))$$

и $W \rightarrow V^*$, невырожденность же означает, что оба этих отображения имеют нулевое ядро.

В конечномерном случае, когда размерность двойственного пространства равна размерности исходного, невырожденности достаточно для установления изоморфизмов $V \cong W^*$ и $W \cong V^*$.

Вспомнив также, что $\tilde{g}$ даёт изоморфизм между Ω^{n-k} в точке и его двойственным, мы можем обосновать корректность следующего определения.

Определение

В присутствии (полу)римановой структуры g на ориентированном многообразии M^n (чтобы vol_g можно было считать элементом $\Omega^n(M)$) формула

$$\alpha \wedge * \beta = \tilde{g}(\alpha, \beta) \text{vol}_g,$$

корректно определяет линейный оператор $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$, звёздочку Ходжа. Точнее можно сказать, что $*$ определяется как композиция изоморфизмов в каждой точке

$$\Omega_p^k(M) \longrightarrow (\Omega_p^k(M))^* \longrightarrow \Omega_p^{n-k}(M)$$

в которой первый возникает из невырожденного спаривания $\tilde{g}$ между формами k степени, а второй - из спаривания, заданного внешним умножением с делением на vol_g .

Оператор звёздочки является поточечным, то есть линейным относительно умножения на функцию, $*(f\alpha) = f * \alpha$.

Например, для $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой структурой и координатами x, y, z мы получим

$$\begin{aligned} *1 &= dx \wedge dy \wedge dz \\ *dx &= dy \wedge dz, *dy = dz \wedge dx, *dz = dx \wedge dy \\ *(dx \wedge dy) &= dz, *(dy \wedge dz) = dx, *(dz \wedge dx) = dy \\ *(dx \wedge dy \wedge dz) &= 1 \end{aligned}$$

Problem

.91.

докажите, что на n -мерном (полу)римановом многообразии для звёздочки $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$ выполняется

$$**\alpha = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn} \det g \cdot \alpha.$$

||

Проверьте в координатах, в которых g имеет диагональный вид с ± 1 на диагонали.

||

С помощью операций b , $\#$, $*$ мы можем выразить такие понятия, как ротор и дивергенция векторного поля в $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot} X = (*d(X^b))^{\#}, \quad \operatorname{div} X = *d(*X^b),$$

градиент функции как $\operatorname{grad} f = (df)^{\#}$.

Градиент тогда можно геометрически описать как вектор с максимальным значением $X(f)$ в точке при фиксированной длине $\sqrt{g(X, X)}$ и такой что $g(X, X) = X(f)$.

Геометрический смысл дивергенции, в силу задачи 7.59 и того, что $*1$ является формой риманова объёма, соответствует изменению риманова объёма при действии диффеоморфизмов, получающихся интегрированием данного векторного поля.

Над геометрическим смыслом ротора читатель может поразмышлять самостоятельно.

Problem

.92.

докажите, что определение дивергенции для риманова многообразия согласовано с определением дивергенции относительно формы объёма как $\operatorname{div} X \operatorname{vol}_g =$

$$L_X(\operatorname{vol}_g)$$

||

Используйте формулу Картана $L_X = i_X d + di_X$ и $*1 = \operatorname{vol}_g$.] Из приведённых формул для градиента, дивергенции и ротора видно, что они на самом деле зависят от римановой структуры в $\mathbb{R}^3$ и их можно считать корректно определёнными только до тех пор, пока мы не меняем её.

Говоря проще, можно сказать, что координатные формулы для них остаются теми же самыми при замене ортонормированной системы координат на другую ортонормированную систему координат.

Формулы $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} X = 0$

Докажите что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} X = 0$.

||

Вспомните свойство $d^2 = 0$.

||

Problem

.94.

докажите для гладкого векторного поля на $\mathbb{R}^3$, что если $\operatorname{rot} X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \operatorname{grad} f$, для некоторой функции f .

А если $\operatorname{div} X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \operatorname{rot} Y$, для некоторого векторного поля Y (последнее физики называют «векторный потенциал»).

||

Сведите к теореме 7.18 про обращение операции d .

||

Определения градиента, дивергенции и ротора по формулам (7.4) позволяют записать эти операции в любых криволинейных координатах, так как внешнее дифференцирование

во всех системах координат записывается одинаково, а оператор $*$ является линейным относительно относительно умножения на функции (то есть не содержит производных) и может быть выписан в координатах с помощью своего определения.

следующие задачи посвящены использованию римановой структуры и связанных с ней операций.

Problem

.95.

Выпишите оператор Лапласа для функций в сферических координатах $x = r$

$$\vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta.$$

||

Используйте выражение $\Delta f = *d * df$ и тот факт, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ ортогональны (но не ортонормированы).

Начните с доказательства формул

$$*dr = r^2 \sin \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi, \quad *d\vartheta = \sin \vartheta d\varphi \wedge dr, \quad *d\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} dr \wedge d\vartheta$$

||

Problem

.96.

* Функция f на римановом многообразии называется гармонической, если $\Delta f = *d * df = 0$.

Докажите, что у гармонической на $\mathbb{R}^n$ функции все средние значения на сферах с центрами в нуле равны её значению $f(0)$.

||

Заметьте, что оператор Лапласа линеен и инвариантен относительно вращений, следовательно функция, получающаяся из f усреднением относительно всех вращений $SO(n)$ тоже гармоническая и зависит только от расстояния до начала координат.

Найдите общий вид гармонических функций в $\mathbb{R}^n$, зависящих только от расстояния до начала координат.

||

Problem

.97.

докажите, что непостоянная гармоническая функция на многообразии не может иметь компактный носитель.

||

Выразите интеграл $\int_M |df|^2 \text{vol}_g = \int_M df \wedge *df$ через лапласиан Δf .]

Problem

.98.

В ортогональной матрице A с положительным детерминантом размера $n \times n$ взяли левую верхнюю подматрицу B размера $k \times k$ и правую нижнюю подматрицу C размера $(n-k) \times (n-k)$.

Докажите, что $\det B = \det C$.

||

действие ортогонального оператора A можно распространить на $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$, назовём этот оператор ΛA , его матричные элементы являются минорами исходной матрицы A .

Заметьте, что ΛA коммутирует с действием звёздочки Ходжа на $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ и звёздочка Ходжа сама ортогональна.

||

Problem

.99.

Проверьте, что можно подобрать понижающий степень формы на единицу дифференциальный оператор $d^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*-1}(M)$, такой что для форм с компактным носителем будет выполняться

$$\int_M \tilde{g}(d\alpha, \beta) \operatorname{vol}_g = \int_M \tilde{g}(\alpha, d^*\beta) \operatorname{vol}_g.$$

||
||

Попробуйте выражение $d^* = \pm * d *$ и подберите в нём знак.

Problem

.100.

Оператор Лапласа на дифференциальных формах (с точностью до знака) определяется как $\Delta = (d + d^*)^2$, гармонические формы определяются как решения уравнения $\Delta\alpha = 0$.

Докажите, что на компактном многообразии без края форма α гармоническая тогда и только тогда, когда $d\alpha = 0$ и $d^*\alpha = 0$.

||

Рассмотрите выражение $\int_M g(\alpha, \Delta\alpha) \operatorname{vol}_g$.

Problem

.101.

* Работая с линейным пространством V с симметричной билинейной формой g зададим для всякого $X \in V$ оператор на кососимметричных формах простран-

$$\begin{aligned} \text{ства } V \text{ как } e(X) : \wedge^* V &\rightarrow \wedge^* V \text{ как} \\ e(X) : \alpha &\mapsto X^b \wedge \alpha + i_X \alpha \end{aligned}$$

где операция i определена через g .

докажите, что эти операции удовлетворяют соотношению

$$e(X)e(Y) + e(Y)e(X) = 2g(X, Y)$$

Докажите, что они порождают (в смысле линейных комбинаций и умножения) алгебру Клиффорда размерности $2^{\dim V}$.

||

Выпишите выражение $e(X)e(Y) + e(Y)e(X)$ по определению, используйте что $X^b \wedge Y^b + Y^b \wedge X^b = 0$, $i_X i_Y + i_Y i_X = 0$ и правило Лейбница для i_X и i_Y .

Для вычисления размерности докажите, что если фиксировать базис $X_1, \dots, X_n$ в V , то алгебра Клиффорда порождена мономами $e(X_{i_1})e(X_{i_2})\dots e(X_{i_k})$ для всевозможных наборов $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ (это оценивает размерность сверху) и при этом любой элемент $\wedge^*(V)$ можно получить, умножая образующую $\wedge^n(V)$ на подходящий элемент алгебры Клиффорда (это оценивает размерность снизу).

||

24.1.10 Covariant derivative

Мы продолжаем рассматривать многообразие (M, g) с (полу)римановой структурой g (невырожденной, но необязательно положительно определённой).

Мы хотим установить существование операции ковариантного дифференцирования векторных полей и, аналогично внешнему дифференцированию, мы сначала перечислим

требуемые свойства этой операции $\nabla_X Y$, которая из двух векторных полей делает третье:
а) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ (линейность по первому аргументу) и $\nabla_X fY = X(f)Y + f \nabla_X Y$ (правило Лейбница) для умножения на функцию; б) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (отсутствие кручения); в) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (совместимость с g) существование такой операции мы сейчас установим.

Теорема

7.102 (Формула Козюля и существование ковариантной производной).
Из условий на ковариантное дифференцирование следует формула

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y).$$

Если считать правую часть формулы определением левой части, то построенное так ковариантное дифференцирование будет иметь требуемые свойства.

Доказательство

Применим свойство (в) к циклическим перестановкам тройки векторов:

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

Сложим первые два и вычтем из них третье, тогда получится

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) &= \\ = g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) &= \\ = 2g(\nabla_X Y, Z) - g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X) - g([Z, X], Y) \end{aligned}$$

где в последней строчке применено свойство (б) - отсутствие кручения.

Аальше остаётся перенести $2g(\nabla_X Y, Z)$ влево, а всё остальное - вправо.

Чтобы использовать эту формулу для определения $\nabla_Z Y$, надо проверить, что правая часть не зависит от производных Z , то есть при умножении Z на функцию f функция выносится из правой части.

Проверим это (не выписывая явно слагаемые, где f не дифференцируется)

$$\begin{aligned} X(g(Y, fZ)) + Y(g(fZ, X)) - fZ(g(X, Y)) + g([X, Y], fZ) - g([Y, fZ], X) + g([fZ, X], Y) &= \\ = f(\dots) + X(f)g(Y, Z) + Y(f)g(Z, X) - g(Y(f)Z, X) - g(X(f)Z, Y) &= f(\dots) \end{aligned}$$

Здесь использовались формулы типа $[X, Y] = L_X Y = -L_Y X$ и правило Лейбница для производной Лпроизведения функции на векторное поле.

Проверим также, что происходит при умножении X на f

$$\begin{aligned} fX(g(Y, Z)) + Y(g(Z, fX)) - Z(g(fX, Y)) + g([fX, Y], Z) - g([Y, Z], fX) + g([Z, fX], Y) &= \\ = f(\dots) + Y(f)g(Z, X) - Z(f)g(X, Y) - g(Y(f), X, Z) + g(Z(f)X, Y) &= f(\dots) \end{aligned}$$

и при умножении Y на f

$$\begin{aligned} X(g(fY, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(g(X, fY)) + g([X, fY], Z) - g([fY, Z], X) + g([Z, X], fY) &= \\ = f(\dots) + X(f)g(Y, Z) - Z(f)g(X, Y) + g(X(f)Y, Z) + g(Z(f)Y, X) &= \\ = f(\dots) + 2X(f)g(Y, Z) \end{aligned}$$

Таким образом установлено свойство (а).

Если поменять в формуле местами X и Y , то первые два слагаемых и последние два слагаемых поменяются местами, третье не изменится, и только четвёртое $g([X, Y], Z)$ поменяет знак.

Это доказывает свойство (б).

Для доказательства свойства (в) нам надо сложить две такие формулы с перестановкой Y и Z .

При этом первое слагаемое даст нам нужный результат, второе и третье поменяются местами и поменяют знак, то есть сократятся в сумме, четвёртое и последнее тоже поменяются местами и поменяют знак, а предпоследнее слагаемое просто поменяет знак и в сумме сократится.

Отличие ковариантной производной $\nabla_X Y$ от производной Ли $L_X Y$ заключается в том, что ковариантная производная C^∞ -линейна по вектору X ,

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

иначе говоря значение $\nabla_X Y$ в точке зависит только от значения X в той же точке, но не от производных X .

Свойство (б) при этом показывает, что некоторая связь с производной Ли у ковариантной производной всё же имеется.

Зависимость ковариантной производной от векторного поля Y включает в себя и его производные, что ясно из формулы Козюля или из приведённого ниже координатного выражения.

В целом такой характер зависимости $\nabla_X Y$ от X и Y позволяет определить «перенос вектора вдоль кривой», см.

далее формулу (7.5).

Можно определить ковариантную производную не только для векторных полей.

действие ковариантной производной ∇_X на функции определяется просто как $X(f)$, а на формах первой степени определяется из требования выполнения правила Лейбница для канонического умножения векторных форм первой степени на векторные поля:

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = \nabla_X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)$$

На формы высшей степени ковариантную производную тоже можно распространить, потребовав выполнения правила Лейбница для внешнего произведения форм.

Также можно распространить определение ковариантной производной по правилу Лейбница (для тензорного произведения) на симметричные формы от двух векторов и убедиться, что условие (в) совместимости ковариантного дифференцирования с g будет выглядеть как $\nabla g = 0$.

Problem

.103.

докажите, что условие (б) отсутствия кручения эквивалентно тому, что для форм первой степени выполняется

$$(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = d\alpha(X, Y)$$

||

Вспомните, что $d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) + \alpha([X, Y]).$ ||

Problem

.104.

Получите выражение в координатах для

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

при условии $\nabla_X Y = Z$ как

$$Z^k = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \gamma_{ij}^k X^i Y^j$$

Проверьте, что символ Кристоффеля

$$\gamma_{lij} = \sum_k g_{lk} \gamma_{ij}^k$$

можно в координатах найти как

$$\gamma_{lij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right).$$

|| По сути это формула Козюля для попарно коммутирующих векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l}$.
|| 7.11.

24.1.11 Curve length and geodesic equation

мотивация и обзор применений

Theory

Определим длину кривой $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ в римановом многообразии

$$\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt$$

эта формула мотивирована формулой длины кусочно непрерывно дифференцируемой кривой в $\mathbb{R}^n$.

Посмотрим, как ковариантная производная позволяет выписать уравнение для кривой, локально минимизирующей длину.

Заметим, что ранее, говоря о метрических пространствах, мы определяли длину кривой с помощью метрики пространства.

Для римановой структуры определение длины кривой другое и с его помощью уже можно определить внутреннюю метрику через нижнюю грань Алин кривых, соединяющих две данных точки.

Тогда риманово многообразие (с положительно определённой римановой структурой) превратится в метрическое пространство.

Problem

.105.

Проверьте аксиомы метрического пространства для метрики риманова многообразия.

||

Наименее тривиально проверить невырожденность метрики, что между двумя разными точками оказывается положительное расстояние.

Заметьте, что оценить снизу расстояние можно, если заметить, что кривая из точки p в точку q должна пересечь некоторую маленькую сферу S вокруг p в некоторой координатной окрестности, а далее оценить метрику в этой координатной окрестности снизу метрикой, пропорциональной евклидовой и оценить длину части кривой от $p_\Delta \circ S$.]

Это оправдывает использование термина риманова метрика как взаимозаменяемого с термином риманова структура, хотя на самом деле риманова структура g , строго говоря, не является метрикой, а лишь порождает метрику на римановом многообразии.

Если же речь идёт о полуримановой структуре g , то никакой метрики на своём многообразии она не порождает, но иногда и в этом случае g называют полуримановой метрикой, что мы тоже иногда будем делать.

Изучение локального строения риманова многообразия (см.

пояснения у неравенства (7.6) ниже) может прояснить, что его риманова метрика в точке p может быть получена как гессиан выражения $\rho^2(p, x)$ (как функции от x), то есть восстановить обратно квадратичную форму g по этой внутренней метрике тоже можно.

Проблема с минимизацией ммины заключается в том, что одна и та же кривая с разными параметризациями даёт одну и ту же длину и это вырождение надо как-то снимать.

Параметризация будет фиксирована, если вместо длины мы рассмотрим функционал «энергии»

$$E(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt$$

Теорема

106.

Среди всех параметризаций одной и той же кривой отрезком $[t_0, t_1]$ минимальная энергия достигается на параметризации с постоянной скоростью и в этом случае выполняется равенство

$$E(\gamma) = \frac{1}{(t_1 - t_0)} \ell(\gamma)^2$$

Доказательство

Напишем неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt \right) \cdot \left(\int_{t_0}^{t_1} dt \right) \geq \left(\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt \right)^2$$

Возьмём теперь функцию ρ с носителем в малой окрестности p и векторное поле $Z = \rho X$.

Для порождённого им семейства диффеоморфизмов φ_s рассмотрим деформации кривой $\varphi_s \circ \gamma$ и посчитаем производную их энергии

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(\varphi_s \circ \gamma) \Big|_{s=0} &= \int_{t_0}^{t_1} Z(g(V, V)) dt = 2 \int_{t_0}^{t_1} g(\nabla_Z V, V) dt = 2 \int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) g(\nabla_X V, V) dt = \\ &= -2 \int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) g(\nabla_V X, V) dt = -2 \int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) V g(X, V) dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) g(X, \nabla_V V) dt = \\ &= 2 \int_{t_0}^{t_1} \rho(\gamma(t)) g(X, \nabla_V V) dt \end{aligned}$$

здесь использовано коммутирование $[X, V]$ и его следствие $\nabla_X V = -\nabla_V X$, а также постоянство $g(X, V)$.

Если кривая даёт локальный экстремум функционала, то при любой ρ это выражение должно быть равно нулю.

По основной лемме вариационного исчисления $g(X, \nabla_V V) \equiv 0$ в некоторой окрестности p .

Это верно для непараллельных $\dot{\gamma}$ векторов в точке p , а на параллельные может быть продолжено до непрерывности, то есть это верно для всякого значения X в точке p .

Из невырожденности g следует, что $\nabla_V V = 0$ и мы получаем уравнение геодезической

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

Величину в левой части также называют ускорение и обозначают $\ddot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$.

Это уравнение, помимо всего прочего, означает постоянство квадрата скорости $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$, в частности, если кривая, дающая экстремум «энергии» хоть где-то имеет ненулевую скорость, то эта скорость остаётся постоянной.

Из этого следует, что при наличии нулевой скорости хоть в одной точки она должна оставаться нулевой везде.

другой способ справиться нулевой скоростью - заметить, что если мы будем выписывать уравнение Эйлера-Лагранжа по правилам вариационного исчисления, то мы получим то же уравнение $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ без дополнительных условий на скорость.

В предыдущем рассуждении было важно, что для всякого векторного поля X выражение

$$\nabla_{\dot{\gamma}}X$$

зависит только от значений векторного поля X на образе кривой и не зависит от его гладкого продолжения за пределы кривой, например в координатах (

Problem

.104) можно проверить, что в выражении будут фигурировать производные координат X вдоль $\dot{\gamma}$ и комбинации этих же координат с символами Кристоффеля.

В частности, условие

$$\nabla_{\dot{\gamma}}X = 0$$

является (при фиксированной γ) уравнением параллельного переноса векторного поля X вдоль кривой γ ; это дифференциальное уравнение первого порядка на X .

Это придаёт некоторый геометрический смысл ковариантной производной.

Problem

.107.

Проверьте, что параллельный перенос векторов из начала кривой в конец является ортогональным (относительно g) оператором.

||

Используйте совместимость ∇ с метрикой и докажите сохранение $g(X, X)$ при переносе.

||

Уравнение геодезической можно переписать в координатах следующим образом:

$$\frac{d^2\gamma^i}{dt^2} + \sum_{j,k} \gamma_{jk}^i \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} = 0$$

Его можно получить раскрытием выражения $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$, используя соотношение (частные производные в левой части понимаются как частные производные $\dot{\gamma}$, продолженной до векторного поля V)

$$\sum_j \dot{\gamma}^j \frac{\partial \dot{\gamma}^i}{\partial x_j} = \frac{d^2\gamma^i}{dt^2}$$

Иначе, уравнение геодезической в координатах можно получить напрямую стандартными методами вариационного исчисления (см. какой-нибудь учебник по дифференциальным уравнениям или книгу [3, гл. IV, 82], выписав уравнение Эйлера-Лагранжа в координатах:

$$\frac{\partial \sum_{ij} g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \sum_{ij} g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}{\partial \dot{\gamma}^k} = 0$$

в процессе его преобразования может пона, обиться свойство отсутствия кручения, в коорынатах выраженное как $\gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k$

Задача 7.108.

Докажите, что если риманово многообразие N вложено в риманово многообразие M и на N рассматривается индуцированная риманова метрика, то всякая геодезическая M , полностью лежащая на N , является геодезической N .

||
||

Для доказательства этого проще использовать вариационное описание геодезической.

24.1.12 Exponential mapping, local minimality of geodesic and completeness.

Положительная определённость римановой структуры, как уже было замечено, позволяет определить метрику (расстояние между парами точек) и рассуждать в метрических терминах.

В этом разделе мы рассмотрим римановы многообразия и свойства их метрики.

Мы уже установили, что геодезическая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, в качестве начальных условий для такого уравнения можно выбирать значения γ_i и $\dot{\gamma}_i$ в некоторый момент времени.

Более точно, по теореме о существовании и единственности решений дифференциального уравнения, для всякой точки $p \in M$ и всякого вектора $V \in T_p M$ найдётся геодезическая $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, определённая в некоторой окрестности нуля, для которой $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = V$.

Если всякая геодезическая в M продолжается до отображения $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ p определено экспоненциальное отображение:

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M, \quad \exp_p(V) = \gamma(1) \text{ для геодезической, такой что } \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = V$$

Теорема о гл. кой зависимости решения дифференциального уравнения от параметра показывает, что даже при отсутствии геодезической полностью это отображение даёт диффеоморфизм окрестности $0 \in T_p M$ и окрестности $p \in M$.

Problem

.109.

Если рассмотреть $(\exp_p)^{-1}$ в достаточно малой окрестности p , то получаются геодезические координаты в окрестности точки.

Докажите, что в этих координатах символы Кристоффеля обращаются в нуль в точке p .

||

Из уравнения геодезической в координатах и того, что все прямые через начало координат в геодезической системе координат являются геодезическими следует, что для любого i и любого вектора v в начале координат выполняется $\sum_{j,k} \gamma_{jk}^i v_j v_k = 0$.

Далее воспользуйтесь свойством отсутствия кручения в виде $\gamma_{jk}^i = \gamma_{kj}^i$.

Экспоненциальное отображение позволяет изучать локальное поведение функции расстояния в римановом многообразии M .

Рассмотрим случай положительно определённой метрики, то есть риманова многообразия, а не полуриманова.

Заметим для начала, что если геодезическая изменяется, сохраняя свою длину, то есть мы имеем дело с семейством геодезических $\gamma_s : [a, b] \rightarrow M$, параметризованных с одной и той же постоянной скоростью, то рассуждение из вывода уравнения геодезической показывает, что векторное поле $J = \frac{\partial \gamma}{\partial s}$ вдоль геодезической обладает свойством (V здесь является полем векторов скорости геодезических нашего семейства, оно коммутирует с J)

$$0 = Jg(V, V) = 2g(\nabla_J V, V) = -2g(\nabla_V J, V) = -2V(g(J, V)) + 2g(J, \nabla_V V) = -V(g(J, V))$$

Следовательно, вдоль кривой выполняется

$$g(J, V) = g\left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) = \text{const.}$$

В частности, если мы рассматриваем экспоненциальное отображение и меняем направление начального вектора скорости, но не его длину, образ экспоненциального отображения - конец геодезической одной и той же длины - движется ортогонально самой геодезической, так как на всей геодезической должно выполняться $g(\dot{J}, V) = 0$.

Теперь мы более детально рассмотрим экспоненциальное отображение в окрестности нуля и выясним, как связана евклидова норма в касательном пространстве точки и риманова метрика в окрестности этой точки.

для касательного вектора $V \in T_p M$ выражение $|V| = \sqrt{g(V, V)}$ даёт функцию на $T_p M$, а экспоненциальное отображение $\exp_p$ делает из неё функцию $r : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ в некоторой окрестности U точки p , которую мы находим из теоремы об обратном отображении.

Можно считать, что окрестность U задана условием $r(x) \leq r_0$.

Из замеченного выше свойства ортогональности следует, что поверхности уровня $r(x) = \text{const}$ ортогональны геодезическим из точки p , иначе говоря, дифференциал функции r в отличных от p точках имеет единичную норму в смысле метрики g , обозначим единичное векторное поле $R = \text{grad } r = dr^b$, это векторное поле направлено вдоль геодезических из p .

После введения такой функции $r : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ мы рассмотрим не обязательно геодезическую кривую γ с началом в p , лежащую в U .

Тогда можем написать по неравенству Коши-Буняковского (7.6) $\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt \geq$

$\int_{t_0}^{t_1} g(\dot{\gamma}, R) dt = \int_{t_0}^{t_1} dr(\dot{\gamma}) dt = \int_{t_0}^{t_1} d(r(\gamma)) = r(\gamma(t_1)) - r(\gamma(t_0))$. Так как очевидно для всякой точки x с $r(x) \leq r_0$ по определению существует геодезическая из p в x длины $r(x)$, то мы получаем, что расстояние от p до x в точности равно $r(x)$ и отрезки геодезических от p до x являются кратчайшими кривыми, то есть реализующими минимум расстояния.

Иначе ситуацию можно описать так, что экспоненциальное отображение $\exp_p$ в некоторой окрестности нуля переводит длину вектора в расстояние от точки p .

Problem

.110.

Докажите эквивалентность топологии риманова многообразия как многообразия и как метрического пространства.

||

надо доказать, что всякая окрестность точки в топологии многообразия содержит метрическую окрестность и всякая метрическая окрестность содержит окрестность в смысле топологии многообразия.

||

Следующий набор задач проливает свет на теорему Хопфа-Ринова о том, что для римановых многообразий геодезическая полнота и метрическая полнота эквивалент-

Problem

7.111.

Докажите, что если риманово многообразие полно в своей внутренней метрике то всякое равномерно ограниченное векторное поле на нём имеет интегральные кривые, определённые для всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

||

Предположите, что решение не продолжается за момент времени T , как в Доказательстве теоремы 7.69, и используйте полноту.

||

Problem

.112.

Докажите, что если риманово многообразие полно в своей внутренней метрике, то оно геодезически полно.

||

Можно рассуждать аналогично предыдущей задаче, но с поправкой на то, что уравнение геодезической - это уравнение второго порядка.

||

Problem

.113.

Модифицируйте предыдущее рассуждение с функцией r что для всякой натурально параметризованной отрезком геодезической существует $\delta > 0$ такое, что всякий её кусок длины не более δ является кратчайшим.

||

Используйте компактность отрезка.

||

Problem

.114.

* Докажите, что кривая в римановом многообразии, которая является кратчайшей, на самом деле является геодезической.

Problem

.115.

* Докажите, что у геодезически полного и связного метрического многообразия экспоненциальное отображение сюръективно.

||

Рассмотрите точки p и q и заметьте из рассуждения с функцией r , что при нахождении кратчайшей между p и q достаточно рассматривать кривые, начинающиеся с геодезического отрезка длиной не менее r_0 , и при стремлении длин кривых к расстоянию $\rho(p, q)$ из компактности можно считать, что этот отрезок стремиться к какому-то фиксированному отрезку γ .

Далее, предполагая, что γ не достаёт до точки q , повторите рассуждение с заменой p на его конец p' и

покажите, что γ можно наращивать с сохранением свойства $\ell(\gamma) + \rho(p', q) = \rho(p, p') + \rho(p', q) = \rho(p, q)$.

При переходе от p' к p'' будет важно, из $\rho(p', p'') + \rho(p'', q) = \rho(p', q)$ и предыдущего равенства следует, что $\rho(p, p') + \rho(p', p'') = \rho(p, p'')$. ||

Problem

.116.

* Докажите, что если риманово многообразие геодезически полно, то оно полно в своей внутренней метрике.

||

Заметьте, что по предыдущей задаче замкнутый метрический шар радиуса R с центром в точке $p \in M$ является образом при экспоненциальном отображении шара радиуса R в касательном пространстве $T_p M$.

Эти шары компактны как образы компактов, и тогда проходит доказательство полноты с использованием компактности ограниченных множеств и нахождением частичного предела фундаментальной последовательности.

||

Problem

.117.

* Докажите, что на каждом многообразии без края можно ввести полную риманову метрику.

||

Попробуйте использовать разбиение единицы, позаботившись о достаточно быстром убывании метрики «на бесконечности»; или используйте теорему Уитни о вложении.

||

Problem

.118.

* Докажите, что компактное многообразие S в другом многообразии M имеет трубиатую окрестность U и гладкое отображение (ретракиию) $r : U \rightarrow S$, для которого $r|_S = \text{id}_S$

||

Возьмите многообразие $N_M S$, составленное из пар (p, v) , где $p \in S$, а вектор v в точке p касательный к M и перпендикулярный S .

Экспоненциальное отображение можно рассматривать как гладкое отображение $\exp : N_S M \rightarrow M$.

Проверьте, что оно является диффеоморфизмом в окрестности S , то есть для достаточно малых v .

Ретракцию получите как композицию обрат-

ного к этому отображению и естественной проекции $N_M S \rightarrow S$.

||

7.13.

24.1.13 Quantities

обсуждаем дивергенцию и.

кстати, как это связано с трехмерной мерой?

24.1.14 Curvature of Riemannian manifolds

мотивация и обзор применений

Theory

Исследование вариации геодезических, то есть производных семейств геодезических по параметру, естественным образом приводит к понятию кривизны Римана.

Но мы уравнение в вариациях для геодезической оставляем в виде задачи 7.128, а кривизну просто определим по некоторой формуле оператором ковариантного дифференцирования.

Определение

Определение 7.119.

Выражение (делающее из трёх векторных полей одно векторное поле)

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

называется тензор кривизны Римана.

Теорема

120.

Выражение тензора кривизны Римана является тензором в том смысле, что оно линейно по X, Y , и Z и при умножении на функцию f векторного поля X, Y , или Z всё выражение просто умножается на f .

Доказательство

Линейность по всем аргументам ясна из формулы.

Проверим, что происходит при умножении на функцию, не выписывая слагаемые, в которых функция просто выносится за скобки:

$$R_{fX,Y}Z = f(\dots) + Y(f)\nabla_X Z + \nabla_{L_Y fX}Z = f(\dots) + Y(f)\nabla_X Z + Y(f)\nabla_X Z = f(\dots)$$

Аналогично для умножения Y на функцию, так как выражение кососимметрично по перестановке X и Y .

Попробуем умножить Z на функцию:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}fZ &= f(\dots) + \nabla_X(Y(f)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y(X(f)Z + f\nabla_X Z) - [X,Y](f)Z = f(\dots) + \\ &+ X(Y(f))Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z - Y(X(f))Z - X(f)\nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - [X,Y](f)Z = \\ &= f(\dots) + X(Y(f))Z - Y(X(f))Z - [X,Y](f)Z = 0 \end{aligned}$$

где в конце использована интерпретация скобки Ли как коммутатора при действии на функции.

Доказанное утверждение означает, что мы можем выписать $R_{X,Y}Z$, зная лишь величины R_{ijk}^ℓ , такие что

$$R_{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{\ell} R_{ijk}^\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

получив выражение для координат

$$(R_{X,Y}Z)^\ell = \sum_{i,j,k} R_{ijk}^\ell X^i Y^j Z^k$$

не содержащее производных.

То есть тензор кривизны на самом деле является поточечной трилинейной операцией $T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$, гладко зависящей от точки p .

Из этого, в частности, следует, что если тензор кривизны в какой-то системе координат ненулевой, то и в любой другой криволинейной системе координат он будет ненулевой.

Problem

.121.

Проверьте, что выражение $\nabla_X Y$ не является тензором по Y .

Приведите пример, когда в одной системе координат все символы Кристоффеля обращаются в нуль, а в другой - нет.

Тензорный характер кривизны Римана, то есть независимость от производных участвующих векторных полей, позволяет для вычисления его значения в точке продолжать векторы из точки произвольно.

Например, удобно продолжать векторы из точки до векторных полей так, чтобы векторные поля коммутировали, тогда слагаемое $\nabla_{[X,Y]}Z$ в определении тензора кривизны обнулится.

Геометрический смысл тензора кривизны исходя из определения можно понимать так: если два векторных поля X и Y коммутируют, то ковариантная производная третьего векторного поля по этим двум зависит от порядка дифференцирования (сравните с леммой 6.12), и эта зависимость как раз выражается тензором кривизны Римана.

Также мы можем связать тензор кривизны римана с понятием переноса вектора вдоль кривой.

Пусть у нас есть замкнутая кривая γ , являющаяся краем двумерной поверхности S в многообразии M с координатами u, v .

Тогда мы можем написать с помощью формулы Грина, обозначив для краткости $X = \frac{\partial}{\partial u}, Y = \frac{\partial}{\partial v}$: Выражение

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T)$$

мы будем называть формой кривизны Римана.

Следствия получанной формулы представлены в задачах:

Problem

.122.

* Пусть векторы X и Y непараллельны в точке p и продолжены до коммутирующих векторных полей в окрестности p .

докажите что при переносе вектора Z по контуру маленького параллелограмма около точки p с направлениями сторон X и Y он меняется на

$$\frac{-R_{X,Y}Z}{\sqrt{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}}A + o(A)$$

где A - площадь параллелограмма.

||

Продолжите вектор Z с помощью связности по левой стороне параллелограмма, а потом с помощью связности продолжите его слева направо.

Продолжите вектор T с помощью связности по правой стороне параллелограмма, а потом продолжите его справа налево.

Заметьте, что при этом в правой части формулы $\int_{\gamma} g(\nabla_{\dot{\gamma}}Z, T) dt$ останется только интеграл от формы кривизны.

||

Problem

.123.

* докажите, что при тождественном равенстве нулю тензора кривизны (полу)риманова многообразия результат переноса вектора вдоль кривой не меняется при гомотопиях кривой и в окрестности каждой точки существует система координат, в которой компоненты g постоянны.

||

Рассмотрите гомотопию между кривыми как поверхность с координатами u, v из некоторого прямоугольника, продолжения векторов до векторных полей сделайте как в предыдущей задаче.

||

у формы кривизны Римана есть некоторые симметрии.

Очевидно, что она меняет знак при перестановке X и Y , но есть и другие свойства, которые описаны в следующих задачах.

Problem

.124.

Докажите первое тождество Бьянки:

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$$

||

Можно продолжить векторы до попарно коммутирующих векторных полей и применить отсутствие кручения для коммутирующих векторных полей в виде $\nabla_X Y = \nabla_Y X$.]

Problem

.125.

Докажите, что форма кривизны Римана

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T)$$

меняет знак при перестановке X и Y , меняет знак при перестановке Z и T и не меняется при обмене пар X, Y и Z, T .

||

Считая векторные поля попарно коммутирующими, можно из совместимости ∇ с метрикой и формулы Козюля получить выражение

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, T) = & \\ = \frac{1}{2}X(Z(g(Y, T))) + \frac{1}{2}Y(T(g(X, Z))) - \frac{1}{2}X(T(g(Y, Z))) - \frac{1}{2}Y(Z(g(X, T))) + & \\ + g(\nabla_X Z, \nabla_Y T) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X T) & \end{aligned}$$

которое имеет требуемые свойства симметрии с учётом коммутирования векторных полей.

||

Problem

7.126.

Получите выражения для координат формы кривизны Римана

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T)$$

через координаты g .

||

Подставьте базисные векторные поля $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в формулу из предыдущей задачи.

||

Problem

.127.

* Докажите, что форма кривизны Римана полностью определяется значениями $R(X, Y, X, Y)$ на всевозможных парах векторов X, Y . [[Пусть V - касательное пространство в какой-то точке, так как в форму кривизны подставляется не более четырёх векторов, достаточно рассмотреть четырёхмерный случай.

Исходя из свойств симметрии форма кривизны может считаться симметричной билинейной формой $\tilde{R}$ на $\wedge^2 V$, которая в силу известных свойств билинейных форм определяется своими значениями на парах ξ, ξ для всевозможных $\xi \in \wedge^2 V$.

Проверьте, что при $\dim V \leq 3$ все ξ имеют вид $X \wedge Y$ и тогда утверждение доказано.

Проверьте, что при $\dim V = 4$ в виде $X \wedge Y$ представляются те и только те ξ , которые удовлетворяют квадратичному соотношению $\xi \wedge \xi = 0$.

Это означает, что R определяется своими значениями на наборах вида X, Y, X, Y с точностью до выражения, пропорционального $\det(X, Y, Z, T)$.

Далее можно использовать тождество Бьянки, чтобы показать, что пропорциональные $\det(X, Y, Z, T)$ выражения можно исключить.

||

Риманова кривизна также необходима для понимания того, как меняются геодезические в зависимости от начального параметра или какого-то еще параметра.

Тогда производная по параметру задаёт векторное поле вдоль геодезической и для него можно написать дифференциальное уравнение.

Подробности даны в следующей задаче. Задача 7.128 (Уравнение Якоби).

докажите, что если имеется гладкое семейство геодезических $\{\gamma_s\}$, то производная $J = (\gamma_s)'_s$ является при данном значении s векторным полем J вдоль $\gamma = \gamma_s$, удовлетворяющим линейному дифференциальному уравнению (со второй производной в смысле ковариантного дифференцирования по кривой)

$$\ddot{J} = -R_{J,\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$$

||

Поясните возможность сделать предположение $[J, V] = 0$ и написать формулы

$$0 = \nabla_J 0 = \nabla_J \nabla_V V = R_{J,V}V + \nabla_V \nabla_J V = R_{J,V}V + \nabla_V \nabla_V J = R_{J,V}V + \ddot{J}$$

||

Для читателей, знакомых с понятием тензора и тензорного произведения из линейной алгебры можно сделать такие пояснения.

Понятие тензора или тензорного поля в дифференциальной геометрии означает выбор элемента некоторого тензорного произведения

$$\underbrace{T_p M \otimes \cdots \otimes T_p M}_k \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}_\ell$$

гладко зависящий от точки p .

Более конкретно при данных значениях k и ℓ говорят о тензоре ранга (k, ℓ) .

Из изученного ранее мы видим, что векторное поле - это тензор ранга $(1, 0)$, дифференциальная форма степени ℓ - это тензор ранга $(0, \ell)$, антисимметричный относительно действия группы перестановок $\mathfrak{S}_\ell$ на множителях тензорного произведения.

Риманова или полуриманова метрика - это тензор ранга $(0, 2)$, симметричный относительно перестановок двух множителей тензорного произведения.

Тензор кривизны Римана в таких терминах имеет ранг $(1, 3)$, так как он из трёх векторов делает один полилинейным способом.

Форма кривизны $R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T)$ при этом имеет ранг $(0, 4)$.

Для геометрии и физики важна также билинейная форма (или тензор ранга $(0, 2)$), которая получается в качестве свёртки тензора кривизны по паре переменных.

Выбрав взаимные базисы в касательном пространстве e_i и f_i , так что $g(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, мы можем рассмотреть тензор кривизны Риччи

$$\text{Ric}(Y, Z) = \sum_{i=1}^n R(e_i, Y, Z, f_i) = \sum_{i=1}^n g(R_{e_i, Y}Z, f_i)$$

Геометрический смысл этого тензора (симметричной билинейной формы) в том, что отношение риманова объёма в окрестности точки p к объёму, пришедшему из экспоненциального отображения с касательного пространства, в квадратичном приближении в точке $x \in U(p)$ равно

$$1 - \frac{1}{6} \text{Ric}(\exp_p^{-1} x, \exp_p^{-1} x) + o(\rho(x, p)^2)$$

Эта формула получается из уравнения Якоби, так как изменение объёма можно связать со следом оператора, стоящего в правой части этого уравнения.

Читатель может попробовать восстановить детали этого рассуждения самостоятельно.

Problem

.129.

* Докажите, что в трёхмерном случае риманову кривизну можно восстановить по тензору Риччи.

||

Можно проделать манипуляции в явном виде, а можно воспользоваться задачей 7.127.]

Problem

.130.

для метрики на области $D \subset \mathbb{R}^2$ вида

$$g(X, Y) = e^{2U}(X, Y)$$

где $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ - гладкая функция, а (X, Y) - евклидово скалярное произведение, найдите тензор кривизны Римана.

||

Для упрощения вычислений все векторные поля можно считать имеющими постоянные коэффициенты в данной системе координат, и в частности коммутирующими друг с другом.

В таких предположениях формула Козюля сокращается $\triangle$

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y))$$

а постоянство векторных полей позволяет её расписать как (скобки обозначают евклидово скалярное произведение)

$$2e^{2U}(\nabla_X Y, Z) = 2X(U)e^{2U}(Y, Z) + 2Y(U)e^{2U}(Z, X) - 2Z(U)e^{2U}(X, Y)$$

что упрощается до

$$(\nabla_X Y, Z) = X(U)(Y, Z) + Y(U)(Z, X) - Z(U)(X, Y)$$

или эквивалентно (с градиентом в евклидовом смысле)

$$\nabla_X Y = X(U)Y + Y(U)X - (X, Y) \text{grad } U$$

Рассмотрев поля $X = \frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ тогда можно получить

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X = U'_x Y + U'_y X, \quad \nabla_X X = U'_x X - U'_y Y, \quad \nabla_Y Y = -U'_x X + U'_y Y$$

и в итоге

$$\begin{aligned} R_{X,Y}X &= \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_X X = U''_{xx}Y + U''_{yx}X - U''_{xy}X + U''_{yy}Y + \\ &+ U'_x(U'_x X + U'_y Y) + U'_y(U'_x X - U'_y Y) - U'_x(U'_x X + U'_y Y) + U'_y(-U'_x X + U'_y Y) = \\ &= U''_{xx}Y + U''_{yy}Y + 0 = \Delta U \cdot Y, \end{aligned}$$

что с учётом симметрий тензора Римана даёт для произвольных векторов

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T) = \Delta U e^{-2U}(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z))$$

||

24.1.15 On the Space-Time of the Special Theory of Relativity

мотивация и обзор применений

Theory

Внимательное изучение показывает, что на самом деле многие нужные в физике вещи естественней записывать в терминах векторных полей и дифференциальных форм.

Например, работа силы вдоль траектории естественно определяется как интеграл дифференциальной формы первой степени по ориентированной кривой.

Мы рассмотрим еще один содержательный пример, когда в дело вступает полуриманова структура: пространство-время специальной теории относительности $\mathbb{R}^{1+3}$ с координатами t, z, y, z и полуримановой структурой (иногда выбирается противоположный знак)

$$g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

Это пространство является плоским приближением к реальной ситуации, и на самом деле выписываемые далее формулы для электромагнитного поля будут верны и в общей теории относительности, когда g будет произвольной полуримановой метрикой с той же сигнатурой $1 + 3$.

Это пространство является минимальной модификацией евклидова пространства в сторону замены положительно определённой метрики на просто невырожденную.

В пространстве $\mathbb{R}^{1+3}$ векторы v с условием $g(v, v) = 0$ соответствуют движению световых лучей (по прямым данного направления), векторы с условием $g(v, v) > 0$ называются пространственно-подобными, а $g(v, v) < 0$ - времениподобными.

Времениподобные векторы соответствуют возможным движениям частиц положительной массы.

Problem

.131.

докажите, что множество времениподобных векторов распадается на две компоненты связности, их можно назвать направленными в будущее и в прошлое.

Problem

.132.

докажите, что в $\mathbb{R}^{1+3}$ для двух времениподобных векторов X, Y выполняется

$$g(X, Y)^2 \geq g(X, X) \cdot g(Y, Y)$$

||
Вспомните доказательство неравенства Коши-Буняковского и инвариантности сигнатуры квадратичной формы.
||

Problem

.133.

докажите, что отношение между точками x и $yx - y$ является направленным в будущее вектором» порождает отношение частичного порядка.

Подмногообразия в $\mathbb{R}^{1+3}$ будем называть времениподобными, если все их касательные векторы времениподобны, и пространственноподобными, если все их касательные векторы пространственноподобны.

Problem

.134.

докажите, что времениподобные многообразия в $\mathbb{R}^{1+3}$ имеют размерность не более 1, а пространственноподобные - не более 3.

||
Вспомните про инвариантность индекса квадратичной формы.
||

Problem

.135.

докажите, что времениподобное многообразие в $\mathbb{R}^{1+3}$ не может быть диффеоморфно окружности.

Problem

.136.

Докажите, что времениподобные прямые максимизируют $\int_{\gamma} \sqrt{|g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})|} dt$ (собственное время иастиць) среди всех времениподобных кривых, соединяющих две данные точки.

||
Выведите обратное неравенство треугольника из обратного неравенства Коши-Буняковского.
||

Аналогично ортогональным преобразованиям евклидова пространства можно рассмотреть преобразования $\mathbb{R}^{1+3}$, которые сохраняют полуриманову структуру (то есть являются изометриями).

В рассматриваемой системе координат для полуримановой структуры обнуляются все символы Кристоффеля, геодезические оказываются прямыми линиями, параметризованными с постоянной (в смысле координат) скоростью, и всякий диффеоморфизм, сохраняющий прямые и их равномерную параметризацию, обязан быть аффинными.

Problem

.137.

Докажите аккуратно, что сохранение прямых и их равномерной параметризации влечёт аффинность изометрий $\mathbb{R}^{1+3}$.

Если рассмотреть аффинные преобразования по модулю сдвигов (очевидно являющихся изометриями), то есть рассмотреть линейные преобразования, сохраняющие g как квадратичную форму, то получится группа Лоренца, обозначаемая $O(1, 3)$, последнее обозначение можно распространить и на группу изометрий невырожденной квадратичной формы произвольной сигнатуры.

Problem

.138.

Докажите, что группа Лоренца может перевести любой направленный в будущее единичный вектор в любой другой направленный в будущее единичный вектор.

||

В силу наличия композиции и взятия обратного в группе достаточно доказать, что вектор $(1, 0, 0, 0)$ можно перевести в любой направленный в будущее единичный вектор.

Полезно выписать координаты такого линейного преобразования из $O(1, 3)$ явно.

||

Problem

.139.

Докажите, что любой «почти ортонормированный» базис, в котором $g(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$, можно группой Лоренца перевести в любой другой такой же базис.

||

Заметьте, что при переводе вектора с данными координатами в одном базисе в вектор с теми же координатами в другом базисе получается изометрия.

||

Problem

.140.

Докажите, что группа Лоренца имеет четыре компоненты связности.

||

Рассмотрите детерминант преобразования и возможную смену прошлого на будущее.

Докажите также, что преобразования единичного детерминанта, не меняющие местами прошлое и будущее, составляют связную подгруппу.

||

Problem

.141.

* Заметьте, что множество всевозможных направлений световых лучей из начала координат в $\mathbb{R}^{1+3}$ диффеоморфно двумерной сфере.

Проверьте, что при введении на ней римановой структуры из представления её в виде решения системы уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, t = 1$$

преобразования группы Лоренца оказываются конформными, то есть сохраняют риманову структуру с точностью до умножения на функцию.

||

Заметьте, что на световом конусе $\{t^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$ возникает вырожденная риманова структура, вырожденная вдоль световых лучей, проходящих через нуль.

При этом на всякой двумерной поверхности в этом конусе, которая пересекает каждый световой луч ровно один раз и не касается световых лучей, эта риманова структура уже не является вырожденной.

Докажите, что центральная проекция одной такой поверхности на другую конформна относительно их римановых структур.

||

Problem

.142.

Найдите сигнатуру квадратичной формы $Q(A) = \det A$ на пространстве V эрмитовых матриц 2×2 .

Выпишите какой-нибудь ортогональный базис в V относительно квадратичной формы Q .

Problem

.143.

В условиях предыдущей задачи проверьте, что формула $A \mapsto T^*AT$ даёт изометрии Q для всякой комплексной матрицы T размера 2×2 с единичным детерминантом.

У построенного таким образом гомоморфизма группы $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(1, 3)$ опишите ядро и образ.

24.1.16 On motion in an electromagnetic field, Maxwell's equations, Einstein's equation (???)

(??? мб вообще удалю, потому что это не матан.)

(?? тупо задачи что ли дал и все??)

мотивация и обзор применений

Theory

В этом разделе мы посмотрим геометрическую интерпретацию классической электродинамики.

дело может происходить в рассмотренном выше плоском пространстве-времени, или в полуримановом многообразии более общего вида, с сигнатурой $1+3$.

В добавок к (полу)римановой структуре зададим еще дифференциальную форму $\alpha \in \Omega^1(M)$ и рассмотрим вопрос поиска экстремальных кривых достаточно естественного функционала

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + \alpha(\dot{\gamma}) \right) dt$$

Можно проверить, что уравнение предположительно экстремальной кривой будет отличаться от уравнения геодезической слагаемым, зависящим от α следующим образом (ускорение понимается как $\ddot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$):

$$\ddot{\gamma} = (i_{\dot{\gamma}} d\alpha)^{\#}$$

то есть для любого векторного поля X при деформациях вдоль X мы должны иметь $g(\ddot{\gamma}, X) = d\alpha(X, \dot{\gamma})$

Problem

.144.

Проверьте эту формулу по аналогии с рассуждением для уравнения геодезической.

Такое уравнение (после добавления констант массы в g и заряда в α) в полуримановой метрике теории относительности соответствует движению заряженной частицы в электромагнитном поле $F = d\alpha$.

Тот факт, что в уравнение α входит только в виде своего дифференциала можно объяснить тем, что замена α на α' с равенством $d\alpha = d\alpha'$ не меняет значение $A(\gamma)$ (если еще дополнительно предположить, например, поверхностную односвязность многообразия).

При некотором желании можно даже определить $A(\gamma)$ в некотором локальном смысле, имея лишь замкнутую форму F без глобального потенциала.

Само по себе электромагнитное поле F удовлетворяет достаточно простой (в изученных нами терминах) системе уравнений.

Если добавить понятие электрического тока как формы $j \in \Omega^3(M)$, описывающее усреднённое движение большого количества заряженных частиц, то можно написать уравнения

$$dF = 0, \quad d(*F) = j$$

Первое из них выражает уже замеченную замкнутость F , второе выражает связь F с током.

Расписав эти уравнения в координатах с помощью выражения (знаки могут быть разными при разном выборе знаков в g)

$$F = (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

можно убедиться, что это на самом деле классические уравнения Максвелла в вакууме с точностью до констант.

Форму тока j при этом можно интегрировать по трёхмерным гиперповерхностям, находя полный заряд (если гиперповерхность пространственноподобна) или интерпретируя интеграл как поток заряда через двумерную пространственноподобную поверхность за заданное время.

Условие $j = d(*F)$ и формула Стокса гарантируют, что интеграл тока по компактным трёхмерным многообразиям без края равен нулю, это называется «сохранение заряда».

Ток также можно считать вектором J , имея в виду формулу $j = i_J \text{vol}_g$, но выписанные ранее формулы показывают, что удобнее считать ток формой степени три.

Форму $*F$ при этом можно интегрировать по двумерным пространственноподобным поверхностям, находя в силу уравнения Максвелла количество заряда, ограниченного такой поверхностью в некоторой трёхмерной пространственноподобной области, краем которой является данная двумерная поверхность.

Problem

.145.

Найдите действие звёздочки Ходжа на формах $dx \wedge dt, dy \wedge dt, dz \wedge dt, dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ в $\mathbb{R}^{1+3}$.

Problem

.146.

Выпишите уравнения для градиента и дивергенции векторного поля в стандартных координатах $\mathbb{R}^{1+3}$.

Проверьте, есть ли отличия от случая евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

Problem

.147.

Выразите уравнение $d(*F) = j$ через дивергенцию и ротор (по пространственным координатам) в $\mathbb{R}^{1+3}$.

Продолжая тему физических уравнений, выпишем уравнение Эйнштейна для гравитационного поля (полуримановой структуры), которое с точностью до физических констант в четырёхмерном пространстве-времени выглядит как

$$\text{Ric} - 1/2 Sg + \Lambda g = T$$

где $S = \sum_{i=1}^4 \text{Ric}(e_i, f_i)$ - свёртка (след) тензора Риччи, скалярная кривизна, отвечающая за искажение объёма окрестности точки по сравнению с объёмом из экспоненциального отображения, Λ - космологическая постоянная, также известная как «тёмная энергия», а

T - тензор энергии-импульса, который зависит от находящегося в пространстве вещества и излучения.

Уравнение Эйнштейна получается варьированием функционала действия, в котором часть, отвечающая за собственно гравитационное поле имеет вид интеграла скалярной кривизны по риманову объёму многообразия.

Читатель, знакомый с методами вариационного исчисления, может проверить, что так получается уравнение без Ли T .

Константу Λ в уравнении можно получить, если добавить в действие риманов объём многообразия.

Тензор энергии-импульса в таком подходе возникает при добавлении в действие части, зависящей от вещества и излучения.

Часть, отвечающая за частицу и её взаимодействие с электромагнитным полем уже выписывалась выше.

Часть, порождающая уравнения Максвелла, включает интегралы от $F \wedge *F$ и $\alpha \wedge j$ по многообразию, что читатель может проверить в качестве упражнения.

24.1.17 Model spaces of Riemannian geometry

мотивация и обзор применений

обзор модельных пространств

Укажем типичные модельные пространства.
и я тут хз вообще, какие есть?

Theory

После уже рассмотренных плоских (то есть нулевой кривизны) многообразий $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{1+3}$, мы рассмотрим чуть менее тривиальные римановы многообразия.

Многомерная сфера $\mathbb{S}^n$: типичные свойства

Самое понятное из них - это круглая сфера $\mathbb{S}^n$, которую можно задать уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной римановой (евклидовой) метрикой

$$g = dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n$$

какие-то Карасевские соображения

Можно посчитать ковариантную производную и кривизну на сфере вручную, но кое-что можно узнать и из общих соображений.

Группа вращений, сохраняющих g , является ортогональной группой $O(n+1)$.

Если в касательном пространстве сферы, в некоторой точке p , задан ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$, то эта группа может перевести p в любую другую точку и преобразовать базис в любой другой базис.

Допустим, нам надо посчитать значение $R_{e_i, e_j} e_k$ для любого выбора трёх базисных векторов. (??? что она даст?)

Можно считать $i \neq j$ из свойства антисимметричности $R_{X,Y}Z$ по X и Y .

Для касательных векторов e_i и e_j найдётся изометрическая копия двумерной сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^n$, которая содержит точку p и касается векторов e_i, e_j .

Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^{n-3}$, дополнительную к $\mathbb{S}^2$. Иначе говоря, рассматриваем ортогональное разложение $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ и пересекаем его со сферой.

Заметим, что мы можем вращать второе слагаемое $\mathbb{R}^{n-2}$, оставляя на месте первое, при этом сфера будет вращаться изометриями, сохраняющими её метрику g .

Таковыми вращениями мы можем сделать любое ортогональное преобразование на нормальных к $\mathbb{S}^2$ векторах.

При фиксированных e_i, e_j из свойств симметрии формы кривизны Римана выражение $g(R_{e_i, e_j}Z, T)$ является кососимметричной формой от Z и T .

Эта кососимметричная форма инвариантна относительно вращений ортогонального к $\mathbb{S}^2$ пространства, в частности должна сохраняться при перемене мест Z на T , то есть она равна нулю при любых $Z, T \perp e_1, e_2$.

Следующим этапом надо выяснить значения $R_{e_i, e_j}Z$ при $Z \perp \langle e_i, e_j \rangle$, всё ещё возможно, что это значение является линейной комбинацией e_i и e_j .

(???) Но тогда аналогично предыдущим рассуждениям линейные по Z выражения $g(R_{e_i, e_j}Z, e_i)$ и $g(R_{e_i, e_j}Z, e_j)$ инвариантны относительно любых вращений Z в ортогональном дополнении к $\langle e_1, e_2 \rangle$, то есть обязаны быть равными нулю.

Следовательно $R_{e_i, e_j}e_k$ будет равно нулю для случаев, когда e_k не совпадает с e_i или e_j .

Остаётся понять, чему равны $R_{e_i, e_j}e_i$ и $R_{e_i, e_j}e_j$, которые по доказанному должны лежать в линейной оболочке e_1 и e_2 .

Для выяснения этого вопроса нам достаточно работать на двумерной сфере.

Для нахождения кривизны можно использовать формулу из задачи 7.130 для стереографической системы координат на сфере

$$x = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad y = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \quad z = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}.$$

Задача 7.148 (Стереографическая проекция).

Докажите, что центральная проекция из полюса (точки $(1, 0, \dots, 0)$) сферы $\mathbb{S}^n$ на гиперплоскость $\{x_0 = 0\}$ задаёт систему координат на сфере без одной точки, в которой метрика имеет вид

$$g = \frac{4dx_1 \otimes dx_1 + 4dx_2 \otimes dx_2 + \dots + 4dx_n \otimes dx_n}{(1+x_1^2 + \dots + x_n^2)^2}$$

||

Заметьте, что стереографическая проекция сохраняет углы между касательными векторами, то есть должна переводить метрику на сфере с метрику евклидова пространства с точностью до умножения на функцию.

Найдите эту функцию, рассмотрев одномерную подсферу, проходящую через полюс.

||

Можно также рассуждать о кривизне двумерной сферы геометрически, заодно посмотрев на связь кривизны и углов многоугольника из геодезических.

Заметим, что на двумерной сфере при движении вдоль геодезической γ условие $\nabla_{\dot{\gamma}}Z = 0$ означает, что угол между $\dot{\gamma}$ и Z сохраняется.

При переносе по четырёхугольнику из геодезических вектор Z окажется повернут на сумму углов, дополнительных к углам этого четырёхугольника.

Эта сумма (из школьной стереометрии, см.

также пояснения далее) равна площади четырёхугольника плюс 2π .

Так как поворот на 2π не меняет вектор, то поворот просто пропорционален площади четырёхугольника и направлен против часовой стрелки, отсюда с учётом результата задачи 7.122 следует:

Теорема

149.

В любой точке сферы $\mathbb{S}^n$ для ортогонального базиса касательных векторов выполняется

$$R_{e_i, e_j}e_k = -e_\ell, R_{e_i, e_j}e_\ell = e_k$$

при условии, что $i = k, j = \ell$, в остальных случаях компоненты римановой кривизны равны нулю.

Это означает, что сфера имеет постоянную кривизну 1.

Можно записать значения формы кривизны сферы на произвольных векторах с помощью формулы

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y}Z, T) = g(X, T)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, T)$$

на векторах ортонормированного базиса она выполняется, на остальные она продолжается по полилинейности.

В следующих задачах обозначено элементарное объяснение использованного факта про суммы углов сферических двуугольников и треугольников, из которых следует использованный выше факт про углы четырёхугольника.

О площади сферического треугольника (!???)

Простой

на единичной двумерной сфере сферический двуугольник, образованный двумя половинами больших окружностей с углом φ между ними, имеет площадь 2φ .

||

Используйте вращение вокруг ребра двуугольника, которое сохраняет площадь поверхности сферы.

Это даёт доказательство для рациональных φ/π , остальные случаи получаются предельным переходом.

||

С произвольными углами

Докажите, что на единичной двумерной сфере сферический треугольник с внутренними углами α, β, γ имеет площадь

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$

||

Продолжите стороны треугольника до больших окружностей, которые разобьют сферу на восемь треугольников, которые разбиваются на центрально-симметричные пары.

Запишите уравнения на общую площадь сферы и на площади возникающих на картинке двуугольников.

||

Problem

.152.

Выведите определение тензора кривизны сферы произвольной размерности из задачи 7.127 и информации о кривизне двумерной сферы. Можно развить пример со сферой.

Рассмотрим полуриманову метрику

$$g = -dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n$$

в $\mathbb{R}^{1+n}$, и зададим гиперповерхность $\mathbb{H}^n$ (гиперболическое пространство) условиями

$$-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1, x_0 > 0.$$

Рассмотрев группу линейных изометрий $\mathbb{R}^{1+n}, O(1, n)$, можно заметить, что она может перевести любую точку $\mathbb{H}^n$ в любую другую и любой ортогональный базис касательных векторов в любой другой, см. задачу 7.139.

Ситуация аналогична случаю сферы, и это на самом деле максимально возможный набор симметрий для риманова многообразия, как показывает следующая задача:

Problem

.153.

Докажите, что если изометрия связного риманова многообразия M оставляет на месте одну точку p и действует на касательном пространстве $T_p M$ тождественно, то она сама является тождественным отображением.

||

Используйте экспоненциальное отображение для доказательства локальной тождественности, далее используйте связность.

||

Problem

.154.

Докажите, что группа $O(n+1)$ даёт все изометрии S^n , а группа $O^+(1, n)$ - подгруппа $O(1, n)$, не меняющая местами связные компоненты гиперboloида - даёт все изометрии $\mathbb{H}^n$.

||

Сделайте композицию какой-то изометрии φ с минейной изометрией ψ так, чтобы эта композиция $\varphi \circ \psi$ оставляла на месте некоторую точку сферы/гиперболического пространства и не меняла касательные векторы в этой точке.

Примените результат предыдущей задачи.

||

Также можно построить изометричные вложения $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^n$ через любую точку и пару непараллельных касательных векторов в ней и убедиться, что $\mathbb{H}^n$ можно произвольно вращать, оставляя на месте $\mathbb{H}^2$, как и было в случае сферы.

Читатель может проверить технические детали и сделать явное вычисление на $\mathbb{H}^2$ (например, в приведённых ниже координатах Пуанкаре), чтобы установить:

Теорема

155.

В любой точке гиперболического пространства $\mathbb{H}^n$ для ортогонального базиса касательных векторов выполняется

$$R_{e_i, e_j} e_k = e_\ell, R_{e_i, e_j} e_\ell = -e_k$$

при условии, что $i = k, j = \ell$, в остальных случаях компоненты римановой кривизны равны нулю.

Это означает, что гиперболическое пространство имеет постоянную кривизну -1. Аналогично случаю сферы, можно записать значения формы кривизны гиперболического пространства на произвольных векторах с помощью формулы

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X, Y} Z, T) = -g(X, T)g(Y, Z) + g(X, Z)g(Y, T)$$

Задача 7.156 (Координаты Пуанкаре).

Докажите, что центральная проекция из точки $(-1, 0, \dots, 0)$ на гиперплоскость $\{x_0 = 0\}$ задаёт систему координат на гиперболическом пространстве (со значениями в единичном открытом шаре), в которой метрика имеет вид

$$g = \frac{4dx_1 \otimes dx_1 + 4dx_2 \otimes dx_2 + \dots + 4dx_n \otimes dx_n}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}$$

||

Как и в задаче про стереографическую проекцию сферы, удобно сначала доказать сохранение углов, то есть конформность данного отображения.

||

Problem

.157.

Выпишите явный вид геодезических в натуральной параметризации на сфере и в гиперболическом пространстве (как в гиперповерхностях в $\mathbb{R}^{n+1}$).

||

Используя симметрии сферы и гиперболического пространства, покажите, что геодезическая обязана лежать в том же двумерном линейном подпространстве объемлющего $\mathbb{R}^{n+1}$, где лежат её начальная точка и начальная скорость.

Для сферы после этого нетрудно выписать явную формулу, а для гиперболического пространства надо понять, зачем нужны функции ch и sh вместо обычных косинуса и синуса.

||

Problem

.158.

* Проверьте, что в гиперболическом пространстве любой отрезок геодезической является кратчайшей.

||

Убедитесь, что гиперболическое пространство геодезически полно и его экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом.

Далее воспользуйтесь теоремой Хопфа-Ринова и рассуждениями в её доказательстве.

Иначе, можно доказать, что метрическая проекция на геодезическую в гиперболическом пространстве 1-липшицева.

||

7.17.

24.1.18 De Sitter spaces and Schwarzschild metric**мотивация и обзор применений****Theory**

В этом разделе мы рассмотрим некоторые несложные полуримановы многообразия.

Конструкцию гиперболического пространства можно далее модифицировать.

В той же метрике специальной теории относительности

$$g = -dx_0 \otimes dx_0 + dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n$$

в $\mathbb{R}^{n+1}$ можно задать гиперповерхность (пространство де Ситтера) dS^n условием

$$-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

Если $n = 2$, то это получится однополостный гиперболоид, в $\mathbb{R}^3$, на примере которого удобно проверить основные свойства такого пространства.

Метрика g ограничивается на пространстве де Ситтера до полуримановой метрики с сигнатурой $1, n - 1$.

Направления кривых, таких что $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ и $\ddot{\gamma} = 0$ (световые линии), даются прямыми, лежащими на гиперболоиде (см.

задачу 7.108).

При $n = 2$ через каждую точку проходит пара таких прямых, в больших размерностях их будет бесконечное количество.

Достаточно познавательно, что в пространстве де Ситтера есть такие пары точек, идущие из которых световые лучи никогда не встретятся друг с другом.

Группа симметрий формы g в $\mathbb{R}^{n+1}$, $O(1, n)$, может перевести любую точку dS^n в любую другую, и даже перевести любой вектор с условием $g(X, X) = -1$ (временноподобный). Это означает, что с точки зрения любого наблюдателя это «пространство-время» выглядит одинаково, хотя и представление его в виде гиперболоида создаёт ощущение, что оно «расширяется», когда время x_0 положительно и возрастает.

Пространственная часть (например, при $x_0 = 0$) пространства де Ситтера выглядит как сфера постоянной положительной кривизны.

В общей теории относительности такое пространство-время является одним из решений уравнений Эйнштейна с положительной космологической постоянной (за счёт того, что оно в определённом смысле является пространством постоянной кривизны) и нулевым тензором энергии-импульса.

Problem

.159.

докажите, что в части пространства де Ситтера dS^4 , выделенной условием $x_4 > 0$, в системе координат $x_0/x_4, x_1/x_4, x_2/x_4, x_3/x_4$ все геодезические этого пространства являются прямыми линиями.

По Ньютону такая система координат должна называться инерциальной, так как частицы, взаимодействующие только с гравитационным полем, движутся в ней равномерно и прямолинейно.

|| Докажите, что всякое двумерное линейное подпространство $P \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в пересечении с dS^4 имеет геодезическую или пару геодезических.

|| Аналогично можно определить анти-пространство де Ситтера AdS^{n+1} как гиперповерхность, заданную уравнением

$$-u^2 - v^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1$$

с метрикой, которая получена на гиперповерхность ограничением плоской метрики

$$g = -du \otimes du - dv \otimes dv + dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n$$

После ограничения метрика будет иметь сигнатуру $1 + n$.

Световые лучи в этой метрике также даются прямыми, лежащими на соответствующем гиперboloиде (при $n = 1$ это будет однополостный гиперboloид), однако кривые движения частиц положительной массы (то есть кривые с условием $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$) могут, например, иметь вид

$$u = \cos t, \quad v = \sin t$$

то есть частицы могут пройти по некоторому маршруту и вернуться в ту же точку этого пространства-времени.

Если нам не нравятся такие путешествия во времени, то введя в анти-пространстве де Ситтера координату t так, чтобы

$$u = \sqrt{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \cos t, \quad v = \sqrt{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sin t,$$

(см.

раздел 10.12) с координатами $t, x_1, \dots, x_n$, в котором t уже рассматривается как произвольное действительное число, а не с точностью до прибавления $2\pi k$.

Для сравнения, пространство де Ситтера dS^2 не имеет проблем с замкнутыми времениподобными траекториями, но тоже имеет нетривиальное универсальное накрытие

$\widehat{dS}^2$, так как оно совпадает с AdS^2 с точностью до смены знака метрики.

Problem

.160.

Напишите выражение для метрики $\widehat{AdS}^{n+1}$ в координатах $(t, x_1, \dots, x_n)$. Анти-пространство де Ситтера имеет группу симметрий $O(2, n)$ и точно так же, как в случае с пространством де Ситтера, с точки зрения любого наблюдателя, движущегося во времениподобном направлении, оно выглядит одинаково.

То же верно и для его универсального накрытия.

Пространственная часть анти-пространства де Ситтера (при $t = 0$) выглядит как гиперболическое пространство постоянной отрицательной кривизны.

В общей теории относительности такое анти-пространство де Ситтера является одним из решений уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной и нулевым тензором энергии-импульса.

Problem

.161.

Докажите, что в части анти-пространства де Ситтера AdS^4 , выделенной условием $u > 0$, в системе координат $v/u, x_1/u, x_2/u, x_3/u$ все геодезические являются прямыми линиями.

||

Аналогично задаче про пространство де Ситтера.

||

Выпишем намного менее симметричную, но имеющую полезный физический смысл метрику Шварцшильда:

$$g = -\frac{r-\rho}{r}dt \otimes dt + \frac{r}{r-\rho}dr \otimes dr + r^2 (\sin^2 \vartheta d\varphi \otimes d\varphi + d\vartheta \otimes d\vartheta).$$

В этой метрике t играет роль времени, хотя собственное время находящихся в фиксированном пространственном положении объектов идёт медленнее из-за множителя $\frac{r-\rho}{r}$, $\rho > 0$ - это некоторая константа.

Переменная $r > \rho$ играет роль радиальной координаты, но не равна расстоянию, радиальное расстояние можно найти как интеграл

$$\int \sqrt{\frac{r}{r-\rho}} dr.$$

Переменные φ и ϑ играют роль углов сферических координат.

В принципе, эту формулу можно написать с заменой r, φ, ϑ на x, y, z , но она тогда будет намного длиннее.

Problem

.162.

Возьмите интеграл и посчитайте радиальное расстояние в метрике Шварцшильда.

В целом метрика Шварцшильда симметрична относительно трёхмерных вращений, не меняющих время, а также инвариантна при сдвиге времени.

Это позволяет при анализе движения объекта в этой метрике выбрать координаты так, что $\vartheta = \pi/2$ и упростить вычисления.

Problem

.163.

Определите в метрике Шварцшильда поведение световых лучей, идущих в радиальном направлении.

||

Положите $\vartheta = \pi/2, \varphi = 0$ и решите уравнение

$$-\frac{r-\rho}{r}dt^2 + \frac{r}{r-\rho}dr^2 = 0$$

||

Problem

.164.

Множитель $1 - \rho/r$ в формуле метрики Шварцшильда соответствует, после извлечения из него квадратного корня, замедлению собственного времени для наблюдателя, находящегося на поверхности Земли, по сравнению с наблюдателем, находящимся дальше от Земли.

Оцените, сильнее ли этот эффект эффекта замедления собственного времени от движения спутника на круговой орбите для низкой околоземной орбиты и для геостационарной орбиты.

||

Учтите, что $\rho = 2GM/c^2$ в реальных единицах, а замедление собственного времени при движении со скоростью v описывается формулой $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.]] Задача 7.165.

* Определите радиальное движение объектов положительной массы (то есть геодезические с $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$) в метрике Шварцшильда.

Покажите, что за конечное собственное время движущийся к центру объект уходит в зону $t = +\infty$.

Это говорит о том, что метрика Шварцшильда требует какого-то продолжения за пределы координатной карты, в которой она определена.

||

Варируйте функционал действия $\int_{\gamma} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) ds$ (γ есть $\dot{\gamma}$ обозначает производную по параметру s , не путать с производной по «времени» в координатах Шварцшильда t).

Инвариантность относительно сдвига t даст закон сохранения энергии.

||

Problem

.166.

** Изучите движение объектов положительной массы в метрике Шварцшильда, если они движутся в плоскости $\vartheta = \pi/2$.

Посчитайте величину эффектов отклонения световых лучей и смещения перигелия орбиты.

||

Можно напрямую варьировать функционал действия $\int_{\gamma} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) ds$.

Его варьирование по времени t и углу поворота φ даст законы сохранения энергии и углового момента:

$$\frac{r - \rho}{r} \frac{dt}{ds} = \text{const}, \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{const}.$$

Варьирование по координате r даст уравнение второго порядка, которое надо будет изучать.

||

24.1.19 Surface area according to Minkowski (??)

мотивация и обзор применений

Theory

Рассмотрим риманово многообразие (M, g) размерности n и гиперповерхность $H \subset M$, то есть вложенное в M многообразие без края размерности $n - 1$.

Метрика g индуцирует на H метрику $\bar{g}$ и мы хотим интерпретировать риманов объём H в терминах риманова объёма в M .

Частным случаем этой ситуации будет компактная ориентированная гиперповерхность без края $H \subset \mathbb{R}^n$ с индуцированной метрикой.

Возьмём $\varepsilon > 0$ и рассмотрим метрическую ε -окрестность H , обозначив её для краткости H_ε .

Формула Минковского для объёма гиперповерхности

Для компактной гладкой гиперповерхности и её риманова объёма имеет место формула

$$\text{vol}_{\bar{g}} H = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\text{vol}_g H_\varepsilon}{2\varepsilon}$$

Доказательство

Для всякой точки $p \notin H$ расстояние $\text{dist}(p, H)$ достигается на некоторой точке $x \in H$ (возможно, не одной).

При достаточно малом расстоянии $\text{dist}(p, x)$ это означает в силу формулы (7.6), что существует геодезическая γ между p и x длины $\text{dist}(p, x)$.

Из компактности H следует, что «достаточно малое расстояние» можно выбрать одинаковым в этом рассуждении независимо от x .

Так как γ реализует минимальное расстояние от p к H , она должна быть перпендикулярна H в точке x .

Предположим, что мы можем непрерывно выбрать нормаль $n(x)$ к H в каждой точке $x \in H$, этот выбор будет тогда гладко зависеть от x .

Если этого сделать нельзя, то это можно будет сделать после перехода к некоторому накрытию $\widehat{M} \rightarrow M$ и $\widetilde{H} \rightarrow H$ (см.

раздел 10.12), которое просто удвоит все рассматриваемые объёмы.

Пока же мы просто предполагаем, что выбрать нормаль возможно.

Построим отображение $f : H \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ следующим образом.

Для пары $x \in H$ и $|t| < \varepsilon$ возьмём геодезическую γ_x с началом в x и касательной в x равной $n(x)$ и положим

$$f(x, t) = \gamma_x(t)$$

При достаточно малом ε отображение будет определено и будет гладко зависеть от x и t по теореме о гладкой зависимости решений дифференциального уравнения от начальных данных.

Рассуждения из начала доказательства показывают, что, по крайней мере при достаточно малом ε , это отображение является сюръекцией на окрестность H_ε .

Более того, из компактности H и теоремы об обратном отображении следует, что при достаточно малом ε отображение f является диффеоморфизмом.

Читателю предлагается проверить это, накрыв $H \times \{0\}$ конечным числом открытых множеств вида $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, на которых f является диффеоморфизмом, и выбрав ε настолько малым,

что 2ε -окрестность любой точки $H \times \{0\}$ полностью содержится в одном из множеств покрытия.

Дифференциал f в любой точке $(x, 0)$ тождественно действует на $T_x H$ и переводит единичный ортогональный вектор к $T_x H$ в цилиндре $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ в единичный ортогональный вектор к $T_x H$ в M .

Если мы обозначим метрику произведения на $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

за $g^\times$, то можно будет сказать, что f^*g совпадает с $g^\times$ над H .

Из непрерывности метрик это означает, что для всякого $\delta > 0$ при достаточно малом ε метрики $g^\times$ и f^*g будут отличаться не более чем в $1 + \delta$ раз на цилиндре $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, а соответствующие им римановы объёмы - соответственно не более чем в $(1 + \delta)^n$ раз.

Оценки

$$(1 + \delta)^{-n} \text{vol}_{g^\times} \leq \text{vol}_{f^*g} \leq (1 + \delta)^n \text{vol}_{g^\times}$$

и формулы (7.3) достаточно, чтобы сделать вывод, что

$$\text{vol}_{\bar{g}} H = \frac{\text{vol}_{g^\times} H \times (-\varepsilon, \varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\text{vol}_{f^*g} H \times (-\varepsilon, \varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\text{vol}_g H_\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Аналогичная формула верна и для k -мерных подмногообразий в n -мерных многообразиях, надо только поставить в знаменатель $v_{n-k}\varepsilon^{n-k}$, где v_{n-k} - объём евклидова единичного $(n - k)$ -мерного шара, читатель может поразмышлять об этом самостоятельно и подумать, на что надо заменить цилиндр $H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ в этом случае.

Можно пойти в обратном направлении и считать формулу Минковского определением. Для простоты вернёмся в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и для произвольного множества $G \subseteq \mathbb{R}^n$ выражение

(7.7)

$$\mathfrak{M}(G) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\mu G_\varepsilon - \mu G}{\varepsilon}$$

будем называть площадью поверхности по Минковскому множества G .

Если предел не существует, то можно взять нижний предел и обозначить его $\mathfrak{M}(G)$.

Аналогично приведённым выше рассуждениям устанавливается, что если граница G является гладкой гиперповерхностью, то эта формула даёт $(n-1)$ -мерный риманов объём этой гиперповерхности.

Problem

.168.

Найдите риманов объём единичной сферы S^n .

||

Наверное проще всего будет это сделать, рассмотрев ε -окрестность единичного шара в $\mathbb{R}^{n+1}$, которая сама является шаром радиуса $1 + \varepsilon$, и применив формулу (7.7).

||

Problem

.169.

* Посчитайте риманов объём ε -окрестности точки (метрического шара радиуса ε) во внутренней метрике сферы и во внутренней метрике гиперболического пространства.

||

Заметьте, что можно представить n -мерный объём как интеграл $(n-1)$ -мерных объёмов $\text{vol}_n U_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \text{vol}_{n-1} \partial U_t dt$ по соображениям, аналогичным формуле Минковского.

Из симметрии сферы и гиперболического пространства следует, что $\partial U(t)$ изометрично стандартной $(n-1)$ -мерной сфере некоторого радиуса, который остаётся выразить через t . ||

24.1.20 Brunn-Minkowski inequality and isoperimetric inequality

мотивация и обзор применений

Theory

Классическая изопериметрическая задача заключается в том, чтобы найти множество $G \subset \mathbb{R}^n$, имеющее минимальную площадь поверхности (например, понимаемую как $\mathfrak{M}(G)$ по Минковскому) при фиксированном объёме μG .

Естественно предположить, что экстремум достигается на шаре, однако доказательство этого утверждения не столь тривиально.

Мы приведём один из вариантов рассуждения.

Определим понятие суммы Минковского для двух множеств $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ как

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

Множество $X + Y$ можно представить как линейную проекцию произведения $X \times Y \subset \mathbb{R}^{2n}$, поэтому достаточно очевидно, что оно будет компактным в случае, если множества X и Y компактны.

Также нетрудно заметить, что $X + Y$ будет открыто, если хотя бы одно из исходных множеств открыто.

Однако, существуют примеры, когда X и Y измеримы по Лебегу, но их сумма Минковского $X + Y$ не измерима по Лебегу.

Для целей дальнейшего изложения, когда мы хотим оценить меру Лебега множества $X + Y$ снизу, можно считать, что по теореме 5.20 мы приближили X и Y по мере

содержащимися в них компактными $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, оценили снизу меру Лебега $\hat{X}' + Y'$, и таким образом оценили снизу нижнюю меру Лебега множества $X + Y$.

Положим для числа $t \in \mathbb{R}$, $tX = \{tx : x \in X\}$.

Пусть B - единичный шар с центром в нуле.

Тогда замыкание t -окрестности G можно выразить в этих терминах как $G + tB$, оценка площади поверхности G снизу будет следовать из оценки объёма $G + tB$ снизу, в силу определения площади поверхности по Минковскому.

Ключевым фактом в этой оценке будет неравенство Брунна-Минковского

$$\mu(X + Y)^{1/n} \geq \mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n}$$

для измеримых X, Y , $X + Y \subseteq \mathbb{R}^n$ (если $X + Y$ не измеримо, то берём его нижнюю меру Лебега).

Предполагая выполнение этого неравенства, мы получаем

$$\mu(G + tB) \geq \left(\mu(G)^{1/n} + t\mu(B)^{1/n} \right)^n$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow +0$, получаем

$$\underline{\mathfrak{M}}(G) \geq n\mu(G)^{\frac{n-1}{n}}\mu(B)^{1/n}$$

с равенством, выполняющимся для любого шара.

Например, для единичного шара по итогам задачи 7.168

$$\underline{\mathfrak{M}}(B) = n\mu B = \frac{n\pi^{n/2}}{\gamma(n/2 + 1)}$$

и это есть равенство, а для произвольного шара при увеличении его радиуса до R обе части равенства умножаются на R^{n-1} и равенство остаётся в силе.

Значит шар действительно даёт оптимальное множество G в изопериметрическом неравенстве.

Осталось доказать собственно неравенство Брунна-Минковского.

Теорема

170.

Для компактных множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ и любого $t \in [0, 1]$ выполняются неравенства

$$\mu((1-t)X + tY) \geq \mu(X)^{1-t}\mu(Y)^t \rightarrow \mu(X + Y)^{1/n} \geq \mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n}$$

Доказательство

Для начала объясним, почему из неравенства слева (логарифмическое неравенство Брунна-Минковского) следует классический вариант неравенства справа.

Запишем логарифмическую форму неравенства для мругих компактов

$$\mu((1-t)X' + tY') \geq \mu(X')^{1-t}\mu(Y')^t$$

и положим в этом неравенстве $X' = \frac{1}{1-t}X$, $Y' = \frac{1}{t}Y$.

Тогда неравенство переписывается в виде

$$\mu(X + Y) \geq \frac{1}{(1-t)^{n(1-t)}}\mu(X)^{(1-t)} \cdot \frac{1}{t^{nt}}\mu(Y)^t$$

Аальше надо оптимизировать правую часть неравенства по параметру $t \in [0, 1]$.

Взяв логарифм правой части, получим

$$n(1-t)\ln(1-t) + (1-t)\ln\mu(X) + nt\ln t + t\ln\mu(Y)$$

Приравняв нулю производную этого выражения,

$$-n \ln(1-t) - \ln \mu(X) + n \ln t + \ln \mu(Y) = 0$$

найдем оптимальное значение

$$t = \frac{\mu(Y)^{1/n}}{\mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n}}$$

Подставив t в (7.8), но не до конца, получим

$$\begin{aligned} \mu(X+Y) &\geq \frac{(\mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n})^{n(1-t)}}{\mu(X)^{1-t}} \mu(X)^{(1-t)} \cdot \frac{(\mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n})^{nt}}{\mu(Y)^t} \mu(Y)^t = \\ &= (\mu(X)^{1/n} + \mu(Y)^{1/n})^n \end{aligned}$$

что эквивалентно неравенству Брунна-Минковского.

Теперь мы еще усилим логарифмический вариант неравенства Брунна-Минковского и выпишем функциональное неравенство Брунна-Минковского:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f dx \right)^{1-t} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g dx \right)^t$$

для неотрицательных измеримых h, f, g , удовлетворяющих условию

$$h((1-t)x + ty) \geq f(x)^{1-t} g(y)^t$$

при любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и фиксированном $t \in [0, 1]$.

Для вывода логарифмического варианта из функционального достаточно взять в качестве f, g, h характеристические функции $X, Y, X+Y$ соответственно.

Теперь мы будем доказывать функциональный вариант по индукции.

В одномерном случае нормируем интегралы от f и g на единицу.

Тогда правые части в (7.19) и (7.9) умножатся на одно и то же число, так что для сохранения верности обоих надо будет умножить h на это же число.

Доказательство неравенства

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx \geq 1$$

после введения множеств

$$A_y = \{x : f(x) \geq y\}, \quad B_y = \{x : g(x) \geq y\}, \quad C_y = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq y\}$$

по теореме 5.87 сводится к проверке неравенства

$$\mu(C_y) \geq (1-t)\mu(A_y) + t\mu(B_y)$$

для всех $y \geq 0$ и интегрированию его по y до неравенства

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx \geq (1-t) \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + t \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1.$$

Условие (7.19) означает, в частности, включение $C_y \supseteq (1-t)A_y + tB_y$, то есть нам надо проверить одномерный вариант неравенства Брунна-Минковского.

Одномерный вариант проверяется просто, по теореме 5.20 он сводится к случаю компактных A_y и B_y , после сдвига можно считать, что $\max A_y = 0 = \min B_y$, но тогда C_y содержит пересекающиеся только в начале координат множества $(1-t)A_y$ и tB_y , что доказывает требуемое

$$\text{неравенство } \mu(C_y) \geq (1-t)\mu(A_y) + t\mu(B_y).$$

Сделаем теперь шаг индукции по размерности в функциональном неравенстве Брунна-Минковского.

Введём функции на единицу меньшего количества переменных:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n, \\ \bar{g}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n, \\ \bar{h}(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n.\end{aligned}$$

Фиксируя $x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}$ рассмотрим функции переменной u

$$\begin{aligned}f_1(u) &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, u) \\ g_1(u) &= g(y_1, \dots, y_{n-1}, u) \\ h_1(u) &= h((1-t)x_1 + ty_1, \dots, (1-t)x_{n-1} + ty_{n-1}, u)\end{aligned}$$

одной переменной f_1, g_1, h_1 , а функциональное неравенство Брунна-Минковского Δ, Λ интегралов от f_1, g_1, h_1 можно переписать в виде

$$\bar{h}((1-t)x + ty) \geq \bar{f}(x)^{1-t} \bar{g}(y)^t$$

(7.9) для них, которое есть то же самое, что неравенство (7.9) $\Delta \wedge$ я f, g, h .

Изодиаметрическое неравенство (!!!)

Докажите, что максимум объёма множества в $\mathbb{R}^n$ данного диаметра достигается на шаре.

||

Возьмите это множество X и сложите по Минковскому с $-X$.

Переформулируйте неравенство $\text{diam } X \leq d$ в терминах $X - X$.||

(в 4 д пространстве тоже так?)

Логарифмическая вогнутость

Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется логарифмически вогнутой, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $0 < t < 1$ выполняется

$$f((1-t)x + ty) \geq f(x)^{1-t} f(y)^t$$

Докажите, что если логарифмически вогнутую функцию n переменных проинтегрировать по одной переменной, то получится логарифмически вогнутая функция $(n-1)$ переменной (или $+\infty$).

||

Воспользуйтесь рассуждениями из доказательства функционального неравенства Брунна-Минковского.

||

24.2 Introduction to Functional Analysis

24.2.1 parallelogram equality

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (24.1)$$

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \quad \forall x, y \in E \quad (24.2)$$

у Балашова теорема Фон-Неймана на этот счет есть.

Обзор случаев применения

24.2.2 Fourier Transform

(из умф добавлю многое)

Преобразование Фурье имеет вид:

$$F[f](y) \equiv \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx \quad (24.3)$$

А обратное имеет вид:

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iyx} dx \quad (24.4)$$

Свойства его такие:

Обзор случаев применения

24.2.3 Hilbert space and their bases

Гильбертовы пространства в двух словах

с опытом пропишу

Определение 24.1. Если норма порождена скалярным произведением

Theory

Изучим важный частный случай банахова пространства, являющийся абстрактным аналогом пространства L_2 и, в частности, евклидова пространства.

Определение

26.

Если норма в банаховом пространстве E порождается положительно определённым скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

то E называется гильбертовым пространством. Если поле констант комплексное, то скалярное произведение будет комплексно-линейным по первому аргументу и комплексно-антилинейным по второму, а также $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

При доказательстве теорем обычно достаточно рассматривать действительный случай, так как на самом деле всякое комплексное гильбертово пространство является действительным гильбертовым пространством со скалярным произведением $\text{Re}(x, y)$ и той же самой нормой, отличие будет только в присутствии ортогонального (в данном случае под ортогональностью подразумевается сохранение скалярного произведения и обратимость) оператора $J : H \rightarrow H$, у которого $J^2 = -1$ (такой оператор называется комплексной структурой на векторном пространстве).

Рассмотрим неравенство (в комплексном варианте)

$$(ax + by, ax + by) \geq 0 \leftrightarrow |a|^2 \|x\|^2 + 2 \text{Re } a\bar{b}(x, y) + |b|^2 \|y\|^2 \geq 0$$

используя условия неотрицательности эрмитовой формы двух переменных a, b мы получим неравенство Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

из которого, как и в конечномерном случае, следует неравенство треугольника для нормы.

Конечномерное гильбертово пространство изометрично евклидову $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$, в случае комплексного поля скаляров), как известно из курса линейной алгебры.

Структуру бесконечномерных гильбертовых пространств мы тоже постараемся описать.

Гильбертово пространство имеет много полезных свойств, например, в нём можно развивать абстрактную теорию рядов Фурье точно так же, как она идёт в $L_2[-\pi, \pi]$, с минимальным свойством коэффициентов Фурье и неравенством Бесселя.

Результаты этой теории можно резюмировать в следующей теореме:

Теорема

27.

Для всякой ортогональной системы (φ_k) в гильбертовом пространстве H следующие свойства эквивалентны: а) полнота системы (плотность её линейной оболочки в H); элементам φ_k ; в) сходимость ряда Фурье любого $x \in H$ по системе (φ_k) к x ; 2) равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье любого $x \in H$ по данной системе.

Доказательство

Пусть для упрощения формул система ортонормирована, $(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}$.

Докажем по шагам: x линейной комбинацией $y = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ с точностью ε , тогда x ортогонален y , но

$$0 = (x, y) = (x, y - x) + (x, x), \text{ хотя } |(x, x)| = \|x\|^2, |(x, y - x)| \leq \varepsilon \|x\|$$

(6) $\rightarrow$ (B) : Для всякого x можно аналогично случаю L_2 установить минимальное свойство коэффициентов Фурье $c_k = (x, \varphi_k)$

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |a_k - c_k|^2$$

и соответствующее неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$$

тогда независимо от полноты или замкнутости системы (φ_k) ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ в H сходится по фундаментальности, так как

$$\left\| \sum_{k=n}^m c_k \varphi_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=n}^m |c_k|^2} \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

Пусть тогда $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$.

Из непрерывности скалярного произведения в H следует возможность переставить скалярное произведение и суммирование в формуле

$$(x - y, \varphi_k) = (x, \varphi_k) - (y, \varphi_k) = c_k - \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\varphi_m, \varphi_k) = c_k - \sum_{m=1}^{\infty} c_m \delta_{mk} = 0$$

то есть $x - y$ ортогонален всем φ_k , и из предположения замкнутости должен равняться нулю.

Следовательно, ряд Фурье сходится именно к $x = y$.

() $\leftrightarrow$ () : Из равенства

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| x \right\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

в пределе следует эквивалентность сходимости ряда Фурье к x и равенства Парсеваля.

(В) $\rightarrow$ (а) : Очевидно АНО. Приведённая теорема показывает, что можно строить много ортогональных систем в пространствах L_2 , по которым можно раскладывать в ряд Фурье, сходящийся по норме L_2 .

Например, можно взять систему $\{1, x, x^2, \dots\}$, на отрезке $[-1, 1]$, она полна, так как всякую функцию на отрезке можно приблизить многочленом в норме L_2 (сначала приблизить бесконечно гладкой в норме L_2 , а потом равномерно приблизить бесконечно гладкую многочленом по теореме Вейерштрасса).

Значит, если ортогонализировать эту систему по методу Грама-Шмидта, то можно получить полную и замкнутую ортогональную систему многочленов (P_n) на отрезке $[-1, 1]$, причём многочлен номер n будет иметь степень n , $n \in \mathbb{Z}^+$.

Задача 9.28 (Многочлены Лежандра с точностью до константы).

Проверьте, что многочлены

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

составляют ортогональную систему в $L_2[-1, 1]$.

||

Поинтегрируйте произведение двух таких многочленов по частям.

||

В качестве следствия из свойств абстрактных рядов Фурье мы можем описать «сравнительно небольшие» гильбертовы пространства с точностью до изометрии, то есть до биекции, сохраняющей скалярное произведение:

Теорема Рисса-Фишера (!?!?!?!?)

Всякое гильбертово пространство H , в котором нашлась счётная полная система элементов, изометрично некоторому ℓ_2 в случае комплексного поля скаляров, $\mathbb{R}^n$ в случае действительного поля скаляров, или комплексному или действительному варианту бесконечномерного ℓ_2 .

Доказательство

Счётную полную систему элементов можно сделать ортонормированной по методу Грама-Шмидта.

Если она оказалась конечной, то у нас получилось евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

Иначе счётная полная ортонормированная система (φ_k) позволяет сопоставить каждому элементу $x \in H$ последовательность его коэффициентов Фурье

$$c_k(x) = (x, \varphi_k), \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \varphi_k$$

с выполнением равенства Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

Наоборот, всякая последовательность (c_k) с конечной суммой квадратов модулей сходится по фундаментальности, так как

$$\left\| \sum_{k=n}^m c_k \varphi_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=n}^m |c_k|^2} \rightarrow 0 (n, m \rightarrow \infty)$$

и даёт элемент

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) \varphi_k$$

Это даёт биекцию между $\Delta_y H$ и пространством $\ell_2 = L_2(\mathbb{N})$ последовательностей с конечной суммой квадратов модуля.

Она сохраняет норму вектора и значит сохранить можно выразить через норму с помощью формулы

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

В комплексном случае та же формула выражает действительную часть скалярного произведения, по которой можно восстановить и мнимую часть как $\text{Im}(x, y) = \text{Re}(ix, y)$

Problem

30.

Пусть линейный оператор $A : H \rightarrow H$ в гильбертовом пространстве сохраняет скалярное произведение, то есть для любых $x, y \in H$ оказывается $(Ax, Ay) = (x, y)$.

Приведите пример, показывающий, что такой оператор не обязан быть обратимым.

||

удобно построить такой оператор в пространстве ℓ_2 .]

Теорема Мюнца

Теорема Мюнца для L_2

Пусть (n_k) - строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. докажите, что система функций $\{x^{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ полна в $L_2[0, 1]$ тогда и только тогда,

когда $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty$.

||

Выпишите расстояние от не входящей в систему функции x^n до линейной оболочки $\langle x^{n_1}, \dots, x^{n_k} \rangle$ через определители матриц Грама систем $(x^{n_1}, \dots, x^{n_k})$ и $(x^n, x^{n_1}, \dots, x^{n_k})$.

Получите формулу

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{i,j=1}^n = \frac{\prod_{i < j} (a_i - a_j) (b_i - b_j)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$$

через делимость многочленов от нескольких переменных или посчитав определитель по индукции.

Применив выписанную формулу для определителя, убедитесь, что стремление расстояния от x^n до линейной оболочки $\langle x^{n_1}, \dots, x^{n_k} \rangle$ к нулю при $k \rightarrow \infty$ эквивалентно приведённой в условии задачи расходимости суммы.

||

Теорема Мюнца для C

Пусть (n_k) - строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. докажите, что система функций $\{x^{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ полна в $C[0, 1]$ тогда и только тогда,

когда $n_1 = 0$ и $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty$.

||

Сведите к предыдущей задаче.

Полнота в C очевидно влечёт полноту в L_2 .

Из полноты в L_2 данной системы функций выведите полноту системы первообразных данных функций в подпространстве $C[0, 1]$, заданном условием $f(0) = 0$.

||

О применениях теоремы Мюнца (!?!)

Problem

33.

Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие полноты системы функций вида $\{x^{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ в $C[-1, 1]$.

||
||

Разложите функцию в сумму чётной и нечётной и приближайте их по отдельности.

Problem

34.

Существует ли бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая что для всякого многочлена $p \in \mathbb{R}[x]$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)f(x)dx$$

конечен и равен нулю.

||
||

Посмотрите на преобразование Фурье функции f .

Обзор случаев применения

24.2.4 Dual to Hilbert space

Theory

С точки зрения двойственности гильбертово пространство отличается тем, что его двойственное совпадает с ним самим в случае действительных коэффициентов и не слишком отличается в случае комплексных коэффициентов.

доказательство этого произведём в два шага:

Теорема

9.35 (Метрическая проекция в гильбертовом пространстве).

Пусть H - гильбертово пространство, $V \subset H$ - его замкнутое линейное (или аффинное) подпространство.

Для всякого $x \in H$ существует единственный $\pi_V(x) \in V$, ближайший к x , то есть

$$\|x - \pi_V(x)\| = \inf_{y \in V} \|x - y\|$$

Доказательство

Пусть $\text{dist}(x, V) = d$, мы хотим доказать, что это значение достигается для некоторой точки $y \in V$.

Нам понадобится следующее утверждение: если $\triangle \Lambda$ а $y', y'' \in V$ оказалось, что $\|x - y'\|, \|x - y''\| < \sqrt{d^2 + t^2}$, то $\|y' - y''\| < 2t$. Доказательство утверждения по сути школьное, мы переходим в двумерную аффинную плоскость P , натянутую на x, y', y'' , замечаем, что прямая ℓ через точки y', y'' содержится в $V \cap P$, а значит должно выполняться $\text{dist}(x, \ell) \geq d$.

По теореме Пифагора точки y', y'' находятся не далее t от основания перпендикуляра из x на ℓ , что и оказывает утверждение.

Из утверждения следует, что всякая последовательность точек $y_k \in V$, для которой $\|x - y_k\| \rightarrow d$, является фундаментальной, из полноты гильбертова пространства она имеет предел, а из замкнутости V следует, что этот предел лежит в V .

Единственность проекции можно обосновать тем, что если $\|x - y\| = \|x - y'\| = d, y \neq y' \in A$, то $\Delta \wedge$ точки $\frac{y+y'}{2} \in A$ в противоречие с определением расстояния от x до A получим

$$\left\| x - \frac{y + y'}{2} \right\| < d$$

что очевидно геометрически в аффинной плоскости, содержащей x, y, y' .

Теорема

9.36) Авоиственное к гильбертову пространству).

Для всякого y в гильбертовом пространстве H положим

$$\lambda_y(x) = (x, y).$$

Тогда $\lambda_y \in H'$, $\|\lambda_y\| = \|y\|$ и все элементы двойственного пространства H' имеют такой вид.

Доказательство

Нетривиально доказать только последнее утверждение.

Пусть у нас есть какой-то непрерывный линейный функционал $\lambda : H \rightarrow \mathbb{R}$.

В комплексном случае нам достаточно изучить действительную часть комплексно-линейного функционала и действительную часть скалярного произведения на H , поэтому мы будем рассматривать далее $\mathbb{R}$ -линейный функционал.

Рассмотрим замкнутое аффинное подпростран-

$$\text{ство } A = \{x \in H : \lambda(x) = 1\}.$$

Спроецируем метрически 0 на A , получим точку $y \in A$ (ближайшую к 0 точку A).

Рассмотрим элемент $y + x \in A$, тогда вся прямая $y + tx$ лежит в A .

Из минимальности выражения

$$\|y + tx\|^2 = \|y\|^2 + 2(x, y)t + \|x\|^2 t^2$$

при $t = 0$ следует $(x, y) = 0$.

Из этого следует, что все элементы A имеют одинаковое скалярное произведение с y , равное $\|y\|^2$.

Следовательно, функционал

$$\lambda_y(\cdot) = \left(\cdot, \frac{y}{\|y\|^2} \right)$$

совпадает с λ на A , по однородности и непрерывности это совпадение распространяется на всё H .

Problem

37.

Проверьте, что построенное отождествление $C : H \rightarrow H'$ для гильбертова пространства с комплексным полем скаляров будет комплексно-антилинейным, то есть $H' \cong \bar{H}$, если $\bar{H}$ обозначает то же пространство H , но с изменённым способом умножения вектора на комплексное число.

А именно, если умножение на комплексное число в H обозначать символом, а в $\bar{H}$ - символом $\bar{\cdot}$; то верно соотношение

Описание более общей Авоиственности $L'_p = L_q$ при $1/p + 1/q = 1$ остаётся для самостоятельного разбора читателем в виде последовательности задач.

Problem

38.

*[Неравенство Ханнера] Если $p > 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \geq 2\|f\|_p^p + 2\|g\|_p^p$$

||

Проверьте, что для чисел выполняется $|a+b|^p + |a-b|^p \geq 2|a|^p + 2|b|^p$ и проинтегрируйте.

||

Problem

39.

Если $p > 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$2^{p-1}\|f\|_p^p + 2^{p-1}\|g\|_p^p \geq \|f - g\|_p^p + \|f + g\|_p^p$$

||

Подставьте в предыдущее неравенство $f - g$ и $f + g$ вместо f и g .]**Неравенство Ханнера**Если $1 < p < 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \geq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p$$

||

Проверьте, что функция $\zeta(a, b) = (a^{1/p} + b^{1/p})^p + |a^{1/p} - b^{1/p}|^p$ является выпуклой 1-однородной функцией от неотрицательных чисел, то есть для любых двух точек $A, B \in [0, +\infty)^2$ и положительных коэффициентов u, v получается $\zeta(uA + vB) \leq u\zeta(A) + v\zeta(B)$.

Выведите отсюда по индукции неравенство Йенсена для положительных комбинаций точек

$$\zeta(u_1 A_1 + \dots + u_N A_N) \leq u_1 \zeta(A_1) + \dots + u_N \zeta(A_N),$$

а предельным переходом получите неравенство Йенсена для интегралов от функций $A : X \rightarrow [0, +\infty)^2$

$$\zeta\left(\int_X A(x) dx\right) \leq \int_X \zeta(A(x)) dx$$

Распишите последнее неравенство по координатам

$$\zeta\left(\int_X a(x) dx, \int_X b(x) dx\right) \leq \int_X \zeta(a(x), b(x)) dx$$

и подставьте в него $a(x) = |f(x)|^p, b(x) = |g(x)|^p$.]

О применениях (!!!!!)**Problem**

41.

Если $1 < p < 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$2^p\|f\|_p^p + 2^p\|g\|_p^p \geq (\|f - g\|_p + \|f + g\|_p)^p + \left| \|f - g\|_p - \|f + g\|_p \right|^p$$

||

Подставьте в предыдущее неравенство $f - g$ и $f + g$ вместо f и g .]

Problem

42.

Докажите существование и единственность метрической проекции на замкнутое подпространство в пространствах L_p при $1 < p < +\infty$.

||

действуйте аналогично доказательству Для гильбертова пространства с использованием приведённых выше неравенств.

||

Problem

43.

Выясните устройство непрерывных линейных функционалов в L_p при $1 < p < +\infty$

||

действуйте аналогично доказательству Для гильбертова пространства, найдя среди

$$\{f : \lambda(f) = 1\}$$

элемент минимальной нормы, проверьте, что $g(x) = |f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(x)$ обладает свойством

$$\forall h \in L_p(X), \int_X h(x)g(x)dx = \lambda(h)\|f\|_p^p$$

и лежит в L_q , $1/p + 1/q = 1$, так что с точностью до константы g реализует функционал λ .]

Обзор случаев применения**24.2.5 Banach spaces and Baer's theorem****Theory**

Рассмотрим нормированные (и не только) векторные пространства в абстрактной постановке, но имея в виду, что содержательные применения будут происходить для пространств функций, которые мы уже изучали или планируем изучить.

Определение

1.

Векторное пространство E нормировано, если для всякого вектора $v \in E$ имеется неотрицательное число $\|v\|$, удовлетворяющее свойствам:

- $\|av\| = |a|\|v\|$ (однородность при умножении на константу);
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (неравенство треугольника);
- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (невырожденность).

Константы в этом определении можно считать действительными или комплексными. для простоты мы будем в основном подразумевать действительные константы.

Если свойство невырожденности нормы ослабляется до неравенства $\|v\| \geq 0$, то мы будем говорить (и на самом деле уже говорим), что задана не норма, а полунорма.

Всякое нормированное пространство является метрическим с расстоянием $\rho(x, y) = \|x - y\|$, поэтому применимы соответствующие понятия, связанные с метрикой.

Например, шаром с центром c и радиусом r в нормированном пространстве E называется множество

$$B_c(r) = \{x \in E : \|x - c\| \leq r\}$$

Можно заметить, что норма полностью определяется единичным шаром с центром в нуле $B_0(1)$, а именно

$$\|x\| = \inf \{1/t : tx \in B_0(1)\}$$

и любой другой шар отличается от единичного с геометрической точки зрения лишь сдвигом и гомотетией.

Problem

2.

Докажите, что свойства нормированного пространства (над полем $\mathbb{R}$) можно переформулировать в терминах единичного шара $B_0(1)$ так: единичный шар является центрально симметричным выпуклым множеством и пересекает всякую проходящую через начало координат прямую по невырожденному отрезку.

Problem

3.

Докажите, что свойства нормированного пространства (над полем $\mathbb{C}$) можно переформулировать в терминах единичного шара $B_0(1)$ так: единичный шар является центрально симметричным выпуклым множеством и пересекает всякую проходящую через начало координат комплексную прямую по невырожденному кругу.

Как мы знаем из примера евклидова пространства, удобно работать в ситуации, когда пространство полное, то есть всякая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

В бесконечномерных функциональных пространствах это свойство необязательно выполняется, поэтому имеет смысл сделать определение:

Определение

4.

Полное нормированное пространство (в котором всякая фундаментальная последовательность имеет предел) называется банаховым пространством.

Примерами банахова пространства являются $C[a, b]$ (по критерию Коши для равномерной сходимости и непрерывности равномерного предела непрерывных функций), $L_p(X)$ (его полноту мы уже доказали), причём во втором случае в определении принимаются специальные меры для того, чтобы избежать вырождения нормы на функциях, почти всюду равных нулю - такие функции надо считать равными нулю по определению, то есть брать факторпространство по ним.

Problem

5.

Докажите, что пространство $C[a, b]$ с нормой $\|\cdot\|_2$ не является полным.

||

Вспомните о приближениях любой функции в $L_2[a, b]$ по норме $\|\cdot\|_2$ непрерывными.

||

Несложно установить следующее важное свойство банаховых пространств, на самом деле верное для всех полных метрических пространств (и установленное для прямой $\mathbb{R}$ в теореме 1.117):

Теорема Бэра для открытых множеств

Теорема 17. *Счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства E имеет непустое пересечение.*

Доказательство

Пусть $\{U_n\}$ - эти открытые множества.

В первом из них можно выбрать шар B_1 радиуса не более $1/2$.

Так как второе множество открыто и всюду плотно, то можно выбрать $B_2 \subset U_2 \cap B_1$ радиуса не более $1/4$, и так далее можно выбирать $B_k \subset U_k \cap B_{k-1}$ радиуса не более $1/2^k$.

Это будет последовательность вложенных замкнутых шаров стремящегося к нулю радиуса, значит все эти шары имеют общую точку по теореме 3.20.

Следовательно, множества $U_k \supset B_k$, тоже имеют общую точку.

Заметим, что полученное в теореме пересечение в свою очередь пересекает любое открытое множество (первый шар можно было выбрать в нём), то есть пересечение $\bigcap_k U_k$ на самом деле плотно в E (то есть его замыкание совпадает с E).

Есть также формулировка этой теоремы для замкнутых множеств, которая получается переходом к дополнениям:

Следствие 9.7 (Теорема Бэра для замкнутых множеств).

Если банахово пространство E покрыто счетным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.

О важности теоремы Бэра (!!!!!)

(пропишу потом, пока просто остался вопрос.)

Неподвижные точки сжимающих отображений

Следующее утверждение о неподвижной точке бывает полезно в разных ситуациях, например, наши доказательства теоремы об обратном отображении 6.24 и теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений 7.63 можно было переформулировать в таких терминах:

Пусть E -банахово пространство.

Пусть $X \subset E$ - замкнутое подмножество и $f : X \rightarrow X$ является сжимающим, то есть

$$\exists C < 1 \text{ такое что } \forall x, y \in X \|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|.$$

Тогда f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

Доказательство

Применим f много раз к одной точке $x_0 \in X$,

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

полученная последовательность будет фундаментальной, так как разности $\|x_n - x_{n-1}\|$ оцениваются геометрической прогрессией по свойству сжатия.

По свойству полноты существует предел $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и по непрерывности f для него будет выполняться $f(y) = y$ следующие задачи полезно порешать, чтобы лучше познакомиться с банаховыми пространствами.

Problem

9.

докажите, что в конечномерном нормированном пространстве все нормы определяют одну и ту же топологию.

||
докажите для двух норм $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ в конечномерном пространстве V неравенства

$$c\|v\|' \leq \|v\|'' \leq C\|v\|'$$

для любого $v \in V$ и фиксированных констант $c, C > 0$.

||

Problem

10.

Докажите, что во всяком бесконечномерном банаховом пространстве E найдётся последовательность (v_k) , такая что $\|v_k\| = 1$ для любого k и $\|v_i - v_j\| \geq 1$ для любых $i \neq j$.

||
Возьмите флаг конечномерных подпространств $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$ и ищите $v_k \in V_k$.]

Problem

11.

Докажите, что пространство функций ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ с нормой $|f(a)| + \|f\|_B$ полное.

||

для начала обоснуйте, почему $|f(a)| + \|f\|_B$ является нормой.

Далее проверьте наличие поточечного предела у всякой фундаментальной в этой норме последовательности, проверьте что поточечный предел является пределом в этой норме, и что этот предел сам имеет ограниченную вариацию.

||

9.2.

двойственное пространство, его норма и принцип равномерной ограниченности.

Определение двойственного пространства из линейной алгебры можно модифицировать, рассматривая только непрерывные линейные функционалы.

Как мы увидим далее, это гораздо более разумный вариант двойственности при работе с функциональными пространствами.

Определение

12.

для нормированного пространства E введём двойственное пространство E' - пространство непрерывных линейных отображений $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ (или $\lambda : E \rightarrow \mathbb{C}$ для комплексных коэффициентов).

Норму в E' определим как

$$\|\lambda\| = \sup\{|\lambda(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

Лемма

.13.

Линейный функционал $\lambda \in E'$ непрерывен тогда и только тогда, когда его норма конечна.

Доказательство

Линейность позволяет использовать формулу

$$\lambda(x_0 + \Delta x) = \lambda(x_0) + \lambda(\Delta x)$$

и проверять, что $\lambda(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Иначе говоря, непрерывность линейного функционала достаточно проверять в нуле.

Теперь посмотрим на определение непрерывности в нуле по Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что

$$\lambda(U_\delta(0)) \subseteq U_\varepsilon(0).$$

В силу линейности это равносильно тому, что

$$\lambda(U_1(0)) \subseteq U_{\varepsilon/\delta}(0) \quad \text{или даже} \quad \lambda(U_2(0)) \subseteq U_{2\varepsilon/\delta}(0).$$

Из этого следует включение для замкнутых шаров

$$\lambda(B_0(1)) \subseteq B_0(2\varepsilon/\delta) \rightarrow \|\lambda\| \leq 2\varepsilon/\delta$$

В обратную сторону конечность нормы $\|\lambda\|$ и следующее из определения нормы неравенство

$$|\lambda(x)| \leq \|\lambda\| \cdot \|x\|$$

очевидно дают непрерывность λ в нуле. Замечательным фактом является то, что переходя к двойственному от некоторого нормированного пространства мы автоматически получаем банахово пространство:

Теорема

14.

Авоиственное E' к нормированному пространству E полно в свой норме.

Доказательство

Пусть последовательность линейных функционалов (λ_n) фундаментальна.

Для всякого $x \in E$ имеем

$$\|\lambda_n - \lambda_m\| \leq \varepsilon \leftrightarrow \forall x \in E, |\lambda_n(x) - \lambda_m(x)| \leq \varepsilon \|x\|$$

следовательно, при всяком фиксированном x , последовательность чисел $(\lambda_n(x))$ фундаментальна и сходится к некоторому значению $\lambda_0(x)$.

Предельный переход в тождестве

$$\lambda_n(ax + by) = a\lambda_n(x) + b\lambda_n(y)$$

показывает, что $\lambda_0(x)$ линейно зависит от x .

Так как фундаментальная последовательность функционалов была ограничена в E' , то мы имели по определению при любом n

$$|\lambda_n(x)| \leq M\|x\|$$

и в пределе тоже будем иметь

$$|\lambda_0(x)| \leq M\|x\|,$$

то есть λ_0 оказывается непрерывным.

Переходя к пределу $m \rightarrow \infty$ в верном для достаточно больших n и m неравенстве

$$|\lambda_n(x) - \lambda_m(x)| \leq \varepsilon \|x\|,$$

мы получим

$$\forall x \in E, |\lambda_n(x) - \lambda_0(x)| \leq \varepsilon \|x\| \leftrightarrow \|\lambda_n - \lambda_0\| \leq \varepsilon$$

Это означает, что $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ в смысле нормы в E' .

Теорема

9.15 (Теорема Банаха-Штейнгауза - принцип равномерной ограниченности).

Пусть семейство линейных функционалов $Y \subset E'$ ограничено в любой точке банахова пространства E , то есть для любого $x \in E$ множество чисел

$$\{\lambda(x) : \lambda \in Y\}$$

Доказательство

Рассмотрим множество $F = \{x \in E : \forall \lambda \in Y |\lambda(x)| \leq 1\}$, оно замкнуто как пересечение замкнутых множеств, заданных нестрогими неравенствами для непрерывных выражений.

Условие теоремы означает, что всякий $x \in E$ лежит в некотором

$$nF = \{x \in E : \forall \lambda \in Y |\lambda(x)| \leq n\}$$

Иначе говоря, E покрыто его гомотетичными копиями $nF, n \in \mathbb{N}$.

По теореме Бэра одно из множеств покрытия должно иметь непустую внутренность.

Так как они гомеоморфны друг другу, то исходное F должно иметь непустую внутренность, то есть содержать некоторый шар $B_c(r)$.

Так как F центрально симметрично, то оно содержит и шар $B_{-c}(r)$, а из выпуклости F оно содержит и центрированный шар $B_0(r)$.

Мы видим, что на шар $B_0(r)$ все функционалы Y ограничены единицей.

Значит в силу их однородности на единичном шар $B_0(1)$ они все ограничены величиной $1/r$, то есть ограничены как подмножество E' .

Теорема

9.16 (Расходимость ряда Фурье в точке).

Существует непрерывная 2π -периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке 0.

Доказательство

На пространстве $\dot{C}[-\pi, \pi]$ непрерывных 2π -периодических функций определим линейный функционал

$$\lambda_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt$$

это значение n -й частичной суммы ряда Фурье в точке 0, $T_n(f, 0)$.

Можно заметить по определению нормы, что его норма равна

$$\|\lambda_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

Действительно, норма не более этого интеграла прямо по определению нормы, так как

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt \right| \leq \|f\|_C \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

и в этом неравенстве можно сколь угодно приблизиться к равенству, взяв f большую часть времени принимающую значения -1 и $+1$ с быстрым переключением между ними, так чтобы $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} D_n(x)$ везде.

Несложная оценка с заменой модуля синуса на квадрат синуса показывает, что эти нормы функционалов (выраженные через интегралы) при $n \rightarrow \infty$ не являются ограниченными.

Следовательно, по теореме Банаха-Штейнгауза, применённой в обратную сторону, для некоторой функции $f \in \dot{C}[-\pi, \pi]$ значения $\lambda_n(f) = T_n(f, 0)$ неограничены и расходятся при $n \rightarrow \infty$.

Problem

17.

Проведите оценку снизу выражения

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

из приведённого доказательства. Задача 9.18 (Явный пример расходимости ряда Фурье в точке).

Докажите, что ряд Фурье непрерывной 2π -периодической функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \left| 2^{k^3} x \right|$$

расходится в нуле.

||

Выпишите коэффициенты Фурье по косинусам (в силу чётности функции) и оцените их сумму, то есть значение суммы ряда Фурье в нуле.

Воспользуйтесь тем, что для функции вида $\sin k|x|$ значение суммы Фурье в нуле неотрицательно.

||

9.3.

Обзор случаев применения

24.2.6 Linear mappings between Banach spaces

Theory

По аналогии с непрерывными линейными отображениями $E \rightarrow \mathbb{R}(E \rightarrow \mathbb{C})$ и их нормой, можно рассмотреть непрерывные линейные отображения между двумя банаховыми пространствами

$$A : E \rightarrow F$$

Для линейных отображений между банаховыми (или даже просто нормированными) пространствами верен аналог леммы 9.13 с дословно тем же доказательством, который устанавливает, что непрерывность линейного отображения равносильна ограниченности его нормы, определённой так:

Определение

19.

Нормой линейного отображения $A : E \rightarrow F$ между банаховыми пространствами называется

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

При этом также полезно понимать, что норма является оптимальной константой в неравенстве (которое получается из определения продолжением по однородности)

$$\forall x \in E, \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Как и в случае отображения между конечномерными линейными пространствами, мы можем говорить о ядре и образе непрерывного линейного отображения.

???? ро

$$\ker A = \{x \in E : Ax = 0\}$$

по определению замкнуто (как прообраз нуля при непрерывном отображении).

Важно понимать, что образ $A(E)$ в общем случае не обязан быть замкнутым.

В качестве примера можно привести естественное вложение $C[a, b] \rightarrow L_1[a, b]$, образ которого плотен в $L_1[a, b]$, но не равен ему, как показывает следующая задача.

Problem

20.

Приведите пример функции в $L_1[a, b]$, которая не равна почти всюду никакой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции.

Проверим, что всякое замкнутое подпространство $G \subset E$ является ядром некоторого непрерывного отображения банаховых пространств.

Для этого нам надо превратить факторпространство E/G в банахово пространство так, чтобы естественное отображение $E \rightarrow E/G$ стало непрерывным.

Определение 9.21.

Если $G \subset E$ является замкнутым подпространством банахова пространства E , то на факторпространстве E/G определим норму как

$$\|x + G\| = \inf_{y \in G} \|x + y\| = \inf_{y \in G} \|x - y\| = \text{dist}(x, G) = \text{dist}(0, x + G)$$

Из замкнутости G следует, что эта норма невырождена, однородность и неравенство треугольника проверяются просто.

Лемма

.22.

Факторпространство банахова пространства по замкнутому подпространству полнотой. Но. тельству полноты L_p , мы можем выбрать подпоследовательность, для которой будет

$$\forall n \geq 2, \|y_n - y_{n-1}\| \leq 2^{-n}$$

и тогда вопрос сведётся к существованию суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_1 = y_1$, а $u_n = y_n - y_{n-1}$ и $\|u_n\| \leq 2^{-n}$ начиная со второго элемента.

По определению нормы в E/G мы можем выбрать прообраз $v_n \in E$ для $u_n \in E/G$ так, чтобы $\|v_n\| \leq 2\|u_n\|$.

Но тогда при $n \geq 2$ будет выполняться $\|v_n\| \leq 2^{1-n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ будет сходиться в E по фундаментальности к некоторому x .

Если $x_n = \sum_{k=1}^n v_k$, то y_n соответствует классу $x_n + G$.

Если $x_n \rightarrow x$ в E , то $y \in E/G$, соответствующий $x + G$, будет пределом y_n , так как по определению нормы факторпространства верно неравенство

$$\|y_n - y\| \leq \|x_n - x\|.$$

Сформулируем теперь теорему об изоморфизме банаховых пространств с учётом того, что без требования замкнутости образа ничего хорошего у нас не получится, так как незамкнутый образ не будет полным пространством.

Определение

23.

Линейное отображение банаховых пространств $A : E \rightarrow F$ называется изоморфизмом, если оно непрерывно, обратимо и обратное к нему тоже непрерывно.

Теорема

9.24 (Теорема об изоморфизме для банаховых пространств).

Если линейное непрерывное отображение банаховых пространств $A : E \rightarrow F$ имеет замкнутый образ $A(E)$, то оно порождает изоморфизм $E/\ker A \rightarrow A(E)$.

Доказательство

Ясно, что A порождает непрерывное инъективное отображение

$$\bar{A} : E/\ker A \rightarrow F$$

Также можно заменить F на его замкнутое подмножество $A(E)$ и считать, что $A(E) = F$.

В итоге нам остаётся Доказать такое утверждение: если A является непрерывной биекцией, то обратное к нему тоже непрерывно.

Заметим, что непрерывность (то есть ограниченность) обратного в такой постановке равносильна тому, что образ единичного шара $A(B_E)$ содержит некоторый маленький шар tB_F пространства F , $t > 0$.

Рассмотрим последовательность шаров натуральных радиусов в E , (nB_E) .

Их образы $A(nB_E)$ образуют возрастающую последовательность подмножеств F и из биективности A покрывают всё F .

Применим теорему Бэра в варианте с замкнутыми множествами, она утверждает, что замыкание одного из этих множеств должно иметь непустую внутренность,

$$\text{cl } A(mB_E) \supseteq tB_F$$

Это почти то, что нам нужно, остаётся только избавиться от операции замыкания.

Положив $M = m/t$, получим с помощью гомотетии (которая является гомеоморфизмом F)

$$\text{cl } A(MB_E) \supseteq B_F$$

Применив ещё раз гомотетию с коэффициентом α , мы получим включение

$$\text{cl } A(\alpha MB_E) \supseteq \alpha B_F$$

для фиксированного $M > 0$ и произвольного $\alpha > 0$.

Смысл этого включения в том, что для всякого $y \in F$ и $\varepsilon > 0$ мы можем найти $x \in E$, так что

$$\|x\| \leq M\|y\| \quad \text{и} \quad \|y - Ax\| < \varepsilon$$

Посмотрим на какой-нибудь вектор $y \in B_F$.

По (9.1) можно найти $v_1 \in E$, такой что

$$\|v_1\| \leq M \quad \text{и} \quad \|y - Av_1\| \leq 1/2$$

Далее, применяя (9.1) к $y - Av_1$, найдём v_2 , такой что

$$\|v_2\| \leq M/2 \quad \text{и} \quad \|y - Av_1 - Av_2\| \leq 1/4$$

Продолжая в том же духе, будем иметь равенства

$$\|v_k\| \leq M2^{1-k} \quad \text{и} \quad \|y - Av_1 - Av_2 - \dots - Av_k\| \leq 2^{-k}$$

Если мы теперь обозначим $x_k = v_1 + \dots + v_k$, то последовательность x_k фундаментальна в E и сходится в E к некоторому x с нормой не более $2M$.

Так как

$$\|y - Ax_k\| \leq 2^{-k},$$

то Ax_k сходится к y , который по непрерывности отображения A оказывается равным Ax .

Таким образом мы доказали

$$A(2MB_E) \supseteq B_F$$

что означает $\|A^{-1}\| \leq 2M$, то есть непрерывность A^{-1} .

Problem

25.

Докажите, что пространство непрерывных линейных отображений $E \rightarrow F$ (обозначаемое $\mathcal{L}(E, F)$) является банаховым пространством с введённой здесь нормой.

Проверьте, что для этого нужна полнота F , но не нужна полнота E .

||

Рассуждения аналогичны доказательству теоремы 9.14.

||

Обзор случаев применения

24.2.7 Compact subsets in Banach spaces

Theory

В этом разделе мы рассмотрим, как обстоят дела с компактностью в банаховых пространствах.

Сначала напомним, что подмножество K топологического пространства называется компактным, если из всякого его открытого покрытия можно выбрать конечное подсемейство, которое всё ещё покрывает K .

Неформально говорят, что из открытого покрытия выбирается конечное подпокрытие.

Определение

44.

Подмножество X топологического пространства M называется предкомпактным, если его замыкание компактно.

Определение

45.

Подмножество X полного метрического пространства M называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon > 0$ в нём можно выбрать конечную ε -сеть $N \subseteq X$, то есть множество, у которого X лежит в ε -окрестности, $X \subseteq U_\varepsilon(N)$.

Говоря проще, для любого $\varepsilon > 0$, X покрывается конечным набором открытых шаров с центрами в X и радиусами ε .

Problem

46.

Докажите, что в определении вполне ограниченности не обязательно требовать включения $N \subseteq X$, вариант определения без этого требования равносильен исходному.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ мы знаем, что множество предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.

Также нетрудно убедиться, что в евклидовом пространстве понятие ограниченности совпадает с понятием вполне ограниченности.

Problem

47.

Докажите, что в бесконечномерном банаховом пространстве E единичный шар не является вполне ограниченным.

Доказательство

Если множество предкомпактно, то покроем его замыкание набором всевозможных ε -шаров с центрами в X .

Из этого набора можно оставить только конечное число, которые всё ещё будут покрывать его замыкание, а значит и X .

В обратную сторону, пусть X вполне ограничено и $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ - открытое покрытие его замыкания $Y = \text{cl}X$.

Предполагаем противное: $\mathcal{U}$ нельзя уменьшить до конечного покрытия Y .

Будем действовать как в доказательстве для евклидова пространства, строя последовательность замкнутых подмножеств $Y_k \subset Y$, каждое из которых не покрывается конечным подсемейством семейства $\mathcal{U}$. На k -м шаге возьмём $\varepsilon = 2^{-k}$ и по вполне ограниченности покроем X конечным набором $\varepsilon/2$ -шаров $B_{x_1}(2^{-k-1}), \dots, B_{x_N}(2^{-k-1})$, здесь нам удобнее использовать замкнутые шары.

Увеличенные шары $B_{x_1}(2^{-k}), \dots, B_{x_N}(2^{-k})$ тогда покроют и Y .

Для одного из множеств $Y_k \cap B_{x_i}(2^{-k})$ мы тоже не сможем выбрать из $\mathcal{U}$ конечное покрытие (иначе смогли бы выбрать конечное подпокрытие для Y_k).

Положим тогда $c_k = x_i$ и $Y_{k+1} = Y_k \cap B_{c_k}(2^{-k})$.

Так как множества Y_k не пусты, замкнуты, образуют убывающую по включению последовательность, и их диаметры стремятся к нулю, то они имеют общую точку по теореме 3.20.

Эта точка лежит в одном из $U_\alpha \in \mathcal{U}$ вместе со своей окрестностью, в которую при достаточно большом k попадает и всё множество Y_k - противоречие с выбором Y_k . Полезно явно описать предкомпактные множества в одном из используемых нами банаховых пространств.

Пусть M - компактное метрическое пространство, $C(M)$ - пространство непрерывных функций на нём с нормой

$$\|f\|_C = \sup_{x \in M} |f(x)|$$

это формальное обобщение банахова пространства непрерывных на отрезке функций с нормой $\|\cdot\|_C$.

Его полнота следует из того, что равномерный предел последовательности непрерывных функций $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$ тоже будет непрерывной функцией, в соответствии с очевидным обобщением теоремы 4.34.

Определение

49.

Множество функций $X \subset C(M)$ равностепенно непрерывно, если

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall f \in X \forall x, y \in M, \text{dist}(x, y) < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Теорема

9.50 (Теорема Арцела-Асколи).

Множество $X \subset C(M)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда X равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Доказательство

Определим общий модуль непрерывности множества функций X :

$$\omega_X(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in X, x, y \in M, \text{dist}(x, y) < \delta\}$$

он неотрицателен и может принимать значение $+\infty$.

Равностепенная непрерывность означает, что $\omega_X(\delta) \rightarrow 0$ когда $\delta \rightarrow +0$. Мы будем понимать предкомпактность как вполне ограниченность в силу предыдущей теоремы.

Предположим, что множество функций X ограничено и равностепенно непрерывно, докажем его вполне ограниченность.

Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $\omega_X(\delta) < \varepsilon$.

Выберем д-сеть $N_\delta \subset M$ из компактности M .

Значения функций из X на N_δ образуют ограниченное множество в конечномерном $\mathbb{R}^{N_\delta}$ (так обозначается пространство всех отображений $N_\delta \rightarrow \mathbb{R}$), значит в нём есть ε -сеть $X_\varepsilon \subseteq X$.

Это означает, что всякая $f \in X$ может быть с точностью ε приближена на конечном множестве N_δ некоторой функцией $g \in X_\varepsilon$. Но так как N_δ является д-сетью в M и $\omega_X(\delta) < \varepsilon$, то при переходе от N_δ ко всему M точность приближения $f \in X$ функцией $g \in X_\varepsilon$ может упасть максимум до 3ε , то есть X_ε является 3ε -сетью для X в норме $C(M)$.

Обратно, пусть X предкомпактно, то есть вполне ограничено в $C(M)$.

Возьмём для него ε -сеть $X_\varepsilon \subseteq X$.

Приближая функцию $f \in X$ функциями $g \in X_\varepsilon$, мы получим неравенство

$$\omega_X(\delta) \leq \omega_{X_\varepsilon}(\delta) + 2\varepsilon$$

Модуль непрерывности конечного семейства функций X_ε конечен и стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$.

А значит при достаточно малом δ мы сможем утверждать, что $\omega_X(\delta) < 3\varepsilon$.

Это означает равностепенную непрерывность X , ограниченность X очевидно следует из его вполне ограниченности.

Problem

51.

никакое бесконечномерное банахово пространство E не является образом непрерывной кривой

Докажите, для никакое бесконечномерное банахово пространство E не является образом непрерывной кривой $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$.

||
||

Используйте некомпактность шаров в E и теорему Бэра.

Problem

52.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ - компакт, а функция $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Докажите, что интегральный оператор $I : C(X) \rightarrow C(X)$, заданный по формуле

$$I[f](x) = \int_X K(x, y) f(y) dy$$

отображает единичный шар $C(X)$ в предкомпактное множество в $C(X)$.

||

докажите равностепенную непрерывность образа единичного шара при этом операторе через равномерную непрерывность K .||

Обзор случаев применения

24.2.8 Han-Banach theorem

Theory

Мы уже выяснили, что двойственное Определение к гильбертову пространству устроено довольно простым образом.

В этом разделе мы обсудим более общий случай.

Следующая теорема устанавливает существование достаточно большого количества элементов E' .

Теорема

9.53 (Теорема Хана-Банаха).

Пусть E - банахово пространство, $F \subset E$ - его линейное подпространство.

Тогда всякий ограниченный линейный функционал $\lambda \in F'$ продолжается до линейного функционала на всём E без увеличения его нормы.

Доказательство

Будем рассматривать банахово пространство на, поле действительных чисел, так как в комплексном случае будет достаточно продолжать действительную часть функционала, которая однозначно определяет его мнимую часть.

Задача продолжения с F на $G \supseteq F$ достаточно легко решается в случае, если $F \subset G$ имеет коразмерность 1, тогда изоморфизм $\mu : G/F \rightarrow \mathbb{R}$ и функционал λ (продолженный как-нибудь), как пара координат, дают двумерную картинку, на которой образ единичного шара G является центрально-симметричным выпуклым множеством, не пересекающим множество $\{\mu = 0, |\lambda| > 1\}$.

В двумерном случае достаточно очевидно, что замена λ на $\lambda + t\mu$ при некотором действительном t позволит значениям λ быть не более 1 на единичном шаре.

Конечно, продолжения функционала по шагам коразмерности 1 не доведут нас за конечное количество шагов до всего E , и даже не доведут до E за счётное количество шагов.

Но тут на помощь приходит лемма Цорна (Теорема 61 ниже) из теории множеств, которая обсуждается подробно в следующем разделе.

Для применения леммы Цорна, мы рассмотрим все пары (F, λ_F) , состоящие из по Δ^- пространства $F \subset E, F \ni x$, и продолженного на него с $\langle x \rangle$ функционала λ_F с нормой $\lambda(x)$.

Введём на парах отношение частичного порядка

$$(F, \lambda_F) \leq (G, \lambda_G) \leftrightarrow F \subseteq G \text{ и } \lambda_G|_F = \lambda_F$$

которое неформально говоря означает, что один способ продолжения является продолжением другого способа продолжения линейного функционала.

Тогда для всякой цепи этого частичного порядка, то есть множества пар

$$\mathcal{C} = \{F_\alpha, \lambda_\alpha\}_\alpha$$

в котором любые два элемента сравнимы этим частичным порядком, мы имеем пару, состоящую из объединения $F = \bigcup_\alpha F_\alpha$ и заданного на нём линейного функционала λ_F , такого что для любого α имеем $\lambda_F|_{F_\alpha} = \lambda_\alpha$.

В этом определении нет противоречия, так как $\lambda_\alpha|_{F_\beta} = \lambda_\beta$ при $F_\beta \subseteq F_\alpha$ и поэтому определение значения λ_F на элементе $x \in F$ не зависит от того, какое содержащее его F_α мы выбираем.

Построенная в результате объединения пара (F, λ_F) обладает тем свойством, что она «не меньше» любого элемента цепи $\mathcal{C}$.

В таких условиях (существование верхней грани любой цепи) лемма Цорна утверждает, что найдётся пара (F, λ_F) , для которой не существует строго большей пары в нашей системе.

Так как мы умеем продолжать линейный функционал на $G \supset F$ при $\dim G/F = 1$, то получается, что у подпространства $F \subseteq E$ нет содержащих его подпространств «на единицу большей размерности».

Но если $F \neq E$, то для любого вектора $y \notin F$ линейная оболочка $G = \langle F, y \rangle$ как раз обладала бы свойством $\dim G/F = 1$ и мы могли бы на неё продолжить линейный функционал.

Следовательно, в максимальной паре (F, λ_F) обязательно $F = E$ и мы на самом деле продолжили линейный функционал, не увеличивая его норму, на всё E .

Problem

54.

Доделайте использованный в доказательстве двумерный случай теоремы Хана-Банаха.

||

Рассмотрите образ единичного шара B на плоскости и его замыкание $\bar{B}$.

Докажите, что точки множества $L = \{\mu = 0, |\lambda| > 1\}$ не могут лежать в $\bar{B}$.

Для точки $p \in L$ найдите ближайшую $\pi(p)$ в $\bar{B}$ и прямую s_p , которая проходит через $\pi(p)$ перпендикулярно $\pi(p) - p$.

Из выпуклости $\bar{B}$ заключите, что s_p отделяет p от $\bar{B}$, потом рассмотрите предел таких s_p при $p \rightarrow (0, 1)$.

||

Следствие 9.55.

Для всякого банахова пространства E и его ненулевого элемента $x \in E$ найдётся $\lambda \in E'$, такой, что $\|\lambda\| = 1$ и $\lambda(x) = \|x\|$.

Доказательство

Такое λ легко определить на одномерной линейной оболочке $\langle x \rangle$, а далее его надо продолжить.

Теорема Хана-Банаха показывает, что естественное отображение банахова пространства в его второе двойственное

$$E \rightarrow E'', x \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(x))$$

является вложением, сохраняющим норму.

Problem

56.

Проверьте аккуратно сохранение нормы при естественном вложении $E \rightarrow E''$.

||

Используйте неравенство $|\lambda(x)| \leq \|\lambda\| \cdot \|x\|$.

Problem

57.

Докажите, что для гильбертова пространства H отображение $H \rightarrow H''$ является биекцией.

||

Используйте теорему 9.36.

||

В случае произвольного банахова пространства отображение $E \rightarrow E''$ может и не быть биекцией.

Некоторые любопытные сведения о случае $E = \ell_1$ будут приведены в разделе 9.18.

В следующих упражнениях читателю предлагается установить свойства конечномерных подпространств банахова пространства, замкнутых подпространств конечной коразмерности и федгольмовых операторов.

Problem

58.

Докажите, что конечномерное подпространство V в банаховом пространстве E имеет замкнутое дополнение $W \subseteq E$, такое что $E = V \oplus W$.

||

С помощью теоремы Хана-Банаха продолжите изоморфизм $V \rightarrow \mathbb{R}^k$ до непрерывного отображения $E \rightarrow \mathbb{R}^k$ и рассмотрите его ядро.

||

Problem

59.

Непрерывное линейное отображение банаховых пространств $A : E \rightarrow F$ называется федгольмовъи, если $\ker A$ и $F/A(E)$ конечномерны и $A(E)$ замкнуто.

Пространство федгольмовых отображений обозначим $\mathcal{F}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$.

Докажите, что оно открыто в $\mathcal{L}(E, F)$

||

Разложите $E = \ker A \oplus W$ и докажите, что для близких к A операторов A' образ $A'(W)$ всё ещё будет замкнутым и $F/A'(W)$ останется конечномерным.

Применяйте теорему об изоморфизме 9.24.]]

Problem

60.

Для $A \in \mathcal{F}(E, F)$ положим

$$\text{ind } A = \dim F/A(E) - \dim \ker A$$

Докажите, что этот индекс локально постоянен на $\mathcal{F}(E, F)$.

24.2.9 Han-Banach theorem: Applications**Обзор случаев применения****24.2.10 Zorn's lemma and transfinite induction**

(?? в чем идея в итоге трансфинитной индукции???)

Theory

доказательство теоремы Хана-Банаха подсказывает, что нам потребуется познакомиться поближе с некоторыми фактами и приёмами теории множеств.

Сформулируем явно использованную выше в доказательстве лемму Цорна:

Лемма Цорна

Пусть X - частично упорядоченное множество, у которого любая цепь (линейно упорядоченное подмножество) $C \subseteq X$ имеет верхнюю грань, то есть элемент $s \in X$ такой что для любого $x \in C$ выполняется $x \preceq s$.

Тогда в X есть максимальный элемент, то есть элемент, для которого нет большего в этом множестве.

Часто лемма Цорна применяется в своём частном случае, когда X является подмножеством некоторого 2^{Y^1} (множества подмножеств Y), и элементы X упорядочены по включению как подмножества Y .

В таком случае максимальный элемент цепи существует в 2^Y всегда, это просто объединение элементов цепи, и предположение леммы Цорна означает, что объединение элементов всякой цепи из X должно лежать в X .

Вывод леммы в этом случае означает, что в X есть множество, не содержащееся в большем множестве из X .

Чтобы убедиться в верности леммы Цорна, сформулируем сначала аксиому выбора, в которую поверить легче: у всякого семейства множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (индексированного некоторым множеством A) декартово произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ не пусто, иначе говоря, мы можем выбрать по одному $x_\alpha \in X_\alpha$ для любого $\alpha \in A$.

Эта аксиома звучит как некоторое очевидное утверждение, но на самом деле оказывается, что при бесконечном A она не следует из других аксиом теории множеств и должна быть постулирована отдельно, если мы хотим иметь возможность содержательно работать с бесконечными множествами.

О применениях леммы Цорна (!!!)

(поищу там потом их поиском, их много очень.)

Лемма Цорна: Comments (!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!)

(????????????? I don't understand it yet)

Определение вполне упорядоченности

Для дальнейших рассуждений нам понадобится некоторое усиление понятия линейного порядка:

Множество X называется вполне упорядоченным, если на нём введён линейный порядок, в котором всякое подмножество $Y \subseteq X$ имеет минимальный элемент.

Problem

63.

Проверьте, что множество $\mathbb{N}$ вполне упорядочено своим естественным порядком, а $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ не являются вполне упорядоченными своим естественным порядком.

Теорема Цермело (????)

Всякое множество можно вполне упорядочить.

Набросок доказательства (?)

Пусть наше множество $-X$.

Используя аксиому выбора, выберем элемент $f(Y) \in X \setminus Y$ для всякого $Y \subset X, Y \neq X$, включая пустое Y .

Будем рассматривать вполне упорядоченные подмножества $S \subseteq X$ с порядком $<_S$, такие что

$$\forall x \in S, x = f(\{y \in S : y <_S x\}).$$

Неформально говоря, f предписывает выбор следующего элемента в X при наличии некоторого множества уже выбранных элементов, в качестве S мы рассматриваем множества, выбранные в соответствии с f .

Аккуратно используя вполне упорядоченность, можно показать, что любые два таких вполне упорядоченных S и T устроены так, что либо они совпадают и порядки на них одинаковые, либо одно является подмножеством другого и начальным интервалом другого в смысле порядка.

Потом можно доказать, что объединение U всех таких множеств S несёт порядок, согласованный с порядком на всех S , и является вполне упорядоченным.

После этого остаётся заметить, что $U = X$, так как иначе множество $U \cup \{f(U)\}$ будет множеством типа S , которое по построению уже должно содержаться в U .

О применениях (!?!?)

Problem

65.

Доделайте доказательство теоремы Цермело, объяснив, почему для всяких двух S и T , упорядоченных в соответствии с f , либо они совпадают и порядки на них одинаковые, либо одно является подмножеством другого и начальным интервалом другого в смысле порядка.

||

Рассмотрите минимальный $x \in S$, такой что начальный интервал $\{y \in S : y <_S x\}$ не является начальным интервалом T .

Заметьте, что начальный интервал вполне упорядоченного множества является объединением строго меньших начальных интервалов, кроме случая, когда он содержит максимальный элемент.

||

Любопытно, что рассуждения в доказательстве теоремы Цермело по структуре повторяют рассуждения в теореме о продолжении решения дифференциального уравнения, см. теорему 7.69.

С понятием вполне упорядоченности связан принцип трансфинитной индукции: если для всякого элемента $x \in S$ вполне упорядоченного множества S можно определить значение $f(x)$ при условии, что $f(y)$ определено при всех $y < x$, то f (функция, отображение или что-то еще) определено на всём S .

Неформально говоря, достаточно рассмотреть минимальный из тех $x \in S$, для которых f определить нельзя, и получить противоречие.

Problem

66.

Обоснуйте возможность трансфинитной индукции, рассмотрев частичные определения f на начальных отрезках $T \subseteq S$.

||

Докажите, что любые два частичных определения устроены так, что одно из них является продолжением другого.

Потом объедините все частичные определения f и объясните, что получилось объединение f на всём S .

||

Вывод леммы Цорна из теоремы Цермело

Помимо частичного порядка $\preccurlyeq$ на X рассмотрим (не обязательно связанное с ним) отношение полного порядка $\leq$ на X , существующее по теореме Цермело.

Сделаем разбиение X на два множества A и B по трансфинитной индукции.

Если для данного $x \in X$ все $y < x$ уже приписаны к одному из двух типов, то припишем x к типу по следующему правилу: $x \in A$, если x вместе с уже приписанными в A элементами образует $\preccurlyeq$ -цепь.

Иначе $x \in B$, тогда x не будет $\preccurlyeq$ -сравним с одним из элементов A .

После применения трансфинитной индукции A является $\preccurlyeq$ -цепью, а всякий элемент из B не $\preccurlyeq$ -сравним с одним из элементов A .

существующая по условию леммы верхняя грань $A, m \in X$, должна лежать в самом A , так как она $\preccurlyeq$ -сравнима со всеми элементами A .

Если $x \in A$, то $x \preccurlyeq m$, а если $x \in B$, то $m \preccurlyeq x$ не может выполняться, так как тогда выполнялось бы $y \preccurlyeq m \preccurlyeq x$ для любого $y \in A$, что противоречило бы нахождению x в B .

Следовательно, m не имеет $\preccurlyeq$ -большого в X и является максимальным элементом X . Доказательство теоремы Хана-Банаха также можно провести с помощью трансфинитной индукции и понятия алгебраического базиса (базиса Гамеля) пространства E , далее идёт набросок таких рассуждений.

Определение

67.

Алгебраическим базисом векторного пространства V называется подмножество $B \subset V$, в котором нет линейных зависимостей между конечным числом векторов, и которое порождает пространство V своими конечными линейными комбинациями.

Название «алгебраический» мы используем, чтобы не путать это понятие, например, с ортогональными системами в гильбертовых пространствах, по которым каждый элемент раскладывается в (бесконечную) сумму.

В алгебраическом смысле суммы рассматриваются только конечные.

Лемма

.68.

Во всяком векторном пространстве есть вполне упорядоченный алгебраический базис.

Доказательство

Возьмём вполне упорядоченное множество S , которое мощнее V , например, вполне упорядочив $S = 2^V$.

Также вполне упорядочим V .

Определим отображение $f : S \rightarrow V$ по трансфинитной индукции так: если $x \in S$, а $L_x = \{y \in S : y < x\}$, то возьмём в качестве $f(x)$ минимальный по полному порядку V элемент, линейно независимый от векторов множества $f(L_x)$.

Если линейно независимых от $f(L_x)$ элементов

нет, то мы на самом деле нашли вполне упорядоченный базис $f(L_x)$ в V .

В нём нет линейных зависимостей, так как линейная зависимость между несколькими векторами $f(x_1) < \dots < f(x_m)$ невозможна по выбору $f(x_m)$.

Если вторая альтернатива в этом определении никогда не сработала, то мы инъективно отобразим S в V , что невозможно в силу выбранной мощности S .

При наличии вполне упорядоченного алгебраического базиса V теорема Хана-Банаха может быть доказана трансфинитной индукцией.

Действительно, на каждом шаге трансфинитной индукции мы добавляем один вектор и расширяем линейную оболочку начального интервала базиса так, что факторпространство новой линейной оболочки по старой будет иметь размерность 1, то есть на каждом шаге трансфинитной индукции вопрос опять сводится к двумерной картинке.

За подробностями предыдущих набросков и строгим изложением нужных фактов теории множеств читатель может обратиться к любой книге по теории множеств, хотя, пожалуй, злоупотреблять этим не стоит.

Если слишком сжатое изложение в этом разделе было не совсем понятно, можно просто принять лемму Цорна как аксиому.

Обзор случаев применения

24.2.11 *- weak topology and compactness in dual space (!!!)

Theory

На двойственном пространстве банахова пространства помимо топологии, определяемой нормой, существует и другая топология:

Определение

69.

На пространстве E' можно задать *-слабую топологию, порождённую открытыми множествами

$$U_{x,a,b} = \{\lambda \in E' : a < \lambda(x) < b\}$$

Для всяких $x \in E$ и $a < b \in \mathbb{R}$ с помощью операций взятия конечного пересечения и произвольного объединения.

Соответствующее этой топологии понятие сходимости соответствует поточечной сходимости линейных функционалов как функций на E . При этом топология, связанная с нормой в пространстве E' (

Определение

12), называется сильной.

Оказывается, у *-слабой топологии есть некоторое свойство компактности, которое иногда позволяет находить линейные функционалы, минимизирующие некоторые (полу)непрерывные снизу в *-слабой топологии функции от функционала.

Теорема Банаха-Алаоглу (!!!)

Всякий шар пространства E' компактен в *-слабой топологии.

Доказательство

Пусть $B \subset E$ и $B' \subset E'$ - единичные шары, утверждение достаточно доказать для шара B' .

Всякий линейный функционал $\lambda \in B'$ при сужении на B даёт функцию $f : B \rightarrow [-1, 1]$, по которой он однозначно восстанавливается в силу условия $\lambda(ax) = a\lambda(x)$.

Такие функции $B \rightarrow [-1, 1]$ удобно считать элементами бесконечного декартова произведения

$$[-1, 1]^B = \prod_{x \in B} [-1, 1].$$

В этом декартовом произведении можно ввести топологию, порождённую множествами $\prod_{x \in B} U_x$, такими что все U_x являются открытыми подмножествами $[-1, 1]$ и все кроме конечного числа совпадают с $[-1, 1]$.

Такая топология декартова произведения в $[-1, 1]^B$ индуцирует именно *-слабую топологию на B' , так как всякое открытое в топологии декартова произведения множество является объединением множеств, заданных конечными системами неравенств

$$a_1 < \lambda(x_1) < b_1, a_2 < \lambda(x_2) < b_2, \dots, a_N < \lambda(x_N) < b_N$$

что совпадает с определением *-слабой топологии на B' , с учётом возможности масштабировать x_i и считать $x_i \in B$.

Шар B' соответствует замкнутому подмножеству $[-1, 1]^B$, так как выполнение всякого соотношения линейности

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

при фиксированных a, b, x, y задействует только три точки $x, y, ax + by$; причём для продолжимости f с шара B до линейного функционала λ на всём E достаточно проверить такие соотношения только для точек $x, y, ax + by \in B$.

Следовательно, левая и правая части соотношения линейности для f непрерывно зависят от f в топологии прямого произведения и всякое такое соотношение задаёт замкнутое подмножество $[-1, 1]^B$, а пересечение всех таких замкнутых подмножеств тоже замкнуто.

В итоге возникает гомеоморфизм шара B' со $*$ -слабой топологией на замкнутое подмножество

$$\{f \in [-1, 1]^B : \forall a, b \in \mathbb{R} \forall x, y \in B (ax + by \in B) \rightarrow (f(ax + by) = af(x) + bf(y))\}$$

Теперь остаётся применить теорему Тихонова (теорему 9.77 ниже), которая утверждает компактность $[-1, 1]^B$, тогда B' оказывается компактом как замкнутое подмножество компакта $[-1, 1]^B$. Доказательство теоремы Тихонова мы отложим до следующего раздела, а пока обсудим сравнение $*$ -слабой топологии и сильной топологии (соответствующей норме) в некотором E' .

Можно посмотреть на вопрос сравнения двух топологий более абстрактно, то есть сравнивать две разные топологии на одном и том же пространстве.

Введём некоторую терминологию.

Пусть на пространстве X топология состоит из всевозможных объединений множеств семейства $\mathcal{U}$, покрывающего X .

Тогда последнее семейство называется базой этой топологии, если всякое конечное пересечение множеств из $\mathcal{U}$ может быть представлено как объединение множеств из $\mathcal{U}$.

Окрестностью точки $x \in X$ называют любое открытое множество U в этой топологии, содержащее x .

Всякая окрестность x по определению содержит в себе одно из множеств базы, содержащее x , что позволяет в рассуждениях с окрестностями рассматривать только базовые окрестности.

Например, в метрическом пространстве в качестве базовых окрестностей можно рассматривать только ε -окрестности, причём можно ограничиться только рациональными ε , или даже $\varepsilon = 1/n$ для $n \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь вторая топология на том же множестве состоит из всевозможных объединений множеств базы $\mathcal{V}$.

Теорема

71.

Чтобы доказать, что две базы $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq 2^X$ соответствуют одной и той же топологии на X , достаточно проверить, что для любой точки $x \in X$ всякая его базовая окрестность $U \in \mathcal{U}$ содержит некоторую базовую окрестность $V \in \mathcal{V}$, $x \in V$, и наоборот.

Доказательство

Рассмотрим базовое множество $U \in \mathcal{U}$.

Всякая его точка $x \in U$ по условию содержится в некотором базовом множестве $V_x \in \mathcal{V}$, которое содержится в U .

Тогда объединение $\bigcup_{x \in U} V_x$ является открытым множеством второй топологии и совпадает с U .

Таким образом всякое базовое множество первой топологии открыто во второй, а значит и вообще всякое открытое множество первой топологии открыто во второй.

Если выполняется и обратное, то топологии просто совпадают.

Аальнейшее сравнение $*$ -слабой топологии и топологии нормированного пространства в E читатель может проделать, решая следующие задачи.

Problem

72.

докажите, что при фиксированном $y \in E'$ (в двойственном к некоторому банахову пространству) функция расстояния $f(x) = \|x - y\|$ полунепрерывна снизу в $*$ -слабой топологии.

||

Нужно доказать замкнутость множеств $\{f(x) \leq c\}$ в слабой топологии, проверив, что в этой топологии компактность влечёт замкнутость.

||

Problem

73.

Приведите пример замкнутого в топологии нормы множества $X \subseteq E'$, которое не является замкнутым в $*$ -слабой топологии.

||

Воспользуйтесь тем, что для бесконечномерного E' всякая окрестность нуля в $*$ -слабой топологии содержит некоторое бесконечномерное линейное подпространство.

||

Problem

74.

Докажите, что $*$ -слабо сходящаяся последовательность (сходимость определяется через систему базовых окрестностей) в E' является ограниченной (в смысле нормы E').

||

Используйте принцип равномерной ограниченности.

||

Problem

75.

докажите, что при условии $E = E''$ замкнутое в топологии нормы выпуклое множество $K \subseteq E'$ является замкнутым и в $*$ -слабой топологии.

||

Пусть $x_0 \notin K$ и без ограничения общности $x_0 = 0$.

Тогда по замкнутости K относительно нормы некоторый шар $B_0(r)$ положительного радиуса не пересекается с K .

Рассуждая аналогично доказательству теореме Хана-Банаха по трансфинитной индукции, найдите линейный функционал, который не более 1 на $B_r(0)$ и не менее 1 на K и получите $*$ -слабую окрестность нуля, не пересекающую K .]

Problem

76.

Докажите, что при условии $E = E''$ расстояние между точкой $x \in E'$ и выпуклым замкнутым в топологии нормы $K \subset E'$ достигается на некотором $y \in K$, то есть $\rho(x, y) = \text{dist}(x, K)$.

||

Можно пересечь K с шаром, использовать компактность в $*$ -слабой топологии и полунепрерывность снизу функции расстояния.

||

9.10.

Обзор случаев применения

24.2.12 What functional analysis can give for physicists what can't be obtained in another way?

szego limiting theorem

that question about commutation of phase operator and number operator

24.3 Other Introduction to Functional Analysis

24.3.1 Tikhonov's theorem

Theory

Мы свели оказательство теоремы Банаха-Алаоглу к более фундаментальной теореме Тихонова, в этом разделе мы обсудим доказательство последней.

Для начала приведём её формулировку.

Теорема

9.77 (Теорема Тихонова).

Пусть A - некоторое множество, а $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство компактных топологииеских пространств, индексированное этим множеством.

Тогда будет компактным и декартово произведение

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

у которых только для конечного иисла нарушается равенство $U_\alpha = X_\alpha$. Для понимания топологии прямого произведения полезно решить следующую задачу.

Problem

78.

Проверьте, что отображение топологических пространств $f : Y \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все композиции $p_\beta \circ f : Y \rightarrow X_\beta$ с координатными проекциями $p_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta$.

В следующих задачах даётся набросок элементарных рассуждений, доказывающих ослабленные версии теорем Тихонова и Банаха-Алаоглу, а потом идёт довольно длинное доказательство теоремы Тихонова в полном виде.

Problem

79.

Докажите секвенциальную компактность декартова произведения отрезка с самим собой в счётном количестве.

Топологии сходимости будет соответствовать покоординатная сходимость последовательностей чисел - элементов этого произведения.

||

Примените теорему Больцано-Вейерштрасса по очереди ко всех координатам, получив последовательность вложенных подпоследовательностей (S_n) исходной последовательности точек (p_k) .

Потом выберите подпоследовательность (p_{k_ℓ}) , у которой для всякого фиксированного n при достаточно больших ℓ номер k_ℓ попадает в список номеров S_n .]]

Problem

80.

Докажите, что если в единичном шаре E есть счётное всюду плотное множество, то секвенциальная компактность единичного шара E' следует из предыдущей задачи.

[[

Добейтесь сходимости подпоследовательности (λ_n) в точках плотного $X \subset B$, потом докажите сходимость во всех точках, используя липшицевость всех $\lambda_n \in B'$.]]

Теперь перейдём к доказательству теоремы Тихонова в полной общности.

Сначала заметим, что для доказательства компактности некоторого топологического пространства X нам нужно доказать, что всякое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Рассуждая от противного, мы начнём с некоторого открытого покрытия $\mathcal{U} \subseteq 2^X$ без конечных подпокрытий и поместим его в некоторое максимальное по включению открытое покрытие $\mathcal{I} \subseteq 2^X$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Лемма

.81.

Для всякого открытого покрытия $\subseteq 2^X$ без конечного подпокрытия найдётся некоторое открытое покрытие $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{U}, \mathcal{I} \subseteq 2^X$, максимальное по включению среди тех, из которых тоже нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Доказательство

Рассмотрим всевозможные открытые покрытия $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$, из которых нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Докажем, что к ним применима лемма Цорна (теоремы 9.61), а именно, докажем, что всякая линейно упорядоченная цепь $\mathcal{C}$ таких покрытий в объединении даёт покрытие такого же вида.

Частичный порядок на семействах подмножеств здесь задан отношением включения одного семейства в другое, в этом смысле мы и применяем лемму Цорна.

В качестве кандидата на верхнюю грань цепи семейств $\mathcal{C}$ возьмём объединение элементов цепи.

Предположим, что оно нам не годится, то есть в объединении элементов цепи $\mathcal{C}$ есть конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_N$ пространства X .

Тогда открытое множество U_i принадлежит некоторому элементу цепи $\mathcal{U}_i$ и из определения цепи следует, что без ограничения общности выполняются включения

$$\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{U}_N$$

Следовательно, $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{U}_N \in \mathcal{C}$ и мы выбрали из покрытия $\mathcal{U}_N$ конечное подпокрытие - это противоречие, так как цепь составлена из покрытий без конечных подпокрытий.

Следовательно, наше предположение неверно, условия леммы Цорна выполнены и она даёт существование максимального по включению открытого покрытия без конечных подпокрытий.

Изучим теперь более внимательно строение максимального по включению открытого покрытия, полученного в предыдущей лемме.

Лемма

.82.

Если открытое покрытие $\mathcal{I}$ топологического пространства X максимально по включению среди открытых покрытий, не имеющих конечного подпокрытия, то выполняются свойства 1) для всякого $U \in \mathcal{I}$ и открытого $V \subseteq U$ оказывается $V \in \mathcal{I}$;

Доказательство.

Докажем первое свойство: если к семейству $\mathcal{I}$ добавить V , то конечных подпокрытий не появится, так как всякое конечное подпокрытие с участием V можно было бы заменить на конечное подпокрытие с заменой V на U .

Так как семейство $\mathcal{I}$ максимально среди покрытий без конечного подпокрытия, то добавить V к нему на самом деле нельзя, а это означает $V \in \mathcal{I}$.

Для доказательства второго свойства заметим, что отсутствие U в $\mathcal{I}$ означает, что найдётся набор $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{I}$, такой что

$$X = U \cup U_1 \cup \dots \cup U_N$$

Аналогично

$$X = V \cup V_1 \cup \dots \cup V_M$$

для некоторого конечного набора $V_1, \dots, V_M \in \mathcal{I}$.

Тогда

$$X = (U \cap V) \cup U_1 \cup \dots \cup U_N \cup V_1 \cup \dots \cup V_M$$

что означает отсутствие $U \cap V$ в $\mathcal{I}$.

Завершение доказательства теоремы

9.77.

Пусть теперь

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

с описанной в формулировке теоремы топологией, и в силу предыдущих рассуждений мы рассматриваем максимальное по включению открытое покрытие $\mathcal{I}$ пространства X , которое не имеет конечного подпокрытия.

Рассмотрим некоторую точку $x \in X$ и содержащее его открытое $U \in \mathcal{I}$.

По определению топологии на X открытость U означает, что оно содержит множество вида

$$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha \ni x$$

где $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ открыты и только для конечного числа индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ оказывается

$$U_\alpha \neq X_\alpha$$

Рассмотрим координатные проекции $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ и для этого конечного набора индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ положим

$$\tilde{U}_{\alpha_i} = p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$$

это открытое подмножество X и у нас получается, что

$$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha = \tilde{U}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \tilde{U}_{\alpha_n}$$

По свойству 1 покрытия $\mathcal{I}$ (из леммы 9.82) мы имеем

$$\tilde{U}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \tilde{U}_{\alpha_n} \in \mathcal{I}$$

а по свойству 2 (применённому наоборот) оказывается, что для некоторого индекса i АОЛЖНо быть

$$\tilde{U}_{\alpha_i} \in \mathcal{I}$$

Мы доказали, что в $\mathcal{I}$ содержатся открытые множества вида

$$\tilde{U}_\alpha = p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$$

которые покрывают всё пространство X , так как в предыдущих рассуждениях мы можем начать с любой точки $x \in X$. Δ окажем, что уже из таких множеств можно выбрать конечное покрытие для X .

Заметим, что всякому $\alpha \in A$ может соответствовать не одно открытое $U_\alpha \subset X_\alpha$ с $\tilde{U}_\alpha \in \mathcal{I}$, обозначим их как $\{U_{\alpha,\xi}\}_{\xi \in \Xi_\alpha}$.

Рассмотрим два случая:

1) для любого α оказывается $X_\alpha \neq \bigcup_{\xi \in \Xi_\alpha} U_{\alpha,\xi}$.

Тогда мы выберем

$$x_\alpha \in X_\alpha \setminus \bigcup U_{\alpha,\xi}$$

как координаты некоторого $x \in X$.

Тогда окажется, что x не принадлежит никакому $\tilde{U}_{\alpha,\xi}$.

Однако мы доказали, что последние множества покрывают всё X - противоречие. 2) для некоторого α оказывается $X_\alpha = \bigcup_{\xi \in \Xi_\alpha} U_{\alpha,\xi}$.

Тогда из компактности X_α оно покроеется конечным набором $U_{\alpha,\xi_1}, \dots, U_{\alpha,\xi_N}$, а всё произведение X тогда покроеется соответствующими $\tilde{U}_{\alpha,\xi_1}, \dots, \tilde{U}_{\alpha,\xi_N}$.

Это и есть выбор конечного подпокрытия из $\mathcal{I}$.

В схеме доказательства теоремы Тихонова важно отметить, что мы свели проверку компактности топологического пространства X для его открытых покрытий к проверке его компактности для покрытий его множествами некоторой предбазы его топологии, и это работает во всех топологических пространствах.

Предбазой топологического пространства X называется такой набор открытых множеств $\mathcal{P} \subset 2^X$, что всевозможные конечные пересечения $U_1 \cap \dots \cap U_N$ элементов $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{P}$ составляют базу его топологии, иначе говоря, топология X задаётся произвольными объединениями конечных пересечений множеств из $\mathcal{P}$.

В дальнейших задачах читателю предлагается изучить топологические пространства вида $[0, 1]^A$ декартово произведение отрезка на себя - обобщённый куб в разных аспектах.

В этих задачах A - произвольное множество.

Problem

83.

Докажите, что на счётномерном кубе $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ сдвиг координат на единицу, $x'_n = x_{n+1}$, является гомеоморфизмом куба.

||

Проверьте, что всякое открытое множество при сдвиге переходит в открытое множество.

||

Problem

84.

докажите, что счётномерный булев куб $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (произведение множества из двух элементов на себя) гомеоморфен канторову множеству $K \subset [0, 1]$.

||

Вспомните про троичное разложение точек K и проверьте совпадение топологий.

||

Problem

85.

* докажите, что на счётномерном кубе $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ можно ввести метрику, задающую топологию Дюкартова произведения.

||

Рассмотрите прямоугольный параллелепипед в гильбертовом пространстве, выбрав подходящие длины его сторон.

Аккуратно проверьте совпадение топологии декартова произведения и топологии метрики в гильбертовом пространстве.

||

Problem

86.

Докажите, что если множество A несчётно, то на кубе $[0, 1]^A$ не может быть метрики, задающей его топологию декартова произведения.

||

Обратите внимание, что в топологии, порождённой метрикой, у каждой точки $x \in X$ должна найтись счётная система окрестностей $\mathcal{U}_x$, такая что всякая окрестность $V \ni x$ содержит некоторую $U \in \mathcal{U}_x$.

Проверьте это свойство для топологии прямого произведения.

||

Problem

87.

* Функции на множестве $[0, 1]^A$ можно рассматривать, как функции бесконечного числа действительных переменных $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \in [0, 1]$.

Докажите, что такая функция непрерывна в топологии декартова произведения тогда и только тогда, когда её можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленами от конечного числа из данного набора переменных.

||

Надо проверить, что для компактного топологического пространства работают теоремы, которые мы доказывали для компактных метрических пространств: непрерывность равномерного предела непрерывных функций и теорема Стоуна-Вейерштрасса, и применить их.

||

Problem

88.

* Назовём элементарным множеством в $[0, 1]^A$ произведение промежутков $\prod_{\alpha \in A} \Delta_\alpha \subset [0, 1]^A$, из которых все, кроме конечного числа, совпадают с $[0, 1]$.

Введём меру элементарного множества как (на самом деле конечное) произведение чисел $\prod_{\alpha \in A} |\Delta_\alpha|$.

Докажите, что для такой меры элементарных множеств выполняется лемма 5.6, а значит она продолжается до счётно-аддитивной меры на борелевских подмножествах $[0, 1]^A$.

||

Проверьте, что аддитивность такой меры по сути надо проверить в конечномерном случае, что уже было сделано.

Также проверьте, что компактность, нужная в доказательстве леммы 5.6, обеспечена теоремой Тихонова.

Проследите остальные шаги построения внешней меры Лебега и собственно меры Лебега для этого случая.

||

9.11.

Обзор случаев применения**24.3.2 Dual to the space of continuous functions on the segment****Theory**

Чтобы понять, что двойственные пространства бывают на практике достаточно нетривиальными и содержательными, попытаемся дать описание пространства, двойственного к хорошо известному нам $C[a, b]$ (здесь мы рассматриваем функции с действительными значениями).

Теорема Рисса

Всякий непрерывный линейный функционал $\lambda : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ соответствует интегрированию по борелевской мере со знаком на $[a, b]$, имеющей ограниченную вариацию, и наоборот. При этом норма функционала равна полной вариации меры.

О применениях теоремы Рисса (!?!?!?)

Теорема Рисса вместе с теоремой Банаха-Алаоглу показывают, что борелевские меры со знаком или без знака на отрезке обладают некоторым свойством слабой компактности: множество мер M предкомпактно в *-слабой топологии, если вариация всех $\nu \in M$ ограничена одним и тем же числом.

Доказательство теоремы Рисса в одну сторону

Доказательство теоремы Рисса в одну сторону сравнительно очевидно: всякая мера со знаком ограниченной вариации даёт линейный функционал интеграла по этой мере

$$f \mapsto \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

и можно проверить, что его норма как линейного функционала равна вариации μ .

Доказательство теоремы Рисса в обратную сторону

В обратную сторону доказательство теоремы Рисса более технично.

Первым шагом будет ввести понятие неотрицательного непрерывного линейного функционала $\lambda^+ : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, то есть такого функционала, который принимает неотрицательные значения на функциях, неотрицательных на всём отрезке $[a, b]$.

Неотрицательный функционал также обладает свойством монотонности: $\lambda(f) \geq \lambda(g)$, если $f \geq g$ на всём отрезке, так как $f - g \geq 0$ влечёт $\lambda(f - g) \geq 0$.

Далее нужно сформулировать аналог леммы 8.18 и теоремы Хана о разложении 8.29 в данной ситуации.

Лемма

.90.

Всякий непрерывный линейный функционал $\lambda : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ раскладывается в разность неотрицательных

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-, \quad \text{приём} \quad \|\lambda\| = \|\lambda^+\| + \|\lambda^-\| = \lambda^+(1) + \lambda^-(1)$$

Доказательство.

Для неотрицательных непрерывных функций f определим (супремум берётся по непрерывным функциям и далее рассматриваем только непрерывные функции)

$$\lambda^+(f) = \sup\{\lambda(\varphi) : 0 \leq \varphi \leq f\}$$

Неравенство $\lambda^+(f) + \lambda^+(g) \leq \lambda^+(f + g)$ следует из того, что при $0 \leq \varphi \leq f$ и $0 \leq \psi \leq g$ оказывается $0 \leq \varphi + \psi \leq f + g$.

Обратное неравенство $\lambda^+(f) + \lambda^+(g) \geq \lambda^+(f + g)$ следует из того, что всякую ξ , такую что $0 \leq \xi \leq f + g$, можно разложить в сумму $\xi = \varphi + \psi$, так что $0 \leq \varphi \leq f$ и $0 \leq \psi \leq g$, для этого достаточно положить $\varphi = \min\{\xi, f\}$ (минимум берётся поточечно).

Также из определения ясно, что $\lambda^+(cf) = c\lambda^+(f)$ при $c \geq 0$.

Этого и равенства $\lambda^+(f+g) = \lambda^+(f) + \lambda^+(g)$ для неотрицательных функций достаточно, чтобы продолжить λ^+ до линейного функционала на всём $C[a, b]$ по формуле

$$\lambda^+(f) = \lambda^+(g) - \lambda^+(h), \quad f = g - h, \quad g, h \geq 0$$

Это определение не зависит от выбора неотрицательных g и h , так как при другом разложении $f = u - v$, мы имеем равенство $g + v = h + u$, из которого следует

$$\lambda^+(g) + \lambda^+(v) = \lambda^+(g + v) = \lambda^+(h + u) = \lambda^+(h) + \lambda^+(u)$$

то есть

$$\lambda^+(g) - \lambda^+(h) = \lambda^+(u) - \lambda^+(v).$$

Подставляя $\varphi = f$ в определение $\lambda^+(f)$ мы убеждаемся, что $\lambda^+(f) \geq \lambda(f)$ для неотрицательных f .

Следовательно разность

$$\lambda^- = \lambda^+ - \lambda$$

является неотрицательным линейным функционалом.

Посмотрим теперь на нормы функционалов. Из монотонности λ^+ и λ^- следует, что

$$\|\lambda^+\| = \lambda^+(1), \quad \|\lambda^-\| = \lambda^-(1)$$

Очевидно, что $\|\lambda\| \leq \|\lambda^+\| + \|\lambda^-\|$, и нам надо доказать равенство.

для всякой функции $0 \leq \varphi \leq 1$ оказывается $\|2\varphi - 1\| \leq 1$, и следовательно

$$\lambda(\varphi) = \frac{\lambda(2\varphi - 1) + \lambda(1)}{2} \leq \frac{\|\lambda\| + \lambda(1)}{2} = \frac{\|\lambda\| + \lambda^+(1) - \lambda^-(1)}{2}.$$

Переходя к супремуму по φ , получаем

$$\lambda^+(1) \leq \frac{\|\lambda\| + \lambda^+(1) - \lambda^-(1)}{2} \rightarrow \lambda^+(1) + \lambda^-(1) \leq \|\lambda\|,$$

что и требовалось.

О дальнейших шагах

Далее в доказательстве теоремы Рисса можно работать с неотрицательным непрерывным линейным функционалом $\lambda : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и определить меру (без знака) открытых подмножеств $U \subseteq [a, b]$

$$\mu(U) = \sup\{\lambda(f) : 0 \leq f \leq 1, \text{supp } f \subseteq U\}$$

Задача

Докажите счётную субаддитивность такой меры $\mu(U)$ на открытых множествах.

||

Используйте компактность носителя в определении $\mu(U)$ и разбиение единицы.

||

После этого можно определить внешнюю меру произвольного множества как

$$\mu^*(X) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq X\} \quad (\text{по открытым } U)$$

с помощью её счётной субаддитивности проверить её аддитивность на элементарных подмножествах отрезка, и продолжить μ до счётно-аддитивной борелевской меры на отрезке.

Задача

92.

Докажите, что для всякого открытого множества U и положительного ε найдётся компактное множество $F \subseteq U$, такое что $\mu^*(F) > \mu(U) - \varepsilon$.

||

Наймите f из определения $\mu(U)$, для которой $\lambda(f) > \mu(U) - \varepsilon$, и положите $F = \text{supp } f$.

Для открытых $V \supseteq F$ подставьте f в определение $\mu(V)$, чтобы установить $\mu(V) \geq \lambda(f) > \mu(U) - \varepsilon$.

||

Задача

93.

докажите аддитивность μ^* на элементарных множествах отрезка.

||

С учётом очевидной субаддитивности достаточно доказать $\mu^*(I \cup J) \geq \mu^*(I) + \mu^*(J)$ для двух непересекающихся промежутков.

Это нетривиально только для случая, когда границы промежутков имеют общую точку $c \in [a, b]$, тогда один из них можно накрыть открытым множеством U , не пересекающим другой промежуток, и применить результат предыдущей задачи, чтобы свести к случаю промежутков с непересекающимися окрестностями.

||

Завершение доказательства теоремы Рисса.

Считаем, что мера из определения (9.2) продолжена до конечной борелевской меры на отрезке и по ней можно интегрировать

Требуемое равенство

$$\lambda(f) = \int_a^b f(x) d\mu$$

достаточно проверить на непрерывных функциях со значениями в $[0, 1]$, в силу линейности обеих частей и выполнения равенства при $f \equiv 1$.

Возьмём натуральное m и представим f в виде суммы

$$f = \sum_{k=1}^m f_k$$

где непрерывные функции $f_k : [a, b] \rightarrow [0, 1/m]$ определены как

$$f_k(x) = \begin{cases} 1/m, & f(x) \geq k/m; \\ f(x) - (k-1)/m, & (k-1)/m \leq f(x) \leq k/m; \\ 0, & f(x) \leq (k-1)/m \end{cases}$$

Такое разложение можно представить себе как нарезание подграфика f горизонтальными прямыми $y = k/m, k = 0, 1, \dots, m$ на m частей, сдвиг части номер k на $(k-1)/m$ вниз и рассмотрение этой части как подграфик f_k .

Вложив носитель каждой f_k в открытое множество $U_k = \{x \in [a, b] : f(x) > (k-2)/m\}$, мы получим по определению μ неравенство

$$\lambda(mf_k) \leq \mu(U_k) \rightarrow \lambda(f_k) \leq \frac{1}{m} \mu(U_k),$$

что после суммирования даст

$$\lambda(f) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu(U_k) = \int_a^b \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \chi_{U_k}(x) d\mu.$$

Так как $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_m$ и $x \in U_k$ означает $f(x) > (k-2)/m$, то выполняется неравенство

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \chi_{U_k}(x) < f(x) + \frac{2}{m}$$

Следовательно в силу монотонности интеграла

$$\lambda(f) \leq \int_a^b f(x) d\mu + \frac{2}{m} \mu[a, b]$$

При стремлении $m \rightarrow \infty$ получаем неравенство

$$\lambda(f) \leq \int_a^b f(x) d\mu.$$

Неравенство в другую сторону получается заменой в доказанном равенстве f на $1-f$, так как $\Delta \wedge$ я $f \equiv 1$ выполняется равенство

$$\lambda(1) = \int_a^b d\mu = \mu[a, b]$$

по определению $\mu[a, b]$ и монотонности λ .

Утверждение в теореме про равенство норм, в силу леммы, достаточно проверить для неотрицательного линейного функционала и соответствующей ему меры, но тогда в силу монотонности и неотрицательности

$$\|\lambda\| = \lambda(1) = \int_a^b d\mu = \mu[a, b] = |\mu|[a, b]$$

Дельта-функция как функционал

Один из непрерывных линейных функционалов на $C[a, b]$ очень легко определить. Для точки $x \in [a, b]$ положим

$$\delta_x : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \delta_x(f) = f(x)$$

С точки зрения теоремы Рисса этот функционал («дельта-функция») соответствует единичной мере, сосредоточенной в одной точке x , то есть

$$\mu(X) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$$

Норма дельта-функции как линейного функционала на $C[a, b]$ равна 1.

двойственное к двойственному к $C[a, b]$ не совпадает с $C[a, b]$ (!?!?!?)

Докажите, что двойственное к двойственному к $C[a, b]$ не совпадает с $C[a, b]$.

||

Заметьте, что интегрировать по борелевской мере можно не только непрерывные функции.

||

О вложении $L_1[a, b]$ в $C[a, b]$

докажите, что $L_1[a, b]$ вкладывается в двойственное к $C[a, b]$ по формуле

$$g \mapsto \left(f \mapsto \int_a^b f g dx \right)$$

с сохранением нормы.

||
Оценка интеграла через произведение $\|f\|_C \cdot \|g\|_1$ очевидна, надо только доказать, что она почти достигается на некоторых f с любой точностью, для этого приблизьте $\operatorname{sgn} g$ непрерывными функциями в среднем (см. также доказательство леммы 9.114).

||
Теорема Рисса вместе с теоремой Банаха-Алаоглу показывают, что борелевские меры со знаком или без знака на отрезке обладают некоторым свойством слабой компактности: множество мер M предкомпактно в $*$ -слабой топологии, если вариация всех $\nu \in M$ ограничена одним и тем же числом. В следующих задачах обсуждается слабая топология для мер.

Слабая сходимость дельта функций эквивалентна обычной сходимости

Докажите, что слабая сходимость $\delta_{x_n} \rightarrow \delta_{x_0}$ эквивалентна обычной сходимости $x_n \rightarrow x_0$.

||
Примените определение.

Описание слабой топологии без функций (???)

докажите, что на множестве борелевских вероятностных мер (неотрицательных с полной мерой 1) на отрезке $[a, b]$, $*$ -слабая топология порождается открытыми множествами, соответствующими открытым $V \subseteq [a, b]$

$$U_{V,a} = \{\nu : \nu(V) > a\}.$$

||

В одну сторону

при условии $\nu(V) > a$ найдите непрерывную $f : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, у которой $\operatorname{supp} f \subseteq V$ и

$$\int_a^b f(x) d\nu(x) > a$$

В обратную сторону

докажите, что последнее неравенство для фиксированной непрерывной функции гарантируется принадлежностью ν пересечению конечного набора множеств U_{V_i, a_i} .

||

Problem

98.

Докажите, что множества вероятностных борелевских мер на отрезке вида $\{\nu : \nu(V) < a\}$ не открыты в слабой топологии.

||
Сделайте контрпример из дельта-функций.

||

Problem

99.

Читателю предлагается изучить преобразование Фурье меры.

* Рассмотрим борелевскую меру со знаком μ ограниченной вариации на $(-\pi, \pi]$, которую можно рассмотреть как 2π -периодическую меру на прямой.

Для неё можно определить коэффициенты Фурье

$$c_n(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} e^{-inx} d\mu$$

соответствующие суммы Фурье и Фейера, рассматриваемые как плотности меры (со знаком).

Докажите, что суммы Фейера меры сходятся к ней в $*$ -слабой топологии.

Обязаны ли слабо сходить к мере её суммы Фурье?

||

Утверждение про суммы Фейера можно доказывать по определению слабой сходимости неотрицательных мер, используя неотрицательность ядра Фейера.

Иначе, можно использовать описание меры из варианта теоремы Рисса для $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ и интерпретировать сумму Фейера $S_n(\mu)$ как функционал

$$S_n(\mu)(f) = \mu(S_n(f)).$$

При рассмотрении сумм Фурье можно написать аналогичные формулы и подставить $\mu = \delta_0$.] В этом разделе наше изложение было довольно схематичным, более подробные сведения по изложенной в этом разделе теме можно найти, например, в книге [8].

Обзор случаев применения

24.3.3 About $W^{-\infty, 2}$ и $\mathcal{E}'$ spaces

Theory

Рассмотрим функции на действительной прямой, обобщения конструкций на функции нескольких переменных достаточно прямолинейны, но техничны, см. обсуждение в разделе 9.17.

Для пространства $L_2(\mathbb{R})$ мы уже установили, что двойственное ему пространство можно идентифицировать с ним самим, сопоставляя функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ линейный функционал

$$\lambda_g(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Пример с двойственным пространством к $C[a, b]$ и теоремой Рисса намекает на то, что для расширения двойственного пространства мы можем рассмотреть какое-либо «меньшее» функциональное пространство $\mathcal{F}$, для которого вложение $I : \mathcal{F} \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ непрерывно с точки зрения топологии $\mathcal{F}$.

Тогда возникает сопряжённое отображение двойственных пространств $I^* : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}'$, $I^*(\lambda) = \lambda \circ I$, и получается, что мы расширили пространство $L_2(\mathbb{R})$ до пространства $\mathcal{F}'$.

Инъективность I^* будет обеспечена плотностью $\mathcal{F}$ в $L_2(\mathbb{R})$ в топологии L_2 .

достаточно удобно выбрать пространство $\mathcal{F}$ нормированным или даже гильбертовым.

О пространстве Соболева

Например, гильбертовым пространством будет пространство Соболева $W^{k, 2}(\mathbb{R})$, состоящие из функций с k -й обобщённой производной (при локально абсолютно непрерывной $(k-1)$ -й производной) и с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 + \cdots + \|f^{(k)}\|_2^2 \right)^{1/2}$$

Можно проверить (проверьте полноту в качестве упражнения), что эти пространства на самом деле гильбертовы.

Определяя

$$W^{-k,2} = (W^{k,2})'$$

мы получим целую последовательность пространств, связанных непрерывными инъективными отображениями (слева идут естественные вложения, а справа - их сопряжения)

$$\dots \rightarrow W^{k,p} \rightarrow W^{k-1,p} \rightarrow \dots \rightarrow W^{1,2} \rightarrow W^{0,2} = L_2 \rightarrow W^{-1,2} \rightarrow \dots W^{-k+1,2} \rightarrow W^{-k,2} \rightarrow \dots$$

В итоге можно будет определить пространство $W^{\infty,2}$ как пересечение всех пространств Соболева с топологией, заданной счётным семейством соболевских норм, все эти функции уже будут бесконечно гладкие.

Также можно определить $W^{-\infty,2}$ как объединение всех пространств Соболева, на самом деле окажется, что

$$W^{-\infty,2} = (W^{\infty,2})'$$

Доказательство этого равенства (структура двойственного пространства к пространству с бесконечным семейством норм) аналогично приведённым ниже рассуждениям про пространство $\mathcal{E}'$.

преобразования Фурье функций из $W^{k,2}$

* Опишите преобразования Фурье функций из $W^{k,2}$.

||

Используйте преобразование Фурье производной, но действуйте аккуратно, так как $L_1(\mathbb{R}) \neq L_2(\mathbb{R})$.] другие варианты введения обобщённых функций - использовать в качестве базового пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (этот вариант мы рассмотрим в разделе 9.16) или $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$.

В первом случае топология пространства задаётся ранее определённым счётным семейством полунорм, а в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ топология определяется семейством полунорм

$$\|f\|_{K,k} = \sup_{x \in K} |f^{(k)}(x)|$$

по всем компактам $K \subset \mathbb{R}$ и неотрицательным целым k .

Топология задаётся семейством полунорм в том же смысле, как это было в пространстве $\mathcal{S}$, предбазу топологии составляют множества вида

$$U_{K,k,\varepsilon}(f_0) = \{f : \|f - f_0\|_{K,k} < \varepsilon\}$$

На самом деле для определения топологии в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ не нужно рассматривать все компакты, а достаточно рассмотреть только отрезки $[-m, m]$ с $m \in \mathbb{N}$, получив таким образом счётное семейство полунорм, определяющее топологию в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Аналогично банаховым пространствам, в пространствах с топологией, порождённой счётным семейством полунорм, можно указать критерий непрерывности функционала через его ограниченность.

Приведём соответствующее утверждение для $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Теорема

101.

Для любого непрерывного линейного функционала $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ найдутся константа $C > 0$, неотрицательное целое k и отрезок $K = [-m, m]$, такие что

$$(9.2) \quad |\lambda(\varphi)| \leq C \max \{\|\varphi\|_{K,\ell} : 0 \leq \ell \leq k\} = C \sup \left\{ \left| \varphi^{(\ell)}(x) \right| : x \in [-m, m], 0 \leq \ell \leq k \right\}.$$

Доказательство

Определение непрерывности λ заключается в том, что прообраз интервала $\lambda^{-1}(-1, 1)$ является открытым множеством, и в частности содержит открытую окрестность нуля.

Открытая окрестность нуля содержит базовую окрестность нуля U , которая в пространстве со счётным семейством полунорм задаётся конечным числом условий вида $\|x\|_{L,\ell} < \varepsilon_\ell$ (с разными ℓ, L и $\varepsilon_\ell > 0$).

Объединив все фигурирующие в условиях компакты L , можно считать, что они содержатся в одном отрезке $K = [-m, m]$, базовая окрестность нуля U при этом только уменьшится.

Максимальное фигурирующее в условиях целое число ℓ обозначим k , а в качестве C выберем $\frac{2}{\min\{\varepsilon_\ell: 0 \leq \ell \leq k\}}$.

Тогда при условии

$$\max \{\|\varphi\|_{K,\ell} : 0 \leq \ell \leq k\} = 1/C$$

окажется, что $\varphi \in U$ и $|\lambda(\varphi)| \leq 1$.

А при выполнении условия

$$\max \{\|\varphi\|_{K,\ell} : 0 \leq \ell \leq k\} = 0$$

должно выполняться $\lambda(\varphi) = 0$, так как иначе после умножения φ на достаточно большое число a нарушится условие $|\lambda(a\varphi)| < 1$ при сохранении условия $a\varphi \in U$.

Так как левая и правая части неравенства (9.2) однородны относительно умножения на число, и любая функция $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ после умножения на ненулевое число удовлетворяет либо (9.3), либо (9.4), то неравенство (9.2) верно для всех $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Это рассуждение можно расширить до обобщённой теоремы Банаха-Штейнгауза, см. задачу 9.109.

Следующее утверждение даёт некоторый явный вид распределения из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Следствие 9.102.

Распределение $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ задаётся интегрированием производных $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ по борелевским мерам со знаком на некотором отрезке:

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^m \varphi d\mu_0 + \int_{-m}^m \varphi' d\mu_1 + \cdots + \int_{-m}^m \varphi^{(k)} d\mu_k$$

Доказательство

Применим теорему 9.101 и получим некоторый отрезок $[-m, m]$ и номер производной k .

Из неравенства (9.2) следует, что $\lambda(\varphi)$ обнуляется на всех функциях φ , которые равны нулю на отрезке $[-m, m]$, то есть значение $\lambda(\varphi)$ зависит только от поведения φ на этом отрезке.

Поэтому далее мы будем смотреть на гладкие функции на отрезке $[-m, m]$.

Посмотрим на ограничение λ на пространство многочленов $\mathcal{P}_{k-1}$ степени не более $k-1$ на отрезке $[-m, m]$.

Подберём функционал λ_0 вида $a_0\delta_0(\varphi) + \cdots + a_{k-1}\delta_0(\varphi^{(k-1)})$ (это частный случай вида (9.5)), который совпадает с λ на $\mathcal{P}_{k-1}$.

С учётом того, что $\mathcal{P}_{k-1} \subset \mathcal{E}[-m, m]$ является ядром оператора взятия k -й производной $\mathcal{E}[-m, m] \rightarrow \mathcal{E}[-m, m]$ и операция взятия k -й производной сюръективна на $\mathcal{E}[-m, m]$, получается, что $\lambda - \lambda_0$ можно представить как $\lambda_1(\varphi^{(k)})$, с некоторым линейным функционалом λ_1 .

Проверим непрерывность λ_1 .

Всякой гладкой ψ на отрезке $[-m, m]$ можно сопоставить k -кратным определённым интегралом от $0_\Delta x$ функцию $I(\psi) = \varphi$, такую что $\varphi^{(k)} = \psi$.

Нормы $\|I(\psi)\|_{[-m,m],\ell}$ с $0 \leq \ell \leq k$ будут очевидно ограничены $m^k \|\psi\|_C$, следовательно, выражение

$$\lambda_1(\psi) = \lambda(I(\psi)) - \lambda_0(I(\psi))$$

будет ограничено C -нормой ψ в силу ограниченности λ и λ_0 в смысле (9.2).

Это означает возможность непрерывного продолжения до $\lambda_1 : C[-m, m] \rightarrow \mathbb{R}$ в силу плотности множества гладких функций в $C[-m, m]$.

По теореме Рисса (

Теорема

89) λ_1 представляется в виде

$$\lambda_1(\psi) = \int_{-m}^m \psi d\mu_k,$$

что устанавливает требуемый вид

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^m \varphi da_0 \delta_0 + \int_{-m}^m \varphi' da_1 \delta_0 + \cdots + \int_{-m}^m \varphi^{(k-1)} da_{k-1} \delta_0 + \int_{-m}^m \varphi^{(k)} d\mu_k.$$

Равенство типа (9.5) можно установить и без теоремы Рисса.

С помощью непрерывного вложения $W^{k+1,2}[-m, m] \rightarrow C^k[-m, m]$ можно заметить, что линейный функционал, удовлетворяющий условиям (9.2), оказывается также непрерывным линейным функционалом на гильбертовом пространстве $W^{k+1,2}[-m, m]$, и по теореме 9.36 представляется в виде

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^m \left(\varphi(x) \bar{f}(x) + \varphi'(x) \bar{f}'(x) + \cdots + \varphi^{(k+1)}(x) \bar{f}^{(k+1)}(x) \right) dx$$

с некоторой $f \in W^{k+1,2}[-m, m]$.

Это является частным случаем вида (9.5) с на единичку большим k и мерами, имеющими плотности $\bar{f}^{(\ell)}$.

Problem

103.

Проверьте в обратную сторону, что формула (9.5) действительно задаёт распределение из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

||

Докажите непрерывность данного линейного функционала с помощью неравенства типа (9.2).]

Посмотрим на другие полезные свойства пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Для начала заметим, что определить фундаментальную последовательность можно в любом топологическом векторном пространстве.

Определение

104.

Топологическое векторное пространство - это векторное пространство с некоторой топологией, в котором операции сложения и умножения на число непрерывны.

В качестве примеров топологических векторных пространств мы видели разные функциональные пространства с нормой, а также пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, в которых топология определяется счётным семейством норм, то есть предбаза топологии состоит из метрических окрестностей точек во всевозможных нормах.

Определение

105.

Последовательность элементов (x_n) топологического векторного пространства $\mathcal{T}$ является фундаментальной, если $x_n - x_m \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Более подробно: если для всякой окрестности нуля $U \subseteq \mathcal{T}$ найдётся натуральное N , такое

$$\text{что } x_n - x_m \in U \text{ при } n, m \geq N$$

Определение

106.

Топологическое векторное пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность в нём имеет предел.

Проверка полноты $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и следующих из неё свойств предлагается читателю в виде следующих задач.

Problem

107.

Докажите, что пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ полно.

||

Заметьте, что фундаментальная последовательность (φ_n) элементов $\mathcal{E}$ сходится равномерно на любом отрезке $[-m, m]$ по соответствующему утверждению для $C[-m, m]$.

Аналогично для её производных, для которых имеет место равномерная на компактах сходимость $\varphi^{(k)} \rightarrow \psi_k$.

Примените теорему о дифференцировании равномерно сходящихся последовательностей функций, чтобы обосновать, что $\psi_k^{(\ell)} = \psi_{k+\ell}$ и на самом деле $\varphi_k \rightarrow \psi_0$ в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

||

Problem

108.

*[Теорема Бэра в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$] Докажите, что $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ нельзя представить в виде объединения счётного числа замкнутых подмножеств с пустыми внутренностями.

||

для начала найдите в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ убывающую по включению последовательность выпуклых окрестностей нуля (U_n) , такую что всякое открытое $U \ni 0$ содержит некоторое U_n ; для этого достаточно взять окрестности $\|\cdot\|_{K,k} \leq 1/m$ для всех норм $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и натуральных m , занумеровать их как (V_n) , а потом положить $U_n = V_1 \cap \dots \cap V_n$.

Потом повторите доказательство теоремы Бэра для открытых множеств, используя вместо стягивающейся последовательности шаров убывающую по включению последовательность множеств вида $t_n U_n + c_n$ с $t_n \leq 1$.

||

Problem

109.

*[Теорема Банаха-Штейнгауза в $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$] Предположим, что (λ_n) - последовательность элементов $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, такая что для всякой $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ последовательность чисел $(\lambda_n(\varphi))$ ограничена.

Докажите, что существует константа C и конечный набор норм $\|\cdot\|_{K,0}, \dots, \|\cdot\|_{K,k}$ пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, так что для любой $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ выполняется

$$|\lambda(\varphi)| \leq C \sup \{ \|\varphi\|_{K,\ell} : 0 \leq \ell \leq k \}$$

||

Проверьте, что доказательство теоремы Банаха-Штейнгауза для банаховых пространств проходит и здесь, только окрестности нуля надо задавать не одной нормой, а несколькими.

||
9.13.

Обзор случаев применения

24.3.4 Distributions from $\mathcal{D}'$, регулярные и нерегулярные обобщённые функции

Theory

Сначала мы рассмотрим пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на прямой.

В нём мы не будем вводить нормы и топологию, а определим только понятие сходимости следующим образом:

Определение

110.

Последовательность $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ сходится к $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, если носители всех этих функций содержатся в одном отрезке $[-m, m]$ и на нём, для любого

$$\ell \in \mathbb{Z}^+, \varphi_k^{(\ell)} \rightarrow \varphi_0^{(\ell)} \text{ равномерно.}$$

Используя понятие сходимости мы можем определить непрерывные (по Гейне) линейные функционалы, они образуют пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Если не оговорено противное, именно его мы будем называть пространством распределений или пространством обобщённых функций на $\mathbb{R}$.

Problem

111.

* Докажите, что непрерывность линейного функционала $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ по Коши и его непрерывность по Гейне эквивалентны.

||

Как и в решении задачи 9.108, надо построить счётную базовую систему окрестностей точки.

||

Problem

112.

* Приведите пример топологического пространства X , в котором непрерывность функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ по Гейне не влечёт непрерывность по Коши.

||

В качестве X удобно взять подпространство несчётного произведения $\{0, 1\}^A$, состоящее из отображений $x : A \rightarrow \{0, 1\}$, у которых либо $x^{-1}(0)$ не более чем счётно, либо $x^{-1}(1)$ не более чем счётно.

||

Чтобы прояснить термин «обобщённая функция», надо сделать определение:

Определение

113.

Локально интегрируемая (по Лебегу) функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт элемент $\lambda_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ по формуле

$$\lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

Такие элементы $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называются регулярными функциями.

Регулярные функции действительно задают непрерывные функционалы на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, так как по определению сходимости $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ интегралы можно сократить до интегралов по отрезку и применить на отрезке теорему об ограниченной сходимости в силу локальной интегрируемости f .

Заметим, что если изменить функцию f на множестве меры нуль, то соответствующая ей регулярная функция в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ не изменится.

Это утверждение можно уточнить. тогда и только тогда, когда они отличаются на множестве меры нуль.

Доказательство

Нетривиально только доказать, что из $\lambda_f = \lambda_g$ следует равенство $f = g$ почти всюду.

Положим $h = f - g$ и тогда нам надо будет доказать, что из равенства $\lambda_h = 0$ следует $h = 0$ почти всюду.

Предположим противное.

Если h не равна нулю почти всюду, то из строгой монотонности интеграла Лебега следует, что $\int_{\mathbb{R}} |h|dx > 0$.

Перейдя к рассмотрению некоторого отрезка, можно считать, что

$$0 < \varepsilon = \int_a^b |h|dx < +\infty$$

Приближим h функцией u , так что $\|h - u\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\|u\|_C \leq M$ для некоторого $M > 0$.

Приближим после этого $\operatorname{sgn} u$ гладкой с носителем в (a, b) функцией φ , так что

$$\|\operatorname{sgn} u - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{4M}$$

При этом можно считать, что $|\varphi(x)| \leq 1$ для всех x .

Тогда

$$\int_a^b h\varphi dx = \int_a^b u \operatorname{sgn} u dx + \int_a^b u(\varphi - \operatorname{sgn} u)dx + \int_a^b (h - u)\varphi dx$$

В выражении справа первый интеграл $\int_a^b |u|dx > 3/4\varepsilon$, второй по модулю меньше $\varepsilon/4$, а третий тоже по модулю меньше $\varepsilon/4$, следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi dx = \int_a^b h\varphi dx \neq 0$$

то есть λ_h не нуль и получено противоречие. Можно придумать и более экзотические функционалы из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, например с помощью интегрирования в смысле главного значения

$$\lambda(\varphi) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

Можно заметить, что это выражение всегда конечно и непрерывно зависит от φ в смысле сходимости в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, часто пишут $\lambda = v.p. \cdot \frac{1}{x}$.

Problem

115.

Докажите, что функционал $v.p. \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ не регулярен.

||

Проверьте, про при условии $\lambda_f = v.p. \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ равенство $f = \frac{1}{x}$ должно выполняться почти всюду.

||

Определим самую знаменитую обобщённую функцию (которую мы уже рассматривали в качестве борелевской меры)

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$$

Иногда пишут $\delta(x - x_0)$, но это выражение не имеет прямого смысла, так как δ_{x_0} не является функцией, его можно понимать лишь так, что мы взяли дельта-функцию в нуле и сдвинули её на x_0 .

Заметим, что δ_{x_0} лежит не только в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, но и в $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и в $W^{-\infty, 2}$. Можно заметить, что дельта-функция не является регулярной.

Можно в духе леммы 9.114 доказать, что представляющая δ_{x_0} функция должна быть равна нулю почти всюду при $x > x_0$ и почти всюду при $x < x_0$, то есть просто почти всюду.

Но можно привести и прямое рассуждение.

Пусть $x_0 = 0$ без ограничения общности.

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет

значения в $[0, 1]$, носитель в $[-1, 1]$ и $\varphi(0) = 1$.

Тогда для всякой локально интегрируемой

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(kx) dx \right| \leq \left| \int_{-1/k}^{+1/k} f(x) |dx| \right| \rightarrow 0$$

тогда как

$$\delta_0(\varphi(kx)) \equiv 1 \leftrightarrow 0$$

Problem

116.

При каком минимальном k можно утверждать, что $\delta_{x_0} \in W^{-k, 2}$?

||

Проверьте определённость элемента $W^{k, 2}$ в точке при разных k , потом аккуратно проверьте непрерывность (ограниченность) взятия значения в точке.

||

Обзор случаев применения**24.3.5 Derivative of distribution and topology in space $\mathcal{D}'$** **О применениях распределений (!?!?)**

(укажу, давно вопрос про это)

С помощью сопряжения и сравнения с регулярными функциями можно определить разнообразные операции с распределениями.

Theory

Будем для удобства записывать применение распределения к функции в более симметричном виде, $\lambda(\varphi) = \langle \lambda, \varphi \rangle$.

Тогда мы можем определить производную распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ как

$$\langle \lambda', \varphi \rangle = - \langle \lambda, \varphi' \rangle$$

Это определение на самом деле обобщает производную для регулярных распределений, соответствующих локально абсолютно интегрируемым функциям.

Действительно, если f - такая функция, а λ_f - соответствующее распределение, то исходя из интегрирования по частям и компактности носителя φ получается

$$\langle \lambda'_f, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f \varphi' dx = - f \varphi|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f' \varphi dx = \langle \lambda_{f'}, \varphi \rangle$$

Так как взятие производной - очевидно непрерывный линейный оператор в пространствах $\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{E}(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R}), W^{+\infty,2}$, то сопряжённая ему операция корректно определена не только для $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, но и для всех разумных пространств распределений.

Поясним, что имеется в виду под сопряжением в более общем виде.

Для любого непрерывного линейного отображения $A : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Q}$ топологических векторных пространств сопряжённое линейное отображение $A^* : \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{T}'$ действует по формуле

$$(A^* \lambda)(x) = \lambda(A(x)) \leftrightarrow \langle A^* \lambda, x \rangle = \langle \lambda, Ax \rangle.$$

Определение корректно, так как выписанное выражение непрерывно и линейно зависит от x .

Наше определение производной для распределения в этом смысле является сопряжением производной для функции, но со знаком минус.

Problem

117.

Найдите по определению производную регулярного распределения $\ln |x|$.

Будет ли эта производная регулярной?

Problem

118.

докажите, что всякое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что

$$\mu' = \lambda$$

в смысле дифференцирования распределений.

докажите, что любые Дове первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

||

Обратите внимание, что взятие первообразной в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ определено не для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и опишите, для каких φ оно определено и как.

Потом примените сопряжение для получения операции взятия первообразной распределения.]]

Зависит ли производная λ' непрерывно от $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$? Чтобы сделать этот вопрос корректным, нужно ввести какую-то топологию на $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Мы будем использовать *-слабую топологию в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, которую мы уже изучали в случае банахова пространства:

Определение

119.

В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ используется *-слабая топология, соответствующая поточечной сходимости.

Предбазой топологии являются множества

$$U_{\varphi,a,b} = \{\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : a < \lambda(\varphi) < b\}$$

для всевозможных $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), a < b \in \mathbb{R}$.

Сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, означает тогда, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет место

$$\lambda_n(\varphi) \rightarrow \lambda_0(\varphi).$$

Проверим по определению, что операция взятия производной λ' в непрерывно зависит от λ в смысле топологии в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Действительно,

$$\lambda' \in U_{\varphi, a, b} \leftrightarrow a < \lambda'(\varphi) < b \leftrightarrow a < -\lambda(\varphi') < b \leftrightarrow \lambda \in U_{-\varphi', a, b}$$

что доказывает непрерывность в топологическом смысле (которую достаточно проверить на множествах предбазы).

Problem

120.

Аналогично рассуждению для операции взятия производной в $\mathcal{D}'$ покажите, что сопряжённое к непрерывному отображению $A^* : \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{T}'$ непрерывно в $*$ -слабой топологии.

Problem

121.

* докажите, что если $A : E \rightarrow F$ является непрерывным отображением банаховых пространств, то норма сопряжённого отображения A^* равна норме A .

||

Неравенство $\|A^*\| \leq \|A\|$ следует из определения $A^*\lambda$ как композиции λ и A .

Неравенство в обратную сторону потребует применения теоремы Хана-Банаха для ненулевого вектора $\|Ax\|$, для которого $\|Ax\| \geq (1 - \varepsilon)\|A\| \cdot \|x\|$.

Понятие топологии и сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ позволит нам рассмотреть практические вопросы, например обсудить приближение дельта-функции последовательностью регулярных функций.

Сформулируем некоторое утверждение, которое поможет понять, какие последовательности функций сходятся к дельта-функции.

Теорема

122.

Пусть последовательность регулярных (локально интегрируемых) функций (f_n) обладает свойствами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 1$$

возможно в несобственном смысле, интегралы $\left| \int_a^b f_n(x) dx \right|$ ограничены некоторой константой C независимо от a, b, n и для всякого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{+\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-\delta} f_n(x) dx = 0$$

Тогда $\lambda_{f_n} \rightarrow \delta_0$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Доказательство

Положим

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt.$$

условия на функции f_n можно переформулировать в терминах функций F_n так: $F_n(-\infty) = 0$, $F_n(+\infty) = 1$, F_n равномерно ограничены константой C и поточечно (кроме может быть точки 0)

$$F_n(x) \rightarrow \vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Преобразуем тогда выражение, используя интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{f_n}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = F_n(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x) \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x) \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

Так как $\varphi'(x)$ ограничена и отлична от нуля только на некотором отрезке, а F_n ограничена константой C , то по теореме об ограниченной сходимости 5.70 можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \lambda_{f_n}, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) - \varphi(+\infty) = \varphi(0)$$

то есть в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ получается, что $\lambda_{f_n} \rightarrow \delta_0$. Чуть менее формально, в условиях предыдущей теоремы мы будем писать $f_n \rightarrow \delta_0$.

Идея доказательства теоремы кратко может быть сформулирована так: если $F_n \rightarrow \vartheta$ поточечно, а значит и в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, то $f_n = F'_n \rightarrow \delta_0 = \vartheta'$.

В качестве следствия этой теоремы и известных нам свойств интеграла Дирихле получается, что

$$\frac{\sin \lambda x}{\pi x} \rightarrow \delta_0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Problem

123.

К чему в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ сходится последовательность регулярных функций

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + 1/2)x}{\sin x/2}?$$

Обзор случаев применения

24.3.6 Multiplication of distribution by function and distribution medium

Theory

По сопряжению умножение распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ определяется как

$$\langle \lambda f, \varphi \rangle = \langle \lambda, f \varphi \rangle.$$

Для обоснования корректности этого определения мы должны проверить, что умножение на бесконечно гладкую f является непрерывной операцией в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Пусть имеет место сходимость $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Тогда носители всех φ_i лежат на некотором отрезке I .

Нам надо проверить, что для всех производных порядка $k \in \mathbb{Z}^+$ выполняется

$$(f\varphi_n)^{(k)} \rightarrow (f\varphi_0)^{(k)}$$

равномерно на I .

По формуле Лейбница разность между левой и правой частью расписывается как

$$\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} f^{(k-m)} (\varphi_n^{(m)} - \varphi_0^{(m)})$$

это выражение равномерно на I стремится к нулю из ограниченности производных f на I и стремления $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Прочие свойства умножения распределения на бесконечно гладкую функцию читатель может проверить, решая следующую серию задач:

Problem

124.

Проверьте, что для умножения распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на две бесконечно гладкие функции f и g выполняется $\lambda \cdot (fg) = (\lambda f)g$.

Problem

125.

Проверьте, что произведение λf непрерывно зависит от $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

||

Используйте определение топологии в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.]

||

Проверьте сначала непрерывную зависимость от $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ произведения $f\varphi$ с $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и используйте непрерывность $\lambda : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.]

Аналогично определяется умножение на бесконечно гладкую функцию в $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, а в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ это сделать посложнее, придётся позаботиться о не слишком быстром росте f и её производных.

Problem

127.

Проверьте, что для корректности определения умножения $f\varphi$ для $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ достаточно, чтобы всякая производная f росла не быстрее некоторой степени x при $x \rightarrow \infty$.

Заметим, что если $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а функция f имеет компактный носитель, то произведение λf оказывается элементом $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

Это позволяет изучать распределения из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ локально, сводя вопросы к изучению распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ после умножения на гладкую функцию с компактным носителем.

Problem

128.

Проверьте, что умножение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на функцию $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ корректно определено как элемент $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

||

Непрерывность $\varphi \mapsto \lambda(f\varphi)$ как отображения $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ следует из непрерывности $\varphi \mapsto f\varphi$ как отображения $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$, которую можно проверить явно.

||

С учётом результата предыдущей задачи и представления (9.5) можно сказать, что локально (то есть после умножения на гладкую функцию с компактным носителем) всякое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ представляется как комбинация конечного числа производных некоторого порядка от регулярных функций.

Например мы уже обнаружили, что $\delta_0 = \vartheta'$ в смысле дифференцирования распределений.

Обратите внимание, что Для $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ сформулированное утверждение неверно, ведь уже в рассмотренном примере ϑ не имеет компактного носителя. Далее мы обсудим понятие носителя распределения из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и открытого $U \subseteq \mathbb{R}$ будем говорить, что $\lambda|_U = 0$ (ограничение λ на U равно нулю), если $\lambda(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем в U .

Ограничение распределения на открытое множество будет определено в рамках понятия распределения на многообразии из раздела 9.17, здесь же мы говорим лишь о нулевом ограничении.

Следующая лемма позволяет рассуждать о нулевом ограничении достаточно корректно.

Лемма

.129.

Пусть дан $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}$, такое что $\lambda|_{U_\alpha} = 0$ для любого α .

Тогда если рассмотреть объединение $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, то $\lambda|_U = 0$.

Доказательство

Пусть $\text{supp } \varphi \subset U$, посмотрим, чему может быть равно $\lambda(\varphi)$.

Из множеств $\{U_\alpha\}$, покрывающих $\text{supp } \varphi$, достаточно оставить конечное число по компактности.

Выберем разбиение единицы, то есть неотрицательные функции $\psi_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, такие что

$$\text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha, \sum_\alpha \psi_\alpha \equiv 1 \text{ в окрестности } \text{supp } \varphi$$

Тогда

$$\lambda(\varphi) = \lambda\left(\sum_\alpha \varphi \psi_\alpha\right) = \sum_\alpha \lambda(\varphi \psi_\alpha) = 0$$

в последнем равенстве использовалось условие $\lambda|_{U_\alpha} = 0$ и тот факт, что $\text{supp } \varphi \psi_\alpha \subset U_\alpha$

Определение

130.

для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ положим

$$Z_\lambda = \bigcup \{U : \lambda|_U = 0\}$$

и введём носитель λ как

$$\text{supp } \lambda = \mathbb{R} \setminus Z_\lambda$$

Из леммы следует, что $\lambda|_{Z_\lambda} = 0$ и Z_λ является максимальным открытым множеством, в ограничении на которое λ равно нулю.

Problem

131.

Докажите, что распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ с компактным носителем в определённом выше смысле можно интерпретировать как элемент $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

||

Возьмите отрезок $[-m, m]$, содержащий носитель распределения.

Обоснуйте, что распределение будет непрерывным линейным функционалом на $\mathcal{E}[-m, m]$ с выполнением равенства (9.5).]

В следующих задачах читателю предлагается проверить некоторые полезные факты про распределения вообще и распределения с компактным носителем.

Problem

132.

* Докажите, что если последовательность распределений $\lambda_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ такова, что для всякой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ существует конечный предел $\lambda(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\varphi)$, то λ является элементом $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

||

Надо доказать непрерывность λ , то есть доказать, что из сходимости $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ в $\mathcal{D}$ следует сходимость чисел $\lambda(\varphi_n) \rightarrow \lambda(\varphi_0)$; из очевидной линейности λ достаточно рассмотреть случай $\varphi_0 = 0$.

Заметьте, что носители φ_n по определению сходимости $\mathcal{D}$ межат на одном и том же отрезке; тогда домножив λ_n на некоторую $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, равную единице в окрестности этого отрезка, можно перейти к рассуждениям в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

После этого можно применить теорему Банаха-Штейнгауза Для $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (задачу 9.109).

||

Problem

133.

* Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leq 1$ и пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$.

Положим

$$\varphi_k(x) = k\varphi(kx),$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и φ_k отлична от нуля только при $|x| \leq 1/k$.

Для всякого $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определим свёртку

$$f_k(y) = \langle \lambda, \varphi_k(y - x) \rangle$$

и $f_k \rightarrow \lambda$ в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

||

докажите, что $\langle f_k, \psi \rangle = \langle \lambda, \varphi_k * \psi \rangle$ для всякой $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, если для функций свёртка определена стандартным образом $(\varphi_k * \psi)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)\psi(y-x)dx$.

Вспомните теоремы 6.18 и 6.19.

||

Problem

134.

* Докажите, что всякое распределение $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ можно приблизить ли-

||

Вспомните, что интеграл непрерывной функции на отрезке можно приблизить суммами Римана и покажите, что производную дельта-функции можно приблизить линейными комбинациями дельта-функций.

||

Задача 9.135.

* Докажите, что всякое линейное отображение $\xi : \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывное в смысле топологии $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, представляется в виде $\xi(\lambda) = \lambda(\varphi)$

||

Определите $\varphi(x) = \xi(\delta_x)$ и продолжите формулу $\lambda(\varphi) = \xi(\lambda)$ с дельта-функций на все $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.] для всякой всюду неотрицательной $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Докажите, что у неотрицательного распределения есть регулярная первообразная.

||

Можно действовать аналогично доказательству теоремы Рисса для неотрицательного функционала, строя меру, соответствующую данному распределению.

||

9.16.

Обзор случаев применения

24.3.7 Distributions from $\mathcal{S}'$ и преобразование Фурье

Theory

Если мы хотим определять и изучать преобразование Фурье распределений, то нам стоит заметить, что $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ для этого не подходит.

Одна из причин этого описана в следующем упражнении:

Problem

137.

Докажите, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$.

||

Установите аналитичность преобразования Фурье функции с компактным носителем.

||

Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ тем более не переходит в себя при преобразовании Фурье, для него даже неясно, как преобразование Фурье определить.

А пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет замечательное свойство - по теореме 8.87 оно переходит в себя непрерывно в своей топологии при преобразовании Фурье.

Следовательно, можно определить по сопряжению для $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\langle F[\lambda], \varphi \rangle = \langle \lambda, F[\varphi] \rangle.$$

Читатель может проверить, что даёт это определение в случае регулярного распределения, имея в виду, что в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ можно аналогично $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ввести понятие регулярного распределения λ_f , соответствующего достаточно приличной функции f ; в следующих задачах изучаются некоторые свойства регулярных распределений из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Problem

138.

Докажите, что $\lambda_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ корректно определено, если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ локально интегрируема и функция $F(x) = \int_0^x \bar{f}(t) dt$ ограничена некоторым многочленом.

||

Проинтегрируйте выражение $\lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi dx$ по частям.

||

Problem

139.

Проверьте, что на регулярных λ_f , соответствующих $f \in L_2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье λ_f соответствует преобразованию Фурье f .

||

Используйте равенство Парсеваля.

||

Проверим определение преобразования Фурье распределения на дельта-функции:

$$\langle F[\delta_0], \varphi \rangle = \langle \delta_0, F[\varphi] \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx$$

то есть преобразование Фурье дельта-функции оказалось регулярной функцией, равной константе $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Можно проверить, что преобразование Фурье комбинации производных дельта-функции (с носителем в нуле) даёт многочлен, что позволяет изучать производные комбинации производных дельта-функции как обычные функции.

Это следует из того, что преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ делает из оператора умножения на x оператор $\pm i \frac{\partial}{\partial y}$ это проверяется по определению с помощью сопряжений.

Problem

140.

Проверьте равенство $F[\lambda x] = \pm i \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial y}$ для $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и определите знак в этом выражении.

||

Заметьте, что преобразование Фурье, умножение на x и взятие производной определены (почти что) как сопряжённые к соответствующим операциям с функциями $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.]

Problem

141.

Докажите, что преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$ переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n} \text{ в распределение } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

||

Вспомните формулу суммирования Пуассона.

||

Problem

142.

Пусть для функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ можно указать такое целое N , что для всякого целого $k \geq 0$

$$f^{(k)}(x) = O(|x|^{N-k}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Докажите, что f можно считать элементом из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, а преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ при $y \neq 0$ тоже можно считать регулярной функцией от y и при любом $M \geq 0$

$$\hat{f}(y) = o(|y|^{-M}), \quad y \rightarrow \infty$$

||

Заметьте, что $f^{(k)}$ при достаточно большом k оказывается обычной функцией, для которой преобразование Фурье определено стандартно.

||

Problem

143.

* докажите, что преобразования Фурье элементов $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ являются аналитическими функциями.

||

Заметьте, что Для $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ оказывается $\hat{\lambda}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda(e^{-iyx})$.]

9.17.

Обзор случаев применения

24.3.8 Multivariate and manifold distributions

Theory

На самом деле большинство предыдущих рассуждений проходят для функций нескольких переменных, а те что не проходят - проходят после небольшой доработки.

Таким образом определяются пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Первые два можно определять не только для всего $\mathbb{R}^n$, но и для всякого открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и делать в U произвольные гладкие замены координат (для $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ замены координат можно делать далеко не все, лучше ограничиться линейными заменами).

В определении $\mathcal{D}'(U)$ можно начать с пространства $\mathcal{D}(U)$ гладких функций с компактными носителями в U , сходимость последовательности которых (φ_n) к φ_0 определена требованием, чтобы носители всех функций содержались в одном и том же компакте K и для всякого $k = (k_1, \dots, k_n)$ имела место равномерная на K сходимость

$$\frac{\partial^{|k|} \varphi_n}{\partial \mathbf{x}^k} \rightarrow \frac{\partial^{|k|} \varphi_0}{\partial \mathbf{x}^k}$$

В определении $\mathcal{E}(U)$ можно начать с пространства $\mathcal{E}(U)$ гладких функций с полунормами, равными

$$\|\varphi\|_{K,k} = \sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^{|k|} \varphi(x)}{\partial \mathbf{x}^k} \right|$$

для компактов $K \subset U$.

Далее определить пространство распределений как пространство двойственных линейных функционалов.

Можно показать, что эти два определения не зависят от выбора криволинейной системы координат в U , так как при замене координат производная данного порядка выражается через производные такого же и меньшего порядков с ограниченными на компактах коэффициентами.

Problem

144.

Докажите, что всякий элемент $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ определяет непрерывное линейное отображение $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

||

Используйте формулу $f(\varphi)(\psi) = \Lambda(\varphi \otimes \psi)$, где функция двух переменных $\varphi \otimes \psi$ определена на паре (x, y) как $\varphi(x)\psi(y)$.

Докажите непрерывность определённого так отображения f .

Problem

145.

Для всякого включения $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ имеют место включения $\mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{D}(V)$ (с помощью продолжения нулём) и отображение ограничения $\mathcal{E}(V) \rightarrow \mathcal{E}(U)$.

Определите по сопряжению соответствующие отображения

$$\mathcal{D}'(V) \rightarrow \mathcal{D}'(U), \quad \mathcal{E}'(U) \rightarrow \mathcal{E}'(V)$$

Проверьте, что есть проблемы с определением отображений в другую сторону

$$\mathcal{D}'(V) \leftrightarrow \mathcal{D}'(U), \quad \mathcal{E}'(U) \leftrightarrow \mathcal{E}'(V)$$

Для всякого гладкого многообразия можно определить пространства $\mathcal{D}(M)$ и $\mathcal{E}(M)$ и двойственные к ним $\mathcal{D}'(M)$ и $\mathcal{E}'(M)$.

При этом надо действовать аккуратно, так как понятие частной производной сильно зависит от координат.

Однако это определение можно сделать инвариантным, взяв вместо частных производных гладкой функции φ порядка не более k выражения вида

$$X_1(X_2(\dots X_k(\varphi)\dots))$$

где $X_1, \dots, X_k$ - произвольные гладкие векторные поля на M .

В определениях $\mathcal{D}(M)$ и $\mathcal{E}(M)$ супремум модуля таких выражений будет браться по компакту, поэтому в координатной записи стремление к нулю всех таких выражений будет эквивалентно стремлению к нулю частных производных.

Но запись с векторными полями удобнее.

Пытаясь обобщить понятие регулярного распределения на случай $\mathcal{D}'(M)$, мы должны придать какой-то смысл интегралу

$$\lambda_f(\varphi) = \int_M f \varphi$$

Пусть для определённости многообразие M ориентируемо и имеет размерность n .

Тогда интеграл с функцией φ будет иметь смысл, если $f \in \Omega^n(M)$, или даже если f является не обязательно гладкой, но локально абсолютно интегрируемой формой n -й степени.

Это наводит на мысль, что распределения на многообразии можно определить в зависимости от целого числа $k = 0, \dots, n$ как

$$\mathcal{D}'_k(M) = (\Omega_c^{n-k}(M))'$$

где сходимость в $\Omega_c^{n-k}(M)$ определяется в духе $\mathcal{D}$.

Также можно определить

$$\mathcal{E}'_k(M) = (\Omega^{n-k}(M))'$$

где топология в Ω^{n-k} определена в духе $\mathcal{E}$.

Таким образом получается целая серия пространств распределений с $k = 0, \dots, n$, причём с помощью формул вида $\lambda_f(\varphi) = \int_M f \varphi$ окажется, что $\mathcal{D}'_0(M)$ будет содержать в себе локально абсолютно интегрируемые функции, а $\mathcal{D}'_n(M)$ - локально абсолютно интегрируемые дифференциальные формы высшей степени.

Результат задачи 9.145 можно интерпретировать так, что на всяком многообразии можно корректно говорить об ограничении распределения из $\mathcal{D}'_k(M)$ на координатную карту U , но работать с элементами пространства $\mathcal{E}'_k(M)$ через координатные карты как с элементами из $\mathcal{E}'_k(U)$ не получится, разве что можно элемент из $\mathcal{E}'_k(M)$ ограничить до элемента $\mathcal{D}'_k(U)$ карты U .

Следующие две задачи показывают, что распределения на многообразии ведут себя аналогично функциям с точки зрения возможности изучать их локально.

В математике про такое говорят, что распределения $\mathcal{D}'$ образуют пучок на M .

Problem

146.

Пусть M покрыто своими координатными картами $\{U_\alpha\}$.

Докажите, что $\lambda \in \mathcal{D}'_k(M)$ однозначно определяется ограничениями $\lambda|_{U_\alpha}$.

||

Если нет, и у $\mu \in \mathcal{D}'_k(M)$ все ограничения те же, то у разности $\lambda - \mu$ все ограничения нулевые.

Далее используйте рассуждения из леммы 9.129.

||

Problem

147.

Пусть M покрыто своими координатными картами $\{U_\alpha\}$.

Докажите, что набор $\lambda_\alpha \in \mathcal{D}'_k(U_\alpha)$, такой что на всяком пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ ограничения $\lambda_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ и $\lambda_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ совпадают, определяет однозначно некоторый элемент $\lambda \in \mathcal{D}'_k(M)$.

||

Единственность доказана в предыдущей задаче.

Рассмотрите разбиение единицы $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$, подчинённое покрытию $\{U_\alpha\}$, и докажите, что $\sum_\alpha \lambda_\alpha \rho_\alpha$ (если эту формулу правильно понимать), даст элемент $\mathcal{D}'_k(M)$, ограничение которого на каждую U_α даст соответствующий λ_α .

||

Обзор случаев применения**24.3.9 Of course additive measures and ultrafilters**

(? почему это не в теории меры?)

мотивация

а хз какая.

Т Тао почитаю, он вроде занят.

Рассмотрим еще один пример, имеющий отношение к двойственности банаховых пространств, но также интересный как модификация понятия меры.

Theory

Начнём с вопроса про банаховы пространства и их двойственные.

Можно проверить, что для пространств последовательностей выполняется $(\ell_1)' = \ell_\infty$, но изучение структуры $(\ell_\infty)'$ оказывается не таким уж простым.

Problem

148.

Проверьте, что $(\ell_1)' = \ell_\infty$.

||

Содержательная часть утверждения - доказать, что если последовательность (b_n) неограничена, то для какой-то $(a_n) \in \ell_1$ сумма $\sum_n a_n b_n$ расходится.

Это можно доказать вручную, а можно применить принцип равномерной ограниченности.

||

Теория

Говоря про $(\ell_\infty)'$ в более элементарных терминах, мы хотим изучить способы линейных интегрирований, чем мы и займёмся.

Рассмотрим бесконечное множество S (в интересующем нас частном случае это будет $\mathbb{N}$), чтобы интегрировать по нему функции, нам на, до начала ввести на нём меру.

Оказывается, если отказаться от условия счётной аддитивности и ограничиться конечной аддитивностью,

$$m(X \cup Y) + m(X \cap Y) = mX + mY$$

то можно будет придумать такие ненулевые меры, относительно которых будут измеримы на S , мы будем подразумевать измеримость любого подмножества S .

Кроме того, мы будем подразумевать конечность mS , считая всю меру mS положительным действительным числом.

Конструирование конечно-аддитивных мер мы начнём с мер, которые принимают на всевозможных подмножествах лишь два значения: 0 и 1, причём $mS = 1$.

Такую меру можно задать, задав семейство подмножеств $\mathcal{F} = \{X \subseteq S : mX = 0\}$.

Определение фильтра и ультрафильтра (!?!?!!?)

Конечная аддитивность меры и равенство $mS = 1$ тогда могут быть пересформулированы как следующие свойства семейства $\mathcal{F}$:

- (1) $\mathcal{F}$ замкнуто относительно объединения пары множеств;
- (2) $\mathcal{F}$ замкнуто относительно перехода к подмножеству;
- (3) $\mathcal{F}$ не содержит S ;
- (4) для любого $X \subseteq S$ ровно одно из множеств X и $S \setminus X$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Семейства $\mathcal{F} \subset 2^S$, удовлетворяющие первым трём свойствам, будем называть фильтрами, а всем четырём свойствам - ультрафильтрами.

Прежде чем описывать нетривиальные ультрафильтры, опишем тривиальные: для всякого $x \in S$ множество

$$\mathcal{F}_x = \{X \subseteq S : x \notin X\}$$

называется главным ультрафильтром.

Соответствующая мера mX равна единице тогда и только тогда, когда $x \in X$, иначе она равна нулю.

Понятно, что это действительно конечно-аддитивная мера (даже счётно-аддитивная на самом деле).

Например, в рассматриваемом нами примере $(\ell_\infty)'$ она соответствует «базисным» элементам ℓ_1 , то есть последовательностям, в которых один элемент равен единице, а остальные равны нулю.

Problem

149.

докажите, что на конечном множестве S все ультрафильтры главные.

||

Можно рассуждать комбинаторно, а можно использовать развиваемую далее небольшую теорию.

||

Если бы все ультрафильтры (на бесконечном множестве) были главными, то это было бы не очень интересно.

Сейчас мы установим существование менее тривиальных объектов - неглавных ультрафильтров.

Теорема об ультрафильтрах в бесконечном множестве

На бесконечном множестве S существуют неглавные ультрафильтры и каждый фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

Доказательство

Доказательство будет похоже на рассуждения в доказательстве теоремы Тихонова 9.77 с использованием леммы Цорна.

Сначала мы заметим, что максимальный по включению фильтр $\mathcal{F}$ является ультрафильтром, для этого надо проверить свойство (4) для $\mathcal{F}$.

Пусть $X \subseteq S$.

Если $X \in \mathcal{F}$ и $S \setminus X \in \mathcal{F}$, то $S \in \mathcal{F}$ как объединение по свойству (1), что исключено свойством (3).

Тогда мы можем предположить (при необходимости меняя местами X и $S \setminus X$), что $X \notin \mathcal{F}$.

Предположение максимальности означает, что X (вместе со всевозможными конечными объединениями подмножеств X и элементов $\mathcal{F}$) нельзя добавить в $\mathcal{F}$ с сохранением свойства фильтра.

Это означает нарушение свойства (3) при добавлении - найдётся некоторая конечная система $Y_1, \dots, Y_N \in \mathcal{F}$, такая что

$$S = X \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_N$$

Но тогда выполняется

$$S \setminus X \subseteq Y_1 \cup \dots \cup Y_N \rightarrow S \setminus X \in \mathcal{F}$$

то есть свойство (4) для $\mathcal{F}$ выполнено.

Проверка того, что всякий ультрафильтр является максимальным по включению фильтром, проста, мы оставляем её читателю в качестве упражнения.

Посмотрим теперь на цепь фильтров $\mathcal{C}$ и её объединение

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}.$$

Рассмотрим объединение нескольких множеств $X_1, \dots, X_N \in \bigcup \mathcal{C}$, каждое содержалось в каком-то фильтре цепи, $X_i \in \mathcal{F}_i$.

Из свойства цепи мы можем переупорядочить фильтры так, чтобы выполнялось

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N$$

Тогда $X_1, \dots, X_N \in \mathcal{F}_N \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

Следовательно, объединение цепи фильтров $\bigcup \mathcal{C}$ удовлетворяет свойству (1) фильтра.

Также оно тривиально удовлетворяет свойствам (2) и (3) фильтра.

Исходя из описанных свойств и леммы Цорна мы можем заключить, что всякий фильтр содержится в ультрафильтре.

Для доказательства первого утверждения теоремы мы рассмотрим фильтр $\mathcal{F}$, состоящий из конечных подмножеств S .

Если S бесконечно, то $\mathcal{F}$ действительно является фильтром, свойства (1) и (2) очевидны, свойство (3) как раз означает бесконечность S .

Погрузив его в некоторый ультрафильтр $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ мы можем заметить, что $\mathcal{F}'$ не главный, так как объединение его элементов равно S .

Problem

151.

* Постройте пример топологического пространства, в котором не эквивалентны следующие определения частичного предела x_∞ последовательности (x_n) :

1) некоторая подпоследовательность (x_n) стремится к x_∞ ; 2) в каждой окрестности x_∞ лежит бесконечно много элементов последовательности (x_n) .

||

Достаточно в качестве топологического пространства рассматривать $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{N}$ представляет из себя последовательность, а ∞ - её предполагаемую предельную точку.

Возьмите меру m , соответствующую неглавному ультрафильтру, и определите окрестности ∞ как $U \cup \{\infty\}$ Для всех $U \subseteq \mathbb{N}$ с $mU = 1$.

Тогда всякая окрестность ∞ бесконечна и выполняется определение (2).

Проверьте с помощью свойств меры m , что для всякой подпоследовательности (то есть бесконечного подмножества) $X \subseteq \mathbb{N}$ найдётся окрестность U , такая что множество $X \setminus U$ бесконечно, и следовательно ∞ не является пределом подпоследовательности X .

||

Имея в своём распоряжении неглавный ультрафильтр $\mathcal{F} \subset 2^S$ и соответствующую меру m , или любую мругую конечную и конечно-адитивную меру для всех подмножеств S , мы можем определить интеграл конечно-ступенчатой функции $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ очевидным образом, с выполнением свойств линейности и монотонности.

Для произвольной ограниченной f мы можем рассмотреть её приближения ступенчатыми, более конкретно, если f ограничена и $f(S)$ содержится в конечном промежутке Δ , то разбив

$$\Delta = \Delta_1 \sqcup \dots \sqcup \Delta_N$$

с мелко́стью не более $\varepsilon > 0$, мы можем рассмотреть разбиение X на множества $X_i = f^{-1}(\Delta_i)$ и оценить f снизу и сверху конечно-ступенчатыми функциями, определёнными как

$$g(X_i) = \inf \Delta_i, \quad h(X_i) = \sup \Delta_i$$

Разность между ними не более ε , следовательно

$$\int_S h dm - \int_S g dm = \int_S (h - g) dm < \varepsilon \cdot mS,$$

что означает возможность приблизить f конечно-ступенчатыми функциями сколь угодно близко с точки зрения интеграла и определить таким образом её интеграл.

В случае, если конечно-аддитивная мера m соответствует ультрафильтру, это определение интерпретируется следующим образом.

Из множеств X_i в данной конструкции ровно одно будет иметь меру 1, а остальные будут иметь меру 0.

Значение интеграла при этом будет лежать в соответствующем Δ_i .

Разбивая это Δ_i на ещё более мелкие части и рассматривая их прообразы, мы опять увидим, что только один прообраз имеет меру 1 и только на соответствующем ему промежутке лежит значение интеграла.

В ещё более частном случае, когда $S = \mathbb{N}$, мы видим, что интеграл по мере m , соответствующей ультрафильтру $\mathcal{F}$, выбирает один из частичных пределов ограниченной последовательности $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

В таком случае интеграл уместно назвать пределом последовательности по ультрафильтру.

Предел последовательности по ультрафильтру, таким образом, даёт способ выбрать один из частичных пределов последовательности в линейной и монотонной зависимости от последовательности f .

Говоря неформально, в процедуре половинного деления при доказательстве теоремы Больцано-Вейерштрасса 1.95 ультрафильтр выбирает одну из половин исходя из номеров элементов, попадающих в ту или иную половину, предпочитая множество номеров, имеющее меру 1.

Такое «волшебное свойство» показывает, что несмотря на доказанное уже существование ультрафильтра описать хотя бы один из них сравнительно явно не получается.

Problem

152.

Докажите, что если мера m на S соответствует ультрафильтру, то интеграл ограниченных функций $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ по ней обладает не только свойством аддитивности, но и свойством мультипликативности:

$$\int_S f g dm = \left(\int_S f dm \right) \cdot \left(\int_S g dm \right)$$

||

Интерпретируйте неравенство $a < \int_S f dm < b$ как $m\{x \in S : a < f(x) < b\} = 1$.

И заметьте, что в данных условиях пересечение множеств меры 1 обязательно имеет меру 1.

||

????

жестве S (с поточечным умножением) в $\mathbb{R}$.

||

Заметьте, что если функция принимает значения в $\{0, 1\}$, то гомоморфизм отправляет её в 0 или 1.

Считая такие функции характеристическими функциями подмножеств S сравните это с определением ультрафильтра.

Для рассмотрения произвольных функций обратите внимание, что неотрицательная функция является квадратом другой функции и следовательно при гомоморфизме в $\mathbb{R}$ переходит в неотрицательное число; это устанавливает монотонность любого такого гомоморфизма.

||

Problem

154.

Продemonстрируйте, что предел по ультрафильтру может поменяться,

||

Посмотрите, какие числа предпочитает ультрафильтр - чётные или нечётные.

||

Для примера множество целых чисел $\mathbb{Z}$ в качестве S , и покажем, что можно придумать сдвиги.

Например, можно положить

$$\rho X = \lim \frac{|X \cap [-n, n]|}{2n + 1}$$

тра.

При сдвиге X на k элементов выражение под знаком предела меняется не более чем на $2k/(2n + 1)$, что стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$; таким образом устанавливается

Problem

155.

Проверьте конечную аддитивность построенной так меры.

Построенная нами мера принимает значения в диапазоне $[0, 1]$, неформально говоря, это один из способов определить «плотность» подмножества целых чисел.

Соответствующий этой мере интеграл «усредняет» ограниченную функцию $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ инвариантным относительно сдвигов образом, её «среднее значение» будет лежать между её точной нижней и точной верхней гранью.

Problem

156.

Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на группе целочисленных векторов $\mathbb{Z}^n$.

||

Модифицируйте описанную выше конструкцию.

||

Problem

157.

Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на рациональных числах $\mathbb{Q}$.

||

Представьте группу $\mathbb{Q}$ по сложению в виде объединения групп, изоморфных $\mathbb{Z}$, переходя к пределу по ультрафильтру.

||

Problem

158.

* Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на действительных числах $\mathbb{R}$.

||

Рассматривайте $\mathbb{R}$ как $\mathbb{Q}$ -векторное пространство со вполне упорядоченным базисом.

докажите утверждение для его подпространств, соответствующих начальным интервалам базиса, с помощью трансфинитной индукции.

Шаг индукции выполняется либо с помощью предела мер по ультрафильтру на вполне упорядоченном множестве, содержащему все его собственные начальные интервалы, либо с помощью прямого умножения $\mathbb{Q}$ -векторного пространства на $\mathbb{Q}$, что можно свести к умножению на $\mathbb{Z}$ и переходу к пределу по ультрафильтрам, как в предыдущих задачах.

||

Problem

159.

* докажите, что $\mathbb{R}^2$ нельзя разрезать на конечное число частей и сдвинуть их так, чтобы каждая точка покрывалась сдвинутыми частями не менее двух раз.

||

Используйте утверждение, аналогичное утверждению предыдущей задачи, для плоскости вместо прямой.

||

деление сферы на части и их повороты

** докажите, что сферу S^2 можно разрезать на конечное число частей и повернуть их так, чтобы каждая точка покрывалась повернутыми частями не менее двух раз.

||

Используйте результат задачи 10.88, представляя себе свободную группу из двух элементов в виде бесконечного дерева.

||

24.4 On the applications of differential shapes

(пока не до этого, большая тема)

24.4.1 Homotopies and the Katanaev Fundamental Group (???)

Пути

стр. 439.

Гомотопия непрерывных отображений

Фундаментальная группа

Фундаментальная группа и ориентируемость

24.4.2 Covered by Katanaev (??)

Определения и примеры

Фундаментальная группа пространства орбит

463 3

Группа скольжений и существование накрытий

24.4.3 Main and associated bundles according to Katanaev (??)

Главные расслоения

469

Ассоциированные расслоения

478 3

Отображение расслоений**24.5 Inequalities**

(пока не до этого, большая тема)

24.6 Introduction to Convex Analysis

(пока не до этого, большая тема)

24.6.1 "Polyhedra".**эйлерова характеристика****двойственность многогранников (??)**

окатэдр двойственен кубу???

вообще, применение этого раздела в теории групп используется, но этого слишком мало для начала.

классификация правильных многогранников

потом расклассифицирую, хз

24.7 Introduction to set theory

(пока не до этого, большая тема)

25 About Mathematical Analysis Applications**25.1 About category theory****25.2 About some sections of algebra****25.2.1 On the theory of groups****как анализ связан с теорией групп???**

я хз

25.3 Harmonic Analysis Applications**25.3.1 Some physical tasks**

(укажу с формулами то, что мне встречалось)

Разложение движения планет на эпициклы

(чуть историю пропишу, а потом как конкретно это раскладывать? пока не знаю.)

Разложение сигналов и теорема Котельникова

(про неё слышал, сказать нечего пока)

25.3.2 About other harmonic analysis applications

(наверняка приложений много, так что их тут и обсудим. также в записи про это в механике будет указано, как поменять местами Землю и Солнце, почему от этого эпициклы исчезнут. тут указания на это будут.)

25.4 Applications to ordinary life

(отдельный раздел, потому что очень хотел бы их выделить, очень было бы мощно, если бы получилось! Мб на ютубе посмотрю, мб книги читаю.)

25.5 Physical Applications

25.5.1 Mechanical Appendices

25.5.2 Field Theory Applications

25.5.3 Optics Applications

Part X

Tables

(not sure, if it is a good idea to write it, but currently I think that it is more yes then no.
And here will be maybe 400 pages of just properties...)

26 Functions

27 Integrals

28 Sums

Part XI

Appendix

A Good Introduction to Mathematical Analysis

Обсудим подход к матану.

A.1 The Mindset of Professionals

Важно понимать, что этот раздел ничуть не менее важный, чем сама теория математического анализа. Уже в 2022м году студенты МФТИ, ровно как и многих других вузов показали свою полную отбитость от реальности и отсутствие способности развиваться, когда обстоятельства войны заставили их проявить себя. Хотя и учили математический анализ. Чтобы такого позора не повторилось, следует понять глубоко некоторые вещи, которые я тут пишу, и скорее всего некоторые другие.

A.1.1 Some Topics of MA Are Not Applicable. Should We Study Them?

Here, I'll will explain what is known as "understand why you are doing what you choose to do in general and only then think about how to do it".

(an important discussion is here. all Karasev's course is bad because of it. it is important to understand it!)

Study programs can be just bad and mathematicians can just lie about importance of the majority of topics

(I'll elaborate about it later. this is the main point)

And this is the most important thing to understand about mathematical analysis. Books propose to solve problems, but those who earn a lot of money would never be solving them. Those who do physics would avoid focusing on derivations of basic mathematical theorems and learning some not applicable mathematical constructions. Of course, there are some "mathematical physicists", who know mathematics a lot, but usually they don't have any valuable physical results, so they are mathematicians.

That is why a good book on mathematics in a 21st century should not post problems, solution to which would require knowledge from other books. Also, it would not have the majority of the problems unsolved. This would be the case for a short note to accompany the real seminars, so if there are no seminars, these notes are nearly useless. There is no point in reading a book with unsolved problems. The argument "this pushes people to think" does not work, it is an illusion.

Sometimes the best accomplishing the course of calculus is "this is just not needed, I'll learn it later"

(write about that those who do physics well, they don't care much about constructions of mathematical analysis, since it is really just not needed and a waist of time. this is really what happens!)

There are big examples of people who studied a lot of mathematics and then they failed to make basic good decisions in their life. This is a bad approach to mathematics, though educational systems of the 21st century would call such people "the strongest".

I would prefer not to touch the question about which educational systems would show that they are indeed not prepared to mathematics.

(write some stories of bad teachers, who knew very well mathematics, but achieved nothing in their life)

(write that story that russian mathematicians embarrassed themselves at the beginning of war when they manifested that they don't understand anything around them at all)

A.1.2 Once again about the importance of filtering idiots and useless theories

(несколько параграфов про особую важность этого фильтра. Только отсутствие такого фильтра может хватить для того, чтобы ничего не выучить, потому что предмет может казаться только тем, какой препод, а препод может быть идиотом.)

(целый раздел сделал, потому что сложно переоценить важность этого навыка!)

Часто правильный ответ на вопросы в рамках матана - "забей"

Конечно, так не всегда, и если нужно, то обязательно нужно разобраться в теме или методе решения задачи. Однако, чаще всего - теоремы просто не нужны, не стоят вообще того. Даже если ты за 10 минут изучать будешь каждую теорему (что раз в 20 быстрее, чем в реальности для многих теорем), то суммарно уйдут дни на понимание и это скорее всего будут потраченные дни, потому что просто скорее всего не нужны будут темы. Что с математической точки зрения важно и фундаментально, с точки зрения нормального человека - очень не обязательно что важно и стоит внимания.

Можно сделать запись на 40 страниц и пользоваться ей с радостью в физике всё время, а можно написать 500, а то и 5000 страниц по математике и на практике с трудом что-то применять. Почему так? Потому что очень много разных разделов, в каждом - много специфики.

Поэтому "не бегите изучать матан" - вот лучший совет изучающим математику. Думайте о себе сперва, а потом о науке. Иначе это похоже на самоубийство, во имя научной строгости отказываться от прикладных навыков. Для приложений - нужно 1) заниматься в первую очередь приложениями, 2) пара специфических разделов, к которым уже пришел. Вот так и изучается матан на деле. Дальше уже, когда в жизни есть стабильность - окей, можно и додумать всякие общие теоремы, общие свойства, доказательства формул. Саморазвитие через матан - круто, но второстепенно (хотя, возможно, и первостепеннее других многих методов саморазвития).

Отдельно подчеркну, кто продвигает противоположный подход, скорее всего очень вредит обучающим этому совету и не имеет стоящих достижений вне математики. Проверьте это, если не считаете, что так крайне вероятно.

A.1.3 How to distinguish meaningful mathematics from a useless waste of paper?

(потом напишу подробно. это очень важно, потому что начинают всякие рассказывать, что какие-то их теории что-то стоят, хотя на самом деле очевидно, что теоремы или бесполезные, или вообще не содержательные. важно понимать это деление. Отдельно это сложно понять, потому что сама математика по своей изначальной идее бесполезна, находить приложения - уже другое занятие, выходящее за рамки математики и, вообще, им иногда нужно заниматься, а потом уже дальше заниматься чисто математикой.)

Кто не учит таким делениям на хорошую и плохую математику - не учит математике. Важно понимать, что такое есть и такое может быть, и всегда авторы своих теорий будут говорить, что она хорошая, просто люди не готовы к ней. А на самом деле часто в таких

ситуациях нет, теория просто бесполезная, и самое правильное - не тратить время на неё. Тут если сам не поймешь, никто это может и не сказать, можно просто годы потратить впустую, делая в принципе малополезные направления.

Признаки плохой математики

Не будет много посвящено корректности определениям, теоремам об общих свойствах

Конечно, немного пространства текста дать на это - неплохая идея, но фокусироваться на этом - однозначный признак плохой математики.

A.1.4 Physicist's approach to mathematical analysis (!!!??)

(это самое самое главное для занятия им. пропишу самые основы, тут на самом деле нужно подумать.)

Насколько нужно заниматься основами анализа, будучи физиком

(думаю, если нет стабильности в физике, это не нужно вообще, потому что только мешает.)

A.1.5 Effective approach to tasks from the ideological side

(по сути самый важный раздел. уже немного шарю, но не писал.)

Если решаешь дома - проверяю вычисления и результаты в вольфраме

все, прописал, теперь тупить не должен, до этого же постоянно тупил!

И даже часто можно тупо подставить выражение и вычислить его!!! Так и можно сразу проверять ответ!!! И этим следует пользоваться, прежде чем выдать ответ свой!!

Алгоритм типичных поисков ошибок (!!!!)

(тоже типично так и делаю, в итоге плюс куча времени экономится, просто за счет того, что по шагам иду!!!)

О критическом мышлении

(думаю, хотя бы один параграф посвятить этому нужно.)

A.2 Motivation for mathematical analysis

A.2.1 Motivation for mathematical analysis

Анализом на самом деле следует заниматься

Общая мотивация

Математический анализ - это главная запись по математике

Поэтому чаще всего именно к ней и происходит возврат, и именно с нее и изучаются другие разделы.

Математический анализ готовит к УМФ, диффурам, ТФКП, которые по факту и используются

То есть он достаточно редко используется (???)

А вот другие предметы, там на самом деле прописаны все нужные методы, они вообще-то важнее.

Просто они опираются на матан, так что без него не связать их в единую теорию.

Поэтому выгодно всегда качать матан.

Множество приложений в науке

Все разделы физики используют те или иные конструкции, с которыми хорошо бы быть знакомым и иметь целостную их картину.

А вот кстати большой вопрос, насколько нужен анализ с этой точки зрения?

там ведь 95% тем от сюда не нужно.

так что это такая себе мотивация.

Открываются интересные математические задачи математики и на красивых доказательствах, а там - чисто все в удовольствие.

Так что как только проработаю, ими и буду дополнять и тренироваться, чисто все самое крутое в них.

Использование строгого формализма учит знать все детали

Важно понимать каждый шаг и каждый переход

Для профессионализма это обязательно.

сделаю потом эти условия в этой записи про обоснование шагов.

Володя долго рассказывал.

(?) Множество приложений в жизни

Я хз, потому что мб и это не так.

Польза для саморазвития

Четко сформулируем пользу для саморазвития.

Удивительные факты анализа

A.2.2 Motivation for sections of mathematical analysis (??)

(?? тут много вопросов пока что)

Мотивация к основам анализа (??)

(какая мотивация к первому семестру матана??? соберу тут, пока не четко понимаю.)

О том, когда есть необходимость в знании четких определений

(пока не уверен, когда, но однажды они нужны.)

Когда какой-то задрот какие-то контрпримеры выдает.

Также в этом есть глубокий смысл, которые неизвестен очень многим, кто не касался науки: если твое утверждение имеет контрпример, то нужно его сформулировать иначе. Именно поэтому мы и формулируем всё четко.

Мотивация изучать последовательности (???)

(пока не уверен)

Мотивация учиться искать пределы

(укажу применения)

Пределы используются в радиусе сходимости в формуле Коши-Адамара $R^{-1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Таким образом, любые задачи сведутся к пределу.

Также есть применения в физике: элементарная веревка, свисающая с края стола, решается через вычисление пределов.

С помощью последовательностей можно определять множества чисел

(потом мб напишу про эти определения, там отдельная теория про это. и там как раз последовательности нужны.)

Работа с операторами (??)

(такое просто слышал, но не больше, потом мб укажу, почему там они нужны.)

Мотивация изучать наивную теорию множеств (???)

(тоже пропишу, пока тоже не уверен)

Мотивация к основам интегрального исчисления (??)

потом соберу, когад овладею ими.

возможности, которые дают нам интегралы

как бы их много, но вот выделим отдельно в качестве мотивации

роль теории меры в теории интеграла

(?)

если ничего особенного не делаешь, то меру знать не нужно.

а вот если вопросы сложные, то тут све прямо падает на теорию меры.

Мотивация к основам функционального анализа

(потом пропишу, пока разобрать бы эти разделы, пока только выгрузил, да и никогда они мне не заходили ещё. вот, скоро пересмотрю.)

использование понятий функционального анализа

то есть зачем он в обычных задачах нужен?

да вот вроде бы там дельта функции, и разные функционалы, так что с ними новые понятия нужны.

функциональный анализ дает четкие определения объектов

зачем?

A.3 Effective solution of Matan's tasks

A.3.1 Algorithm for taking or analyzing an integral

Обсудим алгоритм, которым я и пользуюсь чуть что, если есть задача про интеграл.

Поиск подхода для взятия интеграла (!)

(самый важный параграф)

О том, какие интегралы берутся простыми методами (!?!??)

(потому что иначе - табличные интегралы и чисто по таблицам их и делаем или через спецфункции ищем. не по элементарным задачам!)

Общая последовательность взятия интегралов

Именно в рамках неё всегда я и беру интегралы.

0) Внимательно спиши условия и удостоверься, правильно ли понял задачу

Если это не понимаешь, то тебя покарает однажды вселенная! Тут тупить и недооценивать это место нельзя!

1) быстро накидай решение типичными методами, проверь, решается ли принципиально

выше четко их прописал

2) аккуратно и внимательно реализуй сработавшие методы

Важно писать не жалея места, чтобы не ошибиться, ибо иначе много времени можно пустую потратить.

- очень внимательно раскрывать всегда скобки! Постоянно в этом ошибки.
- если есть тригонометрия - отдельное внимание тоже на знаки!

3) Проверь решение

Если интеграл зависит от параметров, посмотри на размерности! Это самый простой способ проверить, верное ли решение.

Если получил простое выражение, возьми производную! Это уже на элементарных вещах позволит не затупить! Без этого ошибки более вероятны.

Вбей в вольфрам. На все случаи жизни, помню.

4) Упрости ответ

Это важный шаг, прежде чем оставить интеграл! Если было много замен, то важно не забывать это сделать.

Там если косинус от арктангенса, то это через корень выражается (!!!!)

О странностях, которых не должно быть

Для полноты напишу это, по сути места, в которых я когда-то тупил. Только актуальное оставлю.

Константа должна именно прибавляться всегда, в отличие от диффузов.

A.3.2 Algorithm for calculating or analyzing a series

(потом допишу, меньше нужного опыта в этом)

Алгоритм поиска суммы

1) Определи тип ряда и в рамках этого и действуй, не обсчитываясь!

(пока больше нет планов, еще когда-то порешаю про это!)

- Аккуратно менять индексы суммирования, чтобы свести сумму к уже известной.
Это типичное дело, и тут просто нужно внимательно все сделать. Проследить, чтобы сумма началась именно с индекса 1. Для этого можно некоторые члены отдельно вытаскивать из суммы.
Если под суммой стоит какая-то функция от известной, то сумма ее не будет просто модификацией известной функции! В тупую тут замены переменных не сделать.
- Если суммы конечные, то они спокойно разделяются, и по отдельности суммируются. Если они бесконечные, то разделяем только в случае схождения их (??? теорему в теории пропишу.)
-

A.4 The Mindset of Professionals: Advanced Topics

A.4.1 Mathematical thinking

О том, насколько полезно заумничать в очевидном (????)

(физтех уверен, что нужно, Спиноза тоже, я же не совсем, потому что польза этого сомнительная.)

О заблуждениях про математическое мышление

С опытом становится понятно, что многие люди совершенно неверно понимают пользу анализа, так что приведем самые типичные неверные соображения, чтобы их видеть и не ошибаться.

(с опытом впишу, пока мало что сказать могу, потому что это не важно помнить)

A.4.2 Ways to guess the main ideas from almost zero

незаменимая часть нормального понимания предмета.

A.4.3 A way to prove typical theorems (?!)

(всякие темы 1го семестра. я хз, как их доказывать, так и не понял эти ходы. тут пропишу их!! с ними же и доказывается всё, что в первом разделе следующей части)

A.4.4 What is the essence of matan?

(!! тут многое может иначе казаться, так что лучше написать.)

О взгляде, что основы очевидны

(вот у меня такой взгляд, обсудим позже, насколько он верный. пока матан мне не зашел, так что скорее всего не верный. посмотрим.)

Зачем нужно учить очевидные теоремы, и когда изучение их предлагается специально во вред

(!!?? это важные очень вещи, которые я в какой-то степени понимаю. потом напишу.)

Те, кто уверенно требуют от студентов знания вызубренных теорем, молчали в тряпочку, когда в их стране развивался фашистский режим

И чего стоит их математика и их подход? Ничего. Не стоит верить таким людям, что их основы матанализа важны.

(раскрою потом, важная часть подхода к анализу.)

Об отношении к тривиальным задачам

(тут напишу, зачем доказывать, что $2 > 1$ и всякие такие хрени, которые на первом курсе вставляются нам. обсужу этот вопрос с кем-то)

A.4.5 About successful mathematicians

Про успешных математиков, с которых можно брать пример интересные очень люди, интересные их взгляды на все, пропишу тут основы. помню, про кого речь, много плюсов и минусов. важно тоже про них некоторые характерные черты видеть.

A.4.6 Features of effective study of analysis

Существует много вариантов, как изучать анализ, и домыслов, что нужно делать, а что нет. По сути эти мелочи влияют как раз на весь путь изучающего, хотя это можно и не заметить. Поэтому соберем самый главный опыт, чтобы им пользоваться.

очень важно помнить определения, и что почему вводится

ибо постоянно к этому возврат.

и куча аналогичных определений, чтобы не запутаться, нужно с определениями разобраться

четкость определений закрепляется контрпримерами, которые хорошо запоминаются

так что тут полно будет контрпримеров.

особенно слушая разные стремные утверждения тех, кто не понимает матан, можно понять важность проработанных основ

относись к этому как к простому, ибо по сути так все и есть, если уметь информацию обрабатывать.

типичные ошибки при изучении анализа

Существует множество ошибок, которые можно наделать, изучая предмет, так что по итогу окажется, что время потрачено, а пользы куда менее, чем ожидалось

(соберу с опытом)

Отсутствие развития как личность

Да, развиваться как личность тяжело, но если на это забыть, то толку от анализа не будет. Лучше уж быть нормальным парнем, который не знает анализ, чем дебилом, который разобрался в темах.

Собственно, для меня это очевидно.

A.4.7 Matan jokes

Тупые формулы

$$\int_0^T dt = \underbrace{\quad}_0 dt$$

$$e^i \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^i}{i!}$$

A.5 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

A.6 Literature

A.6.1 Main

Основная обучающая

[1] Карасев Отдельные темы анализа

Много теории, много углублений. Однако многие темы плохо раскрыты, так что её совершенно не хватает, чтобы полностью понимать математический анализ. Плюс задач крайне мало и непонятно, как их решать. Книга написана не умеющим писать понятно, я очень много переписывал иначе и переформулировал то, что там написано. Поэтому в ней рыться нужно точно уж в следующую очередь. На первом месте поставил, потому что пока не знаю более компактную и профессиональную книгу.

[2] Зорич Математический анализ I

По идее тоже очень хорошая должна быть, посмотрим.

[2] Зорич Математический анализ II

Думаю, невозможно понять многие темы, не почитав внимательно Зорича. Потом буду добавлять его, книга большая, хотя и прекрасная, важнее начать с чего-то меньшего. так что мб буду догружать, мб нет, тут по потребности. матан не мой профилирующий предмет, так что может быть крайне не скоро займусь этой книгой.

[3] (МУ) Мэтьюз Уокер Математические методы физики

Мб даже первой поставлю, все по делу, интересные задачи и нужные методы, пока просто не думал про них. Что-то пока совсем мало читал это.

Приближённые методы аналитических вычислений И.С. Бурмистров, И.В. Колоколов, В.В. Лебедев, М.А. Скворцов, М.В. Фейгельман, Я.В. Фоминов и др.

Много интересных задач и примеров разобрано, много указаний на физику, так что отличные для начала лекции.

[4] Иванов Г. Е. Лекции по Матану

Скучные лекции, однако коротко написаны основные утверждения. Главное - не особо фокусироваться на них, относиться как к конспекту сути не стараться это полностью выучивать, ибо это скучная трата времени. Так, иногда детали можно посмотреть, вот в таком формате книга может быть очень полезной.

Main books with examples of solved problems

Кудрявцев и др. т. 1
Хороший задачник.

Кудрявцев и др. т. 2
Хороший задачник.

Кудрявцев и др. т. 3
Хороший задачник.

Hussein Ahmad Raad Integral: Higher Education
A great book with a lot of examples, very very interesting one.

Разные методички по типичным темам

Мигдал Крайнов Качественные методы в квантовой теории
Очень крутая книга на 150 страниц, которая очень многому учит, так что обязательная для понимания происходящего. В 1ю часть многое такое добавлю!

[5] Богачев Теория меры
Много математики, ни разу не было потребности в ней, мб когда-то потом доучу, но не факт.

[6] Gusev Lectures on measure theory
For me, it was a very useless course, but for those who work in measure theory, maybe it can be a great introduction. It is in Russian.

Иванова С.В. Несобственные интегралы
Хорошая методичка, немного добавил, потом мб еще добавлю, порешаю задачи на это. Почти как типичные задачи 1го курса, за часа 3 полностью прописал бы структуру для них. пока не до этого.

A.6.2 Professional Literature

Основная профессиональная

[7] Олмстед, Д. Гелбаум, Б. Контрпримеры в анализе
Некоторые контрпримеры добавил, потому что это круто и интересно. Потом постепенно и многое добавлю, развиваться нужно, чтобы быть на уровне контрпримеров.

Ф. М. Морс и г. Фешбах Методы теоретической физики
Большая, очень полезная книга. Она больше для УМФ и вообще для применений, однако если есть какой-то вопрос - посмотреть в ней хорошее дело.

Books that teach how to deal with complicated series and integrals

Ali Shadhar Olaikhan An Introduction to The Harmonic Series And Logarithmic Integrals
Second Edition
Great book, but with rather special integrals which are rare to be seen.

Daniel D. Bonar Michael J. Khoury, Jr. Real Infinite Series
Another really great book with many problems and solutions.

Другая обучающая по углубленным темам

[8] Катанаев

Большая книга, очень много всего, не думаю, что особо в ней есть смысл засиживаться первые года 3 учебы, мб разве что какие-то отдельные темы по желанию можно досматривать.

Youtube Channels with examples for practice

thefeynmantechnique, <https://www.youtube.com/@thefeynmantechnique/videos> (2024)
Great channel with many examples.

Gamma Digamma https://www.youtube.com/@Gamma_Digamma/videos (2024)
Great channel with some advanced examples.

Michael Penn (2024)
Great channel with a very very big number of examples.

Другая профессиональная

[9] Bailey, David and Borwein, Jonathan (Jon) and Kapoor, Vishaal and Weisstein, Eric
Ten Problems in Experimental Mathematics
Genius article with examples of evaluation of sums.

Про табличные интегралы

И. С. Градштейн, И. М. Рыжик Таблицы интегралов, рядов, произведений
Более 1100 страниц крайне сложных формул, некоторые добавил, но вообще, выйти на их уровень - отдельная большая тренировка, не до этого.
Paul F. Byrd, Morris D. Friedman Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists
Скорее всего тоже полезная книга, не до нее.

Популярная

[10] М. Айгнер, Г. Циглер Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней
Крутая книга для понимания приложений и классных доказательств.
[11] Т. Тао Структура и случайность
Крутая книга, но польза от нее просто в том, чтобы развлечься, расширить кругозор, это уже после основной учебы.
Конкретная математика
Давно было в планах тоже ее почитать, когда-то это сделаю, пока нужно обычные темы заставить, на это тоже уйдет пара недель.
[12] Что такое число?
Бесполезная небольшая книга, где разные интересные утверждения сделаны.

Selected articles about properties of functions and series

[13] Horst Alzer and Dimitri Karayannakis and H.M. Srivastava Series representations for some mathematical constants
A little article with very nontrivial sums. Maybe this topic is for x100 more pages...

(and there are thousands more good articles, but they are for special notes)

Статьи с различными теоремами

(пока до такого не доходил)

A.6.3 The subjects are as follows

По основам теории меры и интеграла

Гусев лекции по теории меры
очень связано с анализом, так что по нему введение в меру и интеграл потом добавлю
Богачев теория меры
если буду изучать - добавлю немного.

По основам геометрических методов

тут то, что для других записей очень сильно использовалось, а тут - просто отдельные конструкции.

[8] Катанаев М О Геометрические методы в математической физике

не совсем матан, но много схожих тем, так что много из него взято, а также круто, что отсылки к другим темам даны, так что по нему прорабатываю связи с другими разделами. сперва основы создам, потом займусь. ! мб к стати потом очень многое добавлю, посмотрим...

По функциональному анализу

[14]

По темам близким к дискретной математике

[15] Звонкин, Ландо графы на поверхностях и их приложения

пока забил, но может быть, много дополнений будет. хотя основные дополнения будут к дискретному анализу, конечно.

A.7 Introduction

A.7.1 Mathematical Analysis Overview

что вообще в нем происходит?

математический анализ в двух словах

Обсудим, что из себя представляет предмет наиболее кратко, выделяя самую суть.

появление Предмет в нашей картине мира

один подход

второй подход

один большой раздел

такой-то набор следствий

Какие теоремы анализа, часто используются в приложениях? (?!?!?!?!?)

(пока не занимался приложениями, однако думаю, таких тоже много теорем, так что позже пропишу)

мотивация изучать метрические пространства (!?!?!?!?)

а я так и не понял, зачем

топология - неразрывная часть математики, так что на ней важно остановиться.

обзор применений топологии в математике

зачем она?

нужно нормально понимать..

там типа непрерывность через нее вводим.

и что???

Мягкий и жесткий анализы (???)

(Т. Тао почитаю, у него хорошие указания были, до которых я не добрался)

Наиболее прикладные темы анализа

обсудим, какие темы на самом деле самые важные тут.

(вот это чисто с опытом придет, пока я тупой слишком)

title

обзор теоретических подходов

такие-то есть, такие полезные, такие - нет.

Результаты математического анализа

Создание интегрального исчисления

(пока так и не понял, как создавать его, однако это и не важно, нужно решать задачи. тут нужно теорию перепройти полна, не до этого вообще.)

обзор подходов и сравнения

Применения математического анализа физике

Обзор дальнейших развитий математического анализа

A.7.2 Overview of sections of mathematical analysis (!!!)

(потом пропишу. очень важно в двух словах описать, что там происходит, потому что происходит на самом деле многое.)

Обзор теории последовательностей (??)

обзор методов работы с последовательностями

там что-то типа топологию вводим.

потом напишу общий взгляд на методы.

последовательности элементов различной природы и их особенности

какие бывают.

числовые, функциональные.

что там особенного?

(?? где про это теория, уже где-то ведь выгружена???)

Обзор интегрального исчисления (??)

Обзор интеграла Лебега (!!!)

(про это часто возникает вопрос, что там вообще есть и насколько что важно?? пропишу потом обязательно, это важно для ориентирования!)

Обзор наивной топологии (??)

Обзор теории рядов (??)

A.7.3 Links with other mathematical sciences

Математический анализ - основа множества других предметов, связи с которыми обсудим в этом разделе.

(постепенно буду вписывать, пока эти связи слабо понимаю)

Связь с функциональным анализом

(думаю пока, что это самая главная связь)

Связь с теорией меры

Мера Лебега и Римана

Связь с дифференциальной геометрией

Описание кривых

Связь с алгеброй

(потом укажу)

A.7.4 Application of analysis in physics (??)

(так никогда четко и не видел, позже разберусь)

A.7.5 Description of record

Здесь собраны основы всего, что я знаю по математическому анализу, а также освещены приложения.

В некоторых главах будут повторяться теоремы, утверждения, я считаю что так удобнее, чем писать один раз, а потом ссылаться.

особенно много тут контрпримеров (будет) записано, потому что они самые интересные, сама теория без них особенно не вызывает сложностей.

Notations

- $\mathbb{C}$ The set of complex numbers
- $\mathbb{R}$ The set of real numbers
- $\mathbb{Z}$ The set of integers ($\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$)
- $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ The set of non-negative integers ($\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\}$)
- $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ The set of non-positive integers ($\mathbb{Z}_{\leq 0} = \{\dots, -2, -1, 0\}$)
- $\mathbb{Z}^+$ The set of positive integers ($\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$)
- $\mathbb{Z}^-$ The set of negative integers ($\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$)
- $\Re(z)$ The real part of a complex number z
- $\Im(z)$ The imaginary part of a complex number z
- $n!$ n factorial

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^n k, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$\binom{a}{b}$ The binomial coefficient

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$$

$\binom{2n}{n}$ The central binomial coefficient

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Γ The gamma function

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re(z) > 0$$

B The beta function

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad \Re(a), \Re(b) > 0$$

The Riemann zeta function

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^z}, \quad \Re(z) > 1$$

η The Dirichlet eta function

$$\eta(z) = 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \cdots = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}, \quad \Re(z) > 0$$

β The Dirichlet beta function

$$\beta(z) = 1 - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \cdots = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^z}, \quad \Re(z) > 0$$

Li_n The Polylogarithm function

$$\text{Li}_n(z) = z + \frac{z^2}{2^n} + \frac{z^3}{3^n} + \cdots = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^n}, \quad |z| \leq 1$$

H_n The n -th harmonic number

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$H_n^{(a)}$ The n -th generalized harmonic number of order a

$$H_n^{(a)} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots + \frac{1}{n^a} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}, \quad a, n \in \mathbb{Z}^+$$

$\bar{H}_n$ The n -th skew harmonic number

$$\bar{H}_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$\bar{H}_n^{(a)}$ The n -th generalized skew harmonic number of order a

$$\bar{H}_n^{(a)} = 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^a}, \quad a, n \in \mathbb{Z}^+$$

ψ

The Digamma function

$$\psi(n) = \frac{d}{dn} \ln(\Gamma(n)) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$

$\psi^{(a)}$

The Polygamma function

$$\psi^{(a)}(n) = \frac{d^a}{dn^a} \psi(n) = \frac{d^{a+1}}{dn^{a+1}} \ln(\Gamma(n))$$

$\ln$

The natural logarithm ($\log_e$)

e

The base of the natural logarithmⁿ

γ

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 2.7182818284590...$$

The Euler-Mascheroni constant

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n)) = 0.5772156649015...$$

G

The Catalan's constant

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 0.915965594177...$$

E_n

The Euler number

B_n

The Bernoulli number

описание глав и разделов

описание записи в целом

Я удалял многие тривиальные задачи, потому что оставлять их - сделать запись тупой и бесполезной, уважающие себя люди прямо совсем тривиальные задачи никогда не будут решать. Это важное преимущество моей записи в сравнении со многими книгами. И поэтому многие задачи отсутствуют, я просто удалил их из-за их тривиальности.

Я помечал “хорошая задача” хорошие задачи, чтобы иметь их под рукой.

глава про функции

глава про интегральное исчисление

глава про математическую теорию поля

Очень важная глава, очень часто в физике используется.

Так что для математической подготовки для физики она необходима.

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

Типичные математические обозначения

(соберу их постепенно)

Через $R(x_1; x_2; \dots; x_n)$ будем обозначать функцию, рациональную относительно каждой из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Например, $\frac{x^2 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{1 + x^3}} = R(x; \sqrt{x}; \sqrt{1 + x^3})$.

$C^*[-\pi; \pi]$ - пространство непрерывных функций, с совпадающими на ее концах значениями.

В некоторых интегралах вводятся обозначения:

$$\Delta \equiv \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}, k' \equiv \sqrt{1 - k^2}$$

Обозначения функций

(пока по Градштейну Рыжику, потом мб свои введу, чтобы везде были одинаковые)

Обозначения отсылок к задачам

К - Кудрявцев

ГР - Градштейн, Рыжик справочник.

BF - Берд Фридман

A.7.6 Brief historical overview

(потом напишу, пока не актуально, отдельно много про историю не так уж важно писать, подробно - запись по истории науки.)

A.8 Matan Puzzles for different occasions

(сбалансирую и наберу потом по интересности. тут раздел чисто на то, чтобы часто спрашивать про него и болтать с теми или иными людьми. в названии раздела это не отражено пока, помню, что смысл в этом.)

(еще чуть доработаю каталог - и начну собирать этот раздел, пока слабый каталог.)

A.8.1 Interesting questions for beginners in mathematics**О доказательстве основной теоремы алгебры**

вроде не такой уж скучный вопрос. пока хз.

О доказательстве теоремы Больцано-Вейерштрасса

(хз зачем это и как нужна она пока что. но мб прикольно будет про это поболтать.)

A.8.2 Interesting questions for beginners who study a lot of mathematics**A.8.3 Interesting questions for physicists****A.8.4 Math Puzzles**

(пока до сих пор не нашел, что там из матана именно в быту нужно. какие они?? отдельно в эту сторону почитать нужно.)

A.8.5 Interesting different tasks

Ряд $\frac{1}{1^5} + \frac{1}{1^5+2^5} + \frac{1}{1^5+2^5+3^5} + \dots$

(типичный ряд, который можно задать, потому что он крутой)

Простые производные

Производная от x^x

(научусь интересно про это рассказывать также!)

Простые ряды

Ряд $\sum \frac{1}{(2k)!}$

и это ряд косеканса 1.

(?? можно задуматься, как до этого догадаться вообще?)

Ряд $\sum \frac{1}{(2k)!}$

(?? хз)

Некоторые преобразования Фурье

Преобразование Фурье косинуса

(тоже максимально типичный вопрос)

Преобразование Фурье дельта-функции

Преобразование Фурье функции Хевисайда

A.8.6 Interesting integrals

(тут то, что интересно решать, многое - классическое.)

Объем n-мерного шара

Объем n-мерного шара

с помощью теоремы Сарда можно это посчитать.

(??)

а еще обычным методом

(??)

Интеграл Дирихле

Вычислить интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

(уже есть решение, пойму - скопирую сюда суть.)

A.8.7 Interesting counterexamples

соберем самые интересные контрпримеры.

Вопросы о построении интеграла

Методы интегрирования - одни из важнейших методы в матане, так что и задачек на них всегда хватает полным полно. Соберем их, потому что наиболее вероятно, что их и буду задавать.

Пример неинтегрируемой по Риману, но интегрируемой по Лебегу функции

всё хотел это узнать давно!!

Что за мера в континуальном интеграле

Типичный вопрос о континуальном интеграле.

A.8.8 Interesting details of theorems and deep questions for discussion

Если есть желание свернуть диалог в сторону задачек по анализу, то можно воспользоваться вопросами из этого раздела. В целом, скорее так не нужно делать, но иногда может зайти.

(ниже укажу также, насколько целесообразно про данную тему говорить. скорее, конечно, не нужно, тем не менее, когда она зайдет - укажу.)

Какие есть признаки сходимости несобственных интегралов (!!!!!)

(уже их прописал, соберу тут ответ на этот вопрос тезисно!!)

Докажите формулу Ньютона-Лейбница

Очень тупая задача, в то же время показывает много уровень.
(потренируюсь - потом пропишу)

Избранные заумные ряды (????)

Избранные заумные интегралы (????)

(их полно в сборниках, тут лишь самые центральные укажу, лишь их хотя бы когда-то по идее есть смысл спрашивать, и то скорее просто по приколу)

$$\text{Интеграл} \int_y^b \sqrt{\frac{a-t}{(b-t)(t-c)}} dt$$

Типичный пример усложненного интеграла от радикалов.
(я хз как решать, к эллиптическим функциям свести только и остается.)

$$\text{Интеграл} \int_0^1 x^{\mu-1} \sin(ax) dx = \frac{-1}{2\mu} [F_1 F_1(\mu; \mu+1; ba) - {}_1F_1(\mu; \mu+1; -ia)]$$

(честно, я далеко не на таком уровне, чтобы решать такое. мб когда-то посмотрю, пока просто знаю, что только таблицей это решается.)

A.8.9 Mathematics Questions to Test Theorem Level

(тут то, что даю, чтобы посмотреть, знает чел вообще матан или нет?)

A.8.10 Questions to check the level of theoremine

(тут то, что даю, чтобы посмотреть, знает чел или нет? в частности, много интегралов будет)

A.8.11 Useless, strict questions to students to make them hate you

(see exams from MIPT, there are many of such)

A.8.12 Puzzles for mastering the most typical concepts

Допустим, видим человека, который в принципе хотел бы понять суть, опишем, какие в какой последовательности будем задавать, чтобы в типичном случае ему было бы интереснее въезжать. В частности это могут быть младшие студенты или редко школьники.

(подробнее - это же в самой записи будет в соответствующих разделах написано. здесь только суть укажу, потому что не так уж часто применяться будет этот раздел.)

Для освоения математики школьного уровня

Последовательность вопросов для въезда в понятие интеграла

Последовательность вопросов для въезда в понятие предела

Последовательность вопросов для въезда в понятие производной

Последовательность вопросов для въезда в понятие рядов

Для освоения математики уровня теормина

Для освоения математики дошкольного уровня

(про это тоже часто может быть вопрос)

B Bibliography

References

- [1] Карасев, Р. Н.: *Конспект лекций по математическому анализу*. 2020.
- [2] A., Zorich V.: *Mathematical analysis II*. Springer, 2016.
- [3] Мэтьюз, Д. and Уокер, Р.: *Математические методы физики*. Атомиздат, 1972, ISBN 9785458366694. <https://books.google.be/books?id=x9T8AgAAQBAJ>.
- [4] Г.Е., Иванов: *Лекции по Матану*, ч. 1, 2. 2018.
- [5] Богачев, В.И.: *Основы теории меры*. 2006.
- [6] Н.А., Гусев: *Заметки к курсу Мера и интеграл Лебега*. 2019.
- [7] Олмстед, Д. Гелбаум, Б.: *Контрпримеры в анализе*. 2010.
- [8] М.О., Katanaev: *Geometrical methods in mathematical physics*. arXiv:1311.0733, 2013.
- [9] Bailey, David, Borwein, Jonathan (Jon), Kapoor, Vishaal, and Weisstein, Eric: *Ten problems in experimental mathematics*. American Mathematical Monthly, 113:31, February 2006.
- [10] М. Айгнер, Г. Циглер: *Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней*. Мир, page 253, 2006.
- [11] Т., Тао: *Структура и случайность*. М.: МЦНМО, 2013.
- [12] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И. Шабунин М.И.: *Сборник задач по математическому анализу*. 2003.
- [13] Alzer, Horst, Karayannakis, Dimitri, and Srivastava, H.M.: *Series representations for some mathematical constants*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 320(1):145–162, 2006, ISSN 0022-247X. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X05005883>.
- [14] Ю., Пирковский А.: *Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. Учебное пособие*. 2010.
- [15] Звонкин А. К., Ландо С. К.: *Графы на поверхностях и их приложения*. 2010.
- [16] Borwein, J.M., Glasser, M.L., McPhedran, R.C., Wan, J.G., and Zucker, I.J.: *Lattice Sums Then and Now*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2013, ISBN 9781107435391. <https://books.google.bg/books?id=gamyAAAAQBAJ>.
- [17] Linton, C.: *Lattice sums for the helmholtz equation*. and Applied Mathematics, 52:630–674, January 2010.

References from Real Infinite Series by Bonar, Khoury

1. Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Wiley, 1968, pp. 61, 406.
2. Richard L. Crocker, Pythagorean mathematics and music, Journal of Aesthetics and Art Criticism, 22 (1963-64), 189-198 and 325-335.
3. William Dunham, The Bernoullis and the harmonic series, College Mathematics Journal, 18 (1987), 18-23.
4. Joseph L. Ercolano, Remarks on the neglected mean, Mathematics Teacher, 67 (1973), 253-255.

5. Howard Eves, *A Survey of Geometry*, Revised Ed., Allyn & Bacon, 1972, p. 83.
6. Edward Grant, ed., *A Source Book in Medieval Science*, Harvard University Press, 1974, p. 135.
7. Thomas L. Heath, *A History of Greek Mathematics* (vol. 1), Dover reprint 1981, p. 85.
8. Alfred S. Posamentier, The neglected mean, *School Science and Mathematics*, 77 (1977), 339-344.
9. B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, Wiley, 1963, pp. 149-159.

References from Series representations for some mathematical constants by Alzer, Karayannakis, Srivastava (2005)

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Appl. Math. Ser., vol. 55, National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964.
- [2] B.N. Al-Saqabi, S.L. Kalla, H.M. Srivastava, A certain family of infinite series associated with digamma functions, *J. Math. Anal. Appl.* 159 (1991) 361-372.
- [3] H. Alzer, B. Fuglede, Normalized binomial mid-coefficients and power means, *J. Number Theory* (in press).
- [4] R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, in: *Journées Arithmétiques de Luminy*, Colloq. Internat. CNRS, Centre Univ. Luminy, Luminy, 1978, Soc. Math. France, Paris, 1979, pp. 11-13, also in *Astérisque* 61.
- [5] J. Aular de Durán, S.L. Kalla, H.M. Srivastava, Fractional calculus and the sums of certain families of infinite series, *J. Math. Anal. Appl.* 190 (1995) 738-754.
- [6] T. Bang, B. Fuglede, No two quotients of normalized binomial mid-coefficients are equal, *J. Number Theory* 35 (1990) 345-349.
- [7] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part I*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [8] D. Borwein, J.M. Borwein, On an intriguing integral and some series related to $\zeta(4)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995) 1191-1198.
- [9] J.M. Borwein, P.B. Borwein, *Pi and the AGM*, Wiley, New York, 1987.
- [10] J.M. Borwein, R. Girgensohn, Evaluation of triple Euler sums, *Electron. J. Combin.* 3 (1996) 1-27 (electronic).
- [11] P. Borwein, The amazing number π , *Nieuw Arch. Wisk. (Ser. 5)* 1 (2000) 254-258.
- [12] J. Choi, H.M. Srivastava, Certain classes of series involving the zeta function, *J. Math. Anal. Appl.* 91 (1999) 91-117.
- [13] S.W. Coffman, An infinite series with harmonic numbers (Problem 1240), *Math. Mag.* 60 (1987) 118-119.
- [14] P.J. De Doelder, On some series containing $\psi(x) - \psi(y)$ and $(\psi(x) - \psi(y))^2$ for certain values of x and y , *J. Comput. Appl. Math.* 37 (1991) 125-141.
- [15] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, vol. I, McGrawHill, New York, Toronto and London, 1953.
- [16] S.R. Finch, *Mathematical Constants*, *Encyclopedia Math. Appl.*, vol. 94, Cambridge Univ. Press, Cambridge, London and New York, 2003, <http://www.mathsoft.com/mathresources/constants/wellknown/>.
- [17] E.R. Hansen, *A Table of Series and Products*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [18] D. Karayannakis, I.S. Xezonakis, An algorithm for the evaluation of the gamma function and ramifications, Preprint 2005.
- [19] K.S. Kölbig, The polygamma function $\psi^{(k)}(x)$ for $x = \frac{1}{4}$ and $x = \frac{3}{4}$, *J. Comput. Appl. Math.* 75 (1996) 43-46.
- [20] D.H. Lehmer, Interesting series involving the central binomial coefficient, *Amer. Math. Monthly* 92 (1995) 449-457.
- [21] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Third enlarged ed., Springer-Verlag, New York, 1966.
- [22] K. Nishimoto, H.M. Srivastava, Certain classes of infinite series summable by means of fractional calculus, *J. College Engrg. Nihon Univ. Ser. B* 30 (1989) 97-106.
- [23] A.P. Prudnikov, Yu.A. Bryčkov, O.I. Maričev, *Integrals and Series (Supplementary Chapters)*, Nauka, Moscow, 1986 (in Russian); English translation: *Integrals and Series*, vol.

II: Special Functions, Gordon and Breach, New York, 1988.

[24] Th.M. Rassias, H.M. Srivastava, Some classes of infinite series associated with the Riemann zeta and polygamma functions and generalized harmonic numbers, *Appl. Math. Comput.* 131 (2002) 593-605.

[25] N.J.A. Sloane, The on-line encyclopedia of integer sequences, *Notices Amer. Math. Soc.* 50 (2003) 912-915, <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.

[26] H.M. Srivastava, A simple algorithm for the evaluation of a class of generalized hypergeometric series, *Stud. Appl. Math.* 86 (1992) 79-86.

[27] H.M. Srivastava, J. Choi, *Series Associated with the Zeta and Related Functions*, Kluwer Academic, Dordrecht, Boston and London, 2001.

[28] E.W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Second ed., Chapman and Hall (CRC Press), Boca Raton, FL, 2003.

[29] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis: An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions; With an Account of the Principal Transcendental Functions*, Fourth ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, London and New York, 1927.

[30] I.J. Zucker, On the series $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k}^{-1} k^{-n}$ and related sums, *J. Number Theory* 20 (1985) 92-102.